TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

PAR H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Felix qui potuit rerum cognoscere causas.
(VIRGILE.)

TOME SECOND.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1870

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE GÉNÉRALE.

NOTES.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

QUATRIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE GÉNÉRALE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE.

I. — Principe de d'Alembert. — Équations du mouvement.

211. Vers 1743 d'Alembert fit connaître un principe à l'aide duquel les questions de mouvement se ramenaient à des questions de Statique; ce principe n'est pas indispensable et ses conséquences peuvent être démontrées directement, mais il fournit dans tous les cas une méthode sûre et uniforme. Voici comment on peut l'énoncer.

Il y a équilibre à chaque instant entre les forces qui agissent sur un système en mouvement et les forces d'inertie des différents points de ce système.

En effet, la force d'inertie d'un point étant une force égale et directement opposée à celle qui produit le mouvement de ce point, elle maintiendrait ce point en équilibre si elle agissait réellement sur lui à un instant donné; chaque point du système serait donc en équilibre si les forces d'inertie venaient à agir, et, par suite, le système lui-même serait en équilibre.

212. Voici maintenant comment on peut déduire de ce principe les formules du mouvement d'un système quelconque.

Soient m la masse, x, y, z les coordonnées d'un point quelconque d'un système en mouvement, X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la résultante des forces tant intérieures qu'extérieures agissant sur le point m, dt l'élément du temps,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

seront les composantes de la force d'inertie. Si l'on exprime alors à l'aide du principe des vitesses virtuelles qu'il y a équilibre entre les forces X, Y, Z et les forces d'inertie, on aura (n° 75)

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum\Bigg[\left(\mathrm{X} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\mathrm{Y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y& \\ + \left(\mathrm{Z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\Bigg] &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation permet de déterminer toutes les circonstances du mouvement; en effet, les quantités δx, δy, δz étant arbitraires, en égalant leurs coefficients à zéro on aura autant d'équations que de coordonnées, permettant de calculer chacune de ces coordonnées en fonction du temps.

Les corps dont on étudie le mouvement sont souvent assujettis à certaines liaisons; ces liaisons font naître des forces dont l'évaluation directe serait presque toujours très-difficile, mais on tourne la difficulté à l'aide d'un artifice déjà employé en Statique.

213. Puisqu'il y a équilibre entre les forces d'inertie et les forces réellement agissantes, la somme des travaux virtuels des forces d'inertie et des forces réellement agissantes, abstraction faite des forces produites par les liaisons, est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons (nº 70).

Soient alors

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots, \quad L_k = 0 \tag{2}$$

les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des divers points du système en vertu des liaisons, l'équation (1) aura encore lieu; seulement, dans le calcul de X, Y, Z, on n'aura plus à tenir compte des forces produites par les liaisons, pourvu que δx, δy, δz soient choisis de manière à satisfaire aux équations

$$\delta L_1 = 0, \quad \delta L_2 = 0, \ldots, \quad \delta L_k = 0.$$

Si l'on développe ces équations, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \left(\dfrac{dL_1}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL_1}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL_1}{dz}\,\delta z\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{3}$$

en ayant soin de traiter le temps comme une constante dans les différentiations relatives à la caractéristique δ. Soit n le nombre des points du système; si entre ces k équations et l'équation (1) on élimine k variations, les $3n - k$ variations restantes seront arbitraires. En égalant leurs coefficients à zéro, on aura $3n - k$ équations, qui, jointes aux k équations (2), permettront de calculer chacune des coordonnées en fonction du temps.

214. Pour effectuer les calculs, on peut employer la méthode des multiplicateurs. Multiplions la première équation (3) par λ_1, la seconde par $\lambda_2, \ldots$, et ajoutons toutes ces équations avec (1), nous aurons

$$\sum \left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dL_1}{dx} + \ldots + \lambda_k \frac{dL_k}{dx} \right) \delta x \right.$$
$$+ \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dL_1}{dy} + \ldots + \lambda_k \frac{dL_k}{dy} \right) \delta y$$
$$\left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dL_1}{dz} + \ldots + \lambda_k \frac{dL_k}{dz} \right) \delta z \right] = 0.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont restés jusqu'ici indéterminés; on peut les déterminer en égalant à zéro les coefficients des k premières variations. Ces variations se trouvent ainsi éliminées; il ne reste plus alors qu'à égaler à zéro les coefficients des $3n - k$ variations restantes, en y remplaçant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ par leurs valeurs déduites des k premières équations. Ceci revient à éliminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entre les équations suivantes, obtenues en égalant à zéro les coefficients de toutes les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$:

$$(4) \quad \begin{cases} X_1 - m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{dL_k}{dx_1} = 0, \\ X_2 - m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{dL_k}{dx_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ Y_1 - m\dfrac{d^2y_1}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dy_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{dL_k}{dy_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Lorsque l'on aura éliminé $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ entre ces équations, on aura $3n - k$ équations qui, jointes aux k équations de liaison

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots, \quad L_k = 0,$$

permettront de déterminer $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ en fonction du temps. Les équations (4) pourront donc être considérées commes les équations du mouvement; conformément à ce que l'on a vu en Statique, $\lambda_1 \frac{dL_1}{dx_1}$, $\lambda_1 \frac{dL_1}{dy_1}$, $\lambda_1 \frac{dL_1}{dz_1}$ désigneront les composantes de la force provenant de la liaison $L_1 = 0$ et agissant sur le point (x_1, y_1, z_1), etc.

215. Remarque. — Le déplacement effectif que prend un corps n'est pas toujours un déplacement compatible avec les liaisons à l'époque t. En effet, en désignant par δ un déplacement compatible avec les liaisons, l'équation de liaison $L = 0$ devra être satisfaite à l'époque t quand on changera x en $x + \delta x$, y en $y + \delta y, \ldots$, en sorte que l'on a

$$\delta L = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \left(\frac{dL}{dx}\,\delta x + \frac{dL}{dy}\,\delta y + \frac{dL}{dz}\,\delta z \right) = 0.$$

Au contraire, le déplacement effectif que prend un corps dans le temps dt étant désigné par un d, l'équation $L = 0$ devra être encore satisfaite quand on change t en $t + dt$, x en $x + dx$, y en $y + dy, \ldots$, en sorte que l'on a

$$dL = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dL}{dt}\,dt + \sum \left(\frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz \right) = 0.$$

$\delta x, \delta y, \ldots$ et $dx, dy, \ldots$ ne satisfont donc pas en général aux mêmes équations, et l'on ne pourra prendre $dx = \delta x$, $dy = \delta y, \ldots$ que si l'on a

$$\frac{dL_1}{dt} = 0, \quad \frac{dL_2}{dt} = 0, \ldots,$$

c'est-à-dire que si les liaisons ne contiennent pas le temps explicitement.

II. — Équations du mouvement avec des coordonnées quelconques. — Formules de Lagrange.

216. Lagrange a donné, dans sa *Mécanique analytique*, une méthode fort ingénieuse pour former les équations du mouvement avec des coordonnées quelconques; nous allons développer son analyse.

Nous avons trouvé, avec des coordonnées rectangulaires (212),

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \Bigg[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-\mathrm{X}\right)\delta x \\ &\qquad + \left(m\frac{d^2y}{dt^2}-\mathrm{Y}\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2}-\mathrm{Z}\right)\delta z\Bigg] = 0; \end{aligned} \right.$$

chacune des quantités qui entre dans cette formule a un sens bien connu. Concevons maintenant qu'aux coordonnées $x, y, z, \ldots$ on en substitue d'autres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ liées à $x, y, z, \ldots$ d'une manière quelconque, mais de telle sorte cependant que l'on puisse toujours exprimer $x, y, z, \ldots$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$; les variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ne seront pas forcément au nombre de $3n$, comme les coordonnées $x, y, z, \ldots$; il vaudra même mieux, dans la plupart des cas, prendre $k < 3n$, de sorte que, par le choix même des variables q, les liaisons se trouvent satisfaites d'elles-mêmes. Quelques exemples feront saisir ma pensée.

Si un point est assujetti à rester sur la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on pourra choisir deux variables q_1, q_2 définies par les formules

$$x = r \sin q_1 \cos q_2, \quad y = r \sin q_1 \sin q_2, \quad z = r \cos q_1;$$

la liaison sera alors constamment satisfaite.

Si l'on avait posé

$$x = a \sin q_1 \cos q_2, \quad y = b \sin q_1 \sin q_2, \quad z = c \cos q_1,$$

le point (x, y, z) aurait été assujetti à rester sur l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On voit donc qu'avec un choix convenable de variables, les liaisons pourront être satisfaites d'elles-mêmes. Le plus souvent, les formules de transformation ne seront pas aussi nettement indiquées ; mais on pourra toujours conserver une partie des variables $x, y, z, \ldots$, et calculer les autres en fonction de celles que l'on conserve, à l'aide des équations de liaison. Les équations de liaison elles-mêmes pourront alors être considérées comme les formules de transformation de coordonnées qui satisfont identiquement aux liaisons.

217. Revenons maintenant à l'équation (1), et posons

$$(2) \qquad \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \delta U.$$

En général, $\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$ ne sera pas la variation exacte d'une fonction U. Nous ferons cependant usage de la notation abrégée δU pour désigner cette quantité, en nous rappelant que sa définition se trouve donnée par la formule (2) ; ainsi U tout seul ne représentera généralement rien.

La formule (1) s'écrira alors

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \delta U,$$

ou bien

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sum m\left(\dfrac{dx}{dt}\,\delta x + \dfrac{dy}{dt}\,\delta y + \dfrac{dz}{dt}\,\delta z\right) \\ \quad -\sum m\left(\dfrac{dx}{dt}\,\delta\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}\,\delta\,\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt}\,\delta\,\dfrac{dz}{dt}\right) = \delta \mathrm{U}. \end{cases}$$

Posons

$$\sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{T},$$

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \ldots;$$

d'où

$$\mathrm{T} = \sum \frac{m}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$m x' = \frac{d\mathrm{T}}{dx'}, \quad m y' = \frac{d\mathrm{T}}{dy'}, \ldots;$$

on aura

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right) \\ &\quad = \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx'}\,\delta x + \frac{d\mathrm{T}}{dy'}\,\delta y + \frac{d\mathrm{T}}{dz'}\,\delta z\right), \end{aligned}$$

$$\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta\,\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\delta\,\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\delta\,\frac{dz}{dt}\right) = \delta \mathrm{T},$$

et, par suite, (3) donnera

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx'}\,\delta x + \frac{d\mathrm{T}}{dy'}\,dy + \frac{d\mathrm{T}}{dz'}\,\delta z\right) - \delta \mathrm{T} = \delta \mathrm{U}.$$

Opérons maintenant le changement de variables. T était une fonction de $x', y', z', \ldots$; or $x, y, z, \ldots$ sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots$, en sorte que, en désignant par

$q'_1, q'_2, \ldots$ les dérivées $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots,$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \left(\frac{dx}{dt}\right) + \sum \frac{dx}{dq} q', \\ y' &= \left(\frac{dy}{dt}\right) + \sum \frac{dy}{dq} q', \quad z' = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \sum \frac{dz}{dq} q'. \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs de $x', y', z', \ldots$ dans T, cette quantité devient fonction de $q_1, q_2, \ldots, q'_1, q'_2, \ldots,$ et l'on a

$$(6)\qquad \delta T = \sum \frac{dT}{dq} \delta q + \sum \frac{dT}{dq'} \delta q'.$$

On a ensuite

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \left(\frac{dT}{dx'} \delta x + \frac{dT}{dy'} \delta y + \frac{dT}{dz'} \delta z\right) \\ &\quad = \sum\sum \left(\frac{dT}{dx'} \frac{dx}{dq} + \frac{dT}{dy'} \frac{dy}{dq} + \frac{dT}{dz'} \frac{dz}{dq}\right) \delta q; \end{aligned}\right.$$

mais des équations (5), on tire

$$\frac{dx'}{dq'} = \frac{dx}{dq}, \quad \frac{dy'}{dq'} = \frac{dy}{dq}, \quad \frac{dz'}{dq'} = \frac{dz}{dq};$$

en sorte que l'équation (A) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\sum \left(\frac{dT}{dx'} \delta x + \frac{dT}{dy'} \delta y + \frac{dT}{dz'} \delta z\right) \\ &\quad = \sum\sum \left(\frac{dT}{dx'} \frac{dx'}{dq'} + \frac{dT}{dy'} \frac{dy'}{dq'} + \frac{dT}{dz'} \frac{dz'}{dq'}\right) \delta q, \end{aligned}$$

ou bien

$$(7)\quad \sum \left(\frac{dT}{dx'} \delta x + \frac{dT}{dy'} \delta y + \frac{dT}{dz'} \delta z\right) = \sum \frac{dT}{dq'} \delta q;$$

enfin la quantité δU, qui représente le travail virtuel des forces, pourra se mettre sous la forme

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots. \tag{8}$$

En vertu des formules (6), (7), (8), l'équation (4) prend la forme

$$\frac{d}{dt}\sum \frac{dT}{dq'}\delta q - \sum \frac{dT}{dq}\delta q - \sum \frac{dT}{dq'}\delta q' = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2, \ldots,$$

ou bien

$$\sum \left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq} - Q\right)\delta q = 0.$$

S'il n'existe pas de liaisons entre $q_1, q_2, \ldots$, les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ seront arbitraires, et cette équation se décomposera en plusieurs autres, qui sont celles du mouvement, exprimées à l'aide des coordonnées $q_1, q_2, \ldots$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{dT}{dq'_1} - \dfrac{dT}{dq_1} - Q_1 = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dT}{dq'_2} - \dfrac{dT}{dq_2} - Q_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{9}$$

S'il existe des liaisons entre $q_1, q_2, \ldots$, on traitera la question de la même manière qu'avec les coordonnées $x, y, z, \ldots$.

Telles sont les formules données par Lagrange pour le changement de variable. Afin d'en bien faire comprendre le sens, nous allons chercher les équations du mouvement en coordonnées polaires.

III. — Équations du mouvement en coordonnées polaires.

218. Si l'on pose

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta,$$

les équations de Lagrange prennent la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} - R = 0, \\ &\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'} - \frac{dT}{d\theta} - \Theta = 0, \\ &\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\psi'} - \frac{dT}{d\psi} - \Psi = 0, \end{aligned} \right.$$

R, Θ, Ψ étant définis par la formule

$$\delta U = \Sigma (R\, \delta r + \Theta\, d\theta + \Psi\, \delta\psi).$$

Or T est la somme des demi-forces vives du système; ds désignant alors l'arc décrit par le point (x, y, z) dans le temps dt, on a

$$T = \sum \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2},$$

c'est-à-dire

$$T = \sum \frac{m}{2}\frac{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2}{dt^2}.$$

On déduit de là

$$\frac{dT}{dr} = mr\theta'^2 + mr\sin^2\theta\,\psi'^2, \quad \frac{dT}{d\theta} = mr^2 \sin\theta\cos\theta\,\psi'^2, \quad \frac{dT}{d\psi} = 0,$$

$$\frac{dT}{dr'} = mr', \quad \frac{dT}{d\theta'} = mr^2\theta', \quad \frac{dT}{d\psi'} = mr^2\sin^2\theta\,\psi';$$

et, par suite, les équations (1) deviennent

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mr\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - R = 0,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - mr^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \Theta = 0,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right) - \Psi = 0.$$

Si l'on fait $\psi =$ const., on a les formules qui conviennent aux points assujettis à se mouvoir dans un plan :

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - R = 0,$$

$$mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2mr\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \Theta = 0.$$

IV. — Intégration des équations du mouvement.

219. On n'a pas réussi jusqu'à présent à intégrer d'une manière générale les équations différentielles du mouvement; quoi qu'il en soit, on a pu en déduire certaines intégrales qui constituent de véritables principes, et dont la connaissance suffit pour résoudre un grand nombre de questions. Ces intégrales étaient déjà connues bien avant que d'Alembert et Lagrange eussent fourni les moyens d'écrire les équations différentielles du mouvement.

Nous allons d'abord faire le calcul de ces intégrales, après quoi nous essayerons de faire connaître des méthodes d'intégration dont le succès ne devra jamais être considéré comme assuré à l'avance, mais qui, dans un grand nombre de cas, faciliteront considérablement le travail.

L'historique des découvertes relatives aux principes dont nous venons de parler se trouve exposé en détail au commencement de la seconde Partie (Dynamique) de la *Mécanique analytique* de Lagrange (page 207 de la 3e édition).

V. — Principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.

220. Si, dans l'équation générale du mouvement donnée § I

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

on prend les δy et les δz égaux à zéro, et les δx égaux entre eux, il viendra

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \sum X = \sum m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Or si l'on désigne par a, b, c les coordonnées du centre de gravité du système, on aura (112)

$$a\Sigma m = \Sigma mx,$$

et, par suite,

$$\frac{d^2a}{dt^2}\sum m = \sum m\frac{d^2x}{dt^2};$$

la formule (1) devient alors

$$\Sigma X = \frac{d^2a}{dt^2}\Sigma m.$$

Or ΣX ne contient pas les forces intérieures qui sont égales deux à deux et de sens contraires, et qui, par suite, disparaissent quand on fait la somme de leurs projections; l'équation précédente est celle du mouvement du centre de gravité projeté sur l'axe des x; on aurait d'une manière analogue les deux autres équations du mouvement de ce point. Ces équations montrent que *le centre de gravité se meut comme si toutes les forces extérieures lui étaient directement appliquées et comme si sa masse était égale à la masse totale du système.*

C'est dans ce théorème que consiste le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, principe fécond et qui simplifie beaucoup l'étude du mouvement des systèmes.

Veut-on, par exemple, étudier le mouvement d'une bombe? On aura une première idée de ce mouvement en réunissant les forces qui la sollicitent à son centre de gravité; si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, on voit que ce centre de gravité décrit une parabole. Que la bombe vienne à éclater, le centre de gravité des éclats continue la parabole jusqu'à ce que l'un d'eux vienne toucher le sol, car alors une nouvelle force extérieure, la résistance du sol, est intervenue. Quant au mouvement des éclats, on l'obtiendra en composant le mouvement qu'ils prendraient si la bombe partait du repos, soustraite à l'action de la pesanteur, avec un mouvement égal à celui du centre de gravité.

VI. — Principe des quantités de mouvement projetées.

221. Si, dans l'équation

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right] = 0,$$

on fait

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = dt, \quad \delta y_1 = \delta y_2 = \ldots = 0, \quad \delta z_1 = \delta z_2 = \ldots = 0,$$

il vient

$$\sum \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dt = 0,$$

et, dans cette équation, les forces intérieures, égales deux à deux et de sens contraire ont disparu, puisqu'elles ne figurent que par la somme de leurs projections. En intégrant la formule précédente entre les limites o et θ, on a

$$(1) \qquad \sum \int_0^\theta X\, dt = \sum m \left(\frac{dx}{dt} \right)_0^\theta.$$

L'intégrale $\int_0^\theta F\, dt$ d'une force F relative au temps θ pendant lequel elle agit est ce que l'on appelle l'*impulsion de la force* F pendant le temps θ. Le produit de la masse d'un point par sa vitesse est ce que l'on appelle la *quantité de mouvement* de ce point.

On représente souvent la quantité de mouvement d'un point au moyen d'une droite portée à partir du point dans le sens de la vitesse, et numériquement égale à la quantité de mouvement.

L'équation (1) permet alors d'énoncer la proposition suivante :

La somme des impulsions des forces extérieures d'un système quelconque projetées sur un axe est égale à la quantité dont varie la somme des projections des quantités de mouvement de tous les points du système pendant tout le temps de l'impulsion.

VII. — Principe des moments des quantités de mouvement et des aires.

222. Reprenons la formule

$$\sum\left[\left(\mathrm{X}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(\mathrm{Y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y\right.$$
$$\left.+\left(\mathrm{Z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0;$$

donnons au système un mouvement virtuel de rotation autour de l'axe des x; en d'autres termes, posons (*)

$$\delta x=0,\quad \delta y=-z\,\delta\alpha,\quad \delta z=y\,\delta\alpha,$$

$\delta\alpha$ désignant le déplacement angulaire. Nous aurons

$$(1)\qquad \sum m\left(\frac{d^2z}{dt^2}y-\frac{d^2y}{dt^2}z\right)=\sum \mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z.$$

Les forces intérieures n'entrent pas dans cette équation, car le second membre contient la somme des moments de toutes les forces par rapport à l'axe des x. Or les forces intérieures étant égales deux à deux et directement opposées, la somme de leurs moments doit être nulle.

L'équation (1) exprime que la somme des moments des forces d'inertie de tous les points du système pris par rapport à l'axe des z est égale à la somme des moments des forces extérieures pris par rapport au même axe.

(*) Si l'on pose $x=\text{const.}$, $y=r\cos\alpha$, $z=r\sin\alpha$, et si l'on suppose que r reste constant, le corps ne pourra prendre qu'un déplacement de rotation; alors on aura

$$\delta x=0,\quad \delta y=-r\sin\alpha\,\delta\alpha,\quad \delta z=r\cos\alpha\,\delta\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\delta x=0,\quad \delta y=-z\,\delta\alpha,\qquad \delta z=y\,\delta\alpha;$$

ce sont les formules du texte.

L'équation (1) peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) = \sum(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z).$$

Cette équation exprime que, dans tout système en mouvement, la dérivée de la somme des moments des quantités de mouvement pris par rapport à un axe quelconque est égale à la somme des moments des forces extérieures pris par rapport au même axe.

S'il existe un certain axe pour lequel la somme des moments des forces extérieures soit nulle, on aura, en prenant cet axe pour axe des x,

$$\sum m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) = \text{const.} = a;$$

prenons des coordonnées polaires dans le plan des yz, et posons

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$

nous aurons, au lieu de l'équation précédente,

$$\sum mr^2\frac{d\theta}{dt} = a,$$

et, en intégrant,

$$\sum\int_{t_0}^{t} mr^2\,d\theta = a(t - t_0).$$

Cette équation montre que *la somme des aires décrites par la projection du rayon vecteur de chaque point multipliées respectivement par les masses de chacun de ces points varie proportionnellement au temps.*

C'est dans ce théorème que consiste le *principe des aires.*

223. Si nous supposons que les forces se réduisent à une seule passant par l'origine des coordonnées, ou, plus

généralement, si nous supposons que la somme des moments des forces prises par rapport aux trois axes de coordonnées soit nulle, et si nous désignons par λ, μ, ν les aires décrites par les projections du point (x, y, z) sur chacun des plans coordonnés, nous aurons

$$\Sigma m\lambda = a(t - t_0),$$
$$\Sigma m\mu = b(t - t_0),$$
$$\Sigma m\nu = c(t - t_0),$$

a, b, c désignant des constantes; soient alors α, β, γ les angles que fait un plan quelconque passant par l'origine avec les plans coordonnés, ω l'aire décrite par les projections du point (x, y, z) sur ce plan, on aura

$$\Sigma m\omega = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)(t - t_0),$$

et en posant

$$a = G\cos u, \quad b = G\cos v, \quad c = G\cos w,$$

on aura

$$\Sigma m\omega = G(\cos u\cos\alpha + \cos v\cos\beta + \cos w\cos\gamma)(t - t_0),$$

ou

$$\Sigma m\omega = G\cos i(t - t_0),$$

i désignant l'angle que fait la direction (u, v, w) avec la direction (α, β, γ). Si l'on fait $i = 0$, $\Sigma m\omega$ sera maximum, et l'on aura

$$\Sigma m\omega = G(t - t_0) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,(t - t_0).$$

Le plan auquel on est ainsi conduit porte le nom de *plan du maximum des aires*.

Si nous revenons à l'équation

$$\sum m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) = \text{const.},$$

qui a lieu lorsque la somme des moments des forces extérieures est nulle par rapport à l'axe des x, nous voyons qu'elle exprime que, si l'on convient de regarder les quantités de mouvement comme des forces, *le couple résultant des quantités de mouvement projeté sur l'axe des x est constant.*

Si les forces extérieures passent toutes par l'origine, ou, en général, si leurs moments par rapport à un axe quelconque passant par l'origine ont une somme nulle, les projections du couple résultant des quantités de mouvement seront constantes sur tous les axes possibles, et, par suite, on peut énoncer le théorème suivant, qui équivaut à celui des aires :

224. Théorème. — *Lorsque, dans un système en mouvement, les forces extérieures passent par un point fixe, le couple résultant des quantités de mouvement transportées au point fixe est constant pendant toute la durée du mouvement.*

Les projections du couple résultant des quantités de mouvement sont précisément les quantités que nous avons appelées tout à l'heure a, b, c, en sorte que

$$G = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

représente l'axe du couple en question ; les angles que ce couple fait avec les axes sont u, v, w ; or (u, v, w) est précisément la direction normale au plan du maximum des aires. Donc :

Théorème. — *Le plan du maximum des aires est précisément le plan du couple résultant des quantités de mouvement.*

Le plan du maximum des aires porte aussi le nom de *plan invariable.*

VIII. — Principe des forces vives.

225. Nous pouvons, dans la formule générale du mouvement

$$(1)\quad \sum\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right]=0,$$

prendre les déplacements δx, δy, δz,... égaux aux déplacements dx, dy, dz,... effectifs du système pendant le temps dt; il vient alors

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \sum(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz),$$

ou bien, en intégrant de t_0 à t,

$$(2)\quad \sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]_{t_0}^{t} = \sum\int_{t_0}^{t}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz).$$

Le premier membre de cette formule est la variation que la somme des demi-forces vives de tous les points du système éprouve dans le temps $(t-t_0)$; le second membre est la somme des travaux totaux de toutes les forces du système effectués dans le même temps $t-t_0$. (*Voir* n° 175.)

La somme des forces vives de tous les points d'un système en mouvement est ce que l'on appelle la *force vive* de ce système. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *La demi-variation de la force vive d'un système quelconque en mouvement pendant le temps $t - t_0$ est égale à la somme des travaux totaux de toutes les forces qui agissent sur le système pendant le même temps.*

Et quand nous disons de *toutes les forces*, nous voulons dire des forces intérieures et extérieures, des forces directement appliquées et des forces de liaison.

Si le système est à liaisons, si ses liaisons ne dépendent pas du temps, le déplacement effectif dx, dy, dz,... sera encore compatible avec les liaisons (n° 215), et les calculs précédents seront encore justes si, dans X, Y, Z,... on supprime les forces dues aux liaisons, forces dont les travaux sont alors nuls; donc :

226. THÉORÈME II. — *La demi-variation de la force vive pendant un temps donné pour un système dont les liaisons ne varient pas avec le temps est égale à la somme des travaux totaux des forces qui agissent sur le système dans le même temps, abstraction faite des forces qui produisent les liaisons.*

Le travail des forces intérieures est de la forme $\Sigma\int f dr$, f désignant une des forces intérieures, r la distance de deux points entre lesquels elle se manifeste (67); si donc le système est un solide, dr sera nul; $\Sigma\int f dr$ sera donc nul également; si le système est un liquide parfait, f est nul. $\Sigma\int f dr$ l'est donc encore dans ce cas; donc :

227. THÉORÈME III. — *La demi-variation de la force vive d'un corps solide ou liquide en mouvement est égale à la somme des travaux des forces extérieures appliquées à ce corps.*

C'est dans ces théorèmes que consiste le *principe des forces vives*.

Il nous reste à examiner un cas particulier important, celui dans lequel la quantité

$$\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$$

est la différentielle exacte d'une fonction U de x, y,.... Dans ce cas, en désignant par v et v_0 les vitesses du point m aux époques t et t_0, l'équation (2) donne

$$\sum \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \mathrm{U} - (\mathrm{U})_0.$$

La force vive reprendra alors la même valeur toutes les fois que le système repassera par les mêmes positions. Il y a cependant des exceptions à cette règle; si, en effet, la fonction U est multiforme, on conçoit que x, y, z,... puissent reprendre les mêmes valeurs sans qu'il en soit de même pour U.

Si l'on avait toujours $\mathrm{U} = 0$, c'est-à-dire si les forces extérieures et intérieures se faisaient équilibre, la force vive resterait constante. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation des forces vives*.

Toute la théorie des machines est fondée sur le principe des forces vives; son importance est donc très-grande. Aussi nous allons en donner une seconde démonstration, indépendante, quant à la forme, du principe de d'Alembert et du principe des vitesses virtuelles.

227. Soient m la masse d'un point en mouvement, ds l'élément de chemin parcouru, F la résultante des forces qui sollicitent ce point; on a

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds),$$

par suite,

$$\sum m\frac{d^2s}{dt^2}ds = \Sigma\mathrm{F}\,ds(\cos\mathrm{F}, ds);$$

on en conclut en intégrant

$$\sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2\right] = \int_{t_0}^{t} \Sigma \mathrm{F}\, ds \cos(\mathrm{F}, ds).$$

Cette équation est la traduction analytique du théorème des forces vives.

IX. — Sur le travail des forces.

Pour appliquer le théorème des forces vives, il est nécessaire de savoir évaluer le travail total des forces. Nous allons montrer sur quelques exemples comment on peut calculer ce travail.

228. Travail de la pesanteur sur un système de corps. — *Le travail de la pesanteur sur un système quelconque est égal au produit du poids total du système par la quantité dont le centre de gravité s'est déplacé verticalement, en sorte que le travail est le même que si toute la masse du système se trouvait concentrée en son centre de gravité.*

En effet, soient m la masse de l'un des points du système, dz la quantité dont il se déplace verticalement dans le temps dt, on aura pour expression du travail élémentaire effectué dans le temps dt

$$\Sigma mg\,dz = d\Sigma mgz.$$

Mais en désignant par ζ l'ordonnée verticale du centre de gravité comptée à partir d'un plan horizontal quelconque, on a (112)

$$\Sigma mgz = \mathrm{M}g\zeta,$$

M désignant la masse totale du système. Le travail élémentaire cherché est donc égal à $Mg\,d\zeta$, et le travail total est alors

$$Mg\int d\zeta = Mg(\zeta - \zeta_0),$$

$\zeta - \zeta_0$ désignant la quantité dont s'est élevé ou abaissé le centre de gravité. Le théorème en question est donc démontré.

229. Travail de l'attraction. — Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer le travail total de l'attraction d'un point fixe ou mobile, sur un système de corps. Soient

a, b, c les coordonnées du point attirant,

x, y, z les coordonnées d'un point attiré,

m sa masse,

$mf(r)$ l'attraction qu'exerce le point (a, b, c) à la distance r sur la masse m.

Si l'on désigne par r la distance des points (a, b, c) et (x, y, z), la force qui sollicite ce dernier point sera $mf(r)$, et ses composantes seront $mf(r)\dfrac{a-x}{r}$, $mf(r)\dfrac{b-y}{r}$, $mf(r)\dfrac{c-z}{r}$. Le travail effectif de cette force dans le temps dt sera

$$(1) \qquad \frac{mf(r)}{r}[(a-x)\,dx + (b-y)\,dy + (c-z)\,dz].$$

Si le point (a, b, c) est fixe, cette expression se réduit à

$$mf(r)\,dr;$$

par suite, le travail total de l'attraction sur tout le système sera

$$\Sigma\int mf(r)\,dr.$$

Si le point (a, b, c) n'est pas fixe, on remplacera, dans (1), a, b, c par leurs valeurs exprimées en fonctions du temps;

on remplacera également x, y, z par leurs valeurs, et l'intégration fera connaître le travail total de l'attraction.

230. Travail de la détente d'un gaz. — Proposons-nous d'évaluer le travail produit par la détente d'un gaz enfermé dans un corps de pompe sur un piston mobile dans ce corps de pompe.

Soit V le volume du gaz à l'époque t: si l'on admet la loi de Mariotte, la pression exercée par le gaz sur le piston se réduira à une force unique égale à $\frac{k}{V}$, k désignant une constante. Le travail élémentaire de cette force sera $\frac{k}{V}\,di$, di désignant la quantité dont le piston a marché dans le temps dt, mais en désignant par ω la section du corps de pompe, di est la hauteur d'un cylindre de volume dV et de base ω, en sorte que $di = \frac{dV}{\omega}$; le travail élémentaire de la détente est donc $\frac{k}{\omega}\frac{dV}{V}$. En intégrant cette expression entre les limites V_0 et V, on aura le travail total développé par la détente du gaz passant du volume V_0 au volume V; on trouve ainsi $\frac{k}{\omega}\log\frac{V}{V_0}$.

§ X. — Sur le choc des corps. — Théorème de Carnot.

231. On donne le nom de *percussion* ou de *force instantanée* à une force agissant avec une grande intensité, mais pendant un temps très-court. (Ce temps sera nécessairement fini, car une force ne peut produire d'effet que si elle agit pendant un temps fini.)

Nous admettrons que l'on peut toujours négliger l'action des autres forces devant celle des percussions. Enfin nous admettrons qu'une percussion conserve une direction constante pendant tout le temps de son action.

Une percussion F sera mesurée par son impulsion $\int_0^\theta F\,dt$ prise pendant tout le temps θ pendant lequel elle agit. Elle sera représentée géométriquement par une droite égale à son impulsion, et comptée sur sa direction.

Il existe entre les percussions et les quantités de mouvement des relations analogues à celles qui existent entre les forces réellement agissantes et les forces d'inertie.

Ainsi, par exemple :

232. Théorème. — *Si l'on convient de composer les percussions et les quantités de mouvement comme les forces, on pourra dire qu'il y a équilibre à chaque instant entre : 1° les percussions; 2° les quantités de mouvement antérieures à l'action des percussions, et 3° les quantités de mouvement postérieures à l'action des percussions prises en sens contraire.*

Si, en effet, on intègre entre les limites o et θ les équations générales du mouvement

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

θ désignant le temps très-court pendant lequel agissent les percussions, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left[\int_0^\theta X\,dt - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^\theta\right]dx \\ +&\sum\left[\int_0^\theta Y\,dt - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0^\theta\right]dy \\ +&\sum\left[\int_0^\theta Z\,dt - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0^\theta\right]dz = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans l'intégration, nous avons supposé δx, δy, δz,... invariables avec le temps, ceci n'est pas rigoureux, mais comme l'on suppose θ très-petit, on peut admettre que x, y, z,... n'ont pas sensiblement varié, en sorte que δx peut, sans grande erreur, être placé en dehors du signe $\int$. Si l'on désigne alors par a, b, c les composantes de la vitesse du point m à l'époque o, et par a', b', c' ses composantes à l'époque θ, si de plus on désigne par P, Q, R les projections sur les axes de la percussion qui agit en m, l'équation (1) pourra s'écrire, en négligeant les forces ordinaires devant les percussions,

$$\Sigma[(\mathrm{P} + ma - ma')\delta x + (\mathrm{Q} + mb - mb')\delta y + (\mathrm{R} + mc - mc')\delta z] = 0.$$

Cette équation est bien la traduction analytique du théorème que nous avions énoncé.

Supposons que les percussions proviennent d'un changement brusque opéré dans les liaisons, et supposons les nouvelles liaisons indépendantes du temps, on pourra prendre $\delta x = a'dt$, $\delta y = b'dt$, $\delta z = c'dt$, et comme les déplacements effectifs seront compatibles avec les liaisons (215) on pourra ne pas tenir compte des percussions qui sont les forces introduites par les nouvelles liaisons. L'équation précédente se réduira alors à

$$\Sigma m[(a - a')a' + (b - b')b' + (c - c')c'] = 0,$$

ou bien à

$$\Sigma m[aa' - a'^2 + bb' - b'^2 + cc' - c'^2] = 0,$$

ou enfin, en remplaçant aa' par

$$-\frac{1}{2}(a - a')^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a'^2}{2} \ldots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma m[(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2] + \tfrac{1}{2}\Sigma m(a^2 + b^2 + c^2) - \tfrac{1}{2}\Sigma m(a'^2 + b'^2 + c'^2) = 0.$$

Si l'on désigne par $\Sigma m v^2$ la force vive avant le changement de liaisons, par $\Sigma m v'^2$ la force vive après le changement, et par $\Sigma m u^2$ *la force vive perdue*, c'est-à-dire la force vive due aux vitesses qu'il faudrait composer avec les vitesses v pour obtenir les vitesses v', la formule précédente s'écrira

$$\Sigma m v'^2 = \Sigma m v^2 - \Sigma m u^2,$$

donc

$$\Sigma m v'^2 < \Sigma m v^2,$$

et l'on peut dire que :

233. Théorème. — *Un changement de liaisons brusque dans un système en mouvement occasionne une perte de force vive qui est égale à la force vive due aux vitesses perdues.*

Lorsque deux corps animés d'une certaine vitesse viennent à se rencontrer, leurs vitesses changent brusquement; ces corps se désorganisent souvent, leurs liaisons peuvent être modifiées, etc. On donne à ce phénomène, bien connu du reste de tout le monde, le nom de *choc*.

Lorsque deux corps solides dépourvus d'élasticité viennent à se choquer, ils se déforment, mais en vertu de leur non-élasticité, ils conservent leur déformation; ainsi les liaisons ont été brusquement changées, puisque chaque solide est transformé en un nouveau solide différent du premier. Nous nous trouvons donc dans le cas du théorème précédent, et l'on peut dire que :

234. Théorème de Carnot. — *Lorsque deux solides dépourvus d'élasticité se choquent, il y a perte de force vive, et la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues.*

Dans le choc des corps parfaitement élastiques, au contraire, la force vive ne se perd pas, car sa variation est égale à la somme des travaux des forces tant intérieures qu'extérieures. Si nous négligeons les forces extérieures, on voit que le travail des forces intérieures est nul, car si l'on considère deux points situés à la distance r l'un de l'autre, si l'on désigne par f leur action mutuelle, le travail des forces élastiques sera $\Sigma \int f dr$. Or, dans cette intégrale, les éléments sont égaux deux à deux et de signes contraires, car pendant la période où le corps revient à l'état naturel, f repasse par les mêmes états de valeur que pendant la déformation, mais dr a changé de signe. Ainsi le travail des forces élastiques est nul, et il n'y a pas de perte de force vive dans le choc des corps élastiques.

Nous n'avons pas besoin de faire remarquer au lecteur tout ce que ce paragraphe contient de théories inexactes et vicieuses provenant d'hypothèses tout à fait inadmissibles. Il n'existe pas dans la nature de corps *solides mous;* qui dit corps solide, dit corps invariable de forme, et par conséquent les solides ne sont ni mous, ni élastiques. Si alors on a affaire à un corps mou ou élastique, les liaisons sont variables, elles sont fonctions des vitesses et se modifient non pas brusquement, mais en vertu des forces moléculaires continues mises en jeu par le phénomène du choc; aussi ne faut-il pas s'étonner que les théorèmes précédents ne puissent pas se vérifier par des expériences délicates.

XI. — Principe de la moindre action.

235. Considérons un système en mouvement, et dans l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} \sum m v \, ds,$$

où m désigne la masse, v la vitesse d'un point quelconque du système, et t_0, t_1 deux époques quelconques, imaginons que l'on remplace le temps et les coordonnées $x, y, z, \ldots$ des divers points du corps considéré par leurs valeurs exprimées (à l'aide des intégrales du mouvement) en fonction de l'une des coordonnées, que nous représenterons par q. Le principe des forces vives donne

$$\Sigma m v^2 = 2\mathrm{U} + h, \tag{2}$$

U désignant la valeur du travail total et h une constante. Dans cette dernière formule, remplaçons encore $x, y, \ldots, t$ par leurs valeurs exprimées en fonction de q, les formules (1) et (2) pourront s'écrire

$$\mathrm{I} = \int_{q_0}^{q_1} \sum m \frac{ds^2}{dt},$$

$$\sum m \frac{ds^2}{dt^2} = 2\mathrm{U} + h,$$

ou bien, en posant

$$\frac{dx}{dq} = x', \quad \frac{dy}{dq} = y', \ldots,$$

$$\mathrm{I} = \int_{q_0}^{q_1} \sum m \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{dt} dq^2, \tag{3}$$

$$dq^2 \frac{\Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{dt^2} = 2\mathrm{U} + h. \tag{4}$$

De (4) on tire

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2\mathrm{U} + h}}\, dq, \tag{5}$$

et, par suite, (3) devient (en se rappelant que $t, x, x', \ldots$ sont fonctions de q),

$$\mathrm{I} = \int_{q_0}^{q_1} \sqrt{(2\mathrm{U} + h)\, \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)}\, dq. \tag{6}$$

Supposons que le travail soit une différentielle exacte, U sera une fonction de $x, y, z, \ldots$, dont les dérivées partielles représenteront les composantes des forces qui sollicitent chaque point, et l'on pourra faire varier I, en laissant q_0 et q_1 constants. Si l'on désigne alors par P le radical qui se trouve placé sous le signe $\int$, on aura

$$(7)\qquad \delta \mathrm{I} = \int_{q_0}^{q_1} \sum \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \frac{d}{dq} \frac{d\mathrm{P}}{dx'} \right) \delta x \, dq,$$

le signe Σ étant relatif aux coordonnées $x, y, z, \ldots$ Or on a, en vertu de l'équation (5),

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{P}}{dx} = \sqrt{\dfrac{\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2\mathrm{U} + h}} \dfrac{d\mathrm{U}}{dx} = \dfrac{dt}{dq} \dfrac{d\mathrm{U}}{dx}, \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{P}}{dx'} = \sqrt{\dfrac{2\mathrm{U} + h}{\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}\, m x' = \dfrac{dq}{dt} m x', \end{cases}$$

$$(9)\qquad \frac{d}{dq} \frac{d\mathrm{P}}{dx'} = m \frac{dx'}{dq} \frac{dq}{dt} + m x' \frac{d}{dq} \frac{dq}{dt}.$$

Les équations (7), (8), (9) donnent alors

$$\delta \mathrm{I} = \int_{q_0}^{q_1} \sum \left(\frac{dt}{dq} \frac{d\mathrm{U}}{dx} - m \frac{dx'}{dq} \frac{dq}{dt} - m x' \frac{d}{dq} \frac{dq}{dt} \right) dq \, \delta x,$$

ce que l'on peut écrire

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta \mathrm{I} = \displaystyle\int_{q_1}^{q_0} \sum \frac{dt}{dq} \left\{ \frac{d\mathrm{U}}{dx} - m \left[\frac{dx'}{dq} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. + x' \dfrac{dq}{dt} \dfrac{d}{dq} \dfrac{dq}{dt} \right] \right\} dq \, \delta x. \end{cases}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dq} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + x' \frac{dq}{dt} \frac{d}{dq} \frac{dq}{dt} &= \frac{dq}{dt} \left[\frac{dx'}{dq} \frac{dq}{dt} + x' \frac{d}{dq} \frac{dq}{dt} \right] \\ &= \frac{dq}{dt} \frac{d}{dq} \left(x' \frac{dq}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \end{aligned}$$

la formule (10) devient alors

$$\delta \mathrm{I} = \int_{q_0}^{q_1} \sum \frac{dt}{dq} \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dq\, \delta x,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations du mouvement,

$$\delta \mathrm{I} = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant, auquel on a donné le nom de *principe de la moindre action :*

Si le travail des forces qui sollicitent un système est à chaque instant une différentielle exacte, la variation de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{t_0}^{t} \sum mv\, ds$$

sera nulle.

La démonstration qui précède est due à Jacobi.

Si l'on observe que les variations δx, δy,..., dans le courant du calcul, pouvaient être choisies de manière à satisfaire aux liaisons, on pourra encore dire que :

Si les forces qui agissent sur un système, non compris les forces de liaison, sont telles, que leur travail soit à chaque instant une différentielle exacte, la variation de l'intégrale I *sera nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.*

En général I sera un minimum, et l'on pourra dire que cette intégrale sera plus petite pour le déplacement effectif que pour tout autre déplacement compatible avec les liaisons. Mais il y aura des cas où elle ne sera ni minimum ni maximum : par exemple, s'il s'agit d'un point unique assujetti à rester sur une surface, on a

$$\mathrm{I} = \int_{t_0}^{t} \frac{m\, ds^2}{dt};$$

si, de plus, il n'existe pas de forces extérieures, la force vive est constante, et, par suite, $\frac{ds}{dt}$ l'est aussi, et I se réduit au produit de s par une constante. Ainsi, le chemin suivi par le mobile est un minimum, ou, comme on le savait, une ligne géodésique; mais il peut arriver que cette ligne cesse d'être un minimum : c'est ce qui arriverait si, par exemple, le mobile restait sur une sphère et décrivait un arc de grand cercle plus grand que 180 degrés.

Supposons un système sur lequel n'agisse aucune force extérieure, la force vive sera constante; soit k sa valeur. On aura

$$I = \int_{t_0}^{t} \sum m v\, ds = k \int_{t_0}^{t} dt = k\,(t - t_0);$$

donc $t - t_0$ temps du trajet sera généralement un minimum; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si un système en mouvement n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, le temps qu'il met à passer d'une position à une autre est moindre que si, dépensant la même force vive, il suivait tout autre chemin.*

Dans certains cas cependant, il pourra arriver que ce temps ne soit ni minimum ni maximum.

XII. — Principe de Gauss.

236. *Soient m la masse d'un point quelconque d'un système en mouvement, a_0 sa position initiale, a sa position au bout du temps dt, b la position qu'il occuperait s'il n'était soumis à aucune liaison; la quantité*

$$\Sigma m \overline{ab}^2$$

sera un minimum, c'est-à-dire sera moindre que si le point m, au lieu de se rendre en a, suivait tout autre chemin compatible avec les liaisons.

En effet, en désignant la force due aux liaisons qui agit en m par f, on a

$$\overline{ab} = \frac{f}{m}\frac{dt^2}{2}, \tag{1}$$

en observant que $\overline{ab}$ est précisément le chemin que suivrait le point m, en vertu du principe de l'indépendance des effets des forces, s'il n'était sollicité que par la force due aux liaisons, et s'il partait du repos. On tire de la formule (1)

$$f = \frac{2m\overline{ab}}{dt^2}. \tag{2}$$

Or, en vertu du principe des vitesses virtuelles, les forces de liaison (les forces perdues) se font équilibre; on a donc, en désignant par $a\beta$ un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons,

$$\Sigma f \overline{a\beta} \cos(f, \overline{a\beta}) = 0,$$

ou, en vertu de (2),

$$\Sigma\, 2m\overline{ab}\,\overline{a\beta}\cos(\overline{ab}, \overline{a\beta}) = 0; \tag{3}$$

or, on a

$$\overline{b\beta}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{a\beta}^2 - 2\overline{ab}\,\overline{a\beta}\cos(\overline{ab}, \overline{a\beta});$$

multiplions par m, faisons précéder chaque terme d'un Σ, nous aurons, en vertu de (3),

$$\Sigma m\overline{b\beta}^2 = \Sigma m\overline{ab}^2 + \Sigma m\overline{a\beta}^2.$$

On a donc

$$\Sigma m\overline{ab}^2 < \Sigma m\overline{\beta b}^2.$$

C. Q. F. D.

XIII. — Principe d'Hamilton. — Formules de Lagrange.

Nous avons vu comment Lagrange, à l'aide d'un changement de variables, a déduit, des équations du mouvement en coordonnées rectangulaires, les formules du mouvement d'un système en coordonnées quelconques. Voici une autre manière d'arriver au même résultat.

237. Principe d'Hamilton. — *Soient* T *la somme des demi-forces vives des différents points d'un système à l'époque* t, δU *l'expression différentielle du travail virtuel des forces, non compris celles qui proviennent des liaisons; soit, de plus,*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\, dt,$$

t_0 *et* t_1 *désignant deux époques quelconques, on aura* $S = 0$ *pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système, pourvu que l'on prenne nuls les déplacements relatifs aux époques* t_0 *et* t_1.

Avant de démontrer cette proposition, nous ferons observer encore une fois que la notation δU n'implique pas dans notre esprit l'existence d'une fonction U. δU est simplement un travail virtuel que l'on peut exprimer linéairement en fonction des variations des coordonnées des différents points du système.

Ceci posé, soient m la masse d'un point, x, y, z ses coordonnées rectangulaires, X, Y, Z les composantes de la force qui lui est appliquée, on aura

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \sum \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right.$$
$$\left. + \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \right\} dt$$

3.

c'est-à-dire

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum m \left(\frac{dx}{dt} \delta \frac{dx}{dt} + \ldots \right) + \sum (X \delta x + \ldots) \right] dt,$$

ou bien, en intégrant par parties et observant que δx, $\delta y, \ldots$ sont nuls pour $t = t_0$ et $t = t_1$,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] dt.$$

Si donc δx, δy, $\delta z, \ldots$ sont des déplacements compatibles avec les liaisons, on aura, en vertu des équations du mouvement,

$$S = 0,$$

C. Q. F. D.

238. Voici maintenant comment on fera usage du théorème d'Hamilton. Supposons qu'aux coordonnées x, y, $z, \ldots$ on substitue d'autres coordonnées q_1, $q_2, \ldots$, q_i, on aura toujours

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U) = 0.$$

On exprimera δT et δU en fonction de q_1, $q_2, \ldots$, δq_1, $\delta q_2, \ldots$, $\delta \frac{dq_1}{dt}, \ldots$

On posera

$$\frac{dq}{dt} = q',$$

puis on remarquera que T, qui était primitivement une fonction de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}, \ldots$, va devenir une fonction des q et des q'; on aura donc

$$\delta T = \frac{dT}{dq}\,\delta q + \frac{dT}{dq'}\,\delta q';$$

δU est de la forme

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Quand aux coordonnées x, y, z on aura substitué les coordonnées q, δU prendra la forme

$$\delta U = \Sigma Q\,\delta q,$$

en sorte que la formule (1) pourra s'écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{dT}{dq}\,\delta q + \frac{dT}{dq'}\,\delta q' + Q\,\delta q\right) dt = 0,$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{dT}{dq} - \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} + Q\right) \delta q\, dt = 0,$$

d'où l'on tire

$$\sum \left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq} - Q\right) \delta q = 0;$$

et si $q_1, q_2, \ldots$ sont choisis de telle sorte que les liaisons soient satisfaites d'elles-mêmes, on aura autant d'équations que de variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$. Ces équations sont de la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq} - Q = 0.$$

Nous retrouvons ainsi les formules de Lagrange.

XIV. — Réflexions sur les principes précédents.

239. Les principes du mouvement du centre de gravité, des quantités de mouvement projetées, des moments

des quantités de mouvements et des forces vives, fournissent, dans un grand nombre de cas, des intégrales du mouvement. Aussi voit-on plusieurs auteurs traiter les questions de Dynamique, en appliquant directement les principes en question. Cette marche n'est pas logique. En effet, si ces principes peuvent fournir, dans certains cas, la loi du mouvement, ils sont si faciles à démontrer, qu'il y aura peu d'inconvénient à recommencer les calculs sur les équations du problème spécial dont on s'occupe; en outre, la considération directe de ces équations a le grand avantage de fournir toutes les circonstances du mouvement dans tous les cas possibles, pourvu que l'on puisse les intégrer. Enfin, en partant des équations générales de la Dynamique, on a l'avantage de pouvoir traiter toutes les questions d'une manière uniforme : c'est ce qui donne tant d'élégance à la méthode que Lagrange a suivie dans sa *Mécanique analytique*.

Ainsi donc, en thèse générale, pour résoudre un problème de Dynamique, on commencera par écrire les équations différentielles de son mouvement.

Il y a cependant quelques cas d'exception à cette règle. Par exemple, si le système dont on étudie le mouvement était à liaisons complètes, une seule équation suffirait à déterminer son mouvement. Cette équation serait fournie par le principe des forces vives (en supposant bien entendu les liaisons indépendantes du temps). Quelquefois le principe des aires, joint à celui des forces vives, suffira pour résoudre une question. Lorsque cette circonstance se présentera, les équations différentielles du mouvement pourront en général s'écrire à l'aide de coordonnées polaires; mais on aura immédiatement des équations du premier ordre : c'est ce qui arrive, comme nous l'avons vu dans l'étude du mouvement relatif des corps célestes.

Le principe de la moindre action, le principe de Gauss et celui d'Hamilton ne fournissent que des propriétés du mouvement et jamais d'intégrales. Ils ont cependant leur utilité dans des cas où l'on ne trouverait que fort difficilement les équations du mouvement.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer la route que doit suivre un point matériel m pour se rendre de A en B; le point A est dans un milieu où le point m se meut avec une vitesse constante a, le point B se trouve dans un autre milieu où la vitesse du point m est égale à une autre constante b.

Il serait difficile d'étudier les phénomènes qui se passent à la surface de séparation des milieux, de calculer les forces qui entrent en jeu, et, par suite, d'écrire les équations du mouvement; mais le principe de la moindre action nous apprend que, les vitesses a et b étant constantes, le temps du trajet doit être un minimum. La question est donc ramenée à celle-ci : Quelle route doit suivre le point m pour que le temps qu'il met afin de se rendre de A en B soit un minimum?

La surface de séparation peut être représentée par une équation de la forme

$$f(p, q, r) = 0, \tag{1}$$

p et q désignant les distances d'un point quelconque de la surface à A et B, et r la distance du même point à un troisième point fixe C. Alors la quantité à rendre minimum ou le temps du trajet sera

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b}, \tag{2}$$

p et q étant liés entre eux par la relation (1). Égalons à zéro la différentielle de l'expression (2), nous aurons

$$\frac{dp}{a} + \frac{dq}{b} = 0,$$

et la formule (1) donnera

$$\frac{df}{dp}dp + \frac{df}{dq}dq + \frac{df}{dr}dr = 0.$$

En employant la méthode des multiplicateurs, il faudra poser

$$\lambda\frac{df}{dp} + \frac{1}{a} = 0, \quad \lambda\frac{df}{dq} + \frac{1}{b} = 0, \quad \frac{df}{dr} = 0;$$

et, par suite, on aura, pour déterminer p, q, r, les équations (1) et

$$a\frac{df}{dp} = b\frac{df}{dq}, \tag{3}$$

$$\frac{df}{dr} = 0. \tag{4}$$

Ces équations ont une signification géométrique remarquable ; elles font connaître le point P où le mobile rencontre la surface (1).

Pour obtenir la normale à la surface au point P, il faut, comme l'on sait (*), porter, à partir du point P,

---

(*) Ce théorème peut se démontrer comme il suit :

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point P; a, a', a'' les coordonnées de A ; b, b', b'' celles de B ; c, c', c'' celles de C. Le cosinus de l'angle ω que la normale en P fait avec l'axe des x est proportionnel à

$$\frac{df}{dx} \quad \text{ou à} \quad \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq}\frac{dq}{dx} + \frac{df}{dr}\frac{dr}{dx},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{df}{dp}\frac{x-a}{p} + \frac{df}{dq}\frac{x-b}{q} + \frac{df}{dr}\frac{x-c}{r},$$

en observant que

$$p^2 = (x-a)^2 + (y-a')^2 + (z-a'')^2 + \ldots,$$

et, par suite, que

$$p\frac{dp}{dx} = x - a, \ldots,$$

Or $\frac{x-a}{p}$, $\frac{x-b}{q}$, $\frac{x-c}{r}$ sont les cosinus des angles que AP, BQ, CR dans les directions PA, PB, PC, des longueurs $\frac{df}{dp}$, $\frac{df}{dq}$, $\frac{df}{dr}$, et chercher la résultante de ces droites. La condition (4) montre alors que le point P doit être choisi de telle sorte, que le plan APB soit normal à la surface; la formule (3) montre que le rapport $\frac{df}{dp}:\frac{df}{dq}$ est égal à $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire, en employant un langage emprunté à la théorie de la lumière, que les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont dans un rapport constant.

Le problème qui précède a une certaine importance en Physique, et le résultat auquel nous venons d'arriver est un des arguments que l'on a invoqués contre la théorie de l'émission en faveur de la théorie des ondulations.

XV. — Mouvement d'un point assujetti a demeurer sur une sphère.

240. Problème. — *Étudier le mouvement d'un point pesant, assujetti à demeurer sur la surface d'une sphère de rayon r.*

Traitons d'abord la question à l'aide de coordonnées rectilignes. Supposons la masse du mobile égale à l'unité.

---

font avec l'axe des x en appelant ces angles λ, μ, ν, et en désignant par N une quantité qui ne change pas quand on change x en y, y en z et z en x, on aura

$$N\cos\omega = \frac{df}{dp}\cos\lambda + \frac{df}{dq}\cos\mu + \frac{df}{dr}\cos\nu,$$

et deux relations analogues relativement à l'axe des y et à l'axe des z. Ces relations prouvent que la longueur N portée dans le sens de la normale à la surface est la résultante des droites de longueur $\frac{df}{dp}$, $\frac{df}{dq}$, $\frac{df}{dr}$, portées dans les directions PA, PB, PC à partir du point P; de là un moyen de construire la normale à la surface.

Soient x, y, z les coordonnées prises par rapport à trois axes rectangulaires, passant par le centre de la sphère; en supposant l'axe des z vertical, la seule force qui sollicite le mobile étant son poids g, nous aurons pour équation du mouvement (212)

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right)\delta z = 0. \tag{1}$$

A cette équation, il faut joindre l'équation de liaison

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{2}$$

qui exprime que le mobile reste sur la sphère. En différentiant cette équation, on trouve

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = 0.$$

Multiplions cette formule par λ, et ajoutons-la avec (1); égalons ensuite à zéro les coefficients de δx, δy, δz, nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} - g + \lambda z = 0. \tag{3}$$

Ces équations, que l'on aurait pu écrire immédiatement en désignant par λr la réaction de la surface, sont les équations du mouvement; il faudrait éliminer λ entre ces équations, et les équations résultantes jointes à (2) permettraient de calculer x, y, z en fonction du temps.

Mais x, y, z ne sont pas les inconnues naturelles de la question, et l'intégration des formules (3), (2) serait compliquée. Le point mobile est ordinairement assujetti à décrire la sphère au moyen d'un fil de longueur constante fixé par l'une de ses extrémités; l'appareil ainsi formé porte le nom de *pendule conique*. Ce qu'il importe alors de connaître à chaque instant, c'est l'angle que fait le fil avec la verticale, et l'angle que fait sa projection sur un plan horizontal avec un axe horizontal fixe ; en d'autres termes, c'est la longitude et la colatitude du point mobile qu'il s'agit de calculer en fonction du temps. On pourrait y arriver à l'aide des équations (3) ; mais il vaut bien mieux avoir recours aux formules de Lagrange, dans lesquelles on n'a plus à s'occuper des liaisons, avec le choix des nouvelles variables, puisque, en posant

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

et en laissant r constant, les liaisons se trouvent satisfaites d'elles-mêmes. En désignant alors par T la demi-force vive, et par $\Theta\,\delta\theta + \Psi\,\delta\psi$ le travail de la pesanteur, on a

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'} - \frac{d\mathrm{T}}{d\theta} - \Theta = 0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{d\psi'} - \frac{d\mathrm{T}}{d\psi} - \Psi = 0.\end{aligned}\right.$$

Or on a

$$\mathrm{T} = \frac{r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\psi^2}{2\,dt^2},$$

ou

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\,(r^2\theta'^2 + r^2\sin^2\theta\,\psi'^2);$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'} = r^2\theta', \qquad \frac{d\mathrm{T}}{d\psi'} = r^2\sin^2\theta\,\psi',$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\,\psi'^2, \qquad \frac{d\mathrm{T}}{d\psi} = 0.$$

On a ensuite

$$\Theta\,\delta\theta + \Psi\,\delta\psi = g\,\delta z = -rg\sin\theta\,\delta\theta;$$

d'où

$$\Theta = -rg\sin\theta, \quad \Psi = 0.$$

Les équations (4) deviennent alors

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + g\sin\theta = 0,\\ & \frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

La seconde équation donne, en désignant par c une constante,

$$(6)\qquad r^2\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = c.$$

Cette formule serait donnée par le théorème des aires; la première équation (5) donne, en la combinant avec (6),

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{c^2\cos\theta}{r^3\sin^3\theta} + g\sin\theta = 0;$$

en multipliant par $d\theta$, on peut intégrer une première fois, et l'on a

$$\frac{1}{2}r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{2r^3\sin^2\theta} - g\cos\theta = a,$$

a désignant une nouvelle constante. On en tire

$$t = \int \frac{r^2\,d\theta\sin\theta}{\sqrt{-c^2 + 2gr^3\sin^2\theta\cos\theta + 2r^3 a\sin^2\theta}} + \text{const.}$$

Si l'on pose

$$\cos\theta = -u,$$

on a

$$t = \int \frac{r^2\,du}{\sqrt{-c^2 - 2gr^3(1-u^2)u + 2r^3 a(1-u^2)}} + \text{const.};$$

la quantité u ou $-\cos\theta$ est donc une fonction doublement périodique du temps. La formule (6) donne

$$\psi = \int \frac{c\,dt}{r^2\sin^2\theta} + \text{const.},$$

ou

$$\psi = \int \frac{c\,du}{(1-u^2)\sqrt{-c^2-2gr^3(1-u^2)u+2r^3a(1-u^2)}} + \text{const.};$$

u ou $-\cos\theta$ est donc aussi une fonction doublement périodique de ψ. Cette fonction cessera d'être doublement périodique si l'on prend $c=0$, ce qui fournit le mouvement dans un plan vertical; ou si l'on fait $du=0$, ce qui suppose θ constant. En introduisant l'hypothèse $\theta=$ const. dans les formules (5), on a

$$r\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = g,$$

$$\psi = \frac{ct}{r^2\sin^2\theta} + \psi_0,$$

ψ_0 désignant une constante. La première de ces équations donne

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}.$$

Elle sert à déterminer la constante c qui figure dans la seconde équation.

Donc, si θ est constant, le mouvement qui alors a lieu dans un plan horizontal est uniforme. La vitesse angulaire est donnée par la formule précédente.

XVI. — Mouvement de deux points assujettis a rester sur deux droites fixes.

241. Considérons deux points A et B assujettis à rester sur deux droites fixes, et soumis à leur action mutuelle. Proposons-nous de déterminer leur mouvement.

Soient h la plus courte distance des trajectoires, θ leur angle; soient x la distance du point A à la droite h, y la distance du point B à la même droite; soient m et n les masses respectives des points A et B; soient r leur distance, et $mnf(r)$ leur action mutuelle. On aura

$$r^2 = h^2 + x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta. \tag{1}$$

Les formules de Lagrange deviennent dans ce cas, en désignant toujours par $2\mathrm{T}$ la force vive, et par $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy$ le travail,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{dx'} - \frac{d\mathrm{T}}{dx} - \mathrm{X} = 0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{dy'} - \frac{d\mathrm{T}}{dy} - \mathrm{Y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Or on a

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,\frac{m\,dx^2 + n\,dy^2}{dt^2} = \frac{1}{2}(mx'^2 + ny'^2),$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dx'} = mx', \quad \frac{d\mathrm{T}}{dy'} = ny',$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dy} = 0.$$

Quant au travail, il est égal à

$$-\,mnf(r)\,\delta r.$$

Or on tire de (1)

$$r\,\delta r = x\,\delta x + y\,\delta y - \cos\theta(x\,\delta y + y\,\delta x),$$

par suite,

$$\mathrm{X} = -\,mn\,\frac{f(r)}{r}(x - y\cos\theta),$$

$$\mathrm{Y} = -\,mn\,\frac{f(r)}{r}(y - x\cos\theta).$$

Les équations (2) deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} = -\,n\,\frac{f(r)}{r}(x - y\cos\theta),\\ &\frac{d^2y}{dt^2} = -\,m\,\frac{f(r)}{r}(y - x\cos\theta). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Nous prendrons comme application $f(r) = r$, c'est-à-dire la force attractive proportionnelle à la distance. Nous aurons alors, au lieu des équations (3),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n(x - y\cos\theta),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -m(y - x\cos\theta).$$

Si l'on pose

$$x = ae^{it}, \quad y = be^{it},$$

on a pour déterminer i et le rapport $\frac{a}{b}$

$$ai^2 = -n(a - b\cos\theta),$$
$$bi^2 = -m(b - a\cos\theta).$$

L'élimination de $\frac{b}{a}$ conduit à la formule

$$i^4 + (m+n)i^2 + mn\sin^2\theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$i = \pm\sqrt{-\frac{m+n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m+n)^2 - 4mn\sin^2\theta}}.$$

Ces quatre valeurs de i sont de la forme $\pm\mu\sqrt{-1}$; on en conclut pour x et y des solutions de la forme

$$x = c\cos\mu t + c'\sin\mu t + c''\cos\mu' t + c'''\sin\mu' t,$$

$$y = \frac{n-\mu}{\cos\theta}(c\cos\mu t + c'\sin\mu t) + \frac{n-\mu'}{\cos\theta}(c''\cos\mu' t + c'''\sin\mu' t).$$

On déterminera les constantes c, c', c'', c''' d'après les circonstances initiales du mouvement.

XVII. — Mouvement de deux points assujettis a demeurer sur un même cercle.

242. Problème. — *Trouver le mouvement de deux points assujettis à se mouvoir sur un même cercle, et soumis à une force de répulsion mutuelle variant en raison inverse du carré de la distance.*

Soient m et m' les masses des deux points, r le rayon du cercle sur lequel ils se meuvent, θ et θ' les angles que font les rayons qui aboutissent en m et m', avec un diamètre fixe du cercle.

Si l'on désigne par x, y, et x', y' les coordonnées des points m et m' prises par rapport à un diamètre fixe, et par rapport à un diamètre perpendiculaire sur celui-ci, on aura

$$(1)\qquad \left(m\frac{d^2x}{dt^2}-\mathrm{X}\right)\delta x+\left(m'\frac{d^2x'}{dt^2}-\mathrm{X}'\right)\delta x'+\ldots=0,$$

X, Y, et X', Y' désignant les composantes des forces répulsives qui agissent sur m et m'. La distance mm' est donnée par la formule

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

en sorte que l'on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}&=\frac{(x-x')kmm'}{[(x-x')^2+(y-y')^2]^{\frac{3}{2}}},\\ \mathrm{Y}&=\frac{(y-y')kmm'}{[(x-x')^2+(y-y')^2]^{\frac{3}{2}}},\\ \mathrm{X}'&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathrm{Y}'&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

k désignant un coefficient constant.

On a ensuite les équations de liaison

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = r^2, \quad x'^2 + y'^2 = r^2,$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad x\,\delta x + y\,\delta y = 0, \quad x'\,\delta x' + y'\,\delta y' = 0.$$

Multiplions la première équation (4) par λ, la seconde par λ', ajoutons avec (1), égalons ensuite à zéro les coefficients de δx, $\delta x'$, δy, $\delta y'$, nous aurons les équations du mouvement

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x - \mathrm{X} = 0,$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y - \mathrm{Y} = 0,$$

$$m'\,\frac{d^2x'}{dt^2} + \lambda' x' - \mathrm{X}' = 0,$$

$$m'\,\frac{d^2y'}{dt^2} + \lambda' y' - \mathrm{Y}' = 0.$$

L'élimination de λ et λ' donne

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & m\left(y\,\frac{d^2x}{dt} - x\,\frac{d^2y}{dt^2}\right) = y\mathrm{X} - x\mathrm{Y}, \\ & m'\left(y'\,\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\,\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = y'\mathrm{X}' - x'\mathrm{Y}'. \end{aligned} \right.$$

A ces équations il faut joindre les équations (3), et l'on pourra de ces quatre formules déduire x, x', y, y' en fonction du temps t. Telle est la marche indiquée par la première méthode de Lagrange, pour résoudre la question; elle a, comme on voit, l'inconvénient de conduire à des équations compliquées qui ne contiennent pas les variables naturelles θ, θ'.

L'application directe du principe de d'Alembert est bien préférable, comme nous allons voir. Écrivons qu'il y a équilibre entre les forces d'inertie et les forces réellement agissantes, dans tout déplacement compatible avec les liaisons, c'est-à-dire effectué le long du cercle.

La force d'inertie du point m se compose : 1° de la force centrifuge dont le travail est nul ; 2° de la force tangentielle d'inertie $mr^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, dont le travail est $-mr^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\delta\theta$. On verrait de même que le travail de la force d'inertie du point m' est $-m'r^2\dfrac{d^2\theta'}{dt^2}\delta\theta'$.

Si l'on désigne par l la distance mm', la somme des travaux des forces de répulsion réciproque provenant de m et m' est, comme on a vu, $F\,\delta l$, F désignant la force répulsive $k\dfrac{mm'}{l^2}$, en sorte que le travail des forces réellement agissantes est $k\dfrac{mm'}{l^2}\delta l$. Or on a

$$l^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(\theta' - \theta) = 4r^2\sin^2\frac{\theta' - \theta}{2},$$

d'où l'on tire

$$l = 2r\sin\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta),$$
$$\delta l = r\cos\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta)(\delta\theta' - \delta\theta),$$

et, par suite, le travail des forces réellement agissantes est

$$\frac{kmm'}{4r}(\delta\theta' - \delta\theta)\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\sin^2\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}.$$

En égalant à zéro la somme des travaux de toutes les forces, on trouve alors

$$mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\delta\theta + m'r^2\frac{d^2\theta'}{dt^2}\delta\theta' = \frac{kmm'}{4r}(\delta\theta' - \delta\theta)\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\sin^2\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}.$$

En égalant alors à zéro les coefficients de $\delta\theta$ et $\delta\theta'$, on a les équations du mouvement

$$(6)\quad \begin{cases} 4r^3 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = - k m' \cos \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta), \\[2ex] 4r^3 \dfrac{d^2\theta'}{dt^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = k m \cos \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta). \end{cases}$$

On peut enfin traiter la question par la seconde méthode de Lagrange. En désignant par T la demi-force vive du système, on a

$$2\mathrm{T} = m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m' r^2 \left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2.$$

On en tire

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)} = m r^2 \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{d\theta'}{dt}\right)} = m' r^2 \frac{d\theta'}{dt},$$

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\theta} = 0, \qquad \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\theta'} = 0.$$

Enfin le travail est, comme on l'a trouvé plus haut,

$$\frac{k m m'}{4r} (\delta\theta' - \delta\theta) \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}.$$

On a donc

$$m r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{k m m'}{4r} \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta' - \theta)},$$

$$m' r^2 \frac{d^2\theta'}{dt^2} = \frac{k m m'}{4r} \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\sin^2 (\theta' - \theta)};$$

ces formules sont identiques aux formules (6).

Pour faciliter l'étude de la question, nous prendrons les masses m et m' égales à l'unité et $\dfrac{4r^3}{k} = \mu$; enfin nous supposerons les points m et m' placés sans vitesse initiale à des distances angulaires α et $\pi - \alpha$ du diamètre-origine. Les équations (6) s'écriront alors

$$(7) \qquad \mu\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\mu\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\sin^2\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}.$$

On en déduit aisément

$$d^2\theta' + d^2\theta = 0,$$

et, par suite, en tenant compte des circonstances initiales,

$$(8) \qquad \theta' + \theta = \pi,$$

équation évidente *à priori;* les formules (7) deviennent alors

$$\mu\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

En multipliant par $d\theta$ et en intégrant depuis $t=0$, on a

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\theta}.$$

Il est impossible de pousser le calcul plus loin, à moins de supposer θ très-petit; dans ce cas on a

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2, \qquad \frac{1}{\cos\theta} = 1 + \frac{1}{2}\theta^2,$$

et, par suite,

$$\mu\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha^2 - \theta^2,$$

d'où l'on tire

$$t = -\int_\alpha^\theta \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}\,d\theta,$$

ou

$$t = \sqrt{\mu}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\theta}{\alpha}\right).$$

Le mouvement est, ainsi qu'il était aisé de le prévoir, un mouvement oscillatoire; le temps d'une oscillation est donné par la formule

$$T = \pi\sqrt{\mu} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{k}}.$$

XVIII. — Du mouvement relatif.

243. Le mouvement relatif est souvent pour nous celui qu'il est le plus utile de connaître. En combinant convenablement le principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles et avec le théorème de Coriolis, on peut écrire immédiatement les équations du mouvement relatif d'un corps par rapport à un autre.

Nous avons vu, en effet, que l'accélération dans le mouvement absolu était la résultante de trois autres : 1° l'accélération relative; 2° l'accélération d'entraînement; 3° l'accélération centrifuge composée (41).

Il résulte de là que l'accélération dans le mouvement relatif est la résultante : 1° de l'accélération absolue; 2° de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire; 3° de l'accélération centrifuge composée, également prise en sens contraire. Ceci revient à dire que la force qui produirait le mouvement relatif d'un point est la résultante : 1° de la force qui produit le mouvement absolu; 2° d'une force égale à l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, multipliée par la masse du mobile; cette force n'est autre chose que la force d'inertie du mouvement d'entraînement; 3° d'une force dite *centrifuge composée,* égale au produit de la masse par l'accélération centrifuge composée prise en sens contraire.

On pourra donc traiter le mouvement relatif comme un mouvement absolu, à la condition de joindre aux forces réelles qui sollicitent le corps, deux espèces de forces fictives : 1° les forces d'inertie du mouvement d'entraînement ; 2° les forces centrifuges composées.

Un exemple va servir à nous faire comprendre. Supposons qu'il s'agisse de trouver le mouvement d'un point assujetti à se mouvoir le long d'une tige animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ses points.

Nous pourrions traiter ce problème par les méthodes que nous avons précédemment développées ; mais nous pouvons nous proposer de trouver directement le mouvement relatif du point par rapport à la tige.

A cet effet nous traiterons ce mouvement relatif comme un mouvement absolu, mais nous joindrons à la réaction normale de la tige, qui est la seule force réellement agissante, une force égale à la force centrifuge, force directement opposée à la force centripète qui produit le mouvement d'entraînement, et une force égale à la force centrifuge composée.

Soient ω la vitesse angulaire de la tige, r la distance du mobile au centre de rotation ; il faut écrire que la force d'inertie $-\frac{d^2r}{dt^2}$, projetée sur la tige augmentée de la somme des projections des autres forces, est nulle. La projection de la force réellement agissante est nulle, la projection de la force centrifuge est $\omega^2 r$, celle de la force centrifuge composée est nulle, puisqu'elle est perpendiculaire à la vitesse relative. On a donc

$$-\frac{d^2r}{dt^2}+\omega^2 r=0,$$

d'où l'on déduit

$$r=ce^{\omega t}+c'e^{-\omega t},$$

c et c' désignant deux constantes. L'équation de la trajectoire s'en déduit du reste aisément, en remplaçant ωt par l'angle θ que fait la droite mobile r avec sa position initiale.

XIX. — Sur la direction de la verticale.

244. Si la Terre était sphérique et immobile, la verticale, c'est-à-dire la résultante des actions qui, pour un habitant de la Terre, semblent solliciter un corps quelconque, serait dirigée suivant un rayon terrestre. Si nous supposons la Terre animée d'un mouvement de rotation ω autour de la ligne des pôles, il n'en sera pas ainsi.

Considérons un point o placé à la surface de la Terre; par ce point faisons passer trois axes : l'un d'eux, oz, dirigé du point o vers le centre de la Terre; le second, ox, dirigé suivant la tangente au parallèle et vers l'orient; le troisième, oy, dirigé du nord au sud, tangent au méridien.

Les forces qui sollicitent le point o, qui est en repos *relatif*, sont la pesanteur mg, la force d'inertie du mouvement d'entraînement qui est ici la force centrifuge; la force centrifuge composée, dans le cas actuel, est nulle, parce que la vitesse relative est nulle (41); la force centrifuge est $\omega^2 r$, r désignant le rayon du parallèle. Si alors on désigne par a le rayon terrestre et par λ la latitude, les composantes de la force centrifuge seront

$$0, \quad m\omega^2 a \sin\lambda\cos\lambda, \quad -m\omega^2 a\cos^2\lambda.$$

Il en résulte que les composantes de la force qui sollicite le corps o dans son repos relatif sont

$$0, \quad m\omega^2 a \sin\lambda\cos\lambda, \quad mg - m\omega^2 a\cos^2\lambda.$$

Cette force est dirigée dans le plan du méridien, et fait avec la tangente au méridien un angle ε donné par la formule

$$\cos\varepsilon = \frac{\omega^2 a \sin\lambda \cos\lambda}{\sqrt{g^2 + \omega^4 a^2 \cos^2\lambda - 2g\omega^2 a \cos^2\lambda}}.$$

En effectuant le calcul, on trouve, pour la latitude de 45 degrés, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{1}{500}$ environ ; le fil à plomb qui tend à se placer dans la direction de la verticale apparente aurait donc une pente d'environ 2 millimètres par mètre sur la verticale vraie ou sur le rayon terrestre. Cet écart ne peut pas être observé, parce que la Terre n'est pas sphérique, et que, pendant qu'elle était encore à l'état fluide, sa surface s'est précisément dirigée normalement à la verticale apparente. Du reste, si la Terre était parfaitement sphérique, les corps placés à sa surface glisseraient vers l'équateur, en vertu de la composante $m\omega^2 a \sin\lambda \cos\lambda$ de la force centrifuge.

La composante verticale de la force qui sollicite le point o,

$$mg - m\omega^2 a \cos^2\lambda,$$

positive dans l'état actuel des choses, deviendrait nulle si l'on avait

$$\omega^2 = \frac{g}{a\cos^2\lambda}.$$

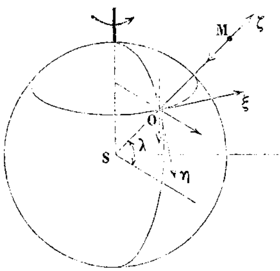
La valeur de g, qui entre dans cette formule, n'est pas le nombre qui entre d'ordinaire dans les Traités de Physique, mais il en diffère peu, en sorte que si l'on fait usage de la formule précédente pour calculer ω en prenant $g = 9{,}8$, $\cos^2\lambda = 1$, $a = 6700000$, on aura à peu près la vitesse de rotation qu'il faudrait donner à la Terre pour que les corps placés à l'équateur fussent dénués de poids. On trouve ainsi que cette vitesse n'est que dix-sept fois plus grande que la vitesse actuelle.

XX. — MOUVEMENT D'UN POINT PESANT QUI TOMBE D'UNE GRANDE HAUTEUR.

245. Lorsqu'un point pesant tombe à la surface de la Terre, nous ne pouvons observer que son mouvement relatif, proposons-nous de trouver les équations de ce mouvement.

Soit a le rayon terrestre SO (*fig.* 39), laissons tomber le point matériel sans vitesse initiale du point M situé à

Fig. 39.



la hauteur h, prenons pour axe des ζ la verticale $SO\zeta$ du point M, pour axe des ξ et des η les tangentes au parallèle et au méridien du point O, où SM rencontre la surface de la Terre.

Le mouvement cherché pourra être traité comme un mouvement absolu, pourvu qu'à la pesanteur, qui est la force réellement agissante, on joigne la force centrifuge composée et la force d'inertie du mouvement d'entraînement.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point mobile à l'époque t. Si nous faisons abstraction du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil, la force d'inertie du mouvement d'entraînement sera la force centrifuge. Si l'on désigne alors par λ la latitude du point O, par ω la vitesse de rotation de la Terre, et si l'on suppose que la masse du point mobile soit égale à l'unité, la force centrifuge se réduira sensiblement à

$$\omega^2(a+\zeta)\cos\lambda,$$

en observant que le point mobile s'écarte fort peu de la verticale; ses composantes le long des axes sont

$$0, \quad \omega^2(a+\zeta)\sin\lambda\cos\lambda, \quad \omega^2(a+\zeta)\cos^2\lambda.$$

La force centrifuge composée est perpendiculaire à la vitesse relative, c'est-à-dire qu'elle est à peu près horizontale, elle est aussi perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre, c'est-à-dire à la ligne des pôles; elle est donc tangente au parallèle; du reste, ses composantes sont (41)

$$-2\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right), \quad -2\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right), \quad -2\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right),$$

p, q, r désignant les composantes de la rotation ω. Or on a

$$p=0, \quad q=\omega\cos\lambda, \quad r=-\omega\sin\lambda,$$

et $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$ sont sensiblement nuls, en sorte que les composantes de la force centrifuge composée deviennent

$$-2\omega\cos\lambda\frac{d\zeta}{dt}, \quad 0, \quad 0.$$

Soit G l'action de la Terre sur un point placé en O, son action sur le mobile sera

$$\frac{Ga^2}{(a+\zeta)^2},$$

ou à peu près

$$G\left(1 - 2\frac{\zeta}{a}\right).$$

Les équations du mouvement sont alors

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega\cos\lambda\dfrac{d\zeta}{dt}, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \omega^2(a+\zeta)\sin\lambda\cos\lambda, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -G\left(1 - 2\dfrac{\zeta}{a}\right) + \omega^2(a+\zeta)\cos^2\lambda. \end{cases}$$

Or $G - \omega^2 a\cos^2\lambda$ est l'intensité de la pesanteur apparente en O (244). Nous désignerons cette quantité par g, nous négligerons les produits de ω par ζ, et les équations (1) deviendront ainsi

$$(2)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega\cos\lambda\frac{d\zeta}{dt},$$

$$(3)\qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \omega^2 a\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$(4)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -g + \frac{2g\zeta}{a};$$

ces équations sont linéaires et faciles à intégrer.

L'équation (3) montre qu'il y aura une déviation vers le sud dans notre hémisphère, mais cette déviation qui se produit d'un mouvement uniformément accéléré est calculée (il ne faut pas l'oublier) dans l'hypothèse d'une Terre sphérique.

L'équation (4) donne

$$\zeta = \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2}h - \frac{a}{4}\right)\left(e^{\sqrt{\frac{2g}{a}}t} + e^{-\sqrt{\frac{2g}{a}}t}\right),$$

h désignant l'ordonnée initiale du mobile censé parti du repos. On voit que l'on a à peu près

$$\zeta = h - \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{5}$$

Toutefois le mouvement vertical est un peu moins rapide, à cause de la présence des termes en $\frac{ht^2}{a}$ que nous avons négligés, et qui sont positifs.

La formule (2) peut être remplacée par la suivante, obtenue en exprimant ζ au moyen de (5) :

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\omega \cos\lambda\, gt,$$

d'où l'on conclut

$$\xi = \omega g t^2 \cos\lambda, \tag{6}$$

sans ajouter de constante, puisque pour $t = 0$, $\xi = 0$. Cette formule montre qu'il y aura une petite déviation vers l'orient; cette déviation est facile à obtenir, il suffit de faire $\zeta = 0$, la formule (5) donnera la valeur $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ correspondante de t; cette valeur portée dans (6) donnera la déviation $\omega \cos\lambda \sqrt{2gh}$.

XXI. — Mouvement du pendule simple en tenant compte de l'influence du mouvement de la Terre.

246. Proposons-nous d'étudier le mouvement d'un pendule simple de longueur l, en tenant compte du mouvement de rotation de la Terre, soit λ la latitude du lieu où se trouve le pendule. Prenons la verticale pour axe des z, la tangente au parallèle pour axe des x, et la tangente au méridien pour axe des y. Dirigeons l'axe des z de haut en bas, de manière à ce que l'accélération due à la pesanteur soit positive. Dirigeons l'axe des x de l'ouest vers l'est, enfin dirigeons l'axe des y du nord vers le sud.

Soit ψ l'angle que fait le plan d'oscillation du pendule avec le plan des zx, et θ l'angle que fait le pendule lui-même avec la verticale.

Les forces qui sollicitent le pendule dans son mouvement relatif sont :

1° L'action $m\mathrm{G}$ de la Terre sur le point pesant du pendule, dont le travail est $-m\mathrm{G}l\sin\theta\,\delta\theta$.

2° La force d'inertie du mouvement d'entraînement; cette force est égale au rayon du parallèle multiplié par le carré de la vitesse de rotation ω de la Terre, et par la masse m du pendule. Si l'on désigne par a le rayon terrestre, le rayon du parallèle sera $a\cos\lambda$, par suite, la force d'inertie sera $m\omega^2 a\cos\lambda$; cette force est dirigée suivant le prolongement du rayon du parallèle et fait, par suite, avec les axes des angles $\frac{\pi}{2}$, $\lambda-\frac{\pi}{2}$, $\pi-\lambda$. Ses composantes sont

$$0,\quad m\omega^2 a\sin\lambda\cos\lambda,\quad -m\omega^2 a\cos^2\lambda.$$

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point pesant, on a

$$(1)\qquad x=l\sin\theta\cos\psi,\quad y=l\sin\theta\sin\psi,\quad z=l\cos\theta,$$

et le travail de la force d'inertie du mouvement d'entraînement,

$$m\omega^2 a\cos\lambda(\sin\lambda\,\delta y-\cos\lambda\,\delta z),$$

prend la forme suivante, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs :

$$(2)\quad m\omega^2 al\cos\lambda[(\cos\lambda\sin\theta+\sin\lambda\cos\theta\sin\psi)\delta\theta+\sin\lambda\sin\theta\cos\psi\,\delta\psi].$$

3° La force centrifuge composée a pour composantes

$$-2m\left(\frac{dz}{dt}q - \frac{dy}{dt}r\right),$$

$$-2m\left(\frac{dx}{dt}r - \frac{dz}{dt}p\right),$$

$$-2m\left(\frac{dy}{dt}p - \frac{dx}{dt}q\right);$$

p, q, r désignant les composantes de la rotation ω,

$$p = 0, \quad q = \omega\cos\lambda, \quad r = \omega\sin\lambda.$$

Son travail est égal à

$$2m\omega\left[\left(\frac{dy}{dt}\sin\lambda - \frac{dz}{dt}\cos\lambda\right)\delta x - \frac{dx}{dt}\sin\lambda\,\delta y + \frac{dx}{dt}\cos\lambda\,\delta z\right],$$

ou bien, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs,

$$(3)\quad 2m\omega l^2\sin\theta(\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\sin\psi)\left(\delta\theta\frac{d\psi}{dt} - \delta\psi\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Soient $2T$ la force vive du système, θ' et ψ' les dérivées de θ, ψ; enfin, soit, pour abréger, $\Theta\,\delta\theta + \Psi\,\delta\psi$ le travail des forces; les équations du mouvement seront

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'} - \frac{dT}{d\theta} = \Theta,\\ &\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\psi'} - \frac{dT}{d\psi} = \Psi. \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$2T = m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

ou bien, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (1),

$$2T = ml^2(\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2).$$

Les formules (4) deviennent alors

$$(5)\qquad \begin{cases} m l^2 \left[\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta \left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 \right] = \Theta, \\ m l^2 \dfrac{d}{dt}\left(\sin^2\theta \dfrac{d\psi}{dt}\right) = \Psi. \end{cases}$$

Nous avons évalué séparément le travail de chaque force : le travail de la pesanteur est $-mGl\sin\theta\,\delta\theta$, celui de la force d'inertie du mouvement d'entraînement est l'expression (2), celui de la force centrifuge composée est l'expression (3); ajoutons ces travaux, le coefficient de $\delta\theta$ sera Θ, le coefficient de $\delta\psi$ sera Ψ, et les formules (5) prendront la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} l\left[\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad = -G\sin\theta + \omega^2 a\cos\lambda(\cos\lambda\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\sin\psi) \\ \qquad\qquad + 2l\omega\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}(\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\sin\psi), \\ l\dfrac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\dfrac{d\psi}{dt}\right) \\ \qquad = \omega^2 a\sin\lambda\cos\lambda\sin\theta\cos\psi \\ \qquad\qquad - 2\omega l\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}(\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\sin\psi). \end{cases}$$

Ces équations sont trop compliquées pour que l'on puisse espérer les intégrer exactement. Toutefois, si l'on se plaçait au pôle, elles deviendraient

$$l\left[\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]$$

$$= -G\sin\theta + \omega^2 a(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\sin\psi) + 2l\omega\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\sin\psi,$$

$$l\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right) = -2\omega l\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}\sin\psi.$$

Si l'on multiplie la première par $d\theta$, la seconde par $d\psi$, et si l'on ajoute, on a

$$(7) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = -\frac{G}{2l}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

θ_0 désignant l'angle initial d'écart. La seconde donne ensuite

$$(8) \qquad \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt} + \omega\right) = \text{const.}$$

Les équations (7) et (8) sont celles des forces vives et des aires; la dernière montre que, si l'on prend pour valeur initiale de $\frac{d\psi}{dt}$ la quantité $-\omega$, on aura toujours

$$\frac{d\psi}{dt} = -\omega,$$

et le plan d'oscillation du pendule aura un mouvement uniforme apparent de rotation autour de l'axe du monde. Si l'on fait alors $\frac{d\psi}{dt} = -\omega$ dans (7), on pourra intégrer cette équation comme il a été fait au n° **191**.

EXERCICES.

I. Deux points assujettis à se mouvoir sur deux cercles situés dans le même plan s'attirent avec une force qui est fonction de la distance. Déterminer le mouvement de ces deux points; examiner le cas où la force attractive est proportionnelle à la distance ou constante; examiner le cas où la force varie en raison inverse du carré de la distance; étudier les petites oscillations des deux mobiles.

II. n points matériels, qui se repoussent suivant une fonction de la distance, se trouvent placés aux sommets d'un polygone dont les côtés ont des longueurs invariables : 1° trouver les positions d'équilibre de ces n points; 2° étudier les petits mouvements du système en supposant les forces répulsives constantes.

III. Une tige tourne uniformément autour de l'une de ses extrémités et décrit un plan vertical; trouver le mouvement d'un point pesant assujetti à demeurer sur la tige.

IV. Un disque pesant et homogène peut rouler et glisser sans frottement sur un plan horizontal; sur la circonférence de ce disque, on place un point matériel pesant A. Étudier le mouvement que va prendre le disque; déterminer la trajectoire du point A.

(OSSIAN BONNET.)

V. Un fil flexible et homogène est fixé en deux points A et B; on fait tourner ce fil autour de la droite AB. On demande s'il est possible que ce fil puisse être maintenu en équilibre relatif par rapport à un observateur qui serait entraîné d'un mouvement de rotation uniforme autour de AB. Déterminer cette forme d'équilibre, si elle existe. (STURM.)

VI. Un cône à base elliptique tourne autour de son axe d'une manière uniforme; l'axe de rotation étant supposé vertical, on place un point pesant sur la surface du cône. Trouver le lieu des positions où ce point pourra demeurer en équilibre relatif.

VII. On place une bille pesante à l'intérieur d'une sphère que l'on fait tourner d'un mouvement uniformément accéléré autour de son diamètre vertical. Étudier le mouvement de cette bille. Est-il possible qu'elle demeure en équilibre relatif?

VIII. Quelle doit être l'action réciproque $f(r)$ de deux points matériels, r désignant leur distance, pour que les espaces x et y, parcourus sous l'influence de leur action mutuelle, soient liés entre eux par une relation de la forme

$$xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS CANONIQUES DU MOUVEMENT.

I. — Équations d'Hamilton.

247. Dans un grand nombre de questions de Dynamique, la somme des travaux des forces qui sollicitent le système que l'on étudie est une variation exacte des coordonnées. Ce cas est celui de la Mécanique céleste, c'est celui d'un grand nombre de questions de Physique mathématique; enfin on peut dire que, toutes les fois que les forces qui sollicitent un système se réduiront à des actions mutuelles, ou à des attractions émanant de points fixes situés à des distances finies ou infinies, le travail sera une variation exacte des coordonnées du système. Cette proposition a été démontrée (177).

Reprenons les équations de Lagrange (217, 237)

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{dT}{dq'_1} - \dfrac{dT}{dq_1} - Q_1 = 0, \\ \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{dT}{dq'_2} - \dfrac{dT}{dq_2} - Q_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

dans lesquelles $q_1, q_2, \ldots$ représentent des coordonnées quelconques, $q'_1, q'_2, \ldots$ leurs dérivées prises par rapport au temps t, et T la demi-force vive. Le travail des forces δU

est donné par la formule

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots .$$

Nous supposerons que δU soit une variation exacte, en sorte que la fonction U existera réellement, et l'on aura

$$(2) \qquad Q_1 = \frac{dU}{dq_1}, \quad Q_2 = \frac{dU}{dq_2}, \ldots .$$

Nous supposerons aussi les liaisons indépendantes du temps, en sorte que les variables $x, y, z, \ldots$ s'exprimeront, à l'aide des variables q, au moyen d'équations où le temps n'entrera pas explicitement. Posons

$$(3) \qquad \frac{dT}{dq'} = p.$$

Les formules (1) pourront se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dq} - \frac{dU}{dq} = 0.$$

Dans les formules (4), les variables indépendantes sont les q et les q'. Nous allons choisir pour nouvelles variables les q et les p. Dans cette hypothèse, nous représenterons les différentielles partielles par des d. Ainsi $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q}$ sera la dérivée partielle de T exprimé en fonction de p_1, $p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$; au contraire, $\frac{dT}{dq}$ sera une dérivée partielle prise en regardant T comme fonction de q'_1, $q'_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$: T est une fonction homogène et du second degré de $q'_1, q'_2, \ldots$. En effet, en coordonnées rectangulaires, on a

$$T = \sum \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Or, si l'on observe que $x, y, z, \ldots$ s'expriment en fonction de q_1, q_2, ..., au moyen de formules où le temps n'entre pas, on aura

$$x' = \frac{dx}{dq_1} q'_1 + \frac{dx}{dq_2} q'_2 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quant à x', y', ..., on substitue leurs valeurs dans T; cette quantité devient une fonction homogène et du second degré de q'_1, q'_2, ... On a donc, par le théorème des fonctions homogènes,

$$2\mathrm{T} = \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq'} q';$$

ce que l'on peut écrire ainsi qu'il suit, en vertu de la formule (3),

$$\mathrm{T} = \Sigma pq' - \mathrm{T}.$$

En différentiant cette équation, on a

$$\delta\mathrm{T} = \Sigma p\,\delta q' + \Sigma q'\,\delta p - \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq} \delta q - \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq'} \delta q'.$$

Cette formule, en vertu de (3), se réduit à

$$\delta\mathrm{T} = \Sigma q'\,\delta p - \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq} \delta q.$$

Or rien n'empêche de supposer maintenant T exprimé en fonction des p et des q. La formule précédente deviendra ainsi

$$\sum \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}p} \delta p + \sum \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}q} \delta q = \Sigma q'\,\delta p - \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq} \delta q;$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}p} &= q', \\ \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}q} &= -\frac{d\mathrm{T}}{dq}; \end{aligned} \right.$$

la formule (4) devient alors

$$(6) \qquad \frac{dp}{dt} + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q} - \frac{dU}{dq} = 0.$$

Nous supposerons que la fonction U ne contienne pas les q'; alors $\frac{dU}{dq}$ sera égal à $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q}$, et $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}p}$ sera identiquement nul. La formule (6) pourra alors s'écrire ainsi

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\mathrm{d}(T - U)}{\mathrm{d}q}.$$

Quant à la première formule (5), on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathrm{d}(T - U)}{\mathrm{d}p}.$$

En posant

$$(7) \qquad T - U = H,$$

les deux formules précédentes donneront

$$(8) \qquad \frac{dp}{dt} = - \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p},$$

et l'on aura autant d'équations semblables à celles-ci qu'il y a de variables p et q. Ces équations, données pour la première fois par Hamilton, ont reçu le nom d'*équations canoniques du mouvement* (*).

(*) On peut, en partant des formules (8), retrouver le théorème des forces vives. Pour cela, il suffit de multiplier la première de ces équations par $\frac{dq}{dt}$, la seconde par $\frac{dp}{dt}$, et de les retrancher l'une de l'autre; on a ainsi

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q}\frac{dq}{dt} + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p}\frac{dp}{dt} = 0.$$

En ajoutant ensemble toutes les équations obtenues en changeant dans

248. Pour en bien faire saisir le sens, nous allons supposer que les coordonnées $q_1, q_2, \ldots$ se réduisent précisément aux coordonnées rectangulaires $x_1, y_1, z_1, \ldots$. Dans ce cas, on a

$$T = \sum \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$p = \frac{dT}{dx'} = mx', \quad \frac{dT}{dp} = \frac{dT}{d.mx'} = x',$$

$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{dH}{dx} = -\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dH}{dp} = \frac{dT}{d.mx'} = x';$$

par suite, les équations (8) deviennent

$$m\frac{dx'}{dt} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{dx}{dt} = x'.$$

II. — Définition de la fonction caractéristique.

249. Hamilton a donné le nom de fonction caractéristique à l'intégrale

$$(1) \qquad S = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt.$$

Si nous faisons varier cette intégrale en laissant fixes les positions extrêmes du système, nous trouvons, en

---

celles-ci q et p en q_1 et p_1, en q_2 et p_2; ..., q_k et p_k, il vient

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad H = \text{const.}$$

Or H n'est autre chose que $T - U$. On a donc

$$T - U = T_0 - U_0 \quad \text{ou} \quad T - T_0 = U - U_0,$$

l'indice o indiquant que dans T et U on doit faire $t = t_0$. Si l'on se rappelle alors que T est la demi-force vive et U le travail total des forces, la formule précédente contient, comme on voit, l'expression du théorème des forces vives.

vertu du principe d'Hamilton (237), $\delta S = 0$; au contraire, en faisant varier les limites, on a

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U)\, dt = \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dq'}\delta q' + \frac{dU}{dq}\delta q \right) dt$$

ou, en intégrant par parties,

$$\delta S = \left(\sum \frac{dT}{dq'}\delta q \right)_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{dT}{dq} - \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} + \frac{dU}{dq} \right) \delta q\, dt,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations du mouvement (247),

$$(2) \qquad \delta S = \sum \frac{dT}{dq'}\delta q - \sum \left(\frac{dT}{dq'} \right)_0 \delta (q)_0.$$

Il en résulte

$$(3) \qquad \frac{dS}{dq} = \frac{dT}{dq'}, \quad \frac{dS}{d(q)_0} = -\left(\frac{dT}{dq'} \right)_0.$$

En partant de là, il est facile de former une équation aux différences partielles à laquelle satisfasse la fonction S. Cette fonction contient le temps et les variables q explicitement; elle ne contient pas les q'. Cela résulte de la formule (2), dans laquelle n'entrent pas les variations de $\delta q'_1$, $\delta q'_2$, ... Si l'on différentie alors cette fonction par rapport au temps, en désignant par $\left(\frac{dS}{dt}\right)$ la dérivée partielle de S prise par rapport à t, la formule (1) donnera

$$\left(\frac{dS}{dt} \right) + \sum \frac{dS}{dq} q' = T + U;$$

mais, en vertu des formules (3), cette équation devient

$$\left(\frac{dS}{dt} \right) + \sum \frac{dT}{dq'} q' = T + U,$$

et, en se rappelant que T est une fonction homogène du second degré des q',

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) + 2T = T + U,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = -(T - U)$$

ou bien

$$(4) \qquad \left(\frac{dS}{dt}\right) = -H.$$

Dans cette formule, remplaçons T par sa valeur exprimée en fonction des $p = \frac{dT}{dq'}$ et des q, et désignons par $F(p_1, \ldots, q_1, \ldots)$ cette valeur, nous aurons

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = U - F\left(\frac{dT}{dq'_1}, \ldots, q_1, \ldots\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de (3),

$$(5) \qquad \left(\frac{dS}{dt}\right) = U - F\left(\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right).$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle satisfait la fonction S.

On aurait trouvé de la même façon

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dq}\right)_0 (q')_0 = (T + U)_0,$$

et sans qu'il soit nécessaire de recommencer les calculs, on voit comment on serait arrivé à l'équation

$$(5\,bis) \quad \left(\frac{dS}{dt}\right)_0 = U_0 - F\left[-\left(\frac{dS}{dq_1}\right)_0, -\left(\frac{dS}{dq_2}\right)_0, \ldots, (q_1)_0, (q_2)_0, \ldots\right],$$

Si les coordonnées $q_1, q_2, \ldots$, par exemple, se réduisent aux coordonnées rectangulaires $x, y, z, \ldots$, la fonction F devient

$$\sum \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

c'est-à-dire, en observant que $\frac{dT}{dx'}$ est égal à mx',

$$\sum \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dT}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dz'}\right)^2\right].$$

L'équation (5) devient alors

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = U - \sum \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz}\right)^2\right].$$

III. — De la fonction principale.

250. Hamilton a donné le nom de *fonction principale* à l'intégrale

$$V = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt, \tag{1}$$

que l'on considère dans le principe de la moindre action. Cette intégrale joue dans la théorie qui nous occupe le même rôle que la fonction S; aussi convient-il d'étudier ces fonctions simultanément. Mais la fonction V présente sur la fonction S cet avantage (précieux, comme nous le verrons par la suite) de ne point contenir le temps explicitement.

En effet, nous avons trouvé dans le paragraphe précédent [équation (4)]

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = -H. \tag{2}$$

Or

$$S = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt = V - \int_{t_0}^{t} H\,dt;$$

mais la quantité H est constante en vertu du principe des forces vives. On a donc

$$(3) \qquad S = V - H(t - t_0).$$

Si l'on différentie alors partiellement par rapport à t, on a

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = \left(\frac{dV}{dt}\right) - H,$$

c'est-à-dire, en vertu de (2),

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0.$$

La fonction V ne contient donc pas le temps explicitement ainsi que nous l'avions annoncé.

Si dans la formule (3) on fait $t_0 = 0$ et si l'on considère V comme fonction de $q_1, q_2, \ldots$ et de H, on a

$$\frac{dS}{dq} = \frac{dV}{dq}, \quad \frac{dV}{dH} = t, \quad \left(\frac{dS}{dt}\right) = -H.$$

L'équation (5) du paragraphe précédent devient alors

$$-H = U - F\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right),$$

ou bien

$$(A) \qquad F\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right) = H + U.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction principale. Lorsque l'on prend des coordonnées rectangulaires et lorsque en outre le système n'est soumis à aucune liaison, l'équation précédente prend la forme

$$(B) \qquad \sum \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = U + H.$$

Nous avons déjà fait au paragraphe précédent le calcul de la fonction F; en substituant dans l'équation (A) à la place de F sa valeur, on obtient la formule (B).

IV. — Théorème de Jacobi.

Nous avons trouvé plus haut (249)

$$\frac{dS}{d(q)_0} = -\left(\frac{dT}{dq'}\right)_0.$$

Les équations contenues dans ce type sont les intégrales du mouvement, puisqu'elles établissent k relations renfermant $2k$ constantes arbitraires entre $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et t. On voit ainsi que les intégrales du mouvement peuvent s'obtenir en égalant à des constantes les dérivées de la fonction caractéristique prises par rapport à d'autres constantes (*), qui ne sont autre chose que les valeurs initiales des variables. Or la fonction caractéristique est définie par l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = U - F\left(\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right).$$

Il était naturel de se demander si une intégrale quelconque de cette équation ne pourrait pas remplacer la fonction S. C'est ce qui a lieu en effet, et cela résulte du beau théorème suivant.

251. Théorème de Jacobi. — *Soit* S *une intégrale de l'équation aux différences partielles*

$$(1)\quad \left(\frac{dS}{dt}\right) + f\left(\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, \frac{dS}{dq_k}, q_1, q_2, \ldots, q_k, t\right) = 0,$$

(*) Cette remarque est d'Hamilton.

renfermant k constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *différentes de celle que l'on peut toujours introduire par simple addition. Les* $2k$ *équations dont le type est*

$$\frac{dS}{dq} = p, \quad \frac{dS}{d\alpha} = \beta, \tag{2}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *désignant de nouvelles constantes, seront les intégrales des équations simultanées dont le type est*

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{df}{dp}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{df}{dq}, \tag{3}$$

la fonction f qui entre dans ces équations ne différant de celle qui entre dans (1) *que par le changement de* $\frac{dS}{dq}$ *en p.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire voir que les équations (3) sont des conséquences de (2). Les formules (2), résolues par rapport aux p et aux q, permettent d'exprimer ces variables en fonction de t, des α et des β.

Soient d une caractéristique de différentiation relative à t et δ une caractéristique relative aux α et aux β, en sorte que $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ soit la dérivée de F prise en laissant les α et les β constants et δF une différentielle prise en laissant t constant et en faisant varier $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$.

On aura

$$\delta \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta S}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Or

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{dS}{dt} + \sum \frac{dS}{dq}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad (*),$$

(*) $\frac{dS}{dt}$ est la dérivée partielle de S prise par rapport à t, S est fonction explicite de $t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

ou, en vertu de (1),

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -f + \sum \frac{dS}{dq}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

En différentiant cette formule, on a

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -\sum \frac{df}{dq}\delta q - \sum \frac{df}{d\left(\frac{dS}{dq}\right)}\delta\frac{dS}{dq} \\ &\quad + \sum \frac{dS}{dq}\delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\delta\frac{dS}{dq}. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, on a

$$\delta S = \sum \frac{dS}{dq}\delta q + \frac{dS}{d\alpha}\delta\alpha.$$

Or $\frac{dS}{d\alpha}$ est constant en vertu de (2); donc

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{d}\,\delta S}{\mathrm{d}t} = \sum \delta q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{dS}{dq} + \sum \frac{dS}{dq}\delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Si l'on a alors égard aux formules (2), les formules (5) et (6) deviennent

$$\delta\frac{dS}{dt} = -\sum \frac{df}{dq}\delta q - \sum \frac{df}{dp}\delta p + \sum p\,\delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\delta p,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta S}{\mathrm{d}t} = \sum \delta q \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \sum p\,\delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

En vertu de la formule (4) les deux premiers membres des deux formules précédentes sont égaux, les seconds doivent l'être aussi, on a donc

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\delta q + \sum p\,\delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ &\qquad = -\sum \frac{df}{dq}\delta q - \sum \frac{df}{dp}\delta p + \sum p\,\delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\delta p, \end{aligned}$$

ou bien

$$(7) \qquad \sum \delta q \left(\frac{dp}{dt} + \frac{df}{dq} \right) = \sum \delta p \left(\frac{dq}{dt} - \frac{df}{dp} \right),$$

et dans cette formule il ne faut pas oublier que f représente la même fonction que dans (1), à cela près que $\frac{dS}{dq}$ a été remplacé par p.

Mais $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\beta_1, \ldots$ sont tout à fait arbitraires; par suite, $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta p_1, \delta p_2, \ldots$ sont également arbitraires.

La formule (7) est donc équivalente aux équations (3)

$$(3) \qquad \frac{dp}{dt} + \frac{df}{dq} = 0, \quad \frac{dq}{dt} - \frac{df}{dp} = 0;$$

donc enfin les équations (3) sont des conséquences de (2), et, par suite, les formules (2) sont les intégrales de ces dernières.

Corollaire I. — *Si la fonction* S *satisfait à l'équation différentielle de la fonction caractéristique*

$$\left(\frac{dS}{dt} \right) - U + (T) = 0,$$

(T) *désignant ce que devient* T *quand on y remplace* p, *par* $\frac{dS}{dq}$, *et si cette fonction contient* k *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$,

$$\frac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1 \ldots, \quad \frac{dS}{d\alpha_k} = \beta_k$$

seront les intégrales des équations dont le type est

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(T - U)}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{d(T - U)}{dq},$$

c'est-à-dire des équations du mouvement.

COROLLAIRE II. — *Si la fonction* V *renferme* $k-1$ *constantes arbitraires* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, *et si elle satisfait à l'équation de la fonction principale*

$$H + U - (T) = 0,$$

où (T) *désigne ce que devient* T *quand on remplace* p *par* $\frac{dV}{dq}$, *les intégrales du mouvement seront*

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1 \ldots, \quad \frac{dV}{d\alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{dV}{dH} = t + \tau,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \tau$ *désignant de nouvelles constantes.*

En effet, considérons l'équation

$$(a) \qquad \frac{dW}{dt} - U + ((T)) = 0,$$

((T)) désignant ce que devient T quand on remplace p par $\frac{dW}{dq}$; si, dans l'équation (a), on pose

$$W = V - Ht,$$

il vient, en observant que V n'est pas fonction de t,

$$H + U - (T) = 0,$$

et l'on retombe sur l'équation proposée. Or, si l'on connaît une intégrale de l'équation proposée, on en connaîtra aussi une de (a) : il suffira, pour cela, d'y ajouter $-Ht$. Or l'équation (a) est précisément celle de la fonction caractéristique; les intégrales du mouvement seront donc

$$\frac{d(V - Ht)}{d\alpha_1} = \beta_1, \ldots, \quad \frac{d(V - Ht)}{d\alpha_{k-1}}, \quad \frac{d(V - Ht)}{dH} = \tau,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \ldots, \quad \frac{dV}{d\alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{dV}{dH} = t + \tau,$$

C. Q. F. D.

252. En résumé, *pour résoudre un problème de Dynamique, dans le cas où il existe une fonction des forces, formez l'équation*

$$\text{(A)} \qquad H + U - T = 0,$$

dans laquelle H *est une constante,* U *la fonction des forces,* T *la demi-force vive exprimée à l'aide des variables q qui satisfont identiquement aux liaisons et des quantités $p = \frac{dT}{dq}$, remplacez p par $\frac{dV}{dq}$; si vous pouvez trouver une solution complète* V *de l'équation aux dérivées partielles* (A), *les équations finies du mouvement seront*

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \ldots, \quad \frac{dV}{d\alpha_k} = \beta_k, \quad \frac{dV}{dH} = t + \tau,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *désignant de nouvelles constantes. Rappelons enfin que, dans le cas d'un système libre, l'équation* (A), *exprimée à l'aide de coordonnées rectangulaires, est*

$$\sum \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = U + H \ (^*).$$

253. Nous ne pouvons nous empêcher de faire connaître une belle méthode d'intégration due à Jacobi, et qui découle tout naturellement des théories précédentes. Cette méthode repose sur un théorème qui doit être con-

---

(*) Nous ferons des applications de ces théorèmes à partir du n° 267.

sidéré comme la réciproque du théorème démontré tout à l'heure.

THÉORÈME II. — *Supposons que l'on ait intégré les équations canoniques*

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dq_1}{dt}=\dfrac{df}{dp_1}, & \dfrac{dp_1}{dt}=-\dfrac{df}{dq_1}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dq_k}{dt}=\dfrac{df}{dp_k}, & \dfrac{dp_k}{dt}=-\dfrac{df}{dq_k}, \end{array}\right.$$

qui ne sont autres que celles du mouvement; désignons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *les valeurs de* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *et par* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *celles de* $q_1, q_2, \ldots, q_k$ *pour* $t=\tau$; *exprimons* $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k$ *en fonction de* t *et de* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ *au moyen des intégrales des équations* (1); *substituons ces valeurs de* $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ *dans l'intégrale*

$$(2)\qquad S=\int_\tau^t\left(p_1\frac{df}{dp_1}+p_2\frac{df}{dp_2}+\ldots+p_k\frac{df}{dp_k}-f\right)dt;$$

remplaçons enfin, dans S, *les constantes* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ *par leurs valeurs exprimées en fonction de* $q_1, q_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, t$, *au moyen des intégrales de* (1).

1° *On aura*

$$\frac{dS}{dq}=p, \quad \frac{dS}{d\alpha}=-\beta;$$

2° S *sera une solution de l'équation aux différences partielles*

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)+f\left(\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, \frac{dS}{dq_k}, q_1, q_2, \ldots, q_k\right)=0.$$

1° Faisons varier les β et les α, nous aurons, en désignant par δ une différentielle prise dans cette hypothèse,

$$\delta S = \int_\tau^t \left(\delta p_1 \frac{df}{dp_1} + p_1 \delta \frac{df}{dp_1} + \ldots \right.$$
$$\left. - \frac{df}{dp_1}\delta p_1 - \frac{df}{dq_1}\delta q_1 - \ldots \right) dt,$$

ou bien, ôtant les termes qui se détruisent et ayant égard aux formules (1),

$$\delta S = \int_\tau^t \left(p_1 \delta \frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \ldots \right) dt.$$

Si l'on intègre par parties, on trouve

$$\delta S = p_1 \delta q_1 - \beta_1 \delta \alpha_1 + \ldots + p_k \delta q_k - \beta_k \delta \alpha_k,$$

on en conclut

$$(3) \qquad \frac{dS}{dq_1} = p_1, \ldots, \quad \frac{dS}{d\alpha_1} = -\beta_1, \ldots \text{ (*)}.$$

2° Différentions l'équation (2) par rapport à t, nous aurons, en observant que S est fonction de t, q_1, $q_2, \ldots, q_n$ seulement, les β ayant été exprimés en fonction de ces variables,

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) + \frac{dS}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dS}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots = p_1 \frac{df}{dp_1} + p_2 \frac{df}{dp_2} + \ldots - f.$$

Si l'on remplace dans cette formule p par sa valeur $\frac{dS}{dq}$ déduite (3), et $\frac{df}{dp}$ par sa valeur $\frac{dq}{dt}$ déduite des équations canoniques (1), il vient, réductions faites,

$$(4) \qquad \left(\frac{dS}{dt}\right) + (f) = 0,$$

(*) Les équations (3) ne sont autre chose que les intégrales des équations (1).

(f) désignant ce que devient f quand on y remplace p par $\frac{dS}{dq}$. Le théorème se trouve donc démontré.

Il résulte de là que, pour trouver une solution complète de l'équation (4), il suffit d'intégrer les équations (1) et d'ajouter une constante arbitraire à l'intégrale (2), qui contient déjà les k constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Or la forme (4) est une forme que l'on peut assigner à toute équation aux différences partielles du premier ordre qui ne contient pas la fonction inconnue S, il suffit pour cela de la résoudre par rapport à l'une des dérivées de S. On peut, du reste, se dispenser d'effectuer cette résolution. Supposons que l'équation donnée se présente sous la forme

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \tag{5}$$

$p_1, p_2, \ldots$ désignant, pour abréger, les dérivées de la fonction inconnue S prises par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Supposons que l'on résolve l'équation (5) par rapport à p_n, cette équation prendra la forme

$$p_n + f(p_1, \ldots, p_{n-1}, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0,$$

et cette équation ne diffère pas de (4); p_n y représente $\frac{dS}{dt}$ et q_n y représente t; il s'agit de former $\frac{df}{dq}$ et $\frac{df}{dp}$, c'est-à-dire $-\frac{dp_n}{dq}$ et $-\frac{dp_n}{dp}$. La règle des fonctions implicites va nous fournir ces quantités : en effet, en posant, pour abréger,

$$\frac{dF}{dp} = P, \quad \frac{dF}{dq} = Q,$$

on a

$$\frac{df}{dp} = -\frac{dp_n}{dp} = \frac{P}{P_n}, \quad \frac{df}{dq} = -\frac{dp_n}{dq} = \frac{Q}{P_n};$$

6.

les équations (1) sont alors remplacées par

$$(6) \qquad \frac{dq_1}{Q_1} = \frac{dq_2}{Q_2} = \ldots = -\frac{dp_1}{P_1} = \ldots = -\frac{dp_{n-1}}{P_{n-1}};$$

p_n devant être éliminé de ces équations au moyen de (5).

Ainsi, pour intégrer l'équation (5), on formera les équations

$$(7) \qquad \frac{dq_1}{P_1} = \frac{dq_2}{P_2} = \ldots = \frac{dq_n}{P_n} = \ldots - \frac{dp_1}{Q_1} = \ldots = -\frac{dp_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Après avoir éliminé p_n au moyen de l'équation (5), on intégrera ces formules, et la solution complète de l'équation (5) sera

$$S = \int_{\tau}^{q_n} \left(\frac{P_1 p_1 + \ldots + P_{n-1} p_{n-1}}{P_n} + p_n \right) dq_n + \text{const.}$$

Cette dernière formule est équivalente à

$$\frac{dS}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n} = \frac{dq_n}{P_n},$$

en sorte que l'on pourra se borner à intégrer les équations (7) modifiées comme il suit :

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{P_1} = \ldots = \frac{dq_n}{P_n} = -\frac{dp_1}{Q_1} = \ldots = -\frac{dp_{n-1}}{Q_{n-1}} \\ = \frac{dS}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n}, \end{aligned}$$

ces équations étant débarrassées, bien entendu, de p_n au moyen de (5), comme il a été dit. Entre les intégrales on éliminera les p et leurs valeurs initiales, et l'équation résultante en S, $q_1, \ldots, q_n$ sera une solution complète de l'équation (5).

Lorsque l'équation proposée contient la fonction inconnue, on peut, en introduisant une variable de plus, la ramener au type examiné plus haut.

En effet, supposons que l'intégrale S soit donnée par l'équation

$$V(q_1, q_2, \ldots, S) = 0,$$

on en déduit

$$\frac{dS}{dq_1} = -\frac{dV}{dq_1} : \frac{dV}{dS},$$

$$\frac{dS}{dq_2} = -\frac{dV}{dq_2} : \frac{dV}{dS}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

et en portant ces valeurs dans l'équation à intégrer, que l'on peut mettre sous la forme

$$\Pi\left(q_1, q_2, \ldots, \frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, S\right) = 0,$$

cette équation contiendra les variables S, q_1, $q_2, \ldots$, et les dérivées $\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, \frac{dV}{dS}$, mais ne contiendra pas explicitement V, que l'on pourra considérer comme la fonction inconnue.

Proposons-nous d'intégrer, par exemple,

$$\frac{dS}{dq_1}\frac{dS}{dq_2} = a \quad \text{ou} \quad p_1 p_2 = a,$$

a désignant une constante. Ici on a $P_1 = p_2$, $P_2 = p_1$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$. On posera donc

$$\frac{dq_1}{p_2} = \frac{dq_2}{p_1} = -\frac{dp_1}{0} = \frac{dS}{2p_1p_2};$$

on éliminera p_2, et l'on aura

$$p_1\frac{dq_1}{a} = \frac{dq_2}{p_1} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dS}{2a}.$$

Il vient, en intégrant et en désignant par S_0 la valeur initiale de S,

$$p_1 = \beta_1, \quad \frac{\beta_1}{a}(q_1 - \alpha_1) = \frac{q_2}{\beta_1} = \frac{S - S_0}{2a};$$

il ne reste plus qu'à éliminer β_1, on a

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{aq_2}{q_1 - \alpha_1}},$$

et, par suite,

$$S = S_0 + 2\sqrt{aq_2(q_1 - \alpha_1)}.$$

On a ainsi une intégrale complète de l'équation proposée.

Lorsque l'on connaît une intégrale complète d'une équation aux différences partielles, on en déduit aisément l'intégrale la plus générale par la méthode de la variation des constantes. Soit, en effet,

$$(1) \qquad \varphi(q_1, q_2, \ldots, V, a_1, a_2, \ldots) = 0$$

une solution complète d'une équation aux différences partielles (E), V désignant la fonction, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les variables, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les constantes d'intégration. Si de (1) on tire les valeurs de V, $\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \cdots$ pour les porter dans (E), cette dernière équation devra être satisfaite, quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et, par suite, quand on remplacera $a_1, a_2, \ldots$ par des fonctions de $q_1, q_2, \ldots$, pourvu que, dans les différentiations qui font connaître $\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \cdots$, on laisse $a_1, a_2, \ldots$ constants. Or, en supposant $a_1, a_2, \ldots$ variables, on tire de (1) n équations, dont le type est

$$\frac{d\varphi}{dq} + \frac{d\varphi}{dV}\frac{dV}{dq} + \sum \frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dq} = 0.$$

Ces équations se réduiraient à la forme

$$\frac{d\varphi}{dq} + \frac{d\varphi}{dV}\frac{dV}{dq} = 0,$$

c'est-à-dire seraient identiques à celles qui font connaître $\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \dots$ quand $a_1, a_2, \dots$ sont constants, si l'on déterminait $a_1, a_2, \dots$ au moyen des formules

$$(2) \qquad \sum \frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dq_1} = 0, \quad \sum \frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dq_2} = 0, \dots,$$

auxquelles on peut satisfaire :

1° En supposant

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{da_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{da_2} = 0, \dots;$$

ces équations, au nombre de n, permettent de déterminer les quantités $a_1, a_2, \dots, a_n$ en fonction de $q_1, q_2, \dots, q_n$; en portant ces valeurs dans (1), ou si l'on veut, en éliminant $a_1, a_2, \dots$ entre (1) et (3), on a encore une solution de (E); cette solution est ce que l'on appelle une *solution singulière :* la solution singulière pourra souvent ne pas exister, c'est ce qui arriverait si les équations (3) étaient incompatibles;

2° On satisfera encore aux formules (2), en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{da_1}{dq_1}, & \frac{da_1}{dq_2}, \dots, & \frac{da_1}{dq_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_n}{dq_1}, & \frac{da_n}{dq_2}, \dots, & \frac{da_n}{dq_n} \end{vmatrix} = \Theta.$$

Or (*voir* la Note placée à la fin du volume) la condition $\Theta = 0$ exprime que les fonctions $a_1, a_2, \dots$ ne sont pas distinctes, c'est-à-dire qu'il existe entre elles une ou plusieurs relations. On peut, par exemple, supposer que a_i, $a_{i+1}, \ldots, a_n$ soient fonctions de $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, et poser

$$a_i = \varpi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}), \ldots; \tag{4}$$

les équations (2) seront alors de la forme

$$\frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dq}\cdots\frac{d\varphi}{da_{i-1}}\frac{da_{i-1}}{dq} + \sum \frac{d\varphi}{d\varpi}\left(\frac{d\varpi}{da_1}\frac{da_1}{dq} + \ldots + \frac{d\varpi}{da_{i-1}}\frac{da_{i-1}}{dq}\right) = 0.$$

En multipliant la première de ces formules par dq_1, la seconde par $dq_2, \ldots$, et en ajoutant, on aura l'équation suivante, qui équivaut aux relations (2)

$$\frac{d\varphi}{da_1}da_1 + \ldots + \frac{d\varphi}{da_{i-1}}da_{i-1} + \sum \frac{d\varphi}{d\varpi}\left(\frac{d\varpi}{da_1}da_1 + \ldots + \frac{d\varpi}{da_{i-1}}da_{i-1}\right) = 0;$$

égalant à zéro les coefficients des quantités arbitraires $da_1, da_2, \ldots$, il viendra

$$\frac{d\varphi}{da_1} + \frac{d\varphi}{d\varpi_i}\frac{d\varpi_i}{da_1} + \frac{d\varphi}{d\varpi_{i+1}}\frac{d\varpi_{i+1}}{da_1} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ces équations au nombre de $i - 1$, jointes aux $n - i + 1$ équations (4), feront connaître les quantités $a_1, \ldots, a_{n-1}$, et en les portant dans (1), on aura une nouvelle intégrale de (E). Je dis que cette intégrale est la plus générale que l'on puisse former, le nombre i restant bien entendu indéterminé.

En effet, soit W une solution quelconque de (E), et V la solution complète. Faisons varier $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et déterminons ces quantités au moyen de n formules choisies parmi les $n+1$ qui suivent

$$(5) \qquad V = W,$$

$$(6) \qquad \frac{dV}{dq_1} = \frac{dW}{dq_1}, \quad \frac{dV}{dq_2} = \frac{dW}{dq_2}, \ldots, \quad \frac{dV}{dq_n} = \frac{dW}{dq_n}.$$

Ces formules se réduisent évidemment à n, en vertu de l'équation (E), qui montre que l'une quelconque des quantités $\frac{dV}{dq}$, $\frac{dV}{dq_2}$, ..., V, est déterminée, quand on connaît les autres. De (5) on tire

$$\frac{dW}{dq} = \frac{dV}{dq} + \frac{dV}{da_1}\frac{da_1}{dq} + \ldots + \frac{dV}{da_n}\frac{da_n}{dq},$$

c'est-à-dire en vertu de (6)

$$(7) \qquad \frac{dV}{da_1}\frac{da_1}{dq} + \ldots + \frac{dV}{da_n}\frac{da_n}{dq} = 0.$$

Cette formule représente un type d'équations identiques à (2); donc quelle que soit la solution W, on la déduira de la solution complète par les moyens indiqués plus haut. Nous avons donc trouvé la solution la plus générale de (E).

V. — Théorèmes de Poisson et de Lagrange. — Formules de Cauchy.

254. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, $2k$ fonctions des variables $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et $q_1, q_2, \ldots, q_k$. On pourra aussi regarder les p et les q comme fonctions des α. En regardant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ comme fonctions de $p_1, \ldots$ et $q_1, \ldots$, Poisson désigne par la notation (α_i, α_j) la quantité

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{\mu=1}^{\mu=k} \left(\frac{d\alpha_i}{dq_\mu}\frac{d\alpha_j}{dp_\mu} - \frac{d\alpha_i}{dp_\mu}\frac{d\alpha_j}{dq_\mu} \right),$$

en sorte que l'on a

$$(\alpha_i, \alpha_j) = -(\alpha_j, \alpha_i), \quad (\alpha_i, \alpha_i) = 0.$$

En regardant au contraire les p et les q comme fonctions de α, Lagrange pose

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \sum_{\mu=1}^{\mu=k} \left(\frac{dq_\mu}{d\alpha_i} \frac{dp_\mu}{d\alpha_j} - \frac{dq_\mu}{d\alpha_j} \frac{dp_\mu}{d\alpha_i} \right),$$

et l'on a

$$[\alpha_i, \alpha_j] = -[\alpha_j, \alpha_i], \quad [\alpha_i, \alpha_i] = 0.$$

255. Théorème de Lagrange. — *Considérons les équations du mouvement sous la forme canonique*

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp} \tag{1}$$

(*ici nous n'avons plus besoin de distinguer plusieurs espèces de différentielles, c'est pourquoi nous adoptons partout la caractéristique* d); *si les équations*

$$\alpha_i = \text{const.}, \quad \alpha_j = \text{const.}$$

représentent des intégrales des équations (1), *on aura*

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \text{const.}$$

En effet, concevons que les équations du mouvement ayant été intégrées, on substitue, à la place des p et des q, dans H, leurs valeurs exprimées à l'aide des constantes d'intégration et de t. On aura

$$\frac{dH}{d\alpha_i} = \sum \left(\frac{dH}{dp} \frac{dp}{d\alpha_i} + \frac{dH}{dq} \frac{dq}{d\alpha_i} \right),$$

c'est-à-dire en vertu des équations (1)

$$\frac{dH}{d\alpha_i} = \sum \left(\frac{dq}{dt} \frac{dp}{d\alpha_i} - \frac{dp}{dt} \frac{dq}{d\alpha_i} \right).$$

On déduit de là

$$\frac{d^2H}{d\alpha_i\,d\alpha_j}=\sum\left(\frac{dq}{dt}\,\frac{d^2p}{d\alpha_i\,d\alpha_j}-\frac{dp}{dt}\,\frac{d^2q}{d\alpha_i\,d\alpha_j}\right)$$
$$+\sum\left(\frac{dp}{d\alpha_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dq}{d\alpha_j}-\frac{dq}{d\alpha_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dp}{d\alpha_j}\right).$$

On aurait trouvé de la même façon

$$\frac{d^2H}{d\alpha_j\,d\alpha_i}=\sum\left(\frac{dq}{dt}\,\frac{d^2p}{d\alpha_i\,d\alpha_j}-\frac{dp}{dt}\,\frac{d^2q}{d\alpha_i\,d\alpha_j}\right)$$
$$+\sum\left(\frac{dp}{d\alpha_j}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dq}{d\alpha_i}-\frac{dq}{d\alpha_j}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dp}{d\alpha_i}\right).$$

De ces deux équations on tire, en les retranchant l'une de l'autre,

$$0=\sum\left(\frac{dp}{d\alpha_j}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dq}{d\alpha_i}+\frac{dq}{d\alpha_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dp}{d\alpha_j}-\frac{dq}{d\alpha_j}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dp}{d\alpha_i}-\frac{dp}{d\alpha_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{dq}{d\alpha_j}\right),$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{dq}{d\alpha_i}\,\frac{dp}{d\alpha_j}-\frac{dp}{d\alpha_i}\,\frac{dq}{d\alpha_j}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d[\alpha_i,\,\alpha_j]}{dt}=0,$$

ce qui prouve que $[\alpha_i,\,\alpha_j]$ reste constant.

C. Q. F. D.

256. Théorème de Poisson. — *Si α_i et α_j égalées à des constantes représentent des intégrales du mouvement, on aura*

$$(\alpha_i,\,\alpha_j)=\text{const.}$$

En effet, on a

$$(\alpha_i,\,\alpha_j)=\sum\left(\frac{d\alpha_i}{dq}\,\frac{d\alpha_j}{dp}-\frac{d\alpha_i}{dp}\,\frac{d\alpha_j}{dq}\right).$$

Si dans cette formule on fait successivement $j = 1, 2, 3, \ldots, 2k$; si l'on multiplie la première des équations ainsi obtenues par $\dfrac{dp_\mu}{d\alpha_1}$, la seconde par $\dfrac{dp_\mu}{d\alpha_2}, \ldots$, et si l'on ajoute, en observant que

$$1 = \frac{dp_\mu}{dp_\mu} = \frac{dp_\mu}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_\mu} + \frac{dp_\mu}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dp_\mu} + \ldots,$$

$$0 = \frac{dp_\mu}{dp_\nu} = \frac{dp_\mu}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_\nu} + \frac{dp_\mu}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dp_\nu} + \ldots,$$

$$0 = \frac{dp_\mu}{dq} = \frac{dp_\mu}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dq} + \frac{dp_\mu}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dq} + \ldots,$$

on trouve

$$(2) \qquad (\alpha_i, \alpha_1)\frac{dp_\mu}{d\alpha_1} + (\alpha_i, \alpha_2)\frac{dp_\mu}{d\alpha_2} + \ldots = \frac{d\alpha_i}{dq_\mu}.$$

On trouverait d'une manière analogue

$$(3) \qquad (\alpha_i, \alpha_1)\frac{dq_\mu}{d\alpha_1} + (\alpha_i, \alpha_2)\frac{dq_\mu}{d\alpha_2} + \ldots = -\frac{d\alpha_i}{dp_\mu}.$$

Multiplions l'équation (2) par $\dfrac{dq_\mu}{d\alpha_j}$, l'équation (3) par $-\dfrac{dp_\mu}{d\alpha_j}$, ajoutons-les, puis dans la formule résultante faisons $\mu = 1, 2, 3, \ldots, 2k$, et ajoutons les résultats, en observant que l'on a

$$\frac{d\alpha_i}{d\alpha_j} = \frac{d\alpha_i}{dp_i}\frac{dp_1}{d\alpha_j} + \ldots + \frac{d\alpha_i}{dq_1}\frac{dq_1}{d\alpha_j} + \ldots = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = j, \\ 0 \text{ pour } i \gtrless j. \end{cases}$$

On trouve

$$(4)\left\{\begin{aligned} &(\alpha_i, \alpha_1)[\alpha_j, \alpha_1] + (\alpha_i, \alpha_2)[\alpha_j, \alpha_2] \\ &\qquad + (\alpha_i, \alpha_3)[\alpha_j, \alpha_3] + \ldots = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = j, \\ 0 \text{ pour } i \gtrless j. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

En donnant dans ces formules, à j les valeurs $1, 2, 3, \ldots, 2k$, on aura $2k$ équations du premier degré, d'où l'on pourra tirer $(\alpha_i, \alpha_1)(\alpha_i, \alpha_2)\ldots(\alpha_i, \alpha_{2k})$ en fonction des quantités $[\alpha_i, \alpha_j]$; ces dernières étant constantes, il en résulte que (α_i, α_j) est constant lui-même. C. Q. F. D.

Les deux démonstrations qui précèdent sont de Cauchy, qui a établi pour la première fois la relation (4).

Nous verrons plus loin comment on peut faire usage du théorème de Poisson, bornons-nous, pour le moment, à faire observer que si (α_i, α_j) ne se réduit pas identiquement à une constante $(\alpha_i, \alpha_j) = \text{const.}$ sera une nouvelle intégrale du problème.

VI. — Changement des constantes. — Condition pour qu'un système d'équations représente la solution d'un problème de mécanique.

257. Supposons qu'aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, on désire substituer de nouvelles constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k}$ liées à celles-ci au moyen d'équations données, on a, par définition (254),

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \sum\left(\frac{dq}{d\alpha_i}\frac{dp}{d\alpha_j} - \frac{dp}{d\alpha_i}\frac{dq}{d\alpha_j}\right).$$

Si, dans cette formule, on remplace $\frac{dp}{d\alpha_j}$ et $\frac{dq}{d\alpha_j}$ par leurs valeurs

$$\frac{dp}{d\alpha_j} = \frac{dp}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{d\alpha_j} + \frac{dp}{d\beta_2}\frac{d\beta_2}{d\alpha_j} + \ldots,$$

$$\frac{dq}{d\alpha_j} = \frac{dq}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{d\alpha_j} + \frac{dq}{d\beta_2}\frac{d\beta_2}{d\alpha_j} + \ldots,$$

on trouve

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \frac{d\beta_1}{d\alpha_j}\sum\left(\frac{dq}{d\alpha_i}\frac{dp}{d\beta_1} - \frac{dp}{d\alpha_i}\frac{dq}{d\beta_1}\right) + \frac{d\beta_2}{d\alpha_j}\sum\Big(\ldots\Big) + \ldots,$$

ce que l'on peut écrire

$$(1) \qquad [\alpha_i, \alpha_j] = [\alpha_i, \beta_1]\frac{d\beta_1}{d\alpha_j} + [\alpha_i, \beta_2]\frac{d\beta_2}{d\alpha_j} + \ldots.$$

Dans cette formule, on remplacera $[\alpha_i, \beta_1]$, $[\alpha_i, \beta_2]$, ... par leurs valeurs

$$[\alpha_i, \beta_\mu] = \sum \left(\frac{dq}{d\alpha_i} \frac{dp}{d\beta_\mu} - \frac{dq}{d\beta_\mu} \frac{dp}{d\alpha_i} \right),$$

ou

$$[\alpha_i, \beta_\mu] = \frac{d\beta_1}{d\alpha_i} \sum \left(\frac{dq}{d\beta_1} \frac{dp}{d\beta_\mu} - \frac{dq}{d\beta_\mu} \frac{dp}{d\beta_1} \right) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$[\alpha_i, \beta_\mu] = \frac{d\beta_1}{d\alpha_i} [\beta_1, \beta_\mu] + \frac{d\beta_2}{d\alpha_i} [\beta_2, \beta_\mu] + \ldots,$$

et l'on aura ainsi exprimé les $[\alpha_i, \alpha_j]$ en fonction des $[\beta_i, \beta_j]$.

La formule (4) du paragraphe précédent,

$$(\alpha_i, \alpha_1)[\alpha_j, \alpha_1] + (\alpha_i, \alpha_2)[\alpha_j, \alpha_2] \ldots = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \gtrless j, \\ 1 \text{ pour } i = j, \end{cases}$$

montre que le produit des déterminants a et A, dont les éléments sont respectivement les quantités (α_i, α_j) et $[\alpha_i, \alpha_j]$, est égal à 1; on a donc

$$a.\mathrm{A} = 1. \tag{2}$$

La formule (1) montre que les déterminants dont les éléments sont respectivement les quantités $[\alpha_i, \beta_j]$ et $\frac{d\beta_\mu}{d\alpha_\nu}$ ont pour produit A; en désignant alors par C le premier de ces déterminants, on a (*)

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} \frac{\mathrm{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)}{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}; \tag{3}$$

(*) Nous employons avec Jacobi la notation $\frac{\mathrm{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)}{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}$ pour désigner le déterminant du système des fonctions β pris par rapport aux variables α.

en désignant par B le déterminant dont les éléments sont (β_i, β_j), on aurait de même

$$(4) \qquad \mathrm{B} = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}{\mathrm{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)};$$

en divisant les équations (3) et (4) membre à membre, on a

$$(5) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B}\left[\frac{\mathrm{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)}{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}\right]^2.$$

L'équation (2) donne, en y changeant α en β,

$$(6) \qquad b.\mathrm{B} = 1.$$

De (2), (5) et (6), on tire

$$(7) \qquad b = a\left[\frac{\mathrm{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)}{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}\right]^2.$$

Si l'on suppose $\beta_1 = q_1$, $\beta_2 = q_2, \ldots$, $\beta_k = q_k$ et $\beta_{k+1} = p_1, \ldots$, $\beta_{2k} = p_k$, le déterminant b se réduit à l'unité, en observant que ses termes sont de la forme (p_i, q_j), (p_i, p_j) ou (q_i, q_j), c'est-à-dire nuls ou égaux à l'unité, et la formule (7) devient

$$a = \left[\frac{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}{\mathrm{D}(p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots)}\right]^2.$$

258. *Ainsi le carré du déterminant des fonctions α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, qu'il faut égaler à des constantes pour avoir les intégrales d'un problème de Dynamique, est égal au déterminant des quantités (α_i, α_j) que l'on peut former avec ces fonctions ; il est donc constant pendant toute la durée du mouvement.*

J'ai démontré pour la première fois ce théorème dans une Note qui a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour l'année 1866.

258 *bis*. REMARQUE. — Les théorèmes que nous venons de démontrer supposent les fonctions α_i que nous avons considérées, distinctes de H, en sorte que ces théorèmes ne s'appliquent pas à l'intégrale des forces vives; cela ressort du mode de démonstration que nous avons employé. Il est facile de voir, du reste, que

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + (\alpha, \mathrm{H}) = 0.$$

En effet, soit $\alpha = \text{const.}$ une des intégrales du mouvement, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + \sum \left(\frac{d\alpha}{dq}\frac{dq}{dt} + \frac{d\alpha}{dp}\frac{dp}{dt}\right) = 0,$$

ou bien en vertu des équations du mouvement

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + \sum \left(\frac{d\alpha}{dq}\frac{d\mathrm{H}}{dp} - \frac{d\alpha}{dp}\frac{d\mathrm{H}}{dq}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + (\alpha, \mathrm{H}) = 0;$$

en sorte que, si l'intégrale α ne contient pas le temps, on a encore

$$(\alpha, \mathrm{H}) = 0,$$

mais seulement dans ce cas.

VII. — Théorèmes de M. Bertrand.

259. Le théorème de Poisson exprimé par la formule

$$(1) \qquad (\alpha_i, \alpha_j) = \text{const.}$$

fournira une intégrale nouvelle, si (α_i, α_j) ne se réduit pas identiquement à une constante, ou n'est pas une combinaison des intégrales déjà trouvées. Il était important d'examiner dans quels cas la formule (1) peut fournir une nouvelle intégrale. C'est ce que M. Bertrand a fait.

Pour abréger le langage, nous appellerons *intégrale* α l'intégrale $\alpha = \text{const.}$ Si l'on considère alors les $2k$ intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, $2k$ fonctions quelconques de ces quantités égalées à des constantes seront encore des intégrales. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k}$ ces nouvelles intégrales, on aura

$$(\beta_i, \beta_j) = \sum \left(\frac{d\beta_i}{dq} \frac{d\beta_j}{dp} - \frac{d\beta_j}{dq} \frac{d\beta_i}{dp} \right),$$

c'est-à-dire

$$(\beta_i, \beta_j) = \sum \left[\left(\frac{d\beta_i}{d\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dq} + \frac{d\beta_i}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{dq} \cdots \right) \left(\frac{d\beta_j}{d\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dp} + \cdots \right) - \cdots \right],$$

ou bien enfin

$$(1) \qquad (\beta_i, \beta_j) = \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{d\beta_i}{d\alpha_\mu} \frac{d\beta_j}{d\alpha_\nu} - \frac{d\beta_j}{d\alpha_\mu} \frac{d\beta_i}{d\alpha_\nu} \right) (\alpha_\mu, \alpha_\nu).$$

260. Théorème Ier. — *Si α_i et α_j sont deux intégrales telles que (α_i, α_j) soit fonction de α_i et de α_j, il existera toujours une fonction γ de α_i et α_j telle que l'on ait*

$$(\alpha_i, \gamma) = 1.$$

En effet, la formule (1) donne en remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$

$\beta_j, \ldots, \beta_{2k}$ par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_{2k}$

$$(\alpha_i, \gamma) = \frac{d\gamma}{d\alpha_j}(\alpha_i, \alpha_j);$$

or si l'on choisit γ de telle sorte que

$$\frac{d\gamma}{d\alpha_j} = \frac{1}{(\alpha_i, \alpha_j)}, \quad \text{ou} \quad \gamma = \int(\alpha_i, \alpha_j)\,d\alpha_j,$$

on aura

$$(\alpha_i, \gamma_j) = 1.$$

C. Q. F. D.

261. Théorème II. — *Quelle que soit l'intégrale* α, *il en existe toujours une autre* β, *telle que l'on ait*

$$(\alpha, \beta) \gtrless 0;$$

en effet, si l'on avait

$$(\alpha, \alpha_1) = 0, \quad (\alpha, \alpha_2) = 0, \ldots, \quad (\alpha, \alpha_{2k}) = 0,$$

le déterminant des quantités (α_i, α_j) aurait une colonne dont tous les éléments seraient nuls; il serait donc lui-même égal à zéro; or nous avons vu au paragraphe précédent que ce déterminant était égal au carré du déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k})}{D(p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots)};$$

ce déterminant serait identiquement nul, et par suite les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ ne seraient pas distinctes.

262. Théorème III. — *Étant donnée l'intégrale* α, *il en existera toujours une autre* β, *telle que* $(\alpha, \beta) = 1$.

En effet, puisqu'il existe toujours une intégrale qui, combinée avec α, donne un résultat différent de zéro, on peut poser

$$(2) \quad (\alpha, \alpha_1) = \alpha_2, \quad (\alpha, \alpha_2) = \alpha_3, \ldots, \quad (\alpha, \alpha_{i-1}) = \alpha_i.$$

Supposons que $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{i-1}$, représentent toujours de nouvelles intégrales, on finira (puisque le nombre total des intégrales est limité) par tomber sur une intégrale α_i, fonction des précédentes ou constante. Soit alors β une fonction de $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, on aura, en vertu de la formule (1),

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_1} + (\alpha, \alpha_2)\frac{d\beta}{d\alpha_2} + \ldots + (\alpha_1\,\alpha_{i-1})\,\frac{d\beta}{d\alpha_{i-1}},$$

ou ce qui est la même chose, en vertu des formules (2),

$$(\alpha, \beta) = \alpha_2\,\frac{d\beta}{d\alpha_1} + \ldots + \alpha_i\,\frac{d\beta}{d\alpha_{i-1}};$$

en posant $(\alpha, \beta) = 1$, on aura une équation aux différences partielles qui déterminera β.

263. Théorème IV. — *Étant donnée l'intégrale α_1, on peut toujours trouver $2k-1$ intégrales $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2k}$, telles que*

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad (\alpha_1, \alpha_3) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_4) = 0, \ldots, \quad (\alpha_1, \alpha_{2k}) = 0.$$

En vertu des théorèmes II et III, on trouvera toujours une intégrale α_2, telle que

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1,$$

puis $i-2$ autres [$i-2$ étant au moins égal à 1, car $(\alpha_1, \alpha_1) = 0$] satisfaisant aux relations

$$(\alpha_1, \alpha_3) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_4) = 0, \ldots, \quad (\alpha_1, \alpha_i) = 0.$$

Supposons, s'il est possible, $i < 2k$, soit alors β_1 une nouvelle intégrale, et

$$(\alpha_1, \beta_1) = \beta_2,$$

β_2 sera différent de zéro par hypothèse; je dis qu'il sera différent de 1. En effet, sans cela on aurait

$$(\alpha_1, \alpha_2 - \beta_1) = (\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_1, \beta_1) = 0;$$

$\alpha_2 - \beta_1$ rentrerait dans la classe des intégrales $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_i$, ou serait une fonction des intégrales déjà trouvées; β_1 ne constituerait donc pas non plus une intégrale nouvelle. Mais alors on posera

$$(\alpha_1, \beta_1) = \beta_2, \quad (\alpha_1, \beta_2) = \beta_3, \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on tombe sur une intégrale β_j fonction des précédentes. En désignant par γ une fonction de α_1, $\beta_1, \beta_2, \ldots$, on aura

$$(\alpha_1, \gamma) = (\alpha_1, \beta_1)\frac{d\gamma}{d\beta_1} + (\alpha_1, \beta_2)\frac{d\gamma}{d\beta_2} + \ldots + (\alpha_1, \beta_{j-1})\frac{d\gamma}{d\beta_{j-1}},$$

et en posant $(\alpha_1, \gamma) = 0$, on aura une équation qui déterminera γ en fonction de $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_{j-1}$. Or γ sera une intégrale nouvelle, sans quoi on aurait une relation telle que

$$\gamma = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i);$$

d'où l'on conclurait, en vertu de l'hypothèse $(\alpha_1, \gamma) = 0$,

$$(\alpha_1, f) = 0,$$

et par suite α_i serait une fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, ce qui est contre notre hypothèse. On a donc supposé à tort le nombre des intégrales $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_i$, limité à $i - 2 < 2k$.

M. Bertrand s'est servi de ces théorèmes dans le cas où le théorème de Poisson ne fournit pas d'intégrale nouvelle; on peut consulter à ce sujet un Mémoire de ce savant, inséré dans le tome XVII du *Journal de Liouville*.

Pour appliquer les théorèmes de M. Bertrand, il faut supposer que l'on connaisse une intégrale α; alors, en vertu du théorème IV, on pourra toujours trouver $2k - 1$ solutions satisfaisant à l'équation aux différences partielles linéaires et du premier ordre

$$(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \tag{A}$$

dans laquelle β désigne la fonction inconnue. Supposons que l'on connaisse une solution de cette équation ; or de la formule

$$\beta = \text{const.}$$

qui en résulte on tire

$$\sum \left(\frac{d\beta}{dp} \frac{dp}{dt} + \frac{d\beta}{dq} \frac{dq}{dt} \right) = 0,$$

ou bien, en vertu des équations canoniques,

$$(\text{B}) \qquad (\text{H}, \beta) = 0.$$

Si l'on peut intégrer (B), il suffira de chercher parmi les solutions de (A) et (B) celles qui coïncident ; sinon on essayera de trouver une solution commune aux équations (A) et (B). Jacobi, dans ses *Vorlesungen uber Dynamik*, et Bour, dans un Mémoire inséré au tome XXII du *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier, ont montré comment on peut, dans certains cas, déterminer la solution commune à deux équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, quand cette solution existe.

VIII. — Théorème de M. Liouville.

264. Théorème. — *Si l'on connaît k intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ satisfaisant aux $\frac{k(k-1)}{2}$ relations*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_3) = 0, \ldots, \\ (\alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad (\alpha_2, \alpha_4) = 0, \ldots, \\ (\alpha_{k-1}, \alpha_k) = 0, \end{array} \right.$$

on pourra toujours achever l'intégration au moyen des quadratures.

En effet, à l'aide des k intégrales connues, on pourra calculer les p en fonction des q. En différentiant alors ces intégrales, par rapport aux q, et en nous servant de la lettre d pour représenter les différentielles prises en regardant $q_1, q_2, \ldots, q_k$ comme seules variables, on aura

$$\frac{d\alpha_i}{dq_\mu} + \frac{d\alpha_i}{dp_1}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}q_\mu} + \frac{d\alpha_i}{dp_2}\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}q_\mu} + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\alpha_j}{dq_\mu} + \frac{d\alpha_j}{dp_1}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}q_\mu} + \frac{d\alpha_j}{dp_2}\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}q_\mu} + \ldots = 0;$$

en multipliant alors la première équation par $\frac{d\alpha_j}{dp_\mu}$, la seconde par $\frac{d\alpha_i}{dp_\mu}$, en les retranchant l'une de l'autre, puis en faisant $\mu = 1, 2, \ldots, k$, en ajoutant les relations ainsi obtenues et en ayant égard aux formules (1), on trouve

$$(2) \qquad \sum\left(\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}q_\mu} - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}q_\nu}\right)\left(\frac{d\alpha_i}{dp_\nu}\frac{d\alpha_j}{dp_\mu} - \frac{d\alpha_j}{dp_\nu}\frac{d\alpha_i}{dp_\mu}\right) = 0;$$

on obtient ainsi $\frac{k(k-1)}{2}$ équations homogènes par rapport aux $\frac{k(k-1)}{2}$ quantités

$$\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}q_\mu} - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}q_\nu};$$

si donc on était assuré que le déterminant des coefficients de ces quantités n'est pas nul, on en conclurait

$$\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}q_\mu} = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}q_\nu}.$$

Voici comment on peut démontrer cette formule : observons que l'équation (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \sum\left(\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}q_\mu} - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}q_\nu}\right)\frac{d\alpha_i}{dp_\nu}\frac{d\alpha_j}{dp_\mu} = 0,$$

en convenant de faire varier μ et ν, tous deux de 1 à k. Désignons alors par R le déterminant fonctionnel

$$(4) \qquad R = \frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_\mu)},$$

et par A_i^m le coefficient de $\frac{d\alpha_i}{dp_i}$ dans ce déterminant. Multiplions la formule (3) par $A_i^m A_j^n$, donnons à μ, ν, i, j les valeurs 1, 2, 3, ..., k, et faisons la somme des résultats, il viendra

$$\sum A_i^m A_j^n \frac{d\alpha_i}{dp_\nu} \frac{d\alpha_j}{dp_\mu} \left(\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}q_\mu} - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}q_\nu} \right) = 0;$$

or si l'on a égard aux relations

$$\sum A_i^m \frac{d\alpha_i}{dp_\nu} = \begin{cases} 0 \text{ pour } \nu \gtrless m, \\ R \text{ pour } \nu = m, \end{cases}$$

la formule précédente s'écrira

$$R^2 \left(\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}q_m} - \frac{\mathrm{d}p_m}{\mathrm{d}q_n} \right) = 0.$$

Or R ne saurait être nul en vertu de la formule (4), sans quoi les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ne seraient pas des intégrales distinctes (*); donc

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}q_m} - \frac{\mathrm{d}p_m}{\mathrm{d}q_n} = 0.$$

Il résulte de là que

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \ldots + p_k\, dq_k$$

(*) On sait que lorsqu'un déterminant de plusieurs fonctions est toujours nul, ces fonctions ne sont pas distinctes. (*Voir* la Note à la fin du volume.)

est une différentielle exacte. Soit alors

$$W = \int (p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \ldots).$$

Si l'on se reporte actuellement à l'équation de la fonction principale

$$U + H - F\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right) = 0,$$

et si à la place de V on substitue W, on trouve

$$U + H - F(p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire

$$U + H - T = 0,$$

ce qui est une identité (en se rappelant que $H = T - U$). Ainsi la fonction W, en vertu du théorème de Jacobi, fournira les intégrales qui restent à trouver par une simple différentiation ; elles seront

$$\frac{dW}{d\alpha_1} = \beta_1, \ldots, \quad \frac{dW}{d\alpha_k} = \beta_k, \quad \frac{dW}{dH} = t + \tau,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, τ désignant de nouvelles constantes.

IX. — Variation des constantes dans les problèmes de Dynamique.

265. Supposons que la fonction H que nous avons considérée jusqu'ici puisse se décomposer en deux autres H_1 et h, de sorte que les équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dH_1}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH_1}{dq}$$

puissent s'intégrer exactement; désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ les fonctions qu'il faut égaler à des constantes pour obtenir les intégrales de ces équations, et proposons-nous d'intégrer les équations

$$(2) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dH_1}{dp} + \frac{dh}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH_1}{dq} - \frac{dh}{dq}.$$

Pour y parvenir, nous imaginerons que les fonctions α_1, $\alpha_2, \ldots$, qui restaient constantes en vertu des équations (1), deviennent variables avec le temps, et nous nous proposerons de déterminer à quelles fonctions du temps il faut égaler ces quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ pour satisfaire aux équations (2).

A cet effet, aux variables p, q substituons les variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ qui sont liées à $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ par les équations intégrales des formules (1), on aura, en vertu des formules (2),

$$\frac{dh}{dp} = \frac{dq}{dt} - \frac{dH_1}{dp},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dh}{dp} = \left(\frac{dq}{dt}\right) + \sum \frac{dq}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dH_1}{dp},$$

$\left(\frac{dq}{dt}\right)$ désignant la dérivée partielle de q prise par rapport à t. Or cette dérivée partielle est précisément celle qui figure dans la formule (1). En effet, si l'on suppose $h = 0$, les $\frac{d\alpha}{dt}$ redeviennent égaux à zéro, et l'équation précédente donne

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{dH_1}{dp}.$$

Du reste, $\left(\frac{dq}{dt}\right)$ est la dérivée de q prise en regardant les α comme des constantes; c'est donc la dérivée de la fonction qui satisfait aux formules (1). On a donc simplement

$$\frac{dh}{dp} = \sum \frac{dq}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt};$$

on aurait de même

$$-\frac{dh}{dq} = \sum \frac{dp}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans la formule

$$\frac{dh}{d\alpha_i} = \sum \left(\frac{dh}{dp}\frac{dp}{d\alpha_i} + \frac{dh}{dq}\frac{dq}{d\alpha_i}\right),$$

on trouve

$$(3) \qquad \frac{dh}{d\alpha_i} = \sum \frac{d\alpha}{dt}\,[\alpha, \alpha_i].$$

266. Cette formule porte le nom de *formule de Lagrange*. Poisson en a fait connaître une autre qui donne immédiatement $\frac{d\alpha}{dt}$; elle est identique avec celle que l'on obtiendrait en résolvant les équations dont le type est (3) par rapport à $\frac{d\alpha}{dt}$. On a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + \sum \left(\frac{d\alpha}{dq}\frac{dq}{dt} + \frac{d\alpha}{dp}\frac{dp}{dt}\right),$$

ou

$$(4) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + (\alpha, H_1 + h).$$

Or on a

$$0 = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + (\alpha, H),$$

car, en faisant $h = 0$, $\frac{d\alpha}{dt}$ s'annule, et la formule (4) se réduit à la précédente. Des deux dernières formules, on tire, par soustraction

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha_1, h),$$

et, en remplaçant dans cette formule

$$\frac{dh}{dp} \quad \text{par} \quad \frac{dh}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_1} + \frac{dh}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dp} + \ldots,$$
$$\frac{dh}{dq} \quad \text{par} \quad \frac{dh}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dq} + \frac{dh}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dq} + \ldots,$$

on a finalement

$$(5) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \Sigma\,(\alpha_i, \alpha)\,\frac{dh}{d\alpha}.$$

Telle est la formule de Poisson; elle permet, comme on voit, de déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en fonction de t.

Les formules de Lagrange et de Poisson prennent des formes très-remarquables lorsque l'on choisit convenablement les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$. Pour plus de symétrie, nous désignerons les constantes $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_{2k}$ par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, et nous supposerons

$$(6) \quad \begin{cases} [\alpha_i, \alpha_j] = 0, \quad [\alpha_i, \beta_j] = 0, \quad [\alpha_i, \alpha_i] = 0, \quad [\beta_i, \beta_i] = 0, \\ \qquad\qquad [\alpha_i, \beta_i] = -[\beta_i, \alpha_i] = -1; \end{cases}$$

les formules de Lagrange prennent alors la forme

$$(7) \qquad \frac{dh}{d\alpha_i} = -\frac{d\beta_i}{dt}, \quad \frac{dh}{d\beta_i} = \frac{d\alpha_i}{dt}.$$

Cette propriété du système de constantes ainsi choisies leur a fait donner le nom de *constantes canoniques*. Or, si nous nous rappelons les formules de Cauchy (256),

$$(\alpha_i, \alpha_1)[\alpha_j, \alpha_1] + (\alpha_i, \alpha_2)[\alpha_j, \alpha_2] + \ldots = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i \gtrless j, \\ 1 & \text{pour} \quad i = j, \end{cases}$$

et si on les applique aux constantes canoniques, on trouve

$$(\alpha_i, \beta_i)[\alpha_i, \beta_i] = 1,$$
$$(\alpha_i, \beta_i)[\alpha_j, \beta_i] = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on conclut

$$(\alpha_i, \beta_i) = -(\beta_i, \alpha_i) = -1,$$
$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_i, \beta_j) = (\beta_i, \beta_j) = 0.$$

Nous avons mis les intégrales des équations (1) sous la forme

$$(8) \qquad \frac{dS}{dq} = p, \quad \frac{dS}{d\alpha_i} = \beta_i,$$

S désignant une solution complète de l'équation différentielle de la fonction caractéristique. Il est facile de s'assurer que les constantes α_i et β_i ainsi choisies sont canoniques.

En effet, on a

$$\frac{dh}{dp} = \frac{dq}{dt} - \frac{dH_1}{dp},$$

ou

$$\frac{dh}{dp} = \left(\frac{dq}{dt}\right) + \sum \frac{dq}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dH_1}{dp},$$

et, comme nous l'avons déjà remarqué,

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{dH_1}{dp};$$

donc, en mettant les α et les β en évidence,

$$\frac{dh}{dp} = \sum\left(\frac{dq}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dq}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}\right),$$

de même

$$\frac{dh}{dq} = -\sum\left(\frac{dp}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dp}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Ces formules peuvent s'écrire

$$\frac{dh}{dp} = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dh}{dq} = -\frac{dp}{dt}.$$

En se rappelant alors que $\frac{dq}{dt}$ n'a plus le même sens que plus haut, on en tire

$$(9) \qquad \delta h = \sum \left(\frac{dq}{dt}\,\delta p - \frac{dp}{dt}\,\delta q \right).$$

Les formules (8) fournissent de même

$$\delta S = \Sigma(p\,\delta q + \beta\,\delta\alpha),$$

$$d\,\frac{\delta S}{dt} = \sum \left(\frac{dp}{dt}\,\delta q + p\delta\,\frac{dq}{dt} + \beta\delta\,\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\,\delta\alpha \right).$$

On trouve de la même façon

$$\delta\,\frac{dS}{dt} = \sum \left(\delta p\,\frac{dq}{dt} + p\delta\,\frac{dq}{dt} + \beta\delta\,\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\,\delta\beta \right);$$

en retranchant ces formules l'une de l'autre, il vient

$$0 = \sum \left(\delta p\,\frac{dq}{dt} - \delta q\,\frac{dp}{dt} + \delta\beta\,\frac{d\alpha}{dt} - \delta\alpha\,\frac{d\beta}{dt} \right).$$

L'équation (9), combinée avec celle-ci, donne

$$\delta h = \sum \left(\frac{d\beta}{dt}\,\delta\alpha - \frac{d\alpha}{dt}\,\delta\beta \right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{dh}{d\beta} = -\frac{d\alpha}{dt};$$

les quantités α et β sont donc canoniques, ainsi que nous l'avions annoncé.

X. — Application des théorèmes précédents au mouvement des planètes.

267. Soit M la masse du Soleil, m, m_1, m_2, ... les masses des planètes considérées comme de simples points matériels (*), nous ferons passer par le Soleil trois axes rectangulaires de directions fixes, et nous étudierons le mouvement relatif des planètes par rapport à ces axes.

Nous traiterons ce mouvement relatif comme un mouvement absolu; seulement nous joindrons aux forces réellement agissantes les forces d'inertie dues au mouvement d'entraînement; les forces centrifuges composées sont nulles, puisque les axes restent parallèles à eux-mêmes.

Soient x, y, z les coordonnées de m, x_1, y_1, z_1 celles de m_1, ..., et f le coefficient de l'attraction, c'est-à-dire l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance.

La force réellement agissante, pour le point m, se composera :

1° De l'attraction du Soleil dont les projections sont

$$\frac{-fMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{-fMmy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{-fMmz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

(*) Cette hypothèse n'influe pas sur le mouvement. En effet, si l'on considère le mouvement des centres de gravité des astres, ils seront les mêmes que si les forces émanant des autres astres étaient directement appliquées à ce centre. En second lieu, les astres attirants sont tous sensiblement sphériques, ou, du moins, on peut admettre que ces astres se composent de couches sphériques homogènes, par analogie, avec ce que l'on connaît sur la constitution physique de notre globe.

Enfin, en admettant même que ces astres ne fussent point sphériques, ils sont si éloignés que l'on peut considérer les forces qui émanent d'eux comme parallèles, et se réduisant à une seule émanant de leur centre de gravité.

2° Des actions des planètes dont les projections sont :

$$f \sum \frac{m m_i (x_i - x)}{\left[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i + z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \ldots.$$

La force d'inertie dans le mouvement d'entraînement pour le point m est le produit de m par l'accélération du Soleil, accélération due aux actions de toutes les planètes; cette force d'inertie a pour projections

$$-fm \sum \frac{m x_i}{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad -fm \sum \frac{m y_i}{(x^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$-fm \sum \frac{m z_i}{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{3}{2}}};$$

en sorte que la force qui agit dans le mouvement relatif a pour projection sur l'axe des x

$$mf \left\{ \frac{-(\mathrm{M} + m)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \sum \frac{m_i x}{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{3}{2}}} \right.$$
$$\left. + \sum \frac{m_i (x_i - x)}{\left[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\};$$

en sorte que si l'on pose

$$\mathrm{R} = f \sum \frac{m_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$$
$$- f \sum \frac{m_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}},$$

$$\mathrm{U} = \frac{f(\mathrm{M} + m)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

on trouve, pour équations du mouvement du point m,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\mathrm{R}}{dx} + \frac{d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \cdots.$$

268. Ces équations se mettent sous la forme canonique comme il suit :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{dR}{dx} + \dfrac{dU}{dx}, & \dfrac{dy'}{dt} = \ldots, \quad \dfrac{dz'}{dt} = \ldots, \\ \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dy}{dt} = y', \quad \dfrac{dz}{dt} = z'; \end{cases}$$

la quantité H est ici $\Sigma\,(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R - U)$.

Nous allons d'abord intégrer le système

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{dU}{dx}, & \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{dU}{dy}, & \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{dU}{dz}, \\ \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dy}{dt} = y', & \dfrac{dz}{dt} = z'. \end{cases}$$

Nous savons que, en vertu du principe des aires, le mouvement s'effectue dans un plan en prenant momentanément ce plan pour plan des xy, et en posant $f(M+m)$ égal à μ et $r^2 = x^2 + y^2$, les équations (2) deviennent

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{\mu}{r}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dy}\frac{\mu}{r},$$

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y'.$$

Nous connaissons deux intégrales : celle des aires et celle des forces vives; ces intégrales sont

$$(3)\quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 = 2U + h = \dfrac{2\mu}{r} + h, \\ xy' - yx' = c. \end{cases}$$

Or nous nous trouvons ici dans le cas signalé par M. Liouville; en effet, on a

$$(h, c) = \frac{dh}{dx}\frac{dc}{dx'} - \frac{dh}{dx'}\frac{dc}{dx} + \ldots = -2x'y' + 2y'x' = 0;$$

donc

$$x'\,dx + y'\,dy = d\mathrm{W}$$

est une différentielle exacte.

En tirant x' et y' des équations (3), on trouve

$$d\mathrm{W} = c\,\frac{y\,dx - x\,dy}{r^2} \pm \sqrt{(2\mathrm{U}+h)\,r^2 - c^2}\,\frac{dr}{r},$$

ou enfin

$$\mathrm{W} = c \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \pm \int \sqrt{(2\mathrm{U}+h) - \frac{c^2}{r^2}}\,dr.$$

Les intégrales sont (264)

$$\frac{d\mathrm{W}}{dc} = \text{const}, \quad \frac{d\mathrm{W}}{dh} = t + \tau,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \pm \int \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{(2\mathrm{U}+h) - \dfrac{c^2}{r^2}}} = \text{const.},$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}\,dr}{\sqrt{(2\mathrm{U}+h) - \dfrac{c^2}{r^2}}} = t + \tau.$$

On retombe ainsi sur des calculs déjà effectués par une autre méthode.

269. Il n'entre pas dans notre plan de traiter la question des perturbations planétaires, et nous renverrons pour cet objet à la *Mécanique céleste*; toutefois nous indiquerons en quelques mots la marche à suivre dans la suite des calculs.

La fonction R est appelée la *fonction perturbatrice*;

on la développe en série, et, dans une première approximation, on ne conserve que les premiers termes de la série; on forme ensuite les équations (265)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma\,(\alpha, \alpha_i)\,\frac{dh}{d\alpha_i}.$$

α_1, α_2, ... sont les fonctions qui, égalées à des constantes, représentaient les intégrales du mouvement elliptique, et l'on sait que (α, α_i) est indépendant du temps; les équations précédentes font alors connaître les fonctions α.

Autre manière de résoudre la question. — Nous avons vu au n° 252 que, pour résoudre un problème de Dynamique, il suffisait de connaître une solution complète de l'équation aux dérivées partielles de la fonction principale, d'égaler à des constantes les dérivées de cette solution, prises par rapport aux constantes d'intégration, et d'égaler au temps la dérivée de la même fonction prise par rapport à la constante H des forces vives.

Dans le cas d'un point libre, de masse m, sollicité par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance, l'équation de la fonction principale est (252)

$$(1)\qquad \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = 2mU + 2mh,$$

U désignant la fonction des forces, et h une constante. Si l'on place le centre d'attraction à l'origine des coordonnées; si l'on pose en outre

$$x = r\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

on trouvera

$$2m\mathrm{U} = \frac{k}{r},$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right)^2 \\ &\quad = \left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

k désignant une constante; l'équation (1) devient alors

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right)^2 = \frac{k}{r} + 2mh.$$

Cette équation est facile à intégrer; en effet, on peut la décomposer en deux autres :

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right)^2 = \frac{k}{r} + 2mh - \frac{\alpha}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right)^2 = \frac{\alpha}{r^2},$$

α désignant une constante; la première équation s'intègre immédiatement et admet pour solution

$$\mathrm{V}_1 = \int dr\sqrt{\frac{k}{r} + 2mh - \frac{\alpha}{r^2}};$$

la seconde, après l'avoir multipliée par r^2, se décompose en deux autres aussi :

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2 = \frac{-\beta}{\sin^2\theta} + \alpha, \quad \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right)^2 = \frac{\beta}{\sin^2\theta},$$

β désignant une nouvelle constante; ces équations admettent pour intégrales

$$\mathrm{V}_2 = \int\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}}\, d\theta, \quad \mathrm{V}_3 = \sqrt{\beta}\,\psi,$$

en sorte que

$$\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3,$$

ou

$$V = \int dr \sqrt{\frac{k}{r} + 2mh - \frac{\alpha}{r^2}} + \int \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \sqrt{\beta}\, \psi$$

est une solution complète de l'équation (2) de la fonction principale; les intégrales du problème, ou, si l'on veut, les équations finies du mouvement d'une planète sont alors

$$\frac{dV}{d\alpha} = \gamma, \quad \frac{dV}{d\beta} = \delta, \quad \frac{dV}{dh} = t + \tau,$$

γ, δ et τ désignant trois nouvelles constantes. On trouvera dans les *Vorlesungen* de Jacobi une interprétation géométrique remarquable de la valeur de ces constantes.

XI. — Sur l'emploi des coordonnées elliptiques et leur usage dans les questions de dynamique.

270. MM. Lamé et Jacobi ont introduit dans l'analyse un nouveau système de coordonnées qui a rendu de grands services à la Mécanique et à la Physique mathématique. Dans ce système de coordonnées, auquel on a donné le nom de *coordonnées elliptiques*, un point quelconque de l'espace est déterminé par l'intersection de trois surfaces homofocales du second degré (*). L'ordre historique ne nous paraît pas l'ordre logique dans l'exposition des principes relatifs à l'étude des coordonnées elliptiques, et nous allons suivre l'ordre adopté par Jacobi dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, p. 198.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n + \lambda} = 1,$$

(*) On appelle ainsi les surfaces dont les sections principales ont les mêmes foyers.

dans laquelle nous supposerons

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à λ, elle sera du degré n et aura par suite n racines : il est facile de s'assurer *à priori* que toutes ces racines sont réelles. En effet, si l'on fait varier λ depuis $-\infty$ jusqu'à $-a_n$, le premier membre de l'équation (1) varie de 0 à $-\infty$, λ variant ensuite de $-a_n$ à $-a_{n-1}$; le premier membre de (1) varie de $+\infty$ à $-\infty$; donc l'équation (1) a une racine comprise entre $-a_n$ et $-a_{n-1}$. On verrait de même que cette équation a une racine comprise dans chacun des intervalles $(-a_{n-1}, -a_{n-2})$, $(-a_{n-2}, -a_{n-3})$, ..., $(-a_1, \infty)$. Ainsi l'équation (1) a toutes ses racines réelles. Nous les désignerons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et nous supposerons

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n.$$

271. Ceci posé, considérons les n équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_1} + \dfrac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_1} + \ldots + \dfrac{\xi_n^2}{a_n+\lambda_1} = 1, \\[2ex]
\dfrac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_2} + \dfrac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_2} + \ldots + \dfrac{\xi_n^2}{a_n+\lambda_2} = 1, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex]
\dfrac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_n} + \dfrac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_n} + \ldots + \dfrac{\xi_n^2}{a_n+\lambda_n} = 1,
\end{array}\right.$$

et proposons-nous de les résoudre par rapport à ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Binet a fait connaître un moyen très-ingénieux pour résoudre ces équations, il est basé sur la théorie des fractions rationnelles et se trouve rapporté dans le second volume du *Calcul différentiel et intégral* de l'abbé Moigno, p. 206. Mais nous préférons à tout artifice la méthode directe de Jacobi.

Multiplions la première des formules (2) par $a_n + \lambda_1$, la seconde par $a_n + \lambda_2$, et retranchons, nous aurons

$$\xi_1^2\left(\frac{a_n+\lambda_1}{a_1+\lambda_1} - \frac{a_n+\lambda_2}{a_1+\lambda_2}\right) + \ldots = \lambda_1 - \lambda_2,$$

ou bien

$$\frac{\xi_1^2(a_n - a_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} + \ldots = \lambda_1 - \lambda_2;$$

en éliminant ainsi ξ_n^2 entre la première équation (2) et toutes les autres, on obtient le système

$$\frac{\xi_1^2(a_1 - a_n)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} + \frac{\xi_2^2(a_2 - a_n)}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)} + \ldots$$
$$+ \frac{\xi_{n-1}^2(a_{n-1} - a_n)}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_2)} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\xi_1^2(a_1 - a_n)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_n)} + \frac{\xi_2^2(a_2 - a_n)}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_n)} + \ldots$$
$$+ \frac{\xi_{n-1}^2(a_{n-1} - a_n)}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_n)} = 1.$$

Mais ce système est de même forme que (2) pourvu que l'on y considère $\dfrac{\xi_1^2(a_1 - a_n)}{a_1+\lambda_1}$, $\dfrac{\xi_2^2(a_2 - a_n)}{a_2+\lambda_1}, \ldots$, comme de nouvelles inconnues. On en déduira donc le système suivant :

$$\frac{\xi_1^2(a_1 - a_n)(a_1 - a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)} + \ldots = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\xi_1^2(a_1 - a_n)(a_1 - a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_n)} + \ldots = 1,$$

et ainsi de suite; on tombera de cette manière sur une équation unique qui fera connaître ξ_1^2, et l'on en déduira

$\xi_2^2, \xi_3^2, \ldots$, au moyen de permutations circulaires,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi_1^2 = \dfrac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n^2 = \dfrac{(a_n+\lambda_1)(a_n+\lambda_2)\ldots(a_n+\lambda_n)}{(a_1-a_n)(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)}. \end{array}\right.$$

272. Si l'on différentie ces formules, on trouve

$$(4)\qquad 2\frac{d\xi_i}{\xi_i} = \frac{d\lambda_1}{a_i+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{a_i+\lambda_2} + \ldots + \frac{d\lambda_n}{a_i+\lambda_n},$$

et, par suite,

$$4\,d\xi_i^2 = \sum \frac{\xi_i^2\, d\lambda_p\, d\lambda_q}{(a_i+\lambda_p)(a_i+\lambda_q)}.$$

Dans cette formule, il faudra donner à p et q toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n; on conclut de cette formule

$$(5)\qquad 4(d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \ldots + d\xi_n^2) = \Sigma\, d\lambda_p\, d\lambda_q\, \mathrm{M}_{p,q},$$

$\mathrm{M}_{p,q}$ désignant, pour abréger, la quantité

$$\mathrm{M}_{p,q} = \frac{\xi_1^2}{(a_1+\lambda_p)(a_1+\lambda_q)} + \frac{\xi_2^2}{(a_2+\lambda_p)(a_2+\lambda_q)} + \ldots + \frac{\xi_n^2}{(a_n+\lambda_p)(a_n+\lambda_q)}.$$

Or on a

$$\frac{1}{(a_i+\lambda_p)(a_i+\lambda_q)} = \frac{1}{\lambda_q-\lambda_p}\left(\frac{1}{a_i+\lambda_p} - \frac{1}{a_i+\lambda_q}\right),$$

et, par suite,

$$\mathrm{M}_{p,q} = \frac{1}{\lambda_q-\lambda_p}\left(\frac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_p} - \frac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_q} + \frac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_p} - \frac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_q}\ldots\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de (2),

$$\mathrm{M}_{p,q} = 0.$$

Mais cette conclusion ne s'applique pas au cas où l'on aurait $p = q$. En écrivant alors M_p au lieu de $M_{p,q}$, on a

$$M_p = \frac{\xi_1^2}{(a_1 + \lambda_p)^2} + \frac{\xi_2^2}{(a_2 + \lambda_p)^2} + \dots$$

En posant alors

$$u = 1 - \left(\frac{\xi_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{\xi_2^2}{a_2 + \lambda} + \dots\right),$$

on a

$$\text{(A)} \qquad M_p = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)_{\lambda = \lambda_p}.$$

Commençons par calculer u, on a

$$u = \frac{(a_1 + \lambda)\dots(a_n + \lambda) - \xi_1^2 (a_2 + \lambda)\dots(a_n + \lambda) - \dots}{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)\dots(a_n + \lambda)};$$

or le numérateur de u, en vertu des équations (2), s'annule pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, et le coefficient de la plus haute puissance λ^n de λ est l'unité; on a donc

$$u = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)}{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)\dots(a_n + \lambda)},$$

et, par suite,

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{u}{\lambda - \lambda_1} - \frac{u}{a_1 + \lambda} + \frac{u}{\lambda - \lambda_2} - \frac{u}{a_2 + \lambda} + \dots$$

Si l'on fait alors $\lambda = \lambda_p$, on a, en vertu de l'équation (A),

$$\text{(6)} \qquad M_p = \frac{(\lambda_p - \lambda_1)(\lambda_p - \lambda_2)\dots(\lambda_p - \lambda_n)}{(a_1 + \lambda_p)(a_2 + \lambda_p)\dots(a_n + \lambda_p)},$$

l'équation (5) devient ainsi

$$\text{(7)} \quad 4(d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_n^2) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + \dots + M_n d\lambda_n^2,$$

formule importante dans laquelle M_p est donné par la formule (6).

XII. — Définition des coordonnées elliptiques.

273. Désignons par λ, μ, ν les trois racines de l'équation en t

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}=1,$$

et considérons les équations

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\xi^2}{a^2+\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}=1,\\ &\frac{\xi^2}{a^2+\mu}+\frac{\eta^2}{b^2+\mu}+\frac{\zeta^2}{c^2+\mu}=1,\\ &\frac{\xi^2}{a^2+\nu}+\frac{\eta^2}{b^2+\nu}+\frac{\zeta^2}{c^2+\nu}=1; \end{aligned}\right.$$

les trois racines λ, μ, ν sont, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, réelles et inégales, et l'on a, en supposant $a>b>c$, $\lambda<\mu<\nu$,

$$-a^2<\lambda<-b^2<\mu<-c^2<\nu.$$

Il résulte de là que les équations précédentes (9) représentent, la première un hyperboloïde à deux nappes, la seconde un hyperboloïde à une nappe, et la troisième un ellipsoïde; ces trois surfaces déterminent par leur intersection un point (ξ, η, ζ) de l'espace; or ces surfaces sont déterminées quand on se donne λ, μ, ν, en sorte que λ, μ, ν peuvent être regardées comme les coordonnées d'un point. M. Lamé les appelle *les coordonnées elliptiques* du point (ξ, η, ζ).

Il est facile de reconnaître que les surfaces (9) sont homofocales, c'est-à-dire que leurs sections principales ont les mêmes foyers, car les différences des carrés des demi-axes de ces surfaces sont les mêmes pour ces trois surfaces.

On peut démontrer également que les surfaces (9) se coupent orthogonalement. En effet, si l'on désigne par α, β, γ les angles que la normale à la première surface fait avec les axes, par α', β', γ' les angles analogues relatifs à la seconde surface, on aura

$$\cos\alpha = \frac{1}{\Delta}\frac{\xi}{a^2+\lambda}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\Delta}\frac{\eta}{b^2+\lambda}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\Delta}\frac{\zeta}{c^2+\lambda},$$

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\Delta'}\frac{\xi}{a^2+\mu}, \quad \cos\beta' = \frac{1}{\Delta'}\frac{\eta}{b^2+\mu}, \quad \cos\gamma' = \frac{1}{\Delta'}\frac{\zeta}{c^2+\mu},$$

Δ et Δ' désignant des quantités dont la forme est bien connue. Il en résulte

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$
$$= \left[\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} + \frac{\eta^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)} + \frac{\zeta^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}\right]\frac{1}{\Delta\Delta'}.$$

Mais la quantité écrite entre crochets est une de celles que nous avons désignées au paragraphe précédent par $M_{p,q}$; elle est donc nulle, et l'on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

ce qui démontre bien la proposition que nous avions énoncée. Le théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales nous montre alors que chacune des surfaces (9) est coupée par les deux autres suivant ses lignes de courbure. De là un moyen de trouver les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

274. Les formules qui serviront à passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées elliptiques seront données par les équations (3) qui, dans le cas particulier qui nous occupe, se réduiront à

$$(10)\quad \begin{cases} \xi^2 = \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \\ \eta^2 = \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}, \\ \zeta^2 = \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \end{cases}$$

XIII. — Mouvement d'un point sur un ellipsoïde.

275. Cherchons les équations du mouvement d'un point en coordonnées elliptiques. Soient ξ, η, ζ ses coordonnées rectangulaires; λ, μ, ν ses coordonnées elliptiques; prenons sa masse égale à l'unité; désignons enfin par $2T$ sa force vive, nous aurons

$$2T\,dt^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (6) et (7),

$$2T\,dt^2 = \tfrac{1}{4}(L\,d\lambda^2 + M\,d\mu^2 + N\,d\nu^2),$$

L, M, N désignant, pour abréger, les quantités suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} L = \dfrac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}, \\ M = \dfrac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}, \\ N = \dfrac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}. \end{cases}$$

On peut alors écrire

$$2T = \tfrac{1}{4}(L\lambda'^2 + M\mu'^2 + N\nu'^2),$$

et l'on tire de cette équation

$$\frac{dT}{d\lambda'} = p = \frac{1}{4} L\lambda',$$

$$\frac{dT}{d\mu'} = q = \frac{1}{4} M\mu',$$

$$\frac{dT}{d\nu'} = r = \frac{1}{4} N\nu';$$

par suite, on a

$$2T = \frac{4p^2}{L} + \frac{4q^2}{M} + \frac{4r^2}{N}.$$

Si l'on désigne alors par U la fonction des forces, et si l'on pose

$$H = T - U,$$

les équations canoniques du mouvement deviennent

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\lambda}, \ldots.$$

Pour faire une application des formules précédentes, considérons un point soumis à la seule influence de sa vitesse initiale, et assujetti à rester sur la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{\xi^2}{a^2+\nu} + \frac{\eta^2}{b^2+\nu} + \frac{\zeta^2}{c^2+\nu} = 1;$$

ν devra alors être traité comme une constante, et l'on aura en outre $U = 0$, $H = T$. Par suite,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p} = \frac{4p}{L}, \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q} = \frac{4q}{M},$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\lambda} = -2\frac{p^2}{L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda}, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mu} = -2\frac{q^2}{M^2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}.$$

Les équations du mouvement deviennent ainsi

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{4p}{L}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\frac{p^2}{L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda}, \ldots.$$

Pour intégrer ces équations, on formera l'équation aux différences partielles (252)

$$H + U - (T) = 0,$$

équation qui, dans le cas particulier qui nous occupe, se réduit à

$$(12) \qquad H - 2\left[\frac{1}{L}\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{M}\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2\right] = 0.$$

On cherchera ensuite une solution de cette équation renfermant une constante arbitraire α; cette solution V étant trouvée, les intégrales du problème seront

$$(13) \qquad \frac{dV}{d\alpha} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dH} = t - \tau,$$

β et τ désignant deux constantes.

Pour trouver une solution de l'équation (12), remplaçons d'abord L et M par leurs valeurs (11), nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}H = \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 &\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\\ &+ \left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)},\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}H(\lambda-\mu) = \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 &\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{\lambda-\nu}\\ &- \left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{\mu-\nu}.\end{aligned}$$

Pour intégrer cette équation, décomposons-la en deux autres :

$$\alpha + \frac{1}{2}H\lambda = \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 \frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{\lambda-\nu},$$

$$\alpha + \frac{1}{2}H\mu = \left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{\mu-\nu}.$$

Ces deux équations s'intègrent séparément et donnent, en ajoutant leurs solutions,

$$V = \int\sqrt{\frac{(\alpha + \frac{1}{2}H\lambda)(\lambda - \nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,d\lambda + \int\sqrt{\frac{(\alpha + \frac{1}{2}H\mu)(\mu - \nu)}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}\,d\mu.$$

Les intégrales définitives du problème sont alors

$$\frac{dV}{d\alpha} = \beta, \quad \frac{dV}{dH} = t - \tau.$$

La première de ces équations, ne contenant pas le temps, est l'équation de la trajectoire du mobile, c'est-à-dire l'équation des lignes géodésiques de la surface du second degré $\nu =$ const. En effectuant le calcul, on trouve pour équation de ces lignes géodésiques

$$\int\sqrt{\frac{\lambda - \nu}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)(\alpha+\lambda)}}\,d\lambda + \int\sqrt{\frac{\mu - \nu}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)(\alpha+\mu)}}\,d\mu = \text{const.}$$

XIV. — Mouvement d'un point sollicité par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance.

Le problème que nous nous proposons de résoudre a acquis une grande célébrité dans les annales de la science. Les géomètres, n'ayant pu parvenir à intégrer les équations du mouvement des corps célestes, diminuèrent peu à peu la généralité de leur problème, réduisirent d'abord les corps célestes à trois points libres, enfin à un seul point libre sollicité par deux points fixes. Ce dernier problème a été l'objet de travaux remarquables de la part des géomètres les plus illustres. Euler, Lagrange, Jacobi, M. Liouville s'occupèrent successivement de la question; en 1847, M. J.-A. Serret semblait avoir résolu le problème d'une façon tout à fait satisfaisante dans la thèse qu'il a présentée pour le doctorat; mais, dans les œuvres posthumes de Jacobi (*Vorlesungen*), on trouve la solution suivante, qui est tellement simple, que nous ne pouvons nous empêcher de la reproduire ici.

Nous suivrons toujours la même méthode d'intégration; nous commencerons par écrire l'équation de la fonction principale

$$(1)\qquad \left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2=2mU+2mH.$$

Dans cette formule, U désigne la fonction des forces et H une constante; x, y, z sont les coordonnées du point mobile, m sa masse.

Commençons par transformer les coordonnées, et prenons pour nouveau plan des xy le plan qui passe par les deux centres fixes et le mobile; désignons par φ l'angle que ce plan fait avec sa position initiale. Si l'on prend pour axe des x la droite qui joint les deux centres et pour origine le milieu de cette droite, on aura les formules de transformation

$$x=x',\quad y=y'\cos\varphi,\quad z=y'\sin\varphi;$$

et, en supprimant les accents, la formule (1) deviendra

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2=2mU+2mH.$$

Cette formule peut se décomposer en deux autres :

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dV}{dy}\right)^2=2mU+2mH-\dfrac{\alpha}{y^2},\\[2ex] \left(\dfrac{dV}{d\varphi}\right)^2=\alpha. \end{cases}$$

La dernière donne immédiatement une solution V_1,

$$V_1 = \varphi\sqrt{\alpha}.$$

Occupons-nous de la première. Prenons pour variables des coordonnées elliptiques et posons

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} = 1,$$

ce qui revient à déterminer un point par l'intersection de deux courbes du second degré homofocales. Soit $2f$ la distance des foyers, en sorte que

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Soient r et r' les distances du point mobile aux deux centres, on aura

$$r = \sqrt{a^2+\lambda} - \frac{fx}{\sqrt{a^2+\lambda}},$$

et, comme l'on a (271)

$$x = \frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}}{f},$$

on en conclut

$$r = \sqrt{a^2+\lambda} - \sqrt{a^2+\mu}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{a^2+\mu}}{\lambda - \mu},$$

et de même

$$r' = \sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{a^2+\mu}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{\sqrt{a^2+\lambda} - \sqrt{a^2+\mu}}{\lambda - \mu}.$$

La quantité $2m\mathrm{U}$ est de la forme $\frac{\mathrm{K}}{r} + \frac{\mathrm{K}'}{r'}$, en sorte que l'on pourra écrire

$$(3) \qquad 2m\mathrm{U} = \frac{1}{\lambda - \mu}\left[k\sqrt{a^2+\lambda} + k'\sqrt{a^2+\mu}\right],$$

k et k' désignant deux constantes égales à $K + K'$ et à $K' - K$; on a ensuite (271)

$$x = \frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}}{f}, \quad y = \frac{\sqrt{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}}{f\sqrt{-1}};$$

en en conclut

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 \\ &\quad = \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 \frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}{\lambda - \mu} + \left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 \frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)}{\lambda - \mu}, \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \frac{\alpha}{y^2} = \frac{-\alpha f^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)} = \frac{-\alpha f^2}{\lambda-\mu}\left[\frac{1}{b^2+\mu} - \frac{1}{b^2+\lambda}\right].$$

Les équations (3), (4), (5) permettent d'écrire (2) comme il suit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 (a^2+\lambda)(b^2+\lambda) &+ \left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 (a^2+\mu)(b^2+\mu) \\ &= k\sqrt{a^2+\lambda} + k'\sqrt{a^2+\mu} \\ &\quad - \alpha f^2\left(\frac{1}{b^2+\mu} - \frac{1}{b^2+\lambda}\right) + 2m\mathrm{H}(\lambda-\mu). \end{aligned}$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^2 (a^2+\lambda)(b^2+\lambda) = k\sqrt{a^2+\lambda} + \frac{\alpha f^2}{b^2+\lambda} + 2m\mathrm{H}\lambda + \beta,$$

$$\left(\frac{dV}{d\mu}\right)^2 (a^2+\mu)(b^2+\mu) = k'\sqrt{a^2+\mu} - \frac{\alpha f^2}{b^2+\mu} - 2m\mathrm{H}\mu - \beta.$$

Chacune de ces équations se résout au moyen des quadratures. En désignant par V_2 et V_3 leurs solutions, il suffit de prendre

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

et de former les équations

$$\frac{dV}{d\alpha} = \gamma, \quad \frac{dV}{d\beta} = \delta, \quad \frac{dV}{d\mathrm{H}} = t + \tau,$$

γ, δ et τ désignant de nouvelles constantes, pour avoir la solution du problème de Dynamique qu'il s'agissait de résoudre.

Le peu d'exemples que nous venons de traiter montrent combien la méthode de Jacobi est féconde, puisqu'elle a permis de résoudre, pour ainsi dire en jouant, des problèmes considérés comme presque insolubles. Cette méthode se ramène, en dernière analyse, à l'intégration d'une équation aux différences partielles. Pour intégrer cette équation, on essaye de la scinder en plusieurs autres qui ne contiennent plus qu'une variable indépendante. En ajoutant les solutions des équations partielles, on obtient une solution complète de l'équation proposée; d'où l'on conclut, par le théorème de Jacobi, les intégrales du problème de Dynamique à résoudre.

EXERCICES.

I. Si l'on a

$$(\beta, \gamma) = A, \quad (\gamma, \alpha) = B, \quad (\alpha, \beta) = C,$$

on aura aussi

$$(A, \alpha) + (B, \beta) + (C, \gamma) = 0.$$

(JACOBI, *Vorlesungen*..., p. 426.)

II. Si les $2k$ variables, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ satisfont aux relations

$$(\alpha_i, \beta_i) = 1, \quad (\alpha_i, \beta_j) = 0, \quad (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad (\beta_i, \beta_j) = 0,$$

quels que soient i et j, et si la fonction désignée par H dans le Chapitre qui précède peut s'exprimer à l'aide de ces quantités, on aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dH}{d\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{dH}{d\alpha}.$$

(BOUR, *Thèse*.)

III. Appliquer la méthode d'intégration de Jacobi à l'étude du mouvement du pendule conique.

IV. Pour l'intégration complète du mouvement des planètes, on pourra consulter : la *Mécanique analytique* de Lagrange, la *Mécanique céleste* de Laplace (premier volume), la *Théorie analytique du système du monde* de Pontécoulant, le premier volume des *Annales de l'Observatoire ;*

Un Mémoire de Cauchy, lithographié en 1831 à Turin, et reproduit à peu près dans les *Comptes rendus* de 1841, *sur le développement de la fonction perturbatrice ;*

La *Thèse* de M. Tisserant qui fait usage de la méthode de Jacobi dans l'*Étude du mouvement de la Lune.*

V. Si l'on pose

$$\Theta = \mathrm{H}t + \int_0^t \Sigma m \frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2}\,dt,$$

la fonction Θ jouira de propriétés analogues à celles de la fonction caractéristique. Ainsi Θ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d\Theta}{dt} = \mathrm{T}\left(p_1, p_2, \ldots, \frac{d\Theta}{dp_1}, \frac{d\Theta}{dp_2}, \ldots\right) - \mathrm{U}\left(\frac{d\Theta}{dp_1}, \frac{d\Theta}{dp_2}, \ldots\right).$$

Soient Θ une solution complète quelconque de l'équation précédente, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ les constantes qu'elle renferme. Les intégrales du mouvement seront

$$\frac{d\Theta}{d\gamma_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{d\Theta}{d\gamma_2} = \varepsilon_2, \ldots,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ désignant de nouvelles constantes.

Dans la question précédente, nous avons employé les notations du texte. Ainsi $\mathrm{T}\left(p_1, p_2, \ldots, \frac{d\Theta}{dp_1}, \ldots\right)$ désigne la demi-force vive dans laquelle on a remplacé q par $\frac{d\Theta}{dp}, \ldots$.

(Hamilton, *Philos. Transact.*, 1835.)

N. B. On trouvera une théorie très-détaillée et très-complète de l'intégration des équations aux différences partielles dans l'ouvrage de M. Imschenetsky intitulé : *Mémoire sur l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.* Cet ouvrage renvoie aux sources originales.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT DES SOLIDES.

I. — Préliminaires.

276. Pour étudier le mouvement que prend un corps solide soumis à l'action de forces données, on observe que, en vertu du principe de la conservation du mouvement du centre de gravité (220), le centre de gravité du corps va se mouvoir comme un point dont la masse serait la masse totale du système, sollicité par la résultante de toutes les forces extérieures. Le mouvement du centre de gravité est donc connu.

Maintenant, si l'on suppose trois axes de directions fixes passant par le centre de gravité, on pourra étudier le mouvement relatif du solide par rapport à ces trois axes; mais, en vertu du principe de Coriolis, on pourra traiter ce mouvement comme un mouvement absolu, à la condition d'adjoindre aux forces réellement agissantes : 1° les forces d'inertie du mouvement d'entraînement; 2° les forces centrifuges composées (41), (243). Pour former les équations du mouvement du corps autour de son centre de gravité, il suffira d'écrire qu'il y a équilibre entre les forces d'inertie d'une part, et les forces qui sollicitent le corps dans le mouvement relatif (forces réelles et forces fictives) d'autre part. Or : 1° les forces réellement agissantes se réduisent à une force unique R passant par le centre de gravité et à un couple G; 2° les forces d'inertie du mouvement d'entraînement se réduisent à une force unique I passant par le centre de gravité, car ces forces sont proportionnelles aux masses des points sur lesquels elles agissent fictivement; 3° les forces centrifuges composées sont nulles, puisque le mouvement relatif des axes mobiles est un mouvement de translation (243).

Mais les équations de l'équilibre se réduisent à trois. Dans le cas où le solide présente un point fixe, on les obtient, comme l'on sait (107), en égalant à zéro les projections du couple résultant ou, si l'on veut, les sommes des moments des forces pris par rapport aux axes.

Or le couple résultant, ou, ce qui revient au même, les moments des forces, ne contiendront pas I, en sorte que, en résumé, nous n'aurons pas besoin de tenir compte des forces d'inertie du mouvement d'entraînement. Ainsi :

On pourra traiter le mouvement relatif d'un corps autour de son centre de gravité comme s'il était question d'un mouvement absolu, et comme si le centre de gravité était fixe.

Si l'on voulait étudier le mouvement relatif d'un corps autour d'un point différent du centre de gravité, il faudrait alors tenir compte de la force I, et faire intervenir dans le calcul ses moments qui seraient différents de zéro, puisqu'elle ne passerait plus par l'origine des coordonnées.

II. — Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

277. Les équations du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe s'obtiendront (108) en égalant à zéro la somme des moments des forces d'inertie et des forces

réelles qui sollicitent le corps, pris par rapport à l'axe fixe; elles se réduisent donc à une équation unique.

Si nous prenons l'axe fixe pour axe des z et deux axes rectangulaires quelconques pour axes des x et des y; si nous désignons ensuite par N la somme des moments des forces pris par rapport à l'axe des z, et par m, x, y, z la masse et les coordonnées d'un point quelconque du système, nous aurons, pour équation unique du mouvement,

$$\sum m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y\right) = \mathrm{N}. \tag{1}$$

On peut mettre cette équation sous une forme plus commode dans les applications; il suffit, pour cela, de poser

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

r désignant la distance du point m à l'axe fixe, et θ l'angle décrit par le rayon vecteur r. On trouve alors

$$\begin{aligned}\sum m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y\right) &= \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right)\\ &= \frac{d}{dt}\sum m r^2\frac{d\theta}{dt}\\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2}\sum m r^2;\end{aligned}$$

par suite, la formule (1) devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\sum m r^2 = \mathrm{N}. \tag{2}$$

$\Sigma m r^2$ est le moment d'inertie du solide pris par rapport à l'axe fixe, il est censé connu; $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est l'*accélération angulaire*.

Si l'on suppose N exprimé en fonction de θ et t, l'intégration de l'équation (2) nous permettra de calculer θ

en fonction de t, et le mouvement du corps sera parfaitement déterminé. Si l'on voulait calculer les réactions des appuis, on ferait usage de la méthode employée en Statique (109).

III. — Sur le centre de percussion.

278. Considérons toujours un solide assujetti à tourner autour de l'axe des y, et désignons par X, Y, Z les composantes de la force qui sollicitent le point m dont les coordonnées sont x, y, z; on assujettira le corps à tourner autour de l'axe des y en fixant deux de ses points sur l'axe, c'est-à-dire en appliquant en ces points des forces convenables dont les composantes peuvent être représentées par P_1, Q_1, R_1 et par P_2, Q_2, R_2; nous pourrons prendre ces deux points fixes à des distances h_1 et h_2 de l'origine. Les six équations de l'équilibre deviendront alors (109)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma X + P_1 + P_2 = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} \; (*),\\
&\Sigma Y + Q_1 + Q_2 = 0,\\
&\Sigma Z + R_1 + R_2 = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2},\\
&\Sigma(Zy - Yz) + R_1 h_1 + R_2 h_2 = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} y,\\
&\Sigma(Xz - Zx) = \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} z - \frac{d^2x}{dt^2} x\right),\\
&\Sigma(Yx - Xy) - P_1 h_1 - P_2 h_2 = -\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} y.
\end{aligned}\right.$$

(*) Il ne faut pas oublier que $-\frac{m\,d^2x}{dt^2}$, $-\frac{m\,d^2y}{dt^2}$, $-\frac{m\,d^2z}{dt^2}$ représentent les composantes de la force d'inertie du point m et qu'il y a équilibre à chaque instant, en vertu du principe de d'Alembert, entre les forces réellement agissantes et les forces d'inertie.

Supposons que les forces X, Y, Z se réduisent à une percussion (231) dont l'intensité ait pour composantes U, V, W. Soient u, v, w les coordonnées du point d'application de cette percussion, on aura, en intégrant les équations (1) entre les limites 0 et θ correspondant au temps θ pendant lequel agit la percussion,

$$\mathrm{U} + \int (\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)\, dt = \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

$$\mathrm{V} + \int (\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2)\, dt = 0,$$

$$\mathrm{W} + \int (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)\, dt = \Sigma m \frac{dz}{dt},$$

$$\mathrm{W} v - \mathrm{V} w + \int (\mathrm{P}_1 h_1 + \mathrm{P}_2 h_2)\, dt = \Sigma m \frac{dz}{dt} y,$$

$$\mathrm{U} w - \mathrm{W} u = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} z - \frac{dz}{dt} x\right),$$

$$\mathrm{V} u - \mathrm{U} v - \int (\mathrm{P}_1 h_1 + \mathrm{P}_2 h_2)\, dt = -\Sigma m \frac{dx}{dt} y.$$

Cherchons la condition pour que, pendant le temps θ, l'axe ne soit point frappé, c'est-à-dire n'éprouve aucune percussion. Il faudra supposer $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2$, $\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2$, $\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2$ nuls, et les équations précédentes deviendront

$$\mathrm{U} = \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

$$\mathrm{V} = 0,$$

$$\mathrm{W} = \Sigma m \frac{dz}{dt},$$

$$\mathrm{W} v = \Sigma m \frac{dz}{dt} y,$$

$$\mathrm{U} w - \mathrm{W} u = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} z - \frac{dz}{dt} x\right),$$

$$\mathrm{U} v = \Sigma m \frac{dx}{dt} y.$$

En posant

$$z = r\cos\theta, \quad x = r\sin\theta,$$

$$\frac{dz}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -x\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = z\frac{d\theta}{dt},$$

ces formules deviennent

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \frac{d\theta}{dt}\Sigma mz,\\
\mathrm{V} &= 0,\\
\mathrm{W} &= -\frac{d\theta}{dt}\Sigma mx,\\
\mathrm{W}v &= -\frac{d\theta}{dt}\Sigma mxy,\\
\mathrm{U}w - \mathrm{W}u &= \frac{d\theta}{dt}\Sigma mr^2,\\
\mathrm{U}v &= \frac{d\theta}{dt}\Sigma myz.
\end{aligned}$$

r n'est autre chose que la distance du point m à l'axe des y, θ est l'angle que le rayon r fait avec l'axe des z, $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire du corps. On peut faire passer le plan des zx par le point d'application de la percussion; v est alors égal à zéro. Si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité, et par M la masse du corps, les formules précédentes se simplifient et deviennent

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \mathrm{M}\zeta\frac{d\theta}{dt}, & 0 &= \Sigma mxy,\\
\mathrm{V} &= 0, & \mathrm{U}w - \mathrm{W}u &= \frac{d\theta}{dt}\Sigma mr^2,\\
\mathrm{W} &= -\mathrm{M}\xi\frac{d\theta}{dt}, & 0 &= \Sigma myz.
\end{aligned}$$

Les trois premières équations font connaître les composantes de la percussion en fonction de la vitesse angulaire; la seconde montre que la percussion doit être perpendiculaire à l'axe de rotation; la quatrième et la sixième équations montrent que l'axe de rotation doit être un axe principal d'inertie relatif au point où vient se projeter la percussion.

On peut éliminer U et V entre la première, la troisième et la cinquième équation. On trouve alors

$$M(\zeta w + \xi u) = \Sigma m r^2,$$

ou bien, en appelant k le rayon de giration du corps par rapport à l'axe des y,

$$\zeta w + \xi u = k^2.$$

Cette équation est celle de la percussion; son coefficient angulaire est $-\frac{\xi}{\zeta}$, et, par suite, cette droite est normale au plan qui passe par l'axe de rotation et le centre de gravité; la distance de la percussion à l'axe de rotation est

$$\frac{k^2}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}},$$

ou bien, en désignant par a la distance du centre de gravité à l'axe, $\frac{k^2}{a}$.

279. On appelle *centre de percussion* d'un solide, relativement à un axe, le point où la percussion qui ne frapperait pas l'axe vient rencontrer le plan qui passe par l'axe et le centre de gravité.

On voit, d'après cela, comment on devra calculer la position du centre de percussion. Après avoir déterminé le rayon de giration k du corps par rapport à l'axe, on divisera son carré par la distance du centre de gravité à l'axe : le quotient ainsi obtenu représentera la distance du centre de percussion à l'axe. La position du centre de percussion sera du reste déterminée par la condition de se trouver dans un plan qui contient l'axe et le centre de gravité, et dans un plan perpendiculaire à l'axe mené par le point où cet axe est un axe principal d'inertie.

Si l'axe de rotation d'un corps n'était nulle part axe principal d'inertie, il n'y aurait pas de centre de percussion relatif à cet axe.

La considération du centre de percussion est importante dans la théorie des machines; elle nous montre que les pièces mobiles autour d'un axe, et soumises à des chocs violents, doivent, autant que possible, être disposées de telle sorte que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie, et de telle sorte que les chocs soient dirigés sur le centre de percussion perpendiculairement au plan qui contient l'axe de rotation et le centre de gravité; on atténue ainsi les effets désastreux du choc, effets qui pourraient ou bien fausser les axes de rotation, ou bien démolir les supports.

IV. — Théorie du pendule composé.

280. On donne le nom de *pendule composé* à un corps solide pesant assujetti à tourner autour d'un axe fixe, horizontal.

Pour étudier le mouvement d'un pendule composé, prenons l'axe de rotation pour axe des y, et la direction de la pesanteur pour axe des z; l'axe des x sera une perpendiculaire aux deux premiers axes.

L'équation du mouvement s'obtiendra en écrivant que la somme des moments des poids des différents points du système est égale au moment d'inertie du pendule pris par rapport à l'axe des y multiplié par l'accélération angulaire. Soient Mk^2 le moment d'inertie en question, M la masse totale du pendule, θ l'angle que fait avec la verticale la perpendiculaire menée par le centre de gravité du pendule sur l'axe de suspension, a la grandeur de cette perpendiculaire. La somme des moments des forces qui agissent sur le pendule est égale au moment du poids Mg du pendule appliqué à son centre de gravité, ou à $-Mga\sin\theta$. L'accélération angulaire est $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, t désignant le temps, en sorte que l'on a (277)

$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga\sin\theta,$$

ou bien

$$k^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + ga\sin\theta = 0. \tag{1}$$

Considérons maintenant un pendule simple de longueur l (t. I, p. 292), suspendu à l'origine; l'équation de son mouvement est donnée par la formule

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) deviennent identiques si l'on pose

$$\frac{k^2}{a} = l, \quad \text{ou} \quad k^2 = al,$$

en sorte que le pendule composé que nous étudions oscillera comme un pendule simple de longueur $\frac{k^2}{a}$; cette quantité porte le nom de *longueur du pendule simple synchrone*. Si, sur la perpendiculaire à l'axe de suspension menée par le centre de gravité, et à partir de l'axe de suspension, on compte dans le même sens que a une longueur égale à $\frac{k^2}{a} = l$, la parallèle à l'axe de suspension menée par l'extrémité de la longueur ainsi comptée porte le nom d'*axe d'oscillation*.

THÉORÈME I. — *Lorsqu'on suspend le pendule par son axe d'oscillation, l'ancien axe de suspension devient axe d'oscillation, et le mouvement du pendule n'est pas altéré.*

Cela résulte de la formule $l = \frac{k^2}{a}$. Si, en effet, on désigne par χ le moment d'inertie du pendule pris par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension mené par le centre de gravité, on aura

$$k^2 = a^2 + \chi^2,$$

$$l = \frac{k^2}{a} = a + \frac{\chi^2}{a}.$$

Si l'on prend alors l'axe d'oscillation pour axe de suspension, la longueur l' du pendule simple synchrone devient

$$l' = l - a + \frac{\chi^2}{l - a} = \frac{\chi^2}{a} + a.$$

On a donc $l = l'$. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Réciproquement, si l'on trouve deux axes parallèles contenant dans leur plan le centre de gravité, et tels que les oscillations autour de ces axes soient de même durée, leur distance sera la longueur du pendule simple synchrone, s'ils sont inégalement distants du centre de gravité.*

En effet, en appelant a et $l - a$ les distances de ces axes au centre de gravité, l sera leur distance mutuelle, et si l'on désigne par χ le rayon de giration du corps par rapport à l'axe parallèle aux deux axes donnés et passant par le centre de gravité, on aura, pour expression des longueurs des pendules simples synchrones,

$$a + \frac{\chi^2}{a} \quad \text{et} \quad l - a + \frac{\chi^2}{l - a}.$$

En égalant ces valeurs, on a

$$a + \frac{\chi^2}{a} = l - a + \frac{\chi^2}{l - a},$$

ou bien

$$a^2(l - a) + \chi^2(l - a) = (l - a)^2 a + \chi^2 a.$$

On en déduit

$$a l^2 - l(3a^2 + \chi^2) + 2a^3 + 2a\chi^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines : l'une est $a + \frac{\chi^2}{a}$, l'autre est égale à $2a$.

$a + \frac{\chi^2}{a}$ est bien la longueur du pendule simple synchrone, et l'on voit en outre que deux axes parallèles également distants du centre de gravité, contenant le centre de gravité dans leur plan, jouissent de la même réciprocité que l'axe d'oscillation et l'axe de suspension.

Nous terminerons par quelques remarques :

1° *Si l'axe de suspension est principal en un de ses points, l'axe d'oscillation passe par le centre de percussion ;*

2° *Si l'on considère une série d'axes situés à une même distance a du centre de gravité, celui pour lequel la longueur du pendule simple synchrone sera maximum ou minimum, et par conséquent pour lequel la durée des oscillations sera maxima ou minima, sera perpendicu-*

laire au plus grand ou au plus petit axe de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité ;

3° *Si l'on considère une série d'axes de suspension tous parallèles, la longueur du pendule simple synchrone*

$$l = a + \frac{\chi^2}{a}$$

sera minima lorsqu'on aura

$$0 = 1 - \frac{\chi^2}{a^2},$$

c'est-à-dire $\chi = a$. Dans ce cas, on a $l = 2a$, et la longueur du pendule simple synchrone est le double de la distance de l'axe de suspension au centre de gravité.

V. — Formules d'Euler.

281. Nous allons maintenant étudier le mouvement d'un solide qui présente un point fixe, mais sollicité par des forces quelconques.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du corps par rapport à trois axes rectangulaires fixes ox, oy, oz passant par le point fixe, et par ξ, η, ζ les coordonnées du même point prises par rapport à trois axes rectangulaires mobiles $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ passant par le point fixe, et invariablement liés au corps. Les formules de transformation des coordonnées nous donnent

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a\ \xi + b\ \eta + c\ \zeta, \\ y &= a'\ \xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned} \right.$$

et l'on a, comme on sait,

$$a = \cos(ox, o\xi), \quad b = \cos(ox, o\eta), \quad c = \cos(ox, o\zeta), \ldots.$$

On sait, de plus, que les neuf cosinus $a, b, c, \ldots$ sont liés entre eux par diverses formules, dont voici les principales :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1,\\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1,\\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} a' a'' + b' b'' + c' c'' &= 0,\\ a'' a + b'' b + c'' c &= 0,\\ a\, a' + b\, b' + c\, c' &= 0; \end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1,\\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1,\\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1; \end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= 0,\\ ca + c'a' + c''a'' &= 0,\\ ab + a'b' + a''b'' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si, de plus, on suppose que les directions positives des nouveaux axes puissent être amenées en coïncidence avec celles des anciens, on aura

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= b'c'' - c'b'', \quad a' = \ldots, \quad a'' = \ldots,\\ b &= c'a'' - a'c'', \quad b' = \ldots, \quad b'' = \ldots,\\ c &= a'b'' - b'a'', \quad c' = \ldots, \quad c'' = \ldots. \end{aligned}\right.$$

Enfin

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

Posons, en outre, comme nous l'avons fait en Cinématique,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,dt &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -(b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc''),\\ q\,dt &= a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = -(c\,da + c'\,da' + c''\,da''),\\ r\,dt &= b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = -(a\,db + a'\,db' + a''\,db''). \end{aligned}\right.$$

De ces formules on peut en déduire d'autres qui nous seront utiles. Des équations (8) on tire

$$r\,dt = b\,da + b'\,da' + b''\,da'',$$
$$-q\,dt = c\,da + c'\,da' + c''\,da'';$$

on a aussi

$$0 = a\,da + a'\,da' + a''\,da''.$$

De ces trois équations on déduit

$$(9)\quad \frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \quad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q;$$

on aurait de même

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{db}{dt} = cp - ar, & \dfrac{db'}{dt} = c'p - a'r, & \dfrac{db''}{dt} = c''p - a''r, \\[2ex] \dfrac{dc}{dt} = aq - bp, & \dfrac{dc'}{dt} = a'q - b'p, & \dfrac{dc''}{dt} = a''q - b''p. \end{cases}$$

Des formules précédentes on tire

$$p\,da + q\,db + r\,dc = 0,$$
$$p\,da' + q\,db' + r\,dc' = 0,$$
$$p\,da'' + q\,db'' + r\,dc'' = 0.$$

Ceci posé, si nous écrivons qu'il y a équilibre entre les forces d'inertie et les forces réellement agissantes, c'est-à-dire si nous écrivons [puisqu'il s'agit d'un corps solide présentant un point fixe (107)] que la somme des moments des forces d'inertie et des forces réellement agissantes est nulle, nous aurons, en désignant par L_1, M_1, N_1 les sommes des moments des forces réellement agissantes prises par rapport aux axes ox, oy, oz,

$$
(10)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sum m\left(\frac{d^2y}{dt^2}z-\frac{d^2z}{dt^2}y\right)+\mathrm{L}_1=0,\\
&\sum m\left(\frac{d^2z}{dt}x-\frac{d^2x}{dt^2}z\right)+\mathrm{M}_1=0,\\
&\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}y-\frac{d^2y}{dt^2}x\right)+\mathrm{N}_1=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules contiennent les coordonnées variables x, y, z, ... des divers points du système; mais ces coordonnées peuvent être exprimées à l'aide des coordonnées constantes ξ, η, ζ, ... et des neuf cosinus a, b, ... qui se réduisent à trois. Nous allons prendre ces cosinus pour nouvelles variables; ce qui diminuera le nombre des inconnues. Après quoi, nous simplifierons encore le problème en prenant pour variables les rotations p, q, r.

Pour effectuer le changement des variables, nous observerons que les formules (10) peuvent s'écrire

$$
\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\mathrm{L}_1,
$$

. . . .

Si alors on remplace x, y, z, dx, dy, dz par leurs valeurs déduites de (1), il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum m\bigg[&(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)\left(\xi\frac{da''}{dt}+\eta\frac{db''}{dt}+\zeta\frac{dc''}{dt}\right)\\
&-(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)\left(\xi\frac{da'}{dt}+\eta\frac{db'}{dt}+\zeta\frac{dc'}{dt}\right)\bigg]=\mathrm{L}_1,
\end{aligned}
$$

. . . . ,

ou bien

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum\frac{m}{dt}\big[&\xi^2(a'da''-a''da')\\
&+\eta^2(b'db''-b''db')+\zeta^2(c'dc''-c''dc')\\
&+\eta\zeta(b'dc''+c'db''-b''dc'-c''db')+\ldots\big]=\mathrm{L}_1,
\end{aligned}
$$

. . . .

Si dans ces formules on remplace $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, ... par leurs valeurs tirées de (9), on a, en tenant compte de (6),

$$\frac{d}{dt}\Sigma m[(cr+bq)\xi^2+(ap+cr)\eta^2+(bq+ap)\zeta^2$$
$$-\eta\zeta(cq+br)-\zeta\xi(ar+cp)-\xi\eta(aq+bp)]=\mathrm{L}_1,$$

. . . .

Si l'on pose alors

$$\mathrm{A}=\Sigma m(\zeta^2+\eta^2),\quad \mathrm{B}=\Sigma m(\xi^2+\zeta^2),\quad \mathrm{C}=\Sigma m(\eta^2+\xi^2),$$
$$\mathrm{D}=\Sigma m\eta\zeta,\qquad \mathrm{E}=\Sigma m\zeta\xi,\qquad \mathrm{F}=\Sigma m\eta\xi,$$

les formules précédentes deviennent

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{A}ap+\mathrm{B}bq+\mathrm{C}cr$$
$$-\mathrm{D}(cq+br)-\mathrm{E}(ar+cp)-\mathrm{F}(bp+aq)]=\mathrm{L}_1,$$

. . . .

Désignons par L, M, N les sommes des moments des forces pris par rapport aux axes $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, multiplions la première de ces équations par a, la seconde par a', la troisième par a'', et ajoutons; il viendra, en tenant compte des relations (4), (5), (8), et en observant que $a\mathrm{L}_1+a'\mathrm{M}_1+a''\mathrm{N}_1$ est égal à L,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}\frac{dp}{dt}-\mathrm{B}qr+\mathrm{C}qr-\mathrm{D}(q^2-r^2)\\&\quad-\mathrm{E}\left(\frac{dr}{dt}+pq\right)-\mathrm{F}\left(\frac{dq}{dt}-pr\right)=\mathrm{L}.\end{aligned}\right.$$

On aurait deux autres équations analogues à celles-ci, au moyen d'une permutation circulaire. Les équations ainsi obtenues sont les équations du mouvement, elles font connaître les composantes p, q, r de la rotation instantanée; ces composantes une fois connues, on déterminera a, b, c,... au moyen des formules (9), qui peuvent se ranger par groupes de trois ne contenant que trois des cosinus inconnus.

282. Les équations du mouvement se simplifient beaucoup, si l'on prend pour axes mobiles les axes principaux d'inertie du solide. Alors, en effet, D, E, F s'annulent, et l'on obtient, au lieu des formules contenues dans le type (11), les équations suivantes, établies pour la première fois par Euler :

$$(12)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L, \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M, \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N. \end{cases}$$

Ces équations étant très-importantes, nous allons en donner une nouvelle démonstration, plus simple mais peut-être moins naturelle.

VI. — Nouvelle démonstration des formules d'Euler.

283. Pour trouver les équations du mouvement, il suffit d'écrire qu'il y a équilibre entre le couple des forces d'inertie et le couple des forces réellement agissantes. Le couple des forces d'inertie a pour projections sur l'axe des x

$$\sum m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

ou bien

$$(13)\qquad -\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right).$$

Mais $y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}$ n'est autre chose que la projection du couple des quantités de mouvement sur l'axe des x. En désignant par P, Q, R les projections du couple des quantités de mouvement sur les axes $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, on aura alors

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = a\mathrm{P} + b\mathrm{Q} + c\mathrm{R};$$

par suite, la projection du couple des forces d'inertie sur ox sera

$$\frac{d}{dt}(a\mathrm{P} + b\mathrm{Q} + c\mathrm{R}),$$

et les équations du mouvement seront

$$(14) \qquad \frac{d}{dt}(a\mathrm{P} + b\mathrm{Q} + c\mathrm{R}) = \mathrm{L}_1, \ldots.$$

Or, en désignant par u, v, w les projections de la vitesse du point m sur $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, on a [35, formules (11)]

$$(15) \qquad \begin{cases} u = q\zeta - r\eta, \\ v = r\xi - p\zeta, \\ w = p\eta - q\xi; \end{cases}$$

on en déduit

$$\mathrm{P} = \Sigma m(\eta w - \zeta v) = \Sigma m[(\eta^2 + \zeta^2)p - \eta\xi q - \xi\zeta r], \ldots,$$

ou bien, en prenant pour axes mobiles les axes principaux d'inertie du solide,

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}p, \quad \mathrm{Q} = \mathrm{B}q, \quad \mathrm{R} = \mathrm{C}r.$$

Les équations (14) donnent alors

$$\frac{d}{dt}(a\mathrm{A}p + b\mathrm{B}q + c\mathrm{C}r) = \mathrm{L}_1, \ldots,$$

ou bien

$$a\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + b\mathrm{B}\frac{dq}{dt} + c\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + \mathrm{A}p\frac{da}{dt} + \mathrm{B}q\frac{db}{dt} + \mathrm{C}r\frac{dc}{dt} = \mathrm{L}_1, \ldots.$$

En multipliant la première de ces équations par a, la seconde par a', la troisième par a'', en ajoutant et en ayant égard à (4), (5), (8), on a

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L.$$

C. Q. F. D.

VII. — Tranformation des équations d'Euler.

284. On remplace quelquefois, en Géométrie analytique, les neuf cosinus a, b, c, a',... par trois angles θ, φ, ψ, dont nous allons rappeler la signification, et qui vont nous être utiles dans l'étude du mouvement de rotation des solides. Soient toujours ox, oy, oz les trois axes passant par le point fixe du solide en mouvement, et $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ les trois axes invariablement liés au solide; ψ est l'angle que la trace du plan des $\xi\eta$ sur le plan des xy fait avec l'axe des x, φ est l'angle que l'axe des ξ fait avec la même trace, enfin θ est l'angle que fait le plan des $\xi\eta$ avec le plan des xy.

On a, comme l'on sait,

$$\begin{aligned}
a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
c &= \sin\psi\sin\theta;\\
a' &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c' &= -\cos\psi\sin\theta;\\
a'' &= \sin\varphi\sin\theta,\\
b'' &= \cos\varphi\sin\theta,\\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les formules (8) qui font connaître p, q, r, on trouve

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,dt &= \sin\varphi\sin\theta\,d\psi + \cos\varphi\,d\theta,\\ q\,dt &= \cos\varphi\sin\theta\,d\psi - \sin\varphi\,d\theta,\\ r\,dt &= d\varphi + \cos\theta\,d\psi.\end{aligned}\right.$$

Lorsque l'on connaîtra p, q, r, l'intégration des équations (16) fera connaître φ, ψ, θ. On peut arriver aux formules (16) immédiatement, en considérant la rotation totale $\omega\,dt$ effectuée autour de l'axe instantané comme la résultante de trois rotations $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ effectuées autour de $o\zeta$, oz, et autour de l'intersection des plans $\xi o\eta$ et xoy. La projection de $\omega\,dt$ sur $o\xi$ est $p\,dt$, la projection de $d\varphi$ est nulle, celle de $d\psi$ est égale à $d\psi$ multiplié par le cosinus de l'angle que oz fait avec $o\xi$, ce cosinus est $a'' = \sin\varphi\sin\theta$, enfin la projection de $d\theta$ est égale à $d\theta\cos\varphi$. On a donc

$$p\,dt = d\psi\sin\varphi\sin\theta + d\theta\cos\varphi;$$

c'est la première des équations (16), les autres s'établiraient d'une façon analogue.

Si maintenant dans les équations d'Euler, on remplace p, q, r par leurs valeurs (16), on obtient trois équations du second ordre en θ, φ, ψ qui sont les équations du mouvement. Généralement, il y aura avantage à ne pas effectuer la substitution, et à intégrer directement les équations d'Euler.

VIII. — Intégration des équations d'Euler dans le cas où les forces passent toutes par le point fixe.

285. Dans le cas où les forces qui sollicitent le corps passent par le point fixe, on peut ramener l'intégration des équations d'Euler aux quadratures; dans ce cas, en

effet, les équations (12) prennent la forme

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,\\ &B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0,\\ &C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions la première équation par p, la seconde par q, la troisième par r, et ajoutons, nous aurons

$$Ap\,dp+Bq\,dq+Cr\,dr=0,$$

ou bien

$$(18)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=2T,$$

$2T$ désignant la constante d'intégration. Il est facile de voir que l'équation (18) exprime que la force vive du système est constante; en effet, la force vive du système est $\Sigma m(u^2+v^2+w^2)$, c'est-à-dire, en vertu des formules (15),

$$\Sigma m[(q\zeta-r\eta)^2+(r\xi-p\zeta)^2+(p\eta-q\xi)^2].$$

Si l'on développe cette quantité et si l'on observe que $\Sigma m(\eta^2+\zeta^2)=A,\ldots,\ \Sigma m\eta\zeta=0,\ldots$, on voit qu'elle est précisément égale à $Ap^2+Bq^2+Cr^2$.

C. Q. F. D.

L'équation (18) est une première intégrale des formules (17), il en reste encore deux à trouver; pour en trouver une seconde, on peut multiplier les équations (17) respectivement par Ap, Bq, Cr, et les ajouter, on trouve ainsi

$$A^2p\,dp+B^2q\,dq+C^2r\,dr=0,$$

d'où l'on déduit

$$(19)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2.$$

Cette équation est l'expression du théorème des moments des quantités de mouvement. On a, en effet, en vertu des formules (15),

$$\Sigma m(\varpi\eta - \upsilon\zeta) = \Sigma m[\eta(\eta p - \xi q) - \zeta(\xi r - \zeta p)] = \mathrm{A}p;$$

ainsi $\mathrm{A}p$ est le moment de la quantité de mouvement pris par rapport à $o\xi$. $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$ sont les moments de la même quantité de mouvement pris par rapport à $o\eta$ et $o\zeta$. Donc G est l'axe du couple résultant des quantités de mouvement.

Si maintenant on considère les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 &= 2\mathrm{T}, \\ \mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 &= \mathrm{G}^2, \\ p^2 + q^2 + r^2 &= \omega^2, \end{aligned}$$

on en déduit

$$p^2 = \frac{2\mathrm{T}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) - \mathrm{G}^2 - \omega^2\mathrm{BC}}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{A}-\mathrm{C})}, \quad q^2 = \ldots, r^2 = \ldots,$$

ou, si l'on veut,

$$(20) \quad p = \sqrt{l + l'\omega^2}, \quad q = \sqrt{m + m'\omega^2}, \quad r = \sqrt{n + n'\omega^2},$$

l, m, n, l', m', n' désignant des constantes.

Or on a

$$\omega\,d\omega = p\,dp + q\,dq + r\,dr.$$

Si, dans cette formule, on remplace dp, dq, dr par leurs valeurs déduites de (17), on a

$$\omega\,d\omega = \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right) pqr\,dt,$$

et si l'on remplace p, q, r par leurs valeurs déduites de (20), on trouve

$$\omega\,d\omega = \mathrm{H}\sqrt{(l + l'\omega^2)(m + m'\omega^2)(n + n'\omega^2)}\,dt,$$

formule dans laquelle H désigne une constante. On peut simplifier cette équation et la mettre sous la forme

$$dt = \frac{\mathrm{I}.d.\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\alpha)(\omega^2-\beta)(\omega^2-\gamma)}},$$

dans laquelle I, α, β, γ sont des constantes faciles à calculer. ω^2 est une fonction doublement périodique du temps que l'on déduira de la formule précédente, après quoi les formules (20) feront connaître p, q, r.

On peut ramener les quantités p, q, r aux fonctions elliptiques, de la manière suivante.

IX. — Calcul des rotations p, q, r, au moyen des fonctions elliptiques.

286. Supposons que l'on ait $A > B > C$; des équations (18) et (19), on tire

$$(21)\qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{G^2 - 2TC - B(B-C)q^2}{A(A-C)}, \\[2ex] r^2 = \dfrac{2TA - G^2 - B(A-B)q^2}{C(A-C)}; \end{cases}$$

les dénominateurs de ces expressions sont positifs; donc, pour que p et r soient réels, il faut que

$$G^2 - 2TC > 0,\quad 2TA - G^2 > 0;$$

de plus, on devra avoir

$$q^2 < \frac{2TA - G^2}{B(A-B)} \quad \text{et} \quad < \frac{G^2 - 2TC}{B(B-C)}.$$

Supposons, pour fixer les idées,

$$(22)\qquad q^2 < \frac{G^2 - 2TC}{B(B-C)} < \frac{2TA - G^2}{B(A-B)},$$

r ne pourra jamais s'évanouir et conservera par suite le même signe. Le signe de r est arbitraire et dépend de la direction des axes mobiles ; prenons donc r positif, l'équation

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B - C}{A} qr,$$

que l'on déduit de (17), prouve que q doit s'annuler ; en effet, si q conservait toujours le même signe, en désignant par m le minimum de qr, on aurait

$$\frac{dp}{dt} > \frac{B - C}{A} m,$$

$$p > \frac{B - C}{A} mt + \text{const.},$$

p croîtrait indéfiniment avec le temps, ce qui est impossible, puisque l'on peut considérer p, q, r comme les coordonnées d'un ellipsoïde représenté par l'équation (18). Ainsi q doit passer par o, et il en est de même de la quantité p.

Des équations (18) et (19), on tire par l'élimination de r

$$(23) \qquad \frac{p^2}{p'^2} + \frac{q^2}{q'^2} = 1,$$

en posant, pour abréger,

$$p'^2 = \frac{G^2 - 2TC}{A(A - C)}, \quad q'^2 = \frac{G^2 - 2TC}{B(B - C)};$$

p' et q' sont réels, puisque, en vertu des relations (22), $G^2 - 2TC$ est positif. On pourra donc poser, en vertu de l'équation (23),

$$p = p' \cos\chi, \quad q = q' \sin\chi.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (21), on a

$$r^2 = \frac{2TA - G^2 - B(A - B) q'^2 \sin^2\chi}{C(A - C)};$$

mais, en vertu des relations (22), $2\mathrm{TA} - \mathrm{G}^2$ est positif, on pourra donc écrire

$$r^2 = n^2(1 - k^2 \sin^2\chi) = n^2(\Delta\chi)^2, \quad r = n\Delta\chi,$$

en posant, pour abréger,

$$n^2 = \frac{2\mathrm{TA} - \mathrm{G}^2}{\mathrm{C}(\mathrm{A} - \mathrm{C})}, \quad k^2 = \frac{\mathrm{B}(\mathrm{A} - \mathrm{B})}{2\mathrm{TA} - \mathrm{G}^2};$$

on aura ainsi

$$(24) \qquad p = p' \cos\chi, \quad q = q' \sin\chi, \quad r = n\Delta\chi.$$

Si l'on différentie ces formules, on a

$$dp = -p' \sin\chi\, d\chi, \quad dq = q' \cos\chi\, d\chi,$$

ou bien

$$d\chi = -\frac{dp}{p' \sin\chi} = \frac{dq}{q' \cos\chi},$$

ou bien, en remplaçant dp et dq par leurs valeurs tirées de (17),

$$d\chi = -\frac{qr\,dt}{p' \sin\chi}\,\frac{\mathrm{B} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \frac{pr\,dt}{q' \cos\chi}\,\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{B}};$$

ces équations peuvent s'écrire ainsi qu'il suit, en éliminant q et r au moyen de (24),

$$d\chi = -\frac{q'}{p'}\,\frac{\mathrm{B} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}}\, n\Delta\chi\, dt = \frac{p'}{q'}\,\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{B}}\, n\Delta\chi\, dt,$$

ou, si l'on veut,

$$d\chi = g\Delta\chi\, dt,$$

en posant, pour abréger,

$$g = -\frac{q'}{p'}\,\frac{\mathrm{B} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}}\, n = -\frac{p'}{q'}\,\frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{B}}\, n.$$

On aura alors

$$g\,dt = \frac{d\chi}{\Delta\chi},$$

ou, si l'on veut,

$$\chi = \operatorname{am} gt,$$

$$p = p' \cos \operatorname{am} gt, \quad q = q' \sin \operatorname{am} gt, \quad r = n \Delta \operatorname{am} gt,$$

et les quantités p, q, r sont exprimées à l'aide de trois fonctions elliptiques du temps. Les angles θ, φ, ψ peuvent se calculer comme il suit.

L'axe du couple résultant des quantités de mouvement G conserve une direction fixe dans l'espace, puisque les forces se font équilibre par hypothèse autour du point fixe; on peut prendre cet axe pour axe des z, et alors on a

$$\mathrm{A}p = \mathrm{G}a'', \quad \mathrm{B}q = \mathrm{G}b'', \quad \mathrm{C}r = \mathrm{G}c'',$$

ou bien, en remplaçant a'', b'', c'' par leurs valeurs exprimées en θ, φ, ψ,

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}p &= \mathrm{G} \sin\varphi \sin\theta, \\ \mathrm{B}q &= \mathrm{G} \cos\varphi \sin\theta, \\ \mathrm{C}r &= \mathrm{G} \cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Or des formules (16) on tire

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p \sin\varphi + q \cos\varphi}{\sin\theta}.$$

Si l'on remplace $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs déduites de (25), on a

$$(26) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\mathrm{G}(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2)}{\mathrm{G}^2 - \mathrm{C}^2 r^2} = \frac{\mathrm{G}(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2)}{\mathrm{A}^2 p^2 + \mathrm{B}^2 q^2},$$

p, q, r sont connus, les formules (25) et (26) feront connaître θ, φ, ψ.

Pour le calcul des angles θ, φ, ψ et leur réduction aux fonctions Θ et H, on pourra consulter un Mémoire de Jacobi, imprimé en français dans le *Journal de Crelle*, t. XXXIX. La réduction que nous venons d'opérer sur les rotations p, q, r est extraite de ce Mémoire.

X. — Propriétés du mouvement.

287. L'intégration des équations du mouvement de rotation, lors même qu'il n'existe point de forces, c'est-à-dire dans un des cas les plus simples, ne permet pas de déterminer complétement ce mouvement, puisque les intégrales dépendent des fonctions elliptiques, dont il n'existe pas encore de tables bien complètes. Mais, quand même on aurait des tables convenablement disposées, il serait difficile de démêler les propriétés du mouvement au milieu des formules compliquées qui résultent de la belle méthode de Jacobi. Poinsot, dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, s'est attaché surtout à montrer les propriétés géométriques du mouvement; en sorte que les Mémoires de Poinsot et de Jacobi se complètent mutuellement, bien qu'ils aient été écrits par deux génies de caractères essentiellement différents.

La méthode de Poinsot est fondée sur l'étude du mouvement de l'ellipsoïde central. Cette surface a pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1;$$

le point où l'axe instantané rencontre la surface de l'ellipsoïde central est ce que Poinsot appelle le *pôle instantané*.

L'équation

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T$$

montre que $\frac{p}{\sqrt{2T}}$, $\frac{q}{\sqrt{2T}}$, $\frac{r}{\sqrt{2T}}$ sont les coordonnées du pôle instantané. La longueur du demi-diamètre passant par le pôle est

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{2T}} = \frac{\omega}{\sqrt{2T}} = \delta, \quad \text{ou} \quad \omega = \delta\sqrt{2T}.$$

Ainsi *la vitesse de rotation instantanée* ω *est proportionnelle au diamètre de l'ellipsoïde central qui passe par le pôle.*

Le plan tangent mené par le pôle à l'ellipsoïde central a pour équation

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2T}.$$

Ce plan est, comme l'on voit, parallèle au plan invariable du couple résultant des quantités du mouvement. Donc :

L'axe instantané est un diamètre conjugué du plan du couple des quantités de mouvement dans l'ellipsoïde central.

Du point fixe abaissons une perpendiculaire sur le plan tangent mené par le pôle; cette perpendiculaire h est donnée par la formule

$$h = \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}},$$

ou

$$h = \frac{\sqrt{2T}}{G};$$

donc *le plan tangent qui passe par le pôle est à une distance constante du point fixe.*

Il résulte de ces remarques que le mouvement de l'ellipsoïde central peut être défini par la condition de rester tangent à un plan fixe parallèle au plan du couple des quantités de mouvement. Le mouvement de l'ellipsoïde central sur son plan tangent fixe n'est pas précisément ce que l'on peut appeler un *mouvement de roulement sans glissement :* l'ellipsoïde tourne autour du diamètre du point de contact pendant un temps infiniment petit, et roule à la fois sur son plan tangent. Il est vrai qu'il n'existe pas de glissement proprement dit, puisque le point de contact se déplace d'une quantité infiniment petite du second ordre dans le temps dt. Ce genre de roulement porte le nom de *mouvement de rasion*.

Le lieu des axes instantanés dans le corps est un cône dont les génératrices ont pour équation

$$\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}=\frac{\zeta}{r}.$$

L'élimination de p, q, r fera connaître le lieu des axes instantanés dans le corps. Or des équations précédentes on déduit

$$\frac{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2}{Ap^2+Bq^2+Cr^2}=\frac{A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2}{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2}{2T}=\frac{A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2}{G^2},$$

ou bien enfin

$$(27)\quad A(G^2-2TA)\xi^2+B(G^2-2TB)\eta^2+C(G^2-2TC)\zeta^2=0.$$

Cette équation, qui est du second degré, doit représenter un cône, et l'on voit ainsi que G^2-2TA, G^2-2TB, G^2-2TC ne peuvent être tous de même signe, ce que l'on a déjà démontré d'une autre manière.

Lorsque l'une des quantités G^2-2TA se réduit à zéro, le cône se réduit à deux plans ou bien à une droite; cette droite est alors l'un des axes principaux d'inertie.

Réciproquement, *si le corps peut tourner un seul instant autour de l'un de ses axes principaux d'inertie, il tournera indéfiniment autour de cet axe.*

En effet, si l'on admet que l'équation (27) du lieu des axes instantanés puisse être satisfaite pour $\eta=0$, $\zeta=0$, sans que l'on ait $\xi=0$, il faut que G^2-2TA soit identiquement nul, et alors le lieu en question se réduit bien à une droite unique, l'axe des ξ.

Enfin, pour que le cône (27) se réduise à une droite, il faut absolument que l'une des quantités $G^2 - 2AT$, $G^2 - 2BT$, $G^2 - 2CT$ s'annule, ce qui prouve que :

Les axes principaux d'inertie peuvent seuls être des axes permanents de rotation quand il n'existe point de forces extérieures.

Mais il existe entre ces axes une différence qu'il est essentiel de signaler. Supposons $A > B > C$, les quantités $G^2 - 2AT$, $G^2 - 2BT$, $G^2 - 2CT$, ainsi que nous l'avons fait observer, ne peuvent avoir toutes trois le même signe; donc

$$G^2 - 2AT < 0, \quad G^2 - 2CT > 0.$$

Par suite, si l'on coupe le cône des axes instantanés par un plan perpendiculaire à l'axe des x, on obtiendra une ellipse si $G^2 - 2BT > 0$, et une hyperbole dans le cas contraire; mais alors un plan perpendiculaire à l'axe des z coupera le cône suivant une ellipse. On voit ainsi que l'axe instantané ne s'écartera que de quantités limitées du plus grand ou du plus petit axe d'inertie du solide. Au contraire, tout plan perpendiculaire à l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie coupera le cône des axes instantanés suivant une hyperbole; il résulte de là que le mouvement de rotation qui s'effectuerait autour de l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie n'aurait jamais la moindre stabilité, tandis que le mouvement de rotation pourra être stable autour du plus grand ou du plus petit axe d'inertie.

Le cône (27) coupe l'ellipsoïde central suivant la courbe lieu des pôles instantanés; cette courbe, qui se projette sur les plans coordonnés suivant des ellipses et des hyperboles, est ce que Poinsot appelle une *poloïde* ou *polhodie;* il réserve le nom de *herpolhodie* au lieu des points de contact de l'ellipsoïde sur son plan tangent. Ce lieu est l'intersection du lieu des axes instantanés dans l'espace avec le plan tangent fixe.

Le lieu des axes du couple résultant des quantités de mouvement dans le corps est aussi un cône du deuxième degré.

En effet, ces axes ont pour équations

$$\frac{\xi}{Ap} = \frac{\eta}{Bq} = \frac{\zeta}{Cr};$$

en éliminant p, q, r, on trouve l'équation du cône en question ; on a

$$\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2} = \frac{\xi^2 : A + \eta^2 : B + \zeta^2 : C}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2},$$

ou bien

$$\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{G^2} = \frac{\xi^2 : A + \eta^2 : B + \zeta^2 : C}{2T},$$

ou enfin

$$\frac{2TA - G^2}{A}\xi^2 + \frac{2TB - G^2}{B}\eta^2 + \frac{2TC - G^2}{C}\zeta^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Nous ferons une dernière remarque avant de terminer : la vitesse ω ne peut être constante que si δ reste constant, ce qui ne peut avoir lieu que si l'axe instantané est immobile. Ce fait résulte aussi de ce que, si, dans les équations (17), on fait $dp = 0$, $dq = 0$, $dr = 0$, on trouve $pr = 0$, $rq = 0$, $pq = 0$, ce qui prouve que deux des quantités p, q, r sont nulles.

XI. — Simplification des équations du mouvement dans le cas où l'ellipsoïde central relatif au point fixe est de révolution.

288. Si l'ellipsoïde central relatif au point fixe est de révolution, les équations d'Euler se simplifient beaucoup; on peut même substituer aux équations d'Euler d'autres équations plus commodes, en faisant usage d'un nouveau système d'axes mobiles.

Nous rapporterons, comme nous l'avons fait plus haut, le corps à trois axes fixes Ox, Oy, Oz passant par le point fixe, et à trois axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; $O\zeta$ sera l'axe de révolution de l'ellipsoïde central, $O\xi$ sera la trace de la section circulaire principale de l'ellipsoïde central sur le plan des xy; ou, si l'on convient d'appeler *équateur* la section circulaire principale, $O\xi$ sera la trace du plan de l'équateur sur le plan des xy; enfin $O\eta$ sera perpendiculaire à $O\xi$ et $O\zeta$.

Nous désignerons toujours par C le moment d'inertie du corps relatif à $O\zeta$, et par A le moment d'inertie relatif à $O\xi$ ou à $O\eta$. Nous appellerons, comme plus haut, ψ l'angle que $O\xi$ fait avec Ox, et θ l'angle que $O\zeta$ fait avec Oz; enfin $d\varphi$ désignera l'angle dont le solide tourne pendant le temps dt autour de $O\zeta$. La rotation instantanée $\omega\,dt$ est la résultante de trois rotations : 1° $d\theta$ effectuée autour de $O\xi$; 2° $d\psi$ effectuée autour de Oz, et 3° $d\varphi$ effectuée autour de $O\zeta$. La rotation $d\psi$ effectuée autour de Oz peut être décomposée en deux autres $d\psi\cos\theta$ et $d\psi\sin\theta$ effectuées autour de $O\zeta$ et $O\eta$, en sorte que les composantes de la rotation instantanée autour des axes mobiles sont

$$(1) \qquad d\theta, \quad \sin\theta\, d\psi, \quad d\varphi + \cos\theta\, d\psi.$$

En désignant par m la masse et par δ la distance d'un point quelconque à l'axe instantané, la force vive $2T$ aura pour expression

$$2T = \Sigma m \delta^2 \omega^2 = \omega^2 \Sigma m \delta^2.$$

Mais, en appelant α, β, γ les angles que l'axe de la rotation instantanée fait avec les directions des coordonnées. Le moment d'inertie $\Sigma m \delta^2$ du corps, par rapport à cet axe, pourra s'exprimer en fonction des moments d'inertie principaux comme il suit (137) :

$$\Sigma m \delta^2 = A \cos^2\alpha + A \cos^2\beta + C \cos^2\gamma,$$

et, par suite, la formule précédente devient

$$2T = A\omega^2 \cos^2\alpha + A\omega^2 \cos^2\beta + C\omega^2 \cos^2\gamma,$$

ou bien, en remplaçant les composantes $\omega \cos\alpha$, $\omega \cos\beta$, $\omega \cos\gamma$ de la rotation par leurs valeurs (1),

$$2T = A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + A \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Si l'on applique alors les formules de Lagrange (216), et si l'on désigne par $\Theta\,\delta\theta + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi$ le travail virtuel des forces qui agissent sur le corps, on a

$$\frac{dT}{d\theta} = (A - C)\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - C\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dT}{d\psi} = 0,$$

$$\frac{dT}{d\theta'} = A\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dT}{d\varphi'} = C\frac{d\varphi}{dt} + C\cos\theta\frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dT}{d\psi'} = A\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} + C\cos^2\theta\frac{d\psi}{dt} + C\cos\theta\frac{d\varphi}{dt},$$

et les équations du mouvement deviennent

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} - (A - C)\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + C\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = \Theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(A\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} + C\cos^2\theta\frac{d\psi}{dt} + C\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\right) = \Psi,$$

$$C\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right) = \Phi;$$

$\frac{d\psi}{dt}$ est ce que l'on appelle la *précession*, $\frac{d\theta}{dt}$ est la *nutation*. Lorsque $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, on peut remplacer ces équations par les suivantes :

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} - A\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt^2} + f\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = \Theta,$$

$$A\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} + f\cos\theta = i,$$

$$C\frac{d\varphi}{dt} + C\frac{d\psi}{dt}\cos\theta = f,$$

dans lesquelles f et i représentent des constantes que l'on déterminera d'après les conditions initiales.

Si le corps en mouvement n'est sollicité que par la pesanteur ; si l'on prend son poids pour unité et l'axe des z vertical, on a

$$\Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\varphi = l\sin\theta\,\delta\theta,$$

l désignant la distance du centre de gravité au point fixe. Par suite Ψ et Φ sont nuls, et les équations du mouvement rentrent dans celles que nous venons d'écrire.

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant comment on peut résoudre, en partant de principes différents, la question du mouvement d'un solide pesant assujetti à tourner autour d'un point fixe.

XII. — Étude du mouvement d'une toupie.

289. Proposons-nous d'étudier le mouvement d'un corps solide, homogène et de révolution autour d'un axe passant par un point fixe. Nous supposerons ce corps sollicité uniquement par son poids. Ce mouvement se trouve réalisé à peu près dans la toupie.

Rapportons le corps à trois axes fixes passant par le point fixe, l'un Oz vertical, et les deux autres Ox, Oy horizontaux, et à trois axes mobiles qui seront : l'axe de révolution pris pour axe des ζ, et deux axes perpendiculaires entre eux, situés dans le parallèle du point fixe. Soient p, q, r les composantes de la rotation instantanée relatives aux axes mobiles; θ, φ, ψ les angles qui, dans les formules d'Euler définissent la position des axes mobiles; C le moment d'inertie du solide relatif à l'axe des ζ; A le moment d'inertie relatif aux axes des η et des ξ.

La dernière des formules d'Euler

$$C\frac{dr}{dt}+(A-B)pq=N$$

montre que r est une constante; en effet, le centre de gravité du corps étant sur l'axe des ζ, le moment N de la pesanteur par rapport à cet axe sera nul; de plus, A et B sont égaux, la formule précédente se réduit donc à

$$\frac{dr}{dt}=0 \quad \text{ou} \quad r=\text{const.}$$

Au lieu de nous servir des deux autres équations d'Euler, nous appliquerons le théorème des forces vives (qui est du reste une conséquence forcée des équations d'Euler) et le théorème des aires.

La force vive du corps est (p. 152)

$$A(p^2+q^2)+Cr^2.$$

Quant au travail de la pesanteur, il est égal à la quantité dont le centre de gravité se déplace multipliée par le poids du corps, que l'on peut prendre égal à l'unité. En désignant alors par $\frac{1}{2}l$ la distance du centre de gravité au point fixe, et par h une constante, le travail de la pesanteur sera

$$\frac{1}{2}(-l\cos\theta+h);$$

on aura donc

$$(1)\qquad A(p^2+q^2)+Cr^2=h-l\cos\theta.$$

La force qui sollicite le corps étant constamment verticale, son moment, par rapport à Oz, sera nul, et par suite on pourra égaler à une constante k, le moment de la quantité de mouvement prise par rapport à Oz; ce qui donne

$$Aa''p+Ab''q+Cc''r=k:$$

a'', b'', c'' sont trois cosinus définis par les formules d'Euler

$$a''=\sin\varphi\sin\theta,\quad b''=\cos\varphi\sin\theta,\quad c''=\cos\theta;$$

en sorte que l'équation précédente peut s'écrire

$$(2)\qquad A\sin\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi)+Cr\cos\theta=k.$$

Dans les formules (1) et (2), remplaçons p, q, r par leurs valeurs (p. 151)

$$(3)\qquad \begin{cases} p=\sin\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}+\cos\varphi\dfrac{d\theta}{dt},\\[2mm] q=\cos\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}-\sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt},\\[2mm] r=\dfrac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Il viendra

$$(4)\qquad A\left(\sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}+\frac{d\theta^2}{dt}\right)+Cr^2=h-l\cos\theta,$$

$$(5)\qquad A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}=k-Cr\cos\theta.$$

Les équations (3), (4), (5) feront connaître θ, φ, ψ. Les équations (4) et (5) ne contiennent pas φ, elles ne contiennent pas de fonction de ψ, en sorte que si l'on élimine $\frac{d\psi}{dt}$, on aura une équation différentielle ordinaire pour calculer θ.

Supposons que les valeurs initiales de $\frac{d\psi}{dt}$ et de $\frac{d\theta}{dt}$ soient nulles, supposons en outre la rotation r assez considérable, les équations (4) et (5) et la dernière équation (3) pourront s'écrire, en désignant par a la valeur initiale de θ,

$$(6)\qquad A\left[\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]+l(\cos a-\cos\theta),$$

$$(7)\qquad A\sin\theta^2\,\frac{d\psi}{dt}=Cr(\cos a-\cos\theta),$$

$$(8)\qquad r=\frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}.$$

L'équation (6) montre que $l(\cos a-\cos\theta)$ est toujours positif, et que par suite l'angle θ reste toujours inférieur ou supérieur à a suivant que l est positif ou négatif. (7) montre que la précession $\frac{d\psi}{dt}$ est de même signe ou de signe contraire à r, suivant que $\cos a-\cos\theta$ sera positif ou négatif, ou en d'autres termes que la précession sera de même signe ou de signe contraire à la rotation, suivant que l sera positif ou négatif.

L'élimination de $\frac{d\psi}{dt}$ entre (6) et (7) conduit à une équation où les variables θ et t sont séparées, mais que l'on ne peut résoudre que par les quadratures. Cette équation est

$$(9)\qquad A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (\cos a - \cos\theta)\left[l - \frac{C^2 r^2}{A\sin^2\theta}(\cos a - \cos\theta)\right].$$

Le maximum ou le minimum de θ s'obtiendra en annulant le deuxième membre de cette équation. L'équation résultante se décompose en deux autres

$$\cos a = \cos\theta,$$

$$(10)\qquad \frac{A l \sin^2\theta}{C^2 r^2} + \cos\theta = \cos a.$$

La première équation est satisfaite pour $\theta = a$; la seconde donne pour $\cos\theta$ deux valeurs réelles pour $t = 0$; θ part de la valeur a, puis il reste constamment inférieur ou supérieur à a. Supposons qu'il aille en augmentant, il finira par atteindre une valeur b satisfaisant à l'équation (10) : cette valeur sera un maximum; θ ira alors en décroissant, passera par la valeur a, puis croîtra de nouveau, et ainsi de suite. L'équation (9) intégrée entre les limites $\theta = a$, $\theta = b$ fera connaître le temps d'une oscillation de l'axe de la toupie.

Si r est assez grand, en vertu de (7), θ variera peu, car, en vertu de (6), $\frac{d\psi}{dt}$ n'est pas très-considérable; donc $\frac{d\psi}{dt}$, en vertu de (7), sera à peu près constant, et le mouvement de précession sera à peu près uniforme; enfin l'équation (8) montre que la vitesse $\frac{d\varphi}{dt}$ est sensiblement égale à r.

En réalité, le phénomène de la toupie n'est pas tout à fait celui que nous venons de considérer, car la pointe de la toupie n'est pas rigoureusement un point, et la toupie n'est pas rigoureusement un solide; enfin la toupie se meut dans l'air dont la résistance et le frottement occasionnent des perturbations; aussi le mouvement finit-il par s'éteindre peu à peu.

XIII. — Théorie de la machine d'Atwood.

290. On donne, dans les Traités de Physique, une théorie très-défectueuse de la machine d'Atwood. Nous allons essayer d'analyser avec plus de soin les diverses circonstances de son mouvement; nous ferons abstraction des frottements, que l'on diminue beaucoup à l'aide d'une disposition ingénieuse bien connue du lecteur.

La machine d'Atwood se compose, comme l'on sait, d'une poulie verticale sur laquelle s'enroule un fil aux deux extrémités duquel sont suspendus deux poids P et $P + p$. On demande le mouvement que vont prendre ces poids.

Soient R le rayon de la poulie, k son rayon de gyration pris par rapport à l'axe de rotation, ϖ son poids; si nous écrivons qu'il y a équilibre entre les forces P, $P + p$, le poids de la poulie et les forces d'inertie, le principe de d'Alembert devra nous fournir toutes les circonstances du mouvement.

Supposons que le système soit abandonné à lui-même sans vitesse initiale, soit s le chemin parcouru par le poids $P + p$. Écrivons l'équation des moments par rapport à l'axe de rotation de la poulie : la force d'inertie du poids $P + p$ est $\frac{P+p}{g}\frac{d^2s}{dt^2}$, son moment est

$$-R\frac{P+p}{g}\frac{d^2s}{dt^2}$$

(en prenant pour sens positif le sens dans lequel la rotation s'effectue), le moment de la force d'inertie du poids

P est $-R\frac{P}{g}\frac{d^2s}{dt^2}$, les moments des poids $P+p$ et P sont respectivement $(P+p)R$, $-PR$, le moment de la force d'inertie de la poulie est égal à son moment d'inertie $\frac{\varpi}{g}k^2$ multiplié par son accélération angulaire prise en signe contraire, ou $-\frac{\varpi}{g}k^2.\frac{1}{R}\frac{d^2s}{dt^2}$; enfin, le poids de la poulie a pour moment zéro. On a donc

$$-R\frac{P+p}{g}\frac{d^2s}{dt^2}-R\frac{P}{g}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{\varpi}{g}k^2\frac{1}{R}\frac{d^2s}{dt^2}+(P+p)R-PR=0,$$

ou bien

$$\left[(2P+p)R+\varpi\frac{k^2}{R}\right]\frac{d^2s}{dt^2}=pRg;$$

on en déduit

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{pR^2g}{(2P+p)R^2+\varpi k^2}.$$

On a donc

$$s=\frac{pR^2gt^2}{2[(2P+p)R^2+\varpi k^2]},$$

et le mouvement est uniformément varié. Ce résultat est confirmé par l'expérience.

XIV. — Mouvement d'une chaine pesante flexible et inextensible sur une poulie.

291. Supposons maintenant que, dans l'étude du mouvement de la machine d'Atwood, on désire tenir compte de la masse du fil qui relie les poids $P+p$ et P. Conservons toujours les mêmes notations, mais désignons en outre par l la longueur totale du fil, et par ε le poids de l'unité de longueur de ce fil; soit s la distance verticale du poids $P+p$ à l'axe de la poulie. Les forces d'inertie

de la poulie et des poids conservent la même expression que tout à l'heure, mais il faudra introduire le moment du poids du fil et le moment de la force d'inertie de ce fil.

Considérons un élément dl de fil vertical, son poids est $\varepsilon\, dl$, son moment est $\pm R\varepsilon\, dl$, selon qu'il se trouve du côté du poids $P+p$ ou du poids P; le moment de la force d'inertie de cet élément est toujours $-\frac{\varepsilon}{g}\, dl R \frac{d^2 s}{dt^2}$: le moment du poids de la partie enroulée sur la poulie est nul; le moment de la force d'inertie de chacun de ses éléments est encore de la forme $-\frac{\varepsilon}{g}\, dl R \frac{d^2 s}{dt^2}$.

Le moment total de la force d'inertie du fil sera donc

$$-\int_0^l \frac{\varepsilon}{g} R \frac{d^2 s}{dt^2} dl = -\frac{l}{g} \varepsilon R \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Le moment total du poids du fil se composera de la somme des moments des poids de ses deux parties verticales; il sera donc

$$\int_0^s R\varepsilon\, dl - \int_{s+\pi R}^l R\varepsilon\, dl,$$

ou bien

$$R\varepsilon(s - l + s + \pi R),$$

c'est-à-dire

$$R\varepsilon(2s - l + \pi R).$$

L'équation du mouvement devient alors

$$-R\frac{P+p}{g}\frac{d^2 s}{dt^2} - R\frac{P}{g}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{\varpi}{g}k^2\frac{1}{R}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{l}{g}\varepsilon R\frac{d^2 s}{dt^2}$$
$$+(P+p)R - PR + R\varepsilon(2s - l + \pi R) = 0.$$

Si l'on pose alors

$$\frac{R^2(2P + p + \varepsilon l) + \varpi k^2}{R^2} = \frac{1}{a^2},$$

$$p - l\varepsilon + \pi R\varepsilon = \frac{b}{a^2}, \quad 2\varepsilon = \frac{c^2}{a^2}.$$

l'équation précédente devient

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - c^2 g s = g b.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$s = C_1 e^{ct\sqrt{g}} + C_2 e^{-ct\sqrt{g}} - \frac{b}{c^2}.$$

Si l'on admet que pour $t = 0$ on ait $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$, il vient

$$0 = C_1 + C_2 - \frac{b}{c^2},$$

$$0 = c\sqrt{g}(C_1 - C_2),$$

d'où l'on tire

$$C_1 = C_2 = \frac{b}{2c^2}:$$

par suite

$$s = \frac{b}{2c^2}\left(e^{ct\sqrt{g}} + e^{-ct\sqrt{g}} - 2\right).$$

Si la quantité c est très-petite, on aura

$$s = \frac{b}{c^2}\left(\frac{c^2 t^2 g}{1.2} + \frac{c^4 t^4 g^2}{1.2.3.4} + \ldots\right).$$

Pour $c = 0$, cette formule se réduit à

$$s = \frac{b}{1.2} g t^2,$$

et l'on retrouve la formule du mouvement uniformément accéléré. On voit aussi que l'influence du poids du fil ne se fait sentir que par le carré du poids de son unité de longueur.

EXERCICES.

I. Une règle pesante ayant la forme d'un parallélépipède rectangle repose sur une sphère, on écarte cette règle de sa position d'équilibre : étudier le mouvement oscillatoire qu'elle va prendre.

(M. Cornu avait déduit de l'étude de ce problème un moyen de calculer le rayon des petites lentilles, dans les cas où l'on ne peut employer le sphéromètre.)

II. Une flèche, que nous supposerons réduite à une ligne droite pesante, est lancée dans une direction oblique à l'horizon : étudier le mouvement de cette flèche.

III. Former l'équation aux différentielles partielles du mouvement de rotation, en fonction des angles θ, φ, ψ d'Euler.

On trouve, avec les notations employées dans le texte,

$$\frac{1}{A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)-\frac{dV}{d\theta}\cos\varphi\right]^2$$
$$+\frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)+\frac{dV}{d\theta}\sin\varphi\right]^2+\frac{1}{C}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2=2U+2H.$$

IV. Considérons un corps en mouvement autour d'un point fixe o; supposons que les forces qui sollicitent ce corps passent par le point fixe o. Soit p la distance du point o au plan tangent à l'ellipsoïde central relatif au point o, mené par le point où l'axe instantané rencontre cet ellipsoïde.

Sur l'axe du couple résultant des quantités de mouvement on porte une longueur $OM = p$; le lieu des points M est un ellipsoïde.

(MAC-CULLAGH.)

V. L'ellipsoïde de Mac-Cullagh, que nous venons de signaler, peut s'obtenir en transformant, par la méthode des polaires réciproques, l'ellipsoïde central de Poinsot, au moyen d'une sphère de rayon 1 ayant son centre en o.

VI. Soient ox, oy, oz un système d'axes fixes; $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ un système d'axes mobiles invariablement liés à un solide en mouvement autour du point o; soient a, b, c, a',... les neuf cosinus qui servent à passer du premier au second système d'axes; soit θ l'angle dont il faudrait faire tourner les axes mobiles pour les faire coïncider avec les axes fixes; soit oI l'axe autour duquel il faudrait effectuer la rotation; soient enfin α, β, γ les angles que fait oI avec les axes fixes ou avec les axes mobiles. Si l'on pose

$$\lambda = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \cos\alpha, \quad \mu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \cos\beta, \quad \nu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \cos\gamma,$$

on aura (facilement au moyen de la Trigonométrie sphérique)

$$\begin{array}{lll}
a = h(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2), & b = 2h(\lambda\mu-\nu), & c = 2h(\lambda\nu+\mu), \\
a' = 2h(\lambda\mu+\nu), & b' = h(1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2), & c' = 2h(\mu\nu-\lambda), \\
a'' = 2h(\lambda\nu-\mu), & b'' = 2h(\mu\nu+\lambda), & c'' = h(1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2),
\end{array}$$

où h^{-1} désigne, pour abréger, $1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2$.

(O. Rodrigues, *Journal de Liouville*, t. V.)

VII. Former l'équation du mouvement de rotation avec les variables λ, μ, ν de Rodrigues, et constater que, si l, l', l'' désignent les constantes des aires, on a

$$(l', l'') = l, \quad (l'', l) = l', \quad (l, l') = l''.$$

CHAPITRE IV.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

I. — Définition des fluides.

292. Dans ce Chapitre, nous allons étudier les conditions de l'équilibre et du mouvement des corps fluides. Une partie de l'étude que nous allons faire appartiendrait à la Statique; mais la théorie de l'équilibre des fluides tient une place peu considérable, et les questions de Dynamique s'y rattachent immédiatement : c'est ce qui engage à ne pas séparer la théorie de l'équilibre des fluides, ou *Hydrostatique*, de la théorie du mouvement des fluides, ou *Hydrodynamique*. L'*Hydraulique* n'est pas une science rationnelle; elle vient lever les difficultés que l'analyse rencontre en Hydrodynamique en faisant connaître les lois expérimentales du mouvement des liquides et des gaz ; son rôle se terminera lorsque les progrès de l'analyse infinitésimale nous auront permis de résoudre la question de l'intégration des équations simultanées du second ordre aux différences partielles.

On a donné le nom de *fluides* à des corps formés de molécules très-rapprochées les unes des autres et jouissant d'une grande mobilité, de sorte qu'une molécule du fluide se met en mouvement au moindre effort que l'on produit pour la détacher des molécules voisines.

Certains fluides enfermés dans des vases ne diminuent pas de volume quand on tend à diminuer le volume de ces vases; les fluides en question portent le nom de *liquides*.

D'autres fluides, au contraire, se laissent comprimer presque indéfiniment : on leur donne le nom de *gaz*.

Considérons un fluide enfermé dans un vase, et pratiquons dans ce vase une ouverture plane dont l'aire soit ω. Imaginons un bout de tuyau adapté à cette ouverture, et faisons glisser un piston dans ce tuyau. Lorsque l'équilibre est établi, l'expérience montre que les forces qu'il faut appliquer au piston pour le maintenir en équilibre se réduisent à une force normale P à l'aire ω, et appliquée sensiblement au centre de gravité de cette aire ω, pourvu toutefois que les dimensions de l'aire en question soient assez petites par rapport aux dimensions du vase qui contient le fluide. $\frac{P}{\omega}$ est ce que l'on appelle la *pression moyenne exercée sur l'élément* ω.

Si, autour d'un point M de paroi, on considère un élément plan ω et la pression moyenne $\frac{P}{\omega}$ qu'il faut exercer sur cet élément pour le maintenir en équilibre, l'expérience tend à prouver que, lorsque ω diminue, $\frac{P}{\omega}$ tend vers une limite : cette limite est ce que nous appelons la *pression au point* M.

Il est clair que le liquide exerce une pression égale et directement opposée à celle qu'il reçoit de la part des parois du vase qui le contient.

La définition que nous venons de donner de la pression suppose la matière continue, ou, pour parler plus correctement, suppose les dimensions des éléments sur lesquels on raisonne incomparablement plus grands que les espaces intermoléculaires.

293. Considérons un fluide en équilibre. Nous pouvons considérer une partie de ce fluide comme solidifiée; la partie non solidifiée exercera alors une action contre la partie solidifiée, à laquelle on donne le nom de *pression*. La pression moyenne, la pression en un point déterminé se définissent alors comme nous l'avons fait plus haut en considérant l'action du liquide sur une véritable paroi solide.

294. Théorème fondamental. — *La pression exercée dans un fluide en équilibre sur un élément superficiel infiniment petit ne dépend pas de l'orientation de cet élément.*

On exprime cette proposition dans un langage abrégé, en disant que *la pression est la même en tous sens.*

Pour démontrer cette proposition, faisons passer par le point M (*fig.* 40), pris à volonté dans le fluide, deux plans. Soient MA et MB les traces de ces plans sur le plan

Fig. 40.

de la figure supposé perpendiculaire à leur intersection; considérons cette intersection comme la base de deux rectangles égaux ayant pour hauteurs les lignes égales MA, MB; les deux rectangles en question pourront être considérés comme les faces d'un prisme triangulaire droit dont la base serait MAB.

Les forces qui sollicitent le prisme triangulaire sont : 1° les pressions exercées sur ses faces; 2° les forces extérieures. Or ces dernières sont négligeables vis-à-vis des pressions, car elles varient à peu près comme le cube des dimensions du prisme considéré, tandis que les pressions ne varient que comme le carré de ces mêmes dimensions. Ceci posé, les projections des forces qui sollicitent le prisme, sur la ligne AB, se réduiront aux projections des pressions exercées sur les faces MA et MB, car les autres pressions sont normales à AB. Ces projections, pour l'équilibre, doivent être égales et directement opposées; mais les faces MA et MB étant également inclinées sur AB, les pressions exercées sur ces faces feront des angles supplémentaires avec AB; par suite, ces pressions, ayant des projections égales et de signe contraire, seront égales entre elles. Ainsi, la pression sur un élément plan est indépendante de l'orientation de cet élément. C. Q. F. D.

II. — Équations de l'équilibre des fluides.

295. Considérons un fluide en équilibre et trois axes rectangulaires ox, oy, oz. Soient :

x, y, z les coordonnées d'un point M pris à l'intérieur du fluide;

ρ la masse spécifique du liquide, p sa pression en M;

X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse relatives au même point (*).

Par le point M imaginons un cylindre droit de hauteur l, parallèle à l'axe des x et ayant une de ses bases

(*) Il est essentiel de préciser ce que nous entendons par force rapportée à l'unité de masse. Chaque point matériel de masse dans le fluide est sollicité par une force qui peut être nulle dans certains cas, pour un volume infiniment petit pris dans le fluide. Ces forces extérieures sont, à fort peu de chose près, égales et parallèles à cause de la continuité; leur résultante de translation, divisée par la masse totale du volume considéré, en M; soit ω la surface de cette base, p_0 la pression exercée sur la base opposée. Solidifions ce cylindre et écrivons que la somme des projections des forces qui le sollicitent le long de l'axe des x est nulle.

Supposons ω infiniment petit, la somme des projections des pressions qui agissent sur le cylindre est $p_0\omega - p\omega$, car les pressions latérales sont normales à l'axe des x (292). La force extérieure qui agit en x, y, z a pour projection $X\rho\omega\,dx$, $\rho\omega\,dx$ désignant la masse de l'élément du cylindre qui a pour hauteur dx; donc la somme des projections des forces extérieures sera

$$\int_{x-l}^{x} X\rho\omega\,dx,$$

ou bien, en supposant $x - l$ constant et égal à x_0,

$$\int_{x_0}^{x} X\rho\omega\,dx.$$

On aura donc

$$p_0\omega - p\omega + \int_{x_0}^{x} X\rho\omega\,dx = 0.$$

Si l'on divise par ω et si l'on différentie par rapport à x, on a

$$-\frac{dp}{dx} + X\rho = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dp}{dx} = X\rho.$$

---

sera ce que nous appellerons la *force appliquée à l'unité de masse au point où l'on a pris le volume infiniment petit.*

Il est clair alors qu'une portion infiniment petite de fluide, lorsqu'on la suppose solidifiée, pourra être considérée comme sollicitée par une force extérieure égale au produit de sa masse spécifique par son volume et par la force extérieure rapportée à l'unité de masse.

On trouverait de même

$$\frac{dp}{dy} = Y\rho, \quad \frac{dp}{dz} = Z\rho.$$

D'où l'on conclut

$$(1) \qquad dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Il résulte de là que $\rho X + \rho Y + \rho Z$ est une différentielle exacte ; on doit donc avoir

$$(2) \qquad \frac{d\rho X}{dy} = \frac{d\rho Y}{dx}, \quad \frac{d\rho Y}{dz} = \frac{d\rho Z}{dy}, \quad \frac{d\rho Z}{dx} = \frac{d\rho X}{dz}.$$

Ces équations suffisent pour déterminer à chaque instant la position du point (x, y, z) ; elles sont donc les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre.

La démonstration que l'on vient de lire est due à Cauchy, qui l'a fait connaître dans ses anciens *Exercices d'analyse*. Clairaut, à qui l'on doit l'équation (1) (*Théorie de la figure de la Terre*), ne l'a pas établie avec toute la rigueur désirable. La démonstration d'Euler est celle que l'on reproduit habituellement dans les Traités de Mécanique rationnelle (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1755) ; elle ne me paraît pas aussi rigoureuse que celle de Cauchy. Lagrange, dans la *Mécanique analytique*, a donné une démonstration basée sur le principe du travail virtuel.

En intégrant l'équation (1) on trouve un résultat de la forme

$$p = f(x, y, z);$$

si l'on considère alors les équations comprises dans le type

$$f(x, y, c) = \text{const.},$$

ces équations représentent une famille de surfaces que l'on appelle *surfaces de niveau*. On a

$$\frac{df}{dx} = \frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{df}{dy} = \rho Y, \quad \frac{df}{dz} = \rho Z.$$

Il résulte de là que, en chaque point d'une surface de niveau, la force extérieure est constante et normale à cette surface.

Dans les liquides ou fluides incompressibles, ρ est constant ; alors $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, et l'équation des surfaces de niveau est

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Dans les gaz on a, entre p et ρ, la relation $p = k\rho$, k désignant une constante, en vertu de la loi de Mariotte. Dans ce cas, la formule (1) se réduit à

$$k\frac{dp}{p} = (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

et l'équation des surfaces de niveau est encore

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

III. — Équilibre des fluides pesants.

296. Dans le cas où la seule force extérieure qui sollicite le fluide est la pesanteur, on peut prendre l'axe des z vertical et dirigé de haut en bas ; alors l'équation des surfaces de niveau est

$$g\,dz = 0,$$

ou bien

$$z = \text{const.}$$

Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux. Du reste, s'il s'agit d'un liquide, on a

$$dp = \rho g\,dz.$$

Si l'on intègre depuis le point z jusqu'à la surface située à la hauteur z_0, on a

$$(1) \qquad p - p_0 = g\rho(z - z_0).$$

Si la hauteur z_0 correspond à la surface libre du liquide, p_0 sera la pression atmosphérique dans le cas le plus ordinaire; on voit que, pour $z = z_0$, p deviendra égal à p_0; alors la surface libre du liquide sera horizontale. Cette conséquence étant vraie, quelle que soit la forme du vase qui contient le liquide, elle sera encore vraie pour les vases communiquants, en sorte que la surface libre d'un liquide placé dans divers vases communiquants sera à la même hauteur dans chacun de ces vases, pourvu que la pression exercée à la surface libre du liquide soit la même dans tous ces vases.

Si l'on désire calculer la pression exercée sur un élément $d\omega$ situé à la profondeur z, il suffira de multiplier par $d\omega$ la valeur de p déduite de (1). En désignant par $d\varpi$ cette pression, on aura alors

$$d\varpi = p_0\, d\omega + g\rho(z - z_0)\, d\omega.$$

Si nous posons

$$p_0 = g\rho h,$$

il viendra

$$d\varpi = g\rho(z - z_0 + h)\, d\omega.$$

Ainsi la pression $d\varpi$ n'est autre chose que le poids d'un cylindre liquide de base $d\omega$, et dont la hauteur serait égale à la profondeur $z - z_0$ de l'élément $d\omega$ augmentée de la hauteur h due à la pression atmosphérique.

La pression ϖ exercée sur une surface plane ω sera la résultante de toutes les pressions $d\varpi$ exercées sur chacun de ses éléments $d\omega$. Elle sera donc égale à la somme des poids $g\rho(z - z_0 + h)\, d\omega$, c'est-à-dire au poids d'un tronc de cylindre ayant pour base ω, et pour arêtes les distances du contour de cette base à un plan situé à la distance h de la surface libre du liquide et hors de ce liquide. Si la paroi ω était horizontale, il est clair que le point d'application de la force ϖ se trouverait au centre de gravité de la paroi ω; mais, si cette paroi se trouve dans une position verticale ou inclinée, la pression ϖ est appliquée en un point particulier différent du centre de gravité, et que l'on appelle *centre de pression*. La détermination du centre de pression est un problème de calcul intégral dont la difficulté est de même ordre que la recherche du centre de gravité des surfaces planes.

297. Traçons sur la paroi ω deux axes ox, oy rectangulaires, et prenons l'axe ox horizontal; on aura

$$d\omega = dx\,dy,$$

et par suite

$$(2) \qquad d\varpi = g\rho(z - z_0 + h)\,dx\,dy.$$

Il faut évaluer $z - z_0 + h$ en fonction de y, car cette quantité ne varie pas avec x, les points correspondants à une même valeur de y étant situés sur une même horizontale. Or $z - z_0 + h$ est la distance du point (x, y) au plan situé à la hauteur h au-dessus de la surface libre du liquide. Si l'on désigne alors par ζ la distance de l'origine des coordonnées à ce plan, et par i l'angle que la surface ω fait avec l'horizon, on aura

$$z - z_0 + h = \zeta - y \sin i.$$

La formule (2) donnera alors

$$(3) \qquad d\varpi = g\rho(\zeta - y \sin i)\,dx\,dy.$$

On en déduit

$$(4) \qquad \varpi = g\rho \iint (\zeta - y \sin i)\,dx\,dy.$$

Si maintenant on désigne par u, v les coordonnées du centre de pression, et si l'on prend successivement les moments, par rapport à oy et à ox, de ϖ et de ses composantes $d\varpi$, on aura (110)

$$(5) \qquad u\varpi = g\rho\iint(\zeta - y\sin i)x\,dx\,dy,$$

$$(6) \qquad v\varpi = g\rho\iint(\zeta - y\sin i)y\,dx\,dy.$$

Si l'on place l'origine des coordonnées au centre de gravité de la paroi ω, les formules (4), (5), (6) se simplifient et donnent

$$\varpi = \omega g\rho\zeta,$$

$$u\varpi = -g\rho\sin i\iint xy\,dx\,dy,$$

$$v\varpi = -g\rho\sin i\iint y^2\,dx\,dy;$$

d'où l'on déduit

$$u = -\frac{\sin i}{\omega\zeta}\iint xy\,dx\,dy,$$

$$v = -\frac{\sin i}{\omega\zeta}\iint y^2\,dx\,dy.$$

Cherchons maintenant le centre de percussion de la surface ω par rapport à l'intersection de son plan avec le plan situé à la hauteur h au-dessus de la surface libre du liquide.

Le centre de percussion cherché se trouvera : 1° dans le plan de la surface ϖ ; 2° dans le plan normal à l'axe de rotation passant par le point où cet axe est un axe principal d'inertie; 3° à une distance de l'axe de rotation égale à $\frac{k^2}{a}$, k désignant le rayon de gyration de la surface par rapport à l'axe, et a la distance du centre de gravité à l'axe.

Prenons alors pour axes de coordonnées l'axe de rotation et la perpendiculaire à cet axe menée par le point où cet axe est un axe principal d'inertie pour la surface ω.

Alors

$$\iint xy\,dx\,dy = 0, \quad \zeta = 0,$$

et les coordonnées du centre de percussion sont

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{\iint y^2\,dx\,dy}{\iint y\,dx\,dy}.$$

Les formules (4), (5), (6) donnent dans ce cas

$$\varpi = -g\rho \sin i \iint y\,dx\,dy,$$
$$u = 0,$$
$$v = \frac{\iint y^2\,dx\,dy}{\iint y\,dx\,dy}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Le centre de pression d'une surface plane coïncide avec le centre de percussion de cette surface, lorsque l'on prend pour axe de rotation l'horizontale suivant laquelle le plan de la surface vient rencontrer le plan horizontal sur lequel la pression hydrostatique serait nulle.*

En effet, le plan situé à la distance h de la surface du liquide est le plan pour lequel on aurait $p = 0$, c'est-à-dire pour lequel la pression hydrostatique serait nulle si l'on appliquait la formule

$$p = p_0 + g\rho(z - z_0) \quad \text{ou} \quad = g\rho(z - z_0 + h)$$

aux points situés en dehors du liquide.

Dans le cas où $p_0 = 0$, c'est-à-dire dans le cas où l'on néglige la pression atmosphérique, l'axe de rotation se trouve sur la surface libre du liquide.

Lorsqu'une paroi est courbe, les pressions ne peuvent pas, en général, se réduire à une force unique; mais on pourra les réduire à une force et à un couple d'après les principes exposés en Statique.

298. Jusqu'ici nous n'avons encore considéré que des liquides parfaits. Dans les gaz, on a $p = k\rho$, k désignant une constante. L'équation de l'équilibre des fluides pesants

$$dp = g\rho\, dz$$

devient alors, pour les gaz,

$$dp = \frac{p}{k} g\, dz,$$

ou

$$k\frac{dp}{p} = g\, dz,$$

ou

$$k \log \frac{p}{p_0} = g(z - z_0),$$

ou enfin

$$p = p_0 e^{g\frac{(z-z_0)}{k}}.$$

Si le gaz est de peu d'étendue, $g\dfrac{(z - z_0)}{k}$ sera petit, et l'on pourra écrire

$$p = p_0 + \frac{gp_0}{k}(z - z_0),$$

ou bien

$$p = p_0 + g\rho_0 (z - z_0).$$

ρ_0 désignant la densité à la cote z_0. En sorte que les gaz de peu d'étendue transmettent les pressions à peu près comme les liquides.

IV. — Principe d'Archimède.

299. Considérons un solide plongé dans un fluide pesant quelconque. Soit ω un élément de la surface du solide; par cet élément ω faisons passer trois cylindres parallèles à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, l'axe

des z étant choisi, comme plus haut, dans le sens de la pesanteur. Ces cylindres découperont, sur les faces opposées de la surface du solide, trois nouveaux éléments ω', ω'', ω'''. Soient Ω', Ω'', Ω''' les sections droites des cylindres dont il vient d'être question; soit $p\omega$ la pression sur l'élément ω, on pourra décomposer cette pression en trois autres : $p\omega\cos\alpha$, $p\omega\cos\beta$, $p\omega\cos\gamma$, dirigées suivant les axes; α, β, γ désigneront alors les angles que la normale à l'élément ω fait avec les axes; mais $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ sont les sections droites Ω', Ω'', Ω''' des cylindres parallèles aux axes et passant par ω. En sorte que la pression exercée sur ω pourra se décomposer en trois autres, représentées par $p\Omega'$, $p\Omega''$, $p\Omega'''$; les pressions $p\Omega'$, $p\Omega''$ seront détruites par les pressions de sens contraire, exercées en ω' et ω''. Nous avons vu, en effet, que les pressions en tous les points d'un même plan horizontal étaient égales, et l'on démontrera, comme on l'a fait pour l'élément ω, que la pression exercée sur ω' dans la direction parallèle à l'axe des x est $-p\Omega'$, tandis que la pression exercée dans le sens oy sur ω'' est $-p\Omega''$. On pourra donc se borner à considérer les pressions verticales $p\Omega'''$. Or on a, en adoptant les mêmes notations que plus haut,

$$dp = g\rho\, dz,$$

$$p = p_0 + \int_{z_0}^{z} g\rho\, dz.$$

On a donc

$$p\Omega''' = p_0\Omega''' + \int_{z_0}^{z} g\rho\, dz.\Omega'''.$$

p_0 désignera, si l'on veut, la pression sur l'élément ω''', ou plutôt la valeur absolue de cette pression, en sorte que la résultante $p\Omega''' - p_0\Omega'''$ des pressions exercées en ω et ω''' se réduit à l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} g\rho\Omega'''\,dz.$$

Or $\Omega'''\,dz$ est le volume d'un élément de hauteur dz du cylindre vertical qui passe par ω; $g\rho\Omega'''\,dz$ est le poids de cet élément, supposé plein de fluide pris à la même hauteur que lui, en sorte que l'intégrale précédente représente le poids de la portion du cylindre vertical limitée aux éléments ω et ω''', supposée remplie d'un fluide de même densité que le fluide environnant pris à la même hauteur. En composant alors toutes les pressions verticales analogues à celles que nous venons de considérer, on voit que la résultante sera égale au poids qu'aurait le corps solide immergé, si l'on remplaçait chacun de ses éléments par un élément de fluide pris à la même hauteur que lui; enfin la résultante passe par le centre de gravité du solide, modifié comme il vient d'être dit. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Lorsqu'un solide se trouve immergé dans un fluide, la résultante des actions de ce fluide sur le solide se réduit à une force ou* POUSSÉE *égale au poids que prendrait le solide si l'on supposait sa densité égale à celle du fluide pris à la même hauteur que lui, et appliquée au centre de gravité du solide dont la densité aurait été ainsi modifiée.*

Lorsqu'il s'agit d'un liquide dont la densité est constante, on peut dire que :

THÉORÈME II. — *Tout corps plongé dans un liquide perd une quantité de son poids égale au poids du liquide déplacé.*

Cette proposition constitue ce que l'on appelle le *principe d'Archimède.*

Il résulte des principes précédents qu'un corps solide dont la densité est supérieure à celle du fluide qui l'entoure descendra et ne pourra se maintenir en équilibre que si sa densité devient égale à la densité moyenne du fluide qui l'entoure.

Théorème III. — *Lorsqu'un corps dont la densité est inférieure à celle d'un liquide est plongé dans ce liquide, il ne peut être immergé, il sort en partie du liquide; il ne peut être en équilibre que si son poids total est égal au poids du liquide déplacé.*

Ce théorème est une conséquence du théorème I. En effet, dans la démonstration du théorème I, nous n'avons pas supposé p et ρ fonctions continues de z. On peut donc supposer que, pour $z < 0$, par exemple, p et ρ soient nuls; dans ce cas, si l'on prend pour plan des xy la surface libre du liquide, on voit que la poussée se réduit à une force verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du liquide déplacé. Son point d'application est au centre de gravité du volume qu'occuperait le liquide déplacé; pour qu'il y ait équilibre, il faut que la poussée et le poids du solide agissent suivant une même verticale. Ce qu'il fallait démontrer.

On avait introduit autrefois, dans le programme de la Licence, la théorie de la stabilité de l'équilibre des corps flottants à la surface des liquides. La solution de cette question est tellement difficile qu'elle n'a encore pu être résolue par aucun géomètre, même dans les cas les plus simples. Je renverrai le lecteur curieux d'approfondir cette question : 1° à la *Mécanique* de M. Duhamel, qui a signalé une première difficulté dans le XXIVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*; 2° à un Mémoire de M. Clebsch inséré dans le LVIIe volume du *Journal de Crelle*.

V. — Mesure des hauteurs par le baromètre.

300. On peut, en partant des équations de l'équilibre des fluides, établir une formule d'où l'on peut déduire la hauteur à laquelle on se trouve au-dessus du niveau de la mer en fonction de la hauteur barométrique.

Nous admettrons que la Terre soit sensiblement sphérique, nous désignerons son rayon par a, et nous admettrons enfin que l'intensité de la pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre. Si l'on désigne alors par g l'intensité de la pesanteur au niveau de la mer, l'intensité de la pesanteur à la hauteur z sera

$$\frac{ga^2}{(a+z)^2}.$$

Si l'on désigne alors par p la pression de l'air à la hauteur z, la formule générale de l'équilibre des corps fluides nous fournira la relation

$$dp = -\frac{ga^2}{(a+z)^2}\rho\, dz, \tag{1}$$

ρ désignant la densité de l'air à la hauteur z. Mais si l'on désigne par ρ_0 la densité de l'air à la température zéro et à la pression $0^m,76$, on a

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\alpha t}\,\frac{p}{0,76}.$$

Dans cette formule, $1+\alpha t$ désigne le binôme de dilatation relatif à l'air. Nous supposons ainsi t constant lorsque z varie, ce qui n'est pas tout à fait exact. La formule (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{p}\,dp = -ga^2\rho_0\frac{dz}{(1+\alpha t).0,76(a+z)^2}.$$

Si l'on intègre entre les limites h_0 et h de z, et si l'on désigne par ϖ_0 et ϖ les valeurs correspondantes de p, on a

$$(2) \qquad \log \frac{\varpi_0}{\varpi} = \frac{ga^2\rho \log e}{(1+\alpha t)\,0,76}\,\frac{h-h_0}{(a+h)(a+h_0)}.$$

Dans cette formule, ϖ et ϖ_0 sont les pressions atmosphériques aux hauteurs h et h_0 respectivement; ces pressions sont données par le baromètre dont il est important de corriger les indications, en tenant compte de la capillarité, de la température et de la variation de la densité du mercure aux hauteurs h et h_0 au-dessus du niveau de la mer. Soient l et l_0 les longueurs des colonnes de mercure corrigées relativement à la température et à la capillarité aux hauteurs h et h_0, on aura

$$\varpi = Gml, \quad \varpi_0 = G_0 m l_0,$$

G et G_0 désignant les intensités de la pesanteur aux hauteurs h et h_0, et m désignant la masse spécifique du mercure à zéro. On a alors

$$\frac{\varpi}{\varpi_0} = \frac{G}{G_0}\,\frac{l}{l_0} = \left(\frac{a+h_0}{a+h}\right)^2 \frac{l}{l_0}.$$

En portant cette valeur dans la formule (2), on a

$$2\log\frac{a+h}{a+h_0} + \log\frac{l_0}{l} = \frac{ga^2\rho\log e}{(1+\alpha t)\,0,76}\,\frac{h-h_0}{(a+h)(a+h_0)}.$$

Généralement on connaît h_0; l'inconnue est alors $h-h_0$; en désignant cette quantité par x, et $a+h_0$ par R, on a

$$2\log\frac{R+x}{R} + \log\frac{l_0}{l} = g\,\frac{M}{1+\alpha t}\,\frac{x}{(R+x)R}.$$

M est une quantité constante que l'on calcule une fois pour toutes. On prend ordinairement $\alpha = 0,04$, et pour t on prend la moyenne des températures aux stations h_0 et h;

g varie, comme on sait, avec la latitude; enfin, on peut remplacer, dans la formule précédente, $\log \frac{R+x}{R}$ par $\frac{x}{R}$; on obtient alors une équation du second degré, d'où l'on peut déduire x. Cette équation peut aussi se résoudre par approximations successives; on a d'abord

$$x = \frac{R(R+x)(1+\alpha t)}{gM}\left(\log \frac{l_0}{l} + 2\log \frac{R+x}{R}\right).$$

On obtient une première valeur approchée de x en négligeant x dans le second membre, ce qui donne

$$x = \frac{R^2(1+\alpha t)}{gM} \log \frac{l_0}{l};$$

en remplaçant x par cette valeur dans l'équation précédente, on trouve une valeur plus approchée. Pour les petites hauteurs, on peut faire usage de la formule suivante :

$$x = 18393\,(1 + 0{,}002589 \cos 2\lambda)(1+\alpha t) \log \frac{l_0}{l},$$

dans laquelle λ désigne la latitude, et 18393 un coefficient constant à peu près égal à $\frac{R^2}{M \cdot 9{,}80896}$, mais un peu modifié, de manière à faire concorder les observations avec la théorie.

VI. — Équations du mouvement des fluides.

301. Pour connaître le mouvement d'un fluide, il suffirait de connaître le mouvement de chacun de ses points; il est difficile, dans l'état actuel de la science, de déterminer ce mouvement. Mais on peut déterminer, pour un point donné et fixe, la vitesse de la molécule qui passe,

à une époque donnée t, par ce point; on peut aussi déterminer la pression du fluide au point en question à chaque instant.

Rapportons le fluide à trois axes rectangulaires ox, oy, oz. Soient x, y, z les coordonnées d'un point fixe M, pris à l'intérieur de la masse fluide; X, Y, Z les composantes de la force qui, à l'époque t, agit sur l'unité de masse en M; ρ la masse spécifique, et p la pression du fluide au même point M et à la même époque t.

Les équations de l'équilibre des fluides pourront encore s'appliquer aux fluides en mouvement, pourvu que, aux forces réellement agissantes, on joigne les forces d'inertie. Si l'on désigne alors par u, v, w les composantes de la vitesse de la molécule qui passe en M à l'époque t, la force d'inertie de l'élément (dx, dy, dz) aura sensiblement pour composantes

$$-\rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad -\rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad -\rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},$$

en supposant que la vitesse ne varie pas brusquement d'un point à un autre du liquide. En sorte que la même force d'inertie rapportée à l'unité de masse aura pour composantes $-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$. Les équations générales de l'équilibre données § II deviendront alors

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left(\mathrm{X} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right), \\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left(\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right), \\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(\mathrm{Z} - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right). \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ désignent les dérivées totales de u, v, w, prises par rapport à t; u, v, w dépendent à la fois du temps et de la position du point M, en sorte que ces quantités doivent être considérées comme fonctions de x, y, z et de t; en réservant alors la caractéristique d pour les différentielles partielles, on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{du}{dy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{du}{dz}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w;$$

on aurait de même

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}u + \frac{dv}{dy}v + \frac{dv}{dz}w,$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}u + \frac{dw}{dy}v + \frac{dw}{dz}w.$$

Les formules (1) deviennent ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \rho\left(\mathrm{X} - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}\right), \\[2ex] \dfrac{dp}{dy} = \rho\left(\mathrm{Y} - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz}\right), \\[2ex] \dfrac{dp}{dz} = \rho\left(\mathrm{Z} - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}\right). \end{cases}$$

A ces équations, il faudra joindre la relation qui existe entre p et ρ, et qui dépend de la nature du fluide

$$(3)\qquad f(p, \rho) = 0.$$

Ces quatre équations (2) et (3) ne sont pas suffisantes pour déterminer les cinq inconnues p, ρ, u, v, w; il en faut encore une; on l'obtient en exprimant que le fluide est continu.

Considérons un petit paralélépipède ayant pour dimensions dx, dy, dz, et dont un sommet passe par conséquent par le point (x, y, z). Calculons ce que deviennent les dimensions de ce parallélépipède au bout du temps dt. Lorsque le fluide qu'il contient se déplace, les coordonnées du point (x, y, z) deviennent

$$x + u\,dt, \quad y + v\,dt, \quad z + w\,dt;$$

les coordonnées du point $(x + dx, y, z)$ deviennent

$$x + dx + u_1\,dt, \quad y + v_1\,dt, \quad z + w_1\,dt,$$

u_1, v_1, w_1 désignant les composantes de la vitesse du point $(x + dx, y, z)$. Or u_1 est ce que devient u quand on change x en $x + dx$; on a donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u + \dfrac{du}{dx}\,dx, \\ \text{de même} \\ v_1 = v + \dfrac{dv}{dx}\,dx, \\ w_1 = w + \dfrac{dw}{dx}\,dx. \end{array} \right.$$

En sorte que la distance des points dont les coordonnées sont x, y, z et $x + dx$, y, z, est au bout du temps t

$$\sqrt{[dx + (u_1 - u)\,dt]^2 + (v_1 - v)^2\,dt^2 + (w_1 - w)^2\,dt^2},$$

ou bien, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\sqrt{dx^2 + 2(u_1 - u)\,dx\,dt},$$

ou bien, en négligeant encore des infiniment petits d'ordre supérieur,

$$dx + (u_1 - u)\,dt,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (4),

$$dx\left(1 + \frac{du}{dx}\,dt\right).$$

Ainsi le côté dx du parallélépipède (dx, dy, dz) est devenu

$$dx\left(1+\frac{du}{dx}\,dt\right).$$

On trouverait des expressions analogues pour les côtés dy, dz. En sorte que le volume du parallélépipède en question est devenu

$$dx\,dy\,dz\left(1+\frac{du}{dx}\,dt\right)\left(1+\frac{dv}{dy}\,dt\right)\left(1+\frac{dw}{dz}\,dt\right).$$

Son accroissement est donc, aux infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right).$$

On peut obtenir une autre valeur de cet accroissement, en observant que la masse du parallélépipède est restée la même; son expression est donc toujours $\rho\,dx\,dy\,dz$, mais sa masse spécifique est actuellement $\rho+\frac{d\rho}{dt}\,dt$. En sorte que le volume du parallélépipède est, au bout du temps dt

$$\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{\rho+\frac{d\rho}{dt}\,dt},$$

ou bien

$$\frac{dx\,dy\,dz}{1+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\,dt},$$

c'est-à-dire, aux infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$dx\,dy\,dz\left(1-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\,dt\right).$$

L'accroissement du volume en question est donc donné par l'expression

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,dt\,dx\,dy\,dz.$$

En égalant cette expression à celle que nous avons trouvée plus haut, on a

$$\rho\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0;$$

en observant que

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{d\rho}{dx}u+\frac{d\rho}{dy}v+\frac{d\rho}{dz}w+\frac{d\rho}{dt},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{d\rho u}{dx}+\frac{d\rho v}{dy}+\frac{d\rho w}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0. \tag{5}$$

Telle est la cinquième équation qui jointe à (2) et (3) achève de déterminer les inconnues ρ, p, u, v, w. On lui donne le nom d'*équation de continuité*.

Nous avons cru devoir encore nous écarter de la méthode donnée par Euler pour établir l'équation (5), parce que cette méthode ne nous paraît pas suffisamment rigoureuse.

L'équation (5) se réduit à

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0 \tag{6}$$

dans les liquides, parce que ρ est constant; on peut observer que $\frac{du}{dx}dt$ est la dilatation linéaire dans le sens dx, et pendant le temps dt, etc.

Ainsi le premier membre de la formule (6) peut être considéré comme la dilatation cubique du fluide au point (x, y, z) pendant l'unité de temps. L'équation (6) exprime donc que le fluide ne se dilate pas, et ne se contracte pas pendant le mouvement.

On ne sait pas intégrer les équations générales du mouvement des fluides ; mais nous ne devons pas trop le regretter, parce que, dans le cas très-particulier où l'intégration est possible, la théorie se trouve en désaccord avec l'expérience. Cela tient à ce que nos hypothèses sur la constitution des fluides ne sont pas conformes à la réalité.

Les équations du mouvement se simplifient un peu lorsque $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ et $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ sont des différentielles exactes. Soient donc

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU, \tag{7}$$

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi. \tag{8}$$

La première des équations (2) pourra s'écrire

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(\frac{dU}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right),$$

ou bien

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left[\frac{dU}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)\right],$$

c'est-à-dire, en désignant par V la vitesse de la molécule qui à l'époque t passe au point (x, y, z),

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(\frac{dU}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - V\frac{dV}{dx}\right).$$

On aurait de même

$$\frac{dp}{dy} = \rho\left(\frac{dU}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - V\frac{dV}{dy}\right),$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho\left(\frac{dU}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - V\frac{dV}{dz}\right).$$

En multipliant ces trois équations respectivement par dx, dy, dz, et en ajoutant, on a

$$(9) \qquad dp = \rho\left(d\mathrm{U} - d\frac{d\varphi}{dt} - \mathrm{V}\,d\mathrm{V}\right).$$

On n'a plus à déterminer que p, ρ, φ. Cette équation, dans laquelle V s'exprime à l'aide de φ, jointe à l'équation de continuité et à l'équation $f(p, \rho) = 0$, permettra de déterminer φ, p, ρ, et, par suite, u, v, w. Il est bon d'observer que l'équation de continuité pour les liquides peut s'écrire

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Lagrange a démontré que si l'expression

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

était une différentielle exacte à une certaine époque du mouvement, elle demeurait encore une différentielle exacte à une époque quelconque; mais la démonstration de l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* ne nous paraît pas assez rigoureuse pour devoir être introduite sans réserve dans l'enseignement.

Remarque I. — Les équations (2), (3), (5) n'ont lieu que pour les points intérieurs à la masse fluide; il faudra donc joindre à ces équations ce que l'on appelle les équations *aux limites*, ou *à la surface*. Ces nouvelles équations seront différentes dans chaque cas particulier. Elles sont généralement difficiles à écrire. S'il s'agit, par exemple, d'un fluide enfermé dans un vase, on écrit ordinairement que les molécules primitivement en contact avec les parois restent en contact avec ces parois. Soit

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation d'une paroi ou de la surface libre du fluide, la molécule (x, y, z), en contact avec cette paroi, devant encore s'y trouver au bout du temps dt, quand ses coordonnés sont $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + w\,dt$, on aura

$$f(x + u\,dt, y + v\,dt, z + w\,dt, t + dt),$$

et, par suite,

$$\frac{df}{dt} + \frac{df}{dx}u + \frac{df}{dy}v + \frac{df}{dz}w = 0.$$

Mais il faut avouer que rien ne justifie l'hypothèse qui fournit l'équation précédente, au moins dans le cas général.

Il faudra aussi joindre aux équations du mouvement les données initiales, c'est-à-dire l'état du fluide à l'époque $t = 0$.

Remarque II. — Les équations de l'Hydrodynamique sont extrêmement difficiles à intégrer dans l'état actuel de la science; mais nous ne devons pas regretter beaucoup qu'il en soit ainsi, car elles ne sont point l'expression rigoureuse des faits : nous avons négligé des forces intérieures dont l'action a une grande influence. Ainsi l'expérience prouve que l'on n'a pas le droit de négliger les frottements qui produisent ce que l'on appelle la *viscosité*, Navier a essayé de tenir compte de ces frottements, mais les équations auxquelles il parvient sont encore bien plus compliquées que celles que nous avons obtenues. (*Voir* Bresse, *Mécanique appliquée*, t. II, *Hyraulique*.)

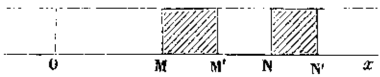
VII. — Théorème de D. Bernoulli.

302. Puisque nous ne pouvons déduire aucune conséquence des équations générales de l'Hydrodynamique, nous allons avoir recours à l'expérience, interroger les faits et essayer d'en tirer des formules empiriques.

Dans la plupart des cas qui intéressent la pratique, les fluides ont un mouvement régulier dans lequel les vitesses des molécules ne dépendent que de leurs coordonnées, en sorte que les quantités u, v, w du paragraphe précédent sont constantes en un même point de l'espace. On dit alors que le liquide est soumis à un *régime permanent*.

Considérons un liquide pesant soumis à un régime permanent. Soit MN (*fig.* 41) un filet infiniment mince pris

Fig. 41.



dans la masse, donnons un petit mouvement à ce filet, et soit M′N′ la position qu'il a prise au bout du temps dt. Soient p_0 la pression qui s'exerce en M, p celle qui s'exerce en N, V_0 la vitesse en M, V la vitesse en N, ω_0 et ω les sections M et N du filet, MM′ sera égal à $V_0\,dt$ et NN′ à $V\,dt$. Le liquide étant incompressible, les volumes MM′ et NN′ seront égaux; on aura donc

$$\omega_0 V_0\,dt = \omega V\,dt.$$

Si l'on pose alors $dQ = \omega V\,dt$, la quantité $\frac{dQ}{dt}$ représentera ce que l'on peut appeler le *débit* par seconde; il est mesuré par le produit $V\omega$. Ceci posé, appliquons le théorème des forces vives, nous pouvons admettre que les pressions latérales se détruisent : les forces extérieures au filet se réduisent alors aux pressions p_0, p, et à la pesanteur. Le travail de p_0 est $p_0\omega_0 V_0\,dt$ ou $p_0\,dQ$, celui de p est $-p\omega V\,dt$ ou $-p\,dQ$; le travail de la pesanteur est égal à la quantité dont s'est déplacé verticalement le centre de gravité du filet, multipliée par le poids total du filet. Ce travail ne sera pas changé si l'on transporte la partie MM′ en NN′, en laissant immobile la partie de fluide M′N. Or, dans ce dernier cas, le travail de la pesanteur se réduit à

$$g\rho\omega V\,dt.h \quad \text{ou} \quad g\rho h\,dQ,$$

ρ désignant la masse spécifique du liquide, et h la distance verticale qui sépare les tranches M et N.

La force vive initiale et la force vive finale auront une partie commune, à savoir : la force vive de toutes les molécules qui ne sont pas sorties de l'espace M′N, puisque, par hypothèse, le régime est permanent. La variation de la force vive se réduira donc à

$$\rho V\omega\,dt\frac{V^2}{2} - \rho V_0\omega_0\,dt\frac{V_0^2}{2}.$$

ou bien à

$$\rho\,dQ\frac{V^2 - V_0^2}{2}.$$

L'équation des forces vives devient ainsi

$$-p\,dQ + p_0\,dQ + g\rho h\,dQ = dQ\frac{V^2 - V_0^2}{2},$$

ou bien

$$(1) \qquad \rho V^2 - \rho V_0^2 = 2(g\rho h + p_0 - p).$$

C'est dans cette équation que consiste le théorème de Bernoulli. On pourrait peut-être objecter, à la démonstration que l'on vient de lire, que les pressions latérales ne doivent pas être négligées, parce que ces pressions ne sont pas tout à fait normales au filet liquide; mais si le mouvement n'est pas trop rapide, l'hypothèse que nous venons de faire s'écartera fort peu de la vérité.

Pour faire une application du théorème de D. Bernoulli, considérons un vase plein d'eau; pratiquons une ouverture à la partie inférieure de ce vase, et calculons la vitesse d'écoulement. Si nous admettons que le liquide se meut par tranches parallèles, on pourra décomposer la masse totale du liquide en filets pour chacun desquels on pourra écrire une équation telle que (1), en sorte que si l'on suppose l'orifice assez petit pour que l'on puisse négliger les variations de h par rapport à h, ou bien encore si l'orifice est pratiqué dans une paroi horizontale, la vitesse V du liquide à la sortie pourra être donnée par la formule (1), d'où l'on tire

$$\rho V = \sqrt{\rho V_0^2 + 2gh\rho + 2p_0 - 2p}.$$

Si l'on suppose que les pressions p_0 et p soient les pressions atmosphériques, on aura à peu près $p_0 = p$; en outre, si le vase est assez large, on aura à peu près $V_0 = 0$, et, par suite,

$$V = \sqrt{2gh}.$$

Cette équation montre que :

Théorème de Torricelli. — *La vitesse avec laquelle un liquide s'écoule par un orifice assez mince pratiqué à la partie inférieure d'un vase est la même que si le liquide tombait de la surface libre de ce liquide.*

Nous verrons tout à l'heure comment l'expérience vérifie le théorème de Torricelli. Mais, auparavant, nous allons voir à la suite de quelles hypothèses les équations de l'Hydrodynamique conduisent au résultat que nous venons d'obtenir.

Si l'on reprend les équations (2), (3), (5) du paragraphe précédent, si l'on suppose que u, v, w soient tels, que $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ soit une différentielle exacte $d\varphi$; si, en outre, on fait $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et si l'on suppose $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, on trouve

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = g - \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho}\,dp = g\,dz - \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

En nous plaçant alors dans les circonstances où nous venons de nous placer tout à l'heure, et intégrant depuis $z = h$ jusqu'à $z = 0$, on a

$$\frac{1}{\rho}(p - p_0) = gh - \frac{V^2 - V_0^2}{2}.$$

Cette équation est identique avec la formule (1), et conduit comme elle au théorème de Torricelli.

Ce fait s'explique jusqu'à un certain point en observant qu'effectivement u, v, w sont sensiblement constants, et que, par suite, $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est à peu près la différentielle de $ux + vy + wz$.

VIII. — Étude expérimentale de l'écoulement des liquides (*).

303. Théorème de Torricelli. — Torricelli a fait connaître son théorème comme un fait expérimental dans son Traité : *De motu naturaliter accelerato* en 1643 :

(*) Consulter la *Mécanique analytique* de Lagrange, IIe Partie, 10e Section, page 243 de la 3e édition, et la *Mécanique appliquée* de M. Bresse, t. II.

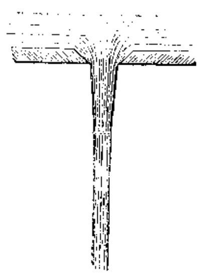
La vitesse avec laquelle un liquide s'écoule par un orifice pratiqué à la partie inférieure du vase qui le contient est la même que celle d'un point pesant qui, tombant de la surface libre du liquide, serait parvenu au centre de gravité de l'orifice.

Nous avons vu à la suite de quelles hypothèses les théories de l'Hydrodynamique conduisaient à ce théorème.

Veine liquide. — Le liquide qui s'écoule par un orifice pratiqué dans la paroi du vase qui le contient affecte la forme d'une tige de cristal limpide dans le voisinage de l'orifice; plus loin, cette tige se trouble et se divise bientôt en gouttes. On donne le nom de *veine* au jet liquide dont nous venons de décrire sommairement la forme.

Voyons quelle doit être la forme théorique de la veine. Supposons que l'orifice (*fig.* 42) par lequel s'écoule le

Fig. 42.



liquide soit circulaire; soient ω sa surface, V_0 la vitesse du liquide à la sortie; prenons le centre de l'orifice pour origine, l'axe des x horizontal et l'axe des z vertical; soit h la distance supposée constante du niveau supérieur du liquide à l'orifice.

Soient maintenant une section horizontale faite dans la veine; x le rayon de cette section, que nous supposerons circulaire, conformément à l'expérience; z sa distance à l'orifice. Si l'on désigne par V la vitesse du liquide dans la section en question, on aura

$$V = \sqrt{2g(h+z)};$$

mais on aura aussi, tant que la veine sera continue,

$$V_0\omega = V.\pi x^2.$$

En éliminant V entre les deux équations qui précèdent, on a

$$V_0\omega = \pi x^2\sqrt{2g(h+z)},$$

ou bien

$$z = \frac{V_0^2\omega^2}{2g\pi^2 x^4} - h.$$

Telle est l'équation du méridien de la surface de révolution qui limite la veine. En discutant cette équation, on constate que la veine se contracte en sortant de l'orifice, et se contracte indéfiniment. L'expérience prouve, en effet, que la veine commence par se contracter; mais, bientôt après, elle se renfle. Ce désaccord entre l'expérience et la théorie montre que nous n'avons pas le droit de supposer les vitesses des molécules égales dans une même tranche horizontale, et, effectivement, le frottement du liquide contre les parois de l'orifice doit ralentir le mouvement des molécules placées à la surface de la veine. De plus, les filets liquides se recourbent dans le voisinage de l'orifice et tendent à s'écarter du filet moyen.

Inversion de la veine. — Cette tendance *centrifuge* des filets se trouve mise en évidence par l'expérience suivante. Si l'on pratique à la partie inférieure d'un vase plein d'eau un orifice carré, la section de la veine, d'abord carrée, se tronque vers ses angles en se contractant, affecte bientôt une forme octogonale à peu près régulière, se dilate ensuite de manière à prendre de nouveau la forme d'un carré dont les diagonales sont parallèles aux côtés de l'orifice.

Vérification expérimentale du théorème de Torricelli.— *Première méthode.*— En pratiquant une ouverture dans une paroi verticale, on peut disposer des anneaux de telle sorte qu'ils soient traversés par la veine liquide; ces anneaux seront fixés à des tiges scellées dans un mur vertical. On reconnaîtra alors que la veine affecte une forme sensiblement parabolique; de la forme de cette parabole, considérée comme trajectoire d'un point pesant, on pourra déduire la vitesse du liquide à la sortie du vase. En procédant ainsi, on reconnaîtra que la vitesse est donnée par la formule

$$V = 0{,}98\sqrt{2gh}.$$

Ce résultat, comme on le voit, est à peu près d'accord avec la théorie, ce qui semble prouver que l'hypothèse du parallélisme des tranches est admissible pour la portion de liquide comprise à l'intérieur du vase et dans l'axe de la veine.

Deuxième méthode. — On peut mesurer la *dépense*, c'est-à-dire la quantité de liquide qui s'écoule pendant une seconde par un orifice de surface ω. En désignant cette quantité par Q et par V la vitesse du liquide à la sortie, on a évidemment

$$Q\,dt = \omega V\,dt,$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{Q}{\omega}.$$

Pour calculer Q, on laissera couler le liquide pendant un temps T, on recueillera un volume U de liquide, et il est clair que l'on aura $Q = \frac{U}{T}$. En suivant cette méthode on trouve une divergence très-considérable entre l'expérience et la théorie; mais cette divergence est beaucoup moindre lorsque l'on remplace la section ω par la section S pratiquée à l'endroit où la veine présente son minimum d'épaisseur : S porte le nom de *section contractée*. La mesure précise de S est difficile; on pose ordinairement

$$S = m\omega,$$

en sorte que l'on a

$$Q = SV = m\omega V.$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace V par sa valeur tirée de la formule de Torricelli, on obtient la relation

$$Q = m\omega\sqrt{2gh}.$$

On reconnaît que m a une valeur à peu près constante et égale à 0,62; m est ce que l'on appelle le *coefficient de contraction*.

X. — Étude du mouvement relatif.

304. Les équations de l'hydrostatique suffisent quelquefois pour résoudre les équations relatives au mouvement des liquides : c'est ce qui a lieu lorsque les liquides sont en équilibre relatif par rapport à des axes mobiles.

Proposons-nous, par exemple, de trouver la forme d'équilibre relatif de la surface d'un fluide pesant, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical.

Prenons l'axe de rotation pour axe des z, et deux axes horizontaux perpendiculaires entre eux pour axes des y

et des x; écrivons qu'il y a équilibre entre les forces réellement agissantes et les forces fictives dues au mouvement relatif (243).

Les forces réellement agissantes pour une molécule m se réduisent à la pesanteur mg. Les forces fictives sont : 1° la force d'inertie du mouvement d'entraînement; cette force est la force centrifuge; en désignant par ω la vitesse angulaire, les composantes de la force centrifuge sont $m\omega^2 x$ et $m\omega^2 y$; 2° la force centrifuge composée dont les composantes sont nulles. En effet, si, dans l'expression de cette force (243), on remplace la vitesse relative par zéro, elle se réduit elle-même à zéro.

La force appliquée à l'unité de masse a donc pour composantes : $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $-g$; par suite l'équation des surfaces de niveau (294) est

$$0 = -g\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy),$$

d'où l'on tire

$$\text{const.} = -gz + \omega^2(x^2 + y^2).$$

Cette équation est en particulier l'équation de la surface libre du liquide. Cette surface est, comme l'on voit, un paraboloïde de révolution. Pour déterminer la constante C, on se donnera le volume V du liquide.

Supposons, par exemple, que le liquide soit renfermé dans un vase cylindrique dont l'axe soit l'axe de révolution, et dont le rayon soit R; le volume du liquide, évalué en coordonnées semi-polaires, sera

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R}(\omega^2 r^2 - \text{const.})\frac{r\,d\theta\,dr}{g} = \frac{2\pi}{g}\left(\omega^2\frac{R^4}{4} - \frac{\text{const.}\,R^2}{2}\right);$$

en égalant cette expression à V, on en déduit

$$V = \frac{2\pi}{g}\left(\omega^2\frac{R^4}{4} - \frac{\text{const.}\,R^2}{2}\right),$$

d'où

$$\text{const.} = \left(\frac{\pi\omega^2 R^4}{2g} - V\right)\frac{g}{\pi R^2};$$

par suite, l'équation de la surface libre sera

$$z = -\frac{1}{\pi R^2}\left(\frac{\pi\omega^2 R^4}{2g} - V\right) + \frac{\omega^2}{g}(x^2+y^2).$$

Pour $\omega = 0$, on trouve $z = \frac{V}{\pi R^2}$; c'est-à-dire que la surface libre est plane.

EXERCICES.

I. Trouver le centre de pression d'un cercle ou d'une ellipse; discuter les divers cas qui peuvent se présenter.

II. Le centre de gravité d'une aire plane continue plongée dans un liquide est donné. Par quelle ligne faut-il terminer cette aire pour que la pression totale du liquide soit un minimum?

III. Une membrane infiniment mince, de forme rectangulaire, lorsqu'elle est tendue, sert de fond à un vase, de telle sorte que deux des côtés du rectangle soient horizontaux. On demande la forme affectée par cette membrane lorsque l'on remplit le vase avec un liquide pesant. On suppose, bien entendu, que le fond du vase puisse glisser le long des parois latérales. (On cherchera seulement l'équation différentielle du premier ordre de la courbe affectée par une section verticale.)

IV. Un ellipsoïde dont la densité est δ est plongé dans un liquide pesant dont la densité est ρ; déterminer les positions d'équilibre de cet ellipsoïde en supposant $\delta < \rho$.

V. Un cône droit est plongé dans un liquide pesant; la densité du cône dans une même couche perpendiculaire à l'axe est constante, mais elle varie d'une couche à une autre proportionnellement à la distance au sommet du cône. De combien le cône s'enfoncera-t-il dans le liquide?

VI. Calculer le temps employé par un vase conique plein d'eau pour se vider par un orifice horizontal de dimensions données pratiqué près du sommet.

VII. Un tube de Mariotte contient dans la branche fermée un gaz parfait dont le poids est p. Dans la grande branche, on verse une quantité de mercure telle, que la différence de niveau dans les deux branches soit h. On demande de calculer le volume du gaz enfermé dans la petite branche du tube. On admettra que le mercure se comprime de quantités proportionnelles à la pression qu'il supporte.

VIII. Un liquide enfermé dans un vase qui tourne uniformément autour d'un axe est sollicité par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance; trouver la forme des surfaces de niveau dans la position d'équilibre relatif.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES PETITS MOUVEMENTS ET DE LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE.

I. — Équations des petits mouvements.

305. On appelle *petits mouvements d'un système* les mouvements dans lesquels les diverses molécules prennent des déplacements autour de leurs positions d'équilibre, assez petits pour que l'on puisse négliger dans les calculs leurs puissances et leurs produits.

Lorsque le travail des forces est une différentielle exacte et que les liaisons sont indépendantes du temps, Lagrange a fait connaître, dans sa *Mécanique analytique,* une méthode qui permet, dans un très-grand nombre de cas, de mettre les équations des petits mouvements sous une forme linéaire.

Si l'on désigne par m la masse, par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système, et par U la fonction des forces, on aura

$$(1) \qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \delta \mathrm{U}.$$

Désignons par $q_1, q_2, \ldots$ les variables qui, satisfaisant aux équations de liaison, déterminent la position d'équilibre du corps. Soient $q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots$ ce que deviennent $q_1, q_2, \ldots$ pendant le mouvement. En développant x, y, z par la formule de Taylor, on trouve

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots, \\
y &= y_0 + b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + \ldots, \\
z &= z_0 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ désignant des quantités indépendantes de $\chi_1, \chi_2, \ldots$. D'après la définition que nous avons donnée des petits mouvements, nous négligeons les termes du second ordre; on tire des équations précédentes

$$\begin{aligned}
\delta x &= a_1\,\delta\chi_1 + a_2\,\delta\chi_2 + \ldots, \\
\delta y &= b_1\,\delta\chi_1 + b_2\,\delta\chi_2 + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et en outre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + a_2\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) \\
&\quad = \left(\mathrm{A}_1\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + \mathrm{A}_{1,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + \mathrm{A}_{1,3}\frac{d^2\chi_3}{dt_2} + \ldots\right)\delta\chi_1 \\
&\qquad + \left(\mathrm{A}_{2,1}\frac{d^2\chi_1}{dt_2} + \mathrm{A}_2\frac{d^2\chi_2}{dt_2} + \ldots\right)\delta\chi_2 + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, on a fait, pour abréger,

$$(3)\quad \mathrm{A}_i = \Sigma m(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2), \quad \mathrm{A}_{i,j} = \Sigma m(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j).$$

Si l'on développe U par la formule de Taylor, les termes du premier ordre seront nuls; car, δU étant nul dans la position d'équilibre, il faut bien que les dérivées $\frac{d\mathrm{U}}{dq_1}$,

$\frac{dU}{dq_2}, \ldots,$ coefficients de $\chi_1, \chi_2, \ldots,$ se réduisent à zéro; nous aurons donc, en prenant $U = 0$ pour $\chi_1 = \chi_2 \ldots = 0$,

$$(4) \qquad U = \tfrac{1}{2}(Q_1\chi_1^2 + Q_2\chi_2^2 + \ldots + 2Q_{1,2}\chi_1\chi_2 + \ldots),$$

formule dans laquelle on a posé

$$Q_i = \frac{d^2U}{dq_i^2}, \quad Q_{i,j} = \frac{d^2U}{dq_i\,dq_j}.$$

Les équations des petits mouvements s'obtiendront en égalant les coefficients des mêmes variations dans la formule suivante, déduite de (1) et (2) :

$$(5) \qquad \sum_i \left(A_{i,1}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{i,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + \ldots\right)\delta\chi_i = \delta U,$$

et ces équations seront linéaires.

La formule précédente repose sur une hypothèse : la possibilité d'appliquer la formule de Taylor. Elle ne doit donc pas être regardée comme générale; elle est soumise précisément aux mêmes règles que la formule de Taylor, dont elle découle.

Si, par exemple, $\chi_1, \chi_2, \ldots$ représentaient les distances des divers points à leurs positions d'équilibre; si, en outre, on avait $U = \sqrt{\sqrt{\chi_1} + \sqrt{\chi_2} + \ldots}$, il est clair qu'il n'y aurait plus lieu d'appliquer la méthode dont nous venons de parler (au moins en faisant usage des variables χ_1, $\chi_2, \ldots$).

II. — Sur la stabilité de l'équilibre.

306. On peut, en se fondant sur la théorie des petits mouvements, trouver les conditions de stabilité de l'équilibre d'un système de points matériels.

Nous dirons qu'un système est en *équilibre stable* lorsque, en le dérangeant très-peu, il tend, lorsqu'on l'abandonne à lui-même, à revenir à sa position d'équilibre.

Au contraire, nous dirons qu'un système est en *équilibre instable* si, en le dérangeant un peu, il tend à s'écarter de sa position d'équilibre pour ne plus y revenir.

Enfin on dit qu'un corps est *astatique* ou en *équilibre indifférent* lorsqu'il reste en équilibre dans toutes les positions possibles.

Lorsqu'il existe une fonction des forces U, il faut, pour l'équilibre, que l'on ait

$$\delta U = 0,$$

et, par suite, U est généralement un maximum ou un minimum lorsqu'il y a équilibre. Analysons la question avec plus de soin, reprenons les notations et les hypothèses du paragraphe précédent, dérangeons le corps et étudions ses petits mouvements. On a trouvé

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(Q_i\chi_i^2 + 2Q_{i,j}\chi_i\chi_j).$$

On en déduit

$$\delta U = \Sigma\,[Q_i\chi_i\,\delta\chi_i + Q_{i,j}(\delta\chi_i\cdot\chi_j + \chi_i\,\delta\chi_j)],$$

ou bien

$$\delta U = \sum_i (Q_{i,1}\chi_1 + Q_{i,2}\chi_2 + Q_{i,3}\chi_3 + \ldots)\,\delta\chi_i.$$

L'équation du mouvement ou l'équation (5) du paragraphe précédent devient alors

$$\sum_i \left(A_{i,1}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{i,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2}\ldots\right)\delta\chi_i = \sum_i (Q_{i,1}\chi_1 + Q_{i,2}\chi_2\ldots)\,\delta\chi_i\,;$$

d'où l'on déduit, en égalant les coefficients des mêmes variations,

$$(6) \qquad A_{i,1}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{i,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + \ldots = Q_{i,1}\chi_1 + Q_{i,2}\chi_2 + \ldots.$$

Cette équation équivaut à autant d'équations qu'il existe de variables distinctes $\chi_1, \chi_2 \ldots$. On satisfait à ces équations linéaires en prenant

$$(7) \qquad \chi_1 = k_1 \mathrm{H}\sin(nt+h), \quad \chi_2 = k_2 \mathrm{H}\sin(nt+h), \ldots.$$

H et h sont deux constantes arbitraires; quant à n et à $k_1, k_2, \ldots$, on les détermine au moyen des formules contenues dans le type

$$(8) \qquad n^2(A_{i,1}k_1 + A_{i,2}k_2 + \ldots) + Q_{i,1}k_1 + Q_{i,2}k_2 + \ldots = 0.$$

En éliminant $k_1, k_2, \ldots$, on a l'équation suivante, qui permet de déterminer n :

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1}n^2 + Q_{1,1}, & A_{1,2}n^2 + Q_{1,2}, \ldots \\ A_{2,1}n^2 + Q_{2,1}, & A_{2,2}n^2 + Q_{2,2}, \ldots \\ A_{3,1}n^2 + Q_{3,1}, & A_{3,2}n^2 + Q_{2,3}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = 0.$$

En tirant n^2 de cette équation pour porter sa valeur dans les formules (7), celles-ci feront connaître les rapports $k_1 : k_2 : k_3, \ldots$. Si μ désigne le nombre des variables χ, l'équation (9) sera précisément du degré μ en n^2, et l'on trouvera μ systèmes de valeurs des rapports $k_1 : k_2 : k_3 \ldots$.

Les formules (7) fourniront alors μ systèmes d'intégrales renfermant chacun deux constantes arbitraires H et h. En ajoutant ces intégrales, on aura les intégrales les plus générales du mouvement, puisqu'elles renfermeront 2μ constantes arbitraires.

L'équation (9) a toutes ses racines réelles. En effet, si l'on pose

$$A_{i,j}n^2 + Q_{i,j} = s_{i,j},$$

et

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,\nu} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & s_{2,\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu,1} & s_{\nu,2} & \dots & s_{\nu,\nu} \end{vmatrix},$$

l'équation (9) pourra s'écrire

$$\Delta_\mu = 0.$$

Or on a (*voir* la Note à la fin du volume)

$$\frac{d\Delta_\nu}{ds_{i,i}} \frac{d\Delta_\nu}{ds_{j,j}} - \left(\frac{d\Delta_\nu}{ds_{i,j}}\right)^2 = \Delta_\nu \frac{d^2\Delta_\nu}{ds_{i,i}\, ds_{j,j}}.$$

Pour $j = \nu$, $i = \nu - 1$, on a

$$\Delta_{\nu-1} \frac{d\Delta_\nu}{ds_{\nu-1,\nu-1}} - \left(\frac{d\Delta_\nu}{ds_{\nu-1,\nu}}\right)^2 = \Delta_\nu \Delta_{\nu-2};$$

donc, lorsque $\Delta_{\nu-1}$ s'annulera, Δ_ν et $\Delta_{\nu-2}$ seront de signes contraires.

Ceci posé, pour $n^2 = \infty$, on a

$$\Delta_\nu = n^{2\nu} \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,\nu} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\nu,1} & A_{\nu,2} & \dots & A_{\nu,\nu} \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de $n^{2\nu}$ est le discriminant de la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu} \sum_{j=1}^{j=\nu} (A_{i,i}\, x_i + A_{i,j}\, x_i x_j),$$

ou bien, en remplaçant $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ... par leurs valeurs,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu} \sum_{j=1}^{j=\nu} [\Sigma m (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) x_i^2 + \Sigma m (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) x_i x_j];$$

la fonction $f(x)$ est donc une somme de carrés

$$f(x) = \Sigma m[(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^2 + \ldots];$$

par suite, elle reste toujours positive. Mais alors son discriminant sera aussi essentiellement positif. En effet, la fonction pourra, au moyen d'une substitution linéaire, être ramenée à une somme de ν carrés; ces carrés seront tous positifs, sans quoi $f(x)$ pourrait prendre des valeurs négatives; la substitution linéaire en question n'altère pas le signe du discriminant de la fonction, qui se réduit alors au produit des coefficients des carrés. Ainsi donc le discriminant de $f(x)$ est positif, et, par suite, Δ_ν est positif pour $n^2 = +\infty$; si ν est pair, Δ_ν sera encore positif pour $n^2 = -\infty$, mais il sera négatif si ν est impair. Si donc l'on considère la suite

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_\nu, \ldots, \Delta_\mu,$$

on voit : 1° que si l'un de ses termes s'annule, celui qui le précède et celui qui le suit sont de signes contraires; donc il ne peut s'introduire ou se perdre de variation dans cette suite que par le terme Δ_μ; 2° pour $n^2 = -\infty$, cette suite ne présente que des variations; pour $x = +\infty$, elle ne présente que des permanences. Dans le passage de $-\infty$ à $+\infty$, il s'est introduit μ variations; ces variations ont donc dû s'introduire par le terme Δ_μ, ce qui prouve bien que l'équation $\Delta_\mu = 0$, ou (9), a toutes ses racines réelles.

Laplace a donné une autre démonstration de ce théorème, dans le tome II de sa *Mécanique céleste*. Sturm a également écrit un Mémoire sur cette question, je ne crois pas que ce Mémoire ait été imprimé.

Ceci posé, l'équation (8) peut s'écrire

$$(10) \qquad n^2 \frac{dT}{dk_i} + \frac{dK}{dk_i} = 0,$$

T désignant la fonction

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\left(A_{i,i}k_i^2 + A_{i,j}k_i k_j\right) = T,$$

et K désignant ce que devient U quand on change χ en k.

Il est facile de voir que, en vertu des formules (3), T n'est autre chose que la demi-force vive

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

dans laquelle on a remplacé χ_1 par k_1, χ_2 par k_2, ...

Or des formules (10) on tire

$$\sum\left(n^2 k_i \frac{dT}{dk_i} + k_i \frac{dK}{dk_i}\right) = 0,$$

c'est-à-dire, en observant que T et K sont des fonctions homogènes,

$$n^2 T + K = 0 \quad \text{ou} \quad n^2 = -\frac{K}{T}.$$

Si maintenant U est un minimum dans la position d'équilibre, U sera positif dans les positions voisines de l'équilibre, et, par suite, comme on peut prendre k_1, k_2, ... très-petits, puisque leurs rapports seuls sont déterminés, K sera positif comme U; par suite, n^2 sera négatif. Un raisonnement analogue montre que si U est maximum, n^2 est positif.

Supposons d'abord que U soit maximum, les valeurs de n^2 seront positives, et l'intégrale générale du mouvement sera donnée par les formules

$$\begin{gathered}\chi_1 = \Sigma k_1 H \sin(nt + h),\\ \chi_2 = \Sigma k_2 H \sin(nt + h),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{gathered}$$

le signe Σ se rapportant aux diverses valeurs de n déduites de l'équation (9).

Si l'on fait varier t, les χ ne dépasseront jamais certaines limites qu'il est facile d'assigner, et qui seront d'autant plus petites que les déplacements initiaux seront plus petits. En effet, les constantes H sont des fonctions linéaires des déplacements initiaux χ_1^0, $\chi_2^0, \ldots$; par suite, l'équilibre sera stable.

Au contraire, si U est minimum, les racines de l'équation (9) seront négatives. En les désignant par $-\nu_1^2$, $-\nu_2^2, \ldots$, l'intégrale du mouvement sera donnée par des formules telles que

$$\chi_1 = \Sigma k_1 \mathrm{H} \sin\left(\nu t\sqrt{-1} + h\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les sinus qui entrent dans ces formules vont se transformer en exponentielles, et l'on aura pour χ_1, $\chi_2, \ldots$ des expressions de la forme

$$\chi_1 = \Sigma l\,(e^{\nu t} \pm e^{-\nu t}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le signe Σ s'étendant aux diverses valeurs de ν. Les formules précédentes montrent que lorsque t croît, χ_1, $\chi_2, \ldots$ croissent indéfiniment, en sorte que l'on ne peut pas admettre que le système prend des petits mouvements quand on le déplace; l'équilibre est donc instable.

C. Q. F. D.

Il résulte des considérations précédentes que *la force vive d'un système en mouvement est maxima lorsque le système passe par une position d'équilibre stable, et minima lorsqu'il passe par une position d'équilibre instable.*

307. Il résulte aussi de là qu'*un corps pesant est en équilibre stable quand son centre de gravité est le plus bas possible.*

En effet, le travail de la pesanteur, à partir du moment où le centre de gravité est le plus bas, ne peut être que négatif, car le travail de la pesanteur sera le produit du poids total du corps par le déplacement vertical du centre de gravité, déplacement de sens contraire à la pesanteur, puisque le centre de gravité ne peut que monter. Le travail étant négatif, la variation de force vive sera négative; par suite, la force vive passe par un maximum quand le centre de gravité est le plus bas possible; la position correspondante du corps est une position d'équilibre stable.

III. — Théorème de Dirichlet.

308. Les démonstrations précédentes des conditions de stabilité et d'instabilité de l'équilibre reposent sur la formule de Taylor, et, par suite, sont soumises aux mêmes restrictions que cette formule; elles supposent en outre que la fonction des forces contienne des termes du second ordre en $\chi_1, \chi_2, \ldots$: ces termes peuvent être nuls. Quoi qu'il en soit, Dirichlet, dans le tome V du *Journal de M. Liouville*, a établi directement le théorème qui suit :

Théorème — *Lorsque, dans un système en équilibre, la fonction des forces est un maximum, l'équilibre est stable.*

Soient $q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots$ les variables qui déterminent la position du système, et $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \ldots$ les conditions d'équilibre; soit $\varphi(q_1 + \chi_1, \ldots)$ la fonction des forces, T la demi-force vive : on a

$$T - T^0 = \varphi(q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots) - \varphi(q_1 + \chi_1^0, q_2 + \chi_2^0, \ldots),$$

$T^0, \chi_1^0, \chi_2^0, \ldots$ désignant les valeurs initiales de T, χ_1,

$\chi_2, \ldots$ Cette équation peut encore s'écrire

$$(1)\quad T - T^0 = \psi(q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots) - \psi(q_1 + \chi_1^0, q_2 + \chi_2^0, \ldots),$$

en posant

$$\psi(q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots) = \varphi(q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots) - \varphi(q_1, q_2, \ldots),$$

et alors on aura

$$\psi(q_1, q_2, \ldots) = 0,$$

et la fonction ψ sera maxima pour $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0, \ldots$; puisque $\psi(q_1, q_2, \ldots) = 0$ est un maximum, si l'on suppose $\chi_1^0, \chi_2^0, \ldots$ assez petits, $\psi(q_1 + \chi_1^0, \ldots)$ sera négatif, et si l'on suppose

$$\chi_1^0 < \lambda_1, \quad \chi_2^0 < \lambda_2, \ldots.$$

Si de plus on désigne par M le minimum de

$$-\psi(q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots)$$

pour des systèmes de valeurs de $\chi_1, \chi_2, \ldots$, dont l'une au moins est égale à la limite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, on pourra toujours déterminer T^0 de telle sorte que l'on ait encore

$$(2)\qquad T^0 - \psi(q_1 + \chi_1^0, \ldots) < M.$$

Ceci posé, si l'on n'avait pas toujours

$$\chi_1 < \lambda_1, \quad \chi_2 < \lambda_2, \ldots,$$

il en résulterait que l'une des quantités $\chi_1, \chi_2, \ldots$ atteindrait sa limite, et, par suite, à ce moment, on aurait

$$-\psi(q_1 + \chi_1, q_2 + \chi_2, \ldots) \geqq M,$$

ou bien

$$(3)\qquad \psi(q_1 + \chi_1 \ldots) \leqq -M.$$

Des formules (2) et (3) on tire

$$T^0 + \psi(q_1 + \chi_1 \ldots) - \psi(q_1 + \chi_1^0 \ldots) < 0,$$

ce qui est absurde; car en vertu de la formule (1), le premier membre de cette inégalité est égal à T, qui est essentiellement positif. Ainsi, χ_1, χ_2, ... ne pourront jamais atteindre λ_1, λ_2, ...; donc l'équilibre sera stable.

IV. — Application des théories précédentes.

309. Nous allons maintenant éclaircir les théories exposées dans les paragraphes précédents, en les appliquant à quelques exemples.

Balance. — La balance se compose, comme l'on sait, d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe (nous n'avons pas à examiner ici quelle est la forme la plus convenable à donner à ce solide, nous renverrons pour cet objet aux Traités de Physique). En deux points de ce solide, sont placés des poids que l'on veut comparer lorsque l'équilibre est établi.

Cette comparaison ne peut se faire que si la balance se trouve dans une position d'équilibre stable, parce que les positions d'équilibre instable sont trop difficiles à réaliser dans la pratique. Le centre de gravité devra donc être le plus bas possible, c'est-à-dire au-dessous de l'axe de suspension (307).

La balance est un véritable pendule composé, les équations du pendule peuvent donc lui être appliquées, et le temps d'une petite oscillation sera donné par la formule (280)

$$t = \pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(a + \frac{k^2}{a}\right)};$$

a représente dans cette formule la distance de l'axe de suspension au centre de gravité, k est le rayon de giration de la balance, relatif au centre de gravité.

Il est essentiel que t ne soit pas trop grand, afin que la balance ne soit pas paresseuse, donc $a + \frac{k^2}{a}$ devra être rendu aussi petit que possible, k devra donc être faible, c'est-à-dire que la balance ne devra pas être lourde. Le minimum de $a + \frac{k^2}{a}$ pour une valeur donnée de k a lieu lorsque

$$1 - \frac{k^2}{a^2} = 0,$$

ou lorsque $a = k$, et alors

$$t = \pi \sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Il est impossible de prendre $a = k$, pour plusieurs raisons. D'abord les poids suspendus aux extrémités de la balance sont variables, ensuite la balance doit être sensible, c'est-à-dire changer notablement sa position d'équilibre lorsque l'un des poids qui lui sont appliqués varie d'une petite quantité. Or, μ désignant le moment de ce poids par rapport à l'axe de suspension, et P désignant le poids total de la balance et de l'autre poids, on devra avoir

$$\mu + Pa \cos\theta = 0;$$

θ représente, dans cette formule, l'inclinaison de la droite a sur l'horizon. En différentiant la formule précédente, on a

$$\partial\mu - Pa \sin\theta\, \partial\theta = 0;$$

$$\partial\theta = \frac{\partial\mu}{Pa \sin\theta}.$$

Pour que $\partial\theta$ soit considérable lorsque $\partial\mu$ est petit, il faut que $Pa\sin\theta$ soit petit, c'est-à-dire que P, a, θ soient petits. Nous avons déjà vu que P devait être aussi petit que possible; $\sin\theta$ reste toujours inférieur à l'unité;

quant à a, on ne devra pas le prendre trop petit, sans quoi t serait trop grand, et la balance serait *paresseuse*.

Enfin, si l'on veut que $\partial\theta$ soit sensible pour un petit poids additionnel, il faudra que $\delta\mu$ varie rapidement avec la variation de poids additionnel, et, par suite, il faudra que le point d'attache du plateaau de la blance soit éloigné du point de suspension. Toutefois il ne faut pas oublier qu'en augmentant le bras de levier du poids additionnel, on augmente aussi le moment d'inertie du fléau et son poids, ce qui nuit à la précision et rend la balance paresseuse.

Problème. — *Un point* M *est attiré par trois droites fixes situées dans un même plan en raison inverse du carré de sa distance à ces droites; trouver les positions d'équilibre du point en question.*

Soient a, b, c les côtés du triangle formé par ces droites; x, y, z les distances du point M aux droites a, b, c; $\frac{s}{2}$ la surface du triangle. On aura

$$ax + by + cz = s. \tag{1}$$

Les forces qui sollicitent le point M peuvent être représentées par

$$\frac{\alpha}{x^2}, \quad \frac{\beta}{y^2}, \quad \frac{\gamma}{z^2},$$

et l'équation du travail devient

$$\frac{\alpha\,\delta x}{x^2} + \frac{\beta\,\delta y}{y^2} + \frac{\gamma\,\delta z}{z^2} = 0. \tag{2}$$

Mais (1) donne

$$a\delta x + b\delta y + c\delta z = 0. \tag{3}$$

La méthode des multiplicateurs donne

$$\frac{\alpha}{x^2} + \lambda a = 0, \quad \frac{\beta}{y^2} + \lambda b = 0, \quad \frac{\gamma}{z^2} + \lambda c = 0,$$

et l'élimination de λ fournit les équations de l'équilibre

$$\frac{ax^2}{\alpha} = \frac{by^2}{\beta} = \frac{cz^2}{\gamma}, \tag{4}$$

équations auxquelles il faut joindre (1). Les équations (4) représentent des systèmes de droites concourantes et passant par les sommets du triangle a, b, c. Je vais examiner un cas intéressant, celui où l'on aurait

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma},$$

c'est-à-dire où l'attraction de chaque côté a, b, c serait proportionnelle à sa longueur. Dans ce cas, le système (4) se réduirait aux suivants :

$$x = \quad y = \quad z, \tag{5}$$

$$x = -y = \quad z, \tag{6}$$

$$x = \quad y = -z, \tag{7}$$

$$x = -y = -z. \tag{8}$$

Les équations

$$x = y, \quad y = z, \quad z = x$$

sont les équations des bissectrices intérieures du triangle;

$$x = -y, \quad y = -z, \quad z = -x$$

sont les équations des bissectrices des angles extérieurs du triangle : en sorte que (5) représentera le centre du cercle inscrit, et (6), (7), (8) représenteront les centres des cercles exinscrits.

Pour que les centres des cercles exinscrits satisfassent à la question, il faut admettre que l'action des côtés du triangle (a, b, c) soit attractive lorsque le point M est situé du côté de l'intérieur du triangle, et répulsive dans le cas contraire. C'est à cette seule condition que la for-

15.

mule (2) sera générale. Le travail est la différentielle de $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$; cette quantité est évidemment un minimum pour le centre du cercle inscrit lorsque l'on suppose l'action des côtés attractive sur les points intérieurs au triangle, et, par suite, l'équilibre est instable. Cet équilibre serait au contraire stable si l'action des côtés était répulsive sur les points intérieurs au triangle. En effet alors la fonction des forces serait $-\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)$.

Lorsque le centre du cercle inscrit est une position d'équilibre stable, les centres des cercles exinscrits sont des positions d'équilibre instable, et *vice versâ*.

V. — Formules de Cauchy pour le cas où il n'existe pas de liaisons.

310. Cauchy a fait connaître une formule qui peut être considérée comme fondamentale en Physique mathématique, et qui permet d'écrire les équations des petits mouvements d'un système de points qui ne sont pas liés les uns aux autres. (*Nouveaux Exercices;* Prague, *Exercices d'analyse et de Physique mathématique.*)

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système; soit m_0 sa masse et $rf(r)$ la force intérieure qui s'exerce entre deux points situés à la distance r l'un de l'autre, et dont les masses sont égales à l'unité; soit m la masse d'un point voisin du premier, et dont les coordonnées sont $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, en sorte que l'on ait

$$r^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

Soient enfin $m_0 X$, $m_0 Y$, $m_0 Z$ les composantes parallèles aux axes de coordonnées, de la force extérieure qui sollicite le point m_0; l'action de m sur m_0 est $m m_0 r f(r)$, sa projection sur l'axe des x est $m_0 m f(r)\delta x$, en sorte que les équations de l'équilibre du point m_0 sont

$$(1)\quad \begin{cases} X + \Sigma m f(r)\delta x = 0, \\ Y + \Sigma m f(r)\delta y = 0, \\ Z + \Sigma m f(r)\delta z = 0. \end{cases}$$

Si l'on veut obtenir les équations du mouvement, il suffira de joindre à X, Y, Z les composantes de la force d'inertie du point m_0 rapportées à l'unité de masse.

Il y a intérêt, comme nous l'avons déjà dit, à prendre des variables qui s'annulent dans la position d'équilibre; aussi nous conserverons les notations x, y, z, et $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ pour désigner les positions d'équilibre des molécules m_0 et m; nous représenterons par $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ les coordonnées du point m_0 à l'époque t, lorsque le système aura, pour une cause quelconque, été dérangé de sa position d'équilibre. Nous supposerons ξ, η, ζ incomparablement plus petits que $\delta x, \delta y, \delta z$, en convenant de négliger les premières quantités vis-à-vis des dernières; nous supposerons, en outre, que les quantités ξ, η, ζ ne dépendent que de x, y, z et du temps t. Les coordonnées du point m dans le mouvement seront

$$x + \delta x + \xi + \delta\xi, \quad y + \delta y + \eta + \delta\eta, \quad z + \delta z + \zeta + \delta\zeta,$$

ou bien

$$(2)\quad \begin{cases} x + \delta x + \xi + \dfrac{d\xi}{dx}\delta x + \dfrac{d\xi}{dy}\delta y + \dfrac{d\xi}{dz}\delta z + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2\xi}{dx^2}\delta x^2 + \ldots\right)\cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et les équations (1) devront être remplacées par

$$(3)\quad \begin{cases} X - \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \Sigma m f(r + \rho)(\delta x + \delta\xi) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ρ désignant, pour abréger, la quantité dont r a augmenté dans le mouvement. On a, du reste,

$$\rho = \sqrt{(\partial x + \partial\xi)^2 + (\partial y + \partial\eta)^2 + (\partial z + \partial\zeta)^2} - \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

ou bien, en négligeant les carrés et les produits de $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$,

$$\rho = \frac{\partial\xi\,\partial x + \partial\eta\,\partial y + \partial\zeta\,\partial z}{r}.$$

Si l'on observe alors que $f(r+\rho)$ est sensiblement égal à $f(r) + \rho f'(r)$ ou à $f(r) + \frac{f'(r)}{r}(\partial\xi\,\partial x + \partial\eta\,\partial y + \partial\zeta\,\partial z)$, les formules (3) pourront s'écrire, en négligeant le produit $\partial\xi\,.\,\rho$,

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2\xi}{dt^2} + \Sigma m \Big[& f(r)\,\partial x + f(r)\,\partial\xi \\ & + \frac{f'(r)}{r}(\partial\xi\,\partial x^2 + \partial\eta\,\partial y\,\partial x + \partial\zeta\,\partial z\,\partial x)\Big] = 0, \end{aligned}$$

. . . . ,

. . . .

Si de ces équations on retranche les équations (1), et si l'on observe que les forces extérieures X, Y, Z, telles que la pesanteur, l'attraction des corps environnant le milieu, etc., ne changent pas de valeur pendant le mouvement, on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m \left[f(r)\,\partial\xi + \dfrac{f'(r)}{r}(\partial\xi\,\partial x^2 + \partial\eta\,\partial y\,\partial x + \partial\zeta\,\partial z\,\partial x)\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si enfin, dans ces formules, on remplace $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ par leurs valeurs (2), on obtient les équations linéaires des petits mouvements. Si le système dont on étudie les petits mouvements est un corps homogène, et si l'on admet que les points matériels considérés soient les centres d'action des molécules de ce corps, la force $f(r)$ sera sensiblement nulle dès que r aura des valeurs un peu considérables. Il faudra alors admettre que $\Sigma mf(r)\partial x$, $\Sigma mf(r)\partial y$, $\Sigma mf(r)\partial z$ sont nuls; car, dans la somme $\Sigma mf(r)\partial x$, la quantité $m\partial x$ prend des valeurs égales et de signes contraires ou à fort peu de chose près, et lorsque la molécule m est assez éloignée de m_0 pour ne plus avoir sa symétrique dans le corps, $f(r)$ est sensiblement nulle. Une raison analogue à celle que nous venons de donner montre que les termes tels que $\Sigma mf(r)\partial x\partial y, \ldots$ sont nuls, en sorte que, si l'on se borne aux termes du second ordre dans les développements de $\partial\xi$, ∂y, $\partial\zeta$, et si l'on pose

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\Sigma mf(r)\delta x^2 = \mathrm{A},\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma m\frac{f'(r)}{r}\delta x^4 = \mathrm{A}',\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma m\frac{f'(r)}{r}\delta^2 y\,\delta^2 z = \mathrm{A}'',\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma mf(r)\delta y^2 = \mathrm{B},\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma mf(r)\delta y^4 = \mathrm{B}',\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma m\frac{f'(r)}{r}\delta x^2\delta z^2 = \mathrm{B}'',\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma mf(r)\delta z^2 = \mathrm{C},\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma mf(r)\delta z^4 = \mathrm{C}',\\
&\tfrac{1}{2}\Sigma mf(r)\delta x^2\delta y^2 = \mathrm{C}'',
\end{aligned}
\right.
$$

les formules (4) se réduiront à

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2}(\mathrm{A}+\mathrm{A}') + \frac{d^2\xi}{dy^2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}'') + \frac{d^2\xi}{dz^2}(\mathrm{C}+\mathrm{B}'')&\\
+ 2\frac{d^2\eta}{dx\,dy}\mathrm{C}'' + 2\frac{d^2\zeta}{dx\,dz}\mathrm{B}''&,
\end{aligned}
$$

. . . .

Si l'on admet que le système soit constitué de la même manière en tous sens, il faudra admettre que $A = B = C$, que $A' = B' = C'$, et que $A'' = B'' = C''$; c'est le cas ordinaire des milieux non cristallisés. Dans ce cas, les formules précédentes se simplifient et donnent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2}(A + A') + \frac{d^2\xi}{dy^2}(A + A'') + \frac{d^2\xi}{dz^2}(A + A'') \\ + 2\frac{d^2\eta}{dx\,dy}A'' + 2\frac{d^2\zeta}{dt^2}A'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Enfin ces formules se simplifient encore si l'on observe qu'elles ne doivent point changer de forme quand on fait tourner les axes autour de l'origine des coordonnées, δx, δy, δz étant considérées comme des coordonnées prises par rapport à trois axes rectangulaires passant en m_0. Posons

$$\delta x = \delta x' \cos\varphi - \delta y' \sin\varphi,$$

$$\delta y = \delta x' \sin\varphi + \delta y' \cos\varphi.$$

On en tire

$$\begin{aligned} \delta x^4 = \delta x'^4 \cos^4\varphi - 4\delta x'^3 \delta y' \cos^3\varphi \sin\varphi + 6\delta x'^2 \delta y'^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \\ - 4\delta x' \delta y'^3 \sin^3\varphi \cos\varphi + \delta y'^4 \sin^4\varphi. \end{aligned}$$

En multipliant par m, en sommant et en ayant égard aux équations (5) et aux conditions $A = B = C$, $A' = B' = C'$, $A'' = B'' = C''$, on trouve

$$A' = A' \cos^4\varphi + 6A'' \sin^2\varphi \cos^2\varphi + A' \sin^4\varphi.$$

Si l'on identifie ou si l'on fait $\varphi = 45$ degrés, il vient

$$A' = \frac{A'}{2} + \frac{3A''}{2} \quad \text{ou} \quad A' = 3A''$$

Ainsi, au lieu de (6), on peut écrire

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2}(\mathrm{A} + 3\,\mathrm{A}'') + \left(\frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right)(\mathrm{A} + \mathrm{A}'')& \\
+ 2\left(\frac{d^2\eta}{dx\,dy} + \frac{d^2\zeta}{dx\,dz}\right)\mathrm{A}''&, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&
\end{aligned}
\right.
$$

On pose ordinairement

$$
(8)\quad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dx\,dy} + \frac{d^2\zeta}{dx\,dz},
$$

et l'on a, au lieu de (7),

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\,\mathrm{A}''\,\frac{d\theta}{dx} + (\mathrm{A} + \mathrm{A}'')\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Nous désignerons par la notation $\Delta_2\varphi$ la quantité

$$
\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \Delta_2\varphi.
$$

M. Lamé l'appelle le *paramètre différentiel du second ordre de la fonction* φ. Nous poserons ensuite $2\,\mathrm{A}'' = \lambda$, $\mathrm{A} + \mathrm{A}'' = \mu$; λ et μ seront alors deux constantes spécifiques et caractéristiques de chaque milieu homogène, et les équations (9) des petits mouvements prendront la forme très-simple

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \lambda\,\frac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta_2\xi, \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \lambda\,\frac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta_2\eta, \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \lambda\,\frac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta_2\zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (10) sont démontrées d'une autre manière dans le *Traité de l'Élasticité dans les corps solides* de M. Lamé. Cauchy ne leur a pas donné cette forme, il leur laisse le plus souvent toute leur généralité, parce que son but est l'étude de la propagation de la lumière dans les milieux cristallisés : ainsi il ne fait pas $A = B$.... Quoi qu'il en soit, les formules (10) sont très-utiles. Elles trouvent leur application en optique, en acoustique et dans la théorie de l'élasticité. θ représente la *dilatation cubique* du milieu dans les environs du point x, y, z. En effet, $\frac{d\xi}{dx}\,dx$ est l'accroissement que prend la longueur dx pendant le mouvement, $\frac{d\eta}{dx}\,dy$, $\frac{d\zeta}{dz}\,dz$ sont les accroissements des longueurs dy et dz, en sorte que l'accroissement du parallélépipède de dimensions dx, dy, dz, serait

$$\left(dx + \frac{d\xi}{dx}\,dx\right)\left(dy + \frac{d\eta}{dy}\,dy\right)\left(dz + \frac{d\zeta}{dz}\,dz\right) - dx\,dy\,dz;$$

ou bien, en ne prenant que les termes du premier ordre en $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dy}, \frac{d\zeta}{dz}$,

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

c'est-à-dire θ. C. Q. F. D.

Si l'on différentie la première équation (10) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z, et si l'on ajoute, on trouve

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = (\lambda + \mu)\left(\frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2} + \frac{d\theta^2}{dz^2}\right).$$

Telle est l'equation du second ordre à laquelle satisfait la *dilatation cubique*.

VI. — Principe de la superposition des petits mouvements.

311. Nous avons vu que les équations des petits mouvements sont linéaires et qu'elles peuvent être représentées, dans le cas le plus général, par des équations de la forme (*voyez* le paragraphe précédent)

$$(o)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = A, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = B, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = C, \end{cases}$$

A, B, C désignant des fonctions linéaires des dérivées de ξ, η, ζ prises par rapport à x, y, z. Si donc

$$(1)\qquad \xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1,$$

$$(2)\qquad \xi = \xi_2, \quad \eta = \eta_2, \quad \zeta = \zeta_2,$$

. . . .

désignent divers systèmes d'intégrales des équations (o), à cause de leur forme linéaire ces équations admettront encore l'intégrale

$$(a)\quad \xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots.$$

Les intégrales (1), (2),... résultent de certaines hypothèses faites sur les circonstances initiales du mouvement, ou, comme l'on dit, dépendent de certains états initiaux; or l'intégrale (*a*) représente le mouvement résultant des mouvements partiels représentés par les formules (1), (2),..., et cela quelle que soit l'époque à laquelle on considère le mouvement, c'est-à-dire en particulier à l'époque initiale; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Si un système de points matériels est animé de petits mouvements, le mouvement qu'il possède est à chaque instant le mouvement résultant des mouvements qu'aurait pris le système sous l'influence des circonstaces initiales qui auraient produit individuellement les mouvements composants.

C'est dans ce théorème que consiste le principe de la superposition des petits mouvements dont on fait un usage continuel en optique et en acoustique. Pour bien en saisir le sens, il est nécessaire d'avoir recours à un exemple.

Je suppose qu'en ébranlant un point A du système il se propage un mouvement qui, au bout du temps t, soit représenté en m_0 par les formules

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1;$$

en ébranlant, au contraire, un point B, il se propage un mouvement représenté en m_0 par les formules

$$\xi = \xi_2, \quad \eta = \eta_2, \quad \zeta = \zeta_2.$$

Je suppose maintenant que l'on ébranle à la fois les points A et B. Le mouvement du point m_0, qui, à l'instant initial, était en repos, sera représenté par les formules

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2,$$

et sera le mouvement résultant des deux premiers, parce qu'il satisfait aux équations différentielles du mouvement, et à l'époque initiale, aux circonstances initiales du mouvement.

VII. — Mouvement de l'air dans un tuyau.

312. Nous supposerons que l'air se déplace par tranches perpendiculaires à l'axe du tuyau, en sorte que les molécules, primitivement dans un même plan perpendiculaire à l'axe du tuyau, y restent encore après un temps quelconque. Prenons le plan O (*fig.* 41, p. 202) pour plan origine; soit $\mathrm{OM} = x$. Considérons une tranche MN d'épaisseur dx; donnons à la face M de cette tranche un déplacement $\mathrm{MM}' = u$; la face N prendra un déplacement $\mathrm{NN}' = u + \frac{du}{dx}dx$, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN} + \mathrm{NN'} - \mathrm{MM'} = dx + u + \frac{du}{dx}dx - u,$$

ou bien

$$\mathrm{M'N'} = dx + \frac{du}{dx}dx = dx\left(1 + \frac{du}{dx}\right).$$

On voit donc que $\frac{du}{dx}dx$ est la dilatation de la longueur dx; $\frac{du}{dx}$ sera donc la dilatation de l'unité de longueur du tuyau. Ceci posé, en appelant ρ la densité initiale de l'air, et ρ' la densité à l'époque t correspondante au déplacement u, et en désignant par ω la section droite du tuyau, la loi de Mariotte nous donne la relation

$$\rho\omega\, dx = \rho'\,\omega\left(1 + \frac{du}{dx}\right)dx,$$

d'où l'on tire

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \frac{du}{dx}}.$$

La dilatation $\frac{du}{dx}$ est ordinairement faible; on peut donc écrire

$$\rho' = \rho\left(1 - \frac{du}{dx}\right);$$

en négligeant les puissances de $\frac{du}{dx}$, la pression qui s'exerce par unité de surface à l'époque t sur le plan A, sera proportionnelle à ρ'; on peut la représenter par $a^2\rho'$, ou par

$$a^2\rho\left(1 - \frac{du}{dx}\right).$$

Ceci posé, considérons une tranche d'épaisseur dx. Sur sa face antérieure il s'exerce à l'époque t une pression

$$a^2\rho\left(1 - \frac{du}{dx}\right)\omega;$$

sur la face opposée nous trouvons la même pression augmentée de sa différentielle, mais agissant en sens inverse, ou

$$-a^2\rho\omega\left[\left(1 - \frac{du}{dx}\right) - \frac{d^2u}{dx^2}\,dx\right],$$

ou bien

$$-a^2\rho\omega\left(1 - \frac{du}{dx}\right) + a^2\rho\omega\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

La force qui sollicite la tranche en question se réduit à la somme algébrique des pressions que nous venons de calculer, ou à

$$a^2\rho\omega\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

La masse de la tranche est $\rho\omega\,dx$, sa force d'inertie est

$$\rho\omega\,dx\,.\,\frac{d^2x}{dt^2};$$

l'équation du mouvement de la tranche en question est ainsi

$$a^2 \omega\rho \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \omega\rho \frac{du^2}{dt^2} dx,$$

ou bien

$$(1) \qquad a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Cette formule pouvait se déduire immédiatement des formules de Cauchy, § IV, formule (10) : il suffisait, pour cela, de faire $\eta = 0$, $\zeta = 0$; la première formule devenait

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = (\lambda + \mu) \frac{d^2 \xi}{dx^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est, comme l'on sait,

$$(2) \qquad u = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires. Pour déterminer ces fonctions, il faut se donner les circonstances initiales du mouvement, c'est-à-dire la valeur de $\frac{du}{dx}$ et de $\frac{du}{dt}$ pour $t = 0$, par exemple, ou, ce qui revient au même, la dilatation initiale et la vitesse initiale de chaque tranche. Soit donc, pour $t = 0$,

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = f(x), \quad \frac{du}{dt} = \mathrm{F}(x).$$

En différentiant la formule (2), on a

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x + at) + \psi'(x + at),$$

$$\frac{du}{dt} = a[(\varphi'(x + at) - \psi'(x - at)].$$

Si l'on fait $t = 0$, il vient, en vertu des formules (3),

$$f(x) = \varphi'(x) + \psi'(x),$$
$$F(x) = a\varphi'(x) - a\psi'(x),$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{a}F(x)\right],$$
$$\psi'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{a}F(x)\right].$$

L'intégration fera alors connaître $\psi(x)$ et $\varphi(x)$, et l'on aura

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^x f(z)\,dz + \frac{1}{2a}\int_0^x F(z)\,dz,$$
$$\psi(x) = \psi(0) + \frac{1}{2}\int_0^x f(z)\,dz - \frac{1}{2a}\int_0^x F(z)\,dz;$$

par suite, en changeant x en $x + at$ et en $x - at$, puis en tenant compte de la formule (2),

$$(4)\quad u = \varphi(0) + \psi(0) + \frac{1}{2}\left(\int_0^{x+at} f(z)\,dz + \int_0^{x-at} f(z)\,dz\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le tuyau soit illimité dans les deux sens, et que l'on donne un petit ébranlement circonscrit entre les limites $x = 0$ et $x = \lambda$; alors, pour $t = 0$, u, $\frac{du}{dx} = f(x)$ et $\frac{du}{dt} = F(x)$ seront nuls excepté pour $0 < x < \lambda$. Si l'on fait alors $t = 0$, $x = 0$ dans la formule (4), on trouve

$$\varphi(0) + \psi(0) = 0,$$

donc

$$(5)\qquad u = \frac{1}{2}\left[\int_0^{x+at} f(z)\,dz + \int_0^{x-at} f(z)\,dz\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz.$$

Or $f(z)$ et $F(z)$, en vertu des formules (3), ne peuvent avoir de valeur sensible que si z est compris entre o et λ. Si l'on fait $t = 0$, $x = \lambda$, la formule (5) donne

$$\int_0^{\lambda} f(z).dz = 0\,;$$

ce qui est évident *à priori*, car la dilatation totale est nulle et $f(z)$ est la dilatation correspondante à l'abscisse z.

Ceci posé, soit x une abscisse plus grande que l. La formule (5) pour $t = 0$ donnera $u = 0$. Si l'on fait croître t, la première intégrale recevra des accroissements nuls, car $f(z)$ est nul pour $x > \lambda$; la seconde cessera d'être nulle pour $x - at = \lambda$; la troisième cessera d'être nulle dès que z pourra atteindre la valeur λ, c'est-à-dire dès que $x - at = \lambda$. Donc le mouvement va se propager dans le sens des abscisses positives et atteindra l'abscisse x dès que

$$x - at = \lambda \quad \text{ou} \quad t = \frac{x-\lambda}{a}.$$

Le mouvement va donc se propager vers la droite avec une vitesse a égale à la racine carrée de la pression divisée par la densité du gaz en mouvement.

Dès que $x - at$ sera devenu plus petit que zéro, la seconde intégrale ne contiendra plus que des éléments nuls; quant à la troisième, elle prendra la valeur constante

$$\frac{1}{2a}\int_0^{\lambda} F(z)\,dz.$$

Ainsi donc la tranche x va se mouvoir depuis le temps $t = \frac{x-\lambda}{a}$ jusqu'à l'époque $t = \frac{x}{a}$; elle restera donc en mouvement pendant le temps $\frac{\lambda}{a}$, mais elle restera déplacée et ne reviendra à sa position primitive, comme l'a fait observer M. Duhamel, que si

$$\int_0^\lambda \mathrm{F}(z)\,dz = 0.$$

A cause de la parfaite symétrie du tuyau, il est évident que des phénomènes analogues se passeront à la gauche de la partie ébranlée à l'époque $t = 0$. C'est ce que l'on peut constater en répétant la discussion que nous venons de faire, mais en supposant x négatif.

On donne le nom d'*onde* à un solide fictif en mouvement et qui coïnciderait à chaque instant avec la partie du gaz qui se trouve ébranlée. Dans la question que nous venons d'étudier, on peut dire que l'ébranlement initial donne naissance à deux ondes qui se propagent avec une même vitesse et dans deux directions opposées.

Limitons maintenant notre tuyau au moyen d'une cloison, et voyons l'effet produit sur l'onde par cette obturation dont nous supposerons l'abscisse égale à o. Au point o, on a pour $x = 0$

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

quel que soit t, ou, ce qui revient au même,

$$\varphi'(at) - \psi'(-at) = 0.$$

On peut donc écrire, en changeant at en z,

$$\varphi'(z) = \psi'(-z). \tag{6}$$

Mais on a

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x + at) + \psi'(x - at).$$

En changeant alors x en $-x$, on a en vertu de (6)

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} &= \varphi'(-x + at) + \psi'(-x - at)\\ &= \psi'(+x - at) + \varphi'(x + at).\end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x} &= a[\varphi'(-x + at) - \psi'(-x - at)]\\ &= a[\psi'(x - at) - \varphi'(x + at)].\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $\frac{du}{dx}$ aura deux valeurs égales en deux points symétriques par rapport à l'origine; la fonction $\frac{du}{dt}$ aura deux valeurs égales et de signes contraires, en sorte qu'à des distances égales de l'origine se trouveront toujours deux ondes identiques, dont l'une, bien entendu, sera virtuelle. Lorsque l'onde vraie vient rencontrer le fond du tuyau, une des ondes virtuelles vient le rencontrer aussi et pénètre dans l'intérieur du tuyau : elle devient alors réelle; en sorte que l'effet d'une cloison dans un tuyau est de réfléchir l'onde comme si cette onde était matérielle.

Si nous supposons le tuyau ouvert à l'origine, alors on aura $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x = 0$, parce que la pression à l'origine est la pression normale de l'atmosphère; la dilatation doit donc y être nulle. Or on a

$$\frac{du}{dt} = \varphi'(x + at) + \psi'(x - at),$$

et pour $x = 0$

$$0 = \varphi'(at) + \psi'(-at).$$

On en conclut que l'on a généralement

$$\varphi'(z) = -\psi'(-z).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} &= \varphi'(-x+at) + \psi'(-x-at)\\ &= -\psi'(x-at) - \varphi'(x+at),\\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{-x} &= a[\varphi'(-x+at) - \psi'(-x-at)]\\ &= a[-\psi'(x-at) + \varphi'(x+at)].\end{aligned}$$

On voit par là que, pour des valeurs d'x égales et de signe contraire, ou qu'en des points également éloignés de l'origine, la dilatation a des valeurs égales et de signe contraire, en sorte que l'onde vraie semblera se réfléchir sur l'origine; mais dans l'onde réfléchie, les vitesses des molécules seront de signe contraire aux vitesses des molécules dans l'onde incidente.

On voit, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, l'effet produit par une série d'ébranlements donnés en un même point du tuyau; chacun d'eux donnera naissance à une onde. Il pourra se faire qu'une onde incidente rencontre une onde réfléchie; les mouvements se composeront alors d'après les règles du principe de la superposition des petits mouvements.

VIII. — Usage des séries trigonométriques dans l'étude du mouvement de l'air dans les tuyaux.

313. Nous allons maintenant montrer, sur un exemple particulier, comment on peut étudier le mouvement de

l'air dans un tuyau limité. La méthode dont nous allons faire usage est très-féconde; elle s'applique dans un grand nombre de questions de Physique mathématique. Le principe de cette méthode est dû à Daniel Bernoulli.

Reprenons l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{1}$$

On y satisfait en posant

$$u = (A_n \cos nx + B_n \sin nx)(C_n \cos nat + D_n \sin nat),$$

et, plus généralement encore, en posant

$$u = \Sigma\,(A_n \cos nx + B_n \sin nx)(C_n \cos nat + D_n \sin nat). \tag{2}$$

A_n, B_n, C_n, D_n désignent des constantes, et le signe Σ s'étend à un nombre limité ou illimité de valeurs de n.

Supposons que l'on ait affaire à un tuyau ouvert à ses deux extrémités. Comptons les abscisses à partir de l'une d'elles. Soit l la longueur du tuyau, on aura :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } x = 0,\ \dfrac{du}{dx} = 0,\\[2ex] \text{Pour } x = l,\ \dfrac{du}{dx} = 0,\end{array}\right\}\ \text{quel que soit } t.$$

En effet, à l'extrémité du tuyau, la dilatation $\frac{du}{dx}$ doit être nulle si l'on suppose la pression extérieure constante. Si l'on différentie alors la formule (2), on trouve

$$\frac{du}{dx} = \Sigma\, n\,(-A_n \sin nx + B_n \cos nx)(C_n \cos nat + D_n \sin nat).$$

Nous supposerons cette dernière série convergente, et les calculs faits jusqu'ici seront légitimes. Si l'on fait $x = 0$ et $x = l$ dans cette formule, on a

$$0 = \Sigma\, n B_n (C_n \cos nat + D_n \sin nat),$$

$$0 = \Sigma\, n(-A_n \sin nl + B_n \cos nl)(C_n \cos nat + D_n \sin nat).$$

On satisfera à ces équations en prenant

$$B_n = 0, \quad \sin nl = 0,$$

ou bien

$$nl = i\pi, \quad n = \frac{i\pi}{l},$$

i désignant un entier quelconque.

La formule (2) devient alors, en changeant l'indice n en i,

$$(3) \qquad u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos\frac{i\pi x}{l}\left(C_i \cos\frac{i\pi at}{l} + D_i \sin\frac{i\pi at}{l}\right).$$

La fonction u ainsi déterminée satisfera à la question. C_i et D_i ne sont assujettis à d'autre condition qu'à rendre la série précédente convergente, ainsi que ses dérivées. On achèvera de les déterminer en se donnant l'ébranlement initial, c'est-à-dire les valeurs de $\frac{du}{dx}$ et de $\frac{du}{dt}$ pour $t = 0$ dans toute l'étendue du tuyau. Soit donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(x) \\ \frac{du}{dx} &= f(x) \end{aligned}\right\} \text{pour } t = 0.$$

On a, entre les limites 0 et l (*voir* le *Traité d'analyse* de M. Duhamel, p. 185, 2e vol., ou bien ma *Théorie des résidus*, p. 156),

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha, \\ F(x) &= \frac{1}{l}\int_0^l F(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\frac{i\pi x}{l}\int_0^l F(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

En différentiant alors la formule (3) par rapport à t et à x, on trouvera

$$\frac{du}{dt} = \frac{a\pi}{l}\sum_{1}^{\infty} i\cos\frac{i\pi x}{l}\left(-\mathrm{C}_i\sin\frac{i\pi at}{l} + \mathrm{D}_i\cos\frac{i\pi at}{l}\right),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\pi}{l}\sum_{1}^{\infty} -i\sin\frac{i\pi x}{l}\left(\mathrm{C}_i\cos\frac{i\pi at}{l} + \mathrm{D}_i\sin\frac{i\pi at}{l}\right).$$

Si l'on fait $t = 0$, on a

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{0}^{\infty}\frac{a\pi i\mathrm{D}_i}{l}\cos\frac{i\pi x}{l},$$

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}\frac{\pi i\mathrm{C}_i}{l}\sin\frac{i\pi x}{l} + \ldots.$$

Si l'on compare ces formules avec les formules (4), on en conclut

$$a\pi i\mathrm{D}_i = 2\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$\pi i\mathrm{C}_i = 2\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Si l'on tire les valeurs de C_i et D_i pour les porter dans (3), on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & \sum_{1}^{\infty}\frac{2}{i\pi}\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha \\ & + \sum_{0}^{\infty}\frac{2}{ai\pi}\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l}\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Cette équation satisfait aux conditions initiales données;

elle renferme, comme l'on voit, les fonctions arbitraires $f(\alpha)$ et $F(\alpha)$.

On admet généralement que le son que l'on tire des tuyaux est dû aux petits mouvements de l'air contenu dans ces tuyaux. Les divers termes de la série (4) constituent des solutions particulières du problème qui nous occupe. On donne le nom de *mouvements simples* à ceux qui se trouvent représentés par les solutions en question. Si nous considérons l'un d'eux, il est représenté par une équation de la forme

$$u = A\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l} \quad \text{ou} \quad u = A\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l}.$$

Si l'on considère la première de ces équations par exemple, on voit que u s'annule, quel que soit t, pour

$$x = \frac{2\mu+1}{2i}\,l,$$

μ désignant un entier quelconque compris entre 0 et i. Les tranches qui ont pour abscisses

$$\frac{l}{2i},\quad \frac{3l}{2i},\ldots,\quad \frac{2i-1}{2i}\,l$$

restent en repos et portent le nom de *nœuds*; au milieu de l'intervalle compris entre deux nœuds, u atteint son maximum; on donne aux tranches correspondantes le nom de *ventres*.

La vitesse du mouvement simple que nous venons de considérer est fournie par la formule

$$\frac{du}{dt} = -A\frac{i\pi a}{l}\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l}.$$

La vitesse s'annule pour $t = 0, \frac{l}{ai}, \frac{2l}{ai}, \frac{3l}{ai}, \ldots,$ et varie comme les ordonnées d'une sinusoïde, en chaque point du tuyau, excepté vers les nœuds où elle est toujours nulle; chaque tranche repasse au même point, et avec la même vitesse, après un temps égal à $\frac{2l}{ai}$: ce temps est ce que l'on appelle la *durée d'une vibration complète*. Si l'on désigne par ν le nombre de vibrations exécutées en une seconde, on a

$$\nu = \frac{ai}{2l}.$$

Cette formule permet de calculer ν quand on connaît a, i, l, et réciproquement, si l'on connaît le nombre des nœuds d'un tuyau i, le nombre des vibrations ν et la longueur l, on peut calculer la vitesse du son a. On admet généralement que la hauteur du son est mesurée par le nombre ν. Le timbre était resté inexpliqué jusqu'à présent, mais M. Helmholtz a démontré expérimentalement que le timbre provenait de la simultanéité de plusieurs sons, dont un seul était assez intense pour être apprécié isolément en hauteur, ou, si l'on veut, de la superposition des petits mouvements dus à plusieurs sons. Euler avait déjà songé à expliquer le timbre de cette façon en annonçant qu'il dépendait de la nature des fonctions que nous avons appelées F et f. Enfin l'intensité du son dépend de l'amplitude des vibrations, c'est-à-dire du coefficient A.

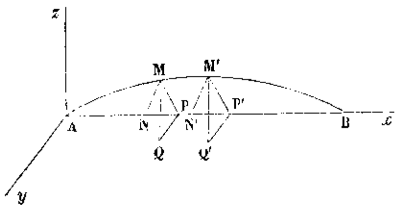
Lorsque plusieurs mouvements simples ont lieu simultanément, c'est-à-dire lorsque l'on considère plusieurs termes dans la série (4) avec des coefficients qui ne soient pas par trop différents les uns des autres, l'oreille peut saisir la simultanéité de ces mouvements, et l'on entend alors ce que l'on appelle des *harmoniques*.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude intéressante du mouvement de l'air dans les tuyaux; nous renverrons, pour plus de développements, aux Traités de Physique et à divers Mémoires de M. Duhamel insérés dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

IX. — Mouvement de la corde vibrante.

314. Considérons une corde tendue entre deux points A et B (*fig.* 43); écartons-la un peu de sa position d'équi-

Fig. 43.



libre; abandonnons-la ensuite à elle-même, et proposons-nous d'étudier son mouvement.

Prenons la direction AB pour axe des x, plaçons l'origine en A, et désignons par ξ, η, ζ les coordonnées rectangulaires de la position M occupée par le point qui dans l'état d'équilibre se trouve en N; soit $AN = x$ et $AB = l$. Nous supposons bien entendu la corde assez mince pour pouvoir être assimilée à une ligne mathématique, sans qu'il en résulte d'erreur grossière dans les calculs.

Si nous désignons par E le coefficient d'élasticité de la corde, par ω sa section, par dx un élément NN' de la corde pris à l'état d'équilibre, par $MM' = ds$ ce que devient l'élément dx à l'époque t pendant le mouvement, par τ la tension de la corde à l'état statique, la tension T de l'élément ds à l'état dynamique sera donnée par la formule

$$T = \tau + \frac{E\omega(ds - dx)}{dx},$$

E désignant le coefficient d'élasticité de la corde. Nous savons, en effet, que l'accroissement de tension d'un fil dû à un accroissement de longueur $ds - dx$ de ce fil est proportionnel à cet accroissement de longueur, à la section du fil et à l'inverse de la longueur primitive de ce fil. Or ds est sensiblement égal à sa projection $\frac{d\xi}{dx}dx$ sur l'axe des x, en sorte que l'on a

$$T = \tau + E\omega\left(\frac{d\xi}{dx} - 1\right).$$

Ceci posé, considérons les forces qui sollicitent un élément de fil $NN' = dx$ à l'état dynamique, lorsqu'il se trouve dans la position $M'M$; à l'une des extrémités, on a la tension T dont les projections sur les axes sont

$$-T\frac{d\xi}{ds}, \quad -T\frac{d\eta}{ds}, \quad -T\frac{d\zeta}{ds};$$

à l'autre extrémité, on a la même tension augmentée de sa différentielle agissant en sens inverse; elle a pour projections

$$T\frac{d\xi}{ds} + dT\frac{d\xi}{ds}, \quad T\frac{d\eta}{ds} + dT\frac{d\eta}{ds}, \quad T\frac{d\zeta}{ds} + dT\frac{d\zeta}{ds}.$$

La pesanteur est négligeable vis-à-vis de ces forces. La résultante des forces dont nous avons à tenir compte a donc pour projections

$$dT\frac{d\xi}{ds}, \quad dT\frac{d\eta}{ds}, \quad dT\frac{d\zeta}{ds}.$$

Or $\frac{d\xi}{ds}$ est sensiblement égal à 1, car la corde déformée s'est par hypothèse peu écartée de sa position initiale. Donc on peut poser

$$(1) \qquad d\mathrm{T}\frac{d\xi}{ds} = d\mathrm{T} = \mathrm{E}\omega\,\frac{d^2\xi}{dx^2}\,dx;$$

$\frac{d\eta}{ds}$ peut être remplacé par $\frac{d\eta}{dx}\,\frac{dx}{ds}\cdot$ On a donc

$$\mathrm{T}\frac{d\eta}{ds} = \left[\tau + \mathrm{E}\omega\left(\frac{d\xi}{dx} - 1\right)\right]\frac{d\eta}{dx}\,\frac{dx}{ds}.$$

Mais $\frac{d\xi}{dx}$ est très-voisin de l'unité, $\frac{dx}{ds}$ également; en sorte que l'on a à peu près

$$(2) \qquad \mathrm{T}\frac{d\eta}{ds} = \tau\frac{d\eta}{dx}, \quad d\mathrm{T}\frac{d\eta}{ds} = \tau\frac{d^2\eta}{dx^2}\,dx.$$

On aurait de même

$$(3) \qquad d\mathrm{T}\frac{d\zeta}{ds} = \tau\frac{d^2\zeta}{dx^2}\,dx.$$

La masse de l'élément dx est le produit de son volume $\omega\,dx$ par la masse spécifique du fil. Si l'on désigne par Δ la densité de ce fil, $\frac{\Delta}{g}$ sera sa masse spécifique, et alors la masse de l'élément dx sera $\frac{\Delta\omega\,dx}{g}$; les composantes de sa force d'inertie seront

$$\frac{\Delta\omega\,dx}{g}\,\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \frac{\Delta\omega\,dx}{g}\,\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \frac{\Delta\omega\,dx}{g}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Si l'on se reporte alors aux formules (1), (2), (3), qui donnent les projections des forces qui sollicitent l'élément dx, on aura pour équations du mouvement

$$\frac{\Delta\omega\, dx}{g}\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{E}\omega\,\frac{d^2\xi}{dx^2}\,dx,$$

$$\frac{\Delta\omega\, dx}{g}\,\frac{d^2\eta}{dt^2} = \tau\,\frac{d^2\eta}{dx^2}\,dx,$$

$$\frac{\Delta\omega\, dx}{g}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \tau\,\frac{d^2\zeta}{dx^2}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\mathrm{E}g}{\Delta}\,\frac{d^2\xi}{dx^2},\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\tau g}{\omega\Delta}\,\frac{d^2\eta}{dx^2},\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\tau g}{\omega\Delta}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

On serait arrivé à des formules du même genre en partant des équations de Cauchy (307) :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \lambda\,\frac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta_2\xi,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \lambda\,\frac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta_2\eta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \lambda\,\frac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta_2\zeta.$$

En y supposant $y = 0$, $z = 0$, elles deviennent en effet

$$(a)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = (\lambda + \mu)\,\frac{d^2\xi}{dx^2},$$

$$(b)\qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\,\frac{d^2\eta}{dx^2},$$

$$(c)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu\,\frac{d^2\zeta}{dx^2}.$$

Les équations de la corde vibrante sont, comme l'on voit, de la même forme que celles du mouvement de l'air dans un tuyau. L'équation (a) fait connaître le mouvement de la corde dans le sens de sa longueur ou ses *vibrations longitudinales*; les équations (b) et (c) font connaître ses *vibrations tranversales*.

Pour intégrer les équations de la corde vibrante, nous donnerons la forme initiale de la corde, c'est-à-dire les équations de la corde déformée à l'époque $t = 0$. Soient

$$(5) \qquad \xi = \varphi(x), \quad \eta = \chi(x), \quad \zeta = \psi(x)$$

ces équations ; on a de plus

$$(6) \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

pour $t = 0$; et en désignant par l la longueur de la corde

$$(7) \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

quel que soit t pour $x = 0$ et $x = l$.

Si nous posons $\frac{\mathrm{E}g}{\Delta} = a^2$, $\frac{\tau g}{\omega \Delta} = b^2$, les équations (4) prendront la forme

$$(8) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2}.$$

On satisfait à la première de ces formules en prenant

$$\xi = (\mathrm{A}_n \cos nx + \mathrm{B}_n \sin nx)(\mathrm{C}_n \cos nat + \mathrm{D}_n \sin nat).$$

Mais alors on a

$$\frac{d\xi}{dt} = (\mathrm{A}_n \cos nx + \mathrm{B}_n \sin nx)\, na\, (- \mathrm{C}_n \sin nat + \mathrm{D}_n \cos nat).$$

Mais en vertu de (7), si l'on fait $x = 0$ ou $x = l$, cette quantité doit s'annuler. Donc $\mathrm{A}_n = 0$ et $nl = i\pi$, i désignant un entier. Nous prendrons, en conséquence,

$$n = \frac{i\pi}{l} \quad \text{et} \quad \xi = \sin \frac{i\pi x}{l}\left(\mathrm{C}_i \cos \frac{i\pi at}{l} + \mathrm{D}_i \sin \frac{i\pi at}{l}\right).$$

Il est clair que l'on pourra encore prendre

$$\xi = \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left(C_i \cos \frac{i\pi at}{l} + D_i \sin \frac{i\pi at}{l} \right);$$

mais on déduit de cette formule

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \frac{i\pi a}{l} \left(-C_i \sin \frac{i\pi at}{l} + D_i \cos \frac{i\pi at}{l} \right).$$

Si l'on fait $t = 0$, il vient, en vertu de (6),

$$0 = \sum D_i \sin \frac{i\pi x}{l} \frac{i\pi a}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}.$$

On satisfera à cette formule en prenant $D_i = 0$, il reste alors

$$\xi = \sum_{1}^{\infty} C_i \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}.$$

Si l'on fait $t = 0$, on doit avoir, en vertu des formules (5),

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} C_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

et cela entre les limites 0 et l seulement; mais entre ces limites, on a

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \sin \frac{i\pi\alpha}{l}\, d\alpha.$$

On satisfera donc à la question en prenant

$$C_i = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \sin \frac{i\pi\alpha}{l}\, d\alpha;$$

et l'on aura ainsi finalement

$$\xi = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \sin \frac{i\pi\alpha}{l}\, d\alpha.$$

De même on trouverait

$$\eta = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{i\pi x}{l} \cos\frac{i\pi bt}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin\frac{i\pi\alpha}{l}\, d\alpha,$$

$$\zeta = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{i\pi x}{l} \cos\frac{i\pi bt}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \sin\frac{i\pi\alpha}{l}\, d\alpha.$$

ξ, η, ζ sont, comme l'on voit, des fonctions périodiques du temps. Si l'on considère l'un des mouvements simples que la corde est susceptible de prendre, ce mouvement sera donné par les formules

$$\xi = \mathrm{A} \sin\frac{i\pi x}{l} \cos\frac{i\pi at}{l},$$

$$\eta = \mathrm{B} \sin\frac{i\pi x}{l} \cos\frac{i\pi bt}{l},$$

$$\zeta = \mathrm{C} \sin\frac{i\pi x}{l} \cos\frac{i\pi bt}{l}.$$

Lorsque $\frac{xi}{l}$ est entier, c'est-à-dire lorsque $\frac{l}{x}$ divise i, ξ, η, ζ sont nuls, quel que soit t. Aux points correspondant aux abscisses que l'on trouve ainsi, il n'y a pas de mouvement; ces points sont des nœuds. Entre deux nœuds et au milieu de leur intervalle, ξ, η, ζ atteignent leurs valeurs *maxima*. Les points correspondants portent le nom de *ventres*.

La période du mouvement est égale à $\frac{2l}{ai}$ pour la fonction ξ; elle est $\frac{2l}{bi}$ pour les fonctions η et ζ. Ces périodes sont les temps d'une vibration longitudinale et le temps d'une vibration transversale. Si l'on désigne alors par N et N' les nombres de vibrations longitudinales et transversales exécutés en une seconde, on a

$$N = \frac{ai}{2l}, \qquad N' = \frac{bi}{2l},$$

$$N = \frac{i}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Delta}}, \quad N' = \frac{i}{2l}\sqrt{\frac{\tau g}{\omega\Delta}}, \quad \frac{N}{N'} = \sqrt{\frac{E\omega}{\tau}}.$$

EXERCICES.

I. Un polygone plan formé de tiges articulées rigides est tel, que chaque sommet repousse tous les autres avec une force qui varie proportionnellement à la distance; trouver les positions d'équilibre de ce polygone, et décider si ces positions sont des positions d'équilibre stable ou instable. (Examiner le cas où les côtés du polygone sont égaux.)

II. Étudier les petits mouvements d'un liquide pesant contenu dans un tube vertical de forme circulaire. (On supposera que les molécules liquides possèdent la même vitesse dans une même tranche normale au tube.)

III. Un point matériel pesant se trouve placé sur un cercle qui tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical ou incliné sur l'horizon; on suppose que l'axe de rotation passe par le centre du cercle. Existe-t-il pour le point mobile des positions d'équilibre relatif? Ces positions sont-elles stables? sont-elles instables?

IV. Un fil élastique fixé à une de ses extrémités est tendu par un poids p. On propose d'étudier les petits mouvements de ce système lorsque l'on communique au poids p une vitesse verticale v. On admettra, relativement à la force élastique développée dans le mouvement, les lois qui ont servi de point de départ dans la théorie de la vibration des cordes.

V. Tous les éléments d'un cercle sont attirés par deux points fixes situés dans son plan; trouver les positions d'équilibre stable et instable de ce cercle. On supposera l'attraction : 1° constante, 2° proproportionnelle à la distance.

VI. La chaînette est-elle une position d'équilibre stable pour un fil pesant fixé à ses deux extrémités?

VII. Étudier les positions d'équilibre d'un point sollicité par les faces d'un tétraèdre proportionnellement à l'étendue de ces faces et en raison inverse du carré de sa distance aux faces en question.

CHAPITRE VI.

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE A LA THÉORIE DES MACHINES (*).

I. — Considérations générales.

315. Le principe des forces vives fait connaître une des intégrales du mouvement, et l'on peut dire celle qu'il importe le plus de connaître, celle qui intéresse au plus haut degré les praticiens. Du reste, la plupart des machines employées dans l'industrie sont des systèmes à liaisons complètes, et l'on conçoit alors que le principe des forces vives suffise pour faire connaître toutes les circonstances du mouvement.

Une *machine* est un appareil destiné à produire une certaine quantité de travail industriel; ce travail consiste toujours en un déplacement de points matériels. Les points déplacés exercent sur la machine une pression en sens inverse du mouvement qu'ils prennent, et par suite le résultat du *travail industriel* se traduit par un *travail mécanique négatif* produit sur certains points de la machine : ce travail porte le nom de *travail utile*.

La machine elle-même reçoit son mouvement de l'ac-

(*) Nous prions le lecteur de ne pas regarder ce Chapitre comme un cours de Machines; nous avons simplement développé quelques applications des principes de la Mécanique rationnelle exposés dans cet Ouvrage.

tion de points extérieurs; ces points exercent des pressions sur la machine, dont certains points A, A', A'',... se meuvent dans le sens de ces pressions. Il en résulte un *travail mécanique positif* produit en A, A', A'',... : on lui donne le nom de *travail moteur*.

Toute machine est en outre soumise à l'action d'un certain nombre de forces qui produisent un travail négatif. On donne à ce travail le nom de *travail nuisible;* il est produit par les frottements, la résistance des milieux, la raideur des cordes, etc.

Enfin d'autres forces, telles que l'élasticité des matériaux qui composent la machine, les forces produites par le choc, la pesanteur, l'attraction de certaines masses, produisent un certain travail, tantôt positif, tantôt négatif, et que nous désignons par $\pm\Theta$. Nous désignerons par T_m le travail moteur, par $-T_u$ le travail utile, et par $-T_n$ le travail nuisible. Soient v la vitesse d'un point m de la machine à l'époque t, v_0 sa vitesse à l'époque initiale t_0 : le principe des forces vives fournira l'équation

$$(1)\qquad \sum \frac{mv^2}{2} - \sum m\frac{v_0^2}{2} = T_m - T_u - T_n \pm \Theta.$$

v_0 et v restent ordinairement compris entre certaines limites qu'il importe de ne pas dépasser pour ne pas détériorer la machine, tandis que T_m, T_u, T_n croissent indéfiniment, en sorte que l'équation précédente peut se réduire à peu près à

$$0 = T_m - T_u - T_n \pm \Theta.$$

En négligeant les termes $\sum \frac{mv^2}{2}$, $\sum m\frac{v_0^2}{2}$, dont la valeur reste finie, on tire de la formule précédente

$$(2)\qquad T_u = T_m - T_n \pm \Theta.$$

Or je dis que le terme Θ peut être négligé dans cette formule. En effet, les forces élastiques produisent des travaux qui, pendant le temps d'une demi-oscillation de la machine, sont négatifs, et qui, dans la demi-oscillation suivante, sont égaux et de signe contraire aux travaux précédents : donc la partie de Θ relative aux forces élastiques pourra généralement être négligée comme finie vis-à-vis de T_m, T_n, T_u. Toutefois, les matériaux de la machine ne sont pas parfaitement élastiques : dans la période de déformation, le travail des forces élastiques est négatif; dans la période inverse, la valeur absolue du travail est un peu moins grande que dans la première période, en sorte que les forces élastiques engendrent réellement un travail négatif. Maintenant que nous avons reconnu son signe, nous le supposons contenu dans T_n.

Soit H la plus grande distance verticale que peut décrire le centre de gravité de la machine, le travail de la pesanteur sur la machine sera inférieur à PH, P désignant le poids total de la machine. Le travail de la pesanteur reste donc toujours fini.

Si l'on désigne par μ la masse d'un point agissant à distance de la machine, par m la masse d'un point de la machine, par a, b, c les coordonnées du point μ pris par rapport à trois axes rectangulaires, par x, y, z les coordonnées du point m, le travail des forces attractives ou répulsives provenant des masses extérieures sera de la forme

$$\text{(A)}\qquad \Sigma\int m\mu f(r)\,\frac{1}{r}\left[(a-x)\,dx+(b-y)\,dy+(c-z)\,dz\right].$$

$\mu m f(r)$ représente dans cette formule l'action mutuelle des masses μ et m à la distance r, ou

$$\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}.$$

Soit F le maximum de $f(r)$ dans les limites entre lesquelles r peut varier, l'expression (A) restera inférieure à

$$F\Sigma m\mu f[\cos(r,x)\,dx + \cos(r,y) + \cos(r,z)\,dz],$$

ou bien, *à fortiori*, à

$$F\frac{P}{g}M(X+Y+Z),$$

M désignant la masse totale $\Sigma\mu$, X la différence des limites extrêmes entre lesquelles x peut varier, Y la différence des limites extrêmes entre lesquelles y peut varier, et Z la différence des limites extrêmes entre lesquelles z peut varier. Le travail des masses attirantes est donc fini. Par suite, Θ disparaîtra devant les termes T_m, T_u, T_n qui, dans l'équation (2), disparaissent avec le temps. Cette formule (2) devient alors

$$T_u = T_m - T_n.$$

Cette formule montre que si T_m ne croît pas indéfiniment, T_u reste forcément fini et inférieur à T_m, ce qui prouve l'impossibilité du *mouvement perpétuel*, c'est-à-dire d'une machine capable de produire un travail industriel sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir sur cette machine d'autres forces extérieures que les forces résistantes qui produisent le travail utile. $\frac{T_u}{T_m}$ ou $1 - \frac{T_n}{T_m}$ est ce que l'on appelle le *rendement* de la machine ; ce rendement est toujours inférieur à l'unité, mais la machine, toutes choses égales d'ailleurs, est d'autant meilleure que son rendement est plus voisin de l'unité.

On a donné le nom de *kilogrammètre* au travail produit par un poids de 1 kilogramme tombant de 1 mètre de hauteur ; on prend pour unité de travail, dans l'industrie, le cheval-vapeur, qui est un travail de 75 kilogrammètres par seconde. Ainsi, une machine de 10 chevaux est une machine capable de produire dix fois 75 kilogrammètres en une seconde, ou, si l'on veut, d'élever en une seconde 750 kilogrammes à 1 mètre de hauteur.

II. — Conditions de l'établissement d'une bonne machine.

316. Une machine se compose : 1° d'un *récepteur* ou *machine motrice* qui reçoit l'action des forces *motrices*, lesquelles produisent le travail moteur; le *moteur* est l'agent d'où émanent les forces motrices c'est une chute d'eau, la chaleur, un moteur animé, etc.; les machines motrices sont ou des roues hydrauliques, ou des machines à vapeur, etc.; 2° de l'*outil :* c'est la partie de la machine qui produit le travail industriel (laminoirs, marteaux, meules, machines à tisser, etc.); 3° de la *communication de mouvement :* c'est la partie qui sert à relier l'*outil* ou les *outils* à la machine motrice.

La qualité d'une machine dépendra de son prix, du prix de son entretien, etc., mais surtout de son rendement et de sa durée. La durée de la machine sera d'autant plus grande, que les chocs, les vibrations et les frottements seront moins considérables; les chocs et les vibrations déforment les pièces et les rendent cassantes, les frottements les usent. Il est très-remarquable que ces causes, qui diminuent la durée d'une machine, augmentent aussi le travail nuisible T_n, et diminuent le rendement.

Reprenons la formule (1). Lorsque la machine est *mise en train*, v_0 est nul, et la formule (1) se réduit à

$$\sum m\frac{v^2}{2} = T_m - T_u - T_n \pm \Theta,$$

d'où l'on tire

$$T_m = \sum m \frac{v^2}{2} + T_u + T_n \pm \Theta.$$

Cette formule montre que, pour la facilité de la mise en train, il ne faut pas faire travailler la machine; on diminue ainsi le second membre de l'équation de T_u : il faut également que Θ soit le plus petit possible; or la machine, partant du repos, était primitivement dans une position d'*équilibre stable; son centre de gravité était le plus bas possible* (305). Le travail de la pesanteur va donc être négatif, puisque le centre de gravité va s'élever: il faudra donc diminuer autant qu'on le pourra le poids des organes et s'efforcer de donner à la machine des mouvements tels, que son centre de gravité se déplace le moins possible.

Nous ne parlerons point de l'action des masses attirantes, elle est négligeable; et si nous en avons parlé, c'était pour pouvoir démontrer l'impossibilité du mouvement perpétuel dans les machines dans lesquelles on fait intervenir les aimants.

Lorsque la machine *est en train*, si l'on considère deux instants différents, on aura

$$\sum m \frac{v^2}{2} - \sum m \frac{v_0^2}{2} = T_m - T_u - T_n \pm \Theta.$$

Cette équation montre que si le premier membre $\sum m \frac{v^2}{2} - \sum m \frac{v_0^2}{2}$, c'est-à-dire si la variation de la force vive est peu considérable, T_m pourra conserver une valeur à peu près constante (pourvu toutefois que le travail de la pesanteur Θ soit faible) pour un même travail utile T_u. Si, depuis l'époque t_0 jusqu'à l'époque t, le centre de gravité de la machine s'abaisse, $\pm \Theta$ sera positif; il faudra alors tâcher que $\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2$ soit positif dans cette période plutôt que dans la période pendant laquelle $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2$ serait négatif. Toutefois, si l'on pouvait réduire Θ et $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2$ à o, c'est-à-dire faire mouvoir le centre de gravité de la machine dans un plan horizontal et obtenir un mouvement uniforme, cela n'en vaudrait que mieux, parce que les variations de vitesse produisent des variations dans la valeur des forces d'inertie, et par suite dans les tensions des organes de la machine. Ces variations de tensions occasionnent des vibrations qui se traduisent en travail nuisible, comme nous l'avons déjà dit.

Le travail nuisible T_n doit être diminué autant que possible, car le rendement est d'autant plus grand que T_n est plus petit. On diminuera T_n en simplifiant les transmissions de mouvement, parce que, ainsi, l'on diminuera l'étendue des surfaces en contact et par suite les frottements; on diminuera les pièces vibrantes, et enfin le nombre des chocs. Enfin on diminuera T_n en graissant les parties frottantes, en diminuant leur étendue, etc.; lorsque des pièces seront assujetties à se mouvoir dans l'eau, on diminuera la résistance de ce fluide en évitant de donner aux points des surfaces noyées une vitesse normale à ces surfaces, enfin en diminuant leur nombre et leur étendue.

Remarque. — De cette discussion résulte un fait paradoxal, mais pleinement confirmé par l'expérience. Lorsque l'on cherche à pulvériser une substance, l'emploi des meules sera généralement plus économique et meilleur que celui des pilons. En effet, les pilons produisent des chocs considérables sur des corps peu élastiques, d'où perte de travail; pendant que le pilon travaille, le moteur travaille aussi, mais en pure perte, puisqu'il n'agit pas sur le pilon abandonné à son propre poids : les meules ne sont soumises à aucun de ces inconvénients.

III. — Des volants.

317. Nous avons déjà fait observer que la régularité du mouvement était l'une des conditions de l'établissement d'une bonne machine : on peut obtenir cette régularité au moyen de volants. Les volants sont des roues très-grandes et très-pesantes que l'on place sur des arbres de la machine dont on veut régulariser le mouvement. La force vive du volant est égale à son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation multiplié par le carré de sa vitesse angulaire; si donc le moment d'inertie d'un volant est très-grand pour une variation donnée de force vive : $T_m - T_u - T_n \pm \Theta$, la variation de la vitesse angulaire du volant sera petite, et par suite la variation de la vitesse des organes de la machine sera elle-même petite.

Pour calculer les dimensions d'un volant, on se donne les vitesses extrêmes entre lesquelles on consent de faire varier sa vitesse angulaire. En désignant par ω et ω' ces vitesses extrêmes, la variation maxima de la force vive du volant sera $(\omega^2 - \omega'^2)\frac{I}{2}$, I désignant son moment d'inertie, ou bien $(\omega - \omega')\frac{\omega + \omega'}{2}I$. Cette variation de force correspond à une variation donnée Δ dans le travail moteur et dans le travail résistant. En posant alors

$$(\omega - \omega')\frac{\omega + \omega'}{2} I = \Delta,$$

on en déduit I le moment d'inertie du volant. On voit que si $\omega - \omega'$ est très-petit, $\omega + \omega'$ devra être assez grand. Il y aura donc intérêt, pour ne pas trop augmenter les dimensions du volant, à placer cet appareil sur un arbre qui tourne avec rapidité. I étant connu, la forme du volant comporte encore une grande indétermination, que l'on lèvera en partie en faisant en sorte que le volant résiste aux tensions et aux tractions dues aux forces d'inertie.

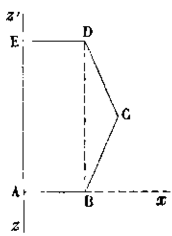
IV. — Des régulateurs.

318. Aujourd'hui, on tend à abandonner les volants : 1° ces appareils absorbent une grande force vive et rendent presque impossible l'arrêt brusque d'une machine ; 2° les volants sont lourds, pèsent sur les arbres et occasionnent des frottements considérables, d'où production de travail nuisible ; 3° ils ont enfin l'inconvénient de prendre beaucoup de place et de présenter quelques dangers pour la sécurité des ouvriers.

Les régulateurs ne présentent aucun de ces inconvénients, et ils sont de plus d'une installation facile. Nous ne parlerons ici que des régulateurs à force centrifuge.

Un régulateur à force centrifuge se compose d'un polygone ABCDE (*fig.* 44) formé de tiges articulées

Fig. 44.



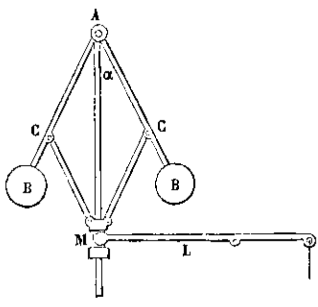
en B, C, D ; ce polygone est lié en A à un axe de rotation vertical zz' mû par la machine. Ce polygone porte des masses pesantes, et le point E peut se mouvoir verticalement par l'intermédiaire d'un manchon qui embrasse l'axe et peut glisser à frottement doux. Sous l'influence de la force centrifuge, les points les plus éloignés de l'axe tendent à s'écarter, le point E s'abaisse et agit sur un levier qui modifie l'action du moteur. Dans une machine à vapeur, par exemple, le levier en question ouvrira ou fermera une soupape qui donne accès à la vapeur. L'action du moteur se trouvant diminuée, le point E va s'élever, le levier agira en sens inverse sur la soupape d'admission, et donnera plus d'accès à la vapeur.

On conçoit ainsi comment un appareil de ce genre peut servir à régulariser l'action du moteur, et par suite le mouvement même de la machine.

Le premier régulateur à force centrifuge a été construit par Watt. Voici la disposition et la théorie très-imparfaite que l'on donnait autrefois de cet appareil.

Sur un axe AM (*fig.* 45) lié à la machine se trouvent articulées deux tiges symétriques AC portant en B deux

Fig. 45.



masses pesantes de poids p. Ces tiges sont articulées avec deux autres tiges MC, articulées elles-mêmes avec un manchon M mobile le long de l'axe.

Si l'on néglige la masse des tiges (ce qui n'est pas permis dans une théorie bien faite), si l'on pose $AB = l$, et si l'on désigne par ω la vitesse angulaire de régime, l'appareil devra être en équilibre relatif quand la vitesse sera ω.

Les seules forces agissant sur B sont la force centrifuge et le poids p; car la force centrifuge composée est nulle dans le cas de l'équilibre relatif. La résultante des forces en question devra alors être dirigée suivant AC. Si l'on pose $\alpha = \text{MAC}$, la force centrifuge sera $\frac{p}{g}\omega^2 l \sin\alpha$, sa composante perpendiculaire à AC est $\frac{p}{g}\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha$. La composante de la force p, dans la même direction, est $p\sin\alpha$; on devra donc avoir

$$\frac{p}{g}\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha = p\sin\alpha,$$

ou bien

$$\frac{\omega^2 l}{g}\cos\alpha = 1.$$

On en conclut que, pour que l'appareil se mette en équilibre, il faut que

$$\frac{\omega^2 l}{g} > 1;$$

lorsque l satisfera à cette condition, il existera un angle α d'équilibre.

Remarquons que le résultat auquel nous arrivons est indépendant du poids p. Ce résultat, pratiquement inadmissible, montre que nous avons fait une mauvaise théorie. Du reste, le régulateur de Watt présente un inconvénient grave : il n'est pas *isochrone*. On dit qu'un régulateur est *isochrone* lorsqu'il reste en équilibre dans toutes ses positions, pourvu que l'on ait atteint la vitesse angulaire ω, qui convient à la machine, ou *vitesse de régime.*

L'isochronisme est une condition importante à laquelle doit satifaire un bon régulateur. En effet, lorsque la machine possède sa vitesse de régime, elle fonctionne dans de bonnes conditions. Au moment où cette vitesse est atteinte, si le régulateur n'est pas en équilibre, il va fonctionner; la vitesse cessera d'être celle du régime, et il se produira une série d'oscillations avant que la machine puisse fonctionner régulièrement : ces oscillations ne se produiront pas si l'on possède un régulateur isochrone.

Divers moyens ont été proposés pour assurer l'isochronisme. M. Farcot en négligeant le poids des tiges, M. Foucault à l'aide de tâtonnements, parvinrent à donner des régulateurs à peu près isochrones. Mais c'est à M. Yvon Villarceau que l'on doit la première théorie bien faite du régulateur à force centrifuge. M. Yvon Villarceau a bien voulu mettre son travail, encore inédit, à ma disposition, et je saisis cette occasion pour le remercier.

L'analyse de cet habile géomètre est trop longue pour pouvoir être donnée complétement dans un Ouvrage didactique. Je me bornerai à indiquer la marche qu'il a suivie dans son travail.

Nous prendrons $AB = ED = p$, $BC = CD = l$ (*fig.* 44), et nous désignerons par α l'angle $CDB = DBC$. Pour que le régulateur soit isochrone, il faut qu'il soit en équilibre relatif pour toutes les valeurs de α sous l'influence des forces réelles et fictives qui le sollicitent. Ces forces sont : 1° la pression du levier qui s'exerce en E; 2° le poids des divers organes; 3° les forces centrifuges; 4° les forces centrifuges composées. Mais il n'est pas nécessaire d'évaluer ces dernières, qui disparaissent de l'équation du travail, puisqu'elles sont normales aux vitesses relatives de leurs points d'application.

1° Soit m un point lié à BC; les coordonnées de ce point, pris par rapport à Az' et à AB, seront de la forme

$$p + r\sin(\alpha + \beta), \quad p + r\cos(\alpha + \beta);$$

le travail de la pesanteur sur ce point sera

$$- mg\,d.r\cos(\alpha + \beta);$$

le travail de la force centrifuge sera

$$m\omega^2 r\sin(\alpha + \beta)\,d.r\sin(\alpha + \beta).$$

2° Soit m' un point lié à CD; ses coordonnées seront de la forme

$$p + l\sin\alpha + r'\sin(\alpha + \beta'), \quad p + l\cos\alpha - r'\cos(\alpha + \beta').$$

Pour ce point m', le travail de la pesanteur sera

$$m'gd[l\cos\alpha - r'\cos(\alpha + \beta')],$$

celui de la force centrifuge

$$m'\omega^2[l\sin\alpha + r'\sin(\alpha + \beta')]\,d[l\sin\alpha + r'\sin(\alpha + \beta')].$$

3° Soit m'' un point lié à DE; le travail de la pesanteur sur ce point sera de la forme

$$2m''g\,dl\cos\alpha,$$

le travail de la force centrifuge sera nul.

4° Le travail de la pression du levier en E sera de la forme

$$\pm 2\frac{\mathrm{N}}{n}\,d.l\cos\alpha,$$

N désignant la pression totale du levier et n le nombre de systèmes analogues au système ABCDE dont se compose le régulateur (ces systèmes sont ordinairement au nombre de deux comme dans le régulateur de Watt, mais on a construit des régulateurs formés de trois systèmes analogues).

En résumé, la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur le régulateur est de la forme

$$\begin{bmatrix} A_0 + A_1\cos\alpha + A_2\cos 2\alpha \\ + B_1\sin\alpha + B_2\sin 2\alpha \end{bmatrix} d\alpha,$$

et pour que cette quantité soit nulle quel que soit α, il faut, d'après un théorème connu de calcul intégral, que

$$(1)\qquad A_0 = 0,\quad A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad B_1 = 0,\quad B_2 = 0.$$

On a ainsi les conditions de l'isochronisme. Les équations précédentes contiennent, comme indéterminées, les poids et la forme des masses du régulateur, les dimensions des tiges, la quantité p et les distances des masses à l'axe zz'. Les indéterminées qui entrent dans la question sont évidemment en nombre illimité, et l'on peut toujours satisfaire au système (1).

M. Villarceau conseille de laisser sur le régulateur de petites masses que l'on peut déplacer au moyen d'un pas de vis, de manière à pouvoir régler cet appareil, dans le cas où l'on aurait commis quelque erreur soit dans la détermination de la masse, soit dans la détermination du moment d'inertie des diverses pièces.

Le lecteur qui voudrait approfondir l'étude des régulateurs devra consulter le Mémoire de M. Villarceau, qui ne tardera point à paraître, nous l'espérons.

V. — Du frottement.

319. L'expérience prouve que, lorsque l'on veut faire glisser les surfaces planes de deux corps solides l'une contre l'autre, il faut appliquer à l'un d'eux une force finie, tandis que, théoriquement, il ne devrait exister aucune résistance au mouvement.

La cause de ce phénomène n'est pas encore très-bien expliquée; quoi qu'il en soit, ne considérons qu'un simple point matériel assujetti à se mouvoir sur la surface d'un solide naturel ou sur une courbe tracée sur un solide naturel; ce point ne se mettra généralement pas en mouvement si on lui applique une force très-petite tangentiellement à la surface sur laquelle il repose. Soit F la plus petite force tangentielle capable de produire le mouvement : la force égale et directement opposée à F est ce que l'on appelle le *frottement au départ*.

Pendant le mouvement, on constate que la résultante de la force qui sollicite le point et de sa force d'inertie n'est pas normale à la courbe; la composante tangentielle de cette résultante prise en sens contraire est ce que l'on appelle le *frottement pendant le mouvement*.

Nous admettons comme un fait expérimental que :

Le frottement d'un point matériel assujetti à demeurer sur la surface d'un solide naturel est proportionnel à la composante normale de la force qui sollicite ce point matériel.

Ainsi, en désignant par N la composante normale de la force qui sollicite un point, et par F le frottement, on a

$$F = Nf.$$

Le facteur f, qui reste constant pour un même point matériel en contact avec un même solide homogène, est ce que l'on appelle le *coefficient de frottement*. Si l'on pose

$$f = \tang\varphi,$$

φ est ce que l'on appelle l'*angle de frottement*.

On dit quelquefois que :

Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

Cette locution a besoin d'être expliquée. Supposons deux solides en contact suivant une surface plane d'étendue ω. Soit P la résultante des pressions normales dP, agissant sur chaque élément, la pression dP va produire un frottement fdP dirigé en sens inverse du mouvement; par suite, si le mouvement relatif des surfaces en contact est une translation, la résultante des frottements sera $\int fd$P ou fP : il sera donc indépendant de la surface ω. L'expérience a vérifié cette proposition.

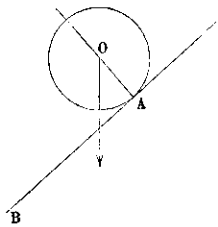
Lorsqu'un solide naturel est placé sur un autre solide de façon à pouvoir rouler sur lui, on observe qu'il faut généralement appliquer une force finie à ce solide pour le faire rouler, ce qui s'explique en admettant que la réaction du second solide sur le premier ne passe pas par le point de contact, mais un peu en avant. La distance du point de contact au point d'application de la réaction croît à mesure que la force qui tend à déplacer le solide croît, jusqu'au moment où le roulement commence. A ce moment la distance en question a atteint une valeur σ que nous appellerons *coefficient de roulement au départ*. Lorsque le mouvement s'est produit, la distance diminue brusquement et atteint une valeur σ' que l'on appelle *coefficient de roulement pendant le mouvement*.

Les lois sur le frottement et le roulement ont été établies expérimentalement par divers physiciens ; les expériences les plus célèbres sur ce sujet sont celles de Coulomb et de M. Morin. Nous ne décrirons pas ces expériences bien connues du lecteur; nous ferons seulement observer que les lois du frottement sont des lois approchées, et que l'on ne doit pas les appliquer dans des cas singuliers, tels que le frottement d'une lame tranchante. ou d'un poinçon sur un autre corps, etc.

VI. — Du plan incliné (*).

320. Considérons une sphère O placée sur un plan incliné AB, et simplement sollicitée par son poids. Nous allons essayer de déterminer son mouvement. Soient f le coefficient de frottement, σ le coefficient de roulement,

Fig. 46.



θ, θ' des quantités au plus égales à 1, R le rayon de la sphère, i l'angle du plan incliné avec l'horizon, M la masse de la sphère, et μ son moment d'inertie principal relatif au point O.

Les forces qui sollicitent notre sphère sont : 1° son poids Mg; 2° la réaction du plan qui passe à la distance $\theta\sigma$ du point A; 3° le frottement $Mg\theta' f \cos i$ qui agit tangentiellement au plan.

Le centre de gravité de la sphère est donc sollicité au mouvement le long du plan incliné par une force

$$Mg \sin i - Mg\theta' f \cos i,$$

(*) Je renouvelle ici l'observation faite au commencement du Chapitre. Je n'ai pas l'intention de faire une théorie, même abrégée, des organes des machines. En étudiant quelques mécanismes simples sans les classer, j'ai pour but de mieux faire comprendre les principes de la Mécanique rationnelle en les appliquant à des questions pratiques.

et la sphère elle-même tendra à tourner autour de son centre de gravité (47) sous l'influence d'un couple ayant pour moment

$$Mg\theta' f \cos i . R - Mg \cos i . \sigma\theta.$$

Si le roulement a lieu, on aura $\theta = 1$, et l'équation du mouvement sera, en désignant par ω la vitesse angulaire de la sphère autour du point O (276),

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mg\theta' f \cos i . R - Mg \cos i . \sigma}{\mu},$$

ou, en observant que $\mu = \frac{2}{5} MR^2$ (150),

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{5g \cos i}{2R^2}(\theta' f R - \sigma).$$

Le mouvement effectif de la sphère, dans le temps dt, est une rotation autour de l'axe instantané qui passe au point de contact A; ce mouvement peut être remplacé par une rotation ω passant en O et par une translation $R\omega$ (24, 29), en sorte que la vitesse du point O sera $R\omega$, et son mouvement sera donné par la formule

$$MR \frac{d\omega}{dt} = Mg \sin i - Mg\theta' f \cos i,$$

ou

$$(2) \qquad R \frac{d\omega}{dt} = g \sin i - g\theta' f \cos i.$$

De cette formule et de (1) on tire

$$(3) \qquad \frac{5 \cos i}{2R}(\theta' f R - \sigma) = \sin i - \theta' f \cos i;$$

et par suite

$$\theta' = \frac{5\sigma \cos i + 2R \sin i}{7 f R \cos i}.$$

Pour que le roulement ait lieu sans glissement, il faut que $\theta' < 1$, ou que

$$7f\mathrm{R}\cos i > 5\sigma\cos i + 2\mathrm{R}\sin i,$$

ou, si l'on veut,

$$7f\mathrm{R} - 5\sigma > 2\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,i.$$

Pour qu'il y ait glissement sans roulement, il faudrait que $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ou que, en prenant $\theta' = 1$,

$$f\mathrm{R} - \sigma\theta = 0.$$

On en tire

$$\theta = \frac{f\mathrm{R}}{\sigma}.$$

On doit donc avoir

$$1 < \frac{f\mathrm{R}}{\sigma} \quad \text{ou} \quad \sigma > f\mathrm{R}.$$

Cette formule n'est satisfaite pour aucun corps connu, en sorte qu'une bille placée sur un plan incliné roule toujours. On pourrait craindre que, pour de très-petites sphères, il y ait glissement; mais nous rappellerons que les lois du frottement ne s'appliquent pas aux cas singuliers de ce genre.

On verra facilement comment on peut modifier la théorie précédente lorsque la sphère, au lieu d'être soumise à la seule action de son poids, est encore sollicitée par une force constante quelconque.

VII. — Du treuil.

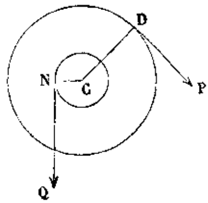
321. Le treuil est une machine composée de deux cylindres ayant même axe et invariablement liés l'un à l'autre. Ces cylindres sont terminés par des *tourillons*, consistant en cylindres plus petits qui reposent sur des *coussinets*, c'est-à-dire sur la surface concave de cy-

lindres creux de rayons à peu près égaux à ceux des tourillons.

Le treuil, comme l'on sait, est employé à divers usages, et en particulier à l'extraction des minerais. A cet effet, sur l'un des cylindres (nous verrons tout à l'heure lequel) on enroule une corde qui doit porter le minerai à extraire, et l'on agit tangentiellement à la circonférence de l'autre cylindre par divers moyens, de manière à enrouler davantage la corde sur le premier cylindre.

Représentons le treuil par une projection perpendiculaire à son axe. Soient P et Q les forces qui agissent tan-

Fig. 47.



gentiellement aux deux cylindres. Nous supposerons que Q soit la *résistance*, c'est-à-dire le poids à soulever, P sera alors l'effort qui tend à faire mouvoir le treuil.

Les forces qui agissent sur l'appareil sont : 1° les forces P et Q; 2° le poids ϖ du treuil; 3° les réactions normales des coussinets; 4° les frottements des tourillons sur les coussinets. Les réactions normales se détermineront d'après les règles de la Statique; elles dépendront de la position du centre de gravité du treuil. Ces réactions sont faciles à calculer : nous les désignerons par N et N'.

Ceci posé, soient p et q les rayons des cylindres sur lesquels agissent P et Q, et r le rayon des tourillons. Si l'on suppose le mouvement uniforme et si l'on désigne par f le coefficient de frottement relatif aux tourillons, le frottement produit sur les tourillons sera sur le premier coussinet fN, sur le second fN'. Dans un déplacement angulaire infiniment petit $d\alpha$, les travaux de ces frottements seront $fNrd\alpha$ et $fN'rd\alpha$, en sorte que l'on aura, pour l'équilibre des forces qui agissent sur le treuil,

$$Pp - Qq - fr(N + N') = 0.$$

Le travail nuisible est ici $-fr(N + N')$. Pour le diminuer autant que possible, il faudra prendre r aussi petit que l'on pourra, diminuer f par l'interposition d'un bon enduit, diminuer N et N′ en diminuant le poids ϖ du treuil; enfin il faudra s'arranger de telle sorte que la résultante des forces P, Q, ϖ soit minima; il y aura ainsi avantage, si l'on peut, à faire agir la force P de bas en haut en un point situé entre le point d'application de Q et le centre de gravité de l'appareil.

Si le treuil est destiné à soulever un poids considérable, il faudra appliquer la force P au cylindre qui a le plus grand rayon; on augmentera ainsi le travail Pp de la force motrice. Toutefois, il ne faudra pas exagérer la valeur du rapport $p : q$ pour ne pas trop ralentir le mouvement du poids Q.

L'axe du treuil a souvent une position verticale : le treuil porte alors le nom de *cabestan*.

Pour le cabestan, l'équation du travail n'est pas la même que pour le treuil, parce que le frottement n'agit plus de la même façon. En effet, le treuil est alors terminé à sa partie inférieure par un cylindre ou *pivot* qui repose sur une plate-forme appelée *crapaudine*. Le frottement des tourillons se calculera comme tout à l'heure; quant au frottement du pivot, il est facile à estimer. En effet, décomposons le cercle de contact du pivot et de sa crapaudine en éléments infiniment petits $\rho\, d\theta\, d\rho$, ρ désignant la distance de l'élément au centre du cercle de contact et θ l'angle que fait le rayon ρ avec un axe fixe. Soient f le coefficient de frottement et R le rayon du cercle de contact; la pression totale est due au poids ϖ du treuil, et on peut admettre que la pression sur l'élément $\rho\, d\theta\, d\rho$ est

$$\varpi \frac{\rho\, d\theta\, d\rho}{\pi R^2};$$

le frottement correspondant est donc

$$\varpi f \frac{\rho\, d\theta\, d\rho}{\pi R^2};$$

le travail de ce frottement dans le déplacement $d\alpha$ est

$$\varpi f \frac{\rho^2\, d\theta\, d\rho}{\pi R^2}\, d\alpha.$$

Par conséquent, le travail relatif à la totalité de la surface de contact sera

$$\frac{\varpi f}{\pi R^2}\, d\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \rho^2\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{3}\varpi f R \frac{d\alpha}{\pi}.$$

On diminuera le travail du frottement en prenant R très-petit. Il ne faudrait cependant pas prendre $R = 0$ et faire reposer le cabestan sur une pointe, parce que les lois du frottement ne s'appliquent pas à ce cas, et parce que l'appareil ne tarderait pas à se dégrader.

La théorie de la poulie se fait comme celle du treuil, les deux appareils ne différant pas essentiellement l'un de l'autre.

VIII. — Du levier.

322. Le levier est une machine qui a joué un rôle important dans l'histoire de la science. A proprement parler, le levier est un solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe. Les conditions d'équilibre d'un levier sont tellement simples, que, dans les cours de Mécanique rationnelle, on en fait à peine mention. Toutefois le levier intervenait souvent, comme moyen de démonstration, dans les théories des anciens : Archimède surtout en a tiré un très-bon parti. (Lire à ce sujet le commencement de la *Mécanique analytique* de Lagrange.)

Aujourd'hui le levier a perdu son importance théorique, et il ne se trouve plus guère étudié que dans les Ouvrages de Physique ou de Mécanique très-élémentaires; mais il a encore conservé une grande importance dans la pratique, car il permet de transformer une force relativement petite en une autre beaucoup plus considérable.

Le frottement dans le levier peut se produire de plusieurs manières, suivant la disposition que l'on donne à l'appareil. Si, par exemple, le levier se réduisait à une barre percée d'un trou et mobile autour d'un axe engagé dans ce trou, le frottement de l'axe contre le levier se calculerait comme le frottement d'un tourillon sur un coussinet, etc.

IX. — Des courroies.

323. Les courroies sont employées fréquemment comme organes de transmission de mouvement d'un arbre à un autre. Elles offrent sur les engrenages un grand avantage : elles sont d'un prix peu élevé, et, au moyen de dispositions bien simples, on peut interrompre brusquement la communication du mouvement.

Les courroies jouissent d'une propriété analytique très-remarquable. Considérons en effet une courroie enroulée sur un cylindre de rayon R; désignons par f le coefficient de frottement de la courroie sur le cylindre. Soit T_0 la tension qui s'exerce à l'une des extrémités de la courroie; calculons la tension T_1 qui doit être exercée à l'autre extrémité pour assurer l'équilibre.

Soit T la tension exercée en un point M de l'arc embrassé par la courroie; au point infiniment voisin M', la tension sera $T + dT$; l'élément MM' est soumis à l'action de quatre forces : 1° les tensions T et $T + dT$ qui agissent à ses extrémités; 2° la pression normale du cylindre N; 3° le frottement Nf.

Pour évaluer la pression en M, projetons toutes les forces sur le rayon du cylindre passant en M. Soit ds l'arc MM', la projection de la tension en M' sera

$$(T + dT)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{ds}{R}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{T\,ds}{R};$$

la projection du frottement est du second ordre. On peut la négliger; on a donc

$$N = T\frac{ds}{R}.$$

Par suite, le frottement sera

$$fT\frac{ds}{R}.$$

Si l'on donne alors à la courroie un déplacement infiniment petit δs, le travail des tensions intérieures sera nul, ainsi que le travail des forces N; on aura alors

$$T_0\,\delta s - T\,\delta s - \delta s\int_0^s fT\frac{ds}{R} = 0.$$

Si l'on ôte le facteur δs et si l'on différentie par rapport à s, on aura

$$dT + fT\frac{ds}{R} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dT}{T} = -\frac{f\,ds}{R},$$

ou bien

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 e^{-\frac{fs}{\mathrm{R}}}.$$

La tension varie donc en progression géométrique quand l'arc s varie en progression arithmétique.

Ceci explique comment il se fait qu'à l'aide d'une corde enroulée autour d'un piquet on est capable de résister à une traction très-considérable exercée à l'autre extrémité, et comment il se fait que la résistance que l'on éprouve diminue si rapidement avec l'amplitude de l'arc embrassé par la corde.

Le travail du frottement dans la courroie est

$$-\,\delta s\int_0^s f\mathrm{T}\,\frac{ds}{\mathrm{R}} = -\,\delta s\int_0^s f\mathrm{T}_0\, e^{-\frac{fs}{\mathrm{R}}}\,\frac{ds}{\mathrm{R}},$$

ou

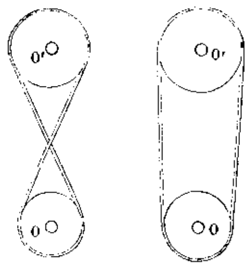
$$-\,\delta s\,\mathrm{T}_0\left(1 - e^{-\frac{fs}{\mathrm{R}}}\right).$$

On le diminuera en rendant le rapport $\frac{s}{\mathrm{R}}$ minimum.

Cherchons encore la solution de ce problème qui se présente souvent dans la pratique.

Deux arbres O et O′ (*fig.* 48) portent chacun une *poulie* sur la circonférence de laquelle vient s'enrouler

Fig. 48.



une courroie tendue. Soient R et R′ les rayons des poulies, P la force mouvante agissant sur la poulie O à la distance p de l'axe, P' la force résistante agissant sur la poulie O' à la distance p' de son axe; soient enfin ρ et ρ' les rayons des tourillons des deux poulies, f le coefficient de frottement des courroies sur les poulies, φ le coefficient de frottement relatif aux tourillons.

Supposons le régime uniforme établi, et soient T et T' les tensions des deux brins de la courroie; prenons le sens du mouvement pour sens direct; les travaux du frottement sur les tourillons sont faciles à calculer en fonction de P, P', T et T'. Nous les représenterons par $-f\rho\psi(T, T')$ et par $-f\rho'\psi'(T, T')$, ou simplement par $-f\rho\psi$ et $-f\rho'\psi'$. Nous aurons alors, en écrivant l'équation du travail pour chaque poulie,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &Pp - (T - T')R - f\rho\psi = 0,\\ &-P'p' + (T - T')R' - f\rho'\psi' = 0,\end{aligned}\right.$$

en admettant que les courroies ne glissent pas sur les poulies. Pour que ce glissement ne soit pas possible, il suffit que le frottement des courroies soit plus grand que celui qui peut permettre le glissement ou que la force T' soit supérieure à celle qui produirait le glissement. On devra donc avoir

$$T' > Te^{-\frac{sf}{R}},\quad T' > Te^{-\frac{s'f}{R'}},$$

s et s' désignant les arcs embrassés par la courroie. Soient μ le plus petit des nombres $\frac{s}{R}$, $\frac{s'}{R'}$, et θ une quantité moindre que 1; on posera

$$(2)\qquad T' = Te^{-\theta\mu f}.$$

Les équations (1) et (2) permettront alors de calculer T, T' et P quand on se donnera P', R, ..., c'est-à-dire de calculer la puissance nécessaire pour vaincre avec l'appareil une résistance donnée.

X. — Théorie des engrenages.

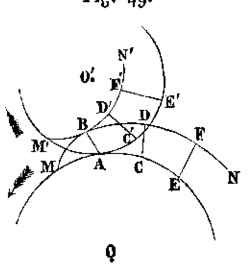
324. Pour communiquer un mouvement de rotation d'un arbre à un autre, on remplace souvent les courroies par des engrenages ou par de simples cylindres de friction. Nous ne parlerons ici que des engrenages. Ces appareils sont, comme l'on sait, des roues dentées; les dents de l'une, pénétrant dans les creux de l'autre, l'entraînent dans son mouvement.

Les bons engrenages sont généralement préférables aux courroies, en ce sens qu'ils utilisent mieux le travail moteur; mais ils sont plus coûteux, plus difficiles à réparer.

Une des conditions auxquelles doit satisfaire une bonne machine, c'est de fonctionner régulièrement et d'éviter les chocs. On évitera les chocs en s'arrangeant de telle sorte, que les roues soient toujours en contact. Il faudra aussi faire en sorte que, l'une des roues marchant uniformément, l'autre soit également animée d'un mouvement uniforme. Voyons comment on pourra satisfaire à cette double condition.

Supposons qu'il s'agisse de deux roues à axes paral-

Fig. 49.



lèles. Considérons une projection du système sur un plan perpendiculaire aux axes. Soient O et O′ (*fig.* 49) les projections des axes; donnons-nous les vitesses angulaires ω et ω' des deux roues; prenons sur la droite OO′ un point A, tel que l'on ait

$$OA.\omega = O'A.\omega',$$

et soient $OA = R$, $O'A = R'$. Les deux circonférences ME et M′E′ de rayons R et R′ décrites de O et O′ comme centres seront tangentes. On leur donne le nom de *circonférences primitives des engrenages*. Le mouvement relatif du système est le même que si, la circonférence O restant fixe, la circonférence O′ roulait sans glisser sur celle-ci. En effet, communiquons au système un mouvement de rotation $-\omega$ en sens inverse du mouvement de la roue O; celle-ci va rester immobile, mais la roue O′ va être animée de deux rotations ω et $-\omega'$, qui se composeront en une seule $\Omega = \omega - \omega'$ appliquée en un point A, tel que

$$OA.\omega = O'A.\omega';$$

en sorte que le centre instantané de rotation sera en A, et la circonférence O′ va rouler sur O sans glisser.

C. Q. F. D.

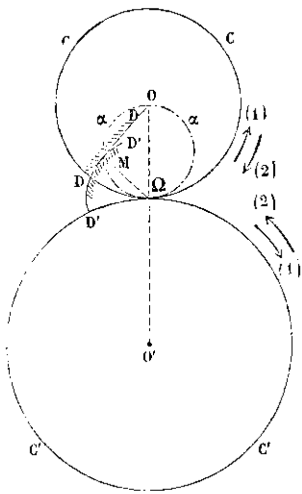
Maintenant donnons-nous le profil d'une dent de la roue O′. Soit M′B′D′N′... ce profil; le profil de la dent de la roue O devra être tangent et rester tangent à la courbe M′B′D′N′ pendant toute la durée du mouvement. Le profil cherché devra donc avoir pour enveloppe le profil donné. Mais on a vu (n° 202) que le point de contact d'une courbe mobile avec son enveloppe était le pied de la normale qui passe par le centre instantané. Pour résoudre la question, il suffira donc de mener diverses normales BA, D′C′, F′E′,... au profil donné, de prendre des arcs AC, CE,... égaux à AC′, C′E′,... respectivement, et de mener par les points de division des droites

CD, EF,... respectivement égales à C′D′, E′F′,... et faisant, avec la circonférence O, des angles respectivement égaux à ceux que font C′D′, E′F′,... avec la circonférence O′.

Si l'on prend pour la courbe M′N′ un cercle ayant son centre en un point de la circonférence O′, on aura ce que l'on appelle un *engrenage à lanterne.* Il est facile de trouver le profil de la dent de la roue O. En effet, le centre du profil donné décrit une épicycloïde; le profil cherché peut donc s'obtenir en faisant mouvoir le centre d'un cercle sur une épicycloïde facile à construire, et en cherchant l'enveloppe de ce cercle, ce qui est très-simple au point de vue graphique.

Si l'on remplace la courbe M′N′ par un rayon du

Fig. 50.



cercle mobile O, l'enveloppe de ce rayon s'obtiendra en abaissant du point de contact des circonférences primitives Ω une perpendiculaire sur le rayon qui sert de profil (p. 285); le lieu du pied de cette perpendiculaire sera le profil de la roue O. Ce lieu est une épicycloïde. En effet, soient D et D' (*fig.* 50) les points qui étaient primitivement en contact lorsque le rayon du cercle O', que l'on a pris pour profil, passait en O. Soit $O'_1M'_1$ la position actuelle de ce rayon. Si du point de contact Ω des deux cercles on abaisse ΩM perpendiculaire sur OD, le lieu du point M sera, comme nous l'avons vu, le profil cherché. Or le cercle qui a $O\Omega$ pour diamètre passe en M, et l'arc ΩM de ce cercle est égal à ΩD. En effet,

$$\Omega D = R.MO\Omega,$$

$$\Omega M = \frac{R}{2} 2 MO\Omega;$$

donc $\Omega D = \Omega M$; donc aussi $\Omega D' = \Omega D$. Le lieu du point M est donc engendré par le point M d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur le cercle O. Ainsi le profil cherché est une portion d'épicycloïde. En vertu du théorème de Lahire, ΩD, profil donné, peut être engendré par le point M lorsque le cercle $OM\Omega$ roule sur le cercle O'.

Cette propriété est générale, et si l'on considère une courbe quelconque roulant successivement sur le cercle fixe O et sur le cercle mobile, un point M de cette courbe engendrera deux courbes qui pourront être prises pour profils. En effet ces deux courbes auront toujours même normale $M\Omega$, et par suite seront tangentes.

Cherchons maintenant à déterminer le profil par cette condition, que la normale commune reste fixe dans le mouvement absolu des roues d'engrenage.

La condition, un peu singulière au premier abord, que nous nous imposons maintenant fournit les meilleurs engrenages. En voici la raison : Considérons une des roues O′ et faisons tout à fait abstraction de l'autre. Si l'on fait tourner O′, il existera une droite fixe toujours normale à la dent. Prenons maintenant une roue *quelconque dont le profil des dents jouisse de la même propriété*. Il suffira de placer cette roue en contact avec O′ pour obtenir un engrenage fonctionnant dans de bonnes conditions. Ainsi l'engrenage dont nous allons chercher le profil va présenter des avantages immenses : 1° si l'on casse une des roues et si l'on a une roue quelconque jouissant de la propriété en question, on pourra la substituer à la roue cassée; 2° si les axes O et O′ venaient à s'écarter l'un de l'autre, l'engrenage fonctionnerait encore dans de bonnes conditions.

La solution du problème qui nous occupe est bien simple. Dans le mouvement relatif, la normale au profil de la dent de la roue O′ devra couper le cercle O sous un angle constant; cette normale sera donc tangente à un cercle concentrique de O, et par suite sera une développante de cercle; pour la même raison, le profil de la roue O sera aussi une développante de cercle.

Passons maintenant à l'étude de la transmission du travail dans les engrenages; bornons-nous à évaluer le travail du frottement des dents (*fig.* 49). Nous pouvons substituer, pour évaluer ce travail, le mouvement relatif au mouvement absolu. Le mouvement de la dent mobile sur la dent fixe se réduit à un roulement et à un glissement; on peut négliger le roulement pour ne tenir compte que du glissement.

Or, si l'on considère le point B pendant le temps dt, ce point glisse sur son enveloppe et décrit un arc de cercle égal à

$$AB.\theta,$$

θ désignant l'angle dont le système tourne dans le temps dt. Mais cet angle [204, formule (3)] est égal à

$$\theta = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'},$$

ds désignant l'arc dont s'est avancé dans le temps dt le point de contact des circonférences primitives. En appelant n la longueur AB, l'arc de glissement sera mesuré par

$$n\,ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Soient N la pression normale, f le coefficient de frottement; le travail dépensé par le frottement sera

$$-f\mathrm{N}n\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)ds$$

dans le temps dt; et si s désigne alors la longueur du profil de la dent o', le travail total du frottement sera

$$-\int_0^s f\mathrm{N}n\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)ds.$$

On s'arrange de telle sorte qu'il n'y ait en général que deux dents en contact. Cependant, en réalité, le contact de deux dents commencera avant que les deux dents suivantes se soient quittées : nous ne tiendrons pas compte de cette circonstance.

Il faut évaluer la pression N. Pour cela nous considérerons une seule roue O'. Soient L le moment du couple qui la sollicite dans son mouvement de rotation autour du point O', r la distance de la normale AB au point O'. On aura

$$\mathrm{L} = \mathrm{N}r,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{L}}{r}.$$

Dans l'engrenage à développante de cercle, r est constant; avec cet engrenage, il y aura donc plus de régularité qu'avec tout autre, ce qui est encore une raison de le préférer à l'engrenage à épicycloïdes ou à lanterne. Pour cet engrenage, le travail du frottement prend la forme

$$-f\frac{L}{r}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\int_0^s n\,ds.$$

On pourrait, à la rigueur, évaluer les intégrales qui figurent dans ces formules; mais ce serait complétement inutile, eu égard aux hypothèses que l'on a été obligé de faire, et l'on obtient une approximation suffisante en prenant $n=s$, ce qui donne, pour l'expression du travail,

$$-f\frac{L}{r}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{s^2}{2}.$$

On prend ordinairement l'arc s égal au *pas de l'engrenage*, c'est-à-dire à la distance de deux dents consécutives.

On a, en désignant par n et n' les nombres de dents des deux roues,

$$ns=2\pi R,\quad n's=2\pi R',$$

d'où

$$\frac{1}{R}=\frac{2\pi}{ns},\quad \frac{1}{R'}=\frac{2\pi}{n's};$$

par suite, le travail du frottement, quand le système a marché d'un pas, devient

$$-f\frac{L}{r}\,\frac{2\pi}{s}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\frac{s^2}{2},$$

ou

$$-\frac{\pi f L s}{r}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right).$$

Un mot encore avant de terminer cette théorie des engrenages. Il est essentiel que le mouvement puisse se communiquer dans les deux sens; aussi fait-on toujours les dents symétriques. Enfin, leur longueur doit être limitée, de telle sorte qu'il n'y ait autant que possible qu'une seule paire de dents en contact, afin d'atténuer les effets du frottement.

Il existe plusieurs organes de transmission de mouvement qui dérivent des engrenages que nous venons d'étudier :

1° Les engrenages peuvent être intérieurs, c'est-à-dire que les circonférences primitives pourraient être elles-mêmes intérieures.

2° Si le rayon de l'une des roues devient infini, on obtient ce que l'on appelle une *crémaillère*. Cet appareil sert à transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, ou *vice versâ*. Les dents de cet appareil se construisent d'après les mêmes principes que celles des roues ordinaires.

3° Quand on veut transformer un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu, si ces mouvements n'ont pas lieu dans le même plan, on peut faire usage d'engrenages coniques, c'est-à-dire de roues dentées coniques dont les axes soient précisément les axes des mouvements de rotation à transformer l'un dans l'autre.

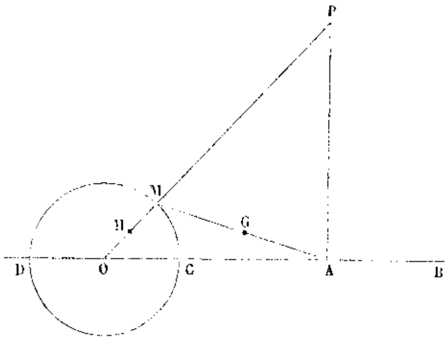
Le tracé des engrenages coniques est une question de Géométrie descriptive pour laquelle nous renverrons aux Ouvrages de Leroy et aux Cours de l'École Polytechnique. Du reste, les principes relatifs aux engrenages plans s'appliquent aux engrenages coniques.

XI. — Bielle et manivelle.

325. La bielle est une machine qui a pour but de transformer un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement circulaire continu.

La bielle se compose d'une tige MA (*fig.* 51) dont les

Fig 51.



extrémités sont assujetties à décrire : l'une M, un cercle O; l'autre A, une droite AB. A cet effet, la tige MA est articulée en M avec une autre tige OM appelée *manivelle*, et assujettie à tourner autour d'un axe situé en O. L'extrémité A est articulée avec une tige AB guidée de manière à se mouvoir le long de son axe : c'est cette tige qui, par son mouvement alternatif, communique un mouvement circulaire au point M.

Le frottement dans l'appareil qui nous occupe est facile à calculer. Il se réduit, pour les pièces articulées, au frottement déjà étudié d'un tourillon sur son coussinet, et pour les pièces guidées à un frottement variable suivant la nature des surfaces en contact.

Négligeons les frottements et proposons-nous, conformément aux principes de la théorie des machines, de rechercher à quelles conditions on peut obtenir un mouvement régulier. Soient :

G et H les centres de gravité de AM et de OM;

$$\mathrm{OM} = \rho, \quad \mathrm{AM} = l, \quad \mathrm{OA} = x, \quad \mathrm{OH} = \gamma, \quad \mathrm{AG} = a,$$
$$\mathrm{AOM} = \theta, \quad \mathrm{OAM} = \alpha;$$

i le moment d'inertie de OM, q son poids;

p le poids de MA;

$-\mu$ le moment résistant qui agit pour empêcher l'axe O de tourner;

F la force motrice, appliquée en A suivant BA si elle est positive, et suivant AB si elle est négative.

Nous supposerons OA horizontal.

Le travail de F dans le temps dt est $-\mathrm{F}dx$.

Le travail du poids p est égal à p, multiplié par la quantité dont se meut verticalement le point G, ou

$$\frac{a\rho}{l} d.\sin\theta,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{a\rho p}{l}\cos\theta\, d\theta.$$

Le travail du poids q est $-q\gamma\cos\theta\, d\theta$; enfin, le travail de la résistance est $-\mu d\theta$. On a donc, pour la somme des travaux des forces agissant sur la machine,

$$-\mathrm{F}dx - \left(\frac{a\rho p}{l}\cos\theta + q\gamma\cos\theta + \mu\right) d\theta.$$

Or on a

$$l^2 = \rho^2 + x^2 - 2\rho x\cos\theta,$$

d'où l'on tire

$$x = \rho\cos\theta + \sqrt{l^2 - \rho^2\sin^2\theta},$$

et, par suite,

$$dx = -\left(\rho \sin\theta + \frac{\rho^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{l^2 - \rho^2 \sin^2\theta}}\right) d\theta;$$

la somme des travaux des forces devient alors

$$d\theta \left[F\rho \sin\theta \left(1 + \frac{\rho \cos\theta}{\sqrt{l^2 - \rho^2 \sin^2\theta}} \right) - \frac{a\rho p}{l} \cos\theta - q\gamma \cos\theta - \mu \right].$$

Si l'on suppose l assez grand par rapport à ρ, cette expression se simplifiera et donnera

$$d\theta \left[F\rho \sin\theta \left(1 + \frac{\rho}{l} \cos\theta \right) - ap\, \frac{\rho}{l} \cos\theta - q\gamma \cos\theta - \mu \right].$$

La force vive se réduit sensiblement à la force vive $i\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ de OM. Du reste, si l'on veut tenir compte de la force vive de la bielle, on pourra la réduire à la moyenne des forces vives de la masse totale concentrée en A et en M; l'erreur ne sera pas bien considérable, si l'on observe que le mouvement de la bielle est une rotation autour du point P de rencontre de OM avec la perpendiculaire AP à OB.

On aura ainsi

$$\frac{p}{2g}\left[l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right],$$

ou à peu près

$$\frac{p}{2g}\left[l^2 + \rho^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{\rho}{l} \cos\theta \right)^2 \right] \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

ou même

$$\frac{p}{2g}\, l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

On voit que cette quantité est très-petite vis-à-vis de $i\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, car le moment d'inertie de la manivelle contient le moment d'inertie de la matière invariablement liée à l'axe de rotation (volants, contre-poids, etc.). On pourra du reste augmenter dans le calcul la quantité i de $\frac{p}{2g}l^2$. L'équation des forces vives donne alors

$$(1)\qquad i\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{F}\rho\sin\theta\left(1+\frac{\rho}{l}\cos\theta\right) - ap\frac{\rho}{l}\cos\theta - q\gamma\cos\theta - \mu.$$

C'est l'équation différentielle du mouvement de la machine. Si l'on multiplie par $d\theta$ et si l'on intègre de 0 à 2π, on a, dans l'hypothèse d'un mouvement périodique,

$$(2)\qquad 0 = \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{F}\sin\theta\left(1+\frac{\rho}{l}\cos\theta\right)d\theta - 2\pi\mu.$$

Si l'on égale à zéro le premier membre de l'équation (1), $\frac{d\theta}{dt}$ sera maximum ou minimum, et l'on aura

$$\mathrm{F}\rho\sin\theta\left(1+\frac{\rho}{l}\cos\theta\right) - ap\frac{\rho}{l}\cos\theta - q\gamma\cos\theta - \mu = 0.$$

Éliminons μ entre cette équation et l'équation (2), l'équation résultante

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}\rho\sin\theta\left(1+\frac{\rho}{l}\cos\theta\right) - ap\frac{\rho}{l}\cos\theta\\ &\qquad - q\gamma\cos\theta - \frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}\sin\theta\left(1+\frac{\rho}{l}\cos\theta\right)d\theta = 0\end{aligned}$$

fera connaître les valeurs θ' et θ'' de θ pour lesquelles la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ est maxima ou minima. Soient ω' et ω'' les valeurs correspondantes de $\frac{d\theta}{dt}$ (*). Intégrons (1) depuis θ'

(*) Il faut observer que F est une fonction de θ seul, qui ne contient pas explicitement le temps, en ce sens que le moteur est censé exercer une action régulière sur la machine.

jusqu'à θ'' ; après avoir multiplié par $d\theta$, nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{i}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) = & \int_{\theta'}^{\theta''} \mathrm{F}\rho \sin\theta \left(1 + \frac{\rho}{l}\cos\theta\right) d\theta \\ & - \left(ap\frac{\rho}{l} + q\gamma\right)(\sin\theta'' - \sin\theta') - \mu(\theta'' - \theta'). \end{aligned}\right.$$

Or on peut admettre que $\dfrac{\omega' + \omega''}{2}$ soit la vitesse moyenne Ω de la machine. Si l'on pose alors

$$\omega'' - \omega' = \lambda\Omega,$$

λ étant un coefficient que l'on se donne et que l'on peut appeler *coefficient de régularisation*, la formule (3) deviendra

$$\lambda\Omega^2 i = \int_{\theta'}^{\theta''} \mathrm{F}\rho \sin\theta \left(1 + \frac{\rho}{l}\cos\theta\right) d\theta + \ldots - \mu(\theta'' - \theta').$$

Tout est connu dans cette formule, excepté μ. On pourra alors régulariser le mouvement de la machine de plusieurs manières. On pourra, par exemple, choisir arbitrairement la forme de la manivelle et y adjoindre un volant monté sur l'axe O, de telle sorte que le moment d'inertie de la bielle et du volant soit égal à la valeur calculée de μ.

XII. — Détermination des dimensions des organes des machines. Dimensions a donner aux supports.

326. Les organes des machines se composent en général de pièces droites ou courbes dont les dimensions doivent être assez considérables pour résister aux efforts qui les sollicitent à la rupture. Les principes d'après lesquels on détermine les dimensions des organes des machines sont très-simples : on décompose la pièce dont on

doit calculer les dimensions en parties infiniment petites, et l'on exprime que la force qui sollicite chacune de ces parties est inférieure à celle qui suffirait pour la rompre.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de calculer la forme et les dimensions à donner à une colonne verticale massive pour qu'elle puisse supporter un poids P sans se rompre.

Le problème précédent peut admettre une infinité de solutions. On le rendra déterminé en admettant que la colonne doive être de révolution. Faisons cette hypothèse. Soit h la hauteur totale de la colonne, et considérons une tranche d'épaisseur dz prise à la hauteur z, au-dessus du pied de la colonne. La tranche dz supporte, outre le poids P, tout le poids des matériaux qui forment la colonne depuis la hauteur z jusqu'à la hauteur h. Soit r le rayon de la tranche; la surface de sa base sera πr^2; la partie de la colonne située au-dessus de la tranche en question sera

$$\int_z^h \pi r^2 dz.$$

En appelant D la densité des matériaux de la colonne,

$$D\pi \int_z^h r^2 dz + P$$

sera le poids qui repose sur la tranche considérée; l'unité de surface de cette tranche supporte donc le poids

$$\frac{1}{\pi r^2}\left(D\pi \int_z^h r^2 dz + P\right),$$

ou

$$\frac{D}{r^2}\int_z^h r^2 dz + \frac{P}{\pi r^2}.$$

Cette quantité doit être au plus égale au poids Π, capable de rompre un cube de matière ayant pour côté l'unité de longueur. Posant alors

$$\frac{D}{r^2}\int_z^h r^2 dz + \frac{P}{\pi r^2} = \Pi,$$

on aura une relation entre r et z, qui fera connaître le profil de la colonne. On tire de l'équation précédente

$$D\int_z^h \pi r^2 dz + P = \Pi \pi r^2,$$

ou, en différentiant par rapport à z,

$$-D\pi r^2 = 2\Pi\pi r\frac{dr}{dz}.$$

On en conclut

$$dz = -\frac{2\Pi}{D}\frac{1}{r}dr.$$

En intégrant, on a

$$z = \frac{2\Pi}{D}\,\mathrm{l}\frac{1}{r} + \text{const.} \tag{1}$$

La constante s'obtiendra en écrivant que la partie supérieure de la colonne résiste au poids P sans se rompre; le poids supporté par unité de surface est $\frac{P}{\pi x^2}$, x désignant le rayon de la tranche supérieure de la colonne, et l'on doit avoir

$$\frac{P}{\pi x^2} = \Pi,$$

ou bien

$$x = \sqrt{\frac{P}{\pi \Pi}}.$$

Écrivons alors que, dans la formule (1), on a $r = \sqrt{\frac{P}{\pi\Pi}}$ pour $z = h$, et nous obtiendrons

$$h = \frac{2\Pi}{D}\,\mathrm{l}\sqrt{\frac{\pi\Pi}{P}} + \text{const.};$$

d'où il est aisé de conclure

$$z - h = \frac{\Pi}{D} \mathrm{l} \frac{P}{r^2 \pi \Pi}.$$

Cette équation est celle du méridien de la colonne. Le solide de révolution que nous venons d'obtenir est ce que l'on appelle un *solide d'égale résistance*. Lorsque les matériaux ont peu de valeur, il n'y a pas intérêt à les économiser et à déterminer les dimensions des pièces d'une machine, de telle sorte que chaque partie résiste juste à l'effort maximum qui le sollicite à la rupture. S'agit-il, par exemple, de déterminer le rayon d'une colonne cylindrique qui doit supporter un poids P, on écrira que la base inférieure de la colonne supporte par unité de surface le poids $\frac{P + \pi r^2 h D}{\pi r^2}$, et que ce poids est au plus égal à Π; donc

$$\frac{P + \pi r^2 h D}{\pi r^2} = \Pi;$$

d'où

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi(\Pi - hD)}}.$$

Dès que l'on a $\Pi = hD$, on a $r = \infty$, c'est-à-dire que, si la colonne doit avoir une très-grande hauteur, il faudra renoncer à la forme cylindrique. On conçoit en effet qu'une telle colonne ne puisse pas résister à son propre poids. La hauteur maxima d'une colonne cylindrique est donnée par la formule

$$h = \frac{\Pi}{D}.$$

Pour la pierre, on a à peu près $\Pi = 3000000$ et $D = 2500$ kilogrammes (en prenant le kilogramme pour unité de poids et le mètre pour unité de longueur); en sorte que la hauteur maxima d'une colonne cylindrique est à peu près 1200 mètres.

XIII. — Étude des petites déformations d'une poutre.

327. Le plus souvent les organes d'une machine sont destinés à recevoir des efforts normaux à leur surface. Dans ce cas, les pièces se déforment en vertu de leur élasticité, et pour déterminer les dimensions des organes il faut écrire que les parties qui se déforment le plus ne se déforment pas assez pour se rompre.

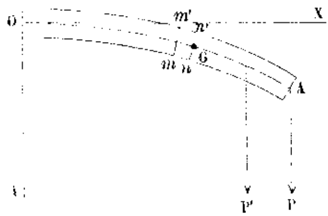
La question à résoudre se ramène donc à la recherche des déformations éprouvées par un solide naturel sous l'influence de forces données. La solution de ce problème, pris dans toute sa généralité, est du ressort de la Physique mathématique. Il se trouve traité : 1° dans divers Mémoires de Cauchy (*Anciens exercices de Mathématiques*, etc.); 2° dans la *Théorie mathématique de l'élasticité dans les corps solides*, de Lamé; 3° dans divers Mémoires de M. de Saint-Venant insérés principalement au *Journal de l'École Polytechnique* et dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; 4° on peut lire un résumé de cette théorie dans les deux dernières *Leçons de Statique* de l'abbé Moigno, rédigées par M. de Saint-Venant.

Les résultats auxquels on parvient à l'aide des théories mathématiques dont nous venons de parler ne sont pas encore assez simples pour pouvoir s'appliquer facilement aux questions pratiques. Nous allons essayer d'esquisser une théorie suffisamment approchée pour la plupart des applications.

Dans la *Théorie de la résistance des matériaux*, on appelle *poutre* un solide engendré par une courbe plane qui peut se déformer d'une manière continue pendant que son plan se meut dans l'espace. On suppose toutefois que le solide ainsi engendré a une épaisseur petite relativement à sa longueur. Le plan de la courbe mobile est ce que l'on appelle une *section*. Le lieu des centres de gravité des sections porte le nom de *fibre moyenne*. Nous supposerons la fibre moyenne normale aux sections.

Considérons une poutre OA (*fig.* 52) déformée sous

Fig. 52.



l'influence de certaines forces P, P',.... Nous admettrons que les molécules primitivement situées dans une même section restent dans un même plan après la déformation. Cette hypothèse est assez plausible. En effet, d'une part, elle a été vérifiée par l'expérience; d'autre part, si l'on considère une déformation très-faible, ce qui est le cas de la pratique, la surface suivant laquelle une section se sera déformée pourra être remplacée, aux quantités du second ordre près, par son plan tangent.

Nous allons supposer, ce qui est le cas le plus ordinaire, que le lieu des centres de gravité des sections est une courbe plane, et que les sections sont symétriques par rapport au plan de cette courbe. Nous supposerons aussi les forces extérieures contenues dans le plan en question. Considérons alors les deux sections mm' et nn' infiniment voisines; en vertu de l'hypothèse que nous avons faite sur l'invariabilité de forme des sections, nn' va éprouver par rapport à mm' un déplacement relatif qui pourra se ramener, à cause de la symétrie, à une rotation effectuée autour d'un certain axe G perpendiculaire au plan de la figure, et en général assez voisin du centre de gravité de nn', comme nous le verrons. Supposons d'abord que l'axe de rotation passe par le centre de gravité.

Considérons la portion de poutre $mm'nn'$ décomposée en une infinité de petites poutres ou fibres parallèles à mn. Les fibres ayant leur base en G ne se sont ni allongées ni raccourcies; quant à la fibre dont la base est ω et dont la distance à l'axe G est u, elle s'est allongée ou raccourcie d'une quantité facile à évaluer. Soit en effet ψ l'angle de rotation, l'allongement en question est $u\psi$; en sorte que la force qui produit cet allongement est

$$\frac{\mathrm{E}\omega u\psi}{ds}, \tag{1}$$

E désignant le coefficient d'élasticité de la poutre. La quantité u est du reste susceptible d'un signe qui est $+$ pour les fibres allongées, $-$ pour les fibres raccourcies. Toutes les forces telles que (1) ont pour résultante de translation

$$\Sigma\,\mathrm{E}\omega\,\frac{u\psi}{ds},$$

c'est-à-dire zéro; car $\Sigma\omega u$ est nul, l'axe G passant par le centre de gravité; les forces en question se réduisent alors évidemment à un couple dont le moment, pris par rapport à l'axe G, est

$$\Sigma\,\mathrm{E}\omega\,\frac{u^2\psi}{ds}.$$

$\Sigma\omega u^2$ est le moment d'inertie i de la section nn' pris par rapport à l'axe G; l'angle ψ est la différence des angles des sections mm' et nn' avant et après la déformation; c'est donc la différence des angles de contingence de la fibre moyenne en G avant et après sa déformation. Si l'on désigne par ρ et ρ' les rayons de courbure de cette fibre avant et après la déformation, on aura

$$\frac{\psi}{ds} = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho},$$

et par suite le couple qui produit la déformation est

$$\mathrm{E}i\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right).$$

La déformation que nous venons de considérer est ce que l'on appelle une *flexion simple;* le couple qui produit cette flexion est ce que l'on appelle le *moment fléchissant* en G.

Mais il arrivera le plus souvent que l'axe de rotation ne passera pas en G. Alors on pourra opérer le déplacement relatif de nn' à l'aide d'une rotation effectuée autour de l'axe G, suivie de deux translations l et γ, effectuées l'une normalement, l'autre parallèlement à nn'. La première produira une force normale à la section et appliquée en G

$$\sum \frac{\mathrm{E}\omega l}{ds},$$

et l'on peut admettre que la seconde engendre une force parallèle à la section nn' et appliquée en G

$$\sum \Gamma\omega\frac{\gamma}{ds},$$

où Γ désigne un coefficient constant appelé *coefficient de glissement*. La première de ces forces est la *tension;* la seconde est l'*effort tranchant*.

XIV. — Détermination de la forme affectée par une poutre soumise a l'action de forces données.

328. Conservant les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, décomposons les forces extérieures qui agissent depuis l'extrémité gauche de la poutre jusqu'à la section *mm'* en une force et en un couple V parallèle à l'axe G (p. 107), et à cet effet on peut supposer cette portion de poutre *rigidifiée*, ce qui ne modifie pas sa forme d'équilibre. Quant à la force, on peut supposer qu'elle passe en G et qu'elle ait été décomposée en deux autres, l'une N normale, l'autre T tangente à la section *nn'*. On devra alors avoir, pour l'équilibre de la portion de poutre considérée,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} V &= iE\,\frac{\psi}{ds},\\ N &= \Sigma E\,\frac{\omega l}{ds},\\ T &= \Sigma \Gamma\,\frac{\omega\gamma}{ds}. \end{aligned}\right.$$

La force N est généralement faible; elle est nulle lorsque les forces extérieures sont normales à la poutre, ce qui est le cas ordinaire : car l est nul ou à fort peu de chose près. La valeur de γ est

$$(2)\qquad \frac{T\,ds}{\Sigma\Gamma\omega} = \gamma.$$

Quant à l'élément d'arc de fibre déformée, il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont γ et ds. On peut donc le prendre égal à ds en observant que γ est très-petit par rapport à ds, puisque l'on n'admet que de faibles déformations. Il résulte de là, comme dans le cas de la flexion simple,

$$\frac{\psi}{ds} = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho},$$

et par suite (1) donne

$$(3) \qquad i\mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = \mathrm{V}.$$

C'est l'équation différentielle de la fibre moyenne de la poutre déformée. Pour calculer les dimensions de cette poutre, il faut écrire que la fibre la plus éloignée de l'axe de rotation dans chaque section ne s'allonge pas assez pour se rompre. Soit Π un poids inférieur à celui qui produit la rupture d'un fil ayant pour section l'unité de surface; soit v la distance de la fibre la plus éloignée à l'axe G. Son allongement est

$$v\psi = v\,ds\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de (3),

$$\frac{v\mathrm{V}}{i\mathrm{E}}\,ds.$$

La force qui produit cet allongement, réduite à l'unité de surface, est

$$\frac{v\mathrm{V}}{i\mathrm{E}}\,ds \times \frac{\mathrm{E}}{ds} = \frac{v\mathrm{V}}{i}.$$

Posons alors

$$(4) \qquad \frac{v\mathrm{V}}{i} \leqq \Pi.$$

Si cette formule est vérifiée dans toutes les sections, la poutre résistera sans se rompre aux forces qui tendent à l'allonger.

L'effort tranchant est ordinairement faible, et il ne fait jamais rompre les poutres; il n'y a lieu de le considérer que dans les rivets et dans les pièces boulonnées. Pour en tenir compte, on a recours à la formule (2).

Le déplacement γ devra être moindre que celui qui produirait la rupture. Soit Θ une force inférieure à celle qui produit la rupture par glissement d'une poutre ayant pour section l'unité; le glissement dû à cette force serait, pour un prisme de longueur ds, $\frac{\Theta ds}{\Gamma}$: on devra donc avoir

$$\frac{\mathrm{T}\,ds}{\sum \Gamma\omega} \leqq \frac{\Theta\,ds}{\Gamma},$$

ou

$$\frac{\mathrm{T}}{\sum \omega} \leqq \Theta.$$

XV. — Solides d'égale résistance.

329. Lorsqu'il y a intérêt à économiser la matière, on construit les poutres de telle sorte, qu'elles aient partout l'épaisseur strictement nécessaire pour résister à la rupture. Pour cela, on a recours à la formule (4), et on la remplace par

$$\frac{v\mathrm{V}}{i} = \Pi.$$

On se donne la forme de la section en laissant une de ses dimensions indéterminée. La formule précédente permet de déterminer cette dimension, et l'on obtient alors un solide qui résiste également à la rupture dans chacune de ses sections. Nous allons maintenant faire quelques applications.

XVI. — Étude de quelques élastiques.

On donne le nom d'*élastiques* aux courbes qu'affectent les poutres droites déformées par des forces normales à leur fibre moyenne, et situées dans un plan de symétrie.

330. Problème I. — *Déterminer la forme d'une poutre droite reposant sur deux appuis horizontaux* A *et* B, *et soumise à l'action de poids uniformément répartis sur sa longueur.*

Dans la formule générale (3) (p. 305), il faudra faire $\rho = \infty$; on prendra ensuite pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB et dirigée de haut en bas. On aura alors, au lieu de (3), en désignant par x, y les coordonnées du point G,

$$(5) \qquad i\mathrm{E}\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{V}.$$

Pour évaluer V, désignons par p la charge répartie sur l'unité de longueur, et par $2l$ la longueur de la poutre. Chacun des appuis supporte un poids pl et réagit sur la poutre avec une intensité égale à $-pl$. (Nous supposerons la poutre symétrique par rapport à l'axe des y.) Le moment V se composera du moment de $-pl$ pris par rapport à G, qui est $-pl(l-x)$, et des moments des poids uniformément répartis. Le moment du poids qui répond à l'abscisse ξ est $p\,d\xi\,(\xi - x)$, et par suite on a

$$\mathrm{V} = p\int_x^l (\xi - x)\,d\xi - pl^2 + plx,$$

ou

$$\mathrm{V} = \frac{p}{2}(x^2 - l^2).$$

La formule (5) donne alors l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée

$$\frac{2iE}{p}\frac{d^2y}{dx^2} = (x^2 - l^2)\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Les ingénieurs négligent ordinairement la quantité $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (*); cela revient à admettre que la poutre se déforme à peine. On a alors

$$\frac{2iE}{p}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 - l^2;$$

d'où l'on déduit l'équation intégrale suivante, où i est censé constant,

$$\frac{2iE}{p}y = \frac{x^4}{12} - l^2\frac{x^2}{2} + ax + b,$$

a et b désignant des constantes. Pour déterminer ces quantités, on écrira que la poutre passe en A et B. On aura alors

$$0 = \frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{2} + al + b,$$

$$0 = \frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{2} - al + b;$$

d'où l'on tire

$$a = 0, \quad b = \frac{5l^4}{12}.$$

Si l'on fait $x = 0$, la valeur correspondante de y sera la *flèche*

$$y = \frac{pb}{2iE} = \frac{5}{24}\frac{pl^4}{iE}.$$

(*) L'erreur qui en résulte est au-dessous de celles que l'on commet dans l'exécution de la poutre. En effet, la courbure d'une poutre déformée est insensible à l'œil. La plus grande valeur admissible pour $\frac{dy}{dx}$ est de $\frac{1}{30}$ dans les cas les plus défavorables. L'erreur relative de y est donc à peine $\frac{1}{900}$.

Supposons maintenant la section de la pièce carrée pour fixer les idées. Soit $2z$ son côté; on a $v = z$, $i = \frac{4}{3}z^4$. La formule (4) donne

$$\frac{z\frac{p}{2}(x^2 - l^2)}{\frac{4}{3}z^4} \leqq \Pi.$$

Si l'on désire un solide d'égale résistance, on supprimera le signe $<$ et l'on aura

$$p(x^2 - l^2) = \frac{8}{3}z^3\Pi :$$

c'est l'équation de la section longitudinale de la poutre. Si l'on ne veut pas de solide d'égale résistance, on remplacera dans (4) V par son maximum $p\frac{l^2}{2}$, et l'on déterminera z par la formule

$$z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3pl^2}{\Pi}}.$$

331. Problème II. — *Déterminer la forme affectée par une poutre horizontale encastrée à l'une de ses extrémités et portant un poids p à l'autre extrémité.*

Soit l la longueur de la poutre; prenons sa direction primitive pour axe des x et la verticale descendante du point d'encastrement pour axe des y. On a ici

$$V = p(l - x);$$

l'équation (3) devient

$$\frac{iE}{p}\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}(l - x).$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{iE}{p} = \varepsilon, \quad l - x = \xi, \quad \frac{dy}{dx} = u;$$

nous aurons

$$\varepsilon\frac{du}{d\xi} = (1+u^2)^{\frac{3}{2}}\xi,$$

ou bien

$$2\varepsilon\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\xi\,d\xi.$$

En intégrant, on a

$$\frac{2\varepsilon u}{\sqrt{1+u^2}} = \xi^2 + \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$2\varepsilon\frac{dy}{dx} = [(l-x)^2 + \text{const.}]\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On déterminera la constante en exprimant que la poutre est encastrée, c'est-à-dire en exprimant que $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $x=0$; il en résulte const. $= -l^2$. On a donc

$$2\varepsilon\frac{dy}{dx} = (x^2 - 2lx)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-2lx}{\sqrt{4\varepsilon^2 - x^2(x-2l)^2}};$$

la courbe affectée par la poutre dépend donc des fonctions elliptiques.

332. Problème III. — *Déterminer la forme que prend une poutre horizontale encastrée à ses deux bouts lorsqu'on la charge d'un poids $2p$ en son milieu.*

Soit $2l$ la longueur de la poutre; prenons pour axe des x son axe primitif, et pour axe des y la verticale descendante du milieu de cet axe. L'encastrement revient à un système de forces que l'on peut remplacer par un couple μ et par une force φ, dont nous désignerons la composante verticale par ν.

Les formules de l'équilibre appliquées à la poutre tout entière donnent

$$2\nu = 2p \quad \text{ou} \quad \nu = p.$$

Quant au couple μ, il ne peut pas être déterminé par l'équation des moments, cette équation devenant identique par l'hypothèse de la distribution symétrique des forces des deux côtés de la poutre.

Ceci posé pour un point dont l'abscisse est positive, on a

$$V = \mu - p(l - x);$$

pour un point dont l'abscisse est négative, le moment du poids $2p$ placé à l'origine intervient, et l'on a

$$V = \mu - p(l - x) - 2px,$$

ou

$$V = \mu - p(l + x).$$

L'équation de la poutre déformée est, en négligeant $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$,

$$\text{(1)} \qquad Ei\frac{d^2y}{dx^2} = \mu - p(l \pm x),$$

le signe — convenant au cas où x est positif, le signe $+$ au cas contraire. Intégrons de $-l$ à $+l$, en observant que $\frac{dy}{dx}$ est nul aux limites; on a

$$0 = 2\mu l - 2pl^2 - p\int_{-l}^{0} x\,dx + p\int_{0}^{l} x\,dx,$$

ou bien

$$0 = 2\mu l - pl^2,$$

c'est-à-dire

$$\mu = \tfrac{1}{2}pl.$$

L'équation (1) devient alors

$$\mathrm{E}i\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}pl \pm px.$$

Le reste du calcul est facile à achever : on déterminera les constantes d'intégration en exprimant que, pour $x = \pm l$, on a $y = 0$. La courbe que l'on trouve ainsi a deux points d'inflexion correspondant aux abscisses $\pm\frac{l}{2}$; sa tangente à l'origine est horizontale. Nous avons négligé $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Il est clair qu'on aurait pu intégrer une fois sans faire cette hypothèse; on aurait été ensuite ramené à des quadratures elliptiques.

XVII. — Équilibre d'une poutre de section constante placée sur plusieurs appuis.

333. Nous avons vu, en Statique (108), qu'un solide fixé en plus de deux points en ligne droite exercerait en ces points des actions indéterminées. Ce fait s'explique parce que le solide de la Mécanique rationnelle, ou, si l'on veut, le corps rigide, est un corps hypothétique, et qu'il y a réellement alors plusieurs manières d'assurer l'équilibre en modifiant les réactions des points fixes. Il n'en est plus ainsi pour les solides naturels, et les principes que nous venons d'exposer vont nous permettre de déterminer les réactions des appuis, dans le cas d'une poutre posée sur plus de deux appuis, situés sur une même horizontale.

La question que nous allons résoudre a exercé, dans ces derniers temps, la sagacité des ingénieurs les plus illustres, parmi lesquels nous citerons surtout Clapeyron.

Soient $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n+1$ points d'appui situés sur une même horizontale, et sur lesquels repose une poutre droite.

Soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les distances consécutives $A_0 A_1$, $A_1 A_2, \ldots$ des points d'appui.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des poids uniformément répartis sur les longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (en d'autres termes, on suppose que le mètre de poutre sur la travée l_1 supporte le poids $p_1, \ldots$). Soient $R_0, R_1, \ldots, R_n$ les réactions des appuis. Prenons la fibre moyenne de la poutre non déformée pour axe des x et une verticale descendante pour axe des y. Plaçons d'abord l'origine au point B_i, et évaluons le moment fléchissant V en un point dont l'abscisse est x, situé entre B_i et B_{i+1}. Désignons par $V_0, V_1, \ldots, V_n$ les moments fléchissants en $A_0, A_1, \ldots, A_n$; la portion de poutre comprise entre B_i et le point dont l'abscisse est x est en équilibre, sous l'influence des couples V_i et V, des poids qu'elle supporte, poids qui ont pour moment résultant

$$\int_0^x p_{i+1}\, d\xi\, (\xi - x) = -p_{i+1}\frac{x^2}{2},$$

et de la réaction R_i, dont le moment est $R_i x$; en sorte que l'on a

$$\text{(1)} \qquad V = V_i + R_i x - p_{i+1}\frac{x^2}{2}.$$

Si, dans cette formule, on fait $x = l_{i+1}$, on a

$$\text{(2)} \qquad V_{i+1} = V_i + R_i l_{i+1} - p_{i+1}\frac{l_{i+1}^2}{2}.$$

On en déduit

$$\text{(3)} \qquad R_i = \tfrac{1}{2} p_{i+1} l_{i+1} + \frac{V_{i+1} - V_i}{l_{i+1}};$$

l'élimination de R_i entre (1) et (2) donne

$$V = V_i + x\left(\tfrac{1}{2} p_{i+1} l_{i+1} + \frac{V_{i+1} - V_i}{l_{i+1}}\right) - p_{i+1}\frac{x^2}{2};$$

La formule qui donne l'équation de la poutre déformée devient alors [p. 305, formule (3)], en posant $Ei = \varepsilon$ et en prenant $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$, ce qui revient à négliger le carré de $\frac{dy}{dx}$,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = V_i + x\left(\tfrac{1}{2} p_{i+1} l_{i+1} + \frac{V_{i+1} - V_i}{l_{i+1}}\right) - p_{i+1}\frac{x^2}{2}.$$

Intégrons de zéro à x, nous aurons, en désignant par α_0, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les coefficients angulaires des tangentes à la poutre en $A_0, A_1, \ldots, A_n$,

$$(4)\quad \varepsilon\left(\frac{dy}{dx} - \alpha_i\right) = V_i x + \frac{x^2}{2}\left(\tfrac{1}{2} p_{i+1} l_{i+1} + \frac{V_{i+1} - V_i}{l_{i+1}}\right) - p_{i+1}\frac{x^3}{6}.$$

En intégrant encore de zéro à x, on aurait l'équation de la poutre. Intégrons de zéro à l_{i+1}, nous aurons

$$-\varepsilon \alpha_i l_{i+1} = \tfrac{1}{2} V_i l_{i+1}^2 + \frac{l_{i+1}^3}{6}\left(\tfrac{1}{2} p_{i+1} l_{i+1} + \frac{V_{i+1} - V_i}{l_{i+1}}\right) - p_{i+1}\frac{l_{i+1}^4}{24},$$

ou bien

$$(5)\qquad -\varepsilon \alpha_i = \frac{l_{i+1}}{24}\left(8V_i + 4V_{i+1} + p_{i+1} l_{i+1}^2\right).$$

Changeons la direction de l'axe des x, plaçons l'origine en A_{i+1}, et répétons le même calcul; V_i et V_{i+1} vont se changer l'un dans l'autre : α_i deviendra $-\alpha_{i+1}$, et l'on aura

$$(6)\qquad \varepsilon \alpha_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{24}\left(8V_{i+1} + 4V_i + p_{i+1} l_{i+1}^2\right).$$

Si, dans (5) et (6), on fait $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, on obtient $2n$ équations, et, comme on a $V_n = 0$, $V_0 = 0$, on pourra s'en servir pour éliminer $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et pour calculer $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$. La formule (3) fera alors connaître $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$, en y faisant $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;

on aura ensuite R_n par la formule

$$\Sigma R_i = \Sigma p_i l_i.$$

Lorsque l'on aura calculé V_0, V_1, V_2, ..., la formule (4) intégrée fera connaître la forme de la poutre déformée. On en déduira également une formule pour l'équarrissage.

XVIII. — Détermination des dimensions des pièces en mouvement.

334. Souvent les pièces dont il faut déterminer les dimensions sont en mouvement. Les théories exposées dans les paragraphes précédents s'appliquent encore ici ; mais il faut avoir soin d'adjoindre, en vertu du principe de d'Alembert, aux forces réellement agissantes, les forces d'inertie.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer les dimensions d'un volant, on déterminera d'abord les dimensions des bras en négligeant leur poids, mais en les considérant comme des poutres tirées dans le sens de leur longueur par les forces centrifuges de tous leurs points et par la force centrifuge d'une portion de la roue égale à l'intervalle de deux bras.

Soient ω la vitesse angulaire du volant, R la longueur d'un bras, Ω la section à la distance r de l'axe, ρ la masse spécifique de la matière qui constitue le volant, n le nombre de bras, s la section de la roue.

La force qui agit sur la section Ω est la résultante de la force d'inertie de la $n^{\text{ième}}$ partie de la roue, ou $\frac{2\pi}{n} R^2 s \rho \omega^2$, et de toutes les forces d'inertie telles que $\Omega dr \rho \omega^2 r$. On a donc, pour la force qui agit sur la section Ω,

$$\frac{2\pi}{n} R^2 s \rho \omega^2 + \int_r^R \Omega r \, dr \omega^2 \rho,$$

ou bien

$$\omega^2\rho\left(\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{R}^2 s + \int_r^{\mathrm{R}} \Omega\, r\, dr\right).$$

Soit Π le poids maximum que peut supporter la section unité; $\Pi\Omega$ sera le poids maximum que supportera la section Ω, et l'on aura, pour déterminer les dimensions du bras du volant,

$$\omega^2\rho\left(\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{R}^2 s + \int_r^{\mathrm{R}} \Omega\, r\, dr\right) = \Omega\,\Pi.$$

On peut supposer que la section Ω reste semblable à elle-même, et poser $\Omega = ar + b$; dans ce cas, on a

$$\omega^2\rho\left(\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{R}^2 s + \int_r^{\mathrm{R}} (ar + b)\, r\, dr\right) = (ar + b)\,\Pi,$$

ou

$$\omega^2\rho\left[\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{R}^2 s + \frac{a}{2}(\mathrm{R}^2 - r^2) + b(\mathrm{R} - r)\right] = (ar + b)\,\Pi.$$

Cette formule ayant lieu pour toutes les sections, c'est-à-dire quel que soit r, on a

$$\frac{\omega^2\rho}{2}\,a + \omega^2\rho\, b + a\,\Pi = 0,$$

$$\frac{2\pi\,\omega^2\rho}{n}\,\mathrm{R}^2 s + \frac{a}{2}\,\pi^2\rho\,\mathrm{R}^2 + b\,\mathrm{R}\,\omega^2\rho - b\,\Pi = 0.$$

On a ainsi deux équations entre a et b qui permettront de calculer ces quantités quand s sera connu.

Pour déterminer s, on considérera la portion de roue comprise entre deux bras comme une poutre droite de longueur $l = \dfrac{2\pi\mathrm{R}}{n}$ encastrée à ses deux bouts et chargée d'un poids uniformément réparti et égal à

$$s\rho\omega^2\mathrm{R}$$

par unité de longueur. Nous ne tenons pas compte de la pesanteur, qui est incomparablement plus petite que la force centrifuge; toutefois, on fera bien d'augmenter un peu la valeur de R pour faire le calcul.

XIX. — Vibrations d'une verge.

335. Si après avoir écarté une verge encastrée de sa position d'équilibre, on l'abandonne à elle-même, elle effectue une série d'oscillations dont nous allons étudier les lois. Nous ne nous occuperons que des vibrations transversales, c'est-à-dire que du cas où les forces d'inertie sont normales à l'axe de la poutre. Le cas des vibrations longitudinales est facile à traiter, après ce que l'on a vu (312) sur le mouvement de l'air dans un tuyau.

On peut négliger l'action de la pesanteur sur la verge et l'assimiler à une poutre encastrée à une de ses extrémités. Les forces qui agissent sur la verge se réduisent alors aux forces d'inertie. Soient l la longueur de la verge, ρ sa densité; si l'on prend pour axe des x l'axe de la verge, et si l'on désigne par Ω sa section en ξ, la force qui agit à l'abscisse ξ est le produit de la masse $\rho\Omega\, d\xi$ de la tranche $d\xi$ par l'accélération $-\dfrac{d^2\eta}{dt^2}$ de cette masse changée de signe, dt désignant l'élément du temps; on a donc ici

$$V = -\int_x^l \rho\Omega \frac{d^2\eta}{dt^2}(\xi - x)\, d\xi.$$

On a donc, pour l'équation d'équilibre,

$$\frac{Ei}{\Omega\rho}\frac{d^2 y}{dx^2} = -\int_x^l \frac{d^2\eta}{dt^2}(\xi - x)\, d\xi.$$

Différentions par rapport à x, nous aurons

$$\frac{\mathrm{E}i}{\Omega\rho}\frac{d^3y}{dx^3}=\int_x^l \frac{d^2\eta}{dt^2}\,d\xi.$$

En différentiant encore une fois par rapport à x, on a

$$\frac{\mathrm{E}i}{\Omega\rho}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{d^2y}{dt^2},$$

y désignant l'ordonnée de la poutre déformée. Si l'on suppose la section de la verge constante, l'équation précédente est linéaire, et, en posant

$$\frac{\mathrm{E}i}{\Omega\rho}=a^2,$$

on a

(1) $$a^2\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Pour intégrer cette équation, on posera

(2) $$y=\mathrm{A}e^{\alpha x+st},$$

et l'on aura

(3) $$a^2\alpha^4+s^2=0.$$

Cette équation établit une relation entre α et s en vertu de laquelle la valeur (2) de y sera une solution de (1), et il est clair que l'on pourra prendre

$$y=\Sigma\mathrm{A}e^{\alpha x+st},$$

s étant susceptible d'une infinité de valeurs déterminées en fonction de α par (3), et A désignant une arbitraire. Nous allons montrer comment on peut déterminer les constantes de cette formule, de manière à satisfaire à des conditions initiales données. Nous admettrons (ce qui n'est pas rigoureusement prouvé) que l'on puisse différentier sous le signe $\int$ les intégrales que nous rencontrerons; on a, comme l'on sait, quelle que soit la fonction $f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{(x-\xi)\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\xi,$$

et, par suite,

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{(\xi-x)\alpha\sqrt{-1}}\, \alpha^4\, d\alpha\, d\xi.$$

Si, en particulier, on prend $f = y$, on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & a^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dt^2} \\ & \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\xi-x)\alpha\sqrt{-1}}\left(\eta\, a^2 \alpha^4 + \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) d\alpha\, d\xi, \end{aligned}\right.$$

η désignant ce que devient y quand on y remplace x par ξ. Si nous posons alors

$$(5)\qquad \eta\, a\, \alpha^4 + \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0,$$

nous aurons une équation différentielle ordinaire pour déterminer η, ou, ce qui revient au même, y; car on aura

$$(6)\qquad y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \eta\, e^{(\xi-x)\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\xi.$$

L'intégrale générale de (5) est

$$\eta = \mathrm{A}\cos a\alpha^2 t + \mathrm{B}\sin a\alpha^2 t.$$

Supposons maintenant que l'on désire satisfaire aux conditions suivantes pour $t = 0$,

$$y = \varphi(x), \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

il faudra que

$$\frac{1}{2\pi}\int\int \mathrm{A}\, e^{(\xi - x)\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\xi = \varphi(x),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\int a\,\alpha^2\, \mathrm{B}\, e^{(\xi - x)\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\xi = 0.$$

On satisfera à ces conditions en prenant $\mathrm{A} = \varphi(\xi)$, $\mathrm{B} = 0$. On pourra prendre pour φ l'ordonnée de l'élastique obtenue en exerçant un effort p à l'extrémité de la verge, et l'on aura l'équation du mouvement pour le cas où l'on écarterait la verge par son extrémité pour la lâcher aussitôt après. Cette équation est

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos a\,\alpha^2 t\, e^{(\xi - x)\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\xi.$$

On peut, si l'on veut, dans l'intégrale relative à ξ, restreindre les limites à zéro et l, puisque $\varphi(\xi)$ ne peut être donné que de zéro à l, et en posant

$$\varpi(\alpha) = \int_0^l \varphi(\xi)\, e^{\alpha\xi\sqrt{-1}}\, d\xi,$$

on aura

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(\alpha)\cos a\alpha^2 t\, e^{-\alpha x\sqrt{-1}}\, d\alpha,$$

ou bien encore

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(\alpha)\cos a\alpha^2 t \cos\alpha x\, d\alpha.$$

en réduisant $\varpi(\alpha)$ à sa partie réelle.

EXERCICES.

I. Une planche horizontale repose sur deux rouleaux, c'est-à-dire sur deux cylindres de même rayon ayant leurs axes parallèles à l'un des côtés de la planche. Sur cette planche se trouve un poids uniformément réparti P. Étant donnés les coefficients de frottement et de roulement relatifs : 1° à la planche et aux cylindres; 2° aux cylindres et au sol sur lesquels ils reposent; 3° au sol et à la planche reposant sur le sol. On propose de calculer le rapport des forces horizontales nécessaires pour mouvoir la planche lorsqu'elle repose sur les rouleaux et lorsqu'elle repose directement sur le sol.

II. Un cône droit à base circulaire pesant est placé sur un plan incliné, de manière qu'une de ses arêtes en contact avec le plan fasse un angle fini avec la ligne de pente du plan. Déterminer le mouvement de ce cône, en tenant compte du frottement de glissement et de roulement.

III. Étudier l'effet produit par un choc sur une bille sphérique homogène reposant sur un plan horizontal.

IV. Étudier le mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical ou sur une cycloïde, en tenant compte du frottement.

V. Deux manivelles égales sont montées de façon à faire tourner un même arbre, elles reçoivent leur mouvement de deux bielles qui restent verticales et qui n'agissent que par leur poids et alternativement, on suppose que ces bielles n'exercent aucun effet pendant leur période ascendante. Étudier le mouvement de ce système.

VI. Évaluer le travail du frottement dans le cas d'une poulie dont les tourillons reposent chacun sur le point de croisement de deux poulies mobiles comme dans la machine d'Atwood.

VII. Une poutre horizontale encastrée à une de ses extrémités est chargée de poids dont l'intensité varie en raison inverse de la distance à l'extrémité libre. Déterminer la forme d'équilibre de cette poutre. Former un solide d'égale résistance avec une section rectangulaire dont une dimension reste constante.

VIII. Une poutre courbe est destinée à supporter des maçonneries; ses extrémités reposent sur deux appuis de niveau; les maçonneries sont censées homogènes et s'élèvent à une hauteur constante donnée au-dessus de ses appuis : 1° former avec cette poutre un solide d'égale résistance, en supposant la fibre moyenne circulaire; 2° trouver la forme qu'il faut donner à la fibre moyenne pour que la poutre de section constante soit un solide d'égale résistance.

IX. Étudier les oscillations d'un fil vertical encastré à sa partie supérieure, et, qu'après avoir tordu, on abandonne à lui-même. Étudier le cas où le fil porte un poids tenseur.

NOTES.

SUR L'HOMOGÉNÉITÉ DE FORMULES DE LA MÉCANIQUE ET SUR LA SIMILITUDE.

Quelques auteurs ont cru pouvoir démontrer *à priori* l'homogénéité des formules de la Géométrie, c'est-à-dire sans s'appuyer sur aucune propriété des figures. Les raisonnements que l'on a faits à ce sujet m'ont toujours paru vicieux, et, sans entreprendre ici de les réfuter, je me bornerai à faire observer que les raisonnements *à priori*, qui tendent à prouver que les formules de la Géométrie sont homogènes par rapport aux lignes, pourraient s'appliquer mot pour mot aux angles, et conduire ainsi à des conséquences tout à fait absurdes (*).

Néanmoins les formules de la Géométrie sont homogènes par rapport aux lignes, et cela tient à ce que les formules fondamentales, dont on déduit toutes les autres, sont homogènes; ces formules sont celles que fournissent les théorèmes sur la similitude des triangles, sur la me-

(*) Si l'on admettait que les formules de la Géométrie sont homogènes par rapport aux angles, on arriverait à la conclusion absurde que voici : Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc si, dans un triangle, on se donne un angle C et les côtés compris a, b, ce triangle sera déterminé; donc le troisième côté c sera une fonction de a, b, C, et l'on aura

$$c = \varphi(a, b, C).$$

Si cette formule était homogène par rapport aux angles, C devrait entrer au degré zéro, c'est-à-dire disparaître, c serait fonction de a et b seuls. Ce qui est absurde.

sure du rectangle, et sur la mesure du parallélépipède rectangle.

En Mécanique, pas plus qu'en Géométrie, on ne peut établir *à priori* l'homogénéité des formules; néanmoins ces formules sont homogènes, parce que les théorèmes fondamentaux conduisent à des relations homogènes, pourvu, bien entendu, qu'ici, comme en Géométrie, on laisse les unités tout à fait indéterminées. Entrons dans quelques détails.

Les vitesses sont des longueurs divisées par des temps; elles dépendent à la fois des unités de longueur et de temps, et peuvent être considérées comme du premier degré par rapport aux longueurs, et du degré —1 par rapport aux temps. De même, les accélérations seront du premier degré par rapport aux longueurs, et du degré —2 par rapport aux temps. Une force est le produit d'une masse par une accélération. L'unité de masse peut être choisie arbitrairement; l'unité de force résultera de l'unité de longueur, de l'unité de temps et de l'unité de masse. La force peut être considérée comme du premier degré par rapport aux lignes du premier degré par rapport aux masses, et du degré — 2 par rapport aux temps.

Ceci posé, je dis que les formules de la Mécanique seront généralement homogènes. En effet, tout problème de Mécanique se ramène, en dernière analyse, à égaler des forces, des accélérations, des vitesses, des quantités géométriques ou des temps; ou bien encore à écrire qu'*une force est égale au produit d'une masse par une accélération*. Dans tous ces cas, on obtient des formules homogènes; donc toutes les formules de la Mécanique doivent être homogènes, pourvu toutefois que l'on ne fasse aucune hypothèse sur les unités, ce qui pourrait faire disparaître, en apparence au moins, certaines lignes, certaines forces, etc. Ainsi l'homogénéité existe dans les sciences mathématiques, parce que cette homogénéité y a été introduite par les théorèmes fondamentaux; là où on ne l'introduit pas, elle n'existe pas. Ainsi les formules ne sont pas homogènes par rapport aux angles.

Lorsque l'on veut retrouver l'homogénéité dans une formule de Mécanique, il faut prendre la précaution de mettre toutes les lignes, tous les temps, etc., de la question en évidence. Mettons, par exemple, ce problème en équation :

Trouver le mouvement rectiligne d'un point sollicité par un centre fixe proportionnellement au cube de la distance.

Soient x la distance du mobile au centre fixe, m sa masse, t le temps, k un coefficient constant; on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx^3.$$

Cette formule, en apparence, n'est pas homogène; mais il est facile de mettre l'homogénéité en évidence. En effet, soient f_0 la force qui sollicite le point m à la distance x_0, f la force qui le sollicite à la distance x; on a

$$\frac{f}{f_0} = \frac{x^3}{x_0^3},$$

d'où l'on tire

$$f = f_0\frac{x^3}{x_0^3};$$

l'équation du mouvement devient alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f_0\frac{x^3}{x_0^3},$$

formule homogène, car la force f_0 est du premier degré par rapport aux masses du degré -2, par rapport aux temps, et du premier degré par rapport aux longueurs.

Considérons deux systèmes semblables, appliquons aux points homologues des forces parallèles et proportionnelles. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de masse m du premier système; x', y', z' les coordonnées du point homologue, μm sa masse, que nous supposerons proportionnelle à m; soient (X, Y, Z), (X', Y', Z') les forces qui sollicitent respectivement ces points; les équations du mouvement des deux systèmes sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum\left[\left(m\dfrac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\ldots\right]=0,\\ \sum\left[\left(\mu m\dfrac{d^2x'}{dt^2}-X'\right)\delta x'+\ldots\right]=0.\end{cases}$$

Si l'on prend $X'=kX$, $Y'=kY$, $Z'=kZ$, et si l'on pose

$$x'=\frac{k}{\mu}x,\quad y'=\frac{k}{\mu}y,\quad z'=\frac{k}{\mu}z,$$

on rendra les équations (1) identiques, c'est-à-dire que les systèmes resteront semblables pendant toute la durée du mouvement, si les forces elles-mêmes forment un système semblable. On rendra encore les équations (1) identiques en prenant $X'=\mu X$, $Y'=\mu Y$, $Z'=\mu Z$, $x'=k^2x$, $y'=k^2y$, $z'=k^2z$, et en remplaçant dans la seconde formule t par kt. Cette remarque constitue un nouveau théorème sur la similitude.

Il résulte des considérations précédentes qu'il est presque impossible de juger une machine d'après un modèle exécuté en petit. En effet, sur le modèle, les longueurs étant réduites dans le rapport α par exemple, les masses sont réduites dans le rapport α^3, la pesanteur et les forces proportionnelles aux masses sont donc réduites dans le même rapport, en sorte que $k^2=\alpha$ et $\mu=\alpha^3=k^6$; les temps seront réduits dans le rapport $k=\sqrt{\alpha}$, ainsi que les vitesses. Mais, de même que la pesanteur a été réduite dans le rapport α^3, de même il faudra réduire toutes les forces dans le même rapport α^3 : c'est ce qu'il est impossible de faire d'une manière bien satisfaisante, parce que les résistances passives ne varient pas dans le même rapport que les forces mouvantes. Les frottements de glissement, étant proportionnels aux pressions, varieront dans le rapport voulu α^3 ; les frottements de roulement varieront dans le même rapport, mais leurs points d'application ne seront pas semblablement placés. Les tensions, qui sont proportionnelles aux allongements, aux sections, et en raison inverse des longueurs, varieront dans le rapport α^2. Enfin les forces dues aux actions moléculaires, à l'échauffement des pièces, etc., ne peuvent guère être comparées.

SUR LES DÉTERMINANTS FONCTIONNELS.

La théorie des déterminants est aujourd'hui enseignée dans tous les cours de Mathématiques spéciales. Nous ne croyons pas avoir à la rappeler ici ; nous nous contenterons de renvoyer le lecteur aux ouvrages dont les titres suivent : (*Baltzer*; — *Brioschi*, traduit par Combescure : l'ouvrage de M. Brioschi est rédigé sous une forme très-succincte; l'auteur suppose probablement le lecteur au courant de la théorie élémentaire des déterminants. — *Voyez* aussi le *Traité d'Algèbre supérieure* de Salmon, traduit par Bazin, et mon *Traité d'Algèbre* : le tout en vente chez Gauthier-Villars.)

Si nous désignons par (ij) l'élément d'un déterminant R qui se trouve dans la i^e ligne et la j^e colonne, ce déterminant R sera une fonction homogène et linéaire des éléments $(i1)$, $(i2)$, ..., (in), et l'on pourra écrire

$$R = \frac{dR}{d(i1)}(i1) + \frac{dR}{d(i2)}(i2) + \ldots;$$

en sorte que la notation $\frac{dR}{d(ij)}$ est éminemment propre à représenter les déterminants mineurs de R. De même la notation $\frac{d^2R}{d(ij)\,d(i'j')}$ représentera au signe près le déterminant obtenu, en ôtant dans R les lignes d'ordre i et i', et les colonnes d'ordre j et j'.

En adoptant la notation précédente, il est facile de voir que l'on a identiquement

$$(1) \qquad \frac{d^2R}{d(ij)\,d(i'j')} + \frac{d^2R}{d(ij')\,d(i'j)} = 0.$$

Les deux termes de cette formule s'obtiennent au signe près, en ôtant les lignes d'ordre i et i', et les colonnes d'ordre j et j'; mais ces deux termes se déduisent l'un de l'autre en permutant j et j', c'est-à-dire en permutant dans R deux colonnes; ils sont donc égaux et de signe contraire. C. Q. F. D.

Voici maintenant la démonstration d'un théorème dont nous avons fait usage dans la théorie de la stabilité de l'équilibre. Je dis que l'on a

$$\frac{dR}{d(ij)}\,\frac{dR}{d(i'j')} - \frac{dR}{d(ij')}\,\frac{dR}{d(i'j)} = R\,\frac{d^2R}{d(ij)\,d(i'j')}.$$

En effet, on a

$$\frac{dR}{d(1j)}(1k) + \frac{dR}{d(2j)}(2k) + \ldots \frac{dR}{d(nj)}(nk) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \gtrless k, \\ R \text{ si } j = k. \end{cases}$$

Multiplions par $\frac{d^2R}{d(i'j')\,d(ik)}$, faisons ensuite $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

et ajoutons les équations ainsi obtenues; nous aurons

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{R}}{d(i'j')}\frac{d\mathrm{R}}{d(ij)}\\ &\qquad+\left[\frac{d^2\mathrm{R}}{d(i'j')\,d(i1)}(i'1)+\frac{d^2\mathrm{R}}{d(i'j')d(i2)}(i'2)\ldots\right]\frac{d\mathrm{R}}{d(i'j)}\\ &=\mathrm{R}\,\frac{d^2\mathrm{R}}{d(i'j')\,d(ij)}.\end{aligned}\right.$$

Or, en vertu de (1), la quantité écrite entre crochets pourra s'écrire

$$-\left[\frac{d^2\mathrm{R}}{d(i'1)\,d(ij')}(i'1)+\frac{d^3\mathrm{R}}{d(i'2)\,d(ij')}(i'2)+\ldots\right],$$

ou

$$-\frac{d\mathrm{R}}{d(ij')},$$

et par suite la formule (A) donnera

$$\frac{d\mathrm{R}}{d(i'j')}\frac{d\mathrm{R}}{d(ij)}-\frac{d\mathrm{R}}{d(i'j)}\frac{d\mathrm{R}}{d(ij')}=\mathrm{R}\,\frac{d^2\mathrm{R}}{d(i'j')\,d(ij)}.$$

Jacobi appelle déterminant d'un système de fonctions

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,\quad \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$$

le déterminant suivant (*) :

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{d\varphi_1}{dx_2}\cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_n}\\ \frac{d\varphi_2}{dx_1} & \frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots & \frac{d\varphi_2}{dx_n}\\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \frac{d\varphi_n}{dx_2}\cdots & \frac{d\varphi_n}{dx_n}\end{vmatrix}$$

(*) Quelques auteurs appellent ce déterminant le *jacobien* de $\varphi_1, \ldots \varphi_n$. La théorie des déterminants fonctionnels est exposée en détail par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXII, *De Determinantibus fonctionalibus*).

Nous le désignerons, conformément à l'usage, par la notation

$$\frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

L'origine de cette notation tient au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on donne aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n systèmes d'accroissement*

$$(2)\qquad \left\{\begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, \ldots, & \lambda_n, \\ \mu_1, & \mu_2, \ldots, & \mu_n, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, & \rho_n, \end{matrix}\right.$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ prendront les systèmes d'accroissement

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} l_1, & l_2, \ldots, & l_n, \\ m_1, & m_2, \ldots, & m_n, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ r_1, & r_2, \ldots, & r_n, \end{matrix}\right.$$

et le déterminant du système des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sera la limite du rapport du déterminant des quantités (3) *au déterminant des quantités* (2), *lorsque celles-ci tendront vers zéro.*

En effet, on a

$$l_1 = \frac{d\varphi_1}{dx_1}\lambda_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}\lambda_n,$$

$$l_2 = \frac{d\varphi_2}{dx_1}\lambda_1 + \frac{d\varphi_2}{dx_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n}\lambda_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$m_1 = \frac{d\varphi_1}{dx_1}\mu_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}\mu_2 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}\mu_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, d'après la règle de la multiplication des déterminants, on voit que le déterminant des quantités (3) est le produit du déterminant des quantités (2) par le déterminant (1). Si donc $D(x_1, \ldots, x_n)$ représente le déterminant d'un système d'accroissements donnés à $x_1, \ldots, x_n$, et $D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ le déterminant du système des accroissements correspondants de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, on pourra mettre le déterminant (1) sous la forme

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

De là résultent plusieurs corollaires :

1° Si l'on suppose $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on aura

$$\frac{D(\varphi, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)};$$

2° Si l'on suppose un déterminant fonctionnel identiquement nul, par exemple si l'on a, quel que soit $x_1, \ldots, x_n$,

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 0,$$

il faudra en conclure

$$D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0.$$

Cette formule exprime que les équations

$$\begin{aligned}
l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_n\alpha_n &= 0,\\
m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_n\alpha_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots,\\
r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n &= 0
\end{aligned}$$

sont compatibles, ou, si l'on veut, que l'on a

$$\alpha_1 d\varphi_1 + \alpha_2 d\varphi_2 + \ldots + \alpha_n d\varphi_n = 0$$

pour n systèmes de valeurs de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Par suite, cette relation linéaire en $dx_1, \ldots, dx_n$ est une identité. Elle exprime que, si l'on suppose $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_{n-1}$ nuls, on a aussi $d\varphi_n = 0$, ou, si l'on veut, elle exprime que, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ restant constants, φ_n reste lui-même constant, et par suite φ_n peut être regardé comme fonction de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$; en d'autres termes, si l'on a

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 0,$$

identiquement les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ne sont pas indépendantes les unes des autres.

EXERCICES.

I. Supposons $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ liés à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à l'aide d'équations de la forme :

$$\Pi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots) = 0, \quad \Pi_2 = 0, \ldots, \quad \Pi_n = 0.$$

On aura

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{D(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} : \frac{D(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)}{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}.$$

II. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont fonctions composées de $x_1, \ldots, x_n$. Calculer le déterminant des fonctions φ par rapport aux variables x.

(Jacobi.)

FIN.

ERRATA.

Page 100, ligne 19, *au lieu de* $i - 2 < 2k$, *lisez* $i - 2 < 2k - 2$.

» 106, formule qui suit la formule (4), *au lieu de* (α, H), *lisez* (α, H_1).

» 165, quatrième formule, *au lieu de* $\dfrac{d\psi}{dt^2}$, *lisez* $\dfrac{d\psi^2}{dt^2}$.

BULLETIN

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET ASTRONOMIQUES;

RÉDIGÉ PAR M. G. DARBOUX,

AVEC LA COLLABORATION DE MM. HOÜEL ET LOEWY,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

Cette publication, exclusivement consacrée aux Mathématiques et à l'Astronomie, comprend trois Parties principales : 1° *comptes rendus de Livres;* 2° *analyses de Mémoires;* 3° *traductions de Mémoires importants et peu répandus*, et *Mélanges scientifiques*.

« Faire connaître aux savants l'état de la branche des sciences qu'ils cultivent, ce qu'il reste à faire, et le point d'où ils doivent partir s'ils veulent lui faire faire des progrès », tel était le but que s'était proposé M. de Férussac en fondant son *Bulletin*, qui a rendu pendant plusieurs années de si grands services aux géomètres.

Le nouveau *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* se rattache directement, par le but et le plan, à cette utile publication. Il sera accueilli, nous l'espérons, avec la même faveur que son devancier.

Le **Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques**, qui a été fondé en 1870, paraît chaque mois et forme par an un volume grand in-8 de 25 feuilles, avec figures dans le texte.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an (12 numéros):

Paris	15 fr.
Départements et Algérie	17
Angleterre, Allemagne, Belgique, Espagne, États-Romains, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Suisse, Turquie	18
Amérique du Nord, Chine, Cochinchine, Grèce	19
Amérique du Centre, Brésil, Chili, Pérou, Moldavie, Norvége.	20

ENTREPOT GÉNÉRAL DE CHAUFFAGE

Expéditions en Gros
Quai Duguay-Trouin
A SAINT-MALO
DE
Charbons Newcastle, Cardiff

NOISETTE DE SUNDERLAND
(1re Qualité)
POTEAUX DE MINES

Charbons de Terre de toutes provenances
CHARBONS DE BOIS, COKE ET BOIS DE CHAUFFAGE

Ancienne Maison TESSIER & GICQUEL

Vve GICQUEL Succseur

RUE DU MAIL, 1, & QUAI SAINT-CYR, 2

RENNES

COMMISSION EN MARCHANDISES DE TOUTE NATURE

Doit Mr De Marts Rue de Belair 1

Rennes, le 5 9bre 1879 Imp. Rennaise, — L. Caillot.

	1	Sac Chon de bois	3	00

Pr acquit
Pr Mme Gicquel
Hemel