THÉORIE
DES INTÉGRALES

ET

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR

LE Dr OSKAR SCHLOEMILCH,

Professeur à l'École Polytechnique de Dresde, Membre des Académies de Leipzig, de Stockholm, etc., correspondant de la Société Royale des Sciences de Liége, membre de l'Académie Léopoldine, etc.

TRADUIT DE L'ALLEMAND,

ET PRÉCÉDÉ D'UNE INTRODUCTION SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE,

PAR

JOSEPH GRAINDORGE,

Docteur spécial en sciences physico-mathématiques, Répétiteur à l'École des mines de Liége,
Membre de la Société Royale des Sciences de Liége,
Correspondant de la Société Mathématique de Paris, etc.

LIÉGE,
EMILE DECQ, Libraire-Éditeur,
Rue de la Régence, 4.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, Impr.-Libraire
de l'École Polytechnique, etc.
Quai des Augustins, 55.

1873.

PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

On sait que les théories ordinaires du calcul intégral sont en général impuissantes, lorsque l'expression à intégrer renferme un radical sous lequel se trouve un polynome d'un degré supérieur au second. On ne peut, dans la plupart des cas, ramener ces intégrales à une forme normale connue.

Legendre, le premier, a traité des expressions de cette espèce, pour des irrationnelles renfermant des racines carrées de polynomes du troisième et du quatrième degré. Il les réduisit à trois formes simples, auxquelles il donna le nom de *fonctions elliptiques :* il a formé des tables pour le calcul numérique de ces fonctions. Plus tard, seulement, grâce aux travaux remarquables d'Abel et de Jacobi, et surtout de leurs successeurs, on reconnut que Legendre avait pris la question à un point de vue très-désavantageux. Abel montra l'utilité de la considération des fonctions inverses des intégrales de Legendre. Il fit voir la possibilité d'établir une théorie de ces fonctions inverses analogue à celle des fonctions trigonométriques. C'est à ces nouvelles fonctions qu'il a donné, et que l'on donne encore aujourd'hui, le nom de *fonctions elliptiques*. Quant aux fonctions de Legendre, on les désigne maintenant sous la dénomination d'*intégrales elliptiques*. Le point de départ du géomètre suédois est la double périodicité des fonctions elliptiques, propriété que Legendre n'avait pu découvrir dans ses intégrales. La voie toute nouvelle, ouverte par Abel, fut suivie par la plupart de ses successeurs. On abandonna complètement le terrain exploré par Legendre. De nombreux travaux dûs particulièrement à M. Hermite et aux géomètres allemands, donnèrent à la théorie un développement considérable : elle est devenue une des parties les plus importantes de l'analyse. Ses applications à la mécanique, à la physique mathématique, à la théorie des nombres sont si nombreuses qu'il est nécessaire de la rendre classique.

Cependant, la théorie des fonctions elliptiques est peu répandue : quelques géomètres seulement s'en occupent avec ardeur. A quoi attribuer cet abandon d'une partie des mathématiques, si féconde en résultats remarquables, sinon au peu de soin que l'on attache à son enseignement. Il est regrettable que M. Liouville, qui a traité plusieurs fois ce sujet au collége de France, n'ait pas publié ses belles leçons. Il est étonnant qu'aucun géomètre français n'ait fait pour la nouvelle théorie le travail que Legendre avait exécuté pour les intégrales elliptiques. La *Théorie des fonctions doublement périodiques* de MM. Briot et Bouquet, dans laquelle on reconnait les leçons de M. Liouville, est le seul ouvrage publié en France sur cet objet. En Allemagne, au contraire, plusieurs auteurs ont publié des traités sur cette matière. Il nous suffira de citer les noms de MM. Durège, Schellbach et Schloemilch. Ces ouvrages ont eu un succès complet. Nous avons pensé que la traduction de l'un d'entre eux pourrait rendre quelque service pour l'étude de cette science. Nous avons préféré le traité de M. Schloemilch, parce que l'on y trouve les deux théories bien séparées : dans la première partie, l'ancienne théorie de Legendre (des intégrales elliptiques), et dans la seconde partie la théorie des fonctions elliptiques. D'un autre côté, ce travail se distingue par la clarté d'exposition qui caractérise le savant professeur de Dresde ; il renferme les notions nécessaires pour la lecture de tous les ouvrages originaux, et des nombreux mémoires insérés dans les journaux scientifiques.

Afin que le lecteur ne soit pas rebuté par quelques expressions employées dans ce travail, nous avons cru utile de faire précéder notre traduction d'un chapitre préliminaire, où nous avons exposé le plus simplement possible la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, et des intégrales prises entre des limites imaginaires. Nous avons introduit, à la fin de plusieurs chapitres, quelques notes qui nous ont paru utiles : ces remarques se rapportent à diverses propriétés des séries et des nombres. Enfin, nous avons rétabli à la fin du chapitre II de la seconde partie une démonstration que M. Schloemilch avait omise.

Nous ne pouvons terminer cette préface sans exprimer nos plus vifs remerciments à M. Schloemilch, qui a eu l'extrême obligeance de revoir avec le plus grand soin les épreuves de notre traduction.

J. G.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE PARTIE.

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

DEUXIÈME PARTIE.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 28, ligne 13, au lieu de β_1, lisez β.

» 65, » 18 au dénominateur, au lieu de $k^2 \sin^2 \theta$, lisez $k'^2 \sin^2 \theta$.

» 66, » 4, lisez : $dxdy = \left(\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta}\right) d\varphi\, d\theta$.

» 68, » 18, lisez : $s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$.

» 72, » 10, lisez : en désignant par φ, ψ, σ, les amplitudes etc.

» 75, » 12, au lieu de $-\mathrm{AB}\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}\sin\theta$, lisez $-\mathrm{AB}\frac{d\mathrm{R}}{d\omega}\sin\theta$.

» 79, » 4 en bas, au lieu de $\mathrm{CU_1V_1}$, lisez $\mathrm{CU_1V_1}$....

» 87, » 2, lisez le plan horizontal $\xi\eta$.

» 183, dernière ligne, au lieu de $\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}}$, lisez $\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}$.

INTRODUCTION.

I. Propriétés des fonctions d'une variable imaginaire.

1. On appelle *fonction* une quantité dépendant d'une autre quantité appelée *variable*. On dit que la fonction est *continue*, lorsqu'elle varie d'une manière continue, en même temps que la variable change aussi d'une manière continue, au moins dans un ou plusieurs intervalles.

La nature, réelle ou imaginaire, de la fonction dépend des opérations faites sur la variable pour obtenir la fonction, que cette variable soit réelle ou imaginaire. La variable étant réelle, la fonction peut être imaginaire.

Réciproquement, lorsque la variable est imaginaire, par exemple $z = x + y\sqrt{-1}$, la fonction $\mathrm{f}(z)$ peut être réelle ou imaginaire. Elle répond à certaines opérations faites sur z ou sur $x + y\sqrt{-1}$.

On admet, en général, que toute fonction $\mathrm{f}(z)$ ou $\mathrm{f}(x + y\sqrt{-1})$ est de la forme $u + v\sqrt{-1}$,

$$w = \mathrm{f}(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y) = u + v\sqrt{-1}.$$

La fonction $\mathrm{f}(z)$ dépend de x et de y en même temps, et non de x ou de y isolément.

Une variable réelle peut, comme on sait, être représentée par un point se mouvant sur une droite fixe, l'axe des abscisses, par exemple. Chaque valeur réelle de la variable est représentée par la distance du point mobile à un point fixe, l'origine. On peut, de la même manière, donner une représentation géométrique d'une variable complexe.

2. PROPRIÉTÉ. — A toute quantité imaginaire

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

correspond un point M d'un plan, dont l'abscisse et l'ordonnée par rapport à deux axes rectangulaires sont x, y, et réciproquement. On peut dire que l'imaginaire $z = x + y\sqrt{-1}$, est représentée géométriquement par le point M, ou encore par la ligne brisée OPM (fig. I).

Remarque I. — D'après cela, un point de l'axe des abscisses est représenté par chaque valeur réelle de z, pour laquelle $y = 0$.

Chaque valeur imaginaire de z, de la forme $y\sqrt{-1}$ désigne un point de l'axe des ordonnées.

Remarque II. — La quantité complexe $z = x + y\sqrt{-1}$ pouvant être mise sous la forme :

$$z = \rho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi),$$

on en conclut que le module ρ représente la distance du point mobile à l'origine, et l'angle φ l'inclinaison du rayon vecteur ρ sur l'axe des abscisses. On peut donc dire qu'une quantité complexe représente une droite en grandeur et en direction. En d'autres termes, elle représente le rayon vecteur mené de l'origine au point considéré, ou une droite égale à ce rayon et qui lui est parallèle.

3. Lorsque l'on fera varier x, y, d'une manière continue, le point M, que nous appellerons indifféremment le point z, ou le point $x + y\sqrt{-1}$, décrira d'une manière continue une certaine courbe déterminée par la loi suivant laquelle on fera varier x et y.

Si l'on veut passer d'une manière continue du point A $(x_0 + y_0\sqrt{-1})$ à un point B $(X + Y\sqrt{-1})$, le chemin suivi par le point mobile M sera complètement arbitraire : la seule condition à laquelle ce chemin sera soumis, c'est que la courbe AMB soit continue.

Une variable réelle ne peut parvenir d'une valeur à une autre que par un seul chemin, c'est-à-dire par la partie de l'axe des abscisses comprise entre les deux points correspondants. Une variable imaginaire, au contraire, peut passer d'une valeur à une autre par une infinité de chemins différents.

4. Cela posé, soit la fonction

$$w = \mathrm{f}(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = u + v\sqrt{-1}.$$

Nous pouvons considérer u, v, comme les coordonnées d'un point P mobile sur un plan (fig. 2), et rapporté à deux axes rectangulaires OU et OV. Nous l'appellerons le point w, ou le point $u + v\sqrt{-1}$.

Il est évident qu'à un point M $(x + y\sqrt{-1})$ choisi arbitrairement, correspond un point P $(u + v\sqrt{-1})$ déterminé. Pour un chemin donné AMB du point mobile M, on aura un chemin déterminé aPb du point P. Par suite, à chaque chemin choisi arbitrairement du point M, correspond une courbe déterminée sur le plan UV.

Si la courbe AMB est continue, la courbe aPb sera aussi continue, pourvu que u, v, soient des fonctions continues de x, y. Nous dirons alors que la fonction $\mathrm{f}(z)$ est une *fonction continue* de la variable imaginaire $z = x + y\sqrt{-1}$.

5. Il existe deux espèces de fonctions de variables imaginaires :

1° Les fonctions qui ne prennent qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable. Telles sont, par exemple, les fonctions algébriques rationnelles, les fonctions exponentielles et les fonctions trigonométriques. Ces fonctions sont appelées *monodromes :* cette dénomination est due à Cauchy. M. Liouville les appelle *fonctions bien déterminées* : ce nom a été adopté par M. Bertrand (*Traité de calcul différentiel,* I, 373). Une fonction $\mathrm{f}(z)$ peut n'être bien déterminée que dans une certaine étendue des valeurs de la variable. Elle peut même devenir infinie, mais alors son inverse $\frac{1}{\mathrm{f}(z)}$ doit être bien déterminée à partir de la valeur zéro.

2° Les fonctions qui, pour chaque valeur de la variable, prennent deux ou plusieurs valeurs distinctes. On les appelle *fonctions ambigues* ou *fonctions à plusieurs acceptions.* MM. Liouville et Bertrand les appellent *fonctions mal déterminées* ou *mal définies.*

Telles sont, par exemple, les fonctions irrationnelles, les fonctions logarithmiques : ainsi, $\sqrt{z-a}$ a deux acceptions, $\sqrt[3]{z}$ en a trois, $\log z$ admet, pour chaque valeur de z, une infinité de valeurs distinctes.

Les fonctions monodromes ont reçu de M. Hermite le nom de *fonctions uniformes :* il donne aux fonctions ambigues le nom de *fonctions non uniformes.*

6. Nous ferons une remarque très-importante pour les fonctions ambigues, ou à plusieurs acceptions. Elle consiste en ce qu'il existe des valeurs particulières des variables pour lesquelles deux ou plusieurs valeurs de la fonction deviennent égales.

Ainsi, $\sqrt{z}$, en général, a deux valeurs différentes : cependant, pour $z = 0$, ces deux valeurs deviennent égales entre elles, et sont nulles.

Soit, par exemple, une fonction continue de la variable $z = x + iy$; soient $u + iv$, $U + iV$, les deux valeurs différentes que prend cette fonction pour chaque valeur de z, et supposons que, pour $z = a = \alpha + i\beta$, ces deux valeurs se réduisent à une seule $\gamma + i\delta$. Il est évident que chaque point M $(x + iy)$ donne deux points P, Q, dont les coordonnées sont u, v, pour P, et U, V, pour Q; par conséquent, tandis que M décrit la courbe AB, les points P et Q décrivent les deux courbes ab et $a'b'$ (fig. 3).

Cela admis, si la courbe AB ne passe pas par le point C, dont les coordonnées sont α, β, on n'aura jamais en même temps $x = \alpha$, $y = \beta$, c'est-à-dire jamais $z = a$. On n'aura donc jamais $u = U = \alpha$, $v = V = \beta$; par conséquent, les courbes ab et $a'b'$ n'auront pas de point commun. Au contraire, si le chemin AB passe par le point C les conditions précédentes seront satisfaites, et les deux courbes ab, $a'b'$ auront un point commun D.

Le point C porte le nom de *point de ramification*, ou *point d'embranchement*.

Théorème. — *Les courbes ab, $a'b'$ ont un point commun ou n'en ont pas, suivant que le chemin de z passe ou non par un point de ramification.*

7. Supposons maintenant que le point mobile $z = x + iy$ puisse aller d'un point initial $z_0 = x_0 + iy_0$ à un point $z_1 = x_1 + iy_1$ par différents chemins. Voyons ce qui résultera pour une fonction continue et monodrome $f(z)$ d'un changement de chemin pour z entre ces deux points extrêmes. Soient

$$f(z_0) = u_0 + iv_0, \qquad f(z_1) = u_1 + iv_1,$$

les deux valeurs extrêmes de $f(z)$. Tandis que M va du point A en B par le chemin AMB, P va de a en b par le chemin aPb. Si M va de A en B par un autre chemin AM'B, alors P parcourt une autre courbe, et, partant de a, il aboutira encore en b (fig. 1 et 2) : sans cela, à la même valeur $z_1 = x_1 + iy_1$, correspondraient deux valeurs différentes de $f(z)$, ce qui est impossible, puisque $f(z)$ est monodrome.

Théorème. — *Pour toute fonction monodrome, la valeur finale* $f(z_1)$

est indépendante du chemin par lequel z va de la valeur initiale z_0 à la valeur finale z_1.

8. PROPRIÉTÉ. — Si le chemin parcouru par z est une courbe fermée, alors la valeur finale de z, et, par conséquent, aussi celle de $f(z)$ est la même que la valeur initiale. Par suite, la courbe décrite par $f(z)$ est aussi fermée.

9. Si la fonction considérée n'est pas monodrome, les raisonnements précédents ne sont plus applicables.

Considérons, par exemple, une fonction ambigue, admettant deux acceptions. On doit alors distinguer deux cas :

1° Ou bien le point z décrit une courbe qui ne passe pas par un point de ramification.

2° Ou bien le chemin parcouru par le point z passe par un tel point.

10. 1er CAS. —Soit AMB le chemin décrit par le point z sur le plan xy : à ce chemin correspondent, par exemple, deux courbes ab, $a'b'$ qui n'ont aucun point commun. Si le chemin AMB change infiniment peu, à cause de la continuité les courbes ab, $a'b'$ changent aussi infiniment peu (fig. 4). Mais les deux nouvelles courbes se trouvent, comme les deux premières, à des distances finies l'une de l'autre. Par conséquent, il est impossible par un changement infiniment petit de changer les deux courbes l'une dans l'autre. En répétant plusieurs fois cette opération, c'est-à-dire si l'on fait subir un changement continu à la courbe AB, de telle sorte qu'aucune des courbes AB ne passe par un point de ramification, on peut appliquer à chaque courbe ab, $a'b'$, ce que nous avons dit pour les fonctions monodromes.

THÉORÈME. — *Si le point* M *parcourt une courbe fermée, ne renfermant aucun point de ramification dans son intérieur, chacun des points a, a', parcourt de même une courbe fermée.*

11. 2e CAS. — Supposons maintenant que l'une des courbes AB, décrites par le point M, passe par un point de ramification C, et soit D le point correspondant sur le plan UV (fig. 5).

Tandis que M va de A en C, le point P va de a en P; à partir de C, lorsque M va de C en B, la fonction a deux acceptions : par suite, rien ne nous oblige à faire correspondre la courbe Db à CB.

Nous pouvons parfaitement faire décrire au point P le chemin Db', et ensuite, tandis que M reviendra au point A par un autre chemin, faire décrire à P le chemin $b'a'$, et revenir en a' avec une valeur de la fonction différente de celle qu'elle avait en a. Le point P aura alors décrit le chemin $Dab'a'$, pendant que le point M décrit le chemin ACBA.

THÉORÈME. *Si le point* M *parcourt une courbe fermée, renfermant un point de ramification, il n'en résulte pas que les points* P *et* P' *décrivent des courbes fermées.* En d'autres termes, il ne résulte pas de là que *la fonction reprenne sa valeur initiale lorsque le point* M *revient à son point de départ.*

Remarque. — Les raisonnements précédents subsistent évidemment aussi pour les fonctions qui ont plusieurs points de ramification et plusieurs acceptions.

12. Lorsque z est une variable réelle, la fonction

$$w = \mathrm{f}(z),$$

est monodrome; sa dérivée est aussi une fonction monodrome, quel que soit l'accroissement dz de la variable.

Proposons-nous de rechercher s'il en sera de même, lorsque z est une variable imaginaire; observons d'abord que, dans ce cas, x, y sont deux variables indépendantes dont les accroissements dx et dy sont complétement indépendants. Pour que $u + iv$ soit considérée comme une fonction de $x + iy$, il ne suffit pas que cette expression soit déterminée quand on se donne x, y; il faut encore qu'elle ait une dérivée déterminée, et que le rapport de son accroissement infiniment petit à l'accroissement correspondant $dx + idy$ soit indépendant de $\frac{dy}{dx}\cdot$ En d'autres termes, ce rapport doit être indépendant de la direction suivant laquelle le point z se déplace dans le plan xy.

Si nous donnons à x, y, des accroissements dx et dy, tels que $dz = dx + idy$, nous aurons :

$$dw = d(u + iv) = du + idv = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + i\left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy\right)\cdot$$

On tire de là :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy} + i\frac{dv}{dy}\right)dy}{dx + idy}$$

$$= \frac{\left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy} + i\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}.$$

Or, cette formule nous montre qu'en général, lorsque x, y sont complétement indépendants l'un de l'autre, la dérivée $\frac{dw}{dz}$ dépend du rapport $\frac{dy}{dx}$. Comme la direction suivant laquelle le point z se meut sur le plan xy est tout-à-fait arbitraire, $\frac{dw}{dz}$ est une fonction ambigue, indéterminée : à une même valeur de z, correspondent une infinité de dérivées.

13. Si l'on veut donc que $\frac{dw}{dz}$ soit indépendant du déplacement du point z, ou que l'indétermination de la dérivée disparaisse, il faut rendre $\frac{dw}{dz}$ indépendant de $\frac{dy}{dx}$, en posant

$$\frac{\frac{du}{dy}+i\frac{dv}{dy}}{i}=\frac{\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}}{1}.$$

On tire de là :

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=i\left(\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}\right);$$

cette équation se décompose en deux autres :

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy},\quad \frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}. \tag{a}$$

Ces deux équations expriment la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\frac{dw}{dz}$ soit indépendante de la grandeur et de la direction du déplacement du point z : en d'autres termes, *lorsqu'elles sont vérifiées, la fonction a une dérivée unique en chaque point.*

Lorsque cette condition est satisfaite, Cauchy donne à la fonction le nom de *fonction monogène.*

Remarque. — M. Schloemilch donne une autre démonstration de ces relations (*Compendium der höheren Analysis*, II, p. 45). On trouve dans « *la théorie des fonctions doublement périodiques* » de MM. Briot et Bouquet une interprétation géométrique très-remarquable de ces deux équations. Cet ouvrage donne aussi l'interprétation géométrique de Cauchy.

14. On conclut de ce qui précède que pour que la fonction soit monogène, aucune des deux fonctions réelles u, v, ne peut être arbitraire. Chacune d'elles doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du second ordre. En effet, si l'on différentie la première équation (a) par rapport à x, la seconde par rapport à y, et si l'on retranche, on éliminera v; la variable u satisfait à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0.$$

De même, en différentiant la première par rapport à y, la seconde par rapport à x, et ajoutant, on éliminera u, et il vient :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0.$$

D'après cela, u et v satisfont à une seule et même équation aux dérivées partielles du second ordre.

II. Intégrales des fonctions synectiques.

15. On dit qu'une fonction est *synectique* dans une certaine portion du plan, lorsqu'elle reste finie, continue, monodrome et monogène dans cette portion du plan. Cette dénomination est due à Cauchy.

D'après ce que l'on sait de l'intégration des fonctions d'une variable réelle, l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, prise entre des limites réelles z_0, Z s'obtient de la manière suivante : on insère entre z_0 et Z, un nombre quelconque de valeurs de z, telles que

$$z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < Z,$$

et l'on a

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \lim\,[(z_1-z_0)\,f(z_0)+(z_2-z_1)\,f(z_1)+\cdots+(Z-z_{n-1})\,f(z_{n-1})],$$

ou bien

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z)-F(z_0),$$

en désignant par $F(z)$ l'intégrale indéfinie $\int f(z)\,dz$.

16. Nous adopterons la même définition pour des valeurs imaginaires de z_0, Z, z. Mais, il existe ici une différence essentielle entre ces deux espèces d'intégrales. Une valeur réelle de z ne peut passer de z_0 à Z que par un seul chemin, au contraire, pour des valeurs imaginaires de z, cela est possible d'une infinité de manières. Donc, une intégrale définie, prise entre des limites imaginaires, doit avoir une infinité d'acceptions, et l'on doit chercher l'influence que le chemin suivi par la variable aura sur la valeur de l'intégrale. Cette courbe partant d'un point initial z_0 qui figure la limite inférieure, pour aboutir à un point final Z correspodant à la limite supérieure, est ce que M. Neumann appelle le *fil conducteur* pour l'intégration de $\mathrm{f}(z)\,dz$ entre les limites proposées.

17. Soit $\mathrm{f}(z)$ une fonction *synectique* dans une certaine portion du plan, et soit une intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}(z)\,dz,$$

prise entre les limites z_0 et Z. Cherchons la variation de cette intégrale, lorsque l'on remplace le chemin z_0MZ par un chemin infiniment voisin z_0M′Z, compris dans cette portion du plan (fig. 6). A cet effet, supposons qu'à chaque point m du chemin z_0MZ corresponde un point n de la deuxième courbe z_0M′Z, de manière que z_0 se corresponde, ainsi que Z. Si l'on va du point m au point voisin m' sur la même courbe, la fonction $\mathrm{f}(z)$ prend un accroissement $d\,\mathrm{f}(z)$: tandis que, si l'on passe de m en n sur la deuxième courbe, la fonction subit la variation $\delta\,\mathrm{f}(z)$ (1).

Puisque la fonction $\mathrm{f}(z)$ est monodrome, elle prend en n la même valeur, soit que l'on suive le chemin z_0mn ou le chemin z_0M′n. La différence entre les valeurs de la fonction en m en suivant le premier chemin, ou en n en suivant le second chemin, est donc égale à la variation correspondant à mn, c'est-à-dire à $\delta\,\mathrm{f}(z)$.

Or, la fonction étant monogène, sa dérivée est la même pour les deux déplacements. Donc, puisque

$$d\,\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}'(z)\,dz, \qquad \delta\,\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}'(z)\,\delta z,$$

on aura :

$$\delta\,\mathrm{f}(z)\,dz = d\,\mathrm{f}(z)\,\delta z.$$

---

(1) Nous admettons ici que les notations d et δ conservent la même définition que dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

Mais la variation de l'intégrale définie, quand on passe de z_0MZ à z_0M'Z, est

$$\delta \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} [\delta f(z)\,dz + f(z)\,d\cdot\delta z] = \int_{z_0}^{Z} [d f(z)\,\delta z + f(z)\,d\cdot\delta z]$$

$$= \int_{z_0}^{Z} d\Big[f(z)\,\delta z\Big] = \Big[f(z)\,\delta z\Big]_{z_0}^{Z}.$$

Les points extrêmes étant fixes, on a $\delta z_0 = 0$, $\delta Z = 0$: donc,

$$\delta \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = 0.$$

On a, par conséquent, le théorème suivant :

Théorème. — *L'intégrale* $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ *est indépendante du chemin d'intégration, tant que la fonction* $f(z)$ *reste synectique entre ces chemins.* En d'autres termes : *si l'on considère deux courbes allant d'un point* A *à un point* B, *et si* $f(z)$ *est synectique dans la portion du plan comprise entre ces deux courbes, ces deux chemins conduiront à la même valeur de l'intégrale définie.*

En effet, on peut passer de l'une à l'autre de ces courbes par une série de transformations qui n'altèrent pas la valeur de l'intégrale.

18. On conclut de là le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction* $f(z)$ *est synectique dans l'intérieur d'une courbe fermée, l'intégrale prise le long de ce contour est nulle.*

En effet, l'intégrale prise le long de z_0MZ (fig. 7) est la même que l'intégrale prise le long de z_0M'Z. Donc, si le point Z coïncide avec z_0, cette intégrale sera nulle.

19. Théorème. — *Si* $f(z)$ *est synectique dans la portion du plan comprise entre deux courbes fermées, les intégrales correspondant à ces deux contours sont égales.*

En effet, le chemin A'B'C'A' (fig. 8) peut être remplacé par A'ABCAA'. Or, l'intégrale prise le long de AA' est évidemment égale et de signe contraire à l'intégrale prise le long de A'A. Donc, les intégrales prises le long de A'B'C'A' et de ABCA sont égales.

Si nous désignons par I (S) l'intégrale prise le long du contour S, nous aurons évidemment :

$$I\,(A'B'C'A') = I\,(A'ABCAA')$$

Or,

$$I\,(A'ABCAA') = I\,(A'A) + I\,(ABCA) + I\,(AA') = I\,(ABCA).$$

Donc,

$$I\,(A'B'C'A') = I\,(ABCA).$$

20. Examinons maintenant ce qui arrive lorsque le chemin d'intégration de la variable z renferme un point pour lequel f (z) devient ambigue, infinie ou discontinue.

Si la fonction f (z) devient infinie, ou change brusquement de signe pour une valeur quelconque de z, elle ne cesse cependant pas d'être monodrome. Nous donnerons aux points, pour lesquels cela a lieu, le nom de *points d'exception*. Nous supposerons que f (z) reste monodrome entre des limites déterminées, mais qu'elle puisse devenir infinie et discontinue, ou l'un des deux seulement, pour des valeurs comprises entre ces limites. Ces fonctions sont appelées *asynectiques*.

21. *Remarque.* — Les points que nous appelons *points d'exception*, d'après M. Schloemilch (*Compend. der höh. Anal.* II, 58), sont compris dans la dénomination générale de points singuliers de Cauchy. Ce dernier désigne sous le nom unique de points singuliers :

1° Les points pour lesquels deux ou plusieurs valeurs de la fonction différentes en général, deviennent égales entre elles. Ce sont les points que nous avons appelés *points de ramification* ou *points d'embranchement*. (*Verzweigungspunkte*).

2° Les points où la fonction devient infinie ou discontinue : ce sont *les points d'exception*. (*Ausnahmepunkte*).

Nous avons cru, dans l'intérêt de la clarté, et en cela, nous avons d'ailleurs suivi l'exemple de M. Hermite (*Cours d'Analyse de l'École polytechnique*), devoir conserver ces deux dénominations. M. Durège a adopté la dénomination unique de Cauchy.

Les points de ramification sont ceux que M. Bertrand appelle *points critiques*. On pourrait adopter les noms suivants, qui répondraient bien, me paraît-il, à la nature de ces points :

1° Aux points de ramification on donnerait le nom de *points singuliers*.

2° Aux points d'exception le nom de *points critiques*.

22. Ces définitions admises, soit ABCD une courbe d'intégration renfermant un point d'exception E. Supposons, en outre, qu'il ne se trouve sur cette courbe, ni à son intérieur, ni un second point d'exception, ni un point de ramification, et soit A′B′C′D′ un second chemin d'intégration (fig. 9). Si nous menons les deux droites AA′, CC′, nous formerons deux nouveaux contours fermés ABCC′B′A′A et ADCC′D′A′A ne renfermant par le point E. En les prenant comme chemins d'intégration, nous aurons :

$$I(ABCC'B'A'A) = I(ADCC'D'A'A).$$

Si nous décomposons les intégrales des deux membres en leurs parties, il vient :

$$I(ABC) + I(CC') + I(C'B'A') + I(A'A) = I(ADC) + I(CC') + I(C'D'A') + I(A'A),$$

ou bien

$$I(ABC) - I(ADC) = I(C'D'A') - I(C'B'A').$$

Or, cette équation nous donne(1)

$$I(ABC) + I(CDA) = I(C'D'A') + I(A'B'C'),$$

ou bien

$$I(ABCDA) = I(A'B'C'D'A').$$

On en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction* f(z) *reste synectique sur les deux chemins* ABCD *et* A′B′C′D′, *et dans la portion du plan comprise entre ces deux courbes, les intégrales correspondant à ces deux contours sont égales.*

23. *Corollaire.* — Il en résulte que l'on peut toujours remplacer un chemin d'intégration par un autre plus petit, entourant le point d'exception. On pourra donc le remplacer par un cercle infiniment petit décrit autour du point E.

24. *Remarque* I. — Si E est le point d'exception unique compris dans l'intérieur de la courbe ABCD, on pourra prendre pour le chemin A′B′C′D′ un cercle d'un rayon très-petit r. Alors, en désignant par ξ, η, les coordonnées du point E (fig. 10), on aura, pour les points x, y, du cercle A′B′C′D′ :

$$x = \xi + r\cos\theta, \qquad y = \eta + r\sin\theta.$$

(1) En effet, on a

$$I(ADC) = -I(CDA), \qquad I(C'B'A') = -I(A'B'C').$$

Par suite, en posant

$$z = x + iy, \qquad \zeta = \xi + i\eta,$$

il vient :

$$z = \zeta + re^{i\theta}.$$

L'intégrale prise le long du cercle A′B′C′D′ devient alors :

$$i\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \mathrm{f}(\zeta + re^{i\theta})re^{i\theta}\,d\theta,$$

en désignant par θ_0 la valeur initiale de θ.

Lorsque r devient infiniment petit, on a

$$\lim \mathrm{f}(\zeta + re^{i\theta})\,re^{i\theta} = \lambda,$$

et l'intégrale donne

$$i\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \lambda d\theta.$$

Si nous supposons, en outre, ce qui arrive généralement, que λ est indépendant de θ, l'intégrale devient :

$$2\pi\lambda i,$$

et nous aurons :

$$\int_{(1)} \mathrm{f}(z)\,dz = 2i\pi\lambda,$$

si le chemin d'intégration ne renferme qu'un seul point d'exception.

Nous désignons par $\int_{(n)} \mathrm{f}(z)\,dz$ l'intégrale de $\mathrm{f}(z)\,dz$, prise le long d'un contour renfermant n points d'exception.

25. *Remarque* II. — S'il existe deux points d'exception à l'intérieur du contour fermé d'intégration, on peut trouver un résultat analogue.

En effet, soient

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \qquad \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2,$$

ces deux points d'exception. Menons une ligne AC (fig. 11) qui divise le contour en deux parties telles que chacune renferme un seul des points critiques. Nous aurons, pour le premier contour ABCA,

$$\mathrm{I}\,(\mathrm{ABCA}) = 2i\pi\lambda_1,$$

et, pour le second,

$$\mathrm{I}\,(\mathrm{CDAC}) = 2i\pi\lambda_2.$$

Or,

$$I(ABCDA) = I(ABCA) + I(ACDA) = I(ABC) + I(CA) + I(AC) + I(CDA).$$

Mais, puisque $I(CA) = -I(AC)$, il vient :

$$I(ABCDA) = I(ABC) + I(CDA).$$

Par conséquent,

$$I(ABCDA) = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2),$$

formule que l'on peut écrire

$$\int_{(2)} f(z)\, dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

En général, si la courbe renferme n points critiques, on a :

$$\int_{(n)} f(z)\, dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$

26. Il nous reste maintenant à voir ce qui arrive lorsque la courbe d'intégration se coupe en un ou plusieurs points, c'est-à-dire lorsqu'elle entoure plusieurs fois un point critique. A cet effet, considérons le contour ABCDGCHA (fig. 12), qui entoure deux fois le point E. Menons les deux lignes AD et AG, de telle sorte que la courbe ADG ne renferme pas le point E. On peut alors (**17**) remplacer le chemin DG par le chemin DAG : par conséquent, on peut prendre pour chemin d'intégration le contour ABCDAGCHA.

Or, ce chemin peut être décomposé en deux autres ABCDA et AGCHA, et il vient :

$$I(ABCDAGCHA) = I(ABCDA) + I(AGCHA).$$

Chacun de ces chemins n'entourant qu'une seule fois le point E, l'intégrale prise le long de ce contour sera $2i\pi\lambda$. Donc, la valeur de l'intégrale sera

$$I(ABCDAGCHA) = 4i\pi\lambda,$$

ou bien

$$I(ABCDGCHA) = 4i\pi\lambda.$$

27. En général, si le contour multiple est de l'ordre n, c'est-à-dire s'il entoure n fois le point E, on a pour la valeur de l'intégrale

$$I = \pm 2ni\pi\lambda,$$

suivant que le chemin est parcouru dans le sens positif ou négatif.

28. Théorème. — *Lorsque le chemin d'intégration est multiple et de l'ordre n, il peut se réduire à un parcours multiple d'un cercle élémentaire décrit autour du point d'exception.*

29. En terminant, considérons une intégrale prise entre les limites z_0 et z_1,

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\, dz,$$

dans laquelle f (z) peut devenir infinie ou discontinue pour certaines valeurs de z. Examinons le cas où la courbe d'intégration ABCD entre les points A et D, entoure plusieurs fois *un seul point d'exception* (fig. 13).

Menons la ligne CA joignant au point A un point C, situé vers le point D, de manière que le chemin ACD ne renferme pas le point critique. Le chemin CD pourra être remplacé par le chemin CAD. Alors le contour d'intégration ABCD pourra être remplacé par le contour ABCA, entourant n fois le point critique E, et par la droite AD. Mais le chemin ABCA peut être remplacé par un parcours multiple d'un cercle élémentaire décrit autour du point E, et l'on a le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les chemins possibles d'intégration entre* A *et* D *se réduisent à un parcours multiple d'un cercle élémentaire, décrit autour de* E, *et au chemin rectiligne* AD.

30. Si l'on désigne par

$$\int\!\Big|_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\, dz,$$

la valeur que prend l'intégrale le long de la droite AD, on aura :

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\, dz = \pm\, 2ni\pi\lambda + \int\!\Big|_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\, dz.$$

On conclut de là que, si le chemin d'intégration entoure un point critique, l'intégrale a une infinité d'acceptions.

L'intégrale $\int\!\Big|_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\, dz$ est appelée par M. Schloemilch *l'intégrale linéaire* entre les limites données.

31. On peut facilement déduire de ce qui précède la formule générale suivante :

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\,dz = \int\Big|_{z_0}^{z_1} \mathrm{f}(z)\,dz + 2i\pi\,(\pm\, n_1\lambda_1 \pm n_2\lambda_2 \pm \cdots \pm n_\mu\lambda_\mu),$$

laquelle aura lieu lorsque le chemin d'intégration partant de A, entoure n_1 fois un premier point critique, n_2 fois un second point, etc., le nombre de ces points critiques étant μ.

32. *Remarque.* — La formule précédente est applicable, quel que soit l'ordre dans lequel les points critiques sont entourés par le contour. Ainsi, elle aura encore lieu si la courbe partant de A entoure d'abord m fois le premier point, puis p fois le second point, puis de nouveau q fois le premier point, etc. En effet, on aura alors

$$\pm\, 2mi\pi\lambda_1 \pm 2pi\pi\lambda_2 \pm 2qi\pi\lambda_1 \pm \cdots = \pm\, 2\,(m+q)\,i\pi\lambda_1 \pm 2pi\pi\lambda_2 \pm \cdots,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

J. Graindorge.

PREMIÈRE PARTIE.

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

I. Réduction des intégrales elliptiques.

Lorsque l'on a à traiter une intégrale qui ne se ramène pas directement aux intégrales fondamentales, on cherche tout d'abord à la réduire, au moyen de transformations convenables, à d'autres intégrales plus simples, dont les valeurs sont déjà connues ou plus faciles à calculer. Par exemple, soit l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2}},$$

dans laquelle $\mathrm{F}(x)$ est une fonction rationnelle de x : si l'on élimine le radical au moyen des substitutions ordinaires, on obtient une intégrale de la forme :

$$\int \frac{\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 y + \mathrm{B}_2 y^2 + \cdots + \mathrm{B}_m y^m}{\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 y + \mathrm{C}_2 y^2 + \cdots + \mathrm{C}_n y^n}\,dy.$$

Cette dernière peut être traitée par les méthodes connues, et exprimée par des puissances, des logarithmes ou des arcs de cercle. Toutes les intégrales de la forme :

$$\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 + \mathrm{A}_4 x^4}},$$

sont aussi susceptibles d'une réduction semblable; on les appelle *intégrales elliptiques,* parce que la rectification de l'ellipse dépend d'une intégrale de cette espèce.

A la vérité, il n'est pas possible dans ce cas, de faire disparaître le radical; mais l'intégrale peut être ramenée à d'autres plus simples et de la même espèce, qui sont regardées comme les éléments constituants de l'intégrale générale.

A. Pour effectuer la réduction en question, considérons d'abord l'intégrale :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}},$$

où, pour abréger, nous représenterons $A_0 + A_1 x + \cdots + A_4 x^4$ par X, et supposons provisoirement que A_4 soit différent de zéro. Désignons les quatre racines de l'équation $X = 0$, par a_1, a_2, a_3, a_4; si elles sont toutes réelles, supposons-les écrites par ordre de grandeur, c'est-à-dire $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$: si deux d'entre elles sont réelles, et les deux autres imaginaires, soient a_1 et a_2 les racines imaginaires de la forme

$$a_1 = \mu + i\nu, \qquad a_2 = \mu - i\nu;$$

si toutes les racines sont imaginaires, soient a_1 et a_2 deux racines conjuguées, et soit l'autre couple

$$a_3 = \mu_1 + i\nu_1, \qquad a_4 = \mu_1 - i\nu_1.$$

On a alors, en écrivant, pour simplifier, A au lieu de A_4,

$$X = A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$$
$$= A[x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2][x^2 - (a_3 + a_4)x + a_3 a_4];$$

par suite des hypothèses précédentes, les facteurs du second degré sont réels.

Examinons d'abord le cas particulier où l'on a :

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4,$$

et soit $2a$ la valeur commune de ces deux sommes. On peut alors donner à X la forme

$$X = A[(x - a)^2 + a_1 a_2 - a^2][(x - a)^2 + a_3 a_4 - a^2],$$

où l'on peut encore poser, pour abréger,

$$a^2 - a_1 a_2 = b_1, \qquad a^2 - a_3 a_4 = b_2.$$

Si l'on substitue dans l'équation précédente :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{A\,[(x-a)^2 - b_1]\,[(x-a)^2 - b_2]}},$$

au lieu de x la nouvelle variable $y = x - a$, il vient :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dy}{\sqrt{A\,(y^2 - b_1)\,(y^2 - b_2)}}. \qquad (1)$$

L'intégrale proposée se ramène ainsi à une autre, dans laquelle il n'entre que des puissances paires de la variable d'intégration.

Dans le cas général

$$a_1 + a_2 \lessgtr a_3 + a_4,$$

reprenons, pour arriver à une réduction semblable, l'équation

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{A\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,(x-a_4)}},$$

et employons la substitution

$$x = \frac{p + qy}{1 + y}, \qquad (2)$$

où p et q sont des constantes dont la valeur est actuellement indéterminée.

Il vient alors :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{(q-p)\,dy}{\sqrt{AU_1U_2U_3U_4}},$$

en faisant, pour abréger,

$$U_1 = p - a_1 + (q - a_1)\,y,$$
$$U_2 = p - a_2 + (q - a_2)\,y,$$

et ainsi de suite.

Il s'en suit :

$$U_1U_2 = (p-a_1)\,(p-a_2) + [(p-a_1)\,(q-a_2) + (p-a_2)\,(q-a_1)]\,y$$
$$+ (q-a_1)\,(q-a_2)\,y^2,$$

$$U_3U_4 = (p-a_3)\,(p-a_4) + [(p-a_3)\,(q-a_4) + (p-a_4)\,(q-a_3)]\,y$$
$$+ (q-a_3)\,(q-a_4)\,y^2.$$

Si le produit $U_1U_2U_3U_4$ ne doit contenir que des puissances paires de y les coefficients de y dans U_1U_2 et U_3U_4 doivent être nuls; il vient, pour déterminer p et q les deux équations suivantes :

$$pq - \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(p + q) + a_1a_2 = 0,$$

$$pq - \frac{1}{2}(a_3 + a_4)(p + q) + a_3a_4 = 0.$$

En posant

$$\frac{1}{2}(p + q) = s, \quad \frac{1}{2}(p - q) = t, \quad \text{d'où} \quad pq = s^2 - t^2,$$

les équations précédentes donnent :

$$t^2 = (s - a_1)(s - a_2), \qquad t^2 = (s - a_3)(s - a_4),$$

et l'on a ensuite :

$$s = \frac{a_1a_2 - a_3a_4}{a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)}, \tag{3}$$

$$t = \frac{\sqrt{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)}}{a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)}, \tag{4}$$

$$p = s + t, \qquad q = s - t. \tag{5}$$

D'après les hypothèses qui ont été faites sur les racines a_1, a_2, a_3, a_4, s est toujours réel : pour ce qui est de t, nous devons examiner trois cas : pour des racines réelles, chacun des quatre fateurs $a_1 - a_3$, $a_1 - a_4$, etc , est négatif, et par suite t est réel. Pour deux racines réelles et deux imaginaires, les quatre facteurs peuvent être groupés comme suit :

$$(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)\cdot(a_1 - a_4)(a_2 - a_4) = [(\mu - a_3)^2 + \nu^2]\,[(\mu - a_4)^2 + \nu^2],$$

et ils donnent un produit positif. Enfin, pour les quatre racines imaginaires, les facteurs peuvent être écrits :

$$(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)\cdot(a_1 - a_4)(a_2 - a_3) =$$
$$= [(\mu - \mu_1)^2 + (\nu - \nu_1)^2]\,[(\mu - \mu_1)^2 + (\nu + \nu_1)^2];$$

ils donnent aussi un produit positif. Par suite, t est toujours une quantité réelle. Par conséquent, p et q ont des valeurs réelles et finies. La transformation en question peut donc toujours s'effectuer dans tous les cas, et l'on a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{(q-p)\,dy}{\sqrt{A[(p-a_1)(p-a_2)+(q-a_1)(q-a_2)y^2][(p-a_3)(p-a_4)+(q-a_3)(q-a_4)y^2]}}.$$

Soit encore, pour abréger,

$$B = A(q-a_1)(q-a_2)(q-a_3)(q-a_4), \tag{6}$$

$$b_1 = -\frac{(p-a_1)(p-a_2)}{(q-a_1)(q-a_2)}, \quad b_2 = -\frac{(p-a_3)(p-a_4)}{(q-a_3)(q-a_4)}, \tag{7}$$

où B, b_1, b_2 sont des quantités toujours réelles : on a alors la réduction importante

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}} = (q-p)\int \frac{dy}{\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}. \tag{8}$$

La marche ultérieure du calcul dépend des signes des quantités B, b_1, b_2 : on doit d'abord distinguer si B est positif, et $= +\gamma^2$, ou négatif et $= -\gamma^2$; dans chacun de ces cas, on peut faire une des trois hypothèses suivantes :

$$b_1 = +\alpha^2, \qquad b_2 = +\beta^2,$$
$$b_1 = -\alpha^2, \qquad b_2 = +\beta^2,$$
$$b_1 = -\alpha^2, \qquad b_2 = -\beta^2.$$

Quant à l'expression $B(y^2-b_1)(y^2-b_2)$ que nous représentons, pour abréger, par Y, elle pourra avoir six formes différentes que nous allons examiner séparément.

Soit d'abord :

$$Y = \gamma^2(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2),$$

et α^2 la plus petite des quantités α^2, β^2. L'intégrale aura alors une valeur réelle, si $y^2 < \alpha^2 < \beta^2$, ou $y^2 > \beta^2 > \alpha^2$.

Dans le premier cas, si l'on substitue

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad y = \alpha z,$$

il vient :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Ici, $\varkappa$ et z sont des fractions positives, dont la dernière croît avec y.
Dans le second cas, si l'on pose

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad y = \frac{\beta}{z},$$

il vient :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-\varkappa^2 z^2)}};$$

$\varkappa$ et z sont aussi des fractions positives, dont la dernière décroît, lorsque y croît.

Pour la deuxième forme :

$$Y = \gamma^2\,(y^2 + \alpha^2)\,(y^2 - \beta^2),$$

où évidemment y^2 doit être $> \beta^2$, on se servira de la substitution

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad y = \frac{\beta}{\sqrt{1-z^2}},$$

et il viendra :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Ici, $\varkappa$ et z sont des fractions positives, dont la dernière croît en même temps que y.

Si Y a la troisième forme :

$$Y = \gamma^2\,(y^2 + \alpha^2)\,(y^2 + \beta^2),$$

et que α^2 soit la plus petite des quantités α^2 et β^2, on substitue

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta}, \qquad y = \frac{\beta\sqrt{1-z^2}}{z};$$

il vient alors :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

$\varkappa$ et z sont de nouveau des fractions positives, dont la dernière décroît lorsque y croît.

Si Y a la quatrième forme :

$$Y = \gamma^2\,(y^2 - \alpha^2)\,(\beta^2 - y^2),$$

et si α^2 est la plus petite des quantités α^2, β^2, il est évident que y^2 doit être compris entre α^2, β^2. Les substitutions

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}, \qquad y = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}},$$

donnent :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

où $\varkappa$ et z sont des fractions positives, dont la dernière croit en même temps que y.

Pour la cinquième forme :

$$Y = \gamma^2\,(y^2 + \alpha^2)\,(\beta^2 - y^2),$$

on se sert des substitutions

$$\varkappa = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad y = \beta\sqrt{1 - z^2};$$

on a alors :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\,\frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

où $\varkappa$ et z sont des fractions dont la dernière décroît lorsque y croît.

Pour ce qui est de la sixième forme, elle n'a aucun sens, puisqu'alors l'intégrale a une valeur imaginaire, qui se déduit de la troisième forme multipliée par $\sqrt{-1}$.

Le résultat des recherches précédentes conduit au théorème suivant :

L'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,(x - a_3)\,(x - a_4)}},$$

peut être ramenée, par deux substitutions, à la forme beaucoup plus simple :

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

où $\varkappa$ et z sont des fractions positives.

Nous devons encore mentionner la modification dont on fait usage dans le cas où le polynome X est du troisième degré, c'est-à-dire la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)}},$$

dans le cas où les trois racines sont réelles, et $a_1 < a_2 < a_3$, ou bien dans le cas où a_3 est la seule racine réelle. Il suffit alors de remarquer que l'intégrale précédente peut être regardée comme la valeur limite à laquelle se ramène l'expression

$$\int \frac{\sqrt{-a_4}\,dx}{\sqrt{A\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,(x-a_4)}},$$

lorsque a_4 croît indéfiniment. Il suffit pour cela de multiplier l'équation (8) par $\sqrt{-a_4}$, et de chercher les valeurs limites des quantités

$$p,\ q,\ -\frac{a_4}{B},\quad b_1,\quad b_2.$$

Si nous désignons la troisième de ces limites par $\frac{1}{B'}$, nous déduisons, pour $a_4 = \infty$, des formules (3), (4), etc.

$$s = a_3, \qquad t = -\sqrt{(a_1-a_3)\,(a_2-a_3)},$$

$$p = a_3 - \sqrt{(a_1-a_3)\,(a_2-a_3)}, \quad q = a_3 + \sqrt{(a_1-a_3)\,(a_2-a_3)}, \tag{9}$$

$$B' = A\,(q-a_1)\,(q-a_2)\,(q-a_3), \tag{10}$$

$$b_1 = -\frac{(p-a_1)\,(p-a_2)}{(q-a_1)\,(q-a_2)}, \quad b_2 = -\frac{p-a_3}{q-a_3}; \tag{11}$$

la formule (8) donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)}} = (q-p) \int \frac{dy}{\sqrt{B'\,(y^2-b_1)\,(y^2-b_2)}}, \tag{12}$$

et entre les variables x, y on a la relation (2).

L'intégrale du second membre a la même forme que l'intégrale (8) relative à y; la réduction ultérieure sera la même des deux côtés.

B. D'après ces recherches préliminaires, il n'est pas difficile de transformer l'intégrale générale :

$$\int \frac{F\,(x)\,dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}} = \int \frac{F\,(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

dans laquelle $F(x)$ est une fonction rationnelle algébrique de x. La substitution

$$x = \frac{p + qy}{1 + y},$$

donne d'abord :

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\, dx = (q - p) \int F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \tag{13}$$

et Y est ici, comme ci-dessus, de la forme $B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)$.

En outre, $F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right)$ est encore une fonction rationnelle algébrique de y, de la forme

$$F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) = \frac{G_0 + G_1 y + G_2 y^2 + G_3 y^3 + G_4 y^4 + \cdots}{H_0 + H_1 y + H_2 y^2 + H_3 y^3 + H_4 y^4 + \cdots}$$

$$= \frac{G_0 + G_2 y^2 + G_4 y^4 + \cdots + (G_1 + G_3 y^2 + \cdots)\, y}{H_0 + H_2 y^2 + H_4 y^4 + \cdots + (H_1 + H_3 y^2 + \cdots)\, y}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par

$$H_0 + H_2 y^2 + H_4 y^4 + \cdots - (H_1 + H_3 y^2 + \cdots)\, y,$$

le nouveau dénominateur renferme seulement des puissances paires de y, et le nouveau numérateur des puissances paires et des puissances impaires, que l'on peut séparer comme précédemment. Le résultat est de la forme suivante :

$$F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) = \frac{M_0 + M_2 y^2 + \cdots + (M_1 + M_3 y^2 + \cdots)\, y}{N_0 + N_2 y^2 + N_4 y^4 + \ldots},$$

ou bien

$$F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) = \Phi(y^2) + \Psi(y^2) \cdot y,$$

équation dans laquelle Φ et Ψ sont des fonctions rationnelles fractionnaires. De l'équation (13) on déduit, en vertu de la valeur de y,

$$\int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{X}} = (q - p) \left\{ \int \frac{\Phi(y^2)\, dy}{\sqrt{B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}} + \int \frac{\Psi(y^2)}{\sqrt{B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}} \cdot y dy \right\}, \tag{14}$$

et l'on a maintenant à examiner de plus près les intégrales du second membre.

La dernière devient pour $y^2 = z$,

$$\frac{1}{2}\int \frac{\Psi(z)\,dz}{\sqrt{B(z-b_1)(z-b_2)}};$$

elle peut être calculée au moyen des méthodes ordinaires, c'est-à-dire être exprimée par des puissances, des logarithmes ou des arcs de cercle, et il est inutile de s'en occuper davantage.

Il n'en est pas de même de la première intégrale (14), pour laquelle on doit employer des substitutions différentes, suivant la nature de B, b_1, b_2. Mais, on observe facilement que ces substitutions sont renfermées dans la forme commune :

$$y^2 = \frac{\delta + \delta_1 z^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 z^2};$$

par suite, la fonction

$$\Phi(y^2) = \frac{M_0 + M_2 y^2 + M_4 y^4 + \cdots}{N_0 + N_2 y^2 + N_4 y^4 + \cdots},$$

se ramène à une fonction rationnelle de z^2, telle que

$$\Phi\left(\frac{\delta + \delta_1 z^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 z^2}\right) = \frac{P_0 + P_2 z^2 + P_4 z^4 + \cdots}{Q_0 + Q_2 z^2 + Q_4 z^4 + \cdots};$$

nous supposons pour la généralité que cette dernière est une fonction fractionnaire. Elle se transforme par la division en une fonction entière $K_0 + K_2 z^2 + K_4 z^4 + \cdots$, et une fraction, qui peut se décomposer en fractions partielles de la forme :

$$\frac{L}{(1 + \lambda z^2)^n}.$$

En outre, comme par la substitution employée pour y, on a :

$$\frac{dy}{\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}} = C\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

il s'en suit que l'intégrale

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\,dx$$

se ramène à trois groupes d'intégrales. Le premier groupe comprend les intégrales de la forme :

$$\int \frac{z^m dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}, \tag{15}$$

où m désigne un nombre pair; le deuxième groupe se compose d'intégrales de la forme :

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}; \tag{16}$$

dans le dernier groupe il n'y a que des intégrales qui peuvent s'exprimer par des puissances, des logarithmes et des arcs de cercle.

Nous avons maintenant à nous occuper de la réduction ultérieure des intégrales (15) et (16). Ordinairement, par la substitution $z = \sin\varphi$, et par l'introduction de la notation abrégée :

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi},$$

on leur donne une forme trigonométrique plus simple. On a ainsi :

$$U_m = \int \frac{\sin^m \varphi d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad V_n = \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)^n \Delta\varphi}. \tag{17}$$

C. Par la différentiation, on obtient :

$$d\,[\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi] = [(m-3)\sin^{m-4}\varphi\cos^2\varphi - \sin^{m-2}\varphi]\,\Delta\varphi\,d\varphi - \frac{\varkappa^2\sin^{m-2}\varphi\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi$$

$$= (m-3)\frac{\sin^{m-4}\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi - (m-2)(1+\varkappa^2)\frac{\sin^{m-2}\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi + (m-1)\varkappa^2\frac{\sin^m\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi;$$

d'où, par l'intégration,

$$\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi = (m-3)\,U_{m-4} - (m-2)(1+\varkappa^2)\,U_{m-2} + (m-1)\,\varkappa^2 U_m. \tag{18}$$

Cette formule de réduction montre comment U_m peut se déduire de U_{m-2} et U_{m-4} : pour $m = 4, 6, 8$, etc., elle fournit successivement U_4, U_6, U_8, etc., exprimées au moyen de

$$U_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \text{et} \quad U_2 = \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

A cause de

$$\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{1}{\Delta\varphi} - \Delta\varphi\right],$$

on a encore :

$$U_2 = \frac{1}{\varkappa^2}\left[U_0 - \int \Delta\varphi\,d\varphi\right].$$

Le développement de U_m conduit donc aux deux intégrales :

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{et} \quad \int \Delta\varphi \, d\varphi,$$

dont la dernière provient de la rectification de l'ellipse.

D. En désignant, pour abréger, $\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}$ par R, on obtient par la différentiation, une équation de la forme :

$$d \left\{ \frac{zR}{(1+\lambda z^2)^{n-1}} \right\} = \frac{c_3 z^6 + c_2 z^4 + c_1 z^2 + c_0}{(1+\lambda z^2)^n} \frac{dz}{R},$$

où les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 dépendent de $\varkappa$, λ et n. On peut donner à ce résultat la forme suivante :

$$d \left\{ \frac{zR}{(1+\lambda z^2)^{n-1}} \right\} = \frac{\gamma_3 (1+\lambda z^2)^3 + \gamma_2 (1+\lambda z^2)^2 + \gamma_1 (1+\lambda z^2) + \gamma_0}{(1+\lambda z^2)^n} \frac{dz}{R}$$

$$= \gamma_3 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^{n-3} R} + \gamma_2 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^{n-2} R} + \gamma_1 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^{n-1} R} + \gamma_0 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n R}.$$

Les valeurs des nouveaux coefficients que nous désignons par γ sont :

$$\gamma_3 = -(2n-5)\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, \qquad \gamma_2 = (2n-4)\left(\frac{1+\varkappa^2}{\lambda} + 3\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\right),$$

$$\gamma_1 = -(2n-3)\left(1 + 2\frac{1+\varkappa^2}{\lambda} + 3\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\right),$$

$$\gamma_0 = (2n-2)\left(1 + \frac{1+\varkappa^2}{\lambda} + \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\right).$$

Par l'intégration de l'équation précédente et la substitution de $z = \sin\varphi$, on arrive à la formule de réduction suivante :

$$\frac{\sin\varphi \cos\varphi \, \Delta\varphi}{(1+\lambda \sin^2\varphi)^{n-1}} = \gamma_3 V_{n-3} + \gamma_2 V_{n-2} + \gamma_1 V_{n-1} + \gamma_0 V_n, \qquad (19)$$

laquelle subsiste pour toutes les valeurs de n. Si l'on fait successivement $n = 2, 3, 4$, etc., on trouve V_2, V_3, V_4, etc., exprimées en fonction des trois intégrales :

$$V_{-1} = \int \frac{1+\lambda\sin^2\varphi}{\Delta\varphi} d\varphi, \quad V_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad V_1 = \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Les deux premières appartiennent à la forme déjà considérée plus haut, tandis que la dernière constitue un nouvel élément.

De toutes ces recherches il résulte que la réduction de l'intégrale elliptique générale

$$\int \frac{\mathrm{F}(r)\,dx}{\sqrt{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 + \mathrm{A}_4 x^4}},$$

dépend d'une part de puissances, de logarithmes et d'arcs de cercles, d'autre part de trois intégrales elliptiques particulières, qui peuvent être écrites sous la forme algébrique :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{1-\varkappa^2 z^2}{1-z^2}} \cdot dz, \quad \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

ou, sous la forme trigonométrique :

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \Delta\varphi\, d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Lorsque ces dernières intégrales sont prises entre les limites $\varphi = 0$, et $\varphi = \varphi$, on les appelle *Intégrales elliptiques de première, de deuxième et de troisième espèce*, et on les désigne par :

$$\mathrm{F}(\varkappa, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \mathrm{E}(\varkappa, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi, \quad \Pi_0(\varkappa, \lambda, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+\lambda \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

La limite supérieure φ s'appelle *l'amplitude, $\varkappa$ le module, λ le paramètre* de l'intégrale en question (1).

Au moyen des formules (18) et (19) on trouve facilement les équations suivantes que nous rapprocherons, à cause de leur usage fréquent, et dans

(1) La réduction précédente de l'intégrale elliptique générale a été donnée par Legendre dans son *Traité des fonctions elliptiques :* elle est simple et naturelle. On doit d'élégantes modifications à Richelot (*Journal de Crelle*, XXXIV, 1) et à Weierstrass (Schellbach. — *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den theta functionen*). La théorie générale de la transformation est une création de Jacobi (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*). Jacobi désigne par la lettre Π une autre intégrale que Legendre; c'est pourquoi l'on distingue, par un indice, l'intégrale de troisième espèce de Legendre de l'intégrale de Jacobi qui se présentera plus loin.

lesquelles, pour abréger, nous écrirons Δ, F, E, au lieu de $\Delta\varphi$, $F(\varkappa, \varphi)$, $E(\varkappa, \varphi)$:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{F - E}{\varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{E - (1 - \varkappa^2) F}{\varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{\Delta \cdot \operatorname{tg}\varphi - E}{1 - \varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sec^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{\Delta \cdot \operatorname{tg}\varphi + (1 - \varkappa^2) F - E}{1 - \varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{1}{\Delta^3}\, d\varphi = \frac{1}{1 - \varkappa^2}\left(E - \frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}\right),$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}\, d\varphi = \frac{1}{1 - \varkappa^2}\left(\frac{E - (1 - \varkappa^2) F}{\varkappa^2} - \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}\right),$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\, d\varphi = \frac{F - E}{\varkappa^2} + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}.$$

Ici se placent encore deux remarques importantes. Si l'on différentie par rapport à $\varkappa$ l'intégrale désignée par $E(\varkappa, \varphi)$, il vient :

$$\frac{dE}{d\varkappa} = -\varkappa \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\, d\varphi,$$

c'est-à-dire, d'après la première formule,

$$\frac{dE}{d\varkappa} = \frac{E - F}{\varkappa}.$$

De même, en différentiant $F(\varkappa, \varphi)$, on trouve :

$$\frac{dF}{d\varkappa} = \varkappa \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}\, d\varphi,$$

c'est-à-dire, d'après l'avant dernière formule,

$$\frac{dF}{d\varkappa} = \frac{1}{1 - \varkappa^2}\left(\frac{E - (1 - \varkappa^2) F}{\varkappa} - \frac{\varkappa \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}\right).$$

II. Substitution de Landen pour les intégrales de première espèce.

Si, dans l'intégrale elliptique de première espèce :

$$F(p, \tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}},$$

on introduit au lieu de τ une nouvelle variable ω, liée à τ par l'équation

$$\tau = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega},$$

on trouve successivement :

$$d\tau = 2 \frac{1 + p \cos 2\omega}{1 + 2p \cos 2\omega + p^2} d\omega,$$

$$\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau} = \frac{1 + p \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p \cos 2\omega + p^2}};$$

d'où, par division, et à cause de $\cos 2\omega = 1 - 2 \sin^2 \omega$,

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}} = \frac{2}{1 + p} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4p}{(1 + p)^2} \sin^2 \omega}}.$$

La limite inférieure $\tau = 0$ donne $\omega = 0$; en outre, τ et ω croissent en même temps, et lorsque τ atteint une limite supérieure représentée, pour abréger, par τ, ω prend la valeur déterminée par l'équation

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega}, \quad \text{ou} \quad \sin (2\omega - \tau) = p \sin \tau. \tag{20}$$

De l'équation ci-dessus il suit :

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}} = \frac{2}{1 + p} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4p}{(1 + p)^2} \sin^2 \omega}},$$

c'est-à-dire, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{2\sqrt{p}}{1 + p} = q, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1 - \sqrt{1 - q^2}}{1 + \sqrt{1 - q^2}}, \tag{21}$$

$$F(p, \tau) = \frac{2}{1+p} \cdot F(q, \omega). \tag{22}$$

Telle est la réduction d'une intégrale elliptique en une seconde d'un autre module, et d'une autre amplitude.

Relativement aux rapports de grandeur entre p et q, comme entre τ et ω il faut remarquer ce qui suit :

A cause de $p < 1$, on a $(1 + p)^2 < 4$, et

$$\frac{4p}{(1+p)^2} > p > p^2,$$

c'est-à-dire

$$q^2 > p^2, \quad \text{ou} \quad q > p.$$

De (20) il résulte encore :

$$\sin(2\omega - \tau) < \sin\tau, \quad \text{ou} \quad 2\omega - \tau < \tau, \quad \text{ou} \quad \omega < \tau.$$

L'équation (22) montre d'après cela, *comment une intégrale elliptique peut être ramenée à une autre d'un module plus grand et d'une amplitude moindre.*

Si l'on donne à l'équation (22) la forme inverse :

$$F(q, \omega) = \frac{1+p}{2} F(p, \tau), \tag{23}$$

dans laquelle on considère q et ω comme donnés, p et τ comme en étant déduits, l'équation (23) montre que *toute intégrale elliptique peut être réduite à une autre d'un module moindre et d'une amplitude plus grande.*

Les deux théorèmes démontrés fournissent deux méthodes remarquables pour le calcul numérique de la valeur de $F(k, \varphi)$. Il suffit simplement d'appliquer à l'intégrale proposée l'un ou l'autre théorème plusieurs fois de suite.

Dans le premier cas, on calcule une série de modules croissants k_1, k_2, etc., et en même temps une série d'amplitudes décroissantes φ_1, φ_2, etc., au moyen des formules :

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \ldots$$

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi, \qquad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1, \ldots\ldots$$

et l'on a les équations correspondantes :

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(k_1, \varphi_1),$$

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+k_1} F(k_2, \varphi_2), \text{ etc.}$$

Il en résulte, si l'on va jusque k_n et φ_n,

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdot \frac{2}{1+k_2} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} \cdot F(k_n, \varphi_n),$$

ou plus simplement :

$$F(k, \varphi) = F(k_n, \varphi_n) \cdot \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots k_{n-1}}{k} \cdot k_n}.$$

D'après la condition que les modules croissent continuellement, sans atteindre l'unité, k_n doit converger vers une limite déterminée $\overline{\overline{<}} 1$, pour n croissant indéfiniment. On trouve facilement cette limite au moyen de la relation

$$k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n},$$

qui donne :

$$\frac{1-k_{n+1}}{1-k_n} = \frac{1-\sqrt{k_n}}{1+\sqrt{k_n}} \cdot \frac{1}{1+k_n}.$$

D'après cela, on a, dans tous les cas,

$$\lim \frac{1-k_{n+1}}{1-k_n} < 1.$$

D'après un théorème connu (Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 232) :

$$\lim (1-k_n) = 0, \quad \text{ou} \quad \lim k_n = 1.$$

Puisque, en outre, les amplitudes décroissent continuellement, sans devenir négatives, lim φ_n doit être une quantité finie et déterminée Φ, qui se déduit facilement du calcul précédent. On a, d'après ces remarques,

$$\lim F(k_n, \varphi_n) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \text{l. tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi\right);$$

par conséquent, la formule précédente de $F(k, \varphi)$ se transforme en la suivante :

$$F(k, \varphi) = \mathrm{l.\,tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi\right) . \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots .}{k}} .$$

Cette formule donne en particulier, pour de grandes valeurs de k, un calcul commode, puisqu'alors k_3, k_4 se rapprochent de la limite 1. On a, par exemple, pour $k = \frac{24}{25}$,

$$k = 0{,}96 ; \quad k_1 = 0{,}9997917 ; \quad k_2 = 0{,}9999999 ;$$

d'où, à une unité du septième ordre près, $k_2 = 1$. Si l'on prend, en outre, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, on obtient

$$\varphi = 60^\circ 0' 0'' ;$$

$$2\varphi_1 - \varphi = 56^\circ 14' 28'' 30, \qquad \varphi_1 = 58^\circ 7' 14'' 15 ;$$

$$2\varphi_2 - \varphi_1 = 58^\circ 6' 50'', \qquad \varphi_2 = 58^\circ 6' 39'' 57 ;$$

au cause de $k_2 = k_3 = \cdots = 1$, le calcul s'arrête ici de lui-même, et donne

$$\varphi_2 = \Phi = 58^\circ 6' 39'' 57 .$$

Il s'en suit :

$$F\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{3}\pi\right) = \mathrm{l.\,tang}\ 74^\circ 3' 19'' 79 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9997917}{0{,}96}} = 1{,}278522.$$

Si l'on veut au contraire calculer $F(k, \varphi)$ pour un décroissement successif du module, et un accroissement de l'amplitude, on se servira de la formule (23), dans laquelle p doit être déterminée par la deuxième équation (21), et τ par l'équation (20). Cette dernière prend une forme plus commode pour la pratique, si l'on met dans le second membre de

$$\mathrm{tg}(\tau - \omega) = \frac{\mathrm{tg}\,\tau - \mathrm{tg}\,\omega}{1 + \mathrm{tg}\,\tau\ \mathrm{tg}\,\omega} ,$$

au lieu de $\mathrm{tg}\,\tau$ sa valeur, et que l'on exprime le tout en fonction de $\sin\omega$ et $\cos\omega$. On a, en effet,

$$\mathrm{tg}(\tau - \omega) = \frac{1 - p}{1 + p}\,\mathrm{tg}\,\omega = \sqrt{1 - q^2} \cdot \mathrm{tg}\,\omega .$$

Si l'on calcule maintenant successivement les quantités k_1, k_2, etc., et φ_1, φ_2, etc., d'après les formules :

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}, \qquad k_2 = \frac{1-\sqrt{1-k_1^2}}{1+\sqrt{1-k_1^2}}, \ldots$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1-k^2}\,\operatorname{tg}\varphi, \qquad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1-k_1^2}\,\operatorname{tg}\varphi_1, \ldots$$

on a les équations correspondantes :

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_1}{2} F(k_1, \varphi_1),$$

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k_2}{2} F(k_2, \varphi_2), \text{ etc.}$$

Il s'en suit, si l'on va jusque k_n et φ_n,

$$F(k, \varphi) = (1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)\frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n}.$$

La valeur limite vers laquelle k_n converge par décroissement, s'obtient en observant que

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{k_n(1+\sqrt{1-k_n^2})} = \frac{k_n}{(1+\sqrt{1-k_n^2})^2};$$

donc, dans tous les cas,

$$\lim \frac{k_{n+1}}{k_n} < 1.$$

On en déduit $\lim k_n = 0$.

De là il résulte :

$$\lim \frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n} = \lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}} = \lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n} = \lim \frac{\varphi_n}{2^n};$$

cette valeur limite, qui doit se déduire facilement par le calcul des amplitudes croissantes, se désigne par Φ.

On a donc, d'après les remarques précédentes,

$$F(k, \varphi) = \Phi\cdot(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots.$$

De l'équation $\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \sqrt{1-k_n^2}\,\operatorname{tg}\varphi_n$, on déduit d'ailleurs, que, pour k_n très petit, on a approximativement $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi_n$; chaque amplitude doit donc être environ le double de la précédente. Cette relation a lieu exactement pour $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; on a alors :

$$\varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = 2\pi, \quad \varphi_3 = 4\pi, \ldots.$$

d'où

$$\Phi = \lim \frac{\varphi_n}{2^n} = \frac{\pi}{2},$$

et

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi \cdot (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots.$$

La comparaison avec la formule précédente donne :

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) : F(k, \varphi) = \frac{1}{2}\pi : \Phi;$$

de là résulte la signification analytique de Φ.

Cette méthode de calcul prend une forme très-élégante, si on l'applique à l'intégrale

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \varphi\right),$$

laquelle peut être désignée, en abrégé, par $f(a, b, \varphi)$.

On a alors :

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad k_1 = \frac{a - b}{a + b}, \quad 1 + k_1 = \frac{2a}{a + b},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi;$$

d'où, par une transformation simple,

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{a + b} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\frac{1}{4}(a + b)^2 \cos^2 \varphi_1 + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi_1}}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + b), \qquad b_1 = \sqrt{ab},$$

on a la relation simple

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} f(a_1, b_1, \varphi_1).$$

Pour appliquer cette transformation plusieurs fois de suite, on calcule successivement les quantités suivantes :

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + b), \qquad b_1 = \sqrt{ab},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \qquad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},$$

. . . .

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi, \qquad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \varphi_1,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2} \operatorname{tg} \varphi_2, \ldots.$$

et l'on obtient, en allant jusque a_n, b_n, φ_n,

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2^n} f(a_n, b_n, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{2^n \sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi_n + b_n^2 \sin^2 \varphi_n}}.$$

D'après ce qui précède, $\lim k_n = 0$, c'est-à-dire dans le cas actuel,

$$\lim \sqrt{1 - \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{b_n}{a_n} = 1\,;$$

les quantités a_n et b_n convergent donc vers une limite commune, que l'on appelle le *moyen arithmético-géométrique* de a et b. Si l'on désigne cette quantité par c, on a, par n croissant indéfiniment,

$$\lim \frac{f(a_n, b_n, \varphi_n)}{2^n} = \lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n \cdot c} = \frac{1}{c} \lim \frac{\varphi_n}{2^n}.$$

D'après ce qui précède, on a donc :

$$f(a, b, \varphi) = \frac{\Phi}{c},$$

où Φ désigne la valeur limite du quotient $\frac{\varphi_n}{2^n}$.

Dans le cas particulier $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a $\Phi = \frac{1}{2}\pi$; d'où

$$f\left(a, b, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{c}.$$

Le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{25^2 \cos^2\varphi + 7^2 \sin^2\varphi}},$$

servira d'exemple : cette intégrale est très-défavorable pour la méthode exposée, puisque a et b diffèrent considérablement.

On a

$$\begin{aligned}
a &= 25{,}0000000, & b &= 7{,}0000000;\\
a_1 &= 16{,}0000000, & b_1 &= 13{,}2287566;\\
a_2 &= 14{,}6143783, & b_2 &= 14{,}5485431;\\
a_3 &= 14{,}5814607, & b_3 &= 14{,}5814235;\\
a_4 &= 14{,}5814421 = & b_4 &= 14{,}5814421 = c;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& & \varphi &= 60^\circ 0' 0'',\\
\varphi_1 - \varphi &= 25^\circ 52' 19'' 87, & \varphi_1 &= 85^\circ 52' 19'' 87,\\
\varphi_2 - \varphi_1 &= 85^\circ 0' 41'' 23, & \varphi_2 &= 170^\circ 53' 1'' 10,\\
\varphi_3 - \varphi_2 &= 170^\circ 55' 26'' 47, & \varphi_3 &= 341^\circ 48' 27'' 57,\\
\varphi_4 - \varphi_3 &= 341^\circ 48' 27'' 72, & \varphi_4 &= 683^\circ 36' 55'' 29,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\varphi_1 = 42^\circ 56' 9'' 93,$$

$$\frac{1}{4}\varphi_2 = 42^\circ 43' 15'' 27,$$

$$\frac{1}{8}\varphi_3 = 42^\circ 43' 33'' 45,$$

$$\frac{1}{16}\varphi_4 = 42°43'33''46,$$

$$\Phi = \text{arc}\, 42°43'33''456 = 0,7457087,$$

$$f\left(25, 7, \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{0,7457087}{14,58144} = 0,0511409.$$

L'exemple traité par la première méthode fournit la vérification de ce qui précède; on a en effet :

$$f\left(25, 7, \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{25}\,F\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{3}\pi\right) = 0,04 \cdot 1,278522 = 0,05114088.$$

Pour les mêmes valeurs de a et b, et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a :

$$f\left(25, 7, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{c} = \frac{1,5707963}{14,5814421} = 0,1077257,$$

d'où, en multipliant par 25,

$$F\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{2}\pi\right) = 2,6931425.$$

III. Substitution de Landen pour les Intégrales de deuxième espèce.

Dans le chapitre précédent nous avons fait usage de la substitution

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega};$$

on en déduit les trois équations suivantes :

$$\cos\tau = \frac{p + \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}},$$

$$\sqrt{1 - p^2\sin^2\tau} = \frac{1 + p\cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}},$$

$$d\tau = \frac{2\,(1 + p\cos 2\omega)}{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}\,d\omega.$$

Cette substitution s'applique aussi aux intégrales elliptiques de deuxième espèce, et conduit à des résultats remarquables.

Si l'on emploie cette substitution pour la transformation du second membre de l'équation

$$E(p,\tau)+p\sin\tau=\int_0^\tau\left(\sqrt{1-p^2\sin^2\tau}+p\cos\tau\right)d\tau,$$

on obtient

$$E(p,\tau)+p\sin\tau=2\int_0^\omega\frac{1+p\cos 2\omega}{\sqrt{1+2p\cos 2\omega+p^2}}\,d\omega=\frac{2}{1+p}\int_0^\omega\frac{1+p\,(1-2\sin^2\omega)}{\sqrt{1-q^2\sin^2\omega}}\,d\omega,$$

où l'on a posé, comme ci-dessus,

$$q=\frac{2\sqrt{p}}{1+p}.$$

On peut écrire le second membre de l'équation précédente sous la forme :

$$\int_0^\omega\left[(1+p)\sqrt{1-q^2\sin^2\omega}+(1-p)\frac{1}{\sqrt{1-q^2\sin^2\omega}}\right]d\omega=(1+p)E(q,\omega)+(1-p)F(q,\omega).$$

On obtient ainsi la formule :

$$E(p,\tau)+p\sin\tau=(1+p)\,E(q,\omega)+(1-p)\,F(q,\omega);\qquad(24)$$

à cause de

$$F(q,\omega)=\frac{1}{2}(1+p)\,F(p,\tau),$$

on a, en outre,

$$E(p,\tau)+p\sin\tau=(1+p)\,E(q,\omega)+\frac{1}{2}(1-p^2)\,F(p,\tau),$$

ou bien :

$$\frac{1}{2}(1-p^2)\,F(p,\tau)=E(p,\tau)-(1+p)\,E(q,\omega)+p\sin\tau.\qquad(25)$$

On en conclut le théorème que *toute intégrale elliptique de première espèce peut être exprimée au moyen de deux intégrales elliptiques de deuxième espèce.*

Les formules que nous venons de trouver donnent des applications tout-à-fait semblables aux relations simples ci-dessus (22) et (23). On les emploie, ou bien, pour augmenter successivement le module d'une intégrale elliptique de deuxième espèce, et diminuer en même temps l'amplitude, ou bien, pour diminuer le module et augmenter l'amplitude.

Nous allons appliquer cette méthode à l'intégrale plus générale :

$$G(p, \tau) = \int_0^\tau \frac{\lambda + \mu \sin^2 \tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}} \, d\tau,$$

laquelle se compose d'intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, si λ, μ représentent des constantes quelconques.

Si l'on transforme, en effet, l'équation identique :

$$G(p, \tau) - \frac{\mu}{p} \sin \tau = \int_0^\tau \left[\lambda + \mu \frac{p \sin^2 \tau - \cos \tau \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}}{p} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}},$$

au moyen de la substitution mentionnée ci-dessus, et si l'on a égard à la relation

$$p \sin^2 \tau - \cos \tau \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau} = -\cos 2\omega = 2 \sin^2 \omega - 1,$$

il vient :

$$G(p, \tau) - \frac{\mu}{p} \sin \tau = \frac{2}{1 + p} \int_0^\omega \left(\lambda + \mu \frac{2 \sin^2 \omega - 1}{p} \right) \frac{d\omega}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \omega}}.$$

En posant, pour abréger,

$$\lambda - \frac{\mu}{p} = \lambda_1, \qquad \frac{2\mu}{p} = \mu_1, \tag{26}$$

on trouve :

$$G(p, \tau) - \frac{1}{2} \mu_1 \sin \tau = \frac{2}{1 + p} \int_0^\omega \frac{\lambda_1 + \mu_1 \sin^2 \omega}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \omega}} \, d\omega.$$

L'intégrale du second membre a la même forme que G, et peut être représentée par $G_1(q, \omega)$, pour indiquer en même temps que λ_1, μ_1, sont mis à la place de λ, μ. Au moyen de l'équation

$$G(p, \tau) = \frac{2}{1 + p} G_1(q, \omega) + \frac{1}{2} \mu_1 \sin \tau, \tag{27}$$

l'intégrale G est réduite à une autre de la même espèce ayant un module q plus grand, et une amplitude ω plus petite. Si l'on applique plusieurs fois successivement cette réduction à l'intégrale

$$G = \int_0^{\varphi} \frac{\lambda + \mu \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi,$$

on obtient la série suivante d'équations :

$$G = \frac{2}{1+k} G_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \sin \varphi,$$

$$G_1 = \frac{2}{1+k_1} G_2 + \frac{1}{2} \mu_2 \sin \varphi_1,$$

. . . .

On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on puisse poser avec une exactitude suffisante $k_n = 1$. La valeur de G_n est alors :

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} \frac{\lambda_n + \mu_n \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}\, d\varphi = (\lambda_n + \mu_n)\, \mathrm{l.\,tg} \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_n\right) - \mu_n \sin \varphi_n,$$

et l'on peut déduire successivement des formules précédentes G_{n-1}, G_{n-2}, ... G_1, G. Nous omettons les détails de ce calcul, parce que la deuxième méthode que nous allons faire connaître donne des formules plus simples.

Des équations (26) et (27) on tire :

$$G_1(q, \omega) = \frac{1+p}{2} \left\{ G(p, \tau) - \frac{1}{2} \mu_1 \sin \tau \right\}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \mu_1 p, \qquad \lambda = \lambda_1 + \frac{1}{2} \mu_1.$$

Supposons que l'on donne λ_1, μ_1, par exemple, $\lambda_1 = \alpha$, $\mu_1 = \beta$, et que l'on en déduise $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \beta_1$; si l'on écrit, en outre, G au lieu de la fonction primitive G_1, et si l'on remplace ensuite la fonction dérivée G par G_1, on a :

$$G(q, \omega) = \frac{1+p}{2} \left\{ G_1(p, \tau) - \frac{1}{2} \beta \sin \tau \right\}$$

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2} \beta, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2} \beta p.$$

L'intégrale G est alors ramenée à une autre G_1, dont le module p est plus petit, et l'amplitude τ plus grande. Cette relation est d'un usage fréquent; on déduit, en effet, de l'équation

$$G = \int_0^\varphi \frac{\alpha + \beta \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi,$$

les équations suivantes :

$$G = \frac{1 + k_1}{2}\left(G_1 - \frac{1}{2}\beta \sin \varphi_1\right),$$

$$G_1 = \frac{1 + k_2}{2}\left(G_2 - \frac{1}{2}\beta_1 \sin \varphi_2\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dans lesquelles k_1, k_2, ... représentent les modules décroissants, φ_1, φ_2, ... les amplitudes croissantes. Quant aux quantités α_1, α_2, ... β_1, β_2, ..., elles sont déterminées par les formules :

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2}\beta, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2}\beta k_1,$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}\beta_1 k_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on imagine les équations précédentes continuées jusque G_n, alors G s'exprimera en fonction de G_n; cela se fait le plus simplement possible, si l'on multiplie ces équations par les facteurs correspondants :

$$1, \quad \frac{1+k_1}{2}, \quad \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}, \ldots,$$

et que l'on ajoute les produits. On obtient ainsi :

$$G = \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}\cdot\frac{1+k_3}{2}\cdots\frac{1+k_n}{2}\, G_n$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1+k_1}{2}\beta \sin \varphi_1 + \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}\beta_1 \sin \varphi_2 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}\cdots\frac{1+k_n}{2}\beta_{n-1} \sin \varphi_n\right\},$$

où l'on a

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} \frac{\alpha_n + \beta_n \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k_n{}^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi,$$

$$\alpha_n = \alpha + \frac{1}{2}\beta\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{2^n}\right),$$

$$\beta_n = \beta\, \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{2^n}.$$

Si maintenant, on prend n assez grand pour que l'on puisse supposer avec une exactitude suffisante $k_n = 0$, on aura, *à fortiori*, $\beta_n = 0$. On a alors :

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} \alpha_n d\varphi = \alpha_n \varphi_n,$$

$$\frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \cdot \frac{1+k_3}{2} \cdots \frac{1+k_n}{2}\, G_n = \alpha_n (1+k_1)(1+k_2) \ldots (1+k_n) \frac{\varphi_n}{2^n};$$

d'où, pour $n = \infty$, on a exactement, en représentant, comme ci-dessus, $\lim \frac{\varphi_n}{2^n}$ par Φ et posant $\lim \alpha_n = A$,

$$G = A\Phi (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots$$
$$- \frac{1}{2}\beta_1 \left\{ \frac{1 + k_1}{2} \sin \varphi_1 + \frac{(1 + k_1)(1 + k_2)}{2^2} \cdot \frac{k_1}{2} \sin \varphi_2 \right.$$
$$\left. + \frac{(1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3)}{2^3} \cdot \frac{k_1 k_2}{2^2} \sin \varphi_3 + \ldots \right\},$$

$$A = \alpha + \frac{1}{2}\beta\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \frac{k_1 k_2 k_3}{2^3} + \ldots\right).$$

Afin de simplifier la formule trouvée pour G, nous observons d'abord que l'on a

$$\Phi \cdot (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots = F(k, \varphi);$$

en second lieu, des équations

$$\frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1} = k, \quad \frac{2\sqrt{k_2}}{1 + k_2} = k_1, \quad \frac{2\sqrt{k_3}}{1 + k_3} = k_2, \ldots$$

il résulte les suivantes :

$$1+k_1=\frac{2\sqrt{k_1}}{k},\quad 1+k_2=\frac{2\sqrt{k_2}}{k_1},\quad 1+k_3=\frac{2\sqrt{k_3}}{k_2},\ldots.$$

De toutes ces remarques on conclut la règle suivante pour le calcul de G :

On calcule d'abord les modules décroissants, et les amplitudes croissantes, au moyen des formules

$$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}},\quad k_2=\frac{1-\sqrt{1-k_1{}^2}}{1+\sqrt{1-k_1{}^2}},\ldots.$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=\sqrt{1-k^2}\operatorname{tg}\varphi,\quad \operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\sqrt{1-k_1{}^2}\operatorname{tg}\varphi_1,\ldots.$$

et l'on a alors :

$$\int_0^{\varphi}\frac{\alpha+\beta\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\mathrm{F}(k,\varphi)\left\{\alpha+\frac{1}{2}\beta\left(1+\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{4}k_1k_2+\frac{1}{8}k_1k_2k_3+\cdots\right)\right\}$$

$$-\frac{\beta}{k}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{k_1k_2}\sin\varphi_2+\frac{1}{8}\sqrt{k_1k_2k_3}\sin\varphi_3+\cdots\right\}.\quad(28)$$

Pour $\alpha=1$, $\beta=-k^2$, on obtient immédiatement une formule pour le calcul de E (k,φ), c'est-à-dire

$$\mathrm{E}(k,\varphi)=\mathrm{F}(k,\varphi)\left\{1-\frac{1}{2}k^2\left(1+\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{4}k_1k_2+\cdots\right)\right\}$$

$$+k\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{k_1k_2}\sin\varphi_2+\cdots\right\}.\quad(29)$$

Dans le cas particulier $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, on a $\varphi_1=\pi$, $\varphi_2=2\pi$, $\varphi_3=4\pi$, etc. Il vient alors :

$$\mathrm{E}\left(k,\frac{1}{2}\pi\right)=\mathrm{F}\left(k,\frac{1}{2}\pi\right)\left\{1-\frac{1}{2}k^2\left(1+\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{4}k_1k_2+\cdots\right)\right\}.\quad(30)$$

On pourra aussi, d'après cette règle, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\varphi\right),$$

dans laquelle on peut se servir de nouveau du *moyen arithmético-géométrique* entre a et b. On a alors à déterminer les quantités suivantes :

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad k_1 = \frac{\frac{1}{2}(a-b)}{a_1},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad k_2 = \frac{\frac{1}{2}(a_1-b_1)}{a_2},$$

. . . .

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1, \dots;$$

si l'on pose alors

$$\lim a_n = \lim b_n = c, \quad \lim\left(\frac{\varphi_n}{2^n}\right) = \Phi,$$

il vient :

$$\int_0^\varphi \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\Phi}{c}\left\{a^2 - (a-b)\, a_1\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1k_2 + \frac{1}{8}k_1k_2k_3 + \cdots\right)\right\}$$
$$+ \sqrt{2(a-b)\, a_1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1 + \frac{1}{4}\sqrt{k_1k_2}\sin\varphi_2 + \cdots\right\}. \quad (31)$$

En particulier, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\frac{1}{2}\pi}{c}\left\{a^2 - (a-b)\, a_1\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1k_2 + \cdots\right)\right\}. \quad (32)$$

Soit, par exemple, comme dans le chapitre précédent, $a = 25$, $b = 7$; des valeurs calculées pour a_1, b_1, a_2, b_2, etc., on tire :

$$k_1 = 0{,}5625000, \qquad \frac{1}{2}k_1 = 0{,}2812500,$$

$$k_2 = 0{,}0948122, \qquad \frac{1}{4}k_1k_2 = 0{,}0133330,$$

$$k_3 = 0{,}0022575, \qquad \frac{1}{8}k_1k_2k_3 = 0{,}0000151,$$

$$k_4 = 0{,}0000013, \qquad \frac{1}{16} k_1 \ldots. k_4 = 0{,}0000000,$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{k_1} \sin \varphi_1 = +0{,}3740272,$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{k_1 k_2} \sin \varphi_2 = +0{,}0091474,$$

$$\frac{1}{8} \sqrt{k_1 k_2 k_3} \sin \varphi_3 = -0{,}0004282,$$

$$\frac{1}{16} \sqrt{k_1 \ldots. k_4} \sin \varphi_4 = -0{,}0000005,$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \sqrt{25^2 \cos^2 \varphi + 7^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = 22{,}081387,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{25^2 \cos^2 \varphi + 7^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = 27{,}163662.$$

Cet exemple montre que, même pour des rapports défavorables entre a et b, la rectification d'un arc d'ellipse peut être obtenue beaucoup plus facilement par la méthode précédente que par les formules ordinaires du calcul intégral(1). En effet, pour les valeurs données, l'excentricité numérique $\varepsilon = \frac{24}{25}$ diffère peu de l'unité; par suite, les séries procédant suivant les puissances de ε convergent si lentement que l'on devrait sommer au moins *cinquante termes*, pour obtenir six décimales exactes.

La substitution de Landen s'applique de la même manière aux intégrales de troisième espèce. Mais, elle conduit à des formules compliquées, qui ne sont d'aucune utilité dans la pratique. Nous pouvons donc en omettre les développements, d'autant plus que l'on verra plus tard que les intégrales de troisième espèce, qui représentent des fonctions de trois variables, peuvent se ramener à des fonctions de deux variables (2).

---

(1) Schloemilch. *Compendium der höheren Analysis*, I, p. 383. Sturm. *Cours d'analyse*, I, p. 381.

(2) Les travaux de Landen, qui a donné son nom à la transformation précédente, se

IV. Développements en séries des intégrales de première et de deuxième espèce.

Nous nous occupons d'abord du développement des intégrales complètes $F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right)$, $E\left(k, \frac{1}{2}\pi\right)$, que nous désignons, pour abréger, par K et E.

a) Si l'on développe, dans l'équation :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

le facteur de $d\varphi$, au moyen de la formule du binome, et si l'on intègre chaque terme de la série, au moyen de la formule

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

on obtient immédiatement

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}. \quad (33)$$

Pour le développement de E, on peut ou bien procéder d'une manière analogue, ou bien se servir de la relation démontrée à la page 14 :

$$\frac{dF(k, \varphi)}{dk} = \frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{E(k, \varphi) - (1-k^2)F(k, \varphi)}{k} - \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(k, \varphi)}\right\},$$

laquelle, pour $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, se transforme en la suivante :

$$E = (1-k^2)\left(K + k\frac{dK}{dk}\right). \quad (34)$$

---

trouvent dans les *Philosophical Transactions,* 1771 et 1775, et dans les *Mathematical Memoirs* de 1780. Lagrange a traité ce sujet dans les *Mémoires de l'Académie de Turin,* 1784 et 1785, et Legendre dans le *Traité des fonct. ellipt.* Gauss a introduit le moyen arithmético-géométrique dans son travail : *Determinatio attractionis* etc. Commentat. Gotting. 1820. Voir pour l'interprétation géométrique : Jacobi, *Extrait d'une lettre à M. Hermite,* Journal de Crelle, T. 32, et Küpper, Journal de Crelle, T. 55.

De la série déjà connue pour K, il résulte :

$$E = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right\}. \quad (35)$$

b) On obtient des séries plus rapidement convergentes, en diminuant d'abord le module, au moyen de la substitution de Landen, et développant ensuite en séries. En posant

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}}, \qquad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1-k^2}\,\operatorname{tg}\varphi,$$

on a :

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_1}{2} F(k_1, \varphi_1).$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k_1}{2} F(k_1, \pi) = (1+k_1) F\left(k_1, \frac{1}{2}\pi\right);$$

d'où, si l'on développe $F\left(k_1, \frac{1}{2}\pi\right)$ suivant les puissances de k_1,

$$K = \frac{\pi(1+k_1)}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4 + \cdots\right\}. \quad (36)$$

On peut procéder de même avec E; cependant, il est plus simple de transformer d'abord l'équation (34), de manière à introduire k_1 à la place de k, et ensuite d'employer le développement (36). On a alors :

$$E = (1-k^2)\left(K + k\frac{dK}{dk_1} : \frac{dk}{dk_1}\right), \quad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1};$$

et, par la substitution de la valeur de k dans l'expression de E, il vient :

$$E = \frac{1-k_1}{1+k_1}\left(\frac{1-k_1}{1+k_1} K + 2k_1 \frac{dK}{dk_1}\right).$$

Il s'ensuit, d'après (36),

$$E = \frac{\pi(1-k_1)}{2}\left\{1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4 + \cdots\right\}, \quad (37)$$

où le coefficient de k_1^{2n} est :

$$(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdot(2n)}\right)^2.$$

Si l'on remplace dans (37) le facteur $1-k_1$ par $\dfrac{1-k_1^2}{1+k_1}$, et si l'on multiplie la série par $1-k_1^2$, il vient :

$$E=\frac{\pi}{2(1+k_1)}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k_1^6+\cdots\right\}. \quad (38)$$

Cette formule donne facilement la longueur du quart d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b; pour

$$k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\qquad k_1=\frac{a-b}{a+b},$$

on obtient, en multipliant les deux membres par a,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4+\cdots\right\}.$$

Pour se faire une idée de l'utilité pratique de ces séries, nous allons examiner, du moins pour l'une d'elles, combien il faut calculer de termes pour obtenir une exactitude déterminée. Si nous désignons par $u_0, u_1, u_2, \ldots\ u_{n-1}$, les n premiers termes de la série (35), et par R_n le reste, nous aurons :

$$K=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+R_n,$$

$$R_n=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^2 k^{2n}\left\{1+\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 k^2+\cdots\right\}.$$

On a d'une manière approchée, pour des valeurs de n un peu considérables (1),

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2=\frac{2}{(2n+1)\pi},$$

$$\frac{2n+1}{2n+2}=1,\qquad \frac{2n+3}{2n+4}=1,\ \text{etc.};$$

---

(1) Cette formule n'est autre que celle de Wallis. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel*, p. 424. J. G.

par conséquent, on a, approximativement,

$$R_n = \frac{k^{2n}}{2n+1}(1 + k^2 + k^4 + \cdots) = \frac{k^{2n}}{(2n+1)(1-k^2)}.$$

Si le calcul doit être exact jusqu'à δ décimales, on doit avoir

$$R_n < \frac{1}{10^\delta};$$

il s'en suit que n doit vérifier la condition suivante :

$$\frac{(2n+1)(1-k^2)}{k^{2n}} > 10^\delta,$$

ou bien

$$\log(2n+1) + n \log\left(\frac{1}{k^2}\right) > \delta + \log\left(\frac{1}{1-k^2}\right),$$

d'où l'on déduit facilement n, après quelques tâtonnements.

D'après cela, pour $k = \frac{4}{5}$, et pour une exactitude de six décimales, on doit prendre n tel que :

$$\log(2n+1) + n \cdot 0{,}19382 > 6{,}4437,$$

et à cela correspond au moins un nombre de termes $n = 28$.

Des considérations semblables existent pour les autres séries, et l'on en déduit que les formules précédentes n'ont une valeur pratique que pour k très-petit.

c) Pour obtenir des développements en séries qui permettent de calculer facilement K et E pour de grandes valeurs de k, c'est-à-dire pour des valeurs s'approchant de l'unité, examinons d'abord certaines intégrales définies.

Dans l'équation

$$W = \int_0^\infty \frac{\mathrm{l.}\,(1+\beta^2x^2)}{1+\alpha^2x^2}\,dx,$$

soit W la valeur encore inconnue de l'intégrale du second membre; on obtient par la différentiation des deux membres par rapport à β, laquelle est évidemment permise,

$$\frac{dW}{d\beta} = 2\beta \int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)} = \frac{\pi}{\alpha(\alpha+\beta)};$$

d'où, réciproquement,

$$W = \frac{\pi}{\alpha}\left\{ \mathrm{l.}\,(\alpha + \beta) + \text{const.} \right\}.$$

La constante se détermine en observant que W s'annule pour $\beta = 0$. On a, par suite, $\text{const} = -\,\mathrm{l.}\,\alpha$, et, en vertu de la signification primitive de W,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{l.}\,(1+\beta^2 x^2)}{1+\alpha^2 x^2}\,dx = \frac{\pi}{\alpha}\,\mathrm{l.}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha}.$$

Par la substitution de

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad \beta = 1,\quad x = \operatorname{cotg}\theta,$$

il vient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l.}\sin\theta\,d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{l}\,(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{39}$$

où ε est évidemment une fraction simple. Si, au lieu de cette équation, on écrit la suivante qui lui est identique,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l.}\sin\theta\,d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 z^2}}\cdot\frac{dz}{1+z},$$

on peut développer facilement ces deux intégrales en séries convergentes, procédant suivant les puissances de ε. En égalant les coefficients de ε^{2n}, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta\cdot\mathrm{l.}\sin\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\int_0^1\frac{z^{2n}\,dz}{1+z};$$

et, en effectuant l'intégration relative à z,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta\,\mathrm{l.}\sin\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\left\{\mathrm{l.}\,2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{1}{2n}\right\}. \tag{40}$$

La formule (39) peut, en outre, à cause de l'équation identique

$$1+\sqrt{1-\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}},$$

s'exprimer de la manière suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\text{l.}\,\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\pi}{4}\,\text{l.}\left(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right),$$

ou bien :

$$\frac{\text{l.}\,\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\int_0^1 \frac{du}{1-(1-\varepsilon^2)\,u^2}.$$

Posons ici $\varepsilon = k\sin\varphi$, multiplions les deux membres par $d\varphi$, et intégrons entre les limites $\varphi = 0$, et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et nous aurons :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\,(k\sin\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\varphi\, du}{1-(1-k^2\sin^2\varphi)\,u^2}$$

La première intégrale du premier membre se décompose en :

$$\text{l.}\,k\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \text{K}\cdot\text{l.}\,k + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

La première intégrale double devient, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{l.}\sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1-k^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{l.}\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\ (1).$$

Dans la dernière intégrale double, on obtient, en renversant l'ordre des intégrations (abstraction faite du signe) :

$$\int_0^1 du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1-u^2)\cos^2\varphi + [1-(1-k^2)\,u^2]\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[1-(1-k^2)\,u^2]}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\text{F}\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

---

(1) On fait usage de l'intégrale définie connue

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$$

J. G.

En désignant, pour abréger, $\sqrt{1-k^2}$ par k', et $F\left(k', \frac{1}{2}\pi\right)$ par K', nous avons, d'après ce qui précède,

$$K\,\mathrm{l}.\,k + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l}.\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l}.\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = -\frac{\pi}{2}K'.$$

Les deux intégrales définies du premier membre sont égales, puisque les lettres d'intégration importent peu; on a donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l}.\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = -\frac{1}{2}K\,\mathrm{l}.\,k - \frac{1}{4}\pi K'. \qquad (41)$$

De même, si l'on met k' à la place de k,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l}.\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}} = -\frac{1}{2}K'\,\mathrm{l}.\,k' - \frac{1}{4}\pi K.$$

C'est cette équation qui peut servir au calcul de K pour de grandes valeurs de k, et de petites valeurs de k'. Si on l'écrit, en effet, sous la forme suivante :

$$K = \frac{2}{\pi}K'\,\mathrm{l}.\left(\frac{1}{k'}\right) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l}.\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}},$$

on a d'abord, d'après (35),

$$\frac{2}{\pi}K' = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k'^6 + \cdots.$$

En outre, on peut développer $(1-k'^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binome, et intégrer les termes de la série par la formule (40). On obtient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} K = {} & \mathrm{l}.\left(\frac{4}{k'}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\mathrm{l}.\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right]k'^2 \\ & + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left[\mathrm{l}.\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\cdot 4}\right]k'^4 \\ & + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left[\mathrm{l}.\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{2}{5\cdot 6}\right]k'^6 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

On en conclut la règle suivante :

Au moyen des formules

$$\alpha_0 = \mathrm{l.}\left(\frac{4}{k'}\right), \quad \alpha_2 = \alpha_0 - 1, \quad \alpha_4 = \alpha_2 - \frac{2}{3\cdot 4},$$

$$\alpha_6 = \alpha_4 - \frac{2}{5\cdot 6}, \quad \alpha_8 = \alpha_6 - \frac{2}{7\cdot 8}, \ldots.$$

on calcule successivement les quantités α_0, α_2, α_4, etc., lesquelles, soit dit en passant, convergent vers la limite $\mathrm{l.}\left(\frac{1}{k'}\right)$.

On a alors :

$$K = \alpha_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha_2 k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \alpha_4 k'^4 + \cdots \tag{43}$$

Pour obtenir la formule correspondante pour E, nous transformons d'abord l'équation (34), de manière à introduire k' au lieu de k. Nous aurons ainsi :

$$E = (1 - k^2)\left(K + k\frac{dK}{dk'} : \frac{dk}{dk'}\right),$$

et, en remplaçant k par sa valeur $\sqrt{1 - k'^2}$,

$$E = k'^2 K - k'(1 - k'^2)\frac{dK}{dk'}.$$

Appliquée à l'équation (42), cette relation donne :

$$\left.\begin{aligned} E = 1 &+ \frac{1}{2}\left[\mathrm{l.}\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{1\cdot 2}\right] k'^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}\left[\mathrm{l.}\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{1}{3\cdot 4}\right] k'^4 \\ &+ \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{5}{6}\left[\mathrm{l.}\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right] k'^6 \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

On en conclut la règle suivante :

Au moyen des formules

$$\beta_2 = \mathrm{l.}\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{1\cdot 2}, \quad \beta_4 = \beta_2 - \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4},$$

$$\beta_6 = \beta_4 - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6}, \ldots$$

on calcule les quantités β_2, β_4, etc., qui convergent vers la limite $\mathrm{l}.\left(\frac{1}{k'}\right)$.

On a ensuite :

$$E = 1 + \frac{1}{2}\beta_2 k'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}\beta_4 k'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}\beta_6 k'^6 + \cdots \quad (45)$$

Comme exemple, prenons $k = \frac{24}{25}$, d'où $k' = \frac{7}{25}$. Les valeurs de β_2, β_4, etc., sont, dans ce cas,

$$\beta_2 = 2{,}15926004, \quad \beta_4 = 1{,}57592671, \quad \beta_6 = 1{,}45926004,$$
$$\beta_8 = 1{,}40806956, \quad \beta_{10} = 1{,}37910131, \quad \beta_{12} = 1{,}36041444;$$

elles donnent :

$$\begin{aligned}
1 &= 1,\\
\frac{1}{2}\beta_2 k'^2 &= 0{,}08464299,\\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}\beta_4 k'^4 &= 0{,}00181622,\\
\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}\beta_6 k'^6 &= 0{,}00008241,\\
\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{7}{8}\beta_8 k'^8 &= 0{,}00000455,\\
\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot \frac{9}{10}\beta_{10} k'^{10} &= 0{,}00000027,\\
\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}\right)^2 \cdot \frac{11}{12}\beta_{12} k'^{12} &= 0{,}00000002,\\
\hline
E &= 1{,}08654646.
\end{aligned}$$

En multipliant par 25, on obtient la longueur du quart d'une ellipse construite sur les demi-axes 25 et 7. Cette longueur $= 27{,}163662$; elle concorde avec la valeur numérique trouvée ci-dessus[1] (page 31).

---

(1) Les séries (a) se trouvent déjà dans les œuvres d'Euler. Les formules (42) et (44) ont été trouvées d'abord par Legendre par un procédé insuffisant (*Mém. de l'Académie*, 1780 et *Traité des fonct. ellip.*, T. I). M. Schlœmilch a donné la démonstration précédente dans la *Zeitschrift für Math.* II.

d) Pour développer les intégrales F (k, φ) et E (k, φ) en séries infinies, posons d'abord

$$\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}=k_1, \quad \text{ou bien} \quad k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1};$$

nous aurons :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1+k_1}{\sqrt{1+2k_1\cos 2\varphi+k_1{}^2}}=(1+k_1)\,(1+k_1e^{2i\varphi})^{-\frac{1}{2}}\,(1+k_1e^{-2i\varphi})^{-\frac{1}{2}},$$

où, comme d'ordinaire, $i=\sqrt{-1}$. Les puissances du degré $-\frac{1}{2}$, qui entrent dans cette formule, peuvent être, d'après la formule du binome, développées en séries, qui sont encore convergentes, si l'on réduit leurs termes à leurs valeurs absolues. Ces séries peuvent être multipliées l'une par l'autre, et donnent un produit qui, au moyen de la formule

$$\frac{1}{2}(e^{i\psi}+e^{-i\psi})=\cos\psi,$$

prend la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=a_0-a_2\cos 2\varphi+a_4\cos 4\varphi-a_6\cos 6\varphi+\cdots \quad (46)$$

Les coefficients a_0, a_2, a_4, ... sont eux-mêmes des séries infinies; ainsi l'on a :

$$a_0=(1+k_1)\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k_1{}^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k_1{}^4+\cdots\right\},$$

$$a_2=2\,(1+k_1)\left\{\frac{1}{2}\,k_1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4}k_1{}^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{5}{6}k_1{}^5+\cdots\right\},$$

et ainsi de suite.

Comme on le voit, on peut, au moyen de (36), exprimer a_0 plus simplement, et l'on a :

$$a_0=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{K}.$$

On doit donc s'attendre à ce que a_2, a_4, ... pourront aussi se ramener à des intégrales elliptiques complètes. En effet, a_0 pourrait déjà être déterminée plus rapidement au moyen de l'équation (46). Si l'on multiplie cette dernière par $d\varphi$, et si l'on intègre entre $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = a_0 \frac{\pi}{2};$$

d'où il suit pour a_0 la même valeur que ci-dessus. Multiplions ensuite l'équation (46) par $2 \cos 2\varphi$, et remplaçons dans le second membre les doubles produits de cosinus par des sommes de deux cosinus; puis multiplions par $d\varphi$ et intégrons de 0 à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = - a_2 \frac{\pi}{2}.$$

On tire de là, en observant que $\cos 2\varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi$,

$$a_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2 \sin^2 \varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{4}{\pi} \left\{ 2 \frac{\mathrm{K} - \mathrm{E}}{k^2} - \mathrm{K} \right\}.$$

En général, on peut exprimer de la même manière a_{2n} par l'intégrale définie :

$$a_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2n \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Mais le développement complet de cette expression serait assez long. Il est préférable de ramener les coefficients a_4, a_6, ... aux précédents : c'est à cela que les remarques suivantes serviront.

En différentiant l'équation (46), on a :

$$\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^3}} = 2a_2 \sin 2\varphi - 4a_4 \sin 4\varphi + 6a_6 \sin 6\varphi - \cdots;$$

multiplions cette équation par

$$\frac{4\,(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{k^2} = \frac{2\,(2 - k^2)}{k^2} + 2 \cos 2\varphi,$$

et remplaçons dans le second membre les doubles produits de sinus et de cosinus par des sommes de deux sinus. Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{2(2-k^2)}{k^2}=\lambda,$$

le produit ordonné donne :

$$\begin{aligned}\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = &(2\lambda a_2-4a_4)\sin 2\varphi\\ &+(2a_2-4\lambda a_4+6a_6)\sin 4\varphi\\ &-(4a_4-6\lambda a_6+8a_8)\sin 6\varphi\\ &+(6a_6-8\lambda a_8+10a_{10})\sin 8\varphi\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'un autre côté, on déduit directement de (46) en multipliant par $2\sin 2\varphi$,

$$\begin{aligned}\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (2a_0-a_4)\sin 2\varphi+(a_6-a_2)\sin 4\varphi-(a_8-a_4)\sin 6\varphi\\ +(a_{10}-a_6)\sin 8\varphi-\cdots;\end{aligned}$$

d'où, en égalant les coefficients de $\sin 2\varphi$,

$$2a_0-a_4=2\lambda a_2-4a_4,\quad \text{ou bien}\quad 3a_4=2(\lambda a_2-a_0).$$

En égalant les coefficients de $\sin(m-2)\varphi$, où m doit être un nombre pair plus grand que 4, on a :

$$(m-1)\,a_m=(m-2)\,\lambda a_{m-2}-(m-3)\,a_{m-4}.$$

Les formules suivantes servent donc pour le calcul des quantités a_0, a_2, a_4, etc. :

$$a_0=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{K},\quad a_2=\lambda a_0-\frac{8}{\pi k^2}\,\mathrm{E},\quad a_4=\frac{2}{3}(\lambda a_2-a_0),$$

$$a_6=\frac{4\lambda a_4-3a_2}{5},\quad a_8=\frac{6\lambda a_6-5a_4}{7},\quad \text{et ainsi de suite.}$$

Si l'on multiplie l'équation (46) par $d\varphi$, et que l'on intègre depuis 0 jusque φ, on arrive au développement suivant :

$$\mathrm{F}(k,\varphi)=a_0\varphi-\frac{1}{2}\,a_2\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\,a_4\sin 4\varphi-\frac{1}{6}\,a_6\sin 6\varphi+\cdots \tag{47}$$

Par une méthode tout-à-fait analogue, on peut transformer $E(k, \varphi)$ en une série de la même forme. De l'équation

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1+k_1}(1+k_1 e^{2i\varphi})^{\frac{1}{2}}(1+k_1 e^{-2i\varphi})^{\frac{1}{2}},$$

on déduit d'abord au moyen de la formule du binome, un développement de la forme :

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = b_0 + b_2 \cos 2\varphi - b_4 \cos 4\varphi + b_6 \cos 6\varphi - \cdots, \quad (48)$$

dans lequel les deux premiers coefficients peuvent être déterminés comme ci-dessus. On a, en effet,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = b_0 \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad b_0 = \frac{2}{\pi} E;$$

en outre,

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cos 2\varphi\, d\varphi = b_2 \cdot \frac{\pi}{2};$$

d'où :

$$b_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\,(1 - 2\sin^2 \varphi)\, d\varphi.$$

En réduisant cette intégrale, on trouve :

$$b_2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2-k^2)E - 2(1-k^2)K}{3k^2}.$$

Si l'on multiplie le quotient différentiel de l'équation (48) par $\lambda + 2\cos 2\varphi$, on obtient dans le premier membre la même expression qu'en multipliant les deux membres de (48) par $2 \sin 2\varphi$. En égalant les coefficients des séries ainsi obtenues, il vient :

$$5b_4 = 2(\lambda b_2 - b_0),$$

et pour un nombre pair $m > 4$,

$$(m+1)\, b_m = (m-2)\lambda b_{m-2} - (m-5)\, b_{m-4}.$$

Les formules suivantes servent donc au calcul des quantités b_0, b_2, etc. :

$$b_0 = \frac{2}{\pi} E, \quad b_2 = \frac{1}{3}\left\{\lambda b_0 - \frac{8(1-k^2)}{\pi k^2} K\right\}, \quad b_4 = \frac{2}{5}(\lambda b_2 - b_0),$$

$$b_6 = \frac{4\lambda b_4 - 1 b_2}{7}, \quad b_8 = \frac{6\lambda b_6 - 3b_4}{9}, \text{ etc.}$$

On déduit de (48), en multipliant par $d\varphi$, et intégrant depuis $\varphi = 0$ jusque $\varphi = \varphi$, la formule :

$$E(k, \varphi) = b_0\varphi + \frac{1}{2} b_2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4} b_4 \sin 4\varphi + \frac{1}{6} b_6 \sin 6\varphi - \cdots \quad (49)$$

Si l'on veut calculer en même temps $F(k, \varphi)$ et $E(k, \varphi)$ pour un même module, il est avantageux de déduire les coefficients $b_0, b_2, \ldots.$ de $a_0, a_2, \ldots.$ Les formules de réduction nécessaires à cet effet, s'obtiennent en égalant l'équation obtenue par la différentiation de (48) :

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = 2b_2 \sin 2\varphi - 4b_4 \sin 4\varphi + \cdots,$$

au développement précédent :

$$\frac{2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = (2a_0 - a_4) \sin 2\varphi - (a_2 - a_6) \sin 4\varphi + \cdots,$$

après avoir multiplié la première de ces formules par 4, et la seconde par k^2. On trouve d'abord :

$$b_2 = \frac{1}{8} k^2 (2a_0 - a_4),$$

et, pour un nombre pair $m > 2$,

$$b_m = \frac{k^2}{4m} (a_{m-2} - a_{m+2}).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans (49), le résultat conduit à la règle suivante :

On détermine les quantités c_0, c_2, c_4, etc, au moyen des formules :

$$c_0 = \frac{2}{\pi} E, \quad c_2 = \frac{2a_0 - a_4}{4}, \quad c_4 = \frac{a_2 - a_6}{4^2}, \quad c_6 = \frac{a_4 - a_8}{6^2}, \quad \text{etc.}$$

et l'on a

$$E(k, \varphi) = c_0 + \frac{1}{4} k^2 (c_2 \sin 2\varphi - c_4 \sin 4\varphi + c_6 \sin 6\varphi - \cdots). \quad (50)$$

Pour montrer jusqu'où ces formules sont applicables dans la pratique, nous allons traiter le cas particulier de $k = \frac{24}{25}$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. On a alors :

$$\lambda = \frac{337}{144}, \quad K = 2{,}6931425, \quad E = 1{,}0865465;$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0{,}6366K &&= 1{,}71451; & c_0 &= 0{,}69172;\\
a_2 &= 1{,}4898K - 2{,}7631E &&= 1{,}01018; & c_2 &= 0{,}74899;\\
a_4 &= 1{,}8999K - 4{,}5109E &&= 0{,}43306; & c_4 &= 0{,}05034;\\
a_6 &= 2{,}6632K - 6{,}4131E &&= 0{,}20468; & c_6 &= 0{,}00922;\\
a_8 &= 3{,}9852K - 9{,}7851E &&= 0{,}10125; & c_8 &= 0{,}00239;\\
a_{10} &= 6{,}2188K - 15{,}5675E &&= 0{,}05143; & c_{10} &= 0{,}00075;\\
a_{12} &= 9{,}9700K - 24{,}6887E &&= 0{,}02658; & c_{12} &= 0{,}00026;\\
a_{14} &= 16{,}276K - 40{,}331E &&= 0{,}01390; & c_{14} &= 0{,}00010;\\
a_{16} &= 26{,}910K - 66{,}697E &&= 0{,}00733; & c_{16} &= 0{,}00004;\\
a_{18} &= 44{,}911K - 111{,}321E &&= 0{,}00388; & c_{18} &= 0{,}00002;\\
a_{20} &= 75{,}495K - 187{,}134E &&= 0{,}00205; & c_{20} &= 0{,}00001;\\
a_{22} &= 127{,}63K - 316{,}57E &&= 0{,}00105;\\
a_{24} &= 216{,}77K - 537{,}35E &&= 0{,}00049;
\end{aligned}
$$

$$
F\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{5}\pi\right) = 1{,}27855; \quad E\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{5}\pi\right) = 0{,}88326.
$$

Les coefficients a_0, a_2, ont été exprimés ici complétement en fonction de K et E (ce qui est ordinairement superflu), pour faire voir que le coefficient a_m est de la forme $p\mathrm{K} - q\mathrm{E}$, où p, q croissent rapidement. Si l'on veut atteindre une grande exactitude, on doit déterminer d'abord K et E très-rigoureusement, c'est-à-dire avec environ 12 décimales, et calculer évidemment beaucoup plus de termes des séries, que nous ne l'avons fait ici. De ces remarques il résulte suffisamment que les formules (47) et (50) n'ont qu'une valeur théorique seulement.

Pour les intégrales elliptiques de troisième espèce, on peut former des séries de même forme; cependant, les coefficients qui y entrent sont d'une construction si compliquée que les séries qui s'y rapportent ne sont d'aucune utilité.

V. Théorème d'addition pour les intégrales de la première espèce.

D'après les éléments du calcul intégral, on sait que les intégrales des fonctions rationnelles fractionnaires peuvent être exprimées par des logarithmes et des arcs de cercles, et que les intégrales des fonctions irrationnelles renfermant seulement un radical de la forme $\sqrt{a+bx+cx^2}$, se ramènent également à ces fonctions simples. Mais, si la quantité sous le radical est du troisième ou du quatrième degré, les moyens ordinaires d'intégration ne sont plus suffisants; la réduction conduit alors aux trois intégrales elliptiques, qui sont analogues aux logarithmes et aux arcs de cercle, et s'y réduisent, en effet, lorsque le module s'annule. On peut donc dire que les logarithmes, les fonctions cyclométriques, et les intégrales elliptiques, ont leur origine commune dans le calcul intégral.

En effet, si les deux premières fonctions n'étaient pas connues par l'algèbre et la trigonométrie, on aurait été forcé par le calcul intégral de considérer des intégrales de la forme :

$$\int_1^x \frac{dx}{x}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et de leur donner un nom quelconque. Pour ces fonctions on a évidemment les équations suivantes :

$$\text{l. } x + \text{l. } y = \text{l. } (xy),$$

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin } \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Elles jouissent de cette propriété commune que deux fonctions de la même espèce, ayant des arguments x, y, différents peuvent être réunies en une fonction de la même espèce, dont l'argument est composé de x, y, d'après une règle déterminée. En général, cela signifie que, aussi bien pour $\mathrm{f}(x) = lx$, que pour $\mathrm{f}(x) = \text{arc sin } x$, il existe une équation de la forme :

$$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(z),$$

dans laquelle z dépend d'une certaine manière de x, y. A cause de l'analogie entre les fonctions précédentes et les intégrales elliptiques, on doit s'attendre à ce que, pour ces dernières, il existe des relations semblables. Nous allons examiner comment, dans ce cas, z dépend de x, y. Avant de passer à cette recherche, considérons d'abord les deux cas simples où $\mathrm{f}(x) = lx$, et $\mathrm{f}(x) = \text{arc sin } x$, pour leur appliquer séparément la méthode convenable.

Supposons que la fonction $\mathrm{f}(x)$ soit définie par l'équation suivante :

$$\mathrm{f}(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}, \tag{51}$$

et proposons-nous de déterminer y, de manière à satisfaire à l'équation

$$f(x) + f(y) = C, \tag{52}$$

dans laquelle C désigne une constante quelconque. Par la différentiation on a d'abord, à cause de la signification de f,

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

ou

$$ydx + xdy = 0; \tag{53}$$

d'où, en intégrant,

$$\int ydx + \int xdy = \text{const.}$$

En appliquant à ces deux intégrales l'intégration par parties, on obtient :

$$2xy - \int (xdy + ydx) = \text{const};$$

d'où, à cause de (53),

$$2xy = \text{const}, \quad \text{ou} \quad xy = c.$$

Ainsi, la solution

$$f(x) + f\left(\frac{c}{x}\right) = C,$$

correspond à la propriété énoncée ci-dessus (52). Dans le cas particulier $x = 1$, $f(x)$ s'annule, et il vient :

$$C = f(c).$$

Par conséquent,

$$f(x) + f\left(\frac{c}{x}\right) = f(c).$$

Si l'on remarque encore que c et $\frac{c}{x}$ peuvent avoir une valeur quelconque, on peut représenter $\frac{c}{x}$ par une lettre quelconque, par exemple y, et, par suite, $c = xy$. L'équation

$$f(x) + f(y) = f(xy),$$

exprime la propriété fondamentale des logarithmes; elle a été déduite ici uniquement de la définition de l'intégrale (51).

Soit, en second lieu, l'équation :

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

laquelle doit satisfaire de nouveau à l'équation (52). La différentiation donne :

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \tag{54}$$

ou bien :

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0;$$

d'où

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx + \int \sqrt{1-x^2}\,dy = \text{const.}$$

On a, par l'intégration par parties,

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx = x\sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dy = y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{yx\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En ajoutant, il vient :

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \text{const.}$$

A cause de (54), l'intégrale est nulle, et il reste :

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{const} = c.$$

On a ainsi la condition sous laquelle la relation $f(x) + f(y) = C$, a lieu. Pour $x = 0$, on a $y = c$, $f(0) = 0$, et $C = f(c)$; d'où

$$f(x) + f(y) = f(c).$$

Comme c peut avoir une valeur quelconque, on peut finalement mettre aussi z au lieu de c, et dire que l'équation

$$f(x) + f(y) = f(z),$$

subsiste sous la condition

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

On déduit de là le théorème d'addition pour $f(x) = \text{arc sin } x$.

Le même procédé s'applique de la manière suivante à la fonction :

$$\mathrm{f}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{55}$$

Si d'abord on doit avoir :

$$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = \mathrm{C}, \tag{56}$$

la différentiation donne :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0, \tag{57}$$

ou bien :

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\, dx + \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\, dy = 0. \tag{58}$$

Divisant cette équation par $1 - k^2x^2y^2$, et intégrant, on a :

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\, dx + \int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\, dy = c. \tag{59}$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{xy\,[2k^2(x^2+y^2) - (1+k^2)(1+k^2x^2y^2)]}{(1-k^2x^2y^2)^2} = \mathrm{P}, \qquad \frac{2k^2x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2} = \mathrm{Q},$$

l'intégration par parties nous donne :

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\, dx = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} \cdot x - \int \frac{\mathrm{P}dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$- \int \mathrm{Q} \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\, dx.$$

La transformation correspondante pour la seconde intégrale (59) s'obtient en changeant partout x en y ; les fonctions symétriques P et Q ne changent pas. On a ainsi :

$$\int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\, dy = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} \cdot y - \int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$- \int \mathrm{Q} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\, dy.$$

La substitution de ces expressions dans (59) nous donne :

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$
$$-\int P\left[\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right]$$
$$-\int Q\left\{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx+\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy\right\}=c,$$

c'est-à-dire, puisque, d'après (57) et (58), les deux intégrales sont nulles,

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=c. \qquad (60)$$

Cette équation exprime la condition sous laquelle on a :

$$\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)=\mathrm{C}.$$

Pour $x=0$, elle donne $y=c$; et comme, en même temps, $\mathrm{f}(0)=0$, il reste $\mathrm{C}=\mathrm{f}(c)$. La formule (60) renferme la condition nécessaire pour que l'on ait :

$$\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)=\mathrm{f}(c).$$

Si l'on écrit enfin z, au lieu de la quantité arbitraire c, on a le théorème suivant : si

$$z=\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2},$$

on a :

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Pour $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$, $z=\sin\sigma$, ce théorème prend la forme suivante : si

$$\sin\sigma=\frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}, \qquad (61)$$

on a :

$$\mathrm{F}(k,\varphi)+\mathrm{F}(k,\psi)=\mathrm{F}(k,\sigma).$$

En vertu de ce théorème, appelé *le théorème d'addition, deux intégrales* *elliptiques de la première espèce, de même module et d'amplitudes différentes, se réduisent à une seule intégrale de la même espèce.*

Une deuxième démonstration de ce théorème n'est peut-être pas superflue, à cause de sa signification fondamentale; cette démonstration revient à transformer l'intégrale

$$\int_0^\alpha \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}} = \mathrm{F}(k, \alpha), \tag{62}$$

par l'introduction d'une nouvelle variable. Si l'on pose, en effet,

$$\cos\beta\cos\eta - \sin\beta\sin\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta} = \cos\zeta, \tag{63}$$

à la limite inférieure $\eta = 0$, correspond la valeur $\zeta = \beta$, et si $\eta = \alpha$, ζ prend une valeur γ laquelle doit être déterminée par l'équation

$$\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma} = \cos\gamma. \tag{64}$$

Pour déterminer $d\eta$ en fonction de $d\zeta$, on pourrait tirer η de l'équation (63), et ensuite différentier.

On arrive plus rapidement au but, en observant que l'équation (63) peut être mise sous les deux formes :

$$\cos\zeta\cos\beta + \sin\zeta\sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta} = \cos\eta, \tag{65}$$

$$\cos\zeta\cos\eta + \sin\zeta\sin\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\beta} = \cos\beta. \tag{66}$$

On s'en assure facilement, si l'on rend les équations (64), (65) et (66) rationnelles. Mais puisque alors les signes des radicaux disparaissent, l'exactitude de ces signes exige une démonstration particulière.

Pour $k = 0$, l'équation (63) donne $\cos(\beta + \eta) = \cos\zeta$; d'où $\cos(\zeta - \beta) = \cos\eta$, et $\cos(\zeta - \eta) = \cos\beta$. Les équations (65) et (66) donnent la même chose pour $k = 0$; d'où résulte l'exactitude des signes choisis. Par la différentiation de (66), on obtient, si l'on désigne pour un instant par R le radical qui y entre,

$$(\mathrm{R}\cos\eta\sin\zeta - \sin\eta\cos\zeta)\,d\eta = (\cos\eta\sin\zeta - \mathrm{R}\sin\eta\cos\zeta)\,d\zeta;$$

par suite, la substitution de la valeur tirée de (66) pour R, nous donne :

$$\frac{\cos\beta\cos\eta - \cos\zeta}{\sin\eta}\,d\eta = \frac{\cos\eta - \cos\beta\cos\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta,$$

c'est-à-dire, d'après (63) et (65),

$$\sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}\,d\eta = \sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}\,d\zeta,$$

ou bien :

$$\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}}.$$

Si nous substituons cette valeur dans (62), ou, ce qui est la même chose, si nous intégrons l'équation précédente, en ayant égard à ce que, aux limites $\eta=0$ et $\eta=\alpha$, correspondent les limites $\zeta=\beta$ et $\zeta=\gamma$, il vient :

$$\int_0^\alpha \frac{d\eta}{\Delta\eta}=\int_\beta^\gamma \frac{d\zeta}{\Delta\zeta}=\int_0^\gamma \frac{d\zeta}{\Delta\zeta}-\int_0^\beta \frac{d\zeta}{\Delta\zeta}.$$

Par suite, on a l'équation

$$F(k,\alpha)=F(k,\gamma)-F(k,\beta),$$

dans laquelle les amplitudes α, β, γ, sont reliées par l'équation (64). Si nous mettons φ, ψ, σ, au lieu de α, β, γ, nous obtenons le théorème suivant : l'équation

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=F(k,\sigma),$$

subsiste, lorsque les amplitudes φ, ψ, σ vérifient la condition

$$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\Delta\sigma=\cos\sigma. \tag{67}$$

Cette condition peut, par analogie avec ce qui précède, être mise sous les formes :

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma\cos\varphi+\sin\sigma\sin\varphi\Delta\psi&=\cos\psi,\\ \cos\sigma\cos\psi+\sin\sigma\sin\psi\Delta\varphi&=\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

Si l'on élimine $\cos\sigma$ entre ces deux dernières équations, il vient :

$$\sin\sigma=\frac{\cos^2\varphi-\cos^2\psi}{\cos\varphi\sin\psi\Delta\varphi-\cos\psi\sin\varphi\Delta\psi},$$

ou bien, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\cos\varphi\sin\psi\Delta\varphi+\cos\psi\sin\varphi\Delta\psi$,

$$\sin\sigma=\frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}, \tag{69}$$

ce qui s'accorde avec (61).

Par la substitution dans une des équations (68), on trouve :

$$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta\varphi\Delta\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}; \tag{70}$$

et de (67) on tire :

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi - k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}. \tag{71}$$

Enfin, le quotient de (69) et (70) donne :

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi\Delta\psi + \operatorname{tg}\psi\Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\Delta\varphi\Delta\psi}. \tag{72}$$

La dernière formule est la plus commode pour le calcul numérique de σ. Si l'on détermine, en effet, deux angles auxiliaires φ', ψ', au moyen des formules

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi\Delta\psi, \qquad \operatorname{tg}\psi' = \operatorname{tg}\psi\Delta\varphi,$$

on a simplement

$$\sigma = \varphi' + \psi'.$$

L'hypothèse $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, fournit un cas particulier remarquable du théorème d'addition. En effet, on a alors :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{k'}, \\ F(k,\varphi) + F(k,\psi) &= F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right). \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Les deux intégrales elliptiques correspondant aux amplitudes φ, ψ, ont pour somme l'intégrale complète K.

Avant d'examiner les conséquences qui se rattachent à l'addition des intégrales elliptiques, nous allons encore développer quelques combinaisons des formules précédentes, lesquelles seront utiles plus tard. En éliminant $\cos\sigma$ entre (67) et la seconde équation (68), on obtient :

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta\sigma + \cos\varphi\sin\psi}{\sin\sigma};$$

de même, l'équation (67) et la première équation (68) nous donnent :

$$\Delta\psi = \frac{\sin\psi\cos\varphi\Delta\sigma + \cos\psi\sin\varphi}{\sin\sigma}.$$

Il en résulte :

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi + \Delta\psi &= \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi+\psi),\\ \Delta\varphi - \Delta\psi &= \frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi-\psi).\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

De l'addition des intégrales elliptiques, on déduit facilement *le théorème de la soustraction*, si l'on prend ψ négatif, et si l'on a égard à la relation $F(k, -\psi) = -F(k, \psi)$.

Si l'on remplace en même temps σ par τ, on a l'équation suivante :

$$F(k, \varphi) - F(k, \psi) = F(k, \tau),$$

à la condition que

$$\sin\tau = \frac{\sin\varphi\,\cos\psi\Delta\psi - \sin\psi\,\cos\varphi\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

On aura des changements analogues dans les formules (70), (71) et (72).

La *multiplication des intégrales elliptiques* n'est autre chose qu'une addition successive, et s'effectue d'après cette condition. Dans le cas le plus simple, le théorème d'addition donne, pour $\psi = \varphi$, et en remplaçant σ par φ_2,

$$F(k, \varphi_2) = 2\,F(k, \varphi),$$

où φ_2 est déterminé au moyen de l'une des formules :

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^4\varphi}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + k^2\sin^4\varphi}{1 - k^2\sin^4\varphi}.$$

Si l'on désigne par φ_3 l'amplitude correspondant à l'équation

$$F(k, \varphi_3) = 3\,F(k, \varphi) = F(k, \varphi_2) + F(k, \varphi),$$

il vient :

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_2\cos\varphi\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\varphi_2\,\Delta\varphi_2}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_2};$$

en substituant dans cette formule les valeurs trouvées précédemment, on a :

$$\sin\varphi_3 = \frac{[4(1 - k^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi - (1 - k^2\sin^4\varphi)^2]\sin\varphi}{(1 - k^2\sin^4\varphi)^2 - 4k^2(1 - k^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi\sin^4\varphi}.$$

Il va de soi que l'on peut continuer de la même manière. Mais, pour éviter des expressions compliquées, nous allons mentionner une simplification du procédé. Si les trois amplitudes φ_{n-1}, φ_n, φ_{n+1}, doivent satisfaire aux équations

$$F(k, \varphi_{n-1}) = (n-1) F(k, \varphi),$$
$$F(k, \varphi_n) = n F(k, \varphi),$$
$$F(k, \varphi_{n+1}) = (n+1) F(k, \varphi),$$

on a aussi :

$$F(k, \varphi_{n+1}) = F(k, \varphi_n) + F(k, \varphi),$$
$$F(k, \varphi_{n-1}) = F(k, \varphi_n) - F(k, \varphi).$$

Au moyen des théorèmes d'addition et de soustraction, on obtient :

$$\sin \varphi_{n+1} + \sin \varphi_{n-1} = \frac{2\Delta\varphi \cos\varphi \sin\varphi_n}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_n},$$

$$\cos \varphi_{n+1} + \cos \varphi_{n-1} = \frac{2 \cos\varphi \cos\varphi_n}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_n}.$$

Le quotient de ces deux équations nous donne :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) = \Delta\varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi_n ;$$

d'après cette formule, si l'on part de $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \varphi$, on calculera facilement φ_2, φ_3, φ_4, etc.

La *division des intégrales elliptiques* se déduit de la multiplication, en donnant à l'équation

$$F(k, \varphi_m) = m F(k, \varphi),$$

la forme inverse

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{m} F(k, \varphi_m),$$

et considérant φ_m comme connu, et φ comme inconnu.

Si ψ désigne la valeur donnée de φ_m, à l'équation

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{2} F(k, \psi),$$

correspond la condition

$$\cos\psi = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + k^2 \sin^4\varphi}{1 - k^2 \sin^4\varphi} = \frac{1 - 2x^2 + k^2 x^4}{1 - k^2 x^4},$$

où l'on a posé, pour abréger, $\sin\varphi = x$. Comme on le voit, la détermination de φ dépend de la résolution d'une équation algébrique d'un degré supérieur.

Le théorème de la multiplication donne aussi la condition nécessaire à l'existence de l'équation plus générale :

$$pF(k, \varphi) = qF(k, \psi).$$

dans laquelle p, q, sont des nombres entiers positifs.

Si l'on imagine, en effet, une troisième intégrale elliptique $F(k, \omega)$, comme valeur commune des deux membres de l'équation précédente, il résulte de

$$pF(k, \varphi) = F(k, \omega),$$

une équation de condition entre φ et ω. D'un autre côté, de

$$qF(k, \psi) = F(k, \omega),$$

il résulte une équation de condition entre ψ, ω. Enfin, l'élimination de ω entre ces deux équations donne la relation cherchée entre φ et ψ.

On conclut de ce qui précède le théorème suivant :

Si r, s, t, etc., sont des nombres quelconques rationnels, positifs ou négatifs, φ, ψ, χ, etc., des amplitudes données, la somme d'un nombre fini de termes

$$rF(k, \varphi) + sF(k, \psi) + tF(k, \chi) + \cdots,$$

peut se ramener à une seule intégrale elliptique, dont le module est aussi k et dont l'amplitude peut être déduite de φ, ψ, χ, etc., par des opérations algébriques (1).

Remarque du traducteur. — M. Walton a donné une démonstration très-simple du théorème d'addition des intégrales de première espèce dans une note publiée en novembre 1870 (*The quarterly journal of pure and applied mathematics,* vol. XI).

---

(1) L'équation (57) a été intégrée pour la première fois par Euler. (*Institutiones Calculi Integralis*, I, sect. 2). Lagrange a donné une autre méthode dans la *théorie des fonctions*. La méthode précédente a été exposée par M. Liouville, d'après les papiers de Sturm (C. R. de l'Acad. 1856). Pour la construction géométrique du théorème d'addition, voir la *théorie des fonctions* de Lagrange, et un mémoire de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 3). La méthode de Jacobi a été étendue par Richelot (*J. de Crelle*, t. 38). M. Durège a donné une exposition générale de ces travaux. (*Theorie der elliptischen Functionen.*)

En posant

$$x = \cos\varphi \cos\psi, \qquad y = \sin\varphi \sin\psi,$$

on ramène l'équation

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0,$$

à la suivante :

$$dx^2 - dy^2 = k^2 [(xdy - ydx)^2 - dy^2].$$

Si l'on fait $1 - k^2 = k'^2$, on en déduit :

$$xdy - ydx = \frac{1}{k}\sqrt{dx^2 - k'^2 dy^2},$$

ou bien, en posant, pour abréger, $\frac{dy}{dx} = p$,

$$y = px - \frac{1}{k}\sqrt{1 - k'^2 p^2}. \tag{A}$$

Or, cette équation est celle de Clairaut. En lui appliquant la méthode ordinaire d'intégration, on obtient, par la différentiation, et, à cause de $dy = pdx$,

$$\left(x + \frac{k'^2 p}{k\sqrt{1 - k'^2 p^2}}\right) dp = 0.$$

On satisfera à cette équation en posant $p =$ const. Si l'on désigne cette constante par $\frac{1}{\Delta\sigma}$, on aura l'intégrale générale, en substituant cette valeur de p dans (A), ce qui nous donne :

$$x - y\Delta\sigma = \cos\sigma,$$

ou bien

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \Delta\sigma.$$

Or, cette équation n'est autre que la formule (67).

VI. Théorème d'addition pour les intégrales de la deuxième et de la troisième espèce.

Dans les recherches qui vont suivre, nous supposerons toujours qu'entre les trois amplitudes φ, ψ, σ, on a l'équation :

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta\sigma, \tag{75}$$

où σ doit être considérée comme une quantité donnée, c'est-à-dire comme une constante arbitraire. A cette équation correspondent les suivantes :

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0, \qquad F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma). \tag{76}$$

Nous allons maintenant rechercher si, dans ces conditions, les sommes

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi), \quad \text{et} \quad \Pi_0(k, \varphi) + \Pi_0(k, \psi),$$

donnent une réduction semblable.

a. Posons, pour abréger,

$$S = E(k, \varphi) + E(k, \psi),$$

et, nous aurons, en différentiant,

$$dS = \Delta\varphi d\varphi + \Delta\psi d\psi.$$

A cette équation ajoutons la suivante déduite de (76) :

$$0 = \Delta\psi d\varphi + \Delta\varphi d\psi,$$

nous aurons

$$dS = [\Delta\varphi + \Delta\psi](d\varphi + d\psi).$$

D'après la première formule (74), on a :

$$dS = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi + \psi)\, d(\varphi + \psi),$$

ou, en posant pour un instant $\varphi + \psi = \chi$,

$$dS = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\sin\chi d\chi.$$

Par l'intégration il vient :

$$S = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}(C - \cos\chi) = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}[C - \cos(\varphi + \psi)].$$

La constante C se détermine en faisant $\varphi = 0$; on a alors :

$$\psi = \sigma, \quad E(k, \varphi) = 0, \quad E(k, \psi) = E(k, \sigma), \quad \text{et} \quad S = E(k, \sigma).$$

Par suite,

$$E(k, \sigma) = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}(C - \cos\sigma);$$

Soustrayant cette équation de la précédente, on a :

$$S - E(k, \sigma) = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}[\cos\sigma - \cos(\varphi + \psi)],$$

ou bien :

$$S = E(k, \sigma) + \frac{1 + \Delta\sigma}{\sin\sigma}(\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi).$$

Or, en vertu de (75),

$$\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi = -\sin\varphi\sin\psi\Delta\sigma;$$

par conséquent,

$$S = E(k, \sigma) + \frac{1 - (\Delta\sigma)^2}{\sin\sigma}\sin\varphi\sin\psi,$$

ou enfin, en vertu des valeurs de S et $\Delta\sigma$,

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) = E(k, \sigma) + k^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\sigma. \tag{77}$$

C'est *le théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de deuxième espèce*. On peut en tirer des conséquences analogues à celles qui se rapportent aux intégrales de première espèce : cependant, ces conséquences ne sont pas assez importantes pour les développer complétement. D'ailleurs, la plus remarquable se présentera dans le chapitre suivant.

b. Pour trouver aussi le théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de troisième espèce, qui peuvent être représentées par

$$\Pi_0(h, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

posons

$$S_0 = \Pi_0(h, k, \varphi) + \Pi_0(h, k, \psi).$$

Nous aurons d'abord l'équation

$$dS_0 = \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{(1 + h\sin^2\psi)\Delta\psi},$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$dS_0 = \frac{h(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{(1+h\sin^2\varphi)(1+h\sin^2\psi)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

à cause de la relation

$$\frac{d\psi}{\Delta\psi} = -\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

D'un autre côté, si, comme ci-dessus, on considère σ comme constante, on obtient :

$$\Delta\varphi d\varphi + \Delta\psi d\psi = k^2 \sin\sigma \cdot d(\sin\varphi \sin\psi),$$

et, au moyen de l'avant-dernière relation,

$$(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \sin\sigma \cdot d(\sin\varphi\sin\psi).$$

On a donc pour dS_0 :

$$dS_0 = \frac{h\sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi)}{1 + h(\sin^2\varphi + \sin^2\psi) + h^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

En posant, pour abréger,

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi = p, \qquad \sin\varphi\sin\psi = q,$$

il vient

$$dS_0 = \frac{h\sin\sigma\, dq}{1 + hp + h^2q^2}.$$

Pour exprimer p en fonction de q, nous faisons usage de l'équation

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta\sigma,$$

et nous en tirons :

$$(\cos\sigma + q\Delta\sigma)^2 = \cos^2\varphi\cos^2\psi = (1-\sin^2\varphi)(1-\sin^2\psi) = 1 - p + q^2;$$

d'où

$$p = 1 + q^2 - (\cos\sigma + q\Delta\sigma)^2 = \sin\sigma - 2q\cos\sigma\Delta\sigma + k^2q^2\sin^2\sigma.$$

Substituons cette valeur dans la formule de dS_0, et posons, pour abréger,

$$A = 1 + h\sin^2\sigma, \quad B = h\Delta\sigma\cos\sigma, \quad C = h(h + k^2\sin^2\sigma),$$

$$M = h\sin\sigma;$$

il vient alors :

$$dS_0 = \frac{M\,dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

En intégrant cette dernière, on obtient :

$$\mathrm{S}_0 = \int \frac{\mathrm{M}dq}{\mathrm{A} - 2\mathrm{B}q + \mathrm{C}q^2} + \text{const.}$$

On détermine la constante en faisant $\varphi = 0$, ce qui donne :

$$\psi = \sigma, \quad q = 0, \quad \mathrm{S}_0 = \Pi_0(h, k, \sigma),$$

et

$$\Pi_0(h, k, \sigma) = \int_{q=0} \frac{\mathrm{M}dq}{\mathrm{A} - 2\mathrm{B}q + \mathrm{C}q^2} + \text{const.}$$

D'après cela, on a

$$\mathrm{S}_0 - \Pi_0(h, k, \sigma) = \int_0^q \frac{\mathrm{M}dq}{\mathrm{A} - 2\mathrm{B}q + \mathrm{C}q^2},$$

ou, à cause des valeurs de S_0 et q,

$$\Pi_0(h, k, \varphi) + \Pi_0(h, k, \psi) = \Pi_0(h, k, \sigma) + \int_0^{\sin\varphi\sin\psi} \frac{\mathrm{M}dq}{\mathrm{A} - 2\mathrm{B}q + \mathrm{C}q^2}. \quad (78)$$

Cette formule donne *le théorème d'addition des intégrales de troisième espèce*. Nous n'effectuons pas l'intégration par rapport à q, parce qu'elle fournit des valeurs différentes, suivant que $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ est positif, nul ou négatif. En vertu des valeurs de A, B, C, les cas seront différents, suivant que $h(1 + h)(h + k^2) > 0$, $= 0$, ou < 0. La suite des calculs n'offre plus aucune difficulté.

c. A cette occasion, nous allons encore développer les relations particulières qui existent entre les intégrales de deuxième et de troisième espèce. Si φ désigne une amplitude variable, α une amplitude constante, et si les amplitudes variables σ, τ, sont déterminées par les formules :

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\alpha\Delta\alpha + \sin\alpha\cos\varphi\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha},$$

$$\sin\tau = \frac{\sin\varphi\cos\alpha\Delta\alpha - \sin\alpha\cos\varphi\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha},$$

on a les quatre équations suivantes, qui résultent des deux premiers théorèmes d'addition :

$$\mathrm{F}(\varphi) + \mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{F}(\sigma), \qquad \mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{F}(\tau),$$

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\alpha) - \mathrm{E}(\sigma) = k^2\sin\varphi\sin\alpha\sin\sigma,$$

$$\mathrm{E}(\varphi) - \mathrm{E}(\alpha) - \mathrm{E}(\tau) = -k^2\sin\varphi\sin\alpha\sin\tau.$$

La différence des deux dernières équations nous donne :

$$2E(\alpha) - E(\sigma) + E(\tau) = k^2 \sin\varphi \sin\alpha\,(\sin\sigma + \sin\tau),$$

ou, à cause des valeurs de $\sin\sigma$, $\sin\tau$,

$$2E(\alpha) - E(\sigma) + E(\tau) = 2\,\frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha\Delta\alpha \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}.$$

Multiplions cette dernière par le facteur

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = \frac{d\tau}{\Delta\tau},$$

et intégrons entre les limites 0 et φ, auxquelles correspondent les limites 0 et σ, 0 et τ. Divisant ensuite les deux membres par 2, on obtient :

$$E(\alpha)F(\varphi) - \frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\sigma)}{\Delta\sigma}\,d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{E(\tau)}{\Delta\tau}\,d\tau = \int_0^\varphi \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha\Delta\alpha \cdot \sin^2\varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

ou, puisque, dans les intégrales définies, rien ne se rapporte à la désignation des variables d'intégration,

$$E(\alpha)F(\varphi) - \frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{E(\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \int_0^\varphi \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha\Delta\alpha \cdot \sin^2\varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}. \quad (79)$$

L'intégrale du second membre s'exprime facilement en fonction de $\Pi_0(h, k, \varphi)$; en effet, on a :

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{\Pi_0(h, k, \varphi) - F(k, \varphi)}{k^2 \sin^2\alpha}, \quad h = -k^2 \sin^2\alpha.$$

Par suite, l'équation (79) montre que l'intégrale de troisième espèce peut être exprimée au moyen des intégrales

$$E(k, \alpha), \quad F(k, \varphi), \quad \int_0^\varphi \frac{E(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)}\,d\varphi,$$

lesquelles sont seulement des fonctions de deux variables.

D'après cela, on peut, au lieu de $\Pi_0(h, k, \varphi)$, considérer l'expression

$$\Pi(h, k, \varphi) = k^2 \sin\alpha \cos\alpha\Delta\alpha \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

comme étant la forme normale des intégrales elliptiques de troisième espèce; dans cette formule, $h = -k^2 \sin^2 \alpha$, et α est ce que l'on appelle *l'angle du paramètre.* Cet angle n'a une valeur réelle que dans le cas où h est négatif, et plus petit que k^2 en valeur absolue. La présence de α imaginaire n'empêche pas l'emploi de la formule (79); car, on verra plus loin comment l'on doit traiter les intégrales elliptiques d'amplitude imaginaire.

Si l'on change dans (79) les quantités α, φ, l'une dans l'autre, σ ne change pas, τ se change en $-\tau$, et il vient :

$$\mathrm{E}(\varphi)\,\mathrm{F}(\alpha) - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma} \frac{\mathrm{E}(\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{-\tau} \frac{\mathrm{E}(\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\alpha} \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi \cdot \sin^2\alpha\, d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha)\,\Delta\alpha}.$$

En outre, si dans l'intégrale prise de 0 à $-\tau$, on met $-\varphi$ au lieu de φ, on a :

$$\int_0^{-\tau} \frac{\mathrm{E}(\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\tau} \frac{-\mathrm{E}(-\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\tau} \frac{\mathrm{E}(\varphi)}{\Delta\varphi}\,d\varphi;$$

d'où l'on obtient, pour la différence entre l'équation (79) et la précédente,

$$\mathrm{E}(\alpha)\,\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi)\,\mathrm{F}(\alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \Delta\alpha \cdot \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$- \int_0^{\alpha} \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi \cdot \sin^2\alpha\, d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha)\,\Delta\alpha}.$$

D'après cela, une intégrale elliptique de troisième espèce peut s'exprimer par une autre dans laquelle l'amplitude primitive devient l'angle du paramètre, et l'angle du paramètre primitif l'amplitude.

Dans le cas particulier $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \Delta\alpha \cdot \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \mathrm{E}(\alpha)\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\pi\right)\mathrm{F}(\alpha). \quad (80)$$

L'intégrale complète de troisième espèce peut donc être réduite aux intégrales complètes de première et de deuxième espèce (1).

Remarque du traducteur. — Il me paraît utile de donner ici une démonstration remarquable du *théorème de Legendre* relatif aux intégrales

(1) Jacobi. *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, p. 159, § 49 et § 50.

elliptiques complètes de première et de deuxième espèce à modules complémentaires.

Soient k, k' deux modules satisfaisant à la condition $k^2 + k'^2 = 1$; K, K′ les intégrales complètes de première espèce de modules k, k'; E, E′ les intégrales complètes de deuxième espèce de mêmes modules. On doit à Legendre le théorème suivant :

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Legendre a donné une démonstration qui n'est, en réalité, qu'une simple vérification de ce théorème. Si l'on représente le premier membre par G, il démontre que l'on a :

$$\frac{dG}{dk} = 0;$$

par suite, G = const. Or, pour déterminer cette constante, il suffit de prendre un cas particulier : $k = 1$, $k' = 0$, ce qui donne : const $= \frac{\pi}{2}$, et le théorème est démontré.

M. Tortolini a donné une démonstration directe de cette proposition en se servant d'un système particulier de coordonnées, imaginé par Jacobi.

En remplaçant les notations K, K′, E, E′ par leurs valeurs, on trouve :

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi - k'^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} \, d\varphi d\theta.$$

Or, d'un autre côté, si l'on considère la huitième partie de l'aire de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on obtient :

$$\frac{\pi}{2} = A = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dxdy = \iint \frac{dxdy}{z};$$

quant aux limites de cette intégrale double, elles sont déterminées par la condition

$$x^2 + y^2 \overline{\overline{<}} 1.$$

Actuellement, afin de ramener l'intégrale double qui précède à la même forme que G, posons :

$$x = \sin \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$y = \sin \varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta},$$

ce qui nous donnera, en vertu de l'équation de la sphère,

$$z = \cos\varphi \cos\theta.$$

Remplaçant ensuite $dxdy$ par sa valeur

$$dx\,dy = \left(\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi}\right) d\varphi\, d\theta,$$

comme on le sait par la théorie du changement de variables dans les intégrales multiples, on trouve, pour la huitième partie de l'aire de la sphère,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2\sin^2\varphi - k'^2\sin^2\theta}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)(1 - k'^2\sin^2\theta)}}\, d\varphi\, d\theta.$$

Le second membre de cette formule n'étant autre chose que la valeur de G, on a :

$$\frac{\pi}{2} = \mathrm{G} = \mathrm{K'E} + \mathrm{KE'} - \mathrm{KK'},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

M. Catalan a donné une interprétation géométrique de cette formule : il démontre que ce théorème équivaut à la décomposition de la sphère en rectangles infiniment petits, au moyen de coniques sphériques orthogonales. (*Atti dell' Academia pontifica de nuovi Lincei,* XX.)

VII. Rectification de la lemniscate, de l'ellipse et de l'hyperbole.

a. Si l'on désigne, comme d'ordinaire, par a le demi-axe OA d'une lemniscate, r le rayon vecteur OP d'un point P de [illegible]rbe, θ l'angle AOP, on a :

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

On en déduit pour la longueur s de l'arc AP ([illegible]) :

$$s = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}};$$

en particulier, la longueur q du quart de la lemniscate, a pour expression :

$$q = a\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}}.$$

Au lieu de l'angle θ, nous introduirons un autre angle qui résulte de la construction de la courbe. Si l'on décrit, en effet, avec OA comme rayon, un cercle ayant le point O pour centre, si l'on tire le rayon OM arbitraire sous l'angle $AOM = \theta$, si l'on prend $MN = MA$, et si l'on abaisse de N une perpendiculaire sur OA, cette dernière rencontrera le demi-cercle construit sur OA comme diamètre en un point Q, pour lequel $OQ = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Le point P de la courbe correspondant à l'angle θ s'obtient en prenant sur OM la distance $OP = OQ$. En même temps, on a, pour l'angle $AOQ = \varphi$, qui peut s'appeler l'amplitude,

$$\sin\varphi = \frac{AQ}{AO} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = \sqrt{2}\sin\theta;$$

réciproquement,

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi.$$

Par la substitution de cette valeur, les formules qui donnent s et q se changent dans les suivantes :

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \qquad q = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

ou

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\,F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\ \varphi\right), \qquad q = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{2}\pi\right).$$

D'après cela, il est évident que les théorèmes démontrés dans le chapitre V pour les intégrales elliptiques de première espèce peuvent être appliqués, sans aller plus loin, aux arcs de lemniscate. Si, par exemple, deux arcs AP_1 et AP_2 sont déterminés par leurs amplitudes, on pourra trouver, par le théorème d'addition, l'amplitude d'un troisième arc AP_3, égal à la somme des deux arcs donnés. De même, un arc AP peut facilement être multiplié ou divisé en parties égales.

Comme cas particulier remarquable, nous mentionnerons encore la division en deux parties égales du quart de la lemniscate. Soit, en effet, $s = \frac{1}{2}q$, ou bien :

$$2F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\ \varphi\right) = F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{2}\pi\right);$$

la formule (73) donne, pour $\psi = \varphi$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[4]{2}.$$

Pour construire le point milieu du quart de lemniscate, on élève au point A (fig. 15), perpendiculairement à OA, la droite $AC = \sqrt{AO \cdot OB}$, et l'on mène l'hypothénuse OC qui rencontre en D le demi-cercle décrit sur OA. Alors l'angle AOD est l'amplitude du point cherché. Ce dernier se trouve en menant DE parallèle à OB; on divise AE au point F en deux parties égales, et sur OF on prend $OG = OD$.

b. Au lieu de l'équation ordinaire d'une ellipse, construite sur les demi-axes a et b, et rapportée à des axes rectangulaires, prenons les deux équations

$$x = a \sin \varphi, \qquad y = b \cos \varphi,$$

correspondant à une construction connue, au moyen du cercle inscrit et du cercle circonscrit. L'amplitude φ du point P de l'ellipse (fig. 16) est alors l'angle $B'OP'$, si P' est le point du cercle circonscrit correspondant à la même abscisse que P. L'arc d'ellipse $s = BP$, compté à partir de l'extrémité du petit axe sera donné par la formule :

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi};$$

si l'on désigne l'excentricité numérique par k,

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = k,$$

il vient :

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = a\mathrm{E}\,(k, \varphi).$$

En particulier, on a, pour le quart d'ellipse,

$$q = a \cdot \mathrm{E}\left(k, \frac{1}{2}\pi\right).$$

Au moyen du théorème d'addition des intégrales de deuxième espèce, on peut facilement trouver, pour deux arcs donnés BP_1 et BP_2, un troisième arc BP_3 jouissant de la propriété que arc BP_1 + arc BP_2 — arc BP_3

soit une expression algébrique. Ce résultat prend une forme très-élégante dans le cas où la troisième amplitude $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{a}{b}. \tag{81}$$

Le théorème d'addition (77) est alors exprimé par la formule :

$$\mathrm{E}(k, \varphi) - \left[\mathrm{E}\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - \mathrm{E}(k, \psi)\right] = k^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

ou, si l'on multiplie par a, et si l'on prend l'angle $B'OQ' = \psi$,

$$\text{arc BP} - \text{arc AQ} = \frac{a^2 - b^2}{a} \sin\varphi \sin\psi. \tag{82}$$

Par conséquent, *pour chaque arc d'ellipse, compté à partir de l'extrémité du petit axe, on peut trouver un second arc, compté à partir de l'extrémité du grand axe, et tel que la différence de ces deux arcs soit une expression algébrique.* Pour exprimer ces relations géométriquement, on prend, d'après (81), l'amplitude B'OQ' égale à l'angle compris entre OA et la normale MP correspondant au point P de l'ellipse. Les normales aux points P et Q sont alors à des distances égales $OM = ON$ du centre O, et l'équation (82) devient

$$\text{arc BP} - \text{arc AQ} = \text{OM}.$$

Si l'on pose, en particulier, $\psi = \varphi$, d'où

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

alors OM atteint sa valeur maximum $a - b$, et l'amplitude φ détermine un point C[1], pour lequel on a (fig. 17) :

$$\text{arc BC} - \text{arc AC} = a - b.$$

Comme deuxième application du théorème d'addition, le problème sert à déterminer un arc d'ellipse PQ, égal à la moitié du quadrant. Si l'on

(1) Ce point peut être déterminé par la théorie des maximums et minimums.

appelle C le point de l'ellipse que nous venons de trouver, et pour lequel on a :

$$\text{arc BC} - \text{arc AC} = a - b,$$

$$\text{arc BC} = \frac{1}{2}(\text{arc ACB} + a - b),$$

son amplitude $B'OC' = \gamma$ est déterminée par les formules :

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \quad \Delta\gamma = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

En outre, si φ est l'amplitude de P, ψ sera l'amplitude de Q; nous choisissons cet angle de telle manière que l'on ait l'équation

$$F(k, \psi) - F(k, \varphi) = F(k, \gamma),$$

à laquelle correspond la condition

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\Delta\gamma = \cos\gamma. \tag{83}$$

Pour les intégrales elliptiques de deuxième espèce, on a la relation

$$E(k, \psi) - E(k, \varphi) = E(k, \gamma) - k^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma,$$

c'est-à-dire, en multipliant par a,

$$\text{arc BQ} - \text{arc BP} = \text{arc BC} - \frac{a^2 - b^2}{a}\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma.$$

Or, en vertu de la valeur trouvée plus haut pour arc BC, il vient :

$$\text{arc PQ} = \frac{1}{2}\,\text{arc ACB} + (a-b)\left\{\frac{1}{2} - \frac{a+b}{a}\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma\right\}.$$

Si l'arc PQ doit être la moitié du quadrant, on doit avoir :

$$\frac{a+b}{a}\sin\varphi\sin\psi\sin\gamma = \frac{1}{2}, \tag{84}$$

et les équations (83) et (84) conduiront aux valeurs des amplitudes φ et ψ. La dernière équation donne, en vertu de la valeur de $\sin\gamma$,

$$\sin\varphi\sin\psi = \frac{1}{2}\sin\gamma;$$

en substituant dans (83), on a :

$$\cos\varphi\cos\psi = \frac{1}{2}\cos\gamma;$$

d'où

$$\cos(\psi - \varphi) = \cos\frac{1}{4}\pi\cos\left(\gamma - \frac{1}{4}\pi\right),$$

$$\cos(\psi + \varphi) = \cos\frac{1}{4}\pi\cos\left(\gamma + \frac{1}{4}\pi\right).$$

c. Soient OA $= a$, le demi-axe principal, AB $= b$, le demi-axe conjugué d'une hyperbole (fig. 18), OB $= \sqrt{a^2 + b^2}$ l'excentricité linéaire, et CD une droite menée parallèlement à AB à la distance

$$OC = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Si l'on désigne par P′ la projection de P sur CD et φ l'angle AOP′, on a, pour l'ordonnée du point P,

$$y = \frac{b^2 \operatorname{tg.} \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

pour l'abscisse, on trouve, au moyen de l'équation de la courbe

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\varphi}{a^2 + b^2}}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c, \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k,$$

l'arc d'hyperbole AP $= s$ sera exprimé par la formule

$$s = \frac{b^2}{c}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

que l'on peut écrire

$$s = \frac{b^2}{c} F(k, \varphi) - cE(k, \varphi) + c\Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi. \tag{85}$$

Un arc d'hyperbole peut donc être rectifié au moyen des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce.

Il est utile de remarquer que le produit $c\Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi$ représente la distance de l'origine des coordonnées à la normale MP au point P de l'hyperbole. Pour OM $= p$, on a :

$$p - s = cE(k, \varphi) - \frac{b^2}{c} F(k, \varphi),$$

ou, si l'on exprime b, c, en fonction de a, k,

$$p - s = a\,\frac{E(k,\varphi) - (1-k^2)\,F(k,\varphi)}{k}.$$

La valeur $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ correspond au point de l'hyperbole situé à l'infini, et alors OM coïncide avec l'asymptote. On a maintenant pour la différence entre la branche d'hyperbole AP, prolongée à l'infini, et l'asymptote correspondante

$$\lim(p-s) = a\,\frac{E - (1-k^2)K}{k};$$

en remplaçant E et K par leurs valeurs, on obtient :

$$\lim\,(p-s) = \frac{1}{2}\pi a\left\{\frac{k}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^3}{4} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^5}{6} + \cdots\right\}.$$

En désignant par φ, ψ, les amplitudes des trois arcs d'hyperbole AP, AQ, AR, on a, en vertu de (85),

$$\begin{aligned}\text{arc AP} + \text{arc AQ} - \text{arc AR} = \frac{b^2}{c}&\left\{F(\varphi) + F(\psi) - F(\sigma)\right\}\\ - c&\left\{E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma)\right\}\\ + c&\left[\Delta\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + \Delta\psi\,\mathrm{tg}\,\psi - \Delta\sigma\,\mathrm{tg}\,\sigma\right].\end{aligned}$$

Lorsque φ, ψ, σ satisfont à l'équation

$$\cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\Delta\varphi = \cos\varphi,$$

on a, plus simplement,

$$\text{arc AP} - \text{arc QR} = c\left[\Delta\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + \Delta\psi\,\mathrm{tg}\,\psi - \Delta\sigma\,\mathrm{tg}\,\sigma - k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\right].$$

Donc, *pour chaque arc d'hyperbole, compté à partir du sommet, on peut construire un second arc, qui diffère du premier d'une quantité algébrique*. Si φ est donné, et si ψ, σ, sont déterminés par les équations

$$\cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\Delta\varphi = \cos\varphi,$$

$$\Delta\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + \Delta\psi\,\mathrm{tg}\,\psi - \Delta\sigma\,\mathrm{tg}\,\sigma = k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma,$$

on a, en particulier,

$$\text{arc QR} = \text{arc AP}.$$

En général, on peut tirer de la relation entre trois arcs d'hyperbole, des conséquences semblables à celles que l'on tire de la relation entre trois arcs d'ellipse; seulement les résultats sont moins simples.

Enfin, la comparaison d'un arc d'hyperbole avec deux arcs d'ellipse, conduit à des résultats remarquables. Si k_1, φ_1 sont donnés par les formules

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi,$$

on a, en vertu de la transformation de Landen (25),

$$(1 - k^2)\,\mathrm{F}(k, \varphi) = 2\,[\mathrm{E}(k, \varphi) - (1 + k)\,\mathrm{E}(k_1, \varphi_1) + k \sin\varphi];$$

d'un autre côté, d'après (85),

$$\mathrm{S} = a\,\frac{(1 - k^2)\,\mathrm{F}(k, \varphi) - \mathrm{E}(k, \varphi) + \Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi}{k}.$$

De ces deux équations, on tire, par l'élimination de $\mathrm{F}(k, \varphi)$,

$$s = \frac{a}{k}\,[\mathrm{E}(k, \varphi) - 2\,(1 + k)\,\mathrm{E}(k_1, \varphi_1) + \Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi + 2k \sin\varphi]. \qquad (86)$$

L'arc s d'hyperbole peut ainsi s'exprimer au moyen des arcs de deux ellipses, dont la première a pour demi-axes

$$\frac{a}{k} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{et} \quad b,$$

l'autre a pour demi-axes

$$\frac{2a(1 + k)}{k} = 2\,[\sqrt{a^2 + b^2} + a], \quad \text{et} \quad \frac{2a(1 - k)}{k} = 2\,[\sqrt{a^2 + b^2} - a];$$

les amplitudes de ces arcs d'ellipse étant φ et φ_1 (1).

---

(1) La comparaison des arcs de lemniscate, d'ellipse et d'hyperbole est due à Fagnano, comte de Fagnani : *Metodo per misurare la lemniscata, Giornale de letterati d'Italia*, Venise, 1718; id. *Produzione mathem.*, T. II, p. 317 et suiv. Euler a fait beaucoup de recherches sur cet objet (*Comment. novi Petropoli.* VI, VII, XII). Voir aussi le *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre, et un mémoire de Landen, *Philosoph. Transac.*, 1775.

VIII. Aire des surfaces à centre du second degré.

Les équations des trois surfaces à centre du second degré construites sur les demi-axes a, b, c, sont

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

on peut, dans le cas où il n'est pas nécessaire de les distinguer, les mettre, pour abréger, sous la forme suivante :

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2=1.$$

On tire de là

$$z=\sqrt{\frac{1-\mathrm{A}x^2-\mathrm{B}y^2}{\mathrm{C}}};$$

et, si l'on substitue cette valeur dans la formule générale

$$\mathrm{S}=\iint\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy,$$

il vient

$$\mathrm{S}=\iint\sqrt{\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}(\mathrm{C}-\mathrm{A})x^2-\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B})y^2}{\mathrm{C}(1-\mathrm{A}x^2-\mathrm{B}y^2)}}\,dxdy.$$

Le radical qui entre dans cette formule représente géométriquement la sécante de l'angle compris entre le plan tangent au point (x, y, z), et le plan horizontal xy, ou bien la cosécante de l'angle PNP′ que la normale au point (x, y, z) fait avec le plan des xy (fig. 19). On peut désigner cet angle par ω, et le prendre ensuite comme une variable nouvelle. Soit θ l'angle P′NX′ que la projection horizontale de la normale fait avec l'axe des x : nous le prenons aussi comme une nouvelle variable. En vertu des significations de ω et de θ, il existe entre ces angles et les coordonnées x, y, les relations suivantes :

$$\sin^2\omega=\frac{\mathrm{C}(1-\mathrm{A}x^2-\mathrm{B}y^2)}{\mathrm{C}-\mathrm{A}(\mathrm{C}-\mathrm{A})x^2-\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B})y^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{\mathrm{B}y}{\mathrm{A}x},$$

au moyen desquelles on exprime facilement x, y, en fonction de ω et θ. Si l'on pose, pour abréger,

$$R^2 = \frac{C}{AB} \cdot \frac{\cos^2 \omega}{BC \cos^2 \omega \cos^2 \theta + CA \cos^2 \omega \sin^2 \theta + AB \sin^2 \omega},$$

on a :

$$x = BR \cos \theta, \qquad y = AR \sin \theta.$$

La formule précédente

$$S = \iint \frac{1}{\sin \omega} dx dy,$$

se transforme, par l'introduction de ω et θ au lieu de x, y, dans la suivante :

$$S = \iint \frac{1}{\sin \omega} \left(\frac{dx}{d\omega} \cdot \frac{dy}{d\theta} - \frac{dy}{d\omega} \cdot \frac{dx}{d\theta} \right) d\omega d\theta,$$

où l'on doit substituer pour x, y, les valeurs trouvées ci-dessus.

Si l'on observe que R dépend de ω et θ, on obtient d'abord :

$$\frac{dx}{d\omega}\frac{dy}{d\theta} - \frac{dy}{d\omega}\frac{dx}{d\theta} = AB \frac{dR}{d\omega} \cos \theta \left(\frac{dR}{d\theta} \sin \theta + R \cos \theta \right) - AB \frac{dR}{d\theta} \sin \theta \left(\frac{dR}{d\theta} \cos \theta - R \sin \theta \right)$$

$$= AB \cdot R \frac{dR}{d\omega} = \frac{1}{2} AB \frac{d(R^2)}{d\omega} = \frac{-ABC \sin \omega \cos \omega}{(BC \cos^2 \omega \cos^2 \theta + CA \cos^2 \omega \sin^2 \theta + AB \sin^2 \omega)^2},$$

et par là, on arrive à la formule rationnelle :

$$S = - ABC \iint \frac{\cos \omega \, d\omega d\theta}{(BC \cos^2 \omega \cos^2 \theta + CA \cos^2 \omega \sin^2 \theta + AB \sin^2 \omega)^2} \text{ (1)} . \quad (87)$$

Comme dans toutes les questions de cette espèce, les limites de l'intégration dépendent de la limite que l'on donnera à la portion de surface à mesurer. Ordinairement, la courbe limite est déterminée par l'équation de sa projection horizontale $f(x, y) = 0$; par la substitution des valeurs de x, y, R, on aura une équation entre ω et θ, laquelle montre, comment, à la limite, θ dépend de ω, et ω de θ. Il n'est besoin que d'un coup d'œil

(1) C'est Jacobi qui a introduit les angles ω et θ pour exprimer plus simplement que Legendre la formule de l'aire totale de l'ellipsoïde (*Journal de Crelle*, X, p. 110). Mais il n'a pas remarqué que la formule (87) donne un grand nombre de théorèmes très-importants.

pour reconnaître que les résultats se compliquent beaucoup ; c'est pourquoi nous nous bornerons tout d'abord au cas le plus simple, c'est-à-dire au cas où les quatre limites de l'intégrale double sont constantes. Pour cela, nous aurons recours à la considération suivante :

Si l'on part sur la surface d'un point (r, y, z) dont la normale est inclinée d'un angle ω sur le plan des xy, on peut trouver une infinité d'autres points de la surface dont les normales font le même angle avec le plan horizontal. Tous les points de cette espèce forment une courbe située sur la surface, et qui peut être appelée *la courbe des normales isoclines* pour l'angle d'inclinaison ω. L'équation de sa projection horizontale se déduit de la formule :

$$\sin^2 \omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - B)y^2},$$

si l'on y considère ω comme constante; et l'on aura, d'après cela,

$$\frac{A(A \operatorname{tg}^2 \omega + C)}{C} x^2 + \frac{B(B \operatorname{tg}^2 \omega + C)}{C} y^2 = 1. \tag{88}$$

Il est facile de voir que cette équation représente toujours une ellipse. Pour l'ellipsoïde, cela est immédiatement évident; pour les hyperboloïdes, ω est, par la nature de ces surfaces limité à un certain intervalle, et, par suite de cette circonstance, les coefficients de x^2 et de y^2 sont positifs. La remarque que l'équation précédente s'obtient aussi par l'élimination de z entre les équations

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 - (C \operatorname{cotg} \omega)^2 z^2 = 0,$$

conduit au même résultat. Chaque courbe des normales isoclines peut donc être considérée comme l'intersection de la surface du second degré donnée, avec un cône elliptique de même centre; il s'en suit que l'intersection, si elle existe en général, doit avoir une projection horizontale elliptique (fig. 20).

Si l'on fait varier dans (88) l'angle ω d'une quantité quelconque très-petite, on obtient sur la surface une deuxième courbe des normales isoclines. Celle-ci ne rencontre pas la première, parce que les projections horizontales des deux courbes n'ont aucun point commun. Un changement infiniment petit de ω conduit, d'après cela, à une bande infiniment mince, qui s'étend tout autour de la surface. Si enfin, ω varie d'une valeur initiale ω_0 donnée jusqu'à une valeur finale ω_1 également donnée, il naît une zône dont l'aire Z se trouve au moyen de la formule (87) par l'introduction des limites $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_1$, et $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. On a ainsi :

$$Z = -\text{ABC}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\omega\, d\omega d\theta}{(\text{BC}\cos^2\omega\cos^2\theta + \text{CA}\cos^2\omega\sin^2\theta + \text{AB}\sin^2\omega)^2}. \quad (89)$$

L'intégration relative à θ ne présente aucune difficulté, si l'on remplace $\sin^2\omega$ par $\sin^2\omega\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, et si l'on pose, pour un instant, pour abréger,

$$m = \text{B}\,(\text{C}\cos^2\omega + \text{A}\sin^2\omega), \qquad n = \text{A}\,(\text{C}\cos^2\omega + \text{B}\sin^2\omega);$$

on a d'abord

$$Z = \text{ABC}\int_{\omega_1}^{\omega_0}\cos\omega\, d\omega\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^2},$$

et, par les méthodes connues (par exemple, la substitution $\operatorname{tg}\theta = t$),

$$Z = \pi\text{ABC}\int_{\omega_1}^{\omega_0}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{\cos\omega}{\sqrt{mn}}\, d\omega.$$

Pour une réduction subséquente, supposons, pour l'ellipsoïde, $a > b > c$, et pour les hyperboloïdes $b > a$, hypothèses qui n'ont aucune influence sur la généralité des calculs. Soit, en outre,

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{\text{A}}{\text{C}}}, \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{\text{B}}{\text{C}}}; \quad (90)$$

les quantités α, β sont toujours réelles, et représentent géométriquement l'excentricité numérique des deux traces verticales de la surface. En même temps, on a, dans tous les cas, $\alpha > \beta$. Nous avons maintenant pour m et n

$$m = \text{B}\,[\text{C} - (\text{C} - \text{A})\sin^2\omega] = \text{BC}\,(1 - \alpha^2\sin^2\omega),$$

$$n = \text{A}\,[\text{C} - (\text{C} - \text{B})\sin^2\omega] = \text{AC}\,(1 - \beta^2\sin^2\omega);$$

par suite,

$$\frac{\text{C}\sqrt{\text{AB}}}{\pi}Z = \int_{\omega_1}^{\omega_0}\left\{\frac{\text{A}}{1 - \alpha^2\sin^2\omega} + \frac{\text{B}}{1 - \beta^2\sin^2\omega}\right\}\frac{\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(1 - \alpha^2\sin^2\omega)(1 - \beta^2\sin^2\omega)}}.$$

Si l'on pose

$$\sin\omega = u, \quad \sin\omega_0 = u_0, \quad \sin\omega_1 = u_1, \quad (91)$$

cette formule se simplifie, et elle devient :

$$Z = \frac{\pi}{C\sqrt{AB}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{ \frac{A}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{B}{1-\beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}.$$

Pour exprimer enfin Z au moyen des intégrales elliptiques, posons

$$\varkappa = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}, \qquad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha}, \tag{92}$$

et nous aurons

$$\int_0^u \left\{ \frac{A}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{B}{1-\beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\varphi \left\{ \frac{A}{\cos^2\varphi} + \frac{B}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{A}{\alpha(1-\varkappa^2)} \left\{ (1-\varkappa^2) F(\varkappa, \varphi) - E(\varkappa, \varphi) + \Delta(\varkappa, \varphi) \operatorname{tg}\varphi \right\}$$

$$+ \frac{B}{\alpha(1-\varkappa^2)} \left\{ E(\varkappa, \varphi) - \frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varkappa, \varphi)} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{C}{C-A}} \left\{ AF(\varkappa, \varphi) + (C-A) E(\varkappa, \varphi) + \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varkappa, \varphi)} \operatorname{tg}\varphi \right\}$$

Si nous faisons encore, pour abréger,

$$G(\varkappa, \varphi) = \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varkappa, \varphi)} \operatorname{tg}\varphi, \tag{93}$$

et si nous déterminons, d'après (92), les limites de φ, au moyen des équations

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi_0 &= \alpha u_0 = \alpha \sin\omega_0, \\ \sin\varphi_1 &= \alpha u_1 = \alpha \sin\omega_1, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

nous obtiendrons facilement

$$Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} \Big\{ (C-A)[E(\varphi_0) - E(\varphi_1)] + A[F(\varphi_0) - F(\varphi_1)]$$

$$+ G(\varphi_0) - G(\varphi_1) \Big\}. \tag{95}$$

En vertu du théorème de la soustraction pour les intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, on a aussi :

$$Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} \left\{ (C-A)\,E(\tau) + AF(\tau) + G(\varphi_0) - G(\varphi_1) \right.$$

$$\left. - (C-A)\,\varkappa^2 \sin\tau \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \right\},$$

où τ est déterminé par la formule

$$\sin\tau = \frac{\sin\varphi_0 \cos\varphi_1 \Delta\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_0 \Delta\varphi_0}{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi_0 \sin^2\varphi_1}.$$

Les résultats précédents se résument dans le théorème suivant :

Sur chaque surface à centre du second degré, on peut construire une infinité de zônes dont l'aire peut s'exprimer au moyen des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce.

Chaque zône sera limitée par deux courbes des normales isoclines; les projections horizontales de ces dernières courbes sont des ellipses qui ont pour équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{A(A\,\mathrm{tg}^2\omega_0 + C)}{C}x^2 + \frac{B(B\,\mathrm{tg}^2\omega_0 + C)}{C}y^2 = 1, \\ \frac{A(A\,\mathrm{tg}^2\omega_1 + C)}{C}x^2 + \frac{B(B\,\mathrm{tg}^2\omega_1 + C)}{C}y^2 = 1. \end{aligned}\right\} \quad (96)$$

A ce théorème général, nous rattacherons encore les conséquences particulières qui se rapportent à chaque surface à centre du second degré.

a. Pour l'ellipsoïde ω_0 et ω_1 peuvent avoir toutes les valeurs possibles, et l'on peut toujours supposer $\omega_0 > \omega_1$, de sorte que la première ellipse est à l'intérieur de la seconde (fig. 21). Dans cette figure, $U_0V_0V_1U_1$ représente un quart de la zône Z. Pour $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, la courbe U_0V_0.... se confond avec le point C, et la zône devient une calotte CU_1V_1 dont l'aire peut être désignée par Z_1. Il résulte de (94) que $\sin\varphi_0 = \alpha$, ou, si nous représentons par σ cette valeur particulière de φ_0,

$$\sin\sigma = \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}; \quad (97)$$

on a alors, en vertu de (95),

$$Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2) [E(\sigma) - E(\varphi_1)] + c^2 [F(\sigma) - F(\varphi_1)] \right. \\ \left. + a^2 c^2 [G(\sigma) - G(\varphi_1)] \right\}. \qquad (98)$$

Si, en second lieu, on pose $\omega_1 = 0$ dans la formule générale, la courbe inférieure U_1V_1.... se confond avec la trace horizontale de l'ellipsoïde, et il en résulte une zône limitée par les courbes AB.... et U_0V_0...., zône dont l'aire peut être désignée par Z_0; les formules (94) et (95) donnent pour la valeur de cette aire :

$$Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2) E(\varphi_0) + c^2 F(\varphi_0) + a^2 c^2 G(\varphi_0) \right\}. \qquad (99)$$

Pour $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, d'où $\varphi_0 = \sigma$, cette zône devient le demi-ellipsoïde; on a, d'après cela, si Ω désigne l'aire totale de l'ellipsoïde :

$$\Omega = \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2) E(\sigma) + c^2 F(\sigma) + a^2 c^2 G(\sigma) \right\},$$

ou bien, en vertu de la valeur de $\sin \sigma$ et de $G(\sigma)$,

$$\Omega = 2\pi c \left\{ bE(\sigma) \operatorname{tg} \sigma + b F(\sigma) \operatorname{cotg} \sigma + c \right\}. \qquad (100)$$

Des équations (98) et (99), il résulte :

$$Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2) [E(\varphi_0) + E(\varphi_1) - E(\sigma)] \right. \\ + c^2 [F(\varphi_0) + F(\varphi_1) - F(\sigma)] \\ \left. + a^2 c^2 [G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)] \right\};$$

et, si ω_0 et ω_1 sont tels que φ_0, et φ_1 satisfont à l'équation

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 \Delta(\sigma),$$

on a plus simplement,

$$Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2) \varkappa^2 \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 \sin \sigma + a^2 c^2 [G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)] \right\}.$$

Pour pouvoir mieux étudier le résultat que nous venons de trouver, évitons toutes les abréviations, et exprimons $\sin\varphi_0$, $\cos\varphi_0$, etc., en fonction de ω_0, ω_1. Nous arrivons au théorème suivant :

Si les angles d'inclinaison ω_0, ω_1, satisfont à la condition

$$b\sqrt{(a^2\cos^2\omega_0+c^2\sin^2\omega_0)(a^2\cos^2\omega_1+c^2\sin^2\omega_1)} = c\left\{ab+(a^2-c^2)\sin\omega_0\sin\omega_1\right\}, \tag{101}$$

on a :

$$Z_0-Z_1=\pi\left\{\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{ab}\sin\omega_0\sin\omega_1-c^2\right.$$
$$+\frac{[c^4-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos^2\omega_0]\sin\omega_0}{\sqrt{(a^2\cos^2\omega_0+c^2\sin^2\omega_0)(b^2\cos^2\omega_0+c^2\sin^2\omega_0)}}$$
$$\left.+\frac{[c^4-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos^2\omega_1]\sin\omega_1}{\sqrt{(a^2\cos^2\omega_1+c^2\sin^2\omega_1)(b^2\cos^2\omega_1+c^2\sin^2\omega_1)}}\right\}. \tag{102}$$

Donc, *sur l'ellipsoïde à trois axes, il existe une infinité de zônes et de calottes correspondantes, et dont les aires diffèrent par des expressions algébriques.*

Cette propriété s'exprime très-simplement dans le cas particulier $\omega_0=\omega_1$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a qu'une courbe des normales isoclines, laquelle partage la surface du demi-ellipsoïde en une calotte Z_1 et la zône Z_0. De (101) on tire pour ω la formule

$$\operatorname{tg}\omega=\sqrt{\frac{ab}{(a+b+c)c}},$$

et de (102) on déduit la relation

$$Z_1-Z_0=\pi\left\{ab-\frac{(a^2+b^2)c}{a+b}\right\}.$$

La courbe des normales isoclines est dans ce cas l'intersection de l'ellipsoïde avec un cône elliptique construit avec les dimensions (fig. 20)

$$FH=\frac{a^2}{c},\quad GH=\frac{b^2}{c},\quad OH=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}.$$

Les demi-axes de sa projection horizontale sont :

$$OM=a\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}},\qquad ON=b\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}}.$$

Il est à peine besoin d'observer que ces théorèmes forment les corrélatifs stéréométriques de ceux de Fagnano sur l'ellipse.

b. Pour les hyperboloïdes, on a des développements tout-à-fait semblables, mais qui cependant n'admettent pas des particularités aussi simples, parce que ω_0 et ω_1 ne peuvent pas dépasser des limites déterminées. Cependant les remarques suivantes sont intéressantes.

Pour l'hyperboloïde à une nappe, on peut prendre $\omega_0 = 0$, et

$$\mathrm{tg}^2\,\omega_1 = -\frac{C}{A+B}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{tg}\,\omega_1 = \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2}};$$

la première courbe des normales isoclines coïncide alors avec la trace horizontale de la surface, et la deuxième a pour projection horizontale un cercle décrit avec le rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. En outre, on a $\varphi_0 = 0$,

$$\sin\varphi_1 = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac},$$

et, par la substitution de ces valeurs dans (95), on obtient Z.

Pour l'hyperboloïde à deux nappes, si l'on fait $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, la zône se change en une calotte, et comme cas plus particulier on a :

$$\mathrm{tg}\,\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

La projection horizontale de la courbe des normales isoclines est maintenant une ellipse dont les demi-axes sont $\frac{a^2}{b}$, et $\frac{b^2}{a}$, valeurs qui sont le plus grand et le plus petit rayon de courbure d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b.

c. Après avoir déterminé dans ce qui précède des zônes dont les surfaces s'expriment par des intégrales elliptiques non complètes, nous allons encore rechercher s'il y a aussi des zônes dont l'aire dépend des intégrales elliptiques complètes. Dans ce but, donnons à la formule (87) la forme suivante :

$$S = -\frac{AB}{C}\iint \frac{\cos\omega\, d\theta d\omega}{[B\cos^2\theta + A\sin^2\theta - (B\alpha^2\cos^2\theta + A\beta^2\sin^2\theta)\sin^2\omega]^2},$$

et posons, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathrm{B}\cos^2\theta + \mathrm{A}\sin^2\theta, \\ q &= \mathrm{B}\alpha^2\cos^2\theta + \mathrm{A}\beta^2\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Puisqu'il s'agit d'une zône, θ doit être étendu de 0 à 2π, tandis que les limites de ω dépendent de la nature des limites de la zône. Nous laissons provisoirement ces limites indéterminées, et nous désignons par ω_0, ω_1 les limites de l'intégration relative à ω; ce sont évidemment des fonctions de θ qu'il faudra déterminer plus tard. D'après cela, l'aire de la zône est

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\omega_1}^{\omega_0} \frac{\cos\omega\, d\omega}{(p - q\sin^2\omega)^2};$$

si l'on pose $\sin\omega = u$, et aussi $\sin\omega_0 = u_0$, $\sin\omega_1 = u_1$, on a :

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{u_1}^{u_0} \frac{du}{(p - qu^2)^2}.$$

Décomposons cette intégrale de la manière suivante :

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}} \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \int_0^{u_0} \frac{du}{(p - qu^2)^2} - \int_0^{u_1} \frac{du}{(p - qu^2)^2} \right\};$$

substituons dans la première $u = u_0 t$, et dans la seconde $u = u_1 t$; les intégrales relatives à la nouvelle variable t ont alors pour limites 0 et 1, et elles peuvent être de nouveau réunies, de sorte que l'on a

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left[\frac{u_0}{(p - qu_0^2 t^2)^2} - \frac{u_1}{(p - qu_1^2 t^2)^2} \right] dt.$$

Choisissons les limites d'intégration u_0, u_1, de telle manière que l'intégrale double se change en un produit de deux intégrales simples; cela arrivera en posant

$$u_0 = \lambda_0 \sqrt{\frac{p}{q}}, \qquad u_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{p}{q}}, \tag{104}$$

λ_0, λ_1, étant des constantes quelconques. On a alors

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p\sqrt{pq}} \int_0^1 \left[\frac{\lambda_0}{(1 - \lambda_0^2 t^2)^2} - \frac{\lambda_1}{(1 - \lambda_1^2 t^2)^2} \right] dt;$$

la valeur de l'intégrale relative à t étant désignée, pour abréger, par $\frac{1}{2}$ M, on a :

$$M = \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0^2} - \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2} + \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\lambda_0}{1+\lambda_1}\cdot\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_0}\right), \tag{105}$$

et ensuite

$$Z = \frac{ABM}{2C}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{p\sqrt{pq}} = \frac{2ABM}{C}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{p\sqrt{pq}}.$$

Pour réduire cette intégrale, employons la substitution suivante :

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\operatorname{tg}\varphi,$$

laquelle donne :

$$p = \frac{AB}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}, \qquad q = \frac{AB(\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi)}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi},$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{AB}\cdot d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi},$$

$$Z = \frac{2M}{C\sqrt{AB}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Posons encore sous le signe $\int$, $A = C(1-\alpha^2)$, $B = C(1-\beta^2)$, et nous obtiendrons

$$Z = \frac{2M}{\sqrt{AB}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1-(\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

ou bien :

$$Z = \frac{2M}{\sqrt{AB}}\left\{\frac{1}{\alpha}F\left(\varkappa, \frac{1}{2}\pi\right) - \alpha E\left(\varkappa, \frac{1}{2}\pi\right)\right\}; \tag{106}$$

le module $\varkappa$ est déterminé par la formule

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha} = \sqrt{\frac{B-A}{C-A}}.$$

D'après cela, *sur chaque surface à centre du second ordre, il existe une* *infinité de zônes dont l'aire est exprimable au moyen d'intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce.* Une telle zône sera limitée par deux courbes qui sont déterminées par les conditions (104) ou bien

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega_0 &= \lambda_0\sqrt{\frac{B\cos^2\theta + A\sin^2\theta}{B\,\alpha^2\cos^2\theta + A\,\beta^2\sin^2\theta}}, \\ \sin\omega_1 &= \lambda_1\sqrt{\frac{B\cos^2\theta + A\sin^2\theta}{B\,\alpha^2\cos^2\theta + A\,\beta^2\sin^2\theta}}. \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

Les équations des projections horizontales des deux courbes se déduisent de là au moyen des substitutions :

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{1 - A\alpha^2x^2 - B\beta^2y^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{By}{Ax};$$

on obtient :

$$(Ax^2 + By^2)(A\alpha^2x^2 + B\beta^2y^2) = \frac{A(\alpha^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2}x^2 + \frac{B(\beta^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2}y^2,$$

$$(Ax^2 + By^2)(A\alpha^2x^2 + B\beta^2y^2) = \frac{A(\alpha^2 - \lambda_1^2)}{1 - \lambda_1^2}x^2 + \frac{B(\beta^2 - \lambda_1^2)}{1 - \lambda_1^2}y^2.$$

Pour la construction de ces courbes du quatrième degré, les coordonnées polaires sont plus commodes : si l'on pose, dans ce but, dans la première équation

$$x = r_0\cos\chi, \quad y = r_0\sin\chi, \quad \frac{A(\alpha^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2} = A_0, \quad \frac{B(\beta^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2} = B_0,$$

et, si l'on emploie, pour la seconde équation, une substitution analogue, il vient :

$$r_0^2 = \frac{A_0\cos^2\chi + B_0\sin^2\chi}{(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)(A\alpha^2\cos^2\chi + B\beta^2\sin^2\chi)},$$

$$r_1^2 = \frac{A_1\cos^2\chi + B_1\sin^2\chi}{(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)(A\alpha^2\cos^2\chi + B\beta^2\sin^2\chi)}.$$

Pour l'ellipsoïde, r_0 et r_1 doivent être plus petits que le rayon vecteur

$$r = \frac{1}{\sqrt{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}},$$

correspondant à l'angle χ dans la trace horizontale de la surface. Il résulte de là les conditions $0 < \lambda_0 < \beta$, et $0 < \lambda_1 < \beta$. Pour l'hyperboloïde à une nappe, r_0 et r_1 doivent être plus grands que r; il s'en suit que λ_0 et λ_1 sont des fractions positives. Pour l'hyperboloïde à deux nappes, r_0 et r_1 peuvent avoir des valeurs réelles quelconques : cela exige que A_0, B_0, A_1, B_1, soient négatifs, ce qui a lieu si l'on prend en même temps $1 < \lambda_0 < \beta$ et $1 < \lambda_1 < \beta$ (1).

IX. Aire de certaines surfaces podaires.

Soit, comme dans le chapitre précédent,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

l'équation d'une surface à centre du second degré; le plan tangent au point x, y, z, a pour équation

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1,$$

ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes du plan. Une perpendiculaire menée de l'origine des coordonnées (centre de la surface) sur le plan tangent rencontre ce dernier en un point dont les coordonnées ξ, η, ζ, sont, d'après des formules connues,

$$\xi = \frac{Ax}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

$$\eta = \frac{By}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

$$\zeta = \frac{Cz}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}.$$

Les points ξ, η, ζ forment par leur suite continue *la surface podaire* de la surface primitive; on obtient l'équation de cette nouvelle surface par l'élimination de x, y, z, ce qui nous donne

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C}. \qquad (108)$$

(1) L'aire de l'ellipsoïde à trois axes inégaux au moyen des fonctions elliptiques a été trouvée d'abord par Legendre dans le *Traité des fonctions elliptiques*, I, p. 350 à 360. Tous les autres résultats exposés dans le chapitre VIII sont dus à M. Schloemilch (*Bulletin de l'Académie de Saxe*, 1862, et *Zeitschrift für Mathem.* IX, p. 205).

Pour l'exprimer en coordonnées polaires, désignons par r le rayon vecteur du point ξ, η, ζ, par ψ l'angle que fait r avec le plan horizontal, et χ l'angle de sa projection horizontale avec l'axe des ξ; nous aurons :

$$\xi = r \cos\psi \cos\chi, \quad \eta = r \cos\psi \sin\chi, \quad \zeta = r \sin\psi.$$

L'équation de la surface podaire est alors :

$$r^2 = \frac{\cos^2\psi \cos^2\chi}{A} + \frac{\cos^2\psi \sin^2\chi}{B} + \frac{\sin^2\psi}{C}. \tag{109}$$

La formule à employer pour l'aire de la surface est en général

$$S = \iint \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\} \sin^2\theta + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2} \cdot r d\theta d\omega,$$

θ étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x, ω l'angle du plan des xy avec le plan passant par le rayon vecteur et l'axe des x. En appliquant cette formule au cas actuel, on changera d'abord les axes des x et des z l'un dans l'autre, puis on remplacera sous le radical θ par $\frac{1}{2}\pi - \psi$, ω par $\frac{1}{2}\pi - \chi$. Il viendra alors, en faisant entrer r sous le radical :

$$S = \iint \sqrt{\left[r^4 + \left(r\frac{dr}{d\psi}\right)^2 \right] \cos^2\psi + \left(r\frac{dr}{d\chi}\right)^2} \cdot d\chi d\psi,$$

et, en vertu de la valeur (109) de r^2 :

$$S = \iint \sqrt{\frac{\cos^2\psi \cos^2\chi}{A^2} + \frac{\cos^2\psi \sin^2\chi}{B^2} + \frac{\sin^2\psi}{C^2}} \cdot \cos\psi \, d\chi d\psi.$$

En remplaçant $\sin^2\psi$ par $1 - \cos^2\psi$, et posant, pour abréger,

$$P = \frac{C^2}{A^2}\cos^2\chi + \frac{C^2}{B^2}\sin^2\chi - 1,$$

on a plus simplement

$$S = \frac{1}{C} \iint \sqrt{1 + P\cos^2\psi} \cdot \cos\psi \, d\chi d\psi.$$

L'intégrale relative à ψ prend une forme plus avantageuse, si l'on fait

$$\frac{\sin^2\psi}{1 + P\cos^2\psi} = t^2; \tag{110}$$

d'où :

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{1-t^2}{1+Pt^2}}, \quad \sin\psi = \sqrt{\frac{1+P}{1+Pt^2}}\cdot t,$$

$$\sqrt{1+P\cos^2\psi} = \sqrt{\frac{1+P}{1+Pt^2}}, \quad \cos\psi d\psi = \sqrt{\frac{1+P}{(1+Pt^2)^3}}\cdot dt.$$

Elle prend alors une forme rationnelle

$$S = \frac{1}{C}\iint \frac{1+P}{(1+Pt^2)^2}\, d\chi dt,$$

ou, en vertu de la valeur de P,

$$S = A^2B^2C \iint \frac{(B^2\cos^2\chi + A^2\sin^2\chi)\, d\chi dt}{[A^2B^2(1-t^2) + C^2t^2(B^2\cos^2\chi + A^2\sin^2\chi)]^2}.$$

On peut encore simplifier cette formule, en posant

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{B}{A}\operatorname{tg}\theta; \tag{111}$$

d'où l'on tire :

$$B^2\cos^2\chi + A^2\sin^2\chi = \frac{A^2B^2}{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta},$$

$$d\chi = \frac{AB\, d\theta}{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta},$$

$$S = ABC \iint \frac{d\theta\, dt}{[(A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta)(1-t^2) + C^2t^2]^2}.$$

Enfin, si l'on pose

$$t = \sin\omega, \tag{112}$$

il vient :

$$S = ABC \iint \frac{\cos\omega\, d\omega\, d\theta}{(A^2\cos^2\omega\cos^2\theta + B^2\cos^2\omega\sin^2\theta + C^2\sin^2\omega)^2}.$$

Cette intégrale a la même forme que la formule (87), qui sert à la détermination de l'aire des surfaces à centre du second ordre. Par conséquent, la comparaison de ces intégrales conduira à des résultats remarquables. A cet effet, imaginons, outre la surface du second ordre dont nous avons trouvé la surface podaire, une autre surface déterminée par l'équation

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1;$$

nous aurons pour cette dernière

$$S' = -\iint \frac{A'B'C' \cos\omega \, d\omega \, d\theta}{(B'C' \cos^2\omega \cos^2\theta + C'A' \cos^2\omega \sin^2\theta + A'B' \sin^2\omega)^2}.$$

On aura donc $S' = S$, si A', B', C', sont déterminés par la proportion

$$A' : B' : C' = \frac{1}{A^2} : \frac{1}{B^2} : \frac{1}{C^2},$$

et si, en outre, les limites de l'intégration sont les mêmes dans les deux intégrales doubles. La première condition exige que A', B', C' soient positifs; la nouvelle surface du second degré est donc un ellipsoïde dont les demi-axes a', b', c', sont entre eux comme $A^2 : B^2 : C^2$, c'est-à-dire qu'ils sont en raison inverse des carrés des demi-axes de la surface primitive. On aura donc :

$$a' = \frac{bc}{a}, \quad b' = \frac{ca}{b}, \quad c' = \frac{ab}{c}.$$

Pour remplir la deuxième condition, on déduit des limites primitivement données pour ψ et χ, les nouvelles limites de ω et θ, au moyen des formules (110), (111) et (112), c'est-à-dire

$$\sin^2\omega = \frac{A^2B^2 \sin^2\psi}{B^2C^2 \cos^2\psi \cos^2\chi + C^2A^2 \cos^2\psi \sin^2\chi + A^2B^2 \sin^2\psi}, \quad (113)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A}{B} \operatorname{tg}\chi. \quad (114)$$

Donc, *à chaque portion limitée de la surface podaire, correspond une portion de même grandeur de la surface de l'ellipsoïde dont les demi-axes sont a', b', c'.*

Si, par exemple, dans l'ellipsoïde θ varie de 0 à 2π, et ω depuis une valeur constante ω_0 jusqu'à une valeur $\omega_1 < \omega_0$, alors dans la surface podaire, χ variera de 0 à 2π, et aux limites, on aura deux équations que l'on déduira de (113) en remplaçant ω d'abord par ω_1, et ensuite par ω_0. Dans le cas où la surface podaire dérive d'un ellipsoïde, on a les équations

$$\sin^2\omega_1 = \frac{c^4 \sin^2\psi}{a^4 \cos^2\psi \cos^2\chi + b^4 \cos^2\psi \sin^2\chi + c^4 \sin^2\psi},$$

$$\sin^2 \omega_0 = \frac{c^4 \sin^2 \psi}{a^4 \cos^2 \psi \cos^2 \chi + b^4 \cos^2 \psi \sin^2 \chi + c^4 \sin^2 \psi},$$

ou bien, en coordonnées rectangulaires,

$$\sin^2 \omega_1 = \frac{c^4\zeta^2}{a^4\xi^2 + b^4\eta^2 + c^4\zeta^2},$$

$$\sin^2 \omega_0 = \frac{c^4\zeta^2}{a^4\xi^2 + b^4\eta^2 + c^4\zeta^2}.$$

On en déduit le théorème suivant : *L'intersection de la surface podaire*

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2,$$

avec les deux cônes elliptiques

$$a^4\xi^2 + b^4\eta^2 = c^4\zeta^2 \operatorname{cotg}^2 \omega_1,$$

$$a^4\xi^2 + b^4\eta^2 = c^4\zeta^2 \operatorname{cotg}^2 \omega_0,$$

donne une zône qui a la même aire que la zône de l'elllipsoïde construit sur les demi-axes a', b', c', et dont les lignes limites sont les courbes des normales isoclines correspondant aux inclinaisons ω_1 et ω_0,

Pour pouvoir appliquer à cette aire les formules ci-dessus, on doit prendre $a < b < c$, par suite, $a' > b' > c'$. On peut alors appliquer immédiatement les formules (97) à (102), en y remplaçant a, b, c par a', b', c'.

Pour $\omega_1 = 0$, $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, la zône de la surface podaire se change en une demi-surface, et la zône de l'ellipsoïde devient un demi-ellipsoïde. D'après cela, *la surface podaire a la même aire que l'ellipsoïde dont les demi-axes sont a', b', c'.*

Si l'on construit sur l'ellipsoïde la ligne des normales isoclines, déterminée par l'équation

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{a'b'}{(a' + b' + c')\, c'}},$$

le demi-ellipsoïde se décompose en une calotte et une zône dont les aires diffèrent de la quantité algébrique :

$$\pi \left\{ a'b' - \frac{(a'^2 + b'^2)\, c'}{a' + b'} \right\}.$$

On en conclut le théorème suivant : *la demi-surface podaire est décomposée par le cône*

$$a^4\xi^2 + b^4\eta^2 = (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\zeta^2$$

en une zône et une calotte, dont la différence des aires est

$$\pi \left\{ c^2 - \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \right\}.$$

Sur l'ellipsoïde, a', b', c', il existe en outre des zônes dont les aires peuvent être exprimées par des intégrales elliptiques complètes. Dans ce cas, θ varie de 0 à 2π, et l'on a, pour les limites de ω, les équations (107) qui donnent :

$$\sin^2\omega_0 = \frac{\lambda_0^2\, C'(B'\cos^2\theta + A'\sin^2\theta)}{B'(C' - A')\cos^2\theta + A'(C' - B')\sin^2\theta},$$

$$\sin^2\omega_1 = \frac{\lambda_1^2\, C'(B'\cos^2\theta + A'\sin^2\theta)}{B'(C' - A')\cos^2\theta + A'(C' - B')\sin^2\theta}.$$

Aux limites $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, correspondent les limites $\chi = 0$, $\chi = 2\pi$: on a, en outre, si l'on exprime A', B', C', en fonction de A, B, C, et θ en fonction de χ :

$$\sin^2\omega_0 = \frac{\lambda_0^2\, A^2B^2}{(A^2 - C^2)B^2\cos^2\chi + (B^2 - C^2)A^2\sin^2\chi},$$

$$\sin^2\omega_1 = \frac{\lambda_1^2\, A^2B^2}{(A^2 - C^2)B^2\cos^2\chi + (B^2 - C^2)A^2\sin^2\chi}.$$

Si l'on prend l'équation (113) dans laquelle on remplace ω d'abord par ω_0, ensuite par ω_1, et si l'on met pour A^2, B^2, C^2, leurs valeurs, et que l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\lambda_0^2}{1 - \lambda_0^2} = \mu_0^2, \qquad \frac{\lambda_1^2}{1 - \lambda_1^2} = \mu_1^2;$$

on arrive aux équations suivantes relatives aux limites :

$$\sin^2\psi = \frac{\mu_0^2(a^4\cos^2\chi + b^4\sin^2\chi)}{(c^4 - a^4)\cos^2\chi + (c^4 - b^4)\sin^2\chi},$$

$$\sin^2\psi = \frac{\mu_1^2(a^4\cos^2\chi + b^4\sin^2\chi)}{(c^4 - a^4)\cos^2\chi + (c^4 - b^4)\sin^2\chi}.$$

En coordonnées rectangulaires, on a :

$$\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{\mu_0^2\,(a^4\xi^2+b^4\eta^2)}{(c^4-a^4)\,\xi^2+(c^4-b^4)\,\eta^2},$$

$$\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{\mu_1^2\,(a^4\xi^2+b^4\eta^2)}{(c^4-a^4)\,\xi^2+(c^4-b^4)\,\eta^2}.$$

Ces équations représentent deux cônes du second degré : ils découpent dans la surface podaire une zône dont l'aire est exprimée par des intégrales elliptiques complètes (1).

---

(1) M. Tortolini a traité le cas de l'aire totale de la surface podaire de l'ellipsoïde. Tous les autres résultats du chapitre IX sont dûs à M. Schloemilch. (*Bulletin de l'Académie de Saxe*, 1862, et *Zeitschrift für Math.*, IX.)

DEUXIÈME PARTIE.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. Définition et périodicité réelle des fonctions elliptiques.

On sait que l'analyse aurait conduit, par des considérations tout-à-fait indépendantes de la géométrie, aux fonctions goniométriques et aux fonctions cyclométriques. On les aurait définies par les intégrales

$$\text{arc sin } z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad \text{arc tg } z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}, \quad \text{etc.};$$

en prenant les inverses des équations ainsi obtenues :

$$\text{arc sin } z = u, \qquad \text{arc tg } z = v, \quad \text{etc.}$$

on aurait été amené aux fonctions trigonométriques :

$$z = \sin u, \qquad z = \operatorname{tg} v, \quad \text{etc.}$$

On aurait reconnu analytiquement la périodicité réelle de ces fonctions $\sin u$, $\operatorname{tg} v$, etc., en découvrant que les intégrales qui servent à les définir ont une infinité d'acceptions.

Les fonctions goniométriques étant d'une grande commodité dans beaucoup de recherches analytiques, il était naturel de prendre aussi les inverses des intégrales elliptiques, et de considérer les fonctions que l'on déduit des équations

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u, \qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}} = v, \text{ etc.}$$

résolues par rapport à z. Ces inverses des intégrales elliptiques ont reçu le nom de *fonctions elliptiques*(1). Ce sont en quelque sorte des fonctions goniométriques supérieures; dans des cas particuliers, par exemple pour $k = 0$, et $k = 1$, elles se transforment en fonctions goniométriques.

Considérons d'abord l'intégrale elliptique la plus simple :

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u, \qquad \text{ou} \qquad F(k, \varphi) = u, \tag{1}$$

et supposons que le module k, et la valeur u de l'intégrale soient donnés; φ sera alors une fonction de u et de k. Pour en tirer une notation correspondante, on se rappellera que φ désigne l'amplitude de l'intégrale, ou l'amplitude de u. On se sert de l'expression « *amplitude de* » comme signe fonctionnel, et l'on écrit, en abrégé,

$$\varphi = \operatorname{am} u, \qquad (\text{mod.} = k), \tag{2}$$

ou bien :

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k). \tag{3}$$

Dans cette expression on peut omettre la désignation du module, si sa valeur est suffisamment connue. Dans les deux cas particuliers $k = 0$, $k = 1$, la fonction am (u, k), s'exprime facilement au moyen des fonctions ordinaires. En effet, pour $k = 0$, on a d'après (1), $\varphi = u$, et d'après (3), $\varphi = \operatorname{am}(u, 0)$; par suite,

$$\operatorname{am}(u, 0) = u.$$

Pour $k = 1$, l'équation (1) donne :

$$\text{l. tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right) = u, \qquad \text{ou} \qquad \varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} e^u + m\pi - \frac{1}{2}\pi,$$

et l'équation (3) devient :

$$\varphi = \operatorname{am}(u, 1);$$

---

(1) Nous suivons ici la nomenclature de Jacobi. Legendre a appelé *fonctions elliptiques* les fonctions F (k, φ), E (k, φ), Π (k, φ); mais ce nom est moins naturel que celui d'*intégrales elliptiques*.

d'où

$$\operatorname{am}(u, 1) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^u + \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

m étant un nombre pair. Ce nombre est déterminé par la condition que φ et u croissent en même temps, et φ varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, si u varie de 0 à ∞ ; pour u positif, φ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$: par conséquent, $m = 0$.

Revenons maintenant aux équations générales (1) et (3), et imaginons que l'amplitude φ ait une grandeur quelconque, par exemple m fois le quadrant $\frac{1}{2}\pi$, plus un reste ρ, moindre que $\frac{1}{2}\pi$. On devra séparer ici le cas de m pair ou impair. Dans le premier cas, $m = 2n$, l'équation $\varphi = m \cdot \frac{1}{2}\pi + \rho$, se change en $\varphi = n\pi + \rho$, et l'on a :

$$\int_0^{n\pi+\rho} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{n\pi}^{n\pi+\rho} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \qquad (4)$$

La première intégrale du second membre, peut, d'après la relation

$$\int_0^{n\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi},$$

se transformer en n intégrales; si l'on emploie les substitutions suivantes :

Dans la première intégrale			$\varphi = \psi$,
»	deuxième	»	$\varphi = \pi + \psi$,
»	troisième	»	$\varphi = 2\pi + \psi$,
. . . . . .			
dans la n^{e} intégrale			$\varphi = (n-1)\pi + \psi$,

on obtient, pour toutes ces intégrales, la même forme, et l'on a :

$$\int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = n \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi},$$

ou bien, puisque $\Delta\psi$ prend les mêmes valeurs de $\psi = \frac{1}{2}\pi$ à $\psi = \pi$, que de $\psi = 0$ à $\psi = \frac{1}{2}\pi$,

$$\int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 2n\mathrm{K}, \qquad (5)$$

où l'on pose, pour abréger, $F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = K$. En outre, la dernière intégrale (4) se change, par la substitution de $\varphi = n\pi + \psi$, en la suivante :

$$\int_{n\pi}^{n\pi+\rho} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\rho \frac{d\psi}{\Delta\psi}. \tag{6}$$

On a donc, en vertu de (4), (5) et (6),

$$\int_0^{n\pi+\rho} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK + \int_0^\rho \frac{d\psi}{\Delta\psi}. \tag{7}$$

Pour m impair et $= 2n - 1$, l'équation $\varphi = m \cdot \frac{1}{2}\pi + \rho$ devient $\varphi = n\pi - \left(\frac{1}{2}\pi - \rho\right)$, ou plus simplement $\varphi = n\pi - \sigma$, en désignant par σ un arc du premier quadrant. On a alors

$$\int_0^{n\pi-\sigma} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_{n\pi-\sigma}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK - \int_{n\pi-\sigma}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

et, si l'on pose, dans la dernière intégrale, $\varphi = n\pi - \psi$, il vient

$$\int_0^{n\pi-\sigma} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK - \int_0^\sigma \frac{d\psi}{\Delta\psi}. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) sont réunies dans la formule unique

$$\int_0^{n\pi\pm\chi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK \pm \int_0^\chi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{9}$$

laquelle montre comment une intégrale d'une amplitude quelconque est exprimée par l'intégrale complète K, et par une intégrale non complète, dont l'amplitude est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Il suffit seulement d'écrire l'équation (9) sous une autre forme, pour arriver à une propriété fondamentale de la fonction am u. Si l'on pose, en effet,

$$\int_0^\chi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \quad \int_0^{n\pi\pm\chi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = v,$$

on a d'un côté, en vertu de (9)

$$v = 2nK \pm u;$$

d'autre part, en renversant les équations précédentes, il vient :

$$\chi = \text{am}\, u, \qquad n\pi \pm \chi = \text{am}\, v.$$

Si l'on substitue dans la dernière équation les valeurs de χ et de v, on arrive, en changeant l'ordre des deux membres, à la formule

$$\text{am}\,(2nK \pm u) = n\pi \pm \text{am}\, u. \tag{10}$$

Soit en outre

$$\int_0^\omega \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = w, \quad \text{d'où} \quad \omega = \text{am}\, w;$$

on trouve facilement

$$\int_0^{-\omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -w, \quad \text{et} \quad -\omega = \text{am}\,(-w).$$

Par conséquent, si l'on compare ces deux expressions, il vient :

$$\text{am}\,(-w) = -\,\text{am}\, w. \tag{11}$$

Au moyen des formules obtenues, on peut se faire une idée de la marche de la fonction am u, lorsque u est limitée à des valeurs réelles. Si l'on construit, en effet, u comme une abscisse, $\varphi = \text{am}\, u$ comme une ordonnée, on voit, qu'aux abscisses (fig. 22)

$$0, \quad 0K_1 = K, \quad 0K_2 = 2K, \quad 0K_3 = 3K, \ldots,$$

correspondent les ordonnées

$$0, \quad K_1L_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K_2L_2 = 2\,\frac{\pi}{2}, \quad K_3L_3 = 3\,\frac{\pi}{2}, \ldots$$

D'après cela, les points L_1, L_2, L_3, etc. se trouvent sur une droite passant par l'origine des coordonnées. En outre, si l'on a, pour un point P quelconque, l'abscisse u, l'ordonnée am u, et l'angle τ entre la tangente en P et l'axe des abscisses, on a :

$$\text{tg}\,\tau = \frac{d\,\text{am}\, u}{du} = \frac{d\varphi}{d\varphi : \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi};$$

à l'origine des coordonnées $\operatorname{tg}\tau = 1$; lorsque P vient en L_1, $\operatorname{tg}\tau = \sqrt{1-k^2}$. L'angle τ commence donc à $45°$ et diminue jusque arc tg k'. A cause de $\operatorname{am}(2K - u) = \pi - \operatorname{am} u$, l'arc L_1L_2 est égal à l'arc $0L_1$, mais dans une position inverse : de $\operatorname{am}(2K + u) = \pi + \operatorname{am} u$, il résulte que l'arc L_2L_3 est égal à l'arc $0L_1$ et dans la même position, et ainsi de suite à l'infini des deux côtés.

L'inverse de l'intégrale elliptique

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u, \tag{12}$$

se déduit facilement de ce qui précède. Pour $z = \sin\varphi$, l'équation se change en la suivante :

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u.$$

Cette dernière donne $\varphi = \operatorname{am} u$, et, par suite, à cause de $z = \sin\varphi$, on a, pour l'inverse de (12),

$$z = \sin \operatorname{am} u\,(1). \tag{13}$$

Toutes les intégrales elliptiques qui se ramènent à l'intégrale elliptique de première espèce peuvent être traitées de la même manière. Par exemple, de l'équation

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = v, \tag{14}$$

(1 Cette formule s'énonce *z égale sinus amplitude u*. La variable u s'appelle, d'après Jacobi, *l'argument* des fonctions elliptiques. La notation am u, sin am u, cos am u, Δ am u, est due à Jacobi. Plusieurs autres notations ont été aussi employées. Ainsi, MM. Briot et Bouquet, d'après M. Liouville dans ses leçons au collége de France, désignent les trois fonctions elliptiques par les lettres λ, μ, ν (*Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques*). Schellbach a employé les trois lettres f, g, h (*Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen*). Enfin Gudermann, de son côté, a adopté les notations *sn u*, *cn u*, *dn u* (*Theorie der Modular Functionen*). La notation de Jacobi est peut-être peu commode à cause de sa longueur : mais elle a le grand avantage de faire ressortir la propriété fondamentale des fonctions elliptiques.

J. G.

il résulte, pour $z = \cos\varphi$,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = v, \qquad \varphi = \mathrm{am}\, v,$$

et, d'après ce qui précède,

$$z = \cos \mathrm{am}\, v \tag{15}$$

De même l'équation

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = w. \tag{16}$$

laquelle pour $z = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, se change en

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = w,$$

donne l'inverse

$$z = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w} = \Delta\, \mathrm{am}\, w. \tag{17}$$

Les trois fonctions de l'amplitude ainsi formées sont les plus importantes parmi les fonctions qui proviennent de l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce; elles forment un groupe qui, dans la théorie des fonctions elliptiques, occupe à peu près le même rang que le sinus et le cosinus dans les fonctions goniométriques. C'est ce que l'on reconnaît facilement au moyen des formules différentielles que l'on en déduit. L'équation

$$d\, \mathrm{am}\, u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, du = \Delta\, \mathrm{am}\, u \cdot du,$$

donne, en effet,

$$\left.\begin{aligned} d \sin \mathrm{am}\, u &= \cos \mathrm{am}\, u\, \Delta\, \mathrm{am}\, u \cdot du, \\ d \cos \mathrm{am}\, u &= -\sin \mathrm{am}\, u\, \Delta\, \mathrm{am}\, u \cdot du, \\ d\, \Delta\, \mathrm{am}\, u &= -k^2 \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u \cdot du. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Par rapport à la périodicité, il existe aussi une grande analogie entre les fonctions elliptiques et les fonctions goniométriques. A cause de $\mathrm{am}\,(2K - u) = \pi - \mathrm{am}\, u$, on a :

$$\sin \mathrm{am}\,(2K - u) = \sin(\pi - \mathrm{am}\, u) = \sin \mathrm{am}\, u\,;$$

de même,

$$\sin \operatorname{am}(2K + u) = -\sin \operatorname{am} u,$$

$$\sin \operatorname{am}(4K - u) = -\sin \operatorname{am} u, \quad \sin \operatorname{am}(4K + u) = \sin \operatorname{am} u.$$

Il suit de là que l'intégrale complète K a la même signification pour le sinus amplitude, que le nombre $\frac{1}{2}\pi$ pour le sinus ordinaire. Si l'on a encore égard à la relation $\operatorname{am}(-v) = -\operatorname{am} v$, on arrive facilement aux formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} \sin \operatorname{am}(u \pm 2K) = -\sin \operatorname{am} u, \quad \cos \operatorname{am}(u \pm 2K) = -\cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(u \pm 2K) = \Delta \operatorname{am} u, \end{array}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{array}{c} \sin \operatorname{am}(u \pm 4K) = \sin \operatorname{am} u, \quad \cos \operatorname{am}(u \pm 4K) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(u \pm 4K) = \Delta \operatorname{am} u. \end{array}\right\} \quad (20)$$

D'après cela, *les fonctions elliptiques ne changent pas lorsque la variable augmente de* 4K, c'est-à-dire *qu'elles ont une période réelle dont l'indice est* 4K (1). Dans le cas particulier $k = 0$, on a $K = \frac{1}{2}\pi$, $\sin \operatorname{am} u = \sin u$, $\cos \operatorname{am} u = \cos u$, $\Delta \operatorname{am} u = 1$, et alors les formules (20) donnent le théorème connu de la périodicité réelle des fonctions $\sin u$ et $\cos u$. Si l'on fait $k = 1$, on a $K = \infty$; de (12) et (13) on déduit :

$$\sin \operatorname{am}(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1},$$

et cette expression n'a plus aucune période réelle. Mais si l'on se rappelle que, à cause de la relation

$$e^{2(u \pm \pi\sqrt{-1})} = e^{2u},$$

la quantité exponentielle e^{2u} doit être considérée comme une fonction périodique, dont la période a l'indice imaginaire $\pi\sqrt{-1}$, on reconnaît aussi dans $\sin \operatorname{am}(u, 1)$ une fonction périodique dont l'indice est $\pi\sqrt{-1}$.

(1) On voit que la période des fonctions elliptiques n'est pas un nombre absolu, comme celle des fonctions trigonométriques, mais qu'elle dépend du module. Lorsque le module sera k', l'indice de la période est $4K'$, et l'on aura :

$$\sin \operatorname{am}(u \pm 4K', k') = \sin \operatorname{am}(u, k').$$

J. G.

Afin de voir si cette propriété de sin am u appartient seulement au cas particulier $k = 1$, ou bien si elle a encore lieu pour d'autres modules, nous avons besoin d'un examen plus approfondi.

II. Double périodicité du sinus amplitude.

Nous nous occupons d'abord de l'intégrale suivante :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

dans laquelle nous supposons d'abord z une variable complexe quelconque, et examinons les valeurs différentes que prend cette intégrale pour différents chemins d'intégration. Posons, pour abréger,

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et désignons, lorsque cela sera nécessaire, par $[\mathrm{f}(z)]$ la valeur absolue de $\mathrm{f}(z)$.

A la valeur initiale $z = 0$ correspond $\mathrm{f}(0) = \pm 1$; pour éviter l'ambiguité, supposons $\mathrm{f}(0) = +1$. Comme, en outre,

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k}-z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k}+z}},$$

il en résulte que $\mathrm{f}(z)$ a quatre points singuliers

$$z = +1, \quad z = -1, \quad z = \frac{1}{k}, \quad z = -\frac{1}{k},$$

pour lesquels $\mathrm{f}(z)$ est infinie. Ces points sont en même temps des points de ramification ou d'embranchement; car, la révolution de z autour de chacun de ces points donne un changement de signe de $\mathrm{f}(z)$. Les deux premiers points sont sur l'axe des abscisses aux distances $OF_1 = +1$, $OF_2 = -1$; les deux autres sont situés sur l'axe des x ou au-dessus, suivant que k est réel ou imaginaire. Pour plus de généralité, nous supposerons ce dernier cas, et nous imaginerons que G_1 et G_2 représentent $+\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$ (fig. 23). Supposons maintenant que la variable z passe du point O, sur une courbe fermée qui entoure le point F_1 une fois seulement, et désignons par $I(F_1)$ la valeur correspondante de $\int f(z)\,dz$. Nous aurons alors :

$$I(F_1) = I(OA_1) + I(A_1B_1C_1A_1) + I(A_1O).$$

Dans la deuxième intégrale, posons $z = 1 - re^{i\theta}$, où r est le rayon du cercle $A_1B_1C_1A_1$, et observons encore que $f(z)$ a dans le retour de A_1O un signe contraire à celui qu'elle a pour l'aller OA_1. Nous avons alors (*Introduction,* N^o 30) :

$$I(F_1) = \int\Big|_0^{1-r} f(z)\,dz - ir\int_0^{2\pi} f(1 - re^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta + \int\Big|_{1-r}^{0} \{-[f(z)]\}\,dz.$$

L'intégrale relative au cercle est

$$ir\int_0^{2\pi} f(1-re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = i\sqrt{r}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{1}{2}i\theta}d\theta}{\sqrt{(2-re^{i\theta})(1-k+kre^{i\theta})(1+k-kre^{i\theta})}};$$

elle devient nulle pour $r = 0$, et il reste alors :

$$= \int\Big|_0^1 f(z)\,dz - \int\Big|_1^0 f(z)\,dz = 2\int\Big|_0^1 f(z)\,dz = 2\int\Big|_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = F,$$

où F est employé par abréviation. Pour une deuxième révolution autour de F_1, on a les mêmes conclusions, seulement le signe change, puisque maintenant $f(z)$ commence avec la valeur finale -1 et revient en O avec la valeur finale $+1$. Pour la deuxième révolution la valeur de l'intégrale sera $-F$. Si l'on désigne, en général, par $I_n(F_1)$ la valeur que prend l'intégrale après n révolutions autour du point F_1, il vient :

$$I_2(F_1) = 0,\quad I_3(F_1) = F,\quad I_4(F_1) = 0,\quad I_5(F_1) = F,\quad \text{etc.}$$

Au moyen de considérations tout-à-fait analogues, on arrive à la valeur que prend l'intégrale, lorsque, partant de O, on entoure plusieurs fois le point F_2; on trouve d'abord :

$$I(F_2) = 2\int\Big|_0^{-1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -F,$$

et, d'après cela,

$$I_2(F_2) = 0,\quad I_3(F_2) = -F,\quad I_4(F_2) = 0,\quad I_5(F_2) = -F,\quad \text{etc.}$$

Par la même méthode, on obtient aussi les valeurs de l'intégrale, qui correspondent aux révolutions autour de G_1 et de G_2; si l'on pose, en effet, pour abréger,

$$2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = G,$$

on obtient

$$I_1(G_1) = G,\quad I_2(G_1) = 0,\quad I_3(G_1) = G,\quad I_4(G_1) = 0,\quad \text{etc.},$$
$$I_1(G_2) = -G,\quad I_2(G_2) = 0,\quad I_3(G_2) = -G,\quad I_4(G_2) = 0,\quad \text{etc.}$$

Le chemin d'intégration le plus général de O vers un point quelconque P représentant la variable $z = x + y\sqrt{-1}$, se compose maintenant de plusieurs circuits autour des quatre points de ramification, et ensuite du chemin rectiligne de O vers P. Chaque circuit, pris dans un ordre quelconque, donne par suite de la valeur qui lui correspond une expression de la forme $\mu F + \nu G$, où μ et ν sont des nombres entiers, lesquels peuvent être positifs, nuls ou négatifs. La valeur générale de l'intégrale est donc

$$\int_0^z f(z)\,dz = \mu F + \nu G + \int_0^z \{\pm [f(z)]\}\,dz, \tag{21}$$

et le signe de $f(z)$ est déterminé dans l'intégrale linéaire par la valeur finale avec laquelle $f(z)$ revient en O après ces circuits. Pour décider de ce signe, examinons les quatre cas suivants les seuls possibles :

μ pair,	ν pair,
μ impair,	ν impair,
μ pair,	ν impair,
μ impair,	ν pair.

Le premier cas se présente, lorsque l'on entoure plusieurs fois F_1, ensuite F_2, puis de nouveau F_1 et F_2, etc., mais que l'on s'arrête aux circuits du point F_2, ensuite que l'on procède de même avec G_1 et G_2 (ou avec G_2 et G_1), et finalement que l'on parcourt le chemin rectiligne OP. Or, si $f(z)$ est positive le long de OF_1, négative de F_1 en F_2, positive de F_2 en O, et cela aussi souvent que ces allers et retours peuvent être répétés, on obtient toujours pour $f(z)$ la valeur positive finale $f(0) = +1$, dès que l'on s'arrête toujours à F_2. La même chose a lieu relativement aux points G_1 et G_2; par conséquent, $f(z)$ commence dans l'intégrale linéaire avec la valeur positive $f(0) = +1$, et reste positive puisque entre O et P, il n'y a aucun point d'embranchement. Pour $\mu = 2p$, $\nu = 2q$, on a donc l'équation

$$\int_0^z f(z)\,dz = 2pF + 2qG + \int\Big|_0^z f(z)\,dz,$$

que l'on peut encore écrire

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p + 2q)\,F - 2q\,(F - G) + \int\Big|_0^z f(z)\,dz. \qquad (22)$$

Le second cas se présente lorsque l'on entoure plusieurs fois F_1, F_2, F_1, F_2, etc., mais que l'on s'arrête aux circuits du point F_1 et qu'ensuite on procède de même avec G_1 et G_2. Après les révolutions autour de F_1, F_2, F_1, F_2, ... F_1, la fonction $f(z)$ arrive en O avec le signe négatif; aux révolutions autour de G_1, G_2, G_1, G_2 .... G_1, correspondent autant de changements de signes, et, après la dernière révolution, $f(z)$ est de nouveau positive, et reste positive le long de OP. Pour $\mu = 2p - 1$, $\nu = 2q + 1$, on a :

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p - 1)\,F + (2q + 1)\,G + \int\Big|_0^z f(z)\,dz,$$

ou bien :

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p + 2q)\,F - (2q + 1)\,(F - G) + \int\Big|_0^z f(z)\,dz. \qquad (23)$$

Comme on le voit, les équations (22) et (23), qui correspondent aux deux premiers cas, se confondent dans l'équation suivante :

$$\int_0^z f(z)\,dz = 2mF + n\,(F - G) + \int\Big|_0^z f(z)\,dz, \qquad (24)$$

dans laquelle m et n sont des nombres entiers.

Le troisième cas a lieu lorsque l'ordre des révolutions est le suivant :

$$F_1,\ F_2,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_2,$$

$$G_1,\ G_2,\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_2,\ G_1.$$

Après la dernière révolution autour de F_2, la fonction $f(z)$ est positive;

après la dernière révolution autour de G_1, cette fonction $f(z)$ est négative. On a donc, pour $\mu = 2p$, $\nu = 2q+1$,

$$\int_0^z f(z)\,dz = 2pF + (2q+1)G - \int\Big|_0^z f(z)\,dz,$$

ou bien

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p+2q+1)F - (2q+1)(F-G) - \int\Big|_0^z f(z)\,dz. \quad (25)$$

Enfin, au dernier cas correspond l'ordre suivant des révolutions :

$$F_1,\ F_2,\ F_1,\ F_2,\ \ldots.\ F_2,\ F_1,$$
$$G_1,\ G_2,\ G_1,\ G_2,\ \ldots.\ G_2.$$

Après la dernière révolution autour de F_1, la fonction $f(z)$ est négative; après la dernière révolution autour de G_2, elle est encore négative. On a donc, pour $\mu = 2p+1$, $\nu = 2q$,

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p+1)F + 2qG - \int\Big|_0^z f(z)\,dz,$$

ou bien :

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p+2q+1)F - 2q(F-G) - \int\Big|_0^z f(z)\,dz. \quad (26)$$

Les équations (25) et (26) peuvent aussi être réunies dans une formule unique

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2m+1)F + n(F-G) - \int\Big|_0^z f(z)\,dz, \quad (27)$$

dans laquelle m et n sont des nombres entiers. Toutes les valeurs différentes que $\int f(z)\,dz$ peut prendre pour les différents chemins d'intégration, sont donc comprises dans les formules (24) et (27).

Proposons-nous maintenant de calculer les deux intégrales F et F — G. La première ne présente aucune difficulté, particulièrement si k est considérée comme une fraction réelle, ce qui doit arriver plus loin. Pour ce qui concerne l'expression F — G, c'est la valeur que prend $\int f(z)\,dz$, lorsque les points F_1 et G_1 sont entourés l'un après l'autre (fig. 24). A ce chemin, on peut en substituer un autre, savoir : on va en ligne droite de O vers un point M rapproché de F_1, on décrit autour de F_1 un cercle d'un rayon F_1M; on va ensuite en ligne droite de M vers un point N situé près de G_1, puis on décrit autour de G_1 un cercle d'un rayon G_1N, et l'on revient alors par la droite NO vers le point O, pour lequel on peut aussi choisir, au lieu du chemin rectiligne NO la ligne brisée NMO, puisqu'il n'y a aucun point singulier à l'intérieur du triangle OMN. Les signes de $f(z)$ sont, pour les droites en question,

le long de $\overline{OM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NM}$, $\overline{MO}$,

positif, négatif, positif, positif;

on a ainsi, pour $F_1M = G_1N = r$,

$$F - G = \int_0^{1-r} f(z)\,dz + \text{intégrale circulaire} + \int_{1-r}^{\frac{1}{k}-r} \{-[f(z)]\}\,dz$$

$$+ \text{intégrale circulaire} + \int_{\frac{1}{k}-r}^{1-r} \{+[f(z)]\}\,dz + \int_{1-r}^{0} \{+[f(z)]\}\,dz,$$

où la première intégrale linéaire se détruit avec la dernière, et la deuxième intégrale linéaire est égale à la troisième. Si r tend vers zéro, les deux intégrales circulaires s'annulent, et il reste :

$$F - G = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Nous supposons k une fraction positive et réelle. On a alors l'expression réelle

$$F = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2K.$$

Au contraire, $F - G$ est imaginaire, parce que, entre les limites 1 et $\frac{1}{k}$, le premier facteur $1 - z^2$ est négatif, et le deuxième $1 - k^2z^2$ positif. Cette remarque donne :

$$F - G = -\frac{2}{i}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}};$$

si l'on pose

$$1 - k^2 = k'^2, \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2x^2}},$$

on a l'équation

$$F - G = 2i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}} = 2iK',$$

dans laquelle K' est l'intégrale elliptique complète de module k'.

Les formules (24) et (27) deviennent alors

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = 4mK + i \cdot 2nK' + \int\Big|_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = (4m + 2)K + i \cdot 2nK' - \int\Big|_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Nous écrirons, pour abréger,

$$W = 4mK + i \cdot 2nK' + w,$$

$$W = (4m + 2)K + i \cdot 2nK' - w,$$

en désignant par W la valeur générale de l'intégrale, et par w la valeur de l'intégrale linéaire. Comme la limite supérieure z est la même dans les deux intégrales, on a, en renversant les intégrales :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = W, \quad \text{et} \quad \int\Big|_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w,$$

les deux équations suivantes :

$$z = \sin \operatorname{am} W, \quad \text{et} \quad z = \sin \operatorname{am} w;$$

d'où

$$\sin \operatorname{am} W = \sin \operatorname{am} w.$$

En vertu des relations précédentes entre W et w, on a :

$$\sin \operatorname{am} (4mK + i \cdot 2nK' + w) = \sin \operatorname{am} w, \tag{28}$$

$$\sin \operatorname{am} ([4m + 2]K + i \cdot 2nK' - w) = \sin \operatorname{am} w. \tag{29}$$

La première de ces équations montre que la fonction $\sin \operatorname{am} w$ ne change pas, lorsque la variable w croît d'un multiple de $4K$ et d'un multiple de $i \cdot 2K'$. Par suite, *le sinus amplitude a une période réelle dont l'indice est* $4K$, *et une période imaginaire dont l'indice est* $i \cdot 2K'$.

Dans le cas particulier où $k = 0$, on a $K = \frac{1}{2}\pi$, $K' = \infty$, $\sin \operatorname{am} (w, 0) = \sin w$: la période imaginaire est supprimée, et il reste la période réelle

2π, laquelle appartient en effet à la fonction $\sin w$. Le cas où $k=1$, donne $K=\infty$, $K'=\frac{1}{2}\pi$,

$$\sin \operatorname{am}(w, 1)=\frac{e^{2w}-1}{e^{2w}+1},$$

et cette fonction ne possède que la période imaginaire $i\pi$.

Aux recherches précédentes, nous rattacherons encore le développement de quelques formules fondamentales pour $\sin \operatorname{am} w$, et nous ferons remarquer d'abord que, dans la suite, nous prendrons toujours linéairement l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=w,$$

puisque, d'après les formules (28) et (29), tout autre chemin d'intégration peut se ramener à la droite de O en z.

Si l'on remplace dans l'équation

$$K-w=\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

la variable z par une autre y, au moyen de la substitution

$$z=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-k^2y^2}}, \quad \text{ou} \quad y=\sqrt{\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}},$$

il vient :

$$K-w=\int_0^{\sqrt{\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

On en déduit réciproquement :

$$\sqrt{\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}}=\sin \operatorname{am}(K-w),$$

ou, en vertu de l'équation primitive $z=\sin \operatorname{am} w$,

$$\sin \operatorname{am}(K-w)=\frac{\cos \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w}. \tag{30}$$

Cette formule correspond à la relation goniométrique $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - w\right) = \cos w$, à laquelle elle se ramène pour $k = 0$.

Jacobi appelle $\mathrm{am}\,(K - w)$ la coamplitude de w, et il écrit la formule (30) sous la forme suivante :

$$\sin \mathrm{coam}\, w = \frac{\cos \mathrm{am}\, w}{\Delta\, \mathrm{am}\, w}.$$

Mais cette notation est peu employée; d'ailleurs, elle ne donne lieu à aucune simplification importante.

Si la limite supérieure est imaginaire, par exemple $z = i\eta$, on a :

$$\int_0^{i\eta} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w, \qquad i\eta = \sin \mathrm{am}\, w; \tag{31}$$

toutes les valeurs de z qui se rapportent au chemin d'intégration sont alors de la forme iy; la substitution $z = iy$ donne :

$$i \int_0^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2 y^2)}} = w.$$

Si l'on fait ensuite $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, on obtient :

$$i \int_0^{\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}} = w,$$

ou, en désignant l'intégrale par v,

$$w = iv, \quad \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \sin \mathrm{am}\,(v, k'), \quad \eta = \mathrm{tg}\, \mathrm{am}\,(v, k').$$

De la deuxième équation (31), on tire, par la substitution des valeurs de w et η,

$$\sin \mathrm{am}\,(iv) = i\, \mathrm{tg}\, \mathrm{am}\,(v, k'). \tag{32}$$

Si l'on suppose la limite supérieure de l'intégrale w plus grande que l'unité, on doit remarquer que $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ est imaginaire de $z = 1$ à $z = \frac{1}{k}$, et qu'elle devient, au contraire, de nouveau réelle pour

$z > \frac{1}{k}$. On a donc à distinguer deux cas, suivant que la limite supérieure en question est comprise entre 1 et $\frac{1}{k}$, ou plus grande que $\frac{1}{k}$.

Pour examiner le premier cas, soient :

$$\int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w, \qquad \frac{1}{\xi} = \sin \operatorname{am} w, \tag{33}$$

et $k < \xi < 1$. Le chemin rectiligne d'intégration passe ici par le point de ramification $x = +1$, ce que l'on peut éviter, en entourant ce point d'un demi-cercle. On trouve facilement que l'intégrale prise sur le demi-cercle s'annule en même temps que le rayon de ce demi-cercle, de sorte qu'il reste :

$$w = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

c'est-à-dire

$$w = \mathrm{K} + \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Au moyen de la substitution $z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$, on obtient :

$$w = \mathrm{K} + \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{k'}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

ou bien, si l'on désigne l'intégrale par v,

$$w = \mathrm{K} + \frac{v}{i}, \quad \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{k'} = \sin \operatorname{am}(v, k'), \quad \xi = \Delta \operatorname{am}(v, k').$$

En vertu des valeurs de ξ et w, on déduit de la seconde équation (33),

$$\sin \operatorname{am}\left(\mathrm{K} + \frac{v}{i}\right) = \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(v, k')},$$

et, si l'on met $-v$ à la place de v,

$$\sin \operatorname{am}(\mathrm{K} + iv) = \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(v, k')}. \tag{34}$$

Pour discuter le second cas mentionné ci-dessus, considérons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{k\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w, \quad \frac{1}{k\xi} = \sin \operatorname{am} w, \qquad (35)$$

dans l'hypothèse où ξ est une fraction positive. Le chemin rectiligne d'intégration conduit ici par les deux points de ramification $x = +1$ et $x = +\frac{1}{k}$, que l'on peut de nouveau entourer par des demi-cercles. Lorsque les rayons de ces cercles s'annulent, les intégrales prises sur les demi-cercles s'annulent aussi, et il vient :

$$w = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} + \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}}.$$

La première de ces intégrales a pour valeur K; posons, dans la seconde comme ci-dessus, $z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$, et dans la troisième, $z = \frac{1}{kx}$, il viendra :

$$w = \mathrm{K} + \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} + \int_\xi^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

ou bien

$$w = \mathrm{K} + \frac{1}{i}\mathrm{K}' + \mathrm{K} - \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Si nous désignons par u la valeur de la dernière intégrale, nous aurons les équations suivantes :

$$w = 2\mathrm{K} - u - i\mathrm{K}', \qquad \xi = \sin \operatorname{am} u.$$

Ces valeurs substituée dans (35), nous donnent

$$\sin \operatorname{am}(2\mathrm{K} - u - i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} u}.$$

Si l'on remplace $u - 2\mathrm{K}$ par u, et si l'on observe que $\sin \operatorname{am}(-w) = -\sin \operatorname{am} w$, on a finalement

$$\sin \operatorname{am}(u + i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} u}. \qquad (36)$$

D'après cette discussion, on peut facilement donner une image de la double périodicité du sinus amplitude, et indiquer les valeurs particulières où sin am w devient nulle ou infinie.

Supposons, en effet, le plan uv divisé, par des parallèles aux axes des u et des v, en rectangles égaux dont chacun a pour base 4K et pour hauteur 2K′ (fig. 25). Soit 0ACB le premier de ces rectangles, dont les côtés sont $0A = 4K$, $0B = 2K'$, sur les parties positives des axes coordonnés; supposons enfin que le point arbitraire P représente dans ce rectangle le nombre complexe $w = u + iv$. La valeur que le sinus amplitude prend en P, se reproduit dès que w augmente d'un multiple de 4K, ou d'un multiple de $i \cdot 2K'$, ou des deux multiples en même temps. En tous les points P_1, P_2, etc., qui se trouvent placés dans les autres rectangles de la même manière que P dans le premier rectangle, sin am w prend la même valeur qu'au point P. Si, en outre, dans les hypothèses $0 < u < 2K$, et $0 < v < K'$, on considère les quatre points

P	comme	représentant	$u + iv,$
Q	»	»	$2K - u + i(2K' - v),$
R	»	»	$2K + u + iv,$
S	»	»	$4K - u + i(2K' - v),$

les formules (29) et (28) nous montrent que le sinus amplitude a la même valeur absolue en ces quatre points : mais, il est positif en P et Q, négatif en R et S; en outre, les quatre parties du rectangle 0ACB sont les mêmes par rapport à la fonction sin am w, que les quatre quadrants par rapport à sin u. A l'intérieur du rectangle 0ACB, sin am $w = 0$ aux six points

$$0, \quad 2K, \quad 4K,$$
$$i \cdot 2K', \quad 2K + i \cdot 2K', \quad 4K + i \cdot 2K',$$

lesquels sont désignés par des zéros dans la figure. Enfin les formules (36), (29) et (28) montrent qu'à l'intérieur du premier rectangle, sin am w est infinie aux trois points

$$iK', \quad 2K + iK', \quad 4K + iK',$$

lesquels sont indiqués par des étoiles.

Notes du traducteur. — Il nous reste, en terminant ce chapitre, à ajouter une démonstration d'une propriété fondamentale du sinus amplitude, laquelle doit nous servir dans les chapitres suivants, et que

M. Schloemilch a omise. Elle consiste en ce que *la fonction sin am w est monodrome dans toute l'étendue du plan.*

L'équation ci-dessus

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

nous donne :

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

Supposons d'abord que l'on ait en même temps $z=0$, pour $u=0$, et soit $Z_0 = +1$, la valeur initiale du radical. Comme le radical n'est pas une fonction monodrome de z, et, en effet, il change de signe lorsque l'on entoure l'un des points singuliers $z = \pm 1$, $z = \pm \frac{1}{k}$, il en résulte que $\frac{dz}{dw}$, considérée comme fonction de z, n'est pas monodrome. Mais il ne s'en suit pas que z, considérée comme fonction de w, soit une fonction ambigue; au contraire, elle est monodrome.

Pour le démontrer, supposons que pour $w = w_1$, la fonction z devienne égale à $+1$, et posons

$$z = 1 + z'^2,$$

il viendra :

$$\frac{dz'}{dw} = \frac{k}{2}\sqrt{(z'^2+2)\left(z'^2+1+\frac{1}{k}\right)\left(z'^2+1-\frac{1}{k}\right)}.$$

Or, le radical est une fonction monodrome pour des valeurs de z' suffisamment petites : il s'en suit que z', et par conséquent z, reprend la même valeur lorsque la variable w tourne autour du point w_1. Par suite, la fonction z reste une fonction monodrome de w, tant que cette fonction z conserve une valeur finie.

Mais, il peut arriver que z devienne infinie pour une valeur finie de w. Dans ce cas encore, la fonction z restera monodrome dans le voisinage d'une valeur $w = \alpha$, pour laquelle elle devient infinie.

En effet, puisque l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

tend vers une valeur finie, lorsque z augmente indéfiniment, soit α cette valeur de w pour laquelle $z = \infty$. Posons

$$w = \alpha + w', \qquad z = \frac{1}{v},$$

il viendra :

$$\frac{dv}{dw'} = -k\sqrt{(1-v)(1+v)\left(1-\frac{1}{k}v\right)\left(1-\frac{1}{k}v\right)},$$

et l'on a : $v = 0$, pour $w' = 0$. Or, la fonction v reste monodrome dans le voisinage de $w' = 0$; il en est donc de même de z dans le voisinage de $w = \alpha$.

La fonction $z = \sin \operatorname{am} w$ est donc monodrome dans toute l'étendue du plan.

II. Il est évident, d'après la fig. 25, que, si l'on considère la suite des rectangles du plan, chacun d'eux ayant deux côtés communs avec les rectangles suivants, on peut dire qu'en réalité, dans le rectangle 0ACB, $\sin \operatorname{am} w$ est nulle seulement aux deux points 0 et 2K, et infinie aux deux points $i\mathrm{K}'$ et $2\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$. Il en résulte donc que cette fonction admet deux zéros simples et deux infinis simples dans chaque rectangle.

On dit qu'une fonction $f(z)$ a un *zéro simple* $z = \alpha$, lorsque cette fonction devient nulle pour $z = \alpha$, c'est-à-dire, lorsque $z = \alpha$ est une racine simple de l'équation $f(z) = 0$; de même, la fonction $f(z)$ a un *infini simple* $z = \beta$, lorsque la fonction inverse $\frac{1}{f(z)}$ est nulle pour $z = \beta$, ou que $z = \beta$ est une racine simple de l'équation $\frac{1}{f(z)} = 0$. Ces dénominations sont dues à M. Liouville.

En résumant le chapitre précédent, nous dirons que $\sin \operatorname{am} w$ *est une fonction monodrome, impaire, doublement périodique.*

III. Double périodicité de cos am w, et de Δ am w.

1° De la fonction $\cos \operatorname{am} w$. — Au moyen des principes exposés dans le chapitre précédent, on peut aussi discuter l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = w,$$

et en déduire les propriétés de la fonction inverse $z = \cos \operatorname{am} w$.

Mais il est plus simple de définir cette fonction par l'équation

$$\cos \operatorname{am} w = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} w},$$

à laquelle on joint la condition initiale $\cos \operatorname{am} 0 = +1$.

Comme $\sqrt{1-z^2}$ n'est pas une fonction monodrome de z, et, en effet, elle change de signe, lorsque l'on entoure l'un des points $z = +1$, ou $z = -1$, il s'en suit que $\cos \operatorname{am} w$, considérée comme fonction de $\sin \operatorname{am} w$, n'est pas monodrome. Mais il n'en résulte pas que $\cos \operatorname{am} w$, considérée comme fonction de w, puisse être une fonction ambigue. En effet, si ces valeurs multiples existent, si la fonction a plusieurs acceptions, les points pour lesquels on a $\sin \operatorname{am} w = \pm 1$, seront les points de ramification de $\cos \operatorname{am} w$. D'après cela, ces derniers seraient, si nous nous limitons provisoirement au rectangle OACB (fig. 25),

$$\mathrm{K}, \quad \mathrm{K} + i \cdot 2\mathrm{K}', \quad 3\mathrm{K}, \quad 3\mathrm{K} + i \cdot 2\mathrm{K}'.$$

Examinons maintenant comment la fonction $\cos \operatorname{am} w$ se comporte, lorsque l'on entoure d'un cercle un de ces points. On a d'abord :

$$\cos \operatorname{am} (\mathrm{K} - t) = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} (\mathrm{K} - t)}.$$

Or, de $\sin \operatorname{am} (2\mathrm{K} - w) = \sin \operatorname{am} w$, il résulte encore pour $w = \mathrm{K} + t$,

$$\sin \operatorname{am} (\mathrm{K} - t) = \sin \operatorname{am} (\mathrm{K} + t). \tag{37}$$

Mais, comme $\sin \operatorname{am} (\mathrm{K} - t)$ reste synectique pour t suffisamment petit, $\sin \operatorname{am} (\mathrm{K} - t)$ doit se transformer en une série procédant suivant les puissances de t, laquelle a pour premier terme $\sin \operatorname{am} \mathrm{K} = 1$. En vertu de la relation (37), elle ne peut renfermer que des puissances paires de t, et il vient :

$$\sin \operatorname{am} (\mathrm{K} - t) = 1 - \alpha t^2 + \beta t^4 - \cdots;$$

d'où

$$\cos \operatorname{am} (\mathrm{K} - t) = t \sqrt{2\alpha - (\alpha^2 + 2\beta) t^2 + \cdots}.$$

Si l'on fait une première fois $t = re^{i\theta}$, et ensuite $t = re^{i(2\pi+\theta)}$, c'est-à-dire si le point K se meut sur un cercle, on obtient dans les deux cas la même valeur de $\cos \operatorname{am} w$. Le point en question n'est donc pas un point de ramification.

Pour le deuxième des quatre points ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}\cos \operatorname{am} (\mathrm{K} + i \cdot 2\mathrm{K}' - t) &= \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} (\mathrm{K} + i \cdot 2\mathrm{K}' - t)} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} (\mathrm{K} - t)} = t \sqrt{2\alpha - (\alpha^2 + 2\beta) t^2 + \cdots},\end{aligned}$$

ce qui conduit à la même conclusion que ci-dessus. La même chose a lieu non-seulement pour les deux points restants, mais aussi pour les points correspondants des autres rectangles, dans lesquels les valeurs de sin am w se reproduisent périodiquement. La fonction cos am w est donc *une fonction monodrome.*

De la définition du cosinus amplitude, il résulte que cos am $(-w)$ $= \pm$ cos am w, et il reste à décider le signe à adopter. Pour cela, on a recours au cas particulier $w = 0$, lequel montre que, du moins pour w infiniment petit, on doit prendre le signe supérieur. Mais comme cos am w reste monodrome, ce signe doit exister aussi pour toutes les autres valeurs de w. D'après cela, *le cosinus amplitude est une fonction paire.*

Pour découvrir les périodes de cette fonction, rappelons la formule (37), qui nous donne :

$$\cos \operatorname{am} (K + t) = \pm \cos \operatorname{am} (K - t).$$

Le signe du second membre est déterminé par le développement

$$\cos \operatorname{am} (K - t) = t \sqrt{2\alpha - (\alpha^2 + 2\beta) t^2 + \cdots}$$

dont le second membre est négatif pour t négatif. On a donc :

$$\cos \operatorname{am} (K + t) = - \cos \operatorname{am} (K - t),$$

et, pour $t = K + w$,

$$\cos \operatorname{am} (2K + w) = - \cos \operatorname{am} w.$$

Enfin, si l'on remplace w par $2K + w$, il vient :

$$\cos \operatorname{am} (4K + w) = \cos \operatorname{am} w.$$

L'une des périodes de cos am w est donc réelle, et son indice est 4K. On a en outre :

$$\cos \operatorname{am} (iK' + t) = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} (iK' + t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} t}} =$$

$$= i \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} t}}{k \sin \operatorname{am} t}.$$

Le premier membre étant monodrome, on a :

$$\cos \operatorname{am} (iK' + t) = - \cos \operatorname{am} (iK' - t),$$

et, pour $t = iK' + w$,

$$\cos \operatorname{am} (2iK' + w) = - \cos \operatorname{am} w.$$

Si l'on remplace w par $2K + w$, il vient :

$$\cos \operatorname{am} (2K + 2iK' + w) = + \cos \operatorname{am} w.$$

Par conséquent, *le cosinus amplitude a une deuxième période dont l'indice est* $2K + i \cdot 2K'$.

Les deux périodes deviennent évidentes, si l'on prend, comme précédemment, $0A = 4K$, $0B = 2K'$ (fig. 26).

Joignons l'origine des coordonnées au point D, milieu de BC, construisons un parallélogramme sur 0A et 0D, et enfin, divisons le plan en parallélogrammes égaux par des parallèles à 0A et 0D. A un point P quelconque, situé dans 0AED, et qui représente $u + iv$, correspondent dans les autres parallélogrammes des points représentant

$$4mK + n(2K + i \cdot 2K') + u + iv = (4m + 2n) K + u + i(2nK' + v),$$

et pour lesquels $\cos \operatorname{am} w$ prend la même valeur qu'en P.

A l'intérieur du premier parallélogramme, $\cos \operatorname{am} w$ devient quatre fois nulle, aux points

$$K, \quad 3K, \quad 3K + i \cdot 2K', \quad 5K + i \cdot 2K',$$

qui sont désignés par des zéros dans la figure. De plus, $\cos \operatorname{am} w$ devient deux fois infinie, aux points

$$2K + i \cdot K', \qquad 4K + iK',$$

lesquels sont indiqués par des étoiles.

Remarques du traducteur. — Il s'en suit que la fonction $\cos \operatorname{am} w$ admet deux zéros et deux infinis dans chaque parallélogramme (page 114, note II).

En résumé, cette fonction est une *fonction monodrome paire doublement périodique.*

Nous remarquerons ici que le parallélogramme élémentaire relatif à la fonction $\cos \operatorname{am} w$ a la même aire que le rectangle élémentaire qui se rapporte à la fonction $\sin \operatorname{am} w$.

2° De la fonction Δ *am* w. — Nous définissons la fonction $\Delta \operatorname{am} w$ par l'équation

$$\Delta \operatorname{am} w = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} w},$$

et nous prenons pour valeur initiale $\Delta \operatorname{am} 0 = +1$.

Comme cette fonction $\Delta \operatorname{am} w$ peut acquérir des valeurs multiples aux points pour lesquels $k \sin \operatorname{am} w = \pm 1$, c'est-à-dire d'abord aux points

$$K + iK', \qquad 3K + iK',$$

nous allons examiner comment elle se comporte lorsque l'on entoure ces points par des cercles. On a :

$$\Delta\,\mathrm{am}(K+iK'+t)=\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(K+iK'+t)}=\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2\mathrm{am}(K+t)}},$$

ou bien, en remplaçant sin am $(K+t)$ par son développement en série

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(K+iK'+t)=\frac{t\sqrt{-2\alpha+(\alpha^2+2\beta)\,t^2-\cdots}}{1-\alpha t^2+\beta t^4-\cdots}.$$

Pour $t=re^{i\theta}$ et $t=re^{i(2\pi+\theta)}$, le second membre prend les mêmes valeurs; par conséquent, le point $K+iK'$ n'est pas un point de ramification. En d'autres termes, la fonction Δ am w est monodrome dans le voisinage de ce point. Les mêmes conclusions existent avec une légère modification pour le point $3K+iK'$, et aussi pour les autres points où k sin am $w=\pm 1$. Il s'en suit que *la fonction Δ am w est monodrome.*

En vertu de la définition de Δ am w, les fonctions Δ am $(-w)$ et Δ am w peuvent au plus différer par le signe. Or, on décide facilement de ce signe au moyen de la valeur particulière $w=0$, laquelle montre que les deux fonctions ont le même signe. Par conséquent, Δ am w est *une fonction paire.*

D'après les formules précédentes on a :

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(K+iK'+t)=-\Delta\,\mathrm{am}\,(K+iK'-t);$$

d'où, pour $t=K+u-iK'$,

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(2K+u)=-\Delta\,\mathrm{am}\,(i\cdot 2K'-u). \qquad (38)$$

D'un autre côté,

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(iK'+t)=\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,(iK'+t)}=\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\,t}}=\frac{\sqrt{\sin^2\mathrm{am}\,t-1}}{\sin\mathrm{am}\,t};$$

d'où

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(iK'+t)=-\Delta\,\mathrm{am}\,(iK'-t).$$

Si l'on pose $t=iK'+w$, il vient :

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(i\cdot 2K'+w)=-\Delta\,\mathrm{am}\,w. \qquad (39)$$

D'après cela, on a Δ am $(i\cdot 2K'-u)=-\Delta$ am u, et la formule (38) nous donne :

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(2K+u)=\Delta\,\mathrm{am}\,u;$$

La période réelle de Δ am w a donc pour indice 2K.

De la formule (39) on tire, en remplaçant w par $i \cdot 2K' + w$,

$$\Delta \operatorname{am} (i \cdot 4K' + w) = \Delta \operatorname{am} w.$$

Par suite, *la fonction Δ am w a une période imaginaire dont l'indice est $i \cdot 4K'$.*

Prenons, à partir de l'origine, $0A = 4K$, $0B = 2K'$, $0F = 2K$, $0G = 4K'$, (fig. 27), et divisons le plan en rectangles égaux au rectangle 0FHG; la fonction $\Delta \operatorname{am} w$ reprend dans chaque rectangle périodiquement les valeurs qu'elle a dans le premier. Dans celui-ci, la fonction $\Delta \operatorname{am} w$ est deux fois nulle, aux points marqués par des zéros,

$$K + iK', \qquad K + i \cdot 3K';$$

elle est quatre fois infinie, aux points

$$iK', \quad 2K + iK', \quad 3iK', \quad 2K + 3iK',$$

lesquels sont désignés par des étoiles.

Remarques du traducteur. — Il résulte de ce qui précède que la fonction $\Delta \operatorname{am} w$ admet deux zéros et deux infinis dans chaque paralllélogramme (page 114, note II).

En résumé, cette fonction est une *fonction monodrome paire doublement périodique.*

Nous remarquerons encore que le rectangle élémentaire de la fonction $\Delta \operatorname{am} w$ a la même aire que le rectangle élémentaire qui se rapporte à la fonction sin am w.

On peut encore, par des transformations convenables, obtenir un grand nombre de formules relatives aux fonctions elliptiques.

Ainsi, de la formule (32), et de la définition du cosinus amplitude, et du delta amplitude, on tire sans difficulté :

$$\cos \operatorname{am} (iv) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (v, k')} = \frac{1}{\cos \operatorname{am} (v, k')},$$

$$\Delta \operatorname{am} (iv) = \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (v, k')} = \frac{\Delta \operatorname{am} (v, k')}{\cos \operatorname{am} (v, k')}.$$

En vertu de (30), on a aussi :

$$\left.\begin{aligned} \cos \operatorname{am} (K - w) &= \cos \operatorname{coam} w = \frac{k' \sin \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w}, \\ \Delta \operatorname{am} (K - w) &= \Delta \operatorname{coam} w = \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} w}. \end{aligned}\right\} \qquad (30^{\text{bis}})$$

De la formule (36), on tire :

$$\cos \operatorname{am} (w \pm iK') = \mp \frac{i \Delta \operatorname{am} w}{k \sin \operatorname{am} w},$$

$$\Delta \operatorname{am} (w \pm iK') = \mp i \operatorname{cotg} \operatorname{am} w.$$

On conclut de là, en faisant $w = 0$, que les fonctions

$$\sin \operatorname{am} (\pm iK'), \quad \cos \operatorname{am} (\pm iK'), \quad \Delta \operatorname{am} (\pm iK'),$$

sont infinies.

De ces mêmes formules, on tire, pour $w = K$,

$$\sin \operatorname{am} (K \pm iK') = \frac{1}{k},$$

$$\cos \operatorname{am} (K \pm iK') = \mp \frac{ik'}{k},$$

$$\Delta \operatorname{am} (K \pm iK') = 0.$$

Des formules (19) et (20) on déduit, en faisant $u = 0$,

$$\sin \operatorname{am} 2K = 0, \quad \cos \operatorname{am} 2K = -1, \quad \Delta \operatorname{am} 2K = 1,$$

$$\sin \operatorname{am} 4K = 0, \quad \cos \operatorname{am} 4K = 1, \quad \Delta \operatorname{am} 4K = 1.$$

Il serait aussi facile de trouver les relations suivantes :

$$\sin \operatorname{am} 2iK' = 0, \quad \cos \operatorname{am} 2iK' = -1, \quad \Delta \operatorname{am} 2iK' = -1,$$

$$\sin \operatorname{am} 4iK' = 0, \quad \cos \operatorname{am} 4iK' = 1, \quad \Delta \operatorname{am} 4iK' = 1,$$

$$\sin \operatorname{am} (2K \pm 2iK') = 0, \ \cos \operatorname{am} (2K \pm 2iK') = 1, \ \Delta \operatorname{am} (2K \pm 2iK') = -1.$$

$$\sin \operatorname{am} (4K \pm 4iK') = 0, \ \cos \operatorname{am} (4K \pm 4iK') = 1, \ \Delta \operatorname{am} (4K \pm 4iK') = 1,$$

Enfin, des formules (30) et (30^{bis}) on tire, en faisant $w = \frac{K}{2}$,

$$\sin \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{\cos \operatorname{am} \frac{K}{2}}{\Delta \operatorname{am} \frac{K}{2}},$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{k' \sin \operatorname{am} \frac{K}{2}}{\Delta \operatorname{am} \frac{K}{2}},$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} \frac{K}{2}};$$

par suite, on a :

$$\sin \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \Delta \operatorname{am} \frac{K}{2} = \sqrt{k'},$$

et, en outre,

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{k'}}.$$

J'ai cru utile de donner ici toutes ces formules qui ne se trouvent pas dans l'ouvrage de M. Schloemilch. Elles sont d'un usage fréquent dans les applications des fonctions elliptiques.

IV. Du théorème d'addition.

Dans l'étude des intégrales elliptiques nous avons vu que l'équation

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

subsiste dès que les quantités x, y, z satisfont à la condition

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}. \tag{40}$$

La démonstration de ce théorème fondamental repose sur des transformations identiques, et elle reste la même, lorsque l'on suppose que les limites supérieures des intégrales x, y, z, sont des nombres complexes, et que l'on évite l'ambiguité des intégrales en prenant les chemins d'intégration rectilignes. Si l'on désigne les trois intégrales précédentes dans l'ordre par u, v, w, on a simplement :

$$u + v = w;$$

en outre

$$x = \sin \operatorname{am} u, \quad y = \sin \operatorname{am} v, \quad z = \sin \operatorname{am} w,$$

c'est-à-dire

$$z = \sin \operatorname{am} (u+v).$$

Par la substitution de ces valeurs de x, y, z, l'équation de condition ci-dessus se transforme en la suivante :

$$\sin \operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \, \Delta \operatorname{am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v} \cdot \quad (41)$$

Cette dernière correspond à la formule goniométrique de $\sin(u+v)$, et se change en celle-ci pour $k=0$. Si l'on met $-v$ à la place de v, alors $\sin \operatorname{am} v$ change de signe, et la deuxième partie du numérateur devient négative.

De l'équation (40) on tire facilement :

$$\sqrt{1-z^2} = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy\sqrt{(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2};$$

d'où, en vertu des valeurs de x, y, z,

$$\cos \operatorname{am}(u+v) = \frac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \, \Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}; \quad (42)$$

pour v négatif, le second terme du numérateur change de signe. La formule (40) donne ensuite :

$$\sqrt{1-k^2z^2} = \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)} - k^2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{1-k^2x^2y^2};$$

d'où :

$$\Delta \operatorname{am}(u+v) = \frac{\Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} v - k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}; \quad (43)$$

lorsque v est négatif, le second terme du numérateur devient positif.

Si l'on met iv au lieu de v, et si l'on a égard aux formules

$$\sin \operatorname{am}(iv) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(v, k'), \quad \cos \operatorname{am}(iv) = \frac{1}{\cos \operatorname{am}(v, k')},$$

$$\Delta \operatorname{am}(iv) = \frac{\Delta \operatorname{am}(v, k')}{\cos \operatorname{am}(v, k')},$$

les formules (41), (42) et (43) deviennent :

$$\sin \operatorname{am}(u+iv) = \frac{\sin \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am}(v, k') + i \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(v, k') \cos \operatorname{am}(v', k)}{\cos^2 \operatorname{am}(v, k') + k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(v, k')},$$

$$\cos \operatorname{am} (u + iv) = \frac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} (v, k') - i \sin \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} (v, k') \, \Delta \operatorname{am} (v, k')}{\cos^2 \operatorname{am} (v, k') + k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} (v, k')}$$

$$\Delta \operatorname{am} (u + iv) = \frac{\Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} (v, k') \cos \operatorname{am} (v, k') - ik^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} (v, k')}{\cos^2 \operatorname{am} (v, k') + k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} (v, k')}$$

De ces formules fondamentales on déduit de nombreuses relations, analogues aux formules trigonométriques, et que l'on peut, comme celles-ci, obtenir par des combinaisons algébriques des formules fondamentales. On a, par exemple pour $v = u$,

$$\sin \operatorname{am} 2u = \frac{2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} u},$$

$$\cos \operatorname{am} 2u = \frac{1 - 2 \sin^2 \operatorname{am} u + k^2 \sin^4 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} u},$$

$$\Delta \operatorname{am} 2u = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \operatorname{am} u + k^2 \sin^4 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} u}.$$

Dans le cas particulier $u = \frac{1}{2} \mathrm{K}$, $\operatorname{am} 2u = \operatorname{am} \mathrm{K} = \frac{1}{2} \pi$, on connaît les valeurs des premiers membres, et l'on retrouve les valeurs précédentes (page 121) :

$$\sin \operatorname{am} \frac{\mathrm{K}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{\mathrm{K}}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1 + k'}}, \quad \Delta \operatorname{am} \frac{\mathrm{K}}{2} = \sqrt{k'}.$$

De même, on obtient :

$$\sin \operatorname{am} \frac{i\mathrm{K}'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{i\mathrm{K}'}{2} = \sqrt{\frac{1 + k}{k}}, \quad \Delta \operatorname{am} \frac{i\mathrm{K}'}{2} = \sqrt{1 + k}.$$

On en tire :

$$\sin \operatorname{am} \left(\frac{\mathrm{K}}{2} \pm ik'\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - k'}}, \quad \cos \operatorname{am} \left(\frac{\mathrm{K}}{2} \pm i\mathrm{K}'\right) = \mp i \sqrt{\frac{k'}{1 - k'}},$$

$$\Delta \operatorname{am} \left(\frac{\mathrm{K}}{2} \pm i\mathrm{K}'\right) = \mp i \sqrt{k'};$$

$$\sin \operatorname{am} \left(\mathrm{K} \pm \frac{i\mathrm{K}'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \cos \operatorname{am} \left(\mathrm{K} \pm \frac{i\mathrm{K}'}{2}\right) = \mp i \sqrt{\frac{1 - k}{k}},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\left(\mathrm{K} \pm \frac{i\mathrm{K}'}{2}\right) = \sqrt{1-k};$$

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}'}{2}\right) = \sqrt{1 \pm i\,\frac{k'}{k}},\quad \cos\mathrm{am}\left(\frac{\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}'}{2}\right) = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{k \pm i\mathrm{K}'}{2}\right) = k'\sqrt{1 \mp i\,\frac{k}{k'}}.$$

Si l'on pose, pour abréger, $\mathrm{am}\,u = \varphi$, $\mathrm{am}\,v = \psi$, $\mathrm{am}\,(u+v) = \sigma$, $\mathrm{am}\,(u-v) = \tau$, on arrive facilement aux formules suivantes :

$$\sin\sigma + \sin\tau = \frac{2\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\sin\sigma - \sin\tau = \frac{2\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\cos\sigma + \cos\tau = \frac{2\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\cos\sigma - \cos\tau = -\frac{2\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\Delta\sigma + \Delta\tau = \frac{2\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\Delta\sigma - \Delta\tau = -\frac{2\,k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\sin\sigma\sin\tau = \frac{\sin^2\varphi - \sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\cos\sigma\cos\tau = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\psi\,\Delta^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\Delta\sigma\,\Delta\tau = \frac{\Delta^2\varphi - k^2\cos^2\varphi\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Il est facile de trouver d'autres formules analogues par la combinaison des précédentes. Ainsi, par exemple, on peut trouver :

$$(1 \pm \sin\sigma)(1 \pm \sin\tau) = 1 + \sin\sigma\sin\tau \pm (\sin\sigma + \sin\tau) = \frac{(\cos\psi \pm \sin\varphi\,\Delta\psi)^2}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

et ainsi de suite.

Avant d'abandonner cette matière, nous allons encore montrer comment l'addition et la multiplication des intégrales elliptiques peuvent être représentées par une construction géométrique. Soient donnés deux cercles dont l'un peut être intérieur à l'autre (fig. 28); C le centre du plus grand, $AC = R$ son rayon; D le centre du petit, $DT = r$ son rayon; enfin, $CD = h$ la distance des centres de ces deux cercles. D'un point quelconque P du cercle extérieur, on mène une droite tangente en T au cercle intérieur, et qui rencontre le premier de nouveau en Q. L'angle inscrit sous l'arc AP étant désigné par ω, l'angle inscrit sous l'arc APQ par σ, on a angle $ACP = 2\omega$, angle $ACQ = 2\sigma$. En outre, si l'on mène CU perpendiculaire à PQ, et CV parallèle à PQ, on a :

$$\text{angle } PCU = \sigma - \omega, \quad \text{angle } ACU = \sigma + \omega, \quad \text{angle } ACV = \frac{1}{2}\pi + \sigma + \omega,$$

$$\text{angle } DCV = \frac{1}{2}\pi - (\sigma + \omega).$$

De l'équation $DT = CU + DV$, il résulte :

$$r = R\cos(\sigma - \omega) + h\cos(\sigma + \omega),$$

ou bien :

$$r = (R + h)\cos\sigma\cos\omega + (R - h)\sin\sigma\sin\omega. \tag{44}$$

Si, en particulier, P coïncide avec A, on aura $\omega = 0$, et σ se change en l'angle constant ACB, que l'on peut appeler 2α. On a pour cet angle

$$r = (R + h)\cos\alpha,$$

d'où

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - r^2}}{R + h}, \quad \sqrt{1 - \frac{4Rh}{(R+h)^2 - r^2}\sin^2\alpha} = \frac{R - h}{R + h}.$$

Posons, pour abréger,

$$k^2 = \frac{4Rh}{(R+h)^2 - r^2},$$

divisons l'équation (44) par $R + h$, et substituons les valeurs

$$\frac{r}{R + h} = \cos\alpha, \quad \frac{R - h}{R + h} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha};$$

nous aurons ensuite la relation

$$\cos\alpha = \cos\sigma\cos\omega + \sin\sigma\sin\omega\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha},$$

laquelle n'est autre que la condition nécessaire à l'existence de l'équation

$$F(k, \sigma) - F(k, \omega) = F(k, \alpha),$$

ou

$$F(k, \sigma) = F(k, \alpha) + F(k, \omega).$$

A cette formule correspond, si k, α, ω sont donnés, la construction suivante de σ. On choisit R arbitrairement, et l'on détermine

$$h = \mathrm{R} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad r = (\mathrm{R} + h) \cos \alpha.$$

On trace ensuite les deux cercles, on prend angle ACP $= 2\omega$, et l'on mène la tangente PTQ : la moitié de l'angle ACQ sera σ.

On peut appliquer cette construction plusieurs fois de suite, pourvu que l'on mène comme le montre la fig. 29, les tangentes successives PP_1, P_1P_2, P_2P_3, etc., et que l'on représente par 2ω, $2\omega_1$, $2\omega_2$, etc., les angles ACP, ACP_1, ACP_2, etc., qui doivent être comptés dans le même sens de rotation. On a, en effet,

$$F(\omega_1) = F(\alpha) + F(\omega),$$
$$F(\omega_2) = F(\alpha) + F(\omega_1) = 2F(\alpha) + F(\omega),$$
$$F(\omega_3) = F(\alpha) + F(\omega_2) = 3F(\alpha) + F(\omega),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, en général,

$$F(\omega_n) = nF(\alpha) + F(\omega). \tag{45}$$

Dans le cas particulier $\omega = 0$, c'est-à-dire si l'on commence à mener les tangentes successives, non pas à partir du point P, mais à partir de A, on a $F(\omega_n) = nF(\alpha)$, ce qui donne la solution du problème de la multiplication.

Il est très-intéressant de savoir dans quelles circonstances la ligne brisé PP_1P_2,.... devient un polygone fermé, ce qui peut arriver par un ou plusieurs circuits autour du petit cercle. Si nous nous bornons au premier cas, comme étant le plus simple, et si nous supposons que le polygone puisse avoir n côtés, le point final P_n doit coïncider avec le point de départ P (pour le cas du quadrilatère de la figure P_4 coïncidera avec P). La condition est alors

$$\text{angle } ACP_n = 2\pi + \text{angle } ACP, \quad \text{ou} \quad \omega_n = \pi + \omega.$$

L'équation (45) devient alors :

$$F(\pi + \omega) = nF(\alpha) + F(\omega).$$

Mais, à cause de $F(\pi + \omega) = 2K + F(\omega)$, le terme $F(\omega)$ disparaît dans les deux membres, et il reste l'équation indépendante de ω :

$$2K = nF(\alpha).$$

Cela signifie géométriquement que : si les rayons satisfont avec la distance des centres à la condition précédente, le polygone se ferme, quelque soit le point initial P choisi. De l'équation ci-dessus il résulte

$$\alpha = \operatorname{am} \frac{2K}{n},$$

et il vient, d'après les formules précédentes pour $\cos \alpha$ et $\Delta\alpha$,

$$\frac{r}{R+h} = \cos \operatorname{am} \frac{2K}{n}, \quad \frac{R-h}{R+h} = \Delta \operatorname{am} \frac{2K}{n} \tag{46}$$

où

$$k^2 = \frac{4Rh}{(R+h)^2 - r^2}, \quad k'^2 = \frac{(R-h)^2 - r^2}{(R+h)^2 - r^2}.$$

Si l'on calcule pour une valeur donnée de n, ou bien $\cos \operatorname{am} \frac{2K}{n}$, ou bien $\Delta \operatorname{am} \frac{2K}{n}$, chacune des équations (46) renferme seulement les quantités R, r, h; elle exprime donc la condition qui existe entre ces trois quantités, lorsque le polygone de n côtés est en même temps un polygone composé de cordes et de tangentes.

Pour le triangle, le calcul se fait de la manière suivante :

De la formule générale d'addition

$$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \, \Delta\sigma = \cos \sigma,$$

ou

$$\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \, \Delta \operatorname{am} (u + v) = \cos \operatorname{am} (u + v),$$

on tire, pour $u = v = \frac{2}{3} K$,

$$\cos^2 \operatorname{am} \frac{2}{3} K - \sin^2 \operatorname{am} \frac{2}{3} K \, \Delta \operatorname{am} \frac{4}{3} K = \cos \operatorname{am} \frac{4}{3} K;$$

comme, en outre, $\frac{4}{3}K = 2K - \frac{2}{3}K$, et

$$\Delta \operatorname{am}(2K - w) = \Delta \operatorname{am} w, \qquad \cos \operatorname{am}(2K - w) = -\cos \operatorname{am} w,$$

on a

$$\cos^2 \operatorname{am} \frac{2}{3}K - \sin^2 \operatorname{am} \frac{2}{3}K\, \Delta \operatorname{am} \frac{2}{3}K = -\cos \operatorname{am} \frac{2}{3}K.$$

Si l'on transporte tous les termes dans le premier membre, et si l'on exprime le sinus au moyen du cosinus, on obtient facilement :

$$\left(1 + \cos \operatorname{am} \frac{2}{3}K\right)\left[\cos \operatorname{am} \frac{2}{3}K - \left(1 - \cos \operatorname{am} \frac{2}{3}K\right)\Delta \operatorname{am} \frac{2}{3}K\right] = 0,$$

et l'on peut supprimer le premier facteur, puisqu'il est différent de zéro. L'équation résultante peut se mettre sous la forme

$$\cos \operatorname{am} \frac{2}{3}K + \frac{\cos \operatorname{am} \frac{2}{3}K}{\Delta \operatorname{am} \frac{2}{3}K} = 1,$$

et elle donne, par la substitution des valeurs (46),

$$\frac{r}{R+h} + \frac{r}{R-h} = 1,$$

ou bien

$$h^2 = R(R - 2r),$$

relation connue, et que l'on doit à Euler.

Pour le cas de $n = 4$, on tire facilement de (46), en ayant égard aux valeurs connues de $\cos \operatorname{am} \frac{1}{2}K$, et $\Delta \operatorname{am} \frac{1}{2}K$ (p. 121)

$$\frac{r}{R+h} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \frac{R-h}{R+h} = \sqrt{k'},$$

et, par division,

$$\frac{r}{R-h} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}.$$

La première et la troisième équation donnent

$$\left(\frac{r}{R+h}\right)^2 + \left(\frac{r}{R-h}\right)^2 = 1,$$

ou bien

$$2(R^2 + h^2) r^2 = (R^2 - h^2)^2.$$

Enfin, pour le pentagone, le calcul est à-peu-près semblable à celui qui se rapporte au triangle. Si, dans la formule de Lagrange

$$\cos \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, v - \sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}\, v\, \Delta\, \mathrm{am}\,(u+v) = \cos \mathrm{am}\,(u+v)$$

on fait $u = v = \frac{4}{5}\mathrm{K}$, il vient :

$$\cos^2 \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} - \sin^2 \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K}\, \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{8}{5}\mathrm{K} = \cos \mathrm{am}\, \frac{8}{5}\mathrm{K}.$$

Mais on a $\frac{8}{5}\mathrm{K} = 2\mathrm{K} - \frac{2}{5}\mathrm{K}$; par conséquent, cette dernière formule devient

$$-\cos \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K} = \cos^2 \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} - \sin^2 \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K}\, \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K} = 1 - \sin^2 \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} \left(1 + \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\right.$$

$$= \cos^2 \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} \left(1 + \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}\right) - \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}.$$

On tire de là :

$$\sin \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} = \sqrt{\frac{1 + \cos \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}}{1 + \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}}},$$

$$\cos \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} = \sqrt{\frac{\Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K} - \cos \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}}{1 + \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}}}.$$

Mais, la formule de la soustraction,

$$\cos \mathrm{am}\,(u-v) = \cos \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, v + \sin \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}\, v\, \Delta\, \mathrm{am}\,(u-v),$$

nous donne, en y faisant $u = \frac{4}{5}\mathrm{K}$, $v = \frac{2}{5}\mathrm{K}$,

$$\cos \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K} = \cos \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} \cos \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K} + \sin \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K} \sin \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K}\, \Delta\, \mathrm{am}\, \frac{2}{5}\mathrm{K};$$

substituant dans cette dernière les valeurs ci-dessus de $\sin \mathrm{am}\, \frac{4}{5}\mathrm{K}$,

$\cos \operatorname{am} \frac{4}{5} K$, on trouve, en écrivant, pour abréger α au lieu de $\operatorname{am} \frac{2}{5} K$,

$$\cos \alpha = \cos \alpha \sqrt{\frac{\Delta\alpha - \cos \alpha}{1 + \Delta\alpha}} + \Delta\alpha \, \sin \alpha \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 + \Delta\alpha}};$$

remplaçant ensuite le sinus en fonction du cosinus, et tenant compte des formules (46), on a la formule relative au pentagone (1) :

$$r(R+h)\sqrt{2R} = r(R+h)\sqrt{R-h-r} + (R-h)(R+h+r)\sqrt{R+h-r}.$$

Les formules relatives aux polygones d'un plus grand nombre de côtés sont très-compliquées (2).

V. Développements des fonctions elliptiques en séries.

A. D'après ce que nous avons vu (36) au chapitre II, la fonction $\sin \operatorname{am} w$ devient infinie pour $u = iK'$, et elle reste synectique à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à K'. En vertu du théorème de Mac-Laurin étendu aux variables imaginaires, $\sin \operatorname{am} w$ peut être développée en une série convergente procédant suivant les puissances de w, pourvu que le module de w soit plus petit que K'. Or, à cause de la relation $\sin \operatorname{am}(-w) = -\sin \operatorname{am} w$, cette série ne peut contenir que des puissances impaires de w, et l'on a :

$$\sin \operatorname{am} w = \left(\frac{d \sin \operatorname{am} w}{dw}\right)_0 \frac{w}{1} + \left(\frac{d^3 \sin \operatorname{am} w}{dw^3}\right)_0 \frac{w^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \left(\frac{d^5 \sin \operatorname{am} w}{dw^5}\right)_0 \frac{w^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

Les différentiations contenues dans cette formule s'effectuent au moyen des équations

$$\frac{d \sin \operatorname{am} w}{dw} = \cos \operatorname{am} w \, \Delta \operatorname{am} w,$$

---

(1) J'ai cru utile de donner les développements du calcul pour le pentagone : M. Schloemilch a seulement indiqué la formule sans la démontrer. (J. G.)

(2) La formule relative au triangle a été trouvée d'abord par Euler (*Nova commen. Petropol.*, XI, p. 114). Nicol. Fuss a donné la représentation géométrique pour les cas $n = 4, 5, 6, 7, 8$ (*Nova acta Petropol.* XIII, an. 1798, p. 166 à 189). Jacobi a montré la liaison entre cette question et la théorie des fonctions elliptiques dans son mémoire « *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie.* » *Journal de Crelle*, III, p. 376, mémoire que l'on pourra comparer avec un travail de Richelot sur le même objet. (*Journal de Crelle*, t. XXXVIII, p. 353.)

$$\frac{d \cos \operatorname{am} w}{dw} = - \sin \operatorname{am} w \, \Delta \operatorname{am} w,$$

$$\frac{d \, \Delta \operatorname{am} w}{dw} = - k^2 \sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w.$$

On a alors :

$$\frac{d^2 \sin \operatorname{am} w}{dw^2} = - (1 + k^2) \sin \operatorname{am} w + 2k^2 \sin^3 \operatorname{am} w,$$

$$\frac{d^3 \sin \operatorname{am} w}{dw^3} = [- (1 + k^2) + 6 k^2 \sin^2 \operatorname{am} w] \cos \operatorname{am} w \, \Delta \operatorname{am} w,$$

etc. ;
elles donnent, pour $w = 0$, les coefficients de la série précédente.

Mais, il est plus simple de poser

$$\sin \operatorname{am} w = A_1 w + A_3 w^3 + A_5 w^5 + \cdots$$

puis de substituer cette expression dans la formule relative à $\dfrac{d^2 \sin \operatorname{am} w}{dw^2}$, et ensuite d'égaler les coefficients de w, w^3, etc., des deux membres. Le résultat sera

$$\left.\begin{aligned} \sin \operatorname{am} w = w - \frac{1 + k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^3 + \frac{1 + 14 k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} w^5 \\ - \frac{1 + 135 k^2 + 135 k^4 + k^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} w^7 + \frac{1 + 1228 k^2 + 5478 k^4 + 1228 k^6 + k^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} w^9 - \cdots \end{aligned}\right\} (47)$$

$$\operatorname{mod} w < K'.$$

Pour $k = 0$, on a $\sin \operatorname{am} w = \sin w$, $K' = \infty$, et la série devient identique avec la série convergente connue du sinus; pour $k = 1$, et $K' = \dfrac{1}{2}\pi$, on trouve le développement connu de la fonction $\dfrac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$.

Comme la fonction $\cos \operatorname{am} w$ reste synectique dans l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon K' autour de l'origine, il existe aussi pour $\cos \operatorname{am} w$ un développement en série : mais, à cause de $\cos \operatorname{am} (- w) = \cos \operatorname{am} w$, ce développement ne peut renfermer que des puissances paires de w. Quant aux coefficients de ce développement, on les déduit très-simplement de ceux de la série précédente, en se servant de la relation

$$\sin^2 \operatorname{am} w + \cos^2 \operatorname{am} w = 1.$$

On obtient ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\cos \operatorname{am} w = 1 - \frac{1}{1\cdot 2} w^2 + \frac{1+4k^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} w^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} w^6 \\ + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} w^8 - \cdots,\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

$$\operatorname{mod} w < K'.$$

De même, pour la fonction $\Delta \operatorname{am} w$, laquelle reste synectique à l'intérieur d'un cercle décrit autour de l'origine avec le rayon K', on a un développement procédant suivant les puissances paires de w. Au moyen de la relation

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} w + \Delta^2 \operatorname{am} w = 1,$$

on trouve facilement :

$$\left.\begin{aligned}\Delta \operatorname{am} w = 1 - \frac{k^2}{1\cdot 2} w^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} w^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} w^6 \\ + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} w^8 - \cdots,\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

$$\operatorname{mod} w < K'.$$

La différentiation ou l'intégration par rapport à w permettent de déduire des séries précédentes beaucoup d'autres développements; ainsi, par exemple,

$$\cos \operatorname{am} w\, \Delta \operatorname{am} w = 1 - \frac{1+k^2}{1\cdot 2} w^2 + \frac{1+14k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} w^4 - \cdots, \quad (50)$$

$$\sin \operatorname{am} w\, \Delta \operatorname{am} w = w - \frac{1+4k^2}{1\cdot 2\cdot 3} w^3 + \frac{1+44k^2+16k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} w^5 - \cdots, \quad (51)$$

$$\sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w = w - \frac{4+k^2}{1\cdot 2\cdot 3} w^3 + \frac{16+44k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} w^5 - \cdots, \quad (52)$$

où l'on doit toujours avoir $\operatorname{mod} w < K'$. Si l'on observe encore que

$$\frac{d \operatorname{am} w}{dw} = \Delta \operatorname{am} w, \quad \text{ou bien} \quad \operatorname{am} w = \int_0^w \Delta \operatorname{am} w\, dw,$$

il vient :

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{am} w = w - \frac{k^2}{1\cdot 2\cdot 3}w^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}w^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}w^7 \\ + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}w^9 - \cdots,\end{aligned}\right\}(53)$$

$$\operatorname{mod} w < K'.$$

Il est facile de voir comment l'on peut développer en séries, au moyen de ces formules fondamentales, des fonctions plus compliquées, telles que $\sin^2 \operatorname{am} w$, $\operatorname{tg} \operatorname{am} w$, et d'autres analogues. Nous allons en donner un exemple.

La fonction

$$f(w) = \frac{w}{\sin \operatorname{am} w},$$

prend, pour $w=0$, la valeur $f(0)=1$; elle reste synectique depuis $w=0$, jusqu'à ce que $\sin \operatorname{am} w$ s'annule pour la première fois. Or, on a $\sin \operatorname{am} w = 0$, pour $w = 2K$, et pour $w = i\cdot 2K'$. Le développement en série, si $K < K'$, sera possible sous la condition $\operatorname{mod} w < 2K$; dans le cas contraire, si $K' < K$, on devra prendre $\operatorname{mod} w < 2K'$. Ces deux cas sont faciles à séparer. En effet, si $k^2 < \frac{1}{2}$, ou $2k^2 < 1$, il s'en suit :

$$k^2 < k'^2, \quad \Delta(k,\varphi) > \Delta(k',\varphi), \quad \frac{1}{\Delta(k,\varphi)} < \frac{1}{\Delta(k',\varphi)}, \quad \text{et} \quad K < K'.$$

Pour $k^2 > \frac{1}{2}$, on a, par des considérations analogues, $K' < K$.

La fonction précédente jouit encore de la propriété que $f(-w) = f(w)$; c'est donc une fonction paire, et elle donne, par suite, un développement en série de la forme suivante :

$$\frac{w}{\sin \operatorname{am} w} = 1 + a_2 w^2 + a_4 w^4 + a_6 w^6 + \cdots$$

Si l'on multiplie cette équation par (47), et si l'on égale les coefficients de w^2, w^4, w^6, etc., des deux membres, on obtient successivement les valeurs de a_2, a_4, a_6, etc. On arrive facilement au résultat suivant :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sin \operatorname{am} w} = \frac{1}{w} + \frac{1+k^2}{1\cdot 2\cdot 3}w + \frac{7-22k^2+7k^4}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}w^3 \\ + \frac{31-15k^2-15k^4+31k^6}{3\cdot 1\cdot 2\ldots 7}w^5 + \cdots,\end{aligned}\right\}(54)$$

où les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\text{pour } k < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{mod}\, w < 2K,$$

$$\text{»} \quad k > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{mod}\, w > 2K'.$$

Dans le cas particulier de $k=0$, on retrouve le développement connu de coséc w; pour $k=1$, on a le développement de $\frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}}$ (1).

B. On peut encore exprimer les fonctions elliptiques d'une autre manière par des quotients de deux séries. On y arrive de la manière suivante :

De l'intégrale indéfinie

$$\int \left(k^2 z^2 - \frac{1}{z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{z},$$

on tire facilement :

$$\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \int_z^1 \left(k^2 z^2 - \frac{1}{z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \text{l}.\, z,$$

et, pour $z = \sin \text{am}\, w$,

$$\int_w^K dw \int_w^K \left((k^2 \sin^2 \text{am}\, w - \frac{1}{\sin^2 \text{am}\, w}\right) dw = \text{l}.\, \sin \text{am}\, w.$$

On a, en outre,

$$\int_w^K k^2 \sin^2 \text{am}\, w\, dw = \int_0^K k^2 \sin^2 \text{am}\, w\, dw - \int_0^w k^2 \sin^2 \text{am}\, w\, dw$$

$$= K - E - \int_0^w k^2 \sin^2 \text{am}\, w\, dw,$$

---

(1) Les séries précédentes sont dues à Jacobi, qui n'a pas déterminé les limites entre lesquelles elles subsistent (*Fundamenta nova Theoriae funct. ellipt.*, p. 114). M. Hermite a maintenu dans sa *théorie des fonctions elliptiques*, que les développements en séries de sin am w, cos am w, Δ am w sont liés à la condition que w soit compris entre -1 et $+1$. M. Schloemilch observe que c'est une erreur, comme le prouvent les cas particuliers $k=0$, $k=1$.

où l'on trouve la valeur K — E au moyen de la substitution am $w = \varphi$; il s'en suit :

$$\int_w^K dw \int_w^K k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, dw = (K - E)(K - w) - \int_w^K dw \int_0^w k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, dw$$

$$= (K - E)(K - w) - \int_0^K dw \int_0^w k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, dw + \int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, dw.$$

La première intégrale double du second membre a une valeur constante G, dont nous ne nous occupons pas maintenant; nous la comptons avec (K — E) (K — w), en posant :

$$(K - E)\, K - G = a, \qquad K - E = -\, b,$$

et il vient :

$$\mathrm{l.} \sin \mathrm{am}\, w = a + bw + \int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, dw - \int_w^K dw \int_w^K \frac{dw}{\sin^2 \mathrm{am}\, w} \cdot \quad (55)$$

D'un autre côté, de l'intégrale

$$\int \left(k^2 z^2 - \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = -\, \frac{z \sqrt{1 - k^2 z^2}}{\sqrt{1 - z^2}},$$

on tire facilement l'équation

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \int_0^z \left(k^2 z^2 - \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \mathrm{l.} \sqrt{1 - z^2}$$

pour $z = \sin \mathrm{am}\, w$, cette équation se change en la suivante :

$$\mathrm{l.} \cos \mathrm{am}\, w = \int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, w\, dw - \int_0^w dw \int_0^w \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, w}{\cos^2 \mathrm{am}\, w}\, dw. \quad (56)$$

Enfin la formule

$$\int \left(z^2 - \frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = -\, \frac{z \sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - k^2 z^2}}$$

nous donne :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \int_0^z \left(k^2 z^2 - \frac{k^2 (1 - z^2)}{1 - k^2 z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \mathrm{l.} \sqrt{1 - k^2 z}$$

pour $z = \sin \operatorname{am} w$, il vient :

$$1. \Delta \operatorname{am} w = \int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw - \int_0^w dw \int_0^w \frac{k^2 \cos^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w} dw. \quad (57)$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$p = a + bw - \int_w^{\mathrm{K}} dw \int_w^{\mathrm{K}} \frac{dw}{\sin^2 \operatorname{am} w}, \quad q = -\int_0^w dw \int_0^w \frac{\Delta^2 \operatorname{am} w}{\cos^2 \operatorname{am} w} dw,$$

$$r = -\int_0^w dw \int_0^w \frac{k^2 \cos^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w} dw, \quad s = -\int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw,$$

les formules (55), (56) et (57) nous donnent les suivantes :

$$\sin \operatorname{am} w = \frac{e^p}{e^s}, \quad \cos \operatorname{am} w = \frac{e^q}{e^s}, \quad \Delta \operatorname{am} w = \frac{e^r}{e^s}. \quad (58)$$

D'après cela, *les trois fonctions elliptiques principales peuvent être considérées comme des fonctions fractionnaires à dénominateurs égaux.* Nous nous occuperons d'abord de ce dénominateur.

Si le chemin d'intégration de w est tel que $\sin \operatorname{am} w$ reste synectique le long de ce chemin, alors, comme on sait, s est aussi une fonction synectique de w; il en est de même de e^s. Si, au contraire, le chemin d'intégration passe par des points pour lesquels $\sin^2 \operatorname{am} w$ devient infinie, on peut remplacer ce chemin d'intégration par un autre chemin qui ne passe pas par ces points, pourvu que l'on ajoute les valeurs de l'intégrale qui correspondent aux circuits des points d'exception qui en résultent. Alors s se subdivise en une partie synectique et une autre asynectique.

Or, $\sin^2 \operatorname{am} w$ devient infinie pour

$$w = 2m \mathrm{K} + i(2n + 1) \mathrm{K}',$$

m et n étant des nombres entiers quelconques. Désignons, pour abréger, cette valeur par c, et supposons que le point d'exception en question soit entouré d'un contour quelconque très-petit; pour tous les points de ce contour, w est de la forme $w = c + x + iy = c + z$.

On a alors :

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} w = k^2 \sin^2 \operatorname{am} (c + z) = k^2 \sin^2 \operatorname{am} (i\mathrm{K}' + z) = \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} z}.$$

Pour un contour suffisamment petit, mod z reste compris à l'intérieur des limites requises pour l'existence de l'équation (54), et il vient :

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} w = \frac{1}{z^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2+k^4}{15} z^2 + \cdots,$$

ou bien, en vertu de la valeur de z,

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} w = \frac{1}{(w-c)^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2+k^4}{15}(w-c)^2 + \cdots.$$

Il suit de là un résultat de la forme suivante :

$$\int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw = -\,\mathrm{l}.(c-w) + \mathrm{W},$$

où W représente la somme d'une série convergente qui s'annule pour $w=c$. Si l'on suppose ce calcul effectué pour tous les points d'exception c_1, c_2, etc., et si l'on désigne par $\mathrm{f}(w)$ la partie synectique de s, il vient :

$$s = \mathrm{f}(w) + \mathrm{l}(c_1 - w) + \mathrm{l}(c_2 - w) + \cdots$$
$$- \mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 - \mathrm{W}_3 - \cdots,$$

et

$$e^s = (c_1 - w)(c_2 - w) \cdots e^{\mathrm{f}(w) - \mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 - \cdots}.$$

Quoique s ne soit pas synectique, et devienne infinie, à cause des logarithmes, pour $w = c_1$, $w = c_2$, etc., cependant la fonction e^s s'annule en ces points, et elle est synectique. Il s'en suit que e^s peut être développée pour toute valeur de w, en une série procédant suivant les puissances croissantes de w.

Comme on l'aura remarqué, les conclusions précédentes reposent sur cette circonstance que la fonction $k^2 \sin^2 \operatorname{am} w$ prend, dans le voisinage d'une valeur particulière $w = c$, pour laquelle elle est infinie, la forme

$$\frac{1}{(w-c)^2} + \alpha + \beta w^2 + \gamma w^4 + \cdots;$$

en d'autres termes, $k^2 \sin^2 \operatorname{am} w$ devient, pour $w = c$, une quantité infinie du même ordre que $\frac{1}{(w-c)^2}$. La même propriété a lieu pour les trois fonctions suivantes :

$$\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} w}, \quad \frac{\Delta^2 \operatorname{am} w}{\cos^2 \operatorname{am} w}, \quad \frac{k^2 \cos^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w},$$

seulement ici les valeurs de c sont autres que ci-dessus. La suite des raisonnements reste la même, c'est-à-dire que p, q, r, deviennent infinis à cause des logarithmes qu'ils renferment; mais e^p, e^q, e^r restent synectiques, et peuvent être développés en séries.

La détermination des coefficients des séries ne présente aucune difficulté. On trouve d'abord, d'après (47),

$$\sin^2 \text{am}\, w = w^2 - \frac{1+k^2}{3} w^4 + \frac{2+13k^2+2k^4}{5\cdot 9} w^6 - \cdots\cdots;$$

ensuite, par deux intégrations successives, on a :

$$s = -\frac{k^2}{3\cdot 4} w^4 + \frac{k^2+k^4}{3\cdot 5\cdot 6} w^6 - \frac{2k^2+13k^4+2k^6}{5\cdot 7\cdot 8\cdot 9} w^8 + \cdots\cdot$$

Enfin, la série exponentielle donne :

$$e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdot$$

$$= 1 - \frac{k^2}{3\cdot 4} w^4 + \frac{k^2+k^4}{3\ 5\cdot 6} w^6 - \frac{8k^2+17k^4+8k^6}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9} w^8 + \cdots\cdot$$

De (58) il résulte en outre, que les développements de e^p, e^q, e^r, s'obtiennent en multipliant e^s successivement par les développements de $\sin \text{am}\, w$, $\cos \text{am}\, w$, $\Delta \text{am}\, w$. On trouve ainsi les résultats suivants. Au lieu des équations (58), écrivons :

$$\sin \text{am}\, w = \frac{w - \lambda_3 w^3 + \lambda_5 w^5 - \cdots\cdot}{1 - \varkappa_4 w^4 + \varkappa_6 w^6 - \cdots\cdot}, \qquad (59)$$

$$\cos \text{am}\, w = \frac{1 - \mu_2 w^2 + \mu_4 w^4 - \cdots\cdot}{1 - \varkappa_4 w^4 + \varkappa_6 w^6 - \cdots\cdot}, \qquad (60)$$

$$\Delta \text{am}\, w = \frac{1 - \nu_2 w^2 + \nu_4 w^4 - \cdots\cdot}{1 - \varkappa_4 w^4 + \varkappa_6 w^6 - \cdots\cdot}; \qquad (61)$$

ces formules doivent exister pour toutes les valeurs de w; les coefficients se déterminent par les équations suivantes, dans lesquelles, pour abréger, nous désignons par $m!$ le produit $1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdot m$:

$4!\varkappa_4 = 2k^2,$

$6!\varkappa_6 = 8\,(k^2+k^4),$

$8!\varkappa_8 = 32\,(k^2+k^6)+68k^6,$

$$10!\varkappa_{10} = 128\,(k^2+k^8)+480\,(k^4+k^6),$$
$$12!\varkappa_{12} = 512\,(k^2+k^{10})+3008\,(k^4+k^8)+5400k^6,$$

. . . .

$$3!\lambda_3 = 1+k^2,$$
$$5!\lambda_5 = 1+k^4+4k^2,$$
$$7!\lambda_7 = 1+k^6+9\,(k^2+k^4),$$
$$9!\lambda_9 = 1+k^8+16\,(k^2+k^6)-6k^4,$$
$$11!\lambda_{11} = 1+k^{10}+25\,(k^2+k^8)-494\,(k^4+k^6),$$

. . . .

$$2!\mu_2 = 1,$$
$$4!\mu_4 = 1+2k^2,$$
$$6!\mu_6 = 1+6k^2+8k^4,$$
$$8!\mu_8 = 1+12k^2+60k^4+32k^6,$$
$$10!\mu_{10} = 1+20k^2+348k^4+448k^6+128k^8,$$
$$12!\mu_{12} = 1+30k^2+2372k^4+4600k^6+2880k^8+512k^{10},$$

. . . .

$$2!\nu_2 = k^2,$$
$$4!\nu_4 = 2k^2+k^4,$$
$$6!\nu_6 = 8k^2+6k^4+k^6,$$
$$8!\nu_8 = 32k^2+60k^4+12k^6+k^8,$$
$$10!\nu_{10} = 128k^2+448k^4+348k^6+20k^8+k^{10},$$
$$12!\nu_{12} = 512k^2+2880k^4+4600k^6+2372k^8+30k^{10}+k^{12},$$

. . . .

Si l'on fait, en particulier, $k=1$, il vient :

$$\sin\operatorname{am}(w,1) = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}, \quad \cos\operatorname{am}(w,1) = \Delta\operatorname{am}(w,1) = \frac{2}{e^w + e^{-w}},$$

$$e^q = e^{-\frac{1}{2}w^2}, \quad e^s = \frac{1}{2}\left(e^w + e^{-w}\right) e^{-\frac{1}{2}w^2},$$

et d'après la deuxième formule (58),

$$\cos\operatorname{am}(w,1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}w^2}}{\frac{1}{2}\left(e^w + e^{-w}\right) e^{-\frac{1}{2}w^2}},$$

ce qui correspond au développement en série (60).

Les développements de sin am w, cos am w, Δ am w en quotients de séries sont dus à Weierstrass, qui a désigné les fonctions e^s, e^p, e^q, e^r par les notations $\mathrm{A}l\,(w)$, $\mathrm{A}l\,(w)_1$, $\mathrm{A}l\,(w)_2$, $\mathrm{A}l\,(w)_3$, et leur a donné le nom de *fonctions abéliennes* (1).

VI. Séries périodiques et séries de fractions pour les fonctions elliptiques les plus simples.

Comme on sait par les recherches sur les séries périodiques, toute fonction d'une variable réelle qui reste finie entre les limites $u = 0$, $u = h$, peut s'exprimer sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cos\frac{\pi u}{h} + \mathrm{A}_2 \cos\frac{2\pi u}{h} + \mathrm{A}_3 \cos\frac{3\pi u}{h} + \cdots,$$

$$\mathrm{B}_1 \sin\frac{\pi u}{h} + \mathrm{B}_2 \sin\frac{2\pi u}{h} + \mathrm{B}_2 \sin\frac{3\pi u}{h} + \cdots,$$

lorsque u reste compris dans l'intervalle de 0 à h. La première série reste invariable lorsque l'on remplace u par $-u$, ou par $u + 2h$, $u + 4h$, $u + 6h$, etc.; elle forme donc une fonction paire périodique de u, et la période est $2h$.

Si la fonction que l'on transforme en la première série, est elle-même une fonction périodique paire dont la période est $2h$, son développement en série subsiste non-seulement de $u = 0$ à $u = h$, mais pour toute valeur réelle de u. Par des considérations tout-à-fait semblables, on conclut qu'une fonction impaire, dont l'indice est $2h$, peut être développée, pour toutes les valeurs réelles de u, en une série de la deuxième espèce. Comme les fonctions elliptiques ont des périodes réelles, les séries précédentes peuvent parfaitement servir à développer ces fonctions au moins pour toutes les valeurs réelles de u. On pourrait, par exemple pour $h = 2\mathrm{K}$, développer le cosinus amplitude en une série de cosinus, le sinus amplitude en une série de sinus. La seule difficulté que l'on ren-

(1) *Journal de Crelle*, t. LII, p. 357. Weierstrass a fait voir que ces fonctions satisfont à des équations linéaires aux dérivées partielles. M. Hermite a exposé plusieurs propriétés de ces fonctions dans sa « *Note sur la théorie des fonctions elliptiques* » insérée dans le *Traité élémentaire de Calcul différentiel de Lacroix*, t. II, p. 457. J. G.

contre est la détermination des coefficients A_n et B_n. En effet, en désignant par $F(u)$ la fonction elliptique donnée, on a alors à trouver les valeurs des intégrales

$$\int_0^{2K} F(u) \cos \frac{n\pi u}{2K} du, \quad \text{et} \quad \int_0^{2K} F(u) \sin \frac{n\pi u}{2K} du,$$

ou la valeur d'une intégrale

$$\int_0^{2K} F(u) e^{i\mu u} du, \qquad \mu = \frac{n\pi}{2K}.$$

Nous allons montrer comme cela peut se faire.

Soit une variable imaginaire $w = u + iv$, et $F(w)$ une fonction monodrome de w, laquelle dans l'intérieur d'un rectangle construit sur les côtés $2K$ et $2K'$ ne soit infinie que deux fois, pour $w = iK'$ et $w = 2K + iK'$; supposons en outre que cette fonction jouisse des propriétés suivantes :

$$F(w + 2K) = \varepsilon_1 F(w), \qquad F(w + i \cdot 2K') = \varepsilon_2 F(w),$$

ε_1, ε_2, désignant des unités réelles, positives ou négatives.

Considérons l'intégrale

$$\int F(w)\, e^{i\mu w} dw,$$

et prenons comme chemin d'intégration le périmètre d'un rectangle OACB construit sur les côtés $OA = 2K$, $OB = 2K'$ (fig. 30), et entourons de demi-cercles les points d'exception D et E, qui représentent les valeurs iK' et $2K + iK'$. Pour ce chemin qui ne passe pas par les points D et E, la valeur de l'intégrale est nulle, et l'on a :

$$\begin{aligned} I(OA) + I(AQ_0) + I(Q_0Q_1Q_2) + I(Q_2C) + I(CB) + I(BP_0) \\ + I(P_0P_1P_2) + I(P_2O) = 0. \end{aligned}$$

Si nous supposons les rayons des demi-cercles égaux, $DP = EQ = r$, si nous les faisons converger vers zéro, et que nous posions, pour abréger,

$$\lim \left\{ I(P_0P_1P_2) + I(Q_0Q_1Q_2) \right\} = S,$$

il reste, en réduisant $I(AQ_0)$ et $I(Q_2C)$, en même temps que $I(BP_0)$ et $I(P_2O)$,

$$I(OA) + I(AC) + I(CB) + I(BO) + S = 0.$$

Dans la première intégrale faisons $w = u$, dans la deuxième $w = 2K + iv$, dans la troisième $w = u + i \cdot 2K'$, dans la quatrième $w = iv$, il viendra

$$\int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du + i e^{i.2\mu K} \int_0^{2K'} F(2K + iv)\, e^{-\mu v}\, dv$$

$$- e^{-2\mu K'} \int_0^{2K} F(u + i \cdot 2K')\, e^{i\mu u}\, du - i \int_0^{2K'} F(iv)\, e^{-\mu v}\, dv + S = 0,$$

ou bien, en vertu des propriétés de F,

$$(1 - \varepsilon_2 e^{-2\mu K'}) \int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du + i(\varepsilon_1 e^{i.2\mu K} - 1) \int_0^{2K'} F(iv)\, e^{-\mu v}\, dv + S = 0.$$

La quantité S s'obtient en introduisant dans $I(P_0P_1P_2)$ l'angle $P_1DP = \theta$, au moyen de la formule $w = iK' + re^{i\theta}$, et dans la seconde intégrale $I(Q_0Q_1Q_2)$, l'angle $Q_1EQ = \theta$, au moyen de la relation $w = 2K + iK' - re^{i\theta}$.

En posant, pour abréger, $re^{i\theta} = \rho$, on a :

$$I(P_0P_1P_2) + I(Q_0Q_1Q_2) = i \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} F(iK' + \rho)\, e^{i\mu(iK' + \rho)}\, \rho d\theta$$

$$- i \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} F(2K + iK' - \rho)\, e^{i\mu(2K + iK' - \rho)}\, \rho d\theta.$$

Si l'on fait décroître ρ indéfiniment, il vient, à cause de la relation $F(2K + w) = \varepsilon_1 F(w)$,

$$S = \lim \left\{ - i e^{-\mu K'} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho F(iK' + \rho)\, e^{i\mu\rho}\, d\theta + i\varepsilon_1 e^{-\mu K' + i.2\mu K} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho F(iK' - \rho)\, e^{-i\mu\rho}\, d\theta \right\}.$$

Si l'on remarque encore que $e^{i.2\mu K} = e^{i n\pi} = \cos n\pi$, on a finalement l'équation suivante :

$$\left.\begin{aligned} &(1 - \varepsilon_2 e^{-2\mu K'}) \int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - i(1 - \varepsilon_1 \cos n\pi) \int_0^{2K'} F(iv)\, e^{-\mu v}\, dv = \\ &= i e^{-\mu K'} \lim \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho\, [F(iK' + \rho)\, e^{i\mu\rho} - \varepsilon_1 \cos n\pi\, F(iK' - \rho)\, e^{-i\mu\rho}]\, d\theta, \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

laquelle conduit immédiatement aux intégrales cherchées, comme nous allons le voir.

a. Prenons d'abord $F(w) = \sin \operatorname{am} w$; on a

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = +1, \quad F(iv) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(v, k'),$$

$$\lim [\rho F(iK' + \rho)] = \lim \left[\frac{\rho}{k \sin \operatorname{am} \rho}\right] = \frac{1}{k},$$

$$\lim [\rho F(iK' - \rho)] = \lim \left[\frac{-\rho}{k \sin \operatorname{am} \rho}\right] = -\frac{1}{k},$$

l'équation (62) se transforme alors en la suivante :

$$(1 - e^{-2\mu K'}) \int_0^{2K} \sin \operatorname{am} u \, e^{i\mu u} \, du + (1 + \cos n\pi) \int_0^{2K'} \operatorname{tg} \operatorname{am}(v, k') \, e^{-\mu v} dv =$$

$$= i \, \frac{\pi (1 - \cos n\pi)}{k} e^{-\mu K'}.$$

En égalant les parties imaginaires des deux membres, et remplaçant μ par sa valeur, on a :

$$\left(1 - e^{-\frac{n\pi K'}{K}}\right) \int_0^{2K} \sin \operatorname{am} u \sin \frac{n\pi u}{2K} du = \frac{\pi (1 - \cos n\pi)}{k} e^{-\frac{n\pi K'}{2K}};$$

si l'on pose, pour abréger,

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q,$$

on obtient facilement l'équation

$$\frac{2}{2K} \int_0^{2K} \sin \operatorname{am} u \sin \frac{n\pi u}{2K} du = \frac{\pi (1 - \cos n\pi)}{kK} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n},$$

dont le premier membre est le coefficient B_n, si $\sin \operatorname{am} u$ peut être développé suivant les sinus des multiples de $\frac{\pi u}{2K}$. La série cherchée est

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{2\pi}{kK} \left\{ \frac{\sqrt{q}}{1 - q} \sin \frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1 - q^3} \sin \frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1 - q^5} \sin \frac{5\pi u}{2K} + \cdots \right\}, \quad (63)$$

et elle subsiste pour toute valeur réelle de u.

En remplaçant u par $K - u$, on obtient encore la formule

$$\frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{kK}\left\{ \frac{\sqrt{q}}{1-q} \cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \cdots \right\}. \quad (64)$$

b. Soit ensuite $f(w) = \cos \operatorname{am} w$; par suite,

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad F(iv) = \operatorname{séc} \operatorname{am}(v, k'),$$

$$\lim [\rho F(iK' + \rho)] = \lim \left\{ -\frac{i\Delta \operatorname{am} \rho}{k} \cdot \frac{\rho}{\sin \operatorname{am} \rho} \right\} = -\frac{i}{k},$$

$$\lim [\rho F(iK' - \rho)] = \lim \left\{ +\frac{i\Delta \operatorname{am} \rho}{k} \cdot \frac{\rho}{\sin \operatorname{am} \rho} \right\} = +\frac{i}{k};$$

la formule générale (62) donne alors

$$(1 + e^{-2\mu K'}) \int_0^{2K} \cos \operatorname{am} u \, e^{i\mu u} du - i(1 + \cos n\pi) \int_0^{2K'} \operatorname{séc} \operatorname{am}(v, k') e^{-\mu v} dv =$$

$$= \frac{\pi(1 - \cos n\pi)}{k} e^{-\mu K'}.$$

En égalant les parties réelles des deux membres, on obtient la formule

$$\frac{2}{2K} \int_0^{2K} \cos \operatorname{am} u \cos \frac{n\pi u}{2K} du = \frac{\pi(1 - \cos n\pi)}{kK} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 + q^n},$$

qui détermine le coefficient A_n du développement de $\cos \operatorname{am} u$ en fonction des cosinus des multiples de $\frac{\pi u}{2K}$. D'après cela, on a la série suivante :

$$\cos \operatorname{am} u = \frac{2\pi}{kK}\left\{ \frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} + \cdots \right\}, \quad (65)$$

qui subsiste pour toutes les valeurs réelles de u.

Si l'on remplace u par $K - u$, il vient :

$$k' \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{kK}\left\{ \frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \cdots \right\}. \quad (66)$$

c. Posons en troisième lieu $F(w) = \Delta \operatorname{am} w$; par conséquent,

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad F(iv) = \frac{\Delta \operatorname{am}(v, k')}{\cos \operatorname{am}(v, k')},$$

$$\lim\,[\rho F(iK'+\rho)] = \lim \left\{ -i\cos\operatorname{am}\rho \cdot \frac{\rho}{\sin\operatorname{am}\rho} \right\} = -i,$$

$$\lim\,[\rho F(iK'-\rho)] = \lim \left\{ +i\cos\operatorname{am}\rho \cdot \frac{\rho}{\sin\operatorname{am}\rho} \right\} = +i;$$

l'équation générale (62) se change alors en la suivante :

$$(1+e^{-2\mu K'})\int_0^{2K} \Delta\operatorname{am} u\, e^{i\mu u}\,du - i(1-\cos n\pi)\int_0^{2K'} \frac{\Delta\operatorname{am}(v,k')}{\cos\operatorname{am}(v,k')}\, e^{-\mu v}\,dv =$$

$$= \pi(1+\cos n\pi)\,e^{-\mu K'}.$$

L'égalité des parties réelles des deux membres nous donne :

$$\frac{2}{2K}\int_0^{2K} \Delta\operatorname{am} u \cos\frac{n\pi u}{2K}\,du = \frac{\pi(1+\cos n\pi)}{K}\cdot\frac{\sqrt{q^n}}{1+q^n};$$

par suite, on a le développement en série

$$\Delta\operatorname{am} u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left\{ \frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots \right\}. \quad (67)$$

En outre, si l'on remplace u par $K-u$, il vient :

$$\frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left\{ \frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots \right\}. \quad (68)$$

A cause de la relation

$$\operatorname{am} u = \int_0^u \Delta\operatorname{am} u\,du,$$

on tire encore de la formule (67)

$$\operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2K} + 2\left\{ \frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots \right\} \quad (69)$$

d. La fonction paire $F(w) = \sin^2\operatorname{am} w$ peut être développée de la même manière par la méthode précédente, si l'on pose

$$\sin^2\operatorname{am} u = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{2K} + A_2\cos\frac{2\pi u}{2K} + A_3\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots.$$

On a :

$$\frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} \sin^2\operatorname{am} u\,du,$$

ou bien, en posant am $u = \varphi$,

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2K} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta\varphi} d\varphi = \frac{K - E}{k^2 K}.$$

De la relation $\sin \text{am}\,(2K - u) = \sin \text{am}\, u$, on déduit facilement $A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = 0$, et l'on pourra, dans la recherche de A_n, supposer n un nombre pair. On a alors

$$\varepsilon_1 = + 1, \quad \varepsilon_2 = + 1, \quad F(iv) = - \text{tg}^2 \text{am}\,(v, k'),$$

$$\lim \left\{ \rho \left[F(iK' + \rho) e^{i\mu\rho} - \varepsilon_1 \cos n\pi\, F(iK' - \rho) e^{-i\mu\rho} \right] \right\}$$

$$= \lim \frac{\rho (e^{i\mu\rho} - e^{-i\mu\rho})}{k^2 \sin^2 \text{am}\, \rho} = \frac{2i}{k^2} \lim \left\{ \left(\frac{\rho}{\sin \text{am}\, \rho} \right)^2 \frac{\sin \mu\rho}{\rho} \right\} = \frac{2i}{k^2} \mu = i \cdot \frac{n\pi}{k^2 K},$$

et la formule (62) donne

$$(1 - e^{-2\mu K'}) \int_0^{2K} \sin^2 \text{am}\, u\, e^{i\mu u} du = - \frac{n\pi^2}{k^2 K} e^{-\mu K'}.$$

En égalant les parties réelles des deux membres, on trouve :

$$\frac{2}{2K} \int_0^{2K} \sin^2 \text{am}\, u \cos \frac{n\pi u}{2K} du = - \left(\frac{\pi}{kK} \right)^2 \frac{n q^{\frac{1}{2} n}}{1 - q^n},$$

et A_n est déterminé. Faisons successivement $n = 2, 4, 6$, etc., on a :

$$\sin^2 \text{am}\, u = \frac{K - E}{k^2 K} - 2 \left(\frac{\pi}{kK} \right)^2 \left\{ \frac{1q}{1 - q^2} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1 - q^4} \cos \frac{2\pi u}{K} + \cdots \right\}, \quad (70)$$

et cette équation subsiste pour toutes les valeurs réelles de u.

Avant de nous occuper d'autres séries de cette espèce, nous allons examiner les substitutions au moyen desquelles tout développement d'une fonction elliptique permet d'obtenir les développements d'autres fonctions elliptiques. Nous avons déjà employé une telle substitution dans les calculs précédents : elle consiste à remplacer u par $K - u$. D'autres substitutions reposent sur les remarques suivantes :

L'intégrale

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{k'^2 + k^2 \sin^2 \varphi}},$$

peut se ramener de deux manières différentes à la forme normale des intégrales elliptiques. On peut, en effet, ou bien l'écrire sous la forme

$$k'u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2 \sin^2\varphi}}, \text{ d'où } \varphi = \operatorname{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right);$$

ou bien employer la substitution

$$\sin\varphi = \frac{k'\sin\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad d\varphi = \frac{k'\,d\psi}{1-k^2\sin^2\psi},$$

laquelle donne

$$u = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad \text{d'où} \quad \psi = \operatorname{am}(u, k).$$

En vertu de la relation entre φ et ψ, on a :

$$\sin\operatorname{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

et il en résulte pour les autres fonctions elliptiques des formules analogues à celles que nous avons déjà trouvées. Dans le cas particulier, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$, et la comparaison des deux valeurs de u donne

$$F\left(\frac{ik}{k'}, \frac{\pi}{2}\right) = k'F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

En outre, on a immédiatement

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right] = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k'd\varphi}{\sqrt{k'^2-\sin^2\varphi}},$$

ou bien, pour $\sin\varphi = z$,

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right] = k'\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2-z^2)}} =$$

$$= k'\left\{\int_0^{k'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2-z^2)}} + \frac{1}{i}\int_{k'}^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}\right\}.$$

Si l'on fait dans la première intégrale du second membre $z = k' \sin \tau$, et dans la deuxième $z = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}$, on obtient facilement

$$F\left[\sqrt{1 - \left(\frac{ik}{k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right] = k'(K' - iK).$$

Ces remarques se résument de la manière suivante :

Si l'on remplace k par $\frac{ik}{k'}$, et en même temps u par $k'u$, alors

$$K \text{ se change en } k'K, \qquad K' \text{ en } k'(K' - iK),$$

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q \text{ en } e^{-\frac{\pi(K'-iK)}{K}} = -q, \quad \sin \operatorname{am} u \text{ en } \frac{k' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u},$$

$$\cos \operatorname{am} u \text{ en } \frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}, \qquad \Delta \operatorname{am} u \text{ en } \frac{1}{\Delta \operatorname{am} u}.$$

D'après cette règle, on obtient, par un simple changement de signe de q dans la série de $\sin \operatorname{am} u$, la série relative à $\frac{k' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}$, laquelle se change en la série de $\cos \operatorname{am} u$, si l'on remplace u par $K - u$ (formules 63, 66 et 65).

La substitution de Landen fournit un deuxième moyen pour trouver de nouvelles séries. Soient, en effet, les amplitudes φ et ψ, liées par l'équation

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin 2\psi}{h + \cos 2\psi},$$

au lieu de laquelle on peut encore poser :

$$\cos \varphi = \frac{1}{1+h} \cdot \frac{1 + h - 2\sin^2 \psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{h}}{1+h}\right)^2 \sin^2 \psi}},$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{1+h} \cdot \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{h}}{1+h}\right)^2 \sin^2 \psi}},$$

on a alors la relation

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+h} F\left(\frac{2\sqrt{h}}{1+h}, \psi\right). \tag{71}$$

Soit, en outre,

$$\frac{2\sqrt{h}}{1+h} = k, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{1-k'}{1+k'};$$

les trois équations précédentes se transforment en les suivantes :

$$\cos\varphi = \frac{1-(1+k')\sin^2\psi}{\Delta(k, \psi)}, \qquad \sin\varphi = \frac{(1+k')\sin\psi\cos\psi}{\Delta(k, \psi)},$$

$$F(k, \psi) = \frac{1}{1+k'} F\left(\frac{1+k'}{1-k'}, \varphi\right).$$

La dernière peut être mise sous la forme

$$u = \frac{1}{1+k'} v.$$

D'après cela, on a :

$$\psi = \text{am}(u, k), \quad \varphi = \text{am}\left(v, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \text{am}\left\{(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right\},$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, il vient :

$$\cos\text{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1+k')\sin^2\text{am}\,u}{\Delta\,\text{am}\,u},$$

$$\sin\text{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\sin\text{am}\,u\cos\text{am}\,u}{\Delta\,\text{am}\,u}.$$

Dans le cas particulier $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on a $\varphi = \pi$, et

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{1+k'} F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \pi\right) = \frac{2}{1+k'} F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right);$$

d'où

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k'}{2} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

En outre, on a identiquement :

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right]=F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ \frac{\pi}{2}\right);$$

de (71) il résulte, en y faisant $h=k'$, $\varphi=2\psi=\pi$, que le second membre de l'équation précédente se change en $(1+k')\,F\left(k',\ \frac{1}{2}\pi\right)$. On a ensuite

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right]=(1+k')\,F\left(k',\frac{\pi}{2}\right).$$

On conclut de là le théorème suivant :

Si l'on remplace

$$k \text{ par } \frac{1-k'}{1+k'}, \quad \text{et} \quad u \text{ par } (1+k')\,u,$$

alors

$$\text{K se change en } \frac{1}{2}(1+k')\,\text{K}, \qquad \text{K}' \text{ en } (1+k')\,\text{K}',$$

$$q \text{ en } q^2,$$

$$\sin\operatorname{am} u \text{ en } \frac{(1+k')\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

$$\cos\operatorname{am} u \text{ en } \frac{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}.$$

Par cette règle on tire de la série de sin am u par exemple, le développement

$$\frac{\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}=\frac{4\pi}{k^2\text{K}}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{\text{K}}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{\text{K}}+\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{\text{K}}+\cdots\right\},$$

sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant.

Il est à peine nécessaire d'observer que tous les développements en séries précédents peuvent être particularisés de différentes manières, suivant que l'on fait $u=0$, ou $=\text{K}$, ou $=\frac{1}{2}\text{K}$. Les formules particulières qui en résultent renferment pour la plupart des relations entre les quantités k, k', K et q; l'équation (70) seule fait exception : elle donne pour $u = 0$, une formule qui peut être employée pour le calcul de E. On en tire, en effet,

$$\mathrm{E} = \mathrm{K} - 2\frac{\pi^2}{\mathrm{K}}\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \cdots\right).$$

Nous devons encore développer une transformation importante à laquelle les séries ci-dessus peuvent être soumises ; elle consiste simplement à développer chaque terme au moyen de la formule

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots, \quad r^2 < 1,$$

et à ajouter verticalement dans la série ainsi obtenue les termes qui se trouvent les uns sous les autres. Par exemple, si au lieu de l'équation (63), on écrit l'expression plus commode :

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sqrt{q}\left\{\frac{\sin x}{1-q} + \frac{q\sin 3x}{1-q^3} + \frac{q^2\sin 5x}{1-q^5} + \cdots\right\},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sqrt{q}\,\{ & \sin x + q\sin x + q^2\sin x + q^3\sin x + \cdots \\ & + q\sin 3x + q^4\sin 3x + q^7\sin 3x + q^{10}\sin 3x + \cdots \\ & + q^2\sin 5x + q^7\sin 5x + q^{12}\sin 5x + q^{17}\sin 5x + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}.\end{aligned}$$

Si l'on fait la somme de toutes les séries verticales, au moyen de la formule

$$\sin x + p\sin 3x + p^2\sin 5x + \cdots = \frac{(1+p)\sin x}{1-2p\cos 2x + p^2},$$

on arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned}\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sin x\left\{\frac{(1+q)\sqrt{q}}{1-2q\cos 2x+q^2} + \frac{(1+q^3)\sqrt{q^3}}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\right. \\ \left. + \frac{(1+q^5)\sqrt{q^5}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} + \cdots\right\}. \qquad (72)\end{aligned}$$

De la formule (65), ou de la formule

$$\frac{kK}{2\pi}\cos \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{q}\left\{\frac{\cos x}{1+q}+\frac{q\cos 3x}{1+q^3}+\frac{q^2\cos 5x}{1+q^5}+\cdots\right\},$$

qui n'en diffère pas essentiellement, on déduit de la même manière :

$$\frac{kK}{2\pi}\cos \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\cos x\left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{(1-q^3)\sqrt{q^3}}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-q^5)\sqrt{q^5}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\cdots\right\}. \tag{73}$$

Si l'on met l'équation (67) sous la forme

$$\frac{K}{2\pi}\Delta \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q\cos 2x}{1+q^2}+\frac{q^2\cos 4x}{1+q^4}+\frac{q^3\cos 6x}{1+q^6}+\cdots,$$

on trouve

$$\frac{K}{2\pi}\Delta \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q\cos 2x-q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{q^3\cos 2x-q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}$$
$$+\frac{q^5\cos 2x-q^{10}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\cdots \tag{74}$$

Dans le cas particulier $x=0$, il vient :

$$\frac{K}{2\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q}{1-q}-\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}-\cdots$$

La demi-différence entre ces deux équations nous donne :

$$\frac{K}{4\pi}\left(1-\Delta \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)=\sin^2 x\left\{\frac{\frac{1+q}{1-q}q}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{\frac{1+q^3}{1-q^3}q^3}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\cdots\right\}. \tag{75}$$

On tire de même de la formule (70) la relation suivante :

$$1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{E}{K}+\frac{2\pi^2}{K^2}\left\{\frac{q(1+q^2)\cos 2x-2q^2}{(1-2q\cos 2x+q^2)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{q^3(1+q^6)\cos 4x-2q^6}{(1-2q^3\cos 2x+q^6)^2}+\cdots\right\}. \tag{76}$$

Ce qui caractérise les formules (72) à (76), c'est que l'on peut décomposer les fonctions elliptiques en fractions rationnelles, ces dernières étant des fonctions de q. On peut d'après cela, considérer les fonctions elliptiques comme une espèce de fonctions fractionnaires : nous en verrons l'exactitude dans le chapitre suivant.

Notes du traducteur. — Avant de passer à ce chapitre, nous allons faire quelques remarques sur les formules que nous venons de trouver.

D'abord les formules (63) à (70) peuvent être mises sous une forme symbolique

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{2\pi\sqrt{q}}{k\mathrm{K}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}, \tag{63}$$

$$\frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{2\pi\sqrt{q}}{k\mathrm{K}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} \cos(2n+1)\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}, \tag{64}$$

$$\cos \operatorname{am} u = \frac{2\pi\sqrt{q}}{k\mathrm{K}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n+1}} \cos(2n+1)\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}, \tag{65}$$

$$\frac{k' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{2\pi\sqrt{q}}{k\mathrm{K}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}, \tag{66}$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}\left[1+4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\mathrm{K}}\right], \tag{67}$$

$$\frac{1}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2k'\mathrm{K}}\left[1+4\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\mathrm{K}}\right], \tag{68}$$

$$\operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2\mathrm{K}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})} \sin\frac{n\pi u}{\mathrm{K}}, \tag{69}$$

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \left(\frac{\pi}{k\mathrm{K}}\right)^2 \left[\frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}-\mathrm{E})}{\pi^2} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\mathrm{K}}\right]. \tag{70}$$

Ces formules permettent de trouver des propriétés des nombres : nous allons en indiquer quelques-unes.

Si, dans la formule (63), on fait $u = \mathrm{K}$, il vient :

$$1 = \frac{2\pi\sqrt[4]{q}}{k\mathrm{K}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n+1}}.$$

La formule (65) donne, pour $u = 0$,

$$1 = \frac{2\pi\sqrt[4]{q}}{k\mathrm{K}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}.$$

De ces deux dernières, on conclut l'égalité des deux séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}.$$

De même, pour $u=0$, on déduit de (67) :

$$1 = \frac{\pi}{2K}\left[1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}}\right].$$

Enfin de (68) on tire, pour $u=0$,

$$k' = \frac{\pi}{2K}\left[1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}}\right],$$

et ainsi de suite.

On peut encore trouver une autre expression pour le développement (70) de $\sin^2 \operatorname{am} u$. En effet, nous avons déjà vu que, pour $u=0$, cette formule (70) nous donne :

$$\frac{K(K-E)}{\pi^2} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

relation qui, comme nous l'avons dit, peut servir au calcul de E.

Or, si nous substituons cette valeur dans (70), il vient :

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \left(\frac{\pi}{kK}\right)^2 \cdot 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1 - \cos\frac{n\pi u}{K}\right),$$

et, en vertu de la formule connue $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2} x$,

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \left(\frac{\pi}{kK}\right)^2 \cdot 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \sin^2 \frac{n\pi u}{2K}.$$

On pourrait d'ailleurs obtenir cette dernière directement en multipliant la formule (63) par elle-même. C'est le procédé ordinairement employé; mais il exige un grand nombre de calculs.

Cette formule donne, pour $u = K$,

$$\left(\frac{kK}{\pi}\right)^2 = 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Enfin, on peut donner à la formule ci-dessus

$$\frac{kK}{2\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\cdots,$$

une forme remarquable qui est due, je pense, à M. Hermite.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{kK}{2\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}&=\sqrt{q}\sin x\,(1+q+q^2+\cdots)\\&\quad+\sqrt{q^3}\sin 3x\,(1+q^3+q^6+\cdots)\\&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\sin x\sum_{n=0}^{n=\infty}\sqrt{q^{2n+1}}+\sin 3x\sum_{n=0}^{n=\infty}\sqrt{q^{3(2n+1)}}+\cdots,\end{aligned}$$

ou bien,

$$\frac{kK}{2\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sin(2m+1)x\sum_{n=0}^{n=\infty}\sqrt{q^{(2m+1)(2n+1)}}.$$

On trouve de même :

$$\frac{kK}{2\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\cos(2m+1)x\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\sqrt{q^{(2m+1)(2n+1)}},$$

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{4}+\sum_{m=1}^{m=\infty}\cos 2mx\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{(2n+1)m}.$$

De ces deux dernières on tire, pour $x=0$,

$$\frac{kK}{2\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\sqrt{q^{(2m+1)(2n+1)}},$$

$$\frac{2K}{\pi}=4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{(2n+1)m},$$

et de la dernière pour $x=\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{2Kk'}{\pi}=1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\cos m\pi\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{m(2n+1)}.$$

VII. Séries périodiques pour les fonctions elliptiques composées. Produits infinis.

Le procédé employé dans le chapitre précédent pour le développement de l'intégrale

$$\int F(w)\, e^{i\mu w}\, dw, \qquad \mu = \frac{n\pi}{2K},$$

s'applique avec une faible modification au cas où la fonction $F(w)$ n'est pas une fonction doublement périodique proprement dite, mais composée d'une fonction doublement périodique et d'une autre fonction. Nous prendrons de nouveau pour chemin d'intégration de la variable imaginaire w, le contour du rectangle construit sur les côtés $2K$ et $2K'$. Nous supposerons que la fonction $F(w)$ reste monodrome, mais cependant qu'elle devienne plusieurs fois infinie sur le contour du rectangle, et de plus qu'elle possède les deux propriétés suivantes :

$$F(w + 2K) = \varepsilon_1 F(w), \qquad F(w + i \cdot 2K') = \varepsilon_2 F(w) + f(w),$$

où $f(w)$ désigne une nouvelle fonction connue. L'intégration le long du chemin donné fournit l'équation suivante :

$$\left.\begin{aligned}&(1 - \varepsilon_2 e^{-2\mu K'}) \int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - e^{-2\mu K'} \int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du \\ &\qquad + i\,(\varepsilon_1 e^{i.2\mu K} - 1) \int_0^{2K'} F(iv)\, e^{-\mu v}\, dv + S = 0,\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

S désignant la somme de toutes les intégrales qui résultent de ce que l'on entoure les points d'exception de demi-cercles, ou de quarts de cercles infiniment petits. Le calcul de S se fait de la même manière que dans le chapitre précédent pour deux points d'exception. Nous allons donner quelques applications de ce principe simple.

a. La fonction $\dfrac{1}{\sin \operatorname{am} w}$ devient infinie aux points 0, $2K$, $i \cdot 2K'$, et $2K + i \cdot 2K'$; par suite, elle ne se transforme pas immédiatement en une série de sinus ou de cosinus. Au contraire, la fonction impaire

$$F(w) = \frac{1}{\sin \operatorname{am} w} - \frac{\pi}{2K \sin \dfrac{\pi w}{2K}},$$

reste finie pour toutes les valeurs réelles de w depuis 0 jusqu'à 2K; elle s'annule pour $w = 0$ et pour $w = 2\mathrm{K}$, et elle n'a que les deuy points d'exception $i \cdot 2\mathrm{K}'$, et $2\mathrm{K} + i \cdot 2\mathrm{K}'$. On peut donc poser :

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{B}_1 \sin \frac{\pi u}{2\mathrm{K}} + \mathrm{B}_2 \sin \frac{2\pi u}{2\mathrm{K}} + \mathrm{B}_3 \sin \frac{3\pi u}{2\mathrm{K}} + \cdots.$$

De l'équation $\mathrm{F}(2\mathrm{K} - u) = \mathrm{F}(u)$, il résulte très-facilement que B_2, B_4, B_6, etc. sont nuls; par suite, pour déterminer

$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{2\mathrm{K}} \int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(u) \sin \frac{n\pi u}{2\mathrm{K}}\, du,$$

on n'a besoin que de supposer n impair. On a, en outre,

$$\mathrm{F}(w + 2\mathrm{K}) = -\mathrm{F}(w), \qquad \varepsilon_1 = -1,$$

$$\mathrm{F}(w + i \cdot 2\mathrm{K}') = \mathrm{F}(w) + \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi w}{2\mathrm{K}}} - \frac{1}{\sin \frac{\pi (w + i \cdot 2\mathrm{K}')}{2\mathrm{K}}} \right\};$$

si donc, on pose, pour abréger,

$$\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \alpha,$$

il vient :

$$\mathrm{F}(w + i \cdot 2\mathrm{K}') = \mathrm{F}(w) + \mathrm{f}(w), \qquad \varepsilon_2 = 1,$$

$$\mathrm{f}(w) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi w}{2\mathrm{K}}} - \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi w}{2\mathrm{K}} + i\alpha \right)} \right\}.$$

Puisque n est impair, on a, en outre,

$$\varepsilon_1 e^{i.2\mu.\mathrm{K}} - 1 = -\cos n\pi - 1 = 0,$$

et alors l'équation (77) se simplifie en la suivante :

$$(1 - q^n) \int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(u)\, e^{i\mu.u}\, du - q^n \int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{f}(u)\, e^{i\mu.u}\, du + \mathrm{S} = 0. \qquad (78)$$

Considérons d'abord l'intégrale qui renferme $\mathrm{f}(u)$, et remplaçons u par la nouvelle variable $\frac{2\mathrm{K}}{\pi} x$; en vertu des valeurs de $\mathrm{f}(u)$ et de μ, il vient :

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{f}(u)\, e^{i\mu.u}\, du = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin (x + i\alpha)} \right\} e^{inx}\, dx,$$

ou bien, si $\sin(x + i\alpha)$ est exprimé par des exponentielles, et si l'on a égard à l'équation $e^{-\alpha} = q$,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = \int_0^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sin x}\, dx + 2i \int_0^{\pi} \frac{qe^{ix}}{1 - q^2 e^{2ix}}\, e^{inx}\, dx.$$

La deuxième intégrale du second membre se transforme facilement en une série procédant suivant les puissances de q, et dont les termes s'annulent, à cause de n impair. Il reste alors :

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = \int_0^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sin x}\, dx.$$

Pour trouver en outre S, entourons les points d'exception C et B de quarts de cercles, dans la fig. 51, où $0A = 2K$, $0B = 2K'$, $CP = BQ = r$, angle $PCD =$ angle $QBD = \theta$, et soit, pour abréger, $e^{i\theta} = \rho$. Alors S est la valeur limite de

$$i \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} F(2K + 2iK' + \rho)\, e^{i\mu(2K + 2iK' + \rho)}\, \rho d\theta$$

$$+ i \int_0^{-\frac{1}{2}\pi} F(2iK' + \rho)\, e^{i\mu(2iK' + \rho)}\, \rho d\theta = iq^n \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \rho\, [F(\rho) + f(\rho)]\, e^{i\mu\rho}\, d\theta$$

$$+ iq^n \int_0^{-\frac{1}{2}\pi} \rho\, [F(\rho) + f(\rho)]\, e^{i\mu\rho}\, d\theta;$$

il s'en suit, à cause de $F(0) = 0$, et de $\lim[\rho\, f(\rho)] = 1$,

$$S = -i\pi q^n.$$

D'après cela, l'équation (78) devient :

$$(1 - q^n) \int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - q^n \int_0^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sin x}\, dx - i\pi q^n = 0;$$

elle donne, par la séparation de la partie imaginaire,

$$\int_0^{2K} F(u) \sin \frac{n\pi u}{2K}\, du = \frac{q^n}{1 - q^n} \left\{ \pi + \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx \right\}.$$

L'intégrale du second membre se trouve en observant que, pour n impair, on a :

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 1 + 2\left[\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos (n-1)x\right];$$

on a ainsi :

$$\int_0^{2K} F(u) \sin \frac{n\pi u}{2K}\, du = \frac{2\pi q^n}{1-q^n}, \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q^n}{1-q^n}.$$

Le développement en série cherché est, d'après cela,

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} - \frac{\pi}{2K \sin \frac{\pi u}{2K}} = \frac{2\pi}{K}\left\{ \frac{q}{1-q} \sin \frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^3} \sin \frac{3\pi u}{2K} \right.$$

$$\left. + \frac{q^5}{1-q^5} \sin \frac{5\pi u}{2K} + \cdots \right\}. \tag{79}$$

En remplaçant u par $K - u$, il vient :

$$\frac{\Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} - \frac{\pi}{2K \cos \frac{\pi u}{2K}} = \frac{2\pi}{K}\left\{ \frac{q}{1-q} \cos \frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^3} \cos \frac{3\pi u}{2K} \right.$$

$$\left. + \frac{q^5}{1-q^5} \cos \frac{5\pi u}{2K} - \cdots \right\}. \tag{80}$$

Si l'on remplace en outre u par $k'u$, K' par $k'K$, q par $-q$ (p. 148), et si l'on multiplie par $-k'$, on obtient encore

$$\frac{\pi}{2K \cos \frac{\pi u}{2K}} - \frac{k'}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{K}\left\{ \frac{q}{1+q} \cos \frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^3} \cos \frac{3\pi u}{2K} \right.$$

$$\left. + \frac{q^5}{1+q^5} \cos \frac{5\pi u}{2K} - \cdots \right\}. \tag{81}$$

b. L'hypothèse

$$F(w) = \operatorname{cotg} \operatorname{am} w - \frac{\pi}{2K} \operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2K},$$

conduit à un calcul analogue.

Cette fonction s'annule pour $w = 0$, et pour $w = 2K$; elle reste finie pour toutes les valeurs réelles de w comprises entre 0 et $2K$. Elle peut, par conséquent, être transformée en une série de sinus, et l'on aura :

$$F(u) = B_1 \sin \frac{\pi u}{2K} + B_2 \sin \frac{2\pi u}{2K} + B_3 \sin \frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

De la propriété $F(2K - u) = - F(u)$, il résulte d'abord que $B_1 = B_3 = B_5 \cdots = 0$. Par suite, dans la détermination de

$$B_n = \frac{2}{2K} \int_0^{2K} F(u) \sin \frac{n\pi u}{2K}\, du,$$

on doit seulement considérer n pair. La fonction $F(w)$ devient, en outre, infinie aux points $w = i \cdot 2K'$, et $w = 2K + i \cdot 2K'$; enfin, en conservant les notations précédentes, on a :

$$F(w + 2K) = F(w), \qquad \varepsilon_1 = +1,$$

$$F(w + i \cdot 2K') = - F(w) + f(w), \qquad \varepsilon_2 = -1,$$

$$f(w) = - \frac{\pi}{2K} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\pi w}{2K} + \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi w}{2K} + i\alpha \right) \right\}.$$

En vertu de ces remarques, l'équation (77) se réduit à la suivante :

$$(1 + q^n) \int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - q^n \int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du + S = 0. \qquad (82)$$

On en tire, en faisant $u = \frac{2K}{\pi} x$,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = - \int_0^{\pi} \left\{ \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} (x + i\alpha) \right\} e^{inx}\, dx$$

$$= - \int_0^{\pi} e^{inx} \operatorname{cotg} x\, dx - i \int_0^{\pi} \frac{1 + q^2 e^{2ix}}{1 - q^2 e^{2ix}}\, e^{inx}\, dx,$$

ou bien, puisque la dernière intégrale est nulle pour n pair,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = - \int_0^{\pi} e^{inx} \operatorname{cotg} x\, dx.$$

En outre S est la limite de

$$i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \mathrm{F}(2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'+\rho)\, e^{i\mu(2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'+\rho)}\, \rho d\theta$$

$$+ i\int_{0}^{-\frac{1}{2}\pi} \mathrm{F}(2i\mathrm{K}'+\rho)\, e^{i\mu(2i\mathrm{K}'+\rho)}\, \rho d\theta = iq^n \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \rho[-\mathrm{F}(\rho)+\mathrm{f}(\rho)]\, e^{i\mu\rho}\, d\theta$$

$$+ iq^n \int_{0}^{-\frac{1}{2}\pi} \rho[-\mathrm{F}(\rho)+\mathrm{f}(\rho)]\, e^{i\mu\rho}\, d\theta\,;$$

à cause de $\mathrm{F}(0) = 0$, et de $\lim [\rho\, \mathrm{f}(\rho)] = -1$, il vient :

$$\mathrm{S} = i\pi q^n.$$

Par la séparation de la partie imaginaire, on tire de (82)

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(u) \sin \frac{n\pi u}{2\mathrm{K}}\, du = -\frac{q^n}{1+q^n}\left\{\pi + \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos x}{\sin x}\, dx\right\}.$$

L'équation

$$\frac{\sin nx \cos x}{\sin x} = 1 + 2[\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos (n-2)x] + \cos nx,$$

conduit à la détermination de la dernière intégrale, et l'on a finalement

$$\mathrm{B}_n = -\frac{2\pi}{\mathrm{K}} \cdot \frac{q^n}{1+q^n}.$$

D'après cela, le développement cherché est le suivant :

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \cot g \frac{\pi u}{2\mathrm{K}} - \cot g \operatorname{am} u = \frac{2\pi}{\mathrm{K}}\left\{\frac{q^2}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{\mathrm{K}} + \frac{q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u}{\mathrm{K}} + \cdots\right\}. \quad (83)$$

Si l'on remplace u par $\mathrm{K}-u$, on obtient encore

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2\mathrm{K}} - k' \operatorname{tg} \operatorname{am} u = \frac{2\pi}{\mathrm{K}}\left\{\frac{q^2}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{\mathrm{K}} - \frac{q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u}{\mathrm{K}} + \cdots\right\}. \quad (84)$$

c. L'hypothèse

$$\mathrm{F}(w) = \cot g \operatorname{am} w\, \Delta \operatorname{am} w - \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \cot g \frac{\pi w}{2\mathrm{K}},$$

conduit à un développement analogue, mais beaucoup plus important par ses conséquences.

La fonction impaire précédente s'annule pour $w = 0$, et $w = 2K$; elle peut donc être transformée en une série de sinus. De plus, à cause de $F(2K - u) = - F(u)$, les coefficients B_1, B_3, B_5, etc., disparaissent, et l'on peut supposer dans la détermination de B_n, que l'indice n est un nombre pair. La fonction $F(w)$ sera quatre fois infinie aux points iK', $2iK'$, $2K + iK'$, $2K + 2iK'$; elle possède encore les propriétés suivantes :

$$F(w + 2K) = F(w), \qquad \varepsilon_1 = 1,$$
$$F(w + 2iK') = F(w) + f(w), \qquad \varepsilon_2 = 1,$$
$$f(w) = \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K} - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi w}{2K} + i\alpha\right)\right\}.$$

En vertu de ces remarques, l'équation (77) se réduit à

$$(1 - q^n)\int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - q^n \int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du + S = 0. \qquad (85)$$

Au moyen de ces substitutions on trouve, comme ci-dessus,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = \int_0^{\pi} \left\{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(x + i\alpha)\right\} e^{inx}\, dx,$$

c'est-à-dire, à cause de n pair,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = \int_0^{\pi} e^{inx} \operatorname{cotg} x\, dx.$$

Pour déterminer S, on entoure les points d'exception E, C, B, D, de demi cercles et de quarts de cercles, comme le montre la figure 52; S est alors la valeur limite de la somme suivante :

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{3}{2}\pi} \rho F(2K + iK' + \rho)\, e^{i\mu(2K + iK' + \rho)}\, d\theta + i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \rho F(2K + 2iK' + \rho)\, e^{i\mu(2K + 2iK' + \rho)}\, d\theta$$
$$+ i\int_0^{-\frac{1}{2}\pi} \rho F(2iK' + \rho)\, e^{i\mu(2iK' + \rho)}\, d\theta + i\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \rho F(iK' + \rho)\, e^{i\mu(iK' + \rho)}\, d\theta,$$

c'est-à-dire, en vertu des significations de μ, n, q,

$$S = i\pi q^{\frac{1}{2}n} - i\frac{\pi}{2}q^n - i\frac{\pi}{2}q^n + i\pi q^{\frac{1}{2}n},$$

ou bien :

$$S = i\pi\left(2q^{\frac{1}{2}n} - q^n\right).$$

La partie imaginaire de l'équation (85) donne

$$(1-q^n)\int_0^{2K} F(u)\sin\frac{n\pi u}{2K}\,du - q^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos x}{\sin x}\,dx + \pi\left(2q^{\frac{1}{2}n} - q^n\right) = 0,$$

et, comme la valeur de l'intégrale relative à x est égale à π, il reste :

$$\int_0^{2K} F(u)\sin\frac{n\pi u}{2K}\,du = -2\pi\frac{q^{\frac{1}{2}n}}{1+q^{\frac{1}{2}n}}.$$

De là résulte le développement en série suivant :

$$\operatorname{cotg}\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u - \frac{\pi}{2K}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2K} = -\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}. \quad (86)$$

En remplaçant u par $K - u$, on obtient encore :

$$\frac{k'^2\operatorname{tg}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u} - \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} = -\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}. \quad (87)$$

d. Une transformation semblable s'applique à la fonction

$$F(w) = \operatorname{tg}\operatorname{am} w\,\Delta\operatorname{am} w - \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi w}{2K},$$

laquelle s'annule pour $w = 0$, et pour $w = 2K$; elle devient infinie aux trois points $2K + iK'$, $K + 2iK'$, iK'. Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul, parce que le développement résultant s'obtient plus rapiment, lorsque l'on remplace dans (87) les quantités....

$$k, \quad k', \quad u, \quad K, \quad q, \quad \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

respectivement par

$$\frac{ik}{k'}, \quad \frac{1}{k'}, \quad k'u, \quad k'K, \quad -q, \quad k'\operatorname{tg}\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u.$$

Il vient alors la formule

$$\operatorname{tg}\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u - \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K}\right.$$
$$\left. + \frac{q^3}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}, \quad (88)$$

dans laquelle les termes renfermés entre parenthèses sont de la forme

$$\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\sin\frac{m\pi u}{K}.$$

Cette formule peut donc s'écrire sous la forme symbolique suivante :

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u - \frac{\pi}{2K} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2K} = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^m}{1+(-1)^m q^n} \sin \frac{m\pi u}{K}.$$

Dans le cas particulier $u = \frac{1}{2}K$, l'équation (88) donne la série déjà trouvée ci-dessus (page 152).

$$\frac{2K}{\pi} - 1 = 4 \left\{ \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots \right\};$$

cette formule sert à calculer la valeur de K correspondant à une valeur donnée de q.

Pour obtenir une relation analogue, différentions (88) par rapport à u, et, dans la formule résultante :

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} u - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \operatorname{séc}^2 \frac{\pi u}{2K} =$$

$$= \frac{2\pi^2}{K^2} \left\{ \frac{1q}{1-q} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^2} \cos \frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^3} \cos \frac{3\pi u}{K} + \cdots \right\},$$

faisons $u = 0$; il viendra :

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 1 = 8 \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots \right\}.$$

Si l'on met dans (88) $K - u$ à la place de u, il vient :

$$\frac{\operatorname{cotg} \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} - \frac{\pi}{2K} \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} = \frac{2\pi}{K} \left\{ \frac{q}{1-q} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{q^2}{1+q^2} \sin \frac{2\pi u}{K} \right.$$

$$\left. + \frac{q^3}{1-q^3} \sin \frac{3\pi u}{K} - \cdots \right\}. \qquad (89)$$

Enfin, la différence entre les équations (89) et (86) donne encore la formule remarquable suivante :

$$\frac{k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{4\pi}{K} \left\{ \frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin \frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}} \sin \frac{5\pi u}{K} + \cdots \right\}, \quad (90)$$

que nous avons déjà trouvée autrement (page 150).

e) Les équations (86), (88) et (90) ont une importance plus grande en ce que l'on peut en déduire des séries pour les logarithmes de sin am u, cos am u, Δ am u. En effet, on obtient immédiatement par la différentiation

$$\int \operatorname{cotg} \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \, du = \mathrm{l.} \sin \operatorname{am} u,$$

$$-\int \operatorname{tg} \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \, du = \mathrm{l.} \cos \operatorname{am} u,$$

$$-\int \frac{k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} du = \mathrm{l.} \Delta \operatorname{am} u.$$

D'après cela, si l'on multiplie (86) par du, et que l'on intègre entre les limites $u = 0$, et $u = u$, il vient :

$$\mathrm{l.}\left(\frac{\sin \operatorname{am} u}{\sin \frac{\pi u}{2K}}\right) = 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

$$-2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2} + \cdots\right\};$$

et, si l'on désigne par C la partie du second membre, qui est indépendante de u,

$$\mathrm{l.} \sin \operatorname{am} u - \mathrm{l.} \sin \frac{\pi u}{2K} = C + 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Pour déterminer la constante C, multiplions cette équation par du, et intégrons entre $u = 0$, et $u = K$; il viendra :

$$\int_0^K \mathrm{l.} \sin \operatorname{am} du - \int_0^K \mathrm{l.} \sin \frac{\pi u}{2K} du = CK.$$

Dans la première intégrale, posons am $u = \varphi$, et dans la seconde $\frac{\pi u}{2K} = \psi$, nous aurons

$$C = \frac{1}{K}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{l.} \sin \varphi}{\Delta\varphi} d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{l.} \sin \psi d\psi,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (41) (page 38), et de la formule (39) (page 36) pour $\varepsilon = 0$,

$$C = -\frac{1}{2}\mathrm{l.} k - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{K'}{K} + \mathrm{l.} 2 = \mathrm{l.}\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right).$$

On a alors le développement en série

$$\text{l. sin am } u - \text{l. sin } \frac{\pi u}{2\text{K}} = \text{l.} \left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \right) + 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{q}{1+q} \cos \frac{\pi u}{k} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1+q^2} \cos \frac{2\pi u}{\text{K}} + \cdots \right\}. \tag{91}$$

On trouve de la même manière des séries pour l. cos am u et l. Δ am u; mais on y arrive plus rapidement, si l'on remplace dans l'équation précédente les quantités

$$k, \quad u, \quad \text{K}, \quad q, \quad \sin \text{am}\, u,$$

respectivement par $\frac{ik}{k'}$, $k'u$, $k'\text{K}$, $-q$, $\frac{k' \sin \text{am}\, u}{\Delta \text{ am}\, u}$.

On obtient ainsi

$$\text{l.} \left(\frac{\sin \text{am}\, u}{\Delta \text{ am}\, u} \right) - \text{l. sin } \frac{\pi u}{2\text{K}} = \text{l.} \left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{kk'}} \right) - 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{q}{1-q} \cos \frac{\pi u}{\text{K}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1+q^2} \cos \frac{2\pi u}{\text{K}} + \cdots \right\}. \tag{92}$$

Si l'on remplace u par $\text{K} - u$, il vient :

$$\text{l. cos am } u - \text{l. cos } \frac{\pi u}{2\text{K}} = \text{l.} \left(\frac{2\sqrt[4]{q}\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \right)$$

$$+ 2 \left\{ \frac{1}{1} \frac{q}{1-q} \cos \frac{\pi u}{\text{K}} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{1+q^2} \cos \frac{2\pi u}{\text{K}} + \cdots \right\}. \tag{93}$$

Enfin, la différence entre les équations (91) et (92) donne :

$$\text{l. } \Delta \text{ am } u = \frac{1}{2} \text{l. } k' + 4 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{q}{1-q^2} \cos \frac{\pi u}{\text{K}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{1-q^6} \cos \frac{3\pi u}{\text{K}} + \cdots \right\}. \tag{94}$$

f. Toutes ces séries peuvent être ordonnées, comme celles du chapitre précédent, suivant les puissances de q, et elles prennent ainsi une autre forme. On tire alors, par exemple de (91), en posant $\frac{\pi u}{2\text{K}} = x$,

$$\begin{aligned} \text{l. sin am } \frac{2\text{K}x}{\pi} = \text{l.} \left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \sin x \right) &+ 2 \{ q - q^2 + q^3 - q^4 + \cdots \} \frac{\cos 2x}{1} \\ &+ 2 \{ q^2 - q^4 + q^6 - q^8 + \cdots \} \frac{\cos 4x}{2} \\ &+ 2 \{ q^3 - q^6 + q^9 - q^{12} + \cdots \} \frac{\cos 6x}{3} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots , \end{aligned}$$

et l'on peut sommer tous les séries verticales, au moyen de la formule

$$\frac{1}{1} r \cos 2x + \frac{1}{2} r^2 \cos 4x + \frac{1}{3} r^3 \cos 6x + \cdots = -\frac{1}{2} \mathrm{l.}\,(1 - 2r\cos 2x + r^2);$$

on obtient ainsi :

$$\mathrm{l.}\,\sin \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \mathrm{l.}\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \sin x\right) - \mathrm{l.}\,(1 - 2q\cos 2x + q^2)$$

$$+ \mathrm{l.}\,(1 - 2q^2 \cos 2x + q^4) - \mathrm{l.}\,(1 - 2q^3 \cos 2x + q^6) + \mathrm{l.}\,(1 - 2q^4 \cos 2x + q^8) - \cdots$$

Il en résulte ce théorème important que le sinus amplitude peut être développé en un produit infini :

$$\sin \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(1 - 2q^2\cos 2x + q^4)(1 - 2q^4\cos 2x + q^8)\cdots}{(1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\cdots} \cdot \quad (95)$$

On déduit de la même manière de (93)

$$\cos \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}\cos x}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(1 + 2q^2\cos 2x + q^4)(1 + 2q^4\cos 2x + q^8)\cdots}{(1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\cdots}, \quad (96)$$

et, de (94),

$$\Delta\, \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sqrt{k'} \cdot \frac{(1 + 2q\cos 2x + q^2)(1 + 2q^3\cos 2x + q^6)\cdots}{(1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\cdots}. \quad (97)$$

En vertu de ces trois dernières formules, on peut considérer les fonctions elliptiques $\sin \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\Delta\, \mathrm{am}\, u$, comme des fonctions fractionnaires qui ont un dénominateur commun(1). Nous nous étendrons davantage sur ces réflexions dans le chapitre suivant : mais auparavant, nous allons traiter quelques cas particuliers des dernières équations.

---

(1) Les séries périodiques, les développements en séries de fractions, les produits infinis relatifs aux fonctions elliptiques sont dus à Abel (voir les quatre premiers volumes du *Journal de Crelle*) et à Jacobi (mêmes volumes et *Fundamenta nova theor. funct. ellipt.*). Mais ces deux auteurs ont suivi des méthodes tout-à-fait différentes, qui n'étaient pas à l'abri de toute objection, à cause du peu de développement qu'avait alors la théorie des fonctions de variables complexes. Les méthodes appliquées ci-dessus sont dues à M. Schloemilch (*Mémoires de l'académie des sciences de Saxe*, t. IV, p. 305).

Si l'on divise les deux membres de (95) par sin x, et si l'on fait tendre x vers zéro, on obtient :

$$\frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt[4]{q}}\mathrm{K} = \left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}\right]^2 = \prod_1^\infty\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2;$$

en outre, de (96) on tire, pour $x = 0$,

$$\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}} = \left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}\right]^2 = \prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2.$$

Le quotient de ces deux équations est

$$\frac{2\sqrt{k'}}{\pi}\mathrm{K} = \left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}\right]^2 = \prod_1^\infty\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)^2.$$

On peut encore y rattacher la formule

$$\frac{2k'}{\pi}\mathrm{K} = \left[\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}\right]^2 = \prod_1^\infty\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2,$$

laquelle se démontre, en remplaçant k par $\frac{1-k'}{1+k'}$, k' par $\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, K par $\frac{1}{2}(1+k')\mathrm{K}$, et q par q^2, ce qui rend la dernière formule identique à la précédente.

Remarques du traducteur. — Les formules (95), (96), (97) peuvent être mises sous la forme symbolique suivante :

$$\sin\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x}{\sqrt{k}}\prod_1^\infty\frac{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}, \tag{95}$$

$$\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}\cos x}{\sqrt{k}}\prod_1^\infty\frac{1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}, \tag{96}$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sqrt{k'}\prod_1^\infty\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}. \tag{97}$$

Ces expressions vont nous permettre de trouver de nombreuses relations très-importantes.

La formule (95) nous donne, pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^2.$$

Divisant par cette dernière la première des formules de la page précédente, on obtient :

$$\frac{2K}{\pi} = \prod_1^\infty\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2\cdot\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^2;$$

et, en extrayant la racine carrée de deux membres

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \prod_1^\infty\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\cdot\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}.$$

Or, cette expression peut être simplifiée, en employant la relation suivante :

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots;$$

on a alors

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} = [(1-q^2)(1-q^4)\cdots]\times[(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots].$$

Or,

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots]\times[(1+q^2)(1+q^4)\cdots].$$

Par conséquent

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = [(1-q^2)(1-q^4)\cdots]\times[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots]^2,$$

ou symboliquement

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \prod_1^\infty(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2.$$

Au contraire, si l'on multiplie ces deux formules l'une par l'autre, il vient en extrayant la racine carrée :

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q}\prod_1^\infty\frac{1-q^{4n}}{1-q^{4n-2}}.$$

On trouve aussi

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2.$$

La formule (97) donne, pour $x = 0$,

$$\sqrt{k'} = \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^2.$$

Enfin, en multipliant cette dernière formule par la troisième des formule de la page 168, on trouve, comme ci-dessus :

$$\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\cdot\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} = \prod_{1}^{\infty}\frac{1-q^{n}}{1+q^{n}}.$$

De la formule (90) on tire, pour $u = \frac{K}{2}$,

$$\frac{k^2}{1+k'} = 1-k' = \frac{4\pi}{K}\left[\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots\right],$$

ou bien

$$1-k' = -\frac{4\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.$$

On en tire :

$$k' = 1 + \frac{4\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.$$

La formule (81) donne, pour $u = 0$,

$$1 - \frac{2Kk'}{\pi} = 4\left[\frac{q}{1+q} - \frac{q^3}{1+q^3} + \frac{q^5}{1+q^5} - \cdots\right]$$

ou bien

$$\frac{2Kk'}{\pi} - 1 = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}.$$

En comparant cette relation avec la formule (p. 154)

$$\frac{2Kk'}{\pi} - 1 = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1+q^{2n}}$$

on obtient l'identité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1+q^{2n}}.$$

Il serait facile de continuer cette série de formules : mais, nous croyons inutile d'en donner davantage. Nous ferons cependant remarquer diverses relations que l'on obtiendra par la comparaison de formules ayant les mêmes premiers membres.

Ainsi, en égalant les deux valeurs de $\frac{2K}{\pi}$ (p. 154 et 169) on trouve l'identité

$$1 + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 + q^{2n-1})^4.$$

De même l'égalité des valeurs de $\frac{2Kk'}{\pi}$(p. 154 et 170) donne

$$1 + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} = \prod_1^{\infty} \left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2 = 1 + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

et ainsi de suite.

VIII. Fonction de Jacobi pour des variables réelles.

Si l'on imagine que les multiplications indiquées dans les numérateurs et dans le dénominateur commun des formules (95), (96) et (97) soient effectuées, on obtient quatre séries infinies, procédant suivant les puissances de q. La proposition suivante sert à developper la loi de formation de ces séries.

Si x et p désignent des quantités arbitraires, et si la fonction $\mathrm{f}(x)$ est définie par l'équation

$$\mathrm{f}(x) = (1+x)(1+px)(1+p^2x)\cdots(1+p^{n-1}x),$$

il en résulte immédiatement que $\mathrm{f}(x)$ peut être transformée en une série de puissances; elle peut être représentée de la manière suivante :

$$\mathrm{f}(x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m,$$

où les coefficients A_1, A_2, $\cdots$ A_m dépendent seulement de p.

En vertu de la valeur primitive de $\mathrm{f}(x)$ on a la relation

$$(1+p^my)\,\mathrm{f}(y) = (1+y)\,\mathrm{f}(py);$$

et, d'après la seconde forme de $\mathrm{f}(x)$, on a :

$$(1+p^my)[1 + A_1y + A_2y^2 + \cdots + A_my^m] =$$
$$= (1+y)[1 + A_1py + A_2p^2y^2 + \cdots + A_mp^my^m].$$

Si l'on effectue les multiplications indiquées, on obtient par la comparaison des coefficients de y, y^2, y^3, etc., des deux membres,

$$\begin{aligned}(1-p)\,A_1 &= 1-p^m,\\ (1-p^2)\,A_2 &= p\,(1-p^{m-1})\,A_1,\\ (1-p^3)\,A_3 &= p^2\,(1-p^{m-2})\,A_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ces équations fournissent les valeurs de A_1, A_2, A_3, etc., et l'on a, pour toute valeur positive de k,

$$A_k = p^{\frac{1}{2}k(k-1)} \cdot \frac{(1-p^m)(1-p^{m-1})\cdots(1-p^{m-(k-1)})}{(1-p)(1-p^2)\cdots(1-p^k)}.$$

Dans le développement

$$(1+x)(1+px)(1+p^2x)\cdots(1+p^{m-1}x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m,$$

substituons

$$p = q^2, \quad m = 2n, \quad x = \frac{z}{q^{2n-1}},$$

et séparons le produit du premier membre en deux produits, dont l'un renferme les n premiers facteurs et l'autre les n derniers; nous aurons :

$$\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2n-3}}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^3}\right)\left(1+\frac{z}{q}\right)$$
$$\times\,(1+qz)(1+q^3z)\cdots(1+q^{2n-3}z)(1+q^{2n-1}z)$$
$$= 1 + A_1\frac{z}{q^{2n-1}} + A_2\frac{z^2}{q^{2(2n-1)}} + \cdots + A_{2n}\frac{z^{2n}}{q^{2n(2n-1)}}.$$

Ordonnons le produit de la série en allant du milieu vers les extrémités et écrivons :

$$(1+qz)\left(1+\frac{z}{q}\right)(1+q^3z)\left(1+\frac{z}{q^3}\right)\cdots(1+q^{2n-1}z)\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right)$$
$$= \frac{A_n}{q^{n(2n-1)}}z^n + \left\{\frac{A_{n-1}}{q^{(n-1)(2n-1)}}z^{n-1} + \frac{A_{n+1}}{q^{(n+1)(2n-1)}}z^{n+1}\right\}$$
$$+ \left\{\frac{A_{n-2}}{q^{(n-2)(2n-1)}}z^{n-2} + \frac{A_{n+2}}{q^{(n+2)(2n-1)}}z^{n+2}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (98)$$

Si l'on introduit dans la formule relative à A_k, les valeurs $p = q^2$, $m = 2n$, et si l'on fait d'abord $k = n - h$, et ensuite $k = n + h$, on obtient A_{n-h}, A_{n+h} :

$$\frac{A_{n-h}}{q^{(n-h)(2n-1)}} = \frac{1}{q^{(n-h)(n+h)}} \cdot \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\cdots(1-q^{2n+2h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n-2h})},$$

$$\frac{A_{n+h}}{q^{(n+h)(2n-1)}} = \frac{1}{q^{(n-h)(n+h)}} \cdot \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\cdots(1-q^{2n-2h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n+2h})}.$$

La première formule renferme au numérateur et au dénominateur $n-h$ facteurs binomes, la seconde en renferme $n+h$; en les divisant l'une par l'autre, on obtient la relation :

$$\frac{A_{n+h}}{q^{(n+h)(2n-1)}} : \frac{A_{n-h}}{q^{(n-h)(2n-1)}} =$$

$$= \frac{(1-q^{2n+2h})(1-q^{2n+2h-2})\cdots(1-q^{2n-2h+4})(1-q^{2n-2h+2})}{(1-q^{2n-2h+2})(1-q^{2n-2h+4})\cdots(1-q^{2n+2h-2})(1-q^{2n+2h})},$$

laquelle est égale à l'unité, puisque le dénominateur renferme les facteurs du numérateur écrits en ordre inverse. Soit, pour abréger,

$$a_h = q^{h^2} \cdot \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\cdots(1-q^{2n-2h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n+2h})};$$

on a alors

$$\frac{A_{n-h}}{q^{(n-h)(2n-1)}} = \frac{A_{n+h}}{q^{(n+h)(2n-1)}} = q^{-n^2} a_h,$$

et de l'équation (98) on tire la suivante :

$$(1+q)\left(1+\frac{z}{q}\right)(1+q^3 z)\left(1+\frac{z}{q^3}\right)\cdots(1+q^{2n-1}z)\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right) =$$

$$= q^{-n^2} z^n \left\{ a_0 + a_1\left(\frac{1}{z}+z\right) + a_2\left(\frac{1}{z^2}+z^2\right) + \cdots + a_n\left(\frac{1}{z^n}+z^n\right)\right\}.$$

Si l'on fait usage, dans le premier membre, pour le deuxième, le quatrième, le sixième, etc. facteurs, de l'équation identique

$$1 + \frac{z}{q^m} = \frac{z}{q^m}\left(1 + \frac{q^m}{z}\right),$$

on obtient dans les deux premiers membres le facteur $q^{-n^2}z^n$, et le reste pourra se représenter par l'équation :

$$(1+qz)\left(1+\frac{q}{z}\right)(1+q^3z)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\cdots(1+q^{2n-1}z)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$

$$=a_0\left\{1+b_1\left(z+\frac{1}{z}\right)+b_2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\cdots+b_n\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\right\},$$

dans laquelle on a

$$a_0=\frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\cdots(1-q^{2n+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})},$$

$$b_h=\frac{a_h}{a_0}=q^{h^2}\cdot\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\cdots(1-q^{2n-2h+2})}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\cdots(1-q^{2n+2h})}.$$

Ces formules se simplifient d'une manière remarquable, si l'on fait croître indéfiniment le nombre arbitraire n, et si en même temps on suppose que q, ou, lorsque q est un nombre complexe, que le module de q est une fraction simple. On a, en effet,

$$\lim a_0=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots},$$

$$\lim b_h=q^{h^2}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$Q=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

il vient :

$$(1+qz)\left(1+\frac{q}{z}\right)(1+q^3z)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)(1+q^5z)\left(1+\frac{q^5}{z}\right)\cdots$$

$$=\frac{1}{Q}\left\{1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+q^9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\cdots\right\};$$

si l'on remplace z par $-z$, on a :

$$(1-qz)\left(1-\frac{q}{z}\right)(1-q^3z)\left(1-\frac{q^3}{z}\right)(1-q^5z)\left(1-\frac{q^5}{z}\right)\cdots$$

$$=\frac{1}{Q}\left\{1-q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-q^9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\cdots\right\}.$$

Si l'on met qz^2 à la place de z, et si l'on multiplie les deux membres par $z\sqrt[4]{q}$, on arrive à l'équation suivante :

$$\sqrt[4]{q}\left(z-\frac{1}{z}\right)\cdot(1-q^2z^2)\left(1-\frac{q^2}{z^2}\right)(1-q^4z^2)\left(1-\frac{q^4}{z^2}\right)\cdots$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{\sqrt[4]{q}\left(z-\frac{1}{z}\right)-\sqrt[4]{q^9}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+\sqrt[4]{q^{25}}\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-\cdots\cdot\right\}.$$

En faisant $z=e^{2ix}$, le premier de ces deux développements donne :

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots\cdot\right\}; \qquad (99)$$

le second donne, pour $z=e^{ix}$,

$$\sqrt[4]{q}\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)\,(1-2q^4\cos 2x+q^8)\cdots$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{\sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots\cdot\right\}. \qquad (100)$$

Ces deux équations peuvent servir à une nouvelle exposition des fonctions elliptiques.

Si l'on revient, en effet, à la formule (95), et si l'on développe le produit du numérateur d'après la formule (100), et le produit du dénominateur par la formule (99), il vient :

$$\sin \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots\cdot}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots\cdot}.$$

On peut transformer de la même manière l'équation (96), dont le numérateur peut être développé par la formule (100), dans laquelle on remplace x par $\frac{1}{2}\pi-x$; on obtient ainsi :

$$\cos \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots\cdot}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots\cdot}.$$

Enfin, on arrive au développement du numérateur de (97), en remplaçant, dans la formule (99), x par $\frac{1}{2}\pi-x$; il vient :

$$\Delta \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{k'}\cdot\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots\cdot}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots\cdot}.$$

Posons maintenant $2Kx = \pi u$, et introduisons deux nouvelles transcendantes $\Theta(u)$ et $H(u)$, définies par les équations suivantes :

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{K} + \cdots, \quad (101)$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q} \sin \frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin \frac{3\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin \frac{5\pi u}{2K} - \cdots \quad (102)$$

Les trois formules précédentes prennent alors la forme très-simple :

$$\left.\begin{aligned} \sin \operatorname{am} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \\ \cos \operatorname{am} u &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{H(u+K)}{\Theta(u)}, \\ \Delta \operatorname{am} u &= \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}. \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

D'après cela, les fonctions elliptiques de première espèce peuvent être exprimées par des quotients de deux fonctions simplement périodiques, que l'on appelle *transcendantes elliptiques*. En vertu de l'équation

$$(k \sin \operatorname{am} u)^2 + (\Delta \operatorname{am} u)^2 = 1,$$

on a entre Θ et H la relation

$$k[H(u)]^2 + k'[\Theta(u+K)]^2 = [\Theta(u)]^2,$$

ou bien

$$H(u) = \sqrt{\frac{[\Theta(u)]^2 - k'[\Theta(u+K)]^2}{k}}.$$

Cette formule montre que H peut être déduite de Θ. En résumé, les fonctions elliptiques de première espèce se réduisent à l'unique transcendante Θ que l'on a coutume d'appeler *la fonction de Jacobi*.

Les valeurs particulières $\Theta(0)$ et $\Theta(K)$, que l'on trouve de la manière suivante, ne sont pas sans intérêt. De (99) on tire pour $x = 0$, en ayant égard à la valeur de Q, la formule :

$$(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2 \cdots = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots},$$

dans laquelle le numérateur du second membre est $\Theta(0)$. En divisant les deux membres par le produit $(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots$, on trouve

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots = \frac{\Theta(0)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}.$$

Si l'on introduit encore dans les deux membres les facteurs $1-q^2$, $1-q^4$, $1-q^6$, etc., il vient :

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots = \Theta(0)\cdot\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^8}{1-q^4}\cdots$$
$$= \Theta(0)\cdot(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots;$$

d'où

$$\Theta(0) = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots}.$$

Or, la valeur du second membre a été trouvée ci-dessus (page 168), et l'on a :

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}. \tag{104}$$

La dernière formule (103) donne, pour $u=0$, une relation entre $\Theta(K)$ et $\Theta(0)$, laquelle, en vertu de (104), prend la forme suivante :

$$\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}. \tag{105}$$

Des deux premières formules (103), on déduit, pour $u=0$,

$$H(0)=0, \quad H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}. \tag{106}$$

A cela se rattachent plusieurs remarques importantes relatives au calcul numérique des fonctions et des intégrales elliptiques. De la dernière formule (103) on tire, pour $u=0$,

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)}, \tag{107}$$

c'est-à-dire, en vertu de la série de $\Theta(u)$,

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}.$$

12

Cette formule donne immédiatement k', ainsi que k, lorsque q est donné (1). Réciproquement, on peut trouver q, lorsque l'on connaît k ou k'. On a, en effet,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots},$$

ou, en posant, pour abréger,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\lambda,$$

et développant la fraction du second membre suivant les puissances de q,

$$\lambda=q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-\cdots$$

Les puissances successives de λ nous donnent :

$$\begin{aligned}
\lambda^5 &= q^5-10q^9+65q^{13}-330q^{17}+\cdots,\\
\lambda^9 &= q^9-18q^{13}+189q^{17}-\cdots,\\
\lambda^{13} &= q^{13}-26q^{17}+\cdots,\\
\lambda^{17} &= \phantom{q^5-10q^9-18q^{13}-26}q^{17}-\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Si l'on forme la somme suivante :

$$\lambda+a_1\lambda^5+a_2\lambda^9+a_3\lambda^{13}+\cdots=q+(a_1-2)q^5+(a_2-10a_1+5)q^9+\cdots,$$

et si l'on détermine les coefficients a_1, a_2, a_3, etc., de manière que les coefficients de q^5, q^9, q^{13}, etc., soient nuls, on obtient réciproquement

$$q=\lambda+2\lambda^5+15\lambda^9+150\lambda^{13}+1707\lambda^{17}+\cdots$$

---

(1) D'ailleurs, la première formule (103) donne, pour $u=K$,

$$\sqrt{k}=\frac{H(K)}{\Theta(K)},$$

ou bien

$$\sqrt{k}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}.$$

Enfin, de la relation $k^2+k'^2=1$, on tire :

$$(2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+\cdots)^4+(1-2q+2q^4-\cdots)^4=(1+2q+2q^4+\cdots)^4.$$

J. G.

Cette série est très-convergente; car, même pour le module assez grand

$$k = \frac{\sqrt{80}}{9} = 0{,}99381, \qquad k' = \frac{1}{9}, \qquad \lambda = \frac{1}{4},$$

le cinquième terme

$$1707\lambda^{17} = 0{,}0000001,$$

sera si petit que le calcul s'arrête à lui, si l'on se contente de l'exactitude ordinaire jusqu'à sept décimales. Mais ordinairement le calcul se simplifie ; ainsi, par exemple, pour

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254, \qquad k' = \frac{1}{2},$$

on a :

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{3}{2} - \sqrt{2} &= 0{,}08578644, \\ 2\lambda^5 &= 0{,}00000929, \\ \hline q &= 0{,}08579573; \end{aligned}$$

de même, pour $k < 0{,}866$ deux termes suffisent toujours. D'ailleurs, on a déjà des tables qui donnent les valeurs de q correspondant à chaque valeur de k. La table suivante en donne un exemple; on y a posé $k = \sin \alpha$, et l'angle α croît de degré en degré (1).

(1) Jacobi a donné une table de 6 en 6 minutes dans son mémoire « *Zur Theorie der elliptischen Functionen,* » *Journal de Crelle*, T. XXVI, p. 93. Ce mémoire renferme beaucoup de remarques pratiques sur le calcul numérique des fonctions elliptiques.

α	k	log. q	α	k	log. q	α	k	log. q
1°	0,01745	5,27966	31°	0,51504	8,28456	61°	0,87462	8,95200
2°	0,03490	5,88178	32°	0,52992	8,31367	62°	0,88295	8,97045
3°	0,05234	6,23408	33°	0,54464	8,34199	63°	0,89101	8,98885
4°	0,06976	6,48411	34°	0,55919	8,36957	64°	0,89879	9,00720
5°	0,08716	6,67813	35°	0,57358	8,39646	65°	0,90631	9,02553
6°	0,10453	6,83673	36°	0,58779	8,42271	66°	0,91355	9,04385
7°	0,12187	6,97091	37°	0,60182	8,44835	67°	0,92050	9,06218
8°	0,13917	7,08723	38°	0,61566	8,47342	68°	0,92718	9,08055
9°	0,15643	7,18991	39°	0,62932	8,49796	69°	0,93358	9,09897
10°	0,17365	7,28185	40°	0,64279	8,52199	70°	0,93969	9,11748
11°	0,19081	7,36510	41°	0,65606	8,54555	71°	0,94552	9,13609
12°	0,20791	7,44119	42°	0,66913	8,56867	72°	0,95106	9,15484
13°	0,22495	7,51128	43°	0,68200	8,59137	73°	0,95630	9,17376
14°	0,24192	7,57625	44°	0,69466	8,61368	74°	0,96126	9,19289
15°	0,25882	7,63683	45°	0,70711	8,63563	75°	0,96593	9,21228
16°	0,27564	7,69359	46°	0,71934	8,65722	76°	0,97030	9,23196
17°	0,29237	7,74699	47°	0,73135	8,67848	77°	0,97437	9,25202
18°	0,30902	7,79743	48°	0,74314	8,69944	78°	0,97815	9,27250
19°	0,32557	7,84524	49°	0,75471	8,72011	79°	0,98163	9,29351
20°	0,34202	7,89068	50°	0,76604	8,74052	80°	0,98481	9,31515
21°	0,34837	7,93400	51°	0,77715	8,76068	81°	0,98769	9,33756
22°	0,37461	7,97540	52°	0,78801	8,78059	82°	0,99027	9,36091
23°	0,39073	8,01505	53°	0,79864	8,80030	83°	0,99255	9,38545
24°	0,40674	8,05311	54°	0,80902	8,81979	84°	0,99452	9,41152
25°	0,42262	8,08971	55°	0,81915	8,83912	85°	0,99619	9,43962
26°	0,43837	8,12498	56°	0,82904	8,85826	86°	0,99756	9,47054
27°	0,45399	8,15901	57°	0,83867	8,87726	87°	0,99863	9,50569
28°	0,46947	8,19190	58°	0,84805	8,89611	88°	0,99939	9,54798
29°	0,48481	8,22374	59°	0,85717	8,91484	89°	0,99985	9,60564
30°	0,50000	8,25461	60°	0,86603	8,93347	90°	1,00000	10,00000

De ce tableau il résulte que q croît très-lentement de $k = 0$ à $k = 0,999$, valeur à laquelle correspond $q = 0,555$ et qu'il tend ensuite rapidement vers la valeur 1. Si $\alpha < 70^{\circ}$, c'est-à-dire $k < 0,94$, il s'en suit $q < 0,1511$, et alors q^9 n'a aucune influence sur la septième décimale ; toutes les formules dans lesquelles entre la fonction de Jacobi deviennent alors extrêmement simples.

Lorsque l'on a calculé q, on trouve K au moyen de la formule (105) dans laquelle on met pour Θ (K) la série correspondante, et l'on a :

$$K = \frac{1}{2}\pi(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2.$$

Par exemple, pour $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $q = 0,08579575$, on a

$$1 + 2q = 1,17159146, \qquad 2q^4 = 0,00010837,$$

$$K = \frac{1}{2}\pi(1,17169983)^2 = 2,156515.$$

Pour calculer l'amplitude φ, correspondant à une valeur donnée de u, on fait usage de la troisième formule (103), c'est-à-dire

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{k'} \cdot \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - \cdots},$$

de laquelle on tire facilement $\sin\varphi$ et φ. Si, par exemple, on donne

$$F\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \varphi\right) = 5,208881,$$

on a les valeurs précédentes

$$q = 0,0857957, \qquad K = 2,156515;$$

en outre

$$\frac{\pi u}{K} = 7,588251 = 2\pi + \text{arc } 74^{\circ}46'29''25.$$

La formule ci-dessus devient

$$\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi} = 0,7738482, \qquad \sin\varphi = \pm\, 0,7315537.$$

Comme la valeur donnée $u = 5,208881$ est comprise entre $2K = 4,3\ldots$

et $3K = 7,4...$, l'amplitude correspondante doit être comprise entre 2.90° et 3.90°; par suite

$$\varphi = 180° + 47° = 227°.$$

La réciproque qui consiste à calculer, pour une amplitude φ donnée, la valeur de l'intégrale elliptique $u = F(k, \varphi)$, trouve une nouvelle solution au moyen de la formule mentionnée ci-dessus. En effet, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\pi u}{K} = v,$$

on a

$$\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q \cos v + 2q^4 \cos 2v + \cdots}{1 - 2q \cos v + 2q^4 \cos 2v - \cdots};$$

on en tire facilement :

$$\frac{1}{2q} \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{k'}} = \frac{\cos v + q^8 \cos 3v + q^{24} \cos 5v + \cdots}{1 + 2q^4 \cos 2v + 2q^{16} \cos 4v + \cdots}.$$

Si l'on pose, pour abréger, la quantité connue

$$\frac{1}{2q} \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{k'}} = \Omega,$$

l'équation précédente donne :

$$\cos v = \Omega\,(1 + 2q^4 \cos 2v + 2q^{16} \cos 4v + \cdots)$$
$$- q^8 \cos 3v - q^{24} \cos 5v - \cdots,$$

et l'on a une équation transcendante au moyen de laquelle on peut calculer v. Comme les quantités q^4, q^8, etc., sont de très-petites fractions, on trouve facilement une première valeur rapprochée v_1 de v, en prenant simplement

$$\cos v_1 = \Omega.$$

On obtient une approximation plus grande, au moyen de l'équation précédente elle-même : on aura

$$\cos v_2 = \Omega\,(1 + 2q^4 \cos 2v_1 + \cdots) - q^8 \cos 3v_1 - \cdots,$$
$$\cos v_3 = \Omega\,(1 + 2q^4 \cos 2v_2 + \cdots) - q^8 \cos 3v_2 - \cdots,$$

et ainsi de suite.

Connaissant v on en déduit ensuite :

$$u = \frac{Kv}{\pi}.$$

Soit, par exemple, $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varphi = 47°$; on aura, comme ci-dessus,

$$k' = \frac{1}{2}, \quad q = 0{,}0857957, \quad K = 2{,}156515;$$

la valeur de Ω est, dans ce cas, 0,2626382; par conséquent,

$$\cos v_1 = 0{,}2626382, \qquad v_1 = 74°46'24'',$$

$$\cos v_2 = 0{,}2626137, \qquad v_2 = 74°46'29''25.$$

Comme v_3 est déjà le même que v_2, il vient :

$$v = 74°46'29''25 = 1{,}3050663,$$

$$u = \frac{Kv}{\pi} = 0{,}89585.$$

Si l'on augmente l'amplitude de 180°, la valeur de l'intégrale croît de $2K = 4{,}31303$; à l'amplitude 227° correspond la valeur de l'intégrale 5,20888 comme dans l'exemple précédent.

Notes du traducteur. — Je terminerai ce chapitre par quelques remarques sur les transcendantes elliptiques, et par quelques théorèmes sur les nombres.

La formule (101) nous donne, pour $u = \frac{K}{2}$,

$$\Theta\left(\frac{K}{2}\right) = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{4n^2}.$$

Nous avons déjà vu que, pour $u = 0$, $u = K$, on a :

$$\Theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

$$\Theta(K) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$H(K) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \cdots = 2\sqrt[4]{q}\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n(n+1)} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

D'un autre côté, de la formule (99) on tire :

$$\Theta(u) = Q \cdot \prod_1^{\infty}\left(1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4n-2}\right)$$

$$= \prod_1^{\infty}(1 - q^{2n}) \cdot \prod_1^{\infty}\left(1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4n-2}\right).$$

Or, pour $u = 0$, il vient :

$$\Theta(0) = \prod_1^{\infty}(1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})^2 = \prod_1^{\infty}\frac{(1 - q^{2n})^2(1 - q^{2n-1})^2}{1 - q^{2n}}$$

$$= \prod_1^{\infty}\frac{(1 - q^n)^2}{1 - q^{2n}} = \prod_1^{\infty}\frac{1 - q^n}{1 + q^n}.$$

On a de même :

$$\Theta(K) = \prod_1^{\infty}(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2 = \prod_1^{\infty}\frac{(1 + q^{2n})(1 + q^{2n-1})(1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})(1 + q^{2n-1})}{(1 + q^{2n})(1 - q^{2n-1})}$$

$$= \prod_1^{\infty}\frac{(1 + q^n)(1 - q^n)(1 + q^{2n-1})}{(1 + q^{2n})(1 - q^{2n-1})} = \prod_1^{\infty}\frac{(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})}{(1 + q^{2n})(1 - q^{2n-1})};$$

de même

$$H(K) = 2\sqrt[4]{q} \cdot \prod_1^{\infty}(1 + q^{2n})^2(1 - q^{2n}).$$

En égalant entre elles les deux valeurs de $\Theta(0)$, on obtient la relation

$$1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2} = \prod_1^{\infty}\frac{1 - q^n}{1 + q^n}.$$

De même, l'égalité des valeurs de $\Theta(K)$ nous donne :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} = \prod_1^{\infty}\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \cdot \frac{1 + q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}}.$$

Enfin, des deux valeurs de $H(K)$ on conclut :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n(n+1)} = \prod_1^{\infty}(1 + q^{2n})^2(1 - q^{2n}).$$

D'ailleurs, il est facile de voir qu'en remplaçant u par $u + 2K$ dans (101) et (102), on a :

$$\Theta(u + 2K) = \Theta(u), \qquad \Theta(u + 4K) = \Theta(u),$$

$$H(u + 2K) = -H(u), \qquad H(u + 4K) = H(u);$$

d'où

$$\frac{\Theta(u+2\mathrm{K})}{\mathrm{H}(u+2\mathrm{K})} = -\frac{\Theta(u)}{\mathrm{H}(u)},$$

$$\frac{\Theta(u+4\mathrm{K})}{\mathrm{H}(u+4\mathrm{K})} = \frac{\Theta(u)}{\mathrm{H}(u)}.$$

On en conclut que les transcendantes Θ et H de Jacobi sont des fonctions périodiques. Nous allons voir qu'elles sont simplement périodiques; à cet effet, nous démontrerons qu'elles ne restent pas invariables, lorsque l'on augmente l'argument de $2i\mathrm{K}'$.

La formule

$$\Theta(u) = \prod_1^\infty (1-q^{2n})\left(1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}} + q^{4n-2}\right),$$

peut encore être transformée; en effet, si nous posons $\frac{\pi u}{2\mathrm{K}} = x$, et si nous observons que $2\cos 2x = e^{2ix} + e^{-2ix}$, il vient :

$$1 - 2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2} = (1 - q^{2n-1}e^{2ix})(1 - q^{2n-1}e^{-2ix}).$$

Or, si nous remplaçons x par $x_1 = \frac{\pi(u+2i\mathrm{K}')}{2\mathrm{K}} = x + \frac{i\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$, nous aurons :

$$e^{2ix_1} = e^{2ix}\, e^{-\frac{2\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}} = q^2 e^{2ix}, \qquad e^{-2ix_1} = +\frac{1}{q^2}e^{-2ix};$$

par suite

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}e^{2ix_1})(1 - q^{2n-1}e^{-2ix_1}) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n+1}e^{2ix})(1 - q^{2n-3}e^{2ix})$$

$$= \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{2n-1}e^{2ix})(1 - q^{2n-1}e^{-2ix})\left(1 - \frac{1}{q}e^{-2ix}\right)}{1 - qe^{2ix}}$$

$$= \prod_1^\infty \frac{-\frac{1}{q}e^{-2ix}(1 - q^{2n-1}e^{2ix})(1 - q^{2n-1}e^{-2ix})(1 - qe^{2ix})}{(1 - qe^{2ix})}$$

$$= -\frac{1}{q}e^{-2ix}\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}e^{2ix})(1 - q^{2n-1}e^{-2ix})$$

$$= -\frac{1}{q}e^{-2ix}\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2})$$

Donc,

$$\Theta(u+2i\mathrm{K}')=-\frac{1}{q}e^{-2ix}\prod_1^\infty(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}),$$

ou bien

$$\Theta(u+2i\mathrm{K}')=-\frac{1}{q}e^{-\frac{i\pi u}{\mathrm{K}}}\Theta(u)=-\Theta(u)e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')}.$$

On trouverait de même :

$$\mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}')=-\mathrm{H}(u)e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')}.$$

En effet, la formule (100) donne

$$\mathrm{H}(u)=2\sqrt[4]{q}\sin x\cdot \mathrm{Q}\cdot\prod_1^\infty(1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}).$$

Or, on a

$$1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}=(1-q^{2n}e^{2ix})(1-q^{2n}e^{-2ix}),$$

et, en remplaçant x par $x_1=x+\frac{i\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$, on trouve comme précédemment

$$1-2q^{2n}\cos 2x_1+q^{4n}=\frac{(1-q^{2n}e^{2ix})(1-q^{2n}e^{-2ix})(1-e^{-2ix})}{1-q^2e^{2ix}}.$$

D'autre part,

$$2i\sin x_1=qe^{ix}-\frac{1}{q}e^{-ix}=-\frac{1}{q}e^{-ix}(1-q^2e^{2ix}).$$

Par suite,

$$\mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}')=-\frac{1}{q}e^{-2ix}\cdot 2\sqrt[4]{q}\sin x\,\mathrm{Q}\cdot\prod_1^\infty(1-q^{2n}e^{2ix})(1-q^{2n}e^{-2ix}),$$

ou bien

$$\mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}')=-\frac{1}{q}e^{-\frac{i\pi u}{\mathrm{K}}}\mathrm{H}(u)=-\mathrm{H}(u)e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')}.$$

Des résultats précédents, on tire :

$$\frac{\Theta(u+2i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(u+2i\mathrm{K}')}=\frac{\Theta(u)}{\mathrm{H}(u)}.$$

Si l'on pose

$$\Theta_1(u)=\mathrm{Q}\prod_1^\infty\left(1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4n-2}\right),$$

on trouve :

$$\Theta_1(u)=\Theta(u+\mathrm{K}).$$

De même, si

$$\mathrm{H}_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\prod_1^\infty\left(1 + 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}} + q^{4n}\right),$$

il vient :

$$\mathrm{H}_1(u) = \mathrm{H}(u + \mathrm{K}).$$

On trouve facilement

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\mathrm{H}_1(u+\mathrm{K})}{\Theta_1(u+\mathrm{K})},$$

$$\cos \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta_1(u+\mathrm{K})},$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(u+\mathrm{K})}.$$

Enfin, on a aussi les relations suivantes :

$$\Theta_1(u + 2\mathrm{K}) = \Theta_1(u),$$

$$\Theta_1(u + 2i\mathrm{K}') = \Theta_1(u) \cdot e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')},$$

$$\mathrm{H}_1(u + 2\mathrm{K}) = -\mathrm{H}_1(u),$$

$$\mathrm{H}_1(u + 2i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(u) \cdot e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')},$$

et ainsi de suite. On voit donc que les transcendantes Θ_1 et H_1, ainsi que Θ et H, ne sont que simplement périodiques.

En terminant cette note, j'indiquerai une propriété remarquable des nombres à laquelle on est conduit par les formules précédentes : *Tout nombre entier est la somme de quatre carrés.*

Cette propriété se démontre par la comparaison des deux formules ci-dessus :

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots,$$

$$\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\left[\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots\right].$$

La première de ces relations a pour second membre une série dont les exposants sont les carrés des nombres naturels. Si l'on élève cette série à la quatrième puissance, il vient :

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots)^4.$$

On voit facilement que, dans ce développement, chaque terme de la nouvelle série sera le produit de quatre termes de la première, c'est-à-dire qu'il sera de la forme :

$$q^{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2},$$

α, β, γ, δ, étant quatre nombres égaux ou inégaux, ou même nuls.

D'un autre côté, si l'on développe en série toutes les fractions de la seconde formule, on trouve :

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\,[q + 3q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 6q^5 + \cdots\cdots];$$

Or, on démontre facilement (1) que cette nouvelle série, laquelle est évidemment égale à la précédente, renferme comme exposants tous les nombres entiers. Ces deux séries devant être égales terme à terme, on en conclut, en désignant par λ un nombre entier quelconque,

$$\lambda = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

IX. Des fonctions thêta.

Les formules du chapitre précédent existent, d'après leur définition, seulement pour des valeurs réelles de la variable u ; examinons maintenant si ces résultats restent vrais pour des valeurs imaginaires de la variable. Si l'on considère les développements de sin am u, cos am u etc., en séries de la forme

$$a_1 \sin\frac{\pi u}{2K} + a_3 \sin\frac{3\pi u}{2K} + a_5 \sin\frac{5\pi u}{2K} + \cdots,$$

$$b_1 \cos\frac{\pi u}{2K} + b_3 \cos\frac{3\pi u}{2K} + b_5 \cos\frac{5\pi u}{2K} + \cdots,$$

on remarque facilement que ces séries deviennent divergentes lorsque u est imaginaire ; de sorte que pour de telles valeurs de u, il ne peut être

(1) Cette démonstration est un peu longue ; c'est pourquoi nous l'avons supprimée. Voir Durège, *Theorie der elliptischen Functionen*, p. 265. J. G.

question d'appliquer les équations correspondantes. Il en est autrement des développements de $\Theta(u)$ et $\mathrm{H}(u)$; car, comme on sait, les séries (101) et (102) sont convergentes pour toute valeur imaginaire de u, pourvu que q soit une fraction simple et réelle. Les recherches que nous allons faire s'appliqueront d'abord aux fonctions Θ et H, pour lesquelles les équations (101) et (102) peuvent être considérées comme des définitions générales. En outre, nous rendrons cette analyse tout-à-fait indépendante de la théorie précédente des fonctions elliptiques. Nous désignons, dans ce qui suit, par ρ une constante réelle positive quelconque, par z une variable imaginaire, et nous posons :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(z) &= 1 - 2e^{-\rho}\cos 2z + 2e^{-4\rho}\cos 4z - 2e^{-9\rho}\cos 6z + \cdots,\\
\vartheta_1(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\rho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}}\sin 5z - \cdots,\\
\vartheta_2(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\rho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}}\cos 5z + \cdots,\\
\vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\rho}\cos 2z + 2e^{-4\rho}\cos 4z + 2e^{-9\rho}\cos 6z + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (108)$$

a. Entre les quatre équations ainsi déterminées, il existe, comme on l'observe immédiatement, les quatre relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(z) &= \vartheta_3\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), & \vartheta_3(z) &= \vartheta\left(\frac{1}{2}\pi - z\right),\\
\vartheta_1(z) &= \vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), & \vartheta_2(z) &= \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi - z\right).
\end{aligned}\right\} \quad (109)$$

En outre, si m est un nombre entier, on a :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(z + m\pi) &= \vartheta(z), & \vartheta_3(z + m\pi) &= \vartheta_3(z),\\
\vartheta_1(z + m\pi) &= (-1)^m\,\vartheta_1(z), & \vartheta_2(z + m\pi) &= (-1)^m\,\vartheta_2(z).
\end{aligned}\right\} \quad (110)$$

Les fonctions ϑ et ϑ_3 ont donc la période réelle π, et les deux autres la période 2π.

Si, dans (108), on exprime les cosinus et sinus par des exponentielles, et si l'on emploie, pour abréger, les signes Σ, on peut exprimer ces quatre équations de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(z) &= \Sigma\,(-1)^s e^{-s^2\rho - i.2sz},\\
\vartheta_1(z) &= i\Sigma\,(-1)^s e^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\rho - i(2s+1)z},\\
\vartheta_2(z) &= \Sigma\, e^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\rho - i(2s+1)z},\\
\vartheta_3(z) &= \Sigma\, e^{-s^2\rho - i.2sz};
\end{aligned}\right\} \quad (111)$$

les signes Σ s'étendent à toutes les valeurs positives et négatives de s. On a identiquement :

$$i\Sigma(-1)^s e^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 \rho}\, e^{-i(2s+1)z} = ie^{-\frac{1}{4}\rho - iz}\Sigma(-1)^s e^{-s^2\rho - i.2s\left(z-\frac{1}{2}i\rho\right)},$$

c'est-à-dire

$$\vartheta_1(z) = ie^{-\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta\left(z - \frac{1}{2}i\rho\right).$$

Si l'on traite de la même manière les autres fonctions thêta, on arrive aux quatre formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(z) &= ie^{-\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_1\left(z - \frac{1}{2}i\rho\right),\\
\vartheta_1(z) &= ie^{-\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta\left(z - \frac{1}{2}i\rho\right),\\
\vartheta_2(z) &= e^{-\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_3\left(z - \frac{1}{2}i\rho\right),\\
\vartheta_3(z) &= e^{-\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_2\left(z - \frac{1}{2}i\rho\right).
\end{aligned}\right\} \quad (112)$$

En remplaçant z par $z + \frac{1}{2}i\rho$, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_1(z),\\
\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta(z),\\
\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_3(z),\\
\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_2(z).
\end{aligned}\right\} \quad (113)$$

Si l'on met plusieurs fois de suite $z + \frac{1}{2}i\rho$ à la place de z, on obtient facilement, pour n entier et positif,

$$\vartheta(z + in\rho) = (-1)^n e^{n^2\rho - i.2nz}\vartheta(z),$$

$$\vartheta_1(z + in\rho) = (-1)^n e^{n^2\rho - i.2nz}\vartheta_1(z),$$

$$\vartheta_2(z+in\rho)=e^{n^2\rho-i.2nz}\,\vartheta_2(z),$$
$$\vartheta_3(z+in\rho)=e^{n^2\rho-i\,2nz}\,\vartheta_3(z);$$

en outre, si l'on remplace z par $z+m\pi$, on a, en vertu de (110)

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(z+m\pi+in\rho)&=(-1)^n\,e^{n^2\rho-i.2nz}\,\vartheta(z),\\ \vartheta_1(z+m\pi+in\rho)&=(-1)^{m+n}\,e^{n^2\rho-i.2nz}\,\vartheta_1(z),\\ \vartheta_2(z+m\pi+in\rho)&=(-1)^m\,e^{n^2\rho-i.2nz}\,\vartheta_2(z),\\ \vartheta_3(z+m\pi+in\rho)&=e^{n^2\rho-i.2nz}\,\vartheta_3(z).\end{aligned}\right\}\qquad(114)$$

Il s'en suit que les fonctions thêta ne sont pas seulement simplement périodiques, mais que le quotient de deux de ces fonctions a deux périodes, dont l'une a l'indice réel π ou 2π, l'autre l'indice imaginaire $i\rho$ ou $2i\rho$.

Nous reviendrons sur ce sujet dans la suite.

b. Pour donner une autre forme aux quatre séries qui servent à définir les fonctions thêta, nous ferons usage de la formule (voir la note à la fin du volume) :

$$\Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}}=\sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\,\Sigma e^{-s^2\rho}\cos 2sz,\qquad(115)$$

à laquelle nous pouvons rattacher une autre semblable.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}}&=2\Sigma e^{-\frac{(2s\pi+z)^2}{\rho}}-\Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}}\\ &=2\Sigma e^{-\frac{\left(s\pi+\frac{1}{2}z\right)^2}{\frac{1}{4}\rho}}-\Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}};\end{aligned}$$

et si l'on transforme le second membre au moyen de (115),

$$\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}}=\sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\left\{\Sigma e^{-\frac{1}{4}s^2\rho}\cos sz-\Sigma e^{-s^2\rho}\cos 2sz\right\}.$$

Enfin, le développement des sommes du second membre donne plus simplement

$$\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}}=\sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\,\Sigma e^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\rho}\cos(2s+1)z.\qquad(116)$$

Or, comme on le voit facilement, les formules (115) et (116) sont identiques aux suivantes :

$$\Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}}=\sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\cdot\vartheta_3(z),$$

$$\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} \cdot \vartheta_2(z),$$

dans lesquelles on peut même remplacer z par $-z$, sans altérer le second membre. Si l'on met encore $\frac{1}{2}\pi - z$ au lieu de z, et si l'on a égard aux relations (109), on arrive aux expressions suivantes des fonctions thêta :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \Sigma e^{-\frac{1}{\rho}\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)\pi - z\right]^2}, \\
\vartheta_1(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \Sigma(-1)^s e^{-\frac{1}{\rho}\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)\pi - z\right]^2}, \\
\vartheta_2(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \Sigma(-1)^s e^{-\frac{1}{\rho}(s\pi - z)^2}. \\
\vartheta_3(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \Sigma e^{-\frac{1}{\rho}(s\pi - z)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (117)$$

Ces formules sont importantes, parce qu'elles permettent d'exprimer les fonctions thêta d'une variable imaginaire au moyen des fonctions thêta d'une variable réelle. Ainsi, de la première équation (111) on tire, en remplaçant z par iz,

$$\vartheta(iz) = \Sigma(-1)^s e^{-s^2\rho + 2sz} = e^{\frac{z^2}{\rho}} \Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\rho - z)^2}{\rho}}.$$

Si l'on introduit dans le second membre, au lieu de ρ et z, deux nouvelles quantités ρ' et z', au moyen des équations

$$\rho\rho' = \pi^2, \quad \frac{z}{\pi} = \frac{z'}{\rho'}, \qquad (118)$$

il vient :

$$\frac{z^2}{\rho} = \frac{z'^2}{\rho'}, \quad \frac{(s\rho - z)^2}{\rho} = \frac{(s\pi - z')^2}{\rho'};$$

par suite, la formule relative à $\vartheta(iz)$ devient :

$$\vartheta(iz) = e^{\frac{z'^2}{\rho'}} \Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi - z')^2}{\rho'}}.$$

D'autre part, on tire de la troisième formule (117), en y remplaçant ρ

par ρ', z par z', et observant que ϑ_2 dépend en même temps de ρ' et de z',

$$\vartheta_2(\rho', z') = \sqrt{\frac{\pi}{\rho'}} \cdot \Sigma(-1)^s e^{-\frac{1}{\rho'}(s\pi - z')^2}.$$

La somme du second membre étant la même que dans $\vartheta(iz)$, on en déduit une relation entre $\vartheta(iz)$ et $\vartheta_2(\rho', z')$.

En général, on obtiendra de la même manière les quatre relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(\rho, iz) &= \sqrt{\frac{\rho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\rho'}}\, \vartheta_2(\rho', z'),\\
\vartheta_1(\rho, iz) &= i\sqrt{\frac{\rho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\rho'}}\, \vartheta_1(\rho', z'),\\
\vartheta_2(\rho, iz) &= \sqrt{\frac{\rho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\rho'}}\, \vartheta(\rho', z'),\\
\vartheta_3(\rho, iz) &= \sqrt{\frac{\rho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\rho'}}\, \vartheta_3(\rho', z').
\end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Ces formules montrent comment les fonctions thêta à arguments imaginaires peuvent être exprimées au moyen des fonctions thêta à arguments réels.

Les équations (109), (115) et (119) peuvent d'ailleurs être employées, pour déduire d'une propriété de l'une des quatre fonctions thêta les propriétés analogues des autres fonctions thêta. Si l'on pose, par exemple, dans une formule renfermant $\vartheta(z)$, au lieu de z, successivement $z + \frac{1}{2} i\rho$, iz, $\frac{1}{2}\pi - z$, on arrive à trois nouvelles formules, qui contiennent au lieu de ϑ, les autres fonctions ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3. Nous verrons bientôt une application de ce principe.

c. Formons, d'après la quatrième formule (115), les fonctions $\vartheta_3(x)$, $\vartheta_3(y)$, et multiplions-les l'une par l'autre. Soit, dans la première série, comme dans (115), s la lettre par rapport à laquelle la somme est prise; dans la seconde, écrivons t au lieu de s, et nous aurons :

$$\vartheta_3(x) \cdot \vartheta_3(y) = \Sigma e^{-s^2\rho - i.2sx} \cdot \Sigma e^{-t^2\rho - i.2ty} = \Sigma\Sigma e^{-(s^2+t^2)\rho - i.2(sx+ty)},$$

où s et t désignent tous les nombres entiers positifs et négatifs. Nous aurons alors à considérer les quatre cas suivants :

s pair et t pair,

s impair » t impair,

s pair » t impair,

s impair » t pair.

Nous réunissons les deux premiers cas en un cas principal, où s et t sont de même espèce, les deux derniers en un cas principal où s et t sont d'espèce différente. D'après cela, nous décomposons les doubles sommes relatives à s et t en deux sommes doubles, dont la première renferme les s et t de même espèce, et la seconde les s et t d'espèce différente, et nous écrivons simplement :

$$\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}.$$

Pour s et t de même espèce, $\frac{1}{2}(s+t)$ et $\frac{1}{2}(s-t)$ sont en même temps des nombres entiers positifs ou négatifs, qui peuvent avoir toutes les valeurs possibles; nous poserons donc

$$\frac{1}{2}(s+t) = m, \quad \frac{1}{2}(s-t) = n;$$

d'où

$$s = m+n, \quad t = m-n, \quad s^2+t^2 = 2(m^2+n^2).$$

La somme double représentée par P se forme de la manière suivante :

$$\mathrm{P} = \Sigma\Sigma e^{-2(m^2+n^2)\rho - i.2[m(x+y)+n(x-y)]} = \Sigma e^{-m^2.2\rho - i.2m(x+y)} \,.\, \Sigma e^{-n^2.2\rho - i.2n(x-y)},$$

et, en vertu de la définition de ϑ_3, on a :

$$\mathrm{P} = \vartheta_3(2\rho, x+y)\cdot\vartheta_3(2\rho, x-y).$$

Si s et t sont d'espèce différente, on a :

$$\frac{1}{2}(s+t) = p + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}(s-t) = q + \frac{1}{2},$$

p, q désignant tous les nombres entiers positifs ou négatifs; il s'en suit :

$$s = p+q+1, \quad t = p-q, \quad s^2+t^2 = 2\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Par conséquent

$$Q = \Sigma\Sigma e^{-2\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(q+\frac{1}{2}\right)^2\right]\rho - i.2\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)(x+y)+\left(q+\frac{1}{2}\right)(x-y)\right]}$$

$$= \Sigma e^{-2\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\rho - i(2p+1)(x+y)} \cdot \Sigma e^{-2\left(q+\frac{1}{2}\right)^2\rho - i(2q+1)(x-y)},$$

c'est-à-dire, en vertu de la définition de ϑ_2,

$$Q = \vartheta_2(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_2(2\rho, x-y).$$

La substitution des valeurs de P et Q dans la formule relative à $\vartheta_3(x) \cdot \vartheta_3(y)$ la transforme en la suivante :

$$\vartheta_3(x) \cdot \vartheta_3(y) = \vartheta_3(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_3(2\rho, x-y) + \vartheta_2(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_2(2\rho, x-y). \quad (120)$$

Si l'on remplace x par $\frac{1}{2}\pi - x$, et y par $\frac{1}{2}\pi - y$, on obtient facilement, en ayant égard aux formules (109) et (110) :

$$\vartheta(x) \cdot \vartheta(y) = \vartheta_3(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_3(2\rho, x-y) - \vartheta_2(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_2(2\rho, x-y). \quad (121)$$

En outre, de (112) on tire :

$$\vartheta_3\left(\rho, z - \frac{1}{2}i\rho\right) = e^{\frac{1}{4}\rho + iz}\,\vartheta_2(\rho, z),$$

et, si l'on met 2ρ à la place de ρ,

$$\vartheta_3(2\rho, z - i\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho + iz} \cdot \vartheta_2(2\rho, z).$$

On trouve de même

$$\vartheta_2(2\rho, z - i\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho + iz} \cdot \vartheta_3(2\rho, z).$$

Si l'on change, dans (120), x en $x - \frac{1}{2}i\rho$, y en $y - \frac{1}{2}i\rho$, on obtient, en passant par les exponentielles,

$$\vartheta_2(x) \cdot \vartheta_2(y) = \vartheta_3(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_2(2\rho, x-y) + \vartheta_2(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_3(2\rho, x-y). \quad (122)$$

Enfin, si l'on remplace encore x et y respectivement par $\frac{1}{2}\pi - x$ et $\frac{1}{2}\pi - y$, il vient :

$$\vartheta_1(x) \cdot \vartheta_1(y) = \vartheta_3(2\rho, x+y) \cdot \vartheta_2(2\rho, x-y) - \vartheta_2(2\rho, x+y \cdot \vartheta_3(2\rho, x-y). \quad (123)$$

Les quatre formules (120) à (123) permettent de trouver un grand nombre de relations entre les fonctions thêta. Nous allons exposer les plus importantes.

d. Faisons, dans les quatre formules fondamentales, $y=x$, et posons, pour abréger,

$$\vartheta_2(2\rho, 0) = \alpha_2, \quad \vartheta_3(2\rho, 0) = \alpha_3,$$
$$\vartheta_2(2\rho, 2x) = \xi_2, \quad \vartheta_3(2\rho, 2x) = \xi_3.$$

Nous aurons alors les relations particulières suivantes :

$$[\vartheta\ (x)]^2 = \alpha_3\xi_3 - \alpha_2\xi_2,$$
$$[\vartheta_1(x)]^2 = \alpha_2\xi_3 - \alpha_3\xi_2.$$
$$[\vartheta_2(x)]^2 = \alpha_2\xi_3 + \alpha_3\xi_2,$$
$$[\vartheta_3(x)]^2 = \alpha_3\xi_3 + \alpha_2\xi_2.$$

Si l'on tire ξ_2 et ξ_3 de deux de ces équations pour les substituer dans les deux autres, on obtient des relations entre les carrés de trois des fonctions thêta. Ainsi, par exemple, si l'on déduit ξ_2 et ξ_3 des deux premières, on trouve :

$$\frac{2\alpha_3\alpha_2}{\alpha_3^2+\alpha_2^2}[\vartheta(x)]^2 = [\vartheta_1(x)]^2 + \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\alpha_3^2+\alpha_2^2}[\vartheta_2(x)]^2,$$

$$[\vartheta(x)]^2 = \frac{2\alpha_3\alpha_2}{\alpha_3^2+\alpha_2^2}[\vartheta_1(x)]^2 + \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\alpha_3^2+\alpha_2^2}[\vartheta_3(x)]^2.$$

Comme, en vertu des formules (108), α_3 et α_2 sont des nombres réels et positifs, les équations qui précèdent, appliquées au cas particulier $x=0$, nous montrent que $\alpha_3^2 - \alpha_2^2$ est positif.

Posons encore, pour abréger,

$$\frac{2\alpha_3\alpha_2}{\alpha_3^2+\alpha_2^2} = k,$$

k étant une fraction positive; nous aurons alors :

$$\frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\alpha_3^2+\alpha_2^2} = \sqrt{1-k^2} = k',$$

où le radical doit être pris positivement. Les relations précédentes peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} k\,[\vartheta(x)]^2 &= [\vartheta_1(x)]^2 + k'\,[\vartheta_2(x)]^2, \\ [\vartheta(x)]^2 &= k\,[\vartheta_1(x)]^2 + k'\,[\vartheta_3(x)]^2. \end{aligned}\right\} \quad (124)$$

En particulier, pour $x=0$, on a $\vartheta_1(0)=0$,

$$k=\left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2,\quad k'=\left[\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2. \tag{125}$$

e. Si, dans (123), nous remplaçons ρ par $\frac{1}{2}\rho$, et si nous posons $x=z+\frac{1}{2}u$, $y=\frac{1}{2}u$, il vient :

$$\vartheta_3(z+u)\cdot\vartheta_2(z)-\vartheta_2(z+u)\cdot\vartheta_3(z)=\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,z+\frac{1}{2}u\right)\cdot\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,\frac{1}{2}u\right),$$

et, en divisant par $-u\,\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(z+u)$,

$$\frac{1}{u}\left\{\frac{\vartheta_2(z+u)}{\vartheta_3(z+u)}-\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right\}=-\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,z+\frac{1}{2}u\right)}{\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(z+u)}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,\frac{1}{2}u\right)}{u}.$$

Lorsque u converge vers zéro, le premier membre a pour limite le quotient différentiel de $\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}$ par rapport à z; si l'on pose

$$\lim\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,\frac{1}{2}u\right)}{u}=\lambda,$$

λ étant une quantité indépendante de z, il vient :

$$\frac{d.\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right\}}{dz}=-\lambda\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,z\right)}{[\vartheta_3(z)]^2}.$$

Afin de trouver une autre expression du numérateur du second membre, faisons $y=0$ dans (122), et nous aurons

$$\vartheta_2(x)\cdot\vartheta_2(0)=2\,\vartheta_3(2\rho,\,x)\cdot\vartheta_2(2\rho,\,x);$$

remplaçant ensuite ρ et x respectivement par $\frac{1}{2}\rho$, et $\frac{1}{2}\pi-z$, on trouve :

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\rho,\,z\right)=\frac{2\vartheta(z)\cdot\vartheta_1(z)}{\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\rho,\,0\right)}.$$

En substituant cette valeur dans la formule ci-dessus, il vient

$$\frac{d\left\{\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right\}}{dz} = -\mu\,\frac{\vartheta(z)\cdot\vartheta_1(z)}{[\vartheta_3(z)]^2},$$

μ étant une nouvelle constante.

Si l'on remplace z par $\frac{1}{2}\pi - z$, on obtient :

$$\frac{d\left\{\dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}\right\}}{dz} = \mu\,\frac{\vartheta_2(z)\cdot\vartheta_3(z)}{[\vartheta(z)]^2}. \tag{126}$$

On obtient des formules analogues pour les quotients $\vartheta_2(z):\vartheta(z)$, et $\vartheta_3(z):\vartheta(z)$. On peut les trouver par un procédé analogue ou plus simplement au moyen des équations (124), en divisant ces dernières par $[\vartheta(x)]^2$ et différentiant.

On trouve facilement :

$$\frac{d\left\{\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}\right\}}{dz} = -\frac{\mu}{k'}\cdot\frac{\vartheta_1(z)\cdot\vartheta_3(z)}{[\vartheta(z)]},$$

$$\frac{d\left\{\dfrac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}\right\}}{dz} = -\frac{\mu k}{k'}\cdot\frac{\vartheta_1(z)\cdot\vartheta_2(z)}{[\vartheta(z)]^2}.$$

X. Des fonctions doublement périodiques.

Les recherches précédentes conduisent sans difficulté aux propriétés principales des fonctions $\Theta(w)$ et $\mathrm{H}(w)$, qui, pour toute valeur complexe de w, sont définies par les équations suivantes :

$$\Theta(w) = 1 - 2e^{-\rho}\cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + 2e^{-4\rho}\cos\frac{2\pi w}{\mathrm{K}} - 2e^{-9\rho}\cos\frac{3\pi w}{\mathrm{K}} + \cdots,$$

$$\mathrm{H}(w) = 2\sqrt[4]{e^{-\rho}}\sin\frac{\pi w}{2\mathrm{K}} - 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}}\sin\frac{3\pi w}{2\mathrm{K}} + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}}\sin\frac{5\pi w}{\mathrm{K}} - \cdots,$$

dans lesquelles on peut donner à ρ et à K des valeurs constantes quelconques réelles et positives. On a d'abord :

$$\vartheta\left(\frac{\pi w}{2\mathrm{K}}\right) = \Theta(w), \quad \vartheta_1\left(\frac{\pi w}{2\mathrm{K}}\right) = \mathrm{H}(w);$$

en outre, à cause de $\vartheta_2(z) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$ et $\vartheta_3(z) = \vartheta\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$, on a

$$\vartheta_2\left(\frac{\pi w}{K}\right) = \mathrm{H}(w + K), \quad \vartheta_3\left(\frac{\pi w}{2K}\right) = \Theta(w + K).$$

Des formules (110) il résulte, en remplaçant z par $\frac{\pi w}{2K}$,

$$\Theta(w + 2mK) = \Theta(w), \quad \mathrm{H}(w + 2mK) = (-1)^m \cdot \mathrm{H}(w). \tag{127}$$

De la même manière, on tire de (113), en y faisant

$$\rho = \frac{\pi K'}{K},$$

K′ étant une deuxième constante positive,

$$\left.\begin{aligned} \Theta(w + iK') &= ie^{\frac{\pi}{4K}(K' - 2iw)} \cdot \mathrm{H}(w), \\ \mathrm{H}(w + iK') &= ie^{\frac{\pi}{4K}(K' - 2iw)} \cdot \Theta(w). \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

En outre, les formules (114) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} \Theta(w + 2mK + i \cdot 2nK') &= (-1)^n e^{\frac{\pi}{K}(n^2K' - inw)} \Theta(w), \\ \mathrm{H}(w + 2mK + i \cdot 2nK') &= (-1)^{m+n} e^{\frac{\pi}{K}(n^2K' - inw)} \mathrm{H}(w), \\ \mathrm{H}[w + (2m + 1)K + i \cdot 2nK'] &= (-1)^m e^{\frac{\pi}{K}(n^2K' - inw)} \mathrm{H}(w + K), \\ \Theta[w + (2m + 1)K + i \cdot 2nK'] &= e^{\frac{\pi}{K}(n^2K' - inw)} \Theta(w + K). \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

En vertu de la valeur ci-dessus de ρ, on a, d'après (118),

$$\rho' = \frac{\pi K}{K'}, \quad z' = \frac{\pi w}{2K'},$$

de sorte que ρ', z' s'obtiennent, en changeant K et K′ l'un dans l'autre. Si l'on désigne les séries correspondantes

$$1 - 2e^{-\rho'} \cos \frac{\pi w}{K'} + 2e^{-4\rho'} \cos \frac{2\pi w}{K'} - \cdots,$$

$$2\sqrt[4]{e^{-\rho'}} \sin \frac{\pi w}{2K'} - 2\sqrt[4]{e^{-9\rho'}} \sin \frac{3\pi w}{2K'} + \cdots,$$

par $\Theta\,(K'\,w)$ et $H\,(K', w)$ on arrive à la transformation suivante des formules (119) :

$$\left.\begin{aligned}
\Theta\,(iw) &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\, H\,(K', w + K'),\\
H\,(iw) &= i\sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\, H\,(K', w),\\
H\,(iw + K) &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\, \Theta\,(K', w),\\
\Theta\,(iw + K) &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\, \Theta\,(K', w + K').
\end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

Les fractions positives, représentées par k et $k' = \sqrt{1 - k^2}$, qui entrent dans (125), sont déterminées par les équations

$$k = \left[\frac{H\,(K)}{\Theta\,(K)}\right]^2, \qquad k' = \left[\frac{\Theta\,(0)}{\Theta\,(K)}\right]^2, \qquad (131)$$

et les relations (124) sont exprimées, si l'on pose $x = \frac{\pi w}{2K}$, par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
k\,[\Theta\,(w)]^2 &= [H\,(w)]^2 + k'\,[H\,(w + K)]^2,\\
[\Theta\,(w)]^2 &= k\,[H\,(w)]^2 + k'\,[\Theta\,(w + K)]^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

Enfin, l'équation différentielle (126) se change, pour

$$z = \frac{\pi w}{2K}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi\mu}{2K},$$

en la suivante :

$$\frac{d\left[\frac{H\,(w)}{\Theta\,(w)}\right]}{dw} = \varepsilon\, \frac{H\,(w+K)\cdot\Theta\,(w + K)}{[\Theta\,(w)^2]}, \qquad (133)$$

dans laquelle ε représente une constante indéterminée.

D'après la formation des formules fondamentales pour Θ et H, considérons, dans l'hypothèse de w complexe, les trois nouvelles fonctions suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
f\,(w) &= \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H\,(w)}{\Theta\,(w)},\\
f_1\,(w) &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H\,(w+K)}{\Theta\,(w)},\\
f_2\,(w) &= \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta\,(w+K)}{\Theta\,(w)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

Au moyen de (127), on déduit entre autres les propriétés suivantes de ces fonctions :

$$\mathrm{f}(-w) = -\mathrm{f}(w), \quad \mathrm{f}_1(-w) = \mathrm{f}_1(w), \quad \mathrm{f}_2(-w) = \mathrm{f}_2(w), \tag{135}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{f}(w+\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{f}_1(w)}{\mathrm{f}_2(w)}, \quad \mathrm{f}_1(w+\mathrm{K}) = -k'\cdot\frac{\mathrm{f}(w)}{\mathrm{f}_2(w)}, \\ &\mathrm{f}_2(w+\mathrm{K}) = \frac{k'}{\mathrm{f}_2(w)}. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

En outre, de (128) et (127) on tire :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{f}(w+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k\,\mathrm{f}(w)}, \quad \mathrm{f}_1(w+i\mathrm{K}') = -\,i\,\frac{\mathrm{f}_2(w)}{k\,\mathrm{f}(w)}, \\ &\mathrm{f}_2(w+i\mathrm{K}') = -\,i\,\frac{\mathrm{f}_1(w)}{\mathrm{f}(w)}; \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

et plus généralement de (129) on déduit

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{f}(w+2m\mathrm{K}+i\cdot 2n\mathrm{K}') = (-1)^m\,\mathrm{f}(w), \\ &\mathrm{f}_1(w+2m\mathrm{K}+i\cdot 2n\mathrm{K}') = (-1)^{m-n}\,\mathrm{f}_1(w), \\ &\mathrm{f}_2(w+2m\mathrm{K}+i\cdot 2n\mathrm{K}') = (-1)^n\,\mathrm{f}_2(w). \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Ces formules montrent immédiatement la double périodicité des fonctions $\mathrm{f}(w)$, $\mathrm{f}_1(w)$ et $\mathrm{f}_2(w)$. Pour m pair, le second membre de la première équation devient égal à $\mathrm{f}(w)$, et par conséquent $\mathrm{f}(w)$ a une période réelle 4K, et une période imaginaire $i\cdot 2\mathrm{K}'$. Dans la deuxième équation, le second membre est égal à $\mathrm{f}_1(w)$, aussi bien lorsque m est pair, et $n=0$, que si $m=n$; par suite, $\mathrm{f}_1(w)$ a une période réelle 4K, et une période imaginaire $2\mathrm{K}+i\cdot 2\mathrm{K}'$. Enfin, on reconnaît, au moyen de la dernière équation, que $\mathrm{f}_2(w)$ a une période réelle 2K, et une période imaginaire $i\cdot 4\mathrm{K}'$.

Si nous désignons par $\mathrm{f}(\mathrm{K}', w)$, $\mathrm{f}_1(\mathrm{K}', w)$, $\mathrm{f}_2(\mathrm{K}', w)$ les fonctions qui se déduisent de $\mathrm{f}(w)$, $\mathrm{f}_1(w)$, $\mathrm{f}_2(w)$, par le changement de K en K′, nous obtenons, au moyen des formules (130),

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{f}(iw) = i\,\frac{\mathrm{f}(\mathrm{K}', w)}{\mathrm{f}_1(\mathrm{K}', w)}, \quad \mathrm{f}_1(iw) = \frac{1}{\mathrm{f}_1(\mathrm{K}', w)}, \\ &\mathrm{f}_2(iw) = \frac{\mathrm{f}_2(\mathrm{K}', w)}{\mathrm{f}_1(\mathrm{K}', w)}; \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

ces formules réduisent les fonctions à arguments imaginaires aux fonctions à arguments réels.

Les équations (132) donnent, en divisant par $[\Theta(w)]^2$.

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{f}(w)]^2 + [\mathrm{f}_1(w)]^2 &= 1, \\ k^2[\mathrm{f}(w)]^2 + [\mathrm{f}_2(w)]^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

d'où l'on tire, en passant, la conséquence

$$[\mathrm{f}_2(w)]^2 - k^2[\mathrm{f}_1(w)]^2 = k'^2. \tag{141}$$

La formule (133) est très-importante : elle conduit à une équation différentielle entre w et $\mathrm{f}(w)$. On a d'abord :

$$\frac{d\,\mathrm{f}(w)}{dw} = \varepsilon\,\mathrm{f}_1(w)\cdot\mathrm{f}_2(w),$$

et, si l'on exprime $\mathrm{f}_1(w)$ et $\mathrm{f}_2(w)$ au moyen des équations (140), on arrive à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\,\mathrm{f}(w)}{dw} = \varepsilon\sqrt{1-[\mathrm{f}(w)]^2}\cdot\sqrt{1-k^2[\mathrm{f}(w)]^2};$$

et, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{f}(w) = z, \tag{142}$$

il vient :

$$\frac{dz}{dw} = \varepsilon\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

L'intégration de cette équation différentielle donne

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \varepsilon w + \text{const},$$

et, comme z s'annule en même temps que w, on a :

$$\varepsilon w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{143}$$

Pour déterminer la constante ε, prenons en particulier $w = \mathrm{K}$, d'où $z = \mathrm{f}(\mathrm{K})$, et, en vertu de (131),

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{H}(\mathrm{K})}{\Theta(\mathrm{K})} = 1;$$

il viendra

$$\varepsilon = \frac{1}{K}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{144}$$

Si les constantes K et K′ sont choisies arbitrairement, on connaît $\rho = \frac{\pi K'}{K}$, et l'on peut alors calculer, pour chaque valeur de w, les fonctions $\Theta(w)$ et $H(w)$ par la sommation des séries équivalentes; les formules (131) et (144) donnent ensuite k et ε, de sorte que toutes les quantités en question ont une définition précise.

Au lieu de considérer les constantes K et K′ on peut aussi choisir deux autres quelconques des constantes existantes. Ce qui est le plus avantageux dans cette recherche, c'est de considérer la fraction positive k, comme une quantité arbitraire, et de donner à K la valeur suivante :

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}; \tag{144a}$$

on a alors $\varepsilon = 1$, et d'après (143),

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{145}$$

La fonction $z = f(w)$ est alors la fonction qui résulte de l'inversion de l'équation précédente.

Pour déterminer K′ nous employons la première des formules (137) pour $w = K$; elle donne :

$$f(K + iK') = \frac{1}{k\,f(K)} = \frac{1}{k}.$$

Comme, d'après cela, les valeurs $w = K + iK'$, et $z = \frac{1}{k}$ sont correspondantes, on a, en vertu de (145),

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

en retranchant (144a) de cette dernière, il vient :

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

ou bien :

$$K' = -\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

La substitution

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\zeta^2}}, \quad \text{où} \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

nous donne

$$K' = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k'^2\zeta^2)}}, \tag{146}$$

et par conséquent, K′ dépend de k', comme K dépend de k.

A la fin de cette analyse, il est à peine nécessaire de remarquer que les fonctions $\mathrm{f}(w)$, $\mathrm{f}_1(w)$, $\mathrm{f}_2(w)$ sont identiques aux fonctions elliptiques ci-dessus : $\sin \operatorname{am} w$, $\cos \operatorname{am} w$, $\Delta \operatorname{am} w$. On peut donc profiter des fonctions thêta dès le commencement de la théorie des fonctions elliptiques. Mais nous ne pouvons passer sous silence qu'il reste toujours une lacune sensible. En effet, comme dans (145) la variable z est en général complexe, on doit, pour éviter une ambiguité possible de l'intégrale, indiquer un chemin déterminé d'intégration, ou bien l'on doit montrer l'influence que les différents chemins d'intégration exercent sur la valeur de l'intégrale. La théorie des fonctions thêta ne remplit aucune de ces deux conditions, et il est toujours nécessaire de compléter par les recherches exposées au chapitre II (page 101)(1).

---

(1) Jacobi a suivi, dans ses leçons, la marche des chapitres IX et X. On trouve une théorie détaillée des fonctions thêta dans l'ouvrage de M. SCHELLBACH : « *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen.* »

XI. Des fonctions elliptiques de la deuxième et de la troisième espèce.

Les trois fonctions elliptiques principales de première espèce sont représentées par $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$, si, à la place de φ, on met l'inverse de l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

c'est-à-dire $\varphi = \operatorname{am} u$; de même, au moyen des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèces $E(\varphi)$ et $\Pi(\varphi)$, on forme, par la même substitution, les nouvelles fonctions de l'amplitude $E(\operatorname{am} u)$, $\Pi(\operatorname{am} u)$, que l'on a appelées *fonctions elliptiques de deuxième et de troisième espèces*. D'après cela, u est pour toutes les fonctions elliptiques la variable indépendante.

a. Si, dans l'équation

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi d\varphi,$$

on pose $\varphi = \operatorname{am} u$, d'où $d\varphi = \Delta \operatorname{am} u\, du$, il vient :

$$E(\operatorname{am} u) = \int_0^u (\Delta \operatorname{am} u)^2\, du = \int_0^u (1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u)\, du. \qquad (147)$$

D'après cela, la recherche de $E(\operatorname{am} u)$ se réduit à celle de $\int \sin^2 \operatorname{am} u\, du$.

Pour obtenir le développement en série de $E(\operatorname{am} u)$, nous ferons usage de la formule trouvée ci-dessus (page 146) :

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \frac{K - E}{k^2 K} - \frac{2\pi^2}{k^2 K^2}\left\{\frac{1q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\};$$

d'où

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} u = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\left\{\frac{1q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Multipliant par du, et intégrant entre les limites $u = 0$, et $u = u$, on obtient :

$$E(\operatorname{am} u) = \frac{E}{K} u + \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}. \quad (148)$$

Nous considérerons plus tard la partie périodique de cette série comme une nouvelle fonction de u, et nous la désignerons par $Z(u)$: on a alors

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}, \quad (149)$$

et

$$E(\operatorname{am} u) = \frac{E}{K}u + Z(u). \quad (150)$$

b. D'après la notation de Jacobi, on appelle intégrale elliptique de troisième espèce la suivante :

$$\Pi(\varphi, \alpha, k) = \int_0^\varphi \frac{k^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(k,\alpha)\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)},$$

dans laquelle l'arc α peut être un nombre complexe. Si l'on pose $\varphi = \operatorname{am} u$, et que l'on considère α comme une amplitude quelconque $\alpha = \operatorname{am} a$, on a pour équation de définition :

$$\Pi(\operatorname{am} u, \operatorname{am} a, k) = \int_0^u \frac{k^2 \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u}\,du.$$

Nous désignerons dorénavant, pour abréger, le premier membre par le symbole plus simple $\Pi(u, a)$.

De la définition donnée il résulte d'abord

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{k^2 \sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} a\sin^2\operatorname{am} u}, \quad (151)$$

et, par une différentiation nouvelle

$$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} = \frac{1}{2}k^2\cdot\frac{2\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} a}\cdot\frac{2\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} a}.$$

Au moyen des formules données ci-dessus (page 124) pour $\sin\sigma + \sin\tau$, $\sin\sigma - \sin\tau$, on trouve facilement que l'équation précédente se réduit à la suivante :

$$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} = \frac{1}{2}k^2[\sin\operatorname{am}(u+a) + \sin\operatorname{am}(u-a)][\sin\operatorname{am}(u+a) - \sin\operatorname{am}(u-a$$

laquelle se réduit à

$$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} = \frac{1}{2}k^2\left\{\sin^2\operatorname{am}(u+a) - \sin^2\operatorname{am}(u-a)\right\}. \quad (152)$$

Si l'on fait usage du développement de $\sin^2 \mathrm{am}\, u$, lequel subsiste pour toutes les valeurs réelles de u, en y remplaçant d'abord u par $u + a$, et ensuite par $u - a$, on trouve :

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \left\{ \cos \frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{n\pi(u+a)}{K} \right\}.$$

Multipliant par du, et intégrant, en observant (151) que, pour $u = 0$, $\frac{d\Pi(u, a)}{du} = 0$, il vient :

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = \frac{\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left\{ \sin \frac{n\pi(u-a)}{K} - \sin \frac{n\pi(u+a)}{K} \right\}$$

$$+ \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n\pi a}{K}.$$

Une nouvelle intégration entre les limites $u = 0$ et $u = u$, nous donne

$$\Pi(u, a) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1 - q^{2n})} \left\{ \cos \frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{n\pi(u+a)}{K} \right\}$$

$$+ u \cdot \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n\pi a}{K}.$$

La dernière somme est égale à $uZ(a)$. D'après cela, on a le développement suivant pour toutes les valeurs réelles de u :

$$\left.\begin{aligned} \Pi(u, a) = uZ(a) &- \frac{1}{1} \cdot \frac{q}{1 - q^2} \left\{ \cos \frac{\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{\pi(u+a)}{K} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1 - q^4} \left\{ \cos \frac{2\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{2\pi(u+a)}{K} \right\} \\ &- \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (153)$$

ou bien

$$\Pi(u, a) = uZ(a) - \frac{1}{1} \cdot \frac{2q}{1 - q^2} \sin \frac{\pi a}{K} \sin \frac{\pi u}{K}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{2q^2}{1 - q^4} \sin \frac{2\pi a}{K} \sin \frac{2\pi u}{K} - \cdots.$$

c. Au lieu de l'équation (153) on peut écrire plus simplement :

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \mathrm{f}(u + a) - \mathrm{f}(u - a), \quad (154)$$

où la fonction f (w) a, comme on le voit facilement, la valeur

$$\mathrm{f}(w) = \frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi w}{\mathrm{K}} + \cdots$$

Si l'on développe chaque terme au moyen de la formule

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = q^n + q^{3n} + q^{5n} + q^{7n} + \cdots,$$

on obtient, en ordonnant autrement les termes des séries,

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(w) = {} & \frac{1}{1} q \cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{2} q^2 \cos\frac{2\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{3} q^3 \cos\frac{3\pi w}{\mathrm{K}} + \cdots \\ & + \frac{1}{1} q^3 \cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{2} q^6 \cos\frac{2\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{3} q^9 \cos\frac{3\pi w}{\mathrm{K}} + \cdots \\ & + \frac{1}{1} q^5 \cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{2} q^{10} \cos\frac{2\pi w}{\mathrm{K}} + \frac{1}{3} q^{15} \cos\frac{3\pi w}{\mathrm{K}} + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,\end{aligned}$$

ou bien, d'après une formule connue,

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(w) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\Big\{ & \left(1 - 2q\cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + q^6\right) \\ & \left(1 - 2q^5\cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + q^{10}\right)\cdots\Big\}.\end{aligned}$$

En vertu des développements donnés au chapitre VIII, on a, en posant pour abréger,

$$\mathrm{P} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots},$$

la formule

$$\mathrm{f}(w) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\left\{\mathrm{P}\left(1 - 2q\cos\frac{\pi w}{\mathrm{K}} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{\mathrm{K}} - 2q^9\cos\frac{3\pi w}{\mathrm{K}} + \cdots\right)\right\},$$

ou plus simplement

$$\mathrm{f}(w) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\left\{\mathrm{P}\cdot\Theta(w)\right\}.$$

L'équation (154) se change alors en la suivante :

$$\Pi(u, a) = u\mathrm{Z}(a) + \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\left\{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right\}, \tag{155}$$

de laquelle il résulte que la fonction Π peut être ramenée aux deux fonctions Θ et Z.

d. La formule précédente ne subsiste, d'après sa formation, que pour des valeurs réelles de u et de a; il est nécessaire d'examiner si cette relation peut encore exister pour des valeurs complexes de u et de a. A cet effet, nous rappelons les formules exposées ci-dessus (p. 195).

$$\vartheta(x)\,\vartheta(y) = \vartheta_3(2\rho, x+y)\cdot\vartheta_3(2\rho, x-y) - \vartheta_2(2\rho, x+y)\cdot\vartheta_2(2\rho, x-y),$$
$$\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y) = \vartheta_3(2\rho, x+y)\cdot\vartheta_2(2\rho, x-y) - \vartheta_2(2\rho, x+y)\cdot\vartheta_3(2\rho, x-y);$$

en posant, pour abréger,

$$\vartheta_3(2\rho, x+y) = s_3, \quad \vartheta_3(2\rho, x-y) = t_3,$$
$$\vartheta_2(2\rho, x+y) = s_2, \quad \vartheta_2(2\rho, x-y) = t_2,$$

on a immédiatement

$$\vartheta(x)\,\vartheta(y) = s_3 t_3 - s_2 t_2,$$
$$\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y) = s_3 t_2 - s_2 t_3.$$

Si l'on fait dans la première $y = 0$, et si l'on met, à la place de x, d'abord $x+y$, et ensuite $x-y$, on obtient les deux relations suivantes :

$$\vartheta(0)\,\vartheta(x+y) = s_3^2 - s_2^2,$$
$$\vartheta(0)\,\vartheta(x-y) = t_3^2 - t_2^2.$$

En vertu de l'équation identique

$$(s_3 t_3 - s_2 t_2)^2 - (s_3 t_2 - s_2 t_3)^2 = (s_3^2 - s_2^2)(t_3^2 - t_2^2),$$

il vient :

$$[\vartheta(x)\,\vartheta(y)]^2 - [\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)]^2 = [\vartheta(0)]^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y),$$

ou bien, en posant $x = \dfrac{\pi u}{2K}$, $y = \dfrac{\pi v}{2K}$,

$$[\Theta(u)\,\Theta(v)]^2 - [H(u)\,H(v)]^2 = [\Theta(0)]^2\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v).$$

Si l'on divise les deux membres de cette équation par $[\Theta(u)\,\Theta(v)]^2$, et si l'on a égard à l'équation

$$\frac{H(w)}{\Theta(w)} = \sqrt{k}\sin\operatorname{am} w,$$

on obtient :

$$1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} u \sin^2\operatorname{am} v = \frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)}{[\Theta(u)\,\Theta(v)]^2}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres, et différentions par rapport à v, nous aurons :

$$\frac{k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v} = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'(u-v)}{\Theta(u-v)} - \frac{1}{2}\frac{\Theta'(u+v)}{\Theta(u+v)}.$$

Enfin, si nous faisons $v = a$, si nous multiplions par du, et si nous intégrons entre les limites $u = 0$ et $u = u$, le premier membre devient $\Pi(u, a)$, et l'on a, en général,

$$\Pi(u, a) = u\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\left\{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right\}. \tag{156}$$

Cette formule nous conduit à deux remarques importantes.

1° En la comparant avec (155), on conclut d'un côté que pour toute valeur réelle de a, on doit avoir

$$Z(a) = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Pour généraliser, nous définirons pour toute valeur complexe de w, la fonction $Z(w)$ par l'équation

$$Z(w) = \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)}; \tag{157}$$

par suite, $Z(w)$ est une fonction monodrome bien déterminée. Si l'on divise (156) par a, si l'on fait converger a vers zéro, et si l'on pose :

$$\lim \frac{\Theta'(a)}{a\Theta(a)} = \lambda,$$

on trouve facilement

$$\int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am} u\, du = \lambda u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)};$$

par conséquent

$$\int_0^u (1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u)\, du = (1-\lambda)\,u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}. \tag{158}$$

Or, dans cette équation, qui subsiste pour toute valeur complexe de u, le premier membre est $E(\operatorname{am} u)$, que l'on peut écrire, en abrégé, $E(u)$. Dans le second membre, le facteur $1 - \lambda$ se détermine pour une valeur particulière et réelle de u, en ayant égard aux équations (157) et (150). On trouve ainsi $1 - \lambda = \frac{E}{K}$; et alors, de (158) on tire

$$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u). \tag{159}$$

Donc, la formule (150) s'applique aux variables complexes comme aux valeurs réelles de u.

2° De (156) on déduit la formule suivante :

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \frac{1}{2} \text{l.} \left\{ \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} \right\}, \tag{160}$$

laquelle est la généralisation de (155).

Les trois équations (157), (159) et (160), jointes aux formules (105), conduisent à ce théorème important que : *Toutes les fonctions elliptiques peuvent être exprimées au moyen de la transcendante* Θ *de Jacobi.*

On peut, comme conséquences, en déduire de nouveau deux théorèmes déjà connus. La formule (160) nous donne, à cause de $\Theta(-w) = \Theta(w)$,

$$\Pi(u, a) - \Pi(a, u) = uZ(a) - aZ(u),$$

ou, en exprimant d'après (159) la fonction Z au moyen de E :

$$\Pi(u, a) - \Pi(a, u) = uE(a) - aE(u).$$

C'est le théorème déjà mentionné précédemment (page 64) sur le changement d'amplitude et de paramètre.

On a, en outre, en vertu de (159) et (157),

$$\frac{1}{2}\int_{u-a}^{u+a} E(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_{u-a}^{u+a} \left\{ \frac{E}{K} w + \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)} \right\} dw = \frac{E}{K} au + \frac{1}{2} \text{l.} \left\{ \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} \right\}$$

D'un autre côté, de (159) et (160) on tire :

$$uE(a) - \Pi(u, a) = \frac{E}{K} au + \frac{1}{2} \text{l.} \left\{ \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} \right\};$$

puisque les seconds membres de ces deux dernières équations sont les mêmes, on en conclut

$$uE(a) - \frac{1}{2}\int_{u-a}^{u+a} E(w)\,dw = \Pi(u, a),$$

formule identique à (79) de la page 65.

e. Des propriétés connues de $\Theta(w)$, on déduit sans difficulté les propriétés correspondantes de $Z(w)$ et $\Pi(w, a)$.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation (130)

$$\Theta(iv) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}} H(v + K', k'),$$

ou de l'équation identique à la précédente [en vertu de (103)]

$$\Theta(iv) = \sqrt{\frac{k'K}{kK'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}} \Theta(v, k') \cos \mathrm{am}(v, k'),$$

et que l'on différentie, en ayant égard à (157), on trouve

$$iZ(iv) = Z(v, k') + \frac{\pi v}{2KK'} - \operatorname{tg} \mathrm{am}(u, k') \Delta \mathrm{am}(u, k'), \tag{161}$$

Cette équation ramène la fonction Z d'un argument imaginaire à la fonction Z à argument réel.

En partant de la formule

$$\Theta(K + iv) = \sqrt{\frac{K}{kK'}}\, e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}} \Theta(v, k') \Delta \mathrm{am}(v, k'),$$

résultant de la combinaison de (130) et (103), on obtient de la même manière :

$$iZ(K + iv) = Z(v, k') + \frac{\pi v}{2KK'} - \frac{k'^2 \sin \mathrm{am}(u, k') \cos \mathrm{am}(u, k')}{\Delta \mathrm{am}(u, k')}. \tag{162}$$

De même de la formule

$$\Theta(u + iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-\frac{i\pi u}{2K}} \Theta(u) \sin \mathrm{am}\, u,$$

on déduit la suivante :

$$Z(u + iK') = Z(u) - \frac{i\pi}{2K} + \operatorname{cotg} \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u, \tag{163}$$

à laquelle on peut encore joindre la formule

$$Z(u + 2iK') = Z(u) - i\,\frac{\pi}{K}, \tag{164}$$

correspondant à la relation

$$\Theta(u + 2iK') = -\frac{1}{q}\, e^{-\frac{i\pi u}{K}} \Theta(u).$$

Si, dans (160), on met à la place de a, successivement ib, $K+ib$, $a+iK'$, et si l'on a égard aux formules (161), (162) et (163), on arrive aux résultats suivants :

$$i\Pi(u, ib) = u\left\{Z(b, k') + \frac{\pi b}{2KK'} - \operatorname{tg}\operatorname{am}(b, k')\,\Delta\operatorname{am}(b, k')\right\}$$
$$+ \frac{i}{2}\,\mathrm{l.}\left\{\frac{\Theta(u-ib)}{\Theta(u+ib)}\right\}, \tag{165}$$

$$i\Pi(u, K+ib) = u\left\{Z(b, k') + \frac{\pi b}{2KK'} - \frac{k'^2\sin\operatorname{am}(b, k')\cos\operatorname{am}(b, k')}{\Delta\operatorname{am}(b, k')}\right\}$$
$$+ \frac{i}{2}\,\mathrm{l.}\left\{\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+K+ib)}\right\}, \tag{166}$$

$$\Pi(u, a+iK') = u\left\{Z(a) - i\frac{\pi}{2K} + \operatorname{cotg}\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\left\{\frac{\Theta(u-a-iK')}{\Theta(u+a+iK')}\right\}. \tag{167}$$

On trouve des formules analogues lorsque l'on remplace dans (160) u par iv, ou par $K+iv$, ou par $u+iK'$. Mais, comme il est toujours possible de changer l'un dans l'autre, l'amplitude et le paramètre, il n'est pas besoin de nouvelles formules pour ces cas.

f. Finalement nous allons montrer comment l'intégrale de troisième espèce de Legendre

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - h\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\Delta\varphi}, \tag{168}$$

peut être ramenée à la fonction Π pour une valeur quelconque de h, et comment elle peut être calculée numériquement. Soit, dans tous les cas,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \operatorname{am} u; \tag{169}$$

en outre

$$h = -k^2\sin^2\operatorname{am} c;$$

il viendra :

$$\sin\operatorname{am} c = \frac{\sqrt{-h}}{k}, \quad c = \int_0^{\frac{\sqrt{-h}}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{170}$$

L'équation (168) devient alors, en général,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = u + \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} c}{\Delta\operatorname{am} c}\,\Pi\,(u, c). \tag{171}$$

Pour donner à cette dernière une forme plus usuelle, nous devons distinguer quatre cas pour h réel, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l} -k^2 < h < 0, \\ -1 < h < -k^2, \\ -\infty < h < -1, \end{array}\right\} h \text{ négatif,}$$

$$0 < h < +\infty, \qquad h \text{ positif.}$$

Dans le premier cas, la limite supérieure de l'intégrale (170) est réelle et < 1; par suite, c est un nombre réel que nous appellerons a. On a alors immédiatement les formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} -k^2 < h < 0, \qquad a = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{-h}}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ \Pi_0(\varphi) = u + \dfrac{\operatorname{tg}\operatorname{am} a}{\Delta\operatorname{am} a}\,\Pi\,(u, a). \end{array}\right\} \tag{172}$$

Dans le deuxième cas, la limite supérieure de l'intégrale $\frac{\sqrt{-h}}{k}$ est comprise entre 1 et $\frac{1}{k}$, et alors l'intégrale indiquée pour c (170), s'obtient comme l'intégrale (33) de la page 110. On obtient pour c une expression de la forme $K - ib = 2K - (K + ib)$; si l'on introduit cette condition dans (171), et si l'on a égard à ce que, en vertu de la signification primitive de Π, on a

$$\Pi\,(u, 2K - \gamma) = -\,\Pi\,(u, \gamma),$$

on arrive aux formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} -1 < h < -k^2, \qquad b = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{1+\frac{k^2}{h}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \\ \Pi_0(\varphi) = u + \dfrac{\Delta\operatorname{am}(b, k')}{k'^2\sin\operatorname{am}(b, k')\cos\operatorname{am}(b, k')}\, i\cdot\Pi\,(u, K + ib). \end{array}\right\} \tag{173}$$

Dans le troisième cas, la limite supérieure $\frac{\sqrt{-h}}{k}$ est comprise entre $\frac{1}{k}$ et $+\infty$, et alors l'intégrale indiquée pour c (170) se transforme comme l'intégrale (55) de la page 111. On trouve ainsi pour c une expression de la forme $2K - a - iK'$. D'après ces remarques, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < h < -1, \quad a = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{-h}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ \Pi_0(\varphi) = u + \dfrac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} \Pi(u, a + iK'). \end{array}\right\} \quad (174)$$

Dans le dernier cas, $\frac{\sqrt{-h}}{k}$ est imaginaire, et alors on doit traiter l'intégrale (170) comme on l'a fait précédemment (page 109) pour l'intégrale (51). On trouve ainsi pour c une expression de la forme ib, et l'on a, en général,

$$\left.\begin{array}{l} 0 < h < +\infty, \quad b = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{h}{h+k^2}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \\ \Pi_0(\varphi) = u + \dfrac{\sin \operatorname{am}(b, k') \cos \operatorname{am}(b, k')}{\Delta \operatorname{am}(b, k')} i\,\Pi(u, ib). \end{array}\right\} \quad (175)$$

Les formules (170) et (171) subsistent aussi pour h imaginaire; seulement, on a besoin d'une recherche particulière pour déterminer la quantité c de l'équation

$$\sin \operatorname{am} c = \frac{\sqrt{-h}}{k}.$$

Soient maintenant

$$h = m + in, \quad c = a + ib, \qquad (176)$$

m et n désignant des quantités données, a et b des quantités inconnues.

L'équation ci-dessus est alors identique à

$$\sin \operatorname{am}(a + ib) = \frac{\sqrt{-m - in}}{k},$$

et il s'en suit :

$$\cos \operatorname{am}(a + ib) = \frac{\sqrt{k^2 + m + in}}{k}, \quad \Delta \operatorname{am}(a + ib) = \sqrt{1 + m + in}.$$

Les seconds membres de ces trois équations sont composés de quantités connues, et peuvent être mis sous la forme $re^{i\theta}$. Si nous posons d'après cela :

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-m-in}&=r\,(\cos\theta+i\sin\theta),\\ \sqrt{k^2+m+in}&=r_1\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\\ \sqrt{1+m+in}&=r_2\,(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),\end{aligned}\right\}\quad(177)$$

nous pouvons considérer, dans ce qui suit, r, r_1, r_2, θ, θ_1, θ_2, comme des quantités réelles connues, et nous avons les trois équations

$$\sin\mathrm{am}\,(a+ib)=\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{k},$$

$$\cos\mathrm{am}\,(a+ib)=\frac{r_1\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{k},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(a+ib)=r_2\,(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

auxquelles correspondent les suivantes :

$$\sin\mathrm{am}\,(a-ib)=\frac{r\,(\cos\theta-i\sin\theta)}{k},$$

$$\cos\mathrm{am}\,(a-ib)=\frac{r_1(\cos\theta_1-i\sin\theta_1)}{k},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(a-ib)=r_2\,(\cos\theta_2-i\sin\theta_2).$$

Si l'on applique actuellement les formules connues (41) de la page 122 pour $\sin\mathrm{am}(u+v)$ et $\sin\mathrm{am}\,(u-v)$ au cas $u=a+ib$, $v=a-ib$, on obtient, au moyen des valeurs indiquées de $\sin\mathrm{am}\,(a+ib)$, etc.,

$$\sin\mathrm{am}\,(2a)=\frac{2rr_1r_2}{k^2-r^4}\cos\,(\theta-\theta_1-\theta_2),$$

$$\sin\mathrm{am}\,(2ib)=i\cdot\frac{2rr_1r_2}{k^2-r^4}\sin\,(\theta-\theta_1-\theta_2).$$

De même, les formules (42) relatives à $\cos\mathrm{am}\,(u+v)$ et $\cos\mathrm{am}\,(u-v)$ nous donnent :

$$\cos\mathrm{am}\,(2a)=\frac{r_1^2-(rr_2)^2}{k^2-r^4},$$

$$\cos\mathrm{am}\,(2ib)=\frac{r_1^2+(rr_2)^2}{k^2-r^4}.$$

D'après cela,

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(2a) = \frac{2rr_1r_2}{r_1^2 - (rr_2)^2}\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2),$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(2ib) = i \cdot \frac{2rr_1r_2}{r_1^2 + (rr_2)^2}\sin(\theta - \theta_1 - \theta_2).$$

Pour simplifier ces formules, nous introduirons un angle auxiliaire γ, défini par l'équation

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{rr_2}{r_1}; \tag{178}$$

nous aurons alors

$$\frac{2rr_1r_2}{r_1^2 - (rr_2)^2} = \operatorname{tg} 2\gamma, \qquad \frac{2rr_1r_2}{r_1^2 + (rr_2)^2} = \sin 2\gamma.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, et si l'on a égard à la relation

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(2ib) = i \cdot \sin\operatorname{am}(2b, k'),$$

on obtient les deux formules

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(2a) = \operatorname{tg} 2\gamma \cos(\theta - \theta_1 - \theta_2), \tag{179}$$

$$\sin\operatorname{am}(2b, k') = \sin 2\gamma \cdot \sin(\theta - \theta_1 - \theta_2), \tag{180}$$

lesquelles serviront à déterminer a et b, et par conséquent $c = a + ib$ (1).

Remarques du traducteur. — La formule (149) donne pour $u = K$,

$$Z(K) = 0;$$

pour $u = \frac{K}{2}$, elle donne :

$$Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots\right\} = -\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.$$

---

(1) Jacobi a montré le premier (*Fundamenta nova theor. funct. ellipt.*, § 47 à 60) que les intégrales elliptiques de la deuxième et de la troisième espèce se ramènent aux fonctions Θ. Il prend pour point de départ (comme à la page 205) le développement de $\sin^2 \operatorname{am} u$, auquel il arrive par une voie pénible, en élevant au carré le développement de $\sin\operatorname{am} u$. Le procédé que nous avons donné pour déterminer a et b, et qui renferme ce théorème que *tout nombre complexe peut se ramener à la forme sin am* $(a + ib)$, est dû à Richelot. *Journ. de Crelle*, t. 45, p. 225.

En remplaçant la somme Σ par sa valeur trouvée ci-dessus (p. 170), il vient :

$$Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1-k'}{2}.$$

En faisant $u=0$ dans la formule (163), on obtient

$$Z(iK') = \infty,$$

et la formule (164) donne, pour $u=0$,

$$Z(2iK') = -\frac{i\pi}{K}.$$

De la formule (157)

$$Z(w) = \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)},$$

on tire, en multipliant par dw et intégrant,

$$\Theta(w) = \Theta(0)\, e^{\int_0^w Z(w)\, dw}.$$

Enfin, la formule (p. 211)

$$\Pi(u, a) - \Pi(a, u) = uZ(a) - aZ(u),$$

nous donne, pour $u = K$, en observant que

$$\Pi(a, K) = 0, \qquad Z(K) = 0,$$

$$\Pi(K, a) = K \cdot Z(a).$$

NOTE.

Démonstration de la formule (115).

Si l'on pose

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t) \cos nt\, dt,$$

on obtient, dans l'hypothèse de $0 < x < 2\pi$, l'équation

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots = f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + f(4\pi - x) + f(4\pi + x) + \cdots$$

Dans le cas particulier où

$$f(x) = e^{-a^2x^2},$$

on a

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2t^2} \cos nt\, dt = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{n}{2a}\right)^2}.$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2}\cos x + e^{-\left(\frac{2}{2a}\right)^2}\cos 2x + e^{-\left(\frac{3}{2a}\right)^2}\cos 3x + \cdots\right\}$$

$$= e^{-a^2x^2} + e^{-a^2(2\pi - x)^2} + e^{-a^2(2\pi + x)^2} + e^{-a^2(4\pi - x)^2} + e^{-a^2(4\pi + x)^2} + \cdots$$

Si l'on fait ensuite

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad x = 2z,$$

on trouve

$$e^{\frac{z^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z-\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z-2\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z-3\pi)^2}{\alpha}} + \cdots$$

$$+ e^{-\frac{(z+\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z+2\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z+3\pi)^2}{\alpha}} + \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\left\{1 + 2e^{-\alpha}\cos 2z + 2e^{-4\alpha}\cos 4z + \cdots\right\};$$

ou bien

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+n\pi)^2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\alpha}\cos 2nz.$$

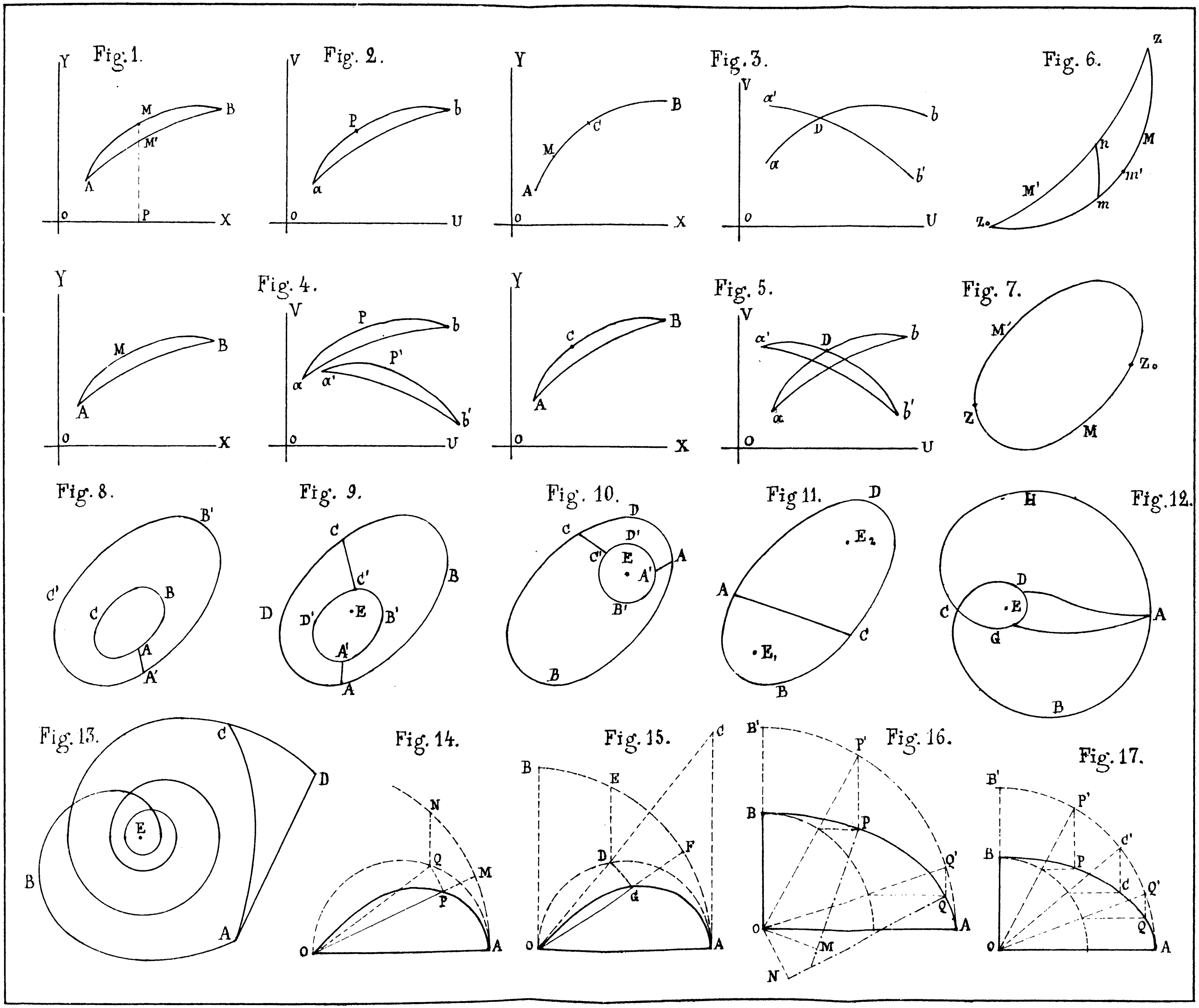


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.

Fig. 18.

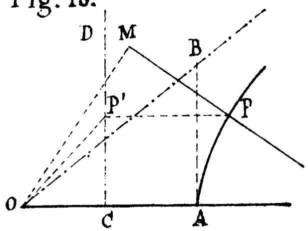
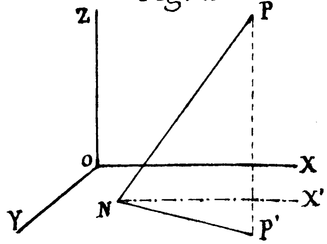


Fig. 19.



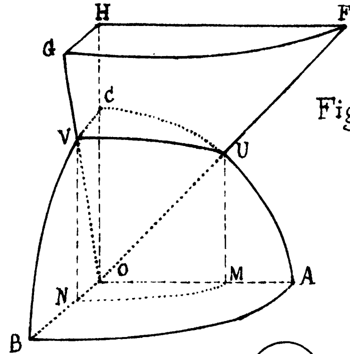


Fig. 20.

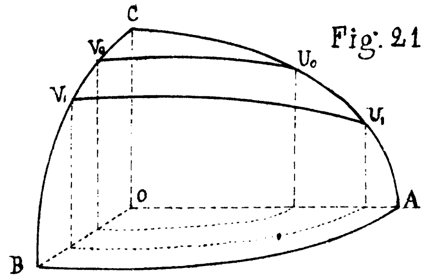


Fig. 21.

Fig. 22.

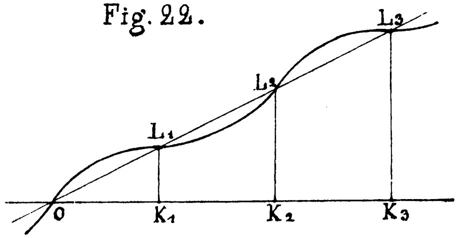
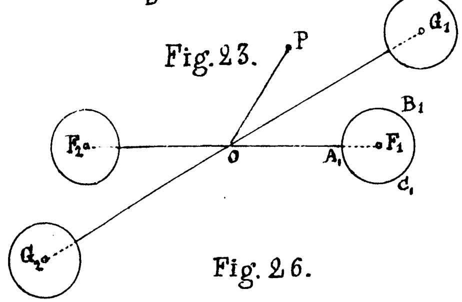


Fig. 23.



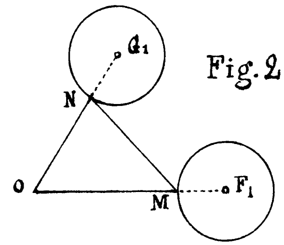


Fig. 24.

Fig. 25.

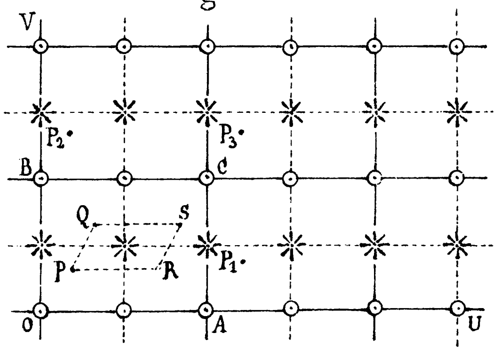


Fig. 26.

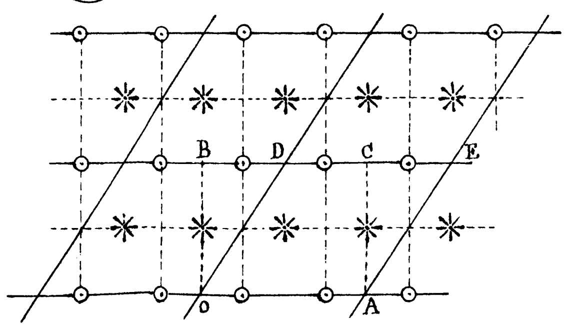


Fig. 27.

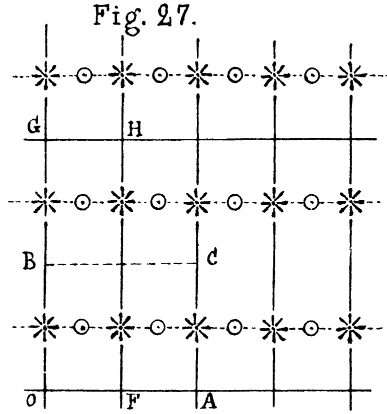


Fig. 28.

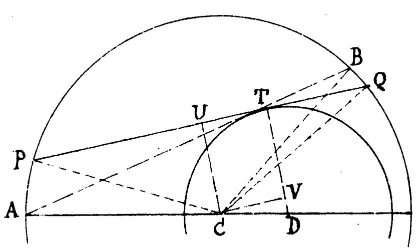


Fig. 29.

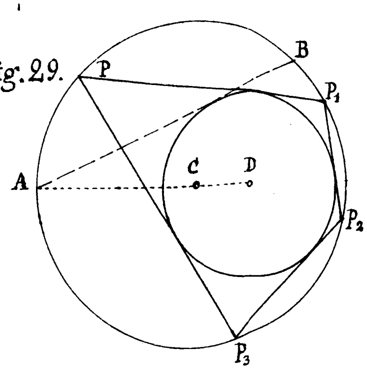


Fig. 30.

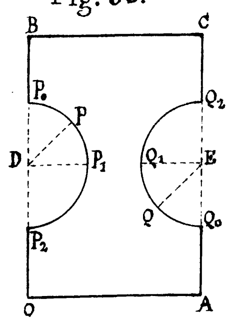


Fig. 31.

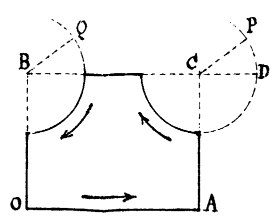


Fig. 32.