Nº D'ORDRE :
569.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. A. THÉVENET,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Agrégé de l'Université,
Chargé de Cours à l'École supérieure des Sciences d'Alger.

1re THÈSE. — Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 21 juillet 1886, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président*.
TISSERAND, } *Examinateurs*.
APPELL. }

PARIS
A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
8, RUE DE LA SORBONNE, 8

1886

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	HÉBERT, Professeur	Géologie.
PROFESSEUR HONORAIRE	PASTEUR.	
PROFESSEURS	DUCHARTRE	Botanique.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	N	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
PROFESSEUR ADJOINT	WOLF	Physique céleste.
CHARGÉS DE COURS	POINCARÉ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEUR SUPPLÉANT	DASTRE	Physiologie.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

Bordeaux. — Imprimerie G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

A LA MÉMOIRE

DE

MONSIEUR CH. BRIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

A

MONSIEUR G. DARBOUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE ANALYTIQUE
DU
DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT
D'UN CORPS SOLIDE.

INTRODUCTION.

Nous avons essayé dans le présent travail d'appliquer la méthode analytique à l'étude du déplacement infiniment petit d'un système solide. Ainsi que nous avons pu le constater, les procédés de l'analyse, moins lumineux assurément que ceux de la géométrie, mais plus faciles à diriger sur des questions désignées à l'avance, permettraient avec une extrême facilité de démontrer et de coordonner tous les résultats que la science doit aux conceptions les plus variées et les plus ingénieuses des éminents géomètres qui ont exploré cette partie de la cinématique.

L'algèbre ne donne pas seulement le degré des lieux géométriques, des systèmes de points ou de plans, ou des complexes de droites jouissant d'une propriété donnée, elle en fournit encore les équations, et si ces dernières sont quelquefois assez compliquées, il faut songer qu'elles sont relatives au cas le plus général, et que dans les applications la moindre particularisation dans la loi du déplacement amène des simplifications considérables dans tous les résultats.

Sans entreprendre ici un travail de coordination, nous nous sommes principalement occupés des questions relatives aux éléments du second ou du troisième ordre des trajectoires sur lesquelles la géométrie semble avoir moins de prise que sur celles qui ont trait aux éléments du premier ordre. Nous considérons d'abord le cas où le solide est assujetti à cinq conditions et où sa situation ne dépend par conséquent que d'une seule variable. Les coordonnées des différents points du corps seront des fonctions que l'on peut développer en séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de la variable, et les coefficients de ces séries seront des expressions linéaires et entières des coordonnées initiales de ces points. Cherchant ensuite à simplifier le plus possible ces coefficients, nous sommes amenés à prendre pour origine des coordonnées le point central de la surface réglée lieu des axes instantanés glissants, pour axe des z l'axe instantané initial, et pour plan des yOz le plan tangent à cette surface au point central.

Après avoir rappelé les notions introduites par M. Chasles dans la cinématique et indiqué les moyens très simples de calculer les éléments qui s'y rapportent, nous cherchons l'ensemble des droites perpendiculaires aux trajectoires de leurs différents points. Ces droites forment un complexe linéaire, et nous constatons que, réciproquement, tout complexe linéaire est un système de droites normales aux trajectoires de leurs points dans un déplacement convenablement choisi d'un système solide, ce qui conduit à une signification cinématique des coefficients de son équation.

En même temps que le solide se déplace, le complexe précédent se déforme, et pour se rendre compte des changements qu'il éprouve il suffit de considérer ce que nous appelons « *vitesse en un point fixe de l'espace* ». Les différents points du corps qui sont destinés à traverser un même point fixe possèdent, au moment de leur passage en ce point, certaines vitesses dont l'ensemble forme un cône dépendant de la nature du mouvement du solide et du point fixe que l'on a choisi. Il est clair que le plan d'un complexe variable avec le temps et relatif au point fixe considéré sera successivement perpendiculaire à toutes les génératrices du cône précédent que nous désignerons sous le nom de *cône des vitesses en ce point*, et enveloppera par suite un autre cône supplémentaire du premier.

A un déplacement infiniment petit du solide correspond pour chaque point de l'espace un élément de nappe conique, à l'exception toutefois de certains points où la vitesse est la même pendant la durée de ce mouvement. Ces derniers points constituent deux droites dont la situation est très simple par rapport au point central et à l'axe instantané initial. Les autres points fixes de l'espace se classent aisément d'après la courbure sphérique de l'élément conique relatif à ces points. Cette courbure est nulle pour tous les points d'un hyperboloïde et pour d'autres points formant deux droites; l'élément conique est surosculateur à un plan.

Si l'on considère les vitesses que possèdent au même instant les différents points d'un solide comme des droites indéfinies, on constate que ces vitesses forment un complexe du second degré dont les coniques sont des paraboles. Après avoir établi les relations qui lient les éléments d'une droite à ceux de sa conjuguée, nous voyons que le complexe précédent est à lui-même son conjugué. Nous retrouvons le même complexe, soit en cherchant l'ensemble des droites perpendiculaires à leurs conjuguées, soit en cherchant l'ensemble des caractéristiques de tous les plans du solide. Tout cela résulte des propositions contenues dans un mémoire resté célèbre qui a été présenté par M. Chasles en 1841 à l'Académie des Sciences.

Si l'on veut obtenir les courbes telles que les vitesses de leurs différents points forment une surface développable, on parvient à une certaine équation différentielle, et l'on reconnait que le cône que définit cette équation n'est autre que celui du complexe des vitesses. Adjoignant à l'équation différentielle précédente celle d'une surface arbitraire, on voit que sur chaque surface il existe une double famille de courbes jouissant de la propriété demandée. Ce fait constitue une généralisation de la propriété de la cubique gauche signalée par M. Chasles et dont tous les points se meuvent sur un cône pendant un temps infiniment petit.

Faisant ensuite intervenir les seconds termes des séries qui représentent les coordonnées variables des différents points du solide, nous obtenons des équations assez simples pour l'ellipsoïde des accélérations et pour la cubique d'inflexion relativement aux axes que nous avons choisis. La considération simultanée des vitesses et des accélérations conduit à l'étude des plans osculateurs relatifs aux différents points du solide. Les systèmes de plans osculateurs correspondant aux différents points d'une même droite et qui ont été déjà étudiés par M. Mannheim dépendent de la situation de cette droite. La discussion des formes qu'ils présentent conduit à diviser les droites du solide en trois catégories, selon qu'elles ne rencontrent pas la cubique d'inflexion ou qu'elles la rencontrent une ou deux fois.

A un point quelconque du corps répond un axe de courbure de sa trajectoire. La proposition inverse n'est pas exacte. Une droite quelconque n'est pas nécessairement l'axe de courbure de la trajectoire d'un point. Pour qu'il en soit ainsi, Il faut que cette droite fasse partie d'un complexe du second degré dont nous obtenons l'équation, les plans paraboliques, ainsi que les directions principales.

Aux axes de courbure qui passent par un même point, correspondent des points situés sur une même droite. Si l'on considère l'une de ces droites, on voit que tous ses points, tournant respectivement autour des différentes génératrices d'un même cône, restent par suite à des distances constantes, au troisième ordre près, du sommet de ce cône. Il existe donc dans un solide en mouvement une infinité de droites qui se meuvent comme si tous leurs points étaient liés à un même pivot. Ces droites, que nous désignerons sous le nom de *pivotantes*, forment un complexe du second ordre dont nous obtenons également l'équation, ainsi que les directions principales. Nous constatons ensuite que le complexe des pivotantes est conjugué de celui des axes de courbure.

En général, ainsi que l'a démontré M. Mannheim à l'aide de considérations géométriques fort ingénieuses, le lieu des axes de courbure des différents points d'une droite est un hyperboloïde. Si cependant la droite considérée fait partie du complexe des pivotantes, l'hyperboloïde se réduit à un cône. On est d'ailleurs conduit dans cette question à distinguer les droites qui ne rencontrent pas la cubique d'inflexion de celles qui la rencontrent une ou deux fois.

Si l'axe de courbure d'un point conserve une direction constante pendant 2, 3, ... instants consécutifs, la trajectoire de ce point offre avec un plan un contact d'un ordre plus ou moins élevé. Nous retrouvons ainsi différents lieux géométriques étudiés par M. Schoenflies dans un mémoire inséré au *Journal de Crelle* (89e volume). Nous donnons en outre les équations de ces systèmes de points ainsi que celles des systèmes de plans surosculateurs qui leur correspondent.

Si maintenant nous faisons intervenir les troisièmes termes des séries qui représentent les coordonnées variables des différents points du solide, nous pouvons étudier les sphères osculatrices relatives à leurs trajectoires.

Nous constatons que les coordonnées du centre de la sphère et celles du point décrivant sont liées par des équations linéaires par rapport à ces coordonnées. Nous obtenons également les systèmes de points dont les trajectoires ont avec des sphères des contacts du 4e, du 5e et du 6e ordre, et nos résultats concordent avec ceux que l'auteur précédemment cité a obtenus à l'aide de considérations géométriques.

Le lieu des centres des sphères osculatrices relatives aux différents points d'une même droite est, ainsi que l'a fait voir M. Mannheim, une cubique gauche qui se décompose dans certains cas particuliers que nous indiquons. Il existe même des droites dont tous les points ont le même centre de sphère osculatrice. Ces droites constituent une classe particulière de pivotantes puisque tous leurs points restent à des distances constantes, au 4e ordre près, de certains points fixes.

Après l'étude des trajectoires des points du solide, nous abordons celle des surfaces réglées engendrées par les différentes droites du corps considérées comme des éléments de l'espace. Les droites qui engendrent des éléments de surfaces réglées de même paramètre forment un complexe du second ordre tout à fait analogue à celui des vitesses. Celles qui décrivent des éléments de surfaces planes forment une surface réglée que l'on peut regarder comme l'analogue de la cubique d'inflexion. Cette surface est formée par les droites qui, s'appuyant deux fois sur la cubique d'inflexion, sont parallèles à un certain cône du 3e ordre dont nous donnons l'équation, ainsi que celle du système des plans de ces éléments.

Lorsqu'on fait abstraction des quantités infiniment petites du second ordre, on peut considérer chaque droite du solide comme tournant autour d'une autre droite qui est dite la conjuguée de la première. Si l'on veut tenir compte des éléments du second ordre, il faut attribuer à chaque droite mobile un autre axe de rotation et même adjoindre à cette rotation un certain glissement le long de cet axe. Nous constatons alors qu'à chaque droite correspond un axe instantané glissant et un seul en général. La connaissance de cet axe ainsi que des vitesses de rotation et de glissement qui lui correspondent permettra d'étudier jusque dans ses éléments du second ordre la surface réglée décrite par la droite donnée. Un classement des droites du solide permet de reconnaître l'existence de droites qui décrivent des éléments de surfaces hélicoïdales, ainsi que d'autres dont le glissement, étant nul au 3e ordre près, décrit des hyperboloïdes de révolution.

Au lieu de la trajectoire d'un point lié au solide, on peut considérer la série des points de ce solide qui viennent successivement passer par un point fixe de l'espace. La courbe que l'on obtient ainsi, et que l'on peut nommer la *courbe glissante* du point fixe, aura tous ses éléments liés au solide, et l'ensemble de toutes les courbes analogues possèdera des propriétés semblables à celles des trajectoires ordinaires. Par exemple, le système des axes de courbure des courbes glissantes est un complexe du second ordre qui n'est autre que celui des pivotantes. Il existe aussi une série de points fixes formant une cubique gauche, et pour lesquels la courbe glissante offre un point d'inflexion. Les tangentes en ces points, supposées liées au corps, passent par des points fixes; il existe donc dans un solide une surface réglée dont les génératrices glissent respectivement sur les points d'une cubique, de même qu'il existe une cubique composée de points se mouvant sur une surface réglée.

Le plan osculateur d'une courbe glissante passe évidemment par le point fixe correspondant, ou plutôt reste à une distance du 3e ordre de ce point. Si la courbe glissante offre avec son plan osculateur un contact du 3e ou du 4e ordre, ce dernier, supposé lié au solide, restera à une distance du 4e ou du 5e ordre du point fixe correspondant. On parvient ainsi pour le déplacement des plans par rapport à des points fixes à des propositions analogues à celles qui ont été signalées par M. Schoenflies sur le déplacement des points par rapport à des plans fixes.

Il est évident maintenant qu'à un plan glissant sur un point fixe correspond une série de plans parallèles au premier et glissant sur des sphères concentriques. On peut dès lors classer les plans du solide d'après l'ordre du contact de certaines sphères avec la développable qu'ils enveloppent.

Nous connaissons les développements en séries des cosinus directeurs d'un plan; si nous calculons en outre la valeur variable de sa distance à l'origine, nous pourrons étudier le déplacement d'un plan quelconque considéré comme élément de l'espace. Cela posé, nous désignons sous le nom d'*axe d'un plan* une droite telle que l'on puisse amener ce plan d'une position à une autre infiniment voisine par une rotation autour de cette droite, en ne négligeant que les quantités du 3e ordre et en faisant abstraction de tout glissement du plan sur lui-même. Enfin nous démontrons que l'ensemble de tous les axes possibles constitue une congruence formée de toutes les cordes de la cubique d'inflexion des courbes glissantes.

Quand un système solide est assujetti à quatre conditions, les paramètres qui en déterminent la position sont des fonctions de deux variables indépendantes, et nous faisons voir que, parmi tous les déplacements que l'on peut faire subir au corps, il en est deux qui laissent immobile une droite déterminée. On obtient ainsi deux axes de rotation sans glissement et compatibles avec les conditions imposées. Une combinaison dans des proportions quelconques de deux rotations simultanées autour de ces deux axes donnera, en négligeant les quantités du second ordre, tous les déplacements possibles du système. On conclut de là cette proposition énoncée par M. Schoenmann, dont il est rendu compte dans le recueil intitulé : *Monatsberichte der berliner Akademie* (1855), et d'après laquelle les normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'un solide assujetti à quatre conditions rencontrent toutes deux mêmes droites. Seulement, l'auteur précité se place dans le cas où les conditions imposées au solide se réduisent au glissement de quatre points du solide sur quatre surfaces fixes. Or, nous faisons voir à la fin de ce travail que généralement une condition imposée à un solide n'est pas réductible au glissement d'un point de ce dernier sur une surface fixe, de sorte que la démonstration analytique que nous donnons nous semble offrir toute la généralité désirable.

Les droites susceptibles d'être immobilisées peuvent être imaginaires; il ne nous est donc pas possible d'y rattacher les axes de coordonnées dont le choix permettra de simplifier les calculs ultérieurs. Or, nous établissons analytiquement une proposition remarquable, due à M. Mannheim et relative aux axes instantanés glissants en nombre infini qui correspondent à tous les déplacements possibles du solide. Ces axes instantanés forment un conoïde dont nous donnons l'équation; puis nous démontrons que parmi tous ces axes instantanés il en est toujours deux qui sont à la fois *rectangulaires et concourants*. Ce sont ces deux droites que nous prendrons pour axe des y et pour axe des z, et qui nous semblent devoir conduire aux formules les plus simples.

Un même plan possède évidemment une infinité de foyers et une infinité de caractéristiques. Nous faisons voir que ces foyers sont en ligne droite et que ces caractéristiques passent par un même point du plan.

Les plans tangents aux surfaces trajectoires des différents points d'une même droite enveloppent une surface dont la nature dépend de la situation de cette droite, par rapport aux deux droites immobilisables, quand elles sont réelles. Il existe en particulier des droites tangentes aux surfaces trajectoires de tous leurs points. Ces droites constituent le conoïde signalé par M. Mannheim. Enfin, les points tels que les plans tangents à leurs surfaces trajectoires passent par un point donné formant une surface du troisième ordre, admettant deux séries de sections circulaires dont les plans passent par les droites immobiles.

L'étude des éléments du second ordre des surfaces trajectoires exige le calcul des seconds termes dans les séries à deux variables qui représentent les coordonnées des points mobiles du corps. Le système précédemment obtenu des axes instantanés glissants *concourants et rectangulaires* ne varie pas d'une manière tout à fait arbitraire. Nous trouvons que ce couple d'axes, ainsi que les paramètres hélicoïdaux qui leur correspondent, satisfait à six équations différentielles, qui expriment que les dérivées secondes des coordonnées d'un point quelconque du corps, prises successivement par rapport aux deux variables indépendantes, ont la même valeur, quel que soit l'ordre des dérivations.

Après avoir ensuite établi certaines identités résultant de l'invariabilité des distances mutuelles des divers points du système, nous parvenons à simplifier certaines formules ultérieures, et nous retrouvons plusieurs propositions dues à M. Mannhein et relatives à des systèmes de points décrivant simultanément des éléments de lignes asymptotiques ou géodésiques de leurs surfaces trajectoires respectives. L'analyse nous fournit en outre les équations de ces systèmes de points, ainsi que celle d'une surface du 6ᵉ ordre, séparant le solide en deux régions. Dans la première se trouvent les points dont les surfaces trajectoires ont des indicatrices elliptiques, et pour les points de la seconde ces mêmes indicatrices sont hyperboliques. Une surface du 5ᵉ ordre indiquée par l'auteur cité plus haut forme l'ensemble des points dont les surfaces trajectoires ont des courbures égales et opposées, et seize points du solide décrivent des éléments de surfaces planes.

Donnant ensuite au corps deux déplacements possibles arbitraires, nous trouvons que le lieu des points auxquels ces déplacements font décrire des directions conjuguées est une surface du 3ᵉ ordre. Enfin, les points qui, dans les mêmes conditions, décrivent successivement deux directions principales, sont sur l'intersection d'une surface du 3ᵉ ordre et d'une autre du 2ᵉ.

Le seul déplacement particulier que nous ayons examiné est celui qui correspond au cas où les droites immobiles se rencontrent constamment. Ainsi que l'a fait remarquer M. Ribaucour, le déplacement actuel peut être réalisé par le roulement d'une surface liée au solide sur une surface fixe applicable sur la première. De notables simplifications se produisent alors dans les deux premiers groupes des séries qui représentent les coordonnées variables des points du corps.

Le lieu des points qui se meuvent sur des directions asymptotiques s'abaisse au second degré. Le nombre des points qui décrivent des éléments plans se réduit à 4, et ceux dont les surfaces trajectoires ont des courbures égales et opposées constituent une surface du 3ᵉ ordre. Enfin, les points auxquels deux déplacements successifs arbitraires font décrire des directions principales ne forment plus qu'une conique.

Revenant au cas général, nous étudions les déplacements des différents plans du solide et les éléments de surfaces qu'ils peuvent envelopper. Ces différentes surfaces enveloppes présenteront des ombilics si les plans considérés sont normaux aux génératrices communes à deux cônes du 5e ordre. Ces mêmes éléments offriront des courbures égales et opposées si le plan mobile appartient à un ensemble dont l'enveloppe a une podaire du 5e ordre, par rapport à l'origine.

Dans le cas particulier signalé par M. Ribaucour il n'existe plus que quatre séries de plans ombilicaux parallèles entre eux, et parmi ces plans quatre seulement glissent sur des points fixes au 3e ordre près.

Une droite quelconque du solide peut prendre une infinité de mouvements différents. Nous essayons de donner une idée de ce déplacement indéterminé en faisant voir que cette droite est assujettie à rester constamment tangente à deux surfaces fixes qui lui appartiennent. Nous classons ensuite les droites du solide d'après la disposition de leurs points de contact avec ces mêmes surfaces et des plans tangents correspondants. Nous distinguons une catégorie de droites pour lesquelles les plans tangents dont il s'agit sont rectangulaires. Ces droites signalées par l'auteur précédemment cité constituent un complexe linéaire dont l'axe est précisément la perpendiculaire aux axes instantanés rectangulaires et concourants menée par le point de rencontre de ces derniers.

Lorsqu'un solide n'est plus assujetti qu'à trois conditions, les droites susceptibles de rester immobiles pour des déplacements convenablement choisis forment un hyperboloïde dont nous prenons les axes principaux pour axes de coordonnées. Nous démontrons ensuite que tous les déplacements possibles du solide peuvent s'obtenir par la combinaison dans des proportions variables de trois mouvements hélicoïdaux autour de trois droites rectangulaires et concourantes. Les points du solide peuvent en général se mouvoir dans toutes les directions, à l'exception de ceux de l'hyperboloïde précédent qui, comme l'a fait remarquer M. Schoenmann dans le mémoire cité plus haut, ne peuvent décrire que des éléments de surfaces trajectoires.

A chaque déplacement possible du solide correspond un axe instantané glissant. Si l'on classe ces axes d'après le paramètre du mouvement hélicoïdal qui leur convient, on obtient une série d'hyperboloïdes homothétiques et concentriques à celui des droites immobiles pour lesquelles ce paramètre est nul.

Une même droite possède une infinité de conjuguées. Ces conjuguées forment une congruence dont les directrices sont deux génératrices de l'hyperboloïde central.

Si un système solide est assujetti à deux conditions, les droites susceptibles de rester immobiles forment une congruence, et il n'en existe plus que deux qui soient normales à toutes les trajectoires possibles de leurs points. Les axes instantanés glissants correspondant à un paramètre donné forment un complexe linéaire variable avec la valeur de ce paramètre.

Enfin, si le solide n'est plus soumis qu'à une seule condition, l'ensemble des droites susceptibles d'être immobilisées constitue un complexe linéaire. Or deux cas peuvent se présenter : ou bien ce complexe a un paramètre nul, et alors toutes les droites qui en font partie rencontrent une seule et même droite qui n'est autre que l'axe de ce complexe. Tous les axes possibles de rotation sans glissement rencontrant une même droite, cette dernière sera évidemment normale à toutes les trajectoires possibles de ses différents points et la condition proposée est réductible au glissement d'un point du solide sur une surface fixe.

Si au contraire le paramètre du complexe des droites immobilisables n'est pas nul, il n'existe pas de droite capable de rencontrer toutes les droites qui en font partie. Il y aura donc des axes de rotation sans glissement qui, ne rencontrant pas une droite quelle qu'elle soit, feront décrire aux points de celle-ci des trajectoires obliques à sa direction.

Les conditions diverses que l'on peut imposer à un solide se divisent donc en deux catégories.

Voici comment on peut procéder pour les distinguer : on donnera au corps tous les mouvements de translation compatibles avec la condition proposée. Ainsi que nous le faisons voir, tous ces déplacements font décrire à un point choisi arbitrairement un élément plan que nous appellerons *plan des translations*. On imprimera ensuite au solide toutes les rotations autour du point choisi qui seront compatibles avec la condition à étudier. Nous démontrons que les axes de toutes ces rotations sont dans un même plan que nous désignons sous le nom de *plan des rotations*. Il est ensuite facile de voir que le complexe des droites immobilisables sera nul ou différent de zéro, selon que le plan des *translations* sera perpendiculaire ou oblique au plan des *rotations*. Ce n'est que dans le premier cas que la condition imposée est réductible au glissement d'un point du corps sur une surface fixe pendant un temps *infiniment petit*.

CHAPITRE PREMIER

DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A CINQ CONDITIONS.

Formules générales.

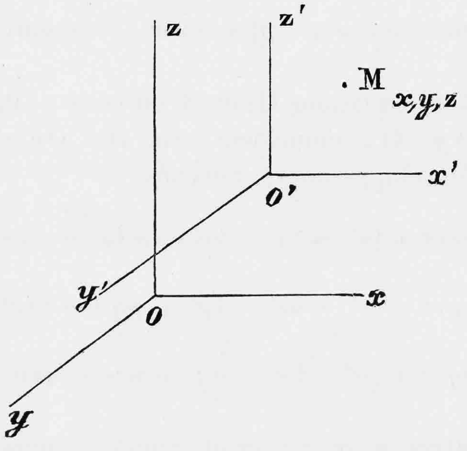
1. Lorsqu'un solide est assujetti à cinq conditions, les six paramètres qui déterminent sa position dans l'espace sont liés par cinq relations et peuvent être considérés comme des fonctions de l'un d'entre eux. On peut aussi regarder ces mêmes paramètres comme des fonctions d'une même variable indépendante, le temps par exemple. Si l'on fait croître cette dernière d'une manière continue, le solide se déplacera, et en même temps les points, les droites ou les plans qui en font partie engendreront ou envelopperont des figures déterminées.

Pour étudier le mouvement d'un corps solide par rapport à trois axes fixes Ox, Oy, Oz, on peut se donner la trajectoire de l'un de ses points O' à l'aide des équations

$$x = u, \quad y = v, \quad z = w,$$

u, v et w étant des fonctions de t. Par ce point O' nous mènerons des axes $O'x'$,

Fig. 1.



$O'y'$, $O'z'$ parallèles à Ox, Oy, Oz, et qui ne seront pas solidaires avec le corps.

Nous désignerons enfin par p, q, r trois fonctions du temps représentant les composantes de la rotation instantanée du solide à l'époque t dirigées suivant les mêmes axes.

Les projections de la vitesse du point M qui, à l'époque t, a pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes, seront données par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u' + (z - w)\,q - (y - v)\,r,\\ \frac{dy}{dt} &= v' + (x - u)\,r - (z - w)\,p,\\ \frac{dz}{dt} &= w' + (y - v)\,p - (x - u)\,q, \end{aligned}\right.$$

qui ne sont autre chose que les équations différentielles du mouvement du point M.

Si l'on intégrait ces équations, on trouverait pour x, y et z trois fonctions du temps contenant trois constantes arbitraires représentant, si l'on veut, les coordonnées initiales a, b, c du point du corps dont on veut étudier la trajectoire, et le mouvement de ce point sera donné par les équations,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= f(t,\ a,\ b,\ c),\\ y &= \varphi(t,\ a,\ b,\ c),\\ z &= \psi(t,\ a,\ b,\ c). \end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, les équations (1) peuvent servir au développement des coordonnées du point M en séries ordonnées suivant les puissances de t. Elles donnent en effet par la dérivation :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= u'' + (z - w)q' - (y - v)r' + q[(y - v)p - (x - u)q] - r[(x - u)r - (z - w)p],\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= v'' + (x - u)r' - (z - w)p' + r[(z - w)q - (y - v)r] - p[(y - v)p - (x - u)q],\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= w'' + (y - v)p' - (x - u)q' + p[(x - u)r - (z - w)p] - q[(z - w)q - (y - v)r]. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant dans les équations (1) et (3) on fait $t = 0$, et si l'on suppose qu'à cette époque $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ coïncident avec Ox, Oy et Oz, on obtiendra les premiers termes des développements cherchés :

$$x = a + (u' + cq - br)\,t + [u'' + cq' - br' - a\,(q^2 + r^2) + pqb + prc]\,\frac{t^2}{1.2} - \ldots,$$

$$y = b + (v' + ar - cp)\,t + [v'' + ar' - cp' + pqa - b\,(r^2 + p^2) + rqc]\,\frac{t^2}{1.2} + \ldots,$$

$$z = c + (w' + bp - aq)\,t + [w'' + br' - aq' + pra + qrb - c\,(p^2 + q^2)]\,\frac{t^2}{1.2} + \ldots,$$

dans lesquels les lettres u', v', w', p, q, r, p', ... représentent des constantes dont les valeurs sont celles des fonctions correspondantes pour l'époque $t = 0$.

Ces développements limités à la seconde puissance du temps nous permettront d'étudier les éléments du premier et du second ordre des trajectoires ou des enveloppes relatives aux points, aux droites ou aux plans du solide. On voit aussi que l'étude des éléments du 3ᵉ ordre, tels que la torsion, la sphère osculatrice, exigera en outre connaissance des termes en $\frac{t^3}{1.2.3}$, et ainsi de suite.

Simplification des formules générales.

2. Une première étude de classement des points du solide met en évidence l'existence d'une droite ayant la propriété d'être tangente à la trajectoire de chacun de ses points. Si cette droite, connue sous le nom d'*axe instantané glissant,* avait été prise pour l'axe des z, les deux premières formules (4) auraient donné pour $a=0$ et $b=0$, et quel que soit c, des valeurs infiniment petites du second ordre pour x et pour y. Il faut donc que l'on ait

$$u'=0, \quad v'=0, \quad p=0, \quad q=0.$$

Les formules (4) deviennent alors

$$x=a-brt+(u''+cq'-br'-ar^2)\frac{t^2}{2}+\ldots,$$

$$y=b+art+(v''+ar'-cp'-br^2)\frac{t^2}{2}+\ldots,$$

$$z=c+w't+(w''+bp'-aq')\frac{t^2}{2}+\ldots.$$

Nous pouvons encore simplifier ces formules en disposant convenablement de la direction de l'axe des y et de la position de l'origine sur l'axe instantané.

Après un temps t infiniment petit du premier ordre, la droite qui coïncidait primitivement avec Oz a éprouvé un déplacement latéral du second ordre, et peut être représentée à l'époque t par le système des équations

$$x=(u''+cq')\frac{t^2}{2}, \quad y=(v''-cp')\frac{t^2}{2}, \quad z=c+w't+w''\frac{t^2}{2},$$

qui donnent la situation nouvelle du point dont les coordonnées initiales étaient O, O et c.

Éliminant ensuite c entre les deux premières des équations précédentes, il vient

$$\frac{y-u''\frac{t^2}{2}}{x-u''\frac{t^2}{2}}=-\frac{p'}{q'}.$$

Telle est l'équation de la projection sur le plan yOx de la droite qui coïncidait avec Oz avant son déplacement. On voit alors que si l'on avait pris l'axe des y

parallèle à cette projection, on aurait eu $q' = 0$, ce qui réduit les formules (5) aux suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} x = a - brt + (u'' - ar^2 - br')\dfrac{t^2}{2}, \\ y = b + avt + (v'' + ar' - cp' - br^2)\dfrac{t^2}{2}, \\ z = c + w't + (w'' + bp')\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Enfin tous les points de l'axe instantané ont leurs trajectoires tangentes à la ligne Oz avec laquelle cet axe coïncide à l'époque $t = 0$. Ces trajectoires ont néanmoins des plans osculateurs différents, et il existe sur Oz un point pour lequel ce plan osculateur est le plan zOx précédemment déterminé. Les formules (6), dans lesquelles on fera $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, devront donner pour y une valeur infiniment petite du 3e ordre, et il faut que l'on ait $v'' = 0$, pour un pareil choix de l'origine. Les formules (6) se réduisent alors aux suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} x = a - brt + (u'' - ar^2 - br')\dfrac{t^2}{2}, \\ y = b + art + (ar' - br^2 - cp')\dfrac{t^2}{2}, \\ z = c + w't + (w'' + bp')\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Des considérations analogues aux précédentes permettent de déterminer les termes du 3e ordre, et l'on obtient, en introduisant dans ces derniers les simplifications qui résultent du choix des axes de coordonnées, les formules générales suivantes :

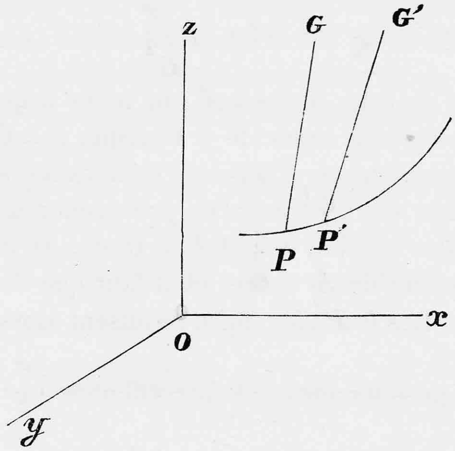
$$(7)\quad \begin{cases} x = a - brt + (u'' - ar^2 - br^2)\dfrac{t^2}{1.2} + [u''' + (q'' + rp')c + (r^3 - r'')b - 3rr'a]\dfrac{t^2}{1.2.3} + \dots, \\ y = b + art + (ar' - br^2 - cp^2)\dfrac{t^2}{1.2} + [v''' + (r'' - r^3)a - 3rr'b - p''c]\dfrac{t^3}{1.2.3} + \dots, \\ z = c + w't + (w'' + bp^2)\dfrac{t^2}{1.2} + [w''' + (2p'r - q'')a + p''b]\dfrac{t^3}{1.2.3} + \dots. \end{cases}$$

Autre système de formules.

3. Avant de faire l'application des formules qui précèdent, nous allons en obtenir d'autres tout à fait équivalentes en considérant le mouvement du solide comme déterminé par le roulement avec glissement d'une surface réglée liée au corps sur une autre surface réglée fixe dans l'espace et que l'on nomme *base de la roulette*.

Soient PG la droite de l'espace qui sert d'axe instantané glissant à l'époque t, A, B, C les coordonnées de l'un de ses points P, α, β, γ ses cosinus directeurs, ω la vitesse de rotation du solide autour de PG, enfin g la vitesse du glissement le long de cette ligne. Regardons toutes ces quantités comme des fonctions du temps. Cela ne signifie pas que la droite PG se déplace, mais seulement que la

Fig. 2.



droite PG qui servait d'axe à l'époque t est remplacée dans ce rôle par P'G' à l'époque $t + \delta t$.

Cela posé, les composantes de la vitesse d'un point quelconque M (x, y, z) du solide auront pour expression :

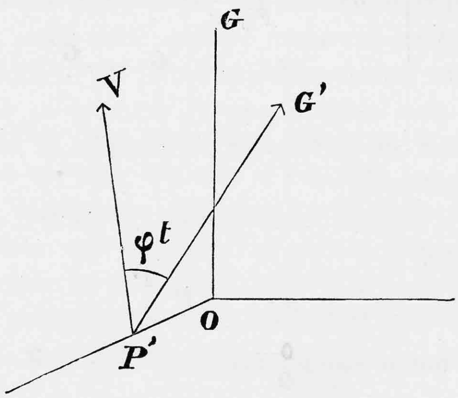
$$\frac{dx}{dt} = \omega\beta(z - C) - \omega\gamma(y - B) + g\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt} = \omega\gamma(x - A) - \omega\alpha(z - C) + g\beta,$$
$$\frac{dz}{dt} = \omega\alpha(y - B) - \omega\beta(x - A) + g\gamma.$$

Dérivant ensuite par rapport à t, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega'[\beta(z-C) - \gamma(y-B)] + \omega[\beta'(z-C) - \gamma'(y-B)] + \omega\left[\beta\left(\frac{dz}{dt} - C'\right) - \gamma\left(\frac{dy}{dt} - B'\right)\right] + q'\alpha + g\alpha',$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega'[\gamma(x-A) - \alpha(z-C)] + \omega[\gamma'(x-A) - \alpha'(z-C)] + \omega\left[\gamma\left(\frac{dx}{dt} - A'\right) - \alpha\left(\frac{dx}{dt} - C'\right)\right] + g'\beta + q\beta',$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega'[\alpha(y-B) - \beta(x-A)] + \omega[\alpha'(y-B) - \beta'(x-A)] + \omega\left[\alpha\left(\frac{dy}{dt} - B'\right) - \beta\left(\frac{dx}{dt} - A'\right)\right] + g'\gamma - q'\gamma.$$

Prenons pour axe des z la génératrice PG correspondant à l'époque $t = 0$, pour axe des y la perpendiculaire limite commune à PG et P'G'. Désignons par φt l'angle des deux axes consécutifs et par ht leur plus courte distance, ce qui revient à prendre pour base de la roulette l'élément de conoïde GOP′G′. Une pareille restriction est évidemment permise quand on veut se borner à l'étude des éléments du second ordre.

Fig. 3.



Faisons enfin $t = 0$ dans les formules précédentes, on aura, d'après le choix des axes de coordonnées,

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 0, \quad C_0 = 0, \quad A'_0 = 0, \quad B'_0 = h, \quad C'_0 = 0,$$
$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 1, \quad \alpha'_0 = \varphi, \quad \beta'_0 = 0, \quad \gamma'_0 = 0,$$

et la substitution de ces valeurs particulières donne, pour les développements en séries de x, y et de z,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a - \omega b t + [\omega h + g\varphi - \omega^2 a - \omega' b]\frac{t^2}{2} - \ldots, \\ y &= b + \omega a t + [\omega' a - \omega^2 b - \omega \varphi c]\frac{t^2}{2} - \ldots, \\ z &= c + g t + [\omega \varphi b + g']\frac{t^2}{2} - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Identifiant ces formules avec les valeurs (7), on obtient les relations

$$u'' = \omega h + g\varphi, \quad w' = g, \quad w'' = g',$$
$$p' = \omega\varphi, \quad r = \omega, \quad r' = \omega',$$

qui permettent d'introduire dans l'étude du déplacement d'un solide les éléments de la base de la roulette, et aussi de calculer les éléments de cette base lorsque l'on connaîtra les quantités u'', w', w'', p', r, r'.

Éléments du premier ordre des trajectoires décrites par les différents points d'un solide qui subit un déplacement infiniment petit.

4. Tous les géomètres connaissent le mémoire publié par M. Chasles en 1843 dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences et très élégamment commenté par M. Charles Brisse dans le *Journal de mathématiques de Liouville* (t. XV, année 1870).

La plus grande partie des propositions contenues dans ce mémoire pourrait aisément être établie analytiquement par la considération des développements (7) ou (8) limités à leurs deux premiers termes. Sans nous arrêter à ces démonstrations beaucoup moins lumineuses que celles de l'éminent géomètre cité plus haut, mais cependant plus méthodiques et, selon nous, plus rigoureuses, nous croyons utile de rappeler les notions et les définitions introduites par lui dans cette partie de la cinématique.

Le *foyer* d'un plan est le point de sa surface dont la trajectoire lui est normale. Si le plan a pour équation

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

son foyer (a, b, c) sera donné par les équations

$$\frac{-br}{A} = \frac{ar}{B} = \frac{w'}{C},$$

jointes à la condition

$$Aa + Bb + Cc + 1 = 0.$$

Inversement, à un point quelconque dont les coordonnées sont a, b, c correspond un plan qui admet ce point pour foyer. L'équation de ce plan sera

$$(-br)(x - a) + ar(y - b) + w'(z - c) = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$-brx + ary + w'(z - c) = 0.$$

Si dans cette équation on regarde x, y et z comme des constantes et a, b, c comme des coordonnées courantes, on reconnaît que le lieu des points tels que les plans normaux à leurs trajectoires respectives passent par un point fixe, est un plan contenant le point fixe (x, y, z). D'un autre côté l'équation précédente peut s'écrire

$$(-ry)a + rxb + (c - z)w' = 0,$$

et montre que le point fixe est le foyer du plan trouvé.

La *caractéristique* d'un plan est le lieu des points dont les trajectoires lui sont tangentes. Cette ligne est représentée par l'équation

$$-br\,A + ar\,B + w'\,C = 0,$$

jointe à celle du plan

$$Aa + Bb + Cc + 1 = 0.$$

Rappelons encore la définition de la droite *conjuguée* d'une droite donnée D représentée par

$$x = mz + \mu,$$
$$y = nz + \nu.$$

Si l'on considère un point quelconque a, b, c de cette droite, le plan normal à la trajectoire de ce point sera, en posant $\frac{w'}{r} = k$,

$$-bx + ay + k(z - c) = 0,$$

ou bien

$$-(nc + \nu)x + (mc + \mu)y + k(z - c) = 0.$$

Ce plan, variable avec le point pris sur la droite D, c'est à dire avec la coordonnée c, passe par une droite fixe Δ, ayant pour équations

$$-nx + my - k = 0,$$
$$-\nu x + \mu y + kz = 0,$$

et que l'on désigne sous le nom de droite *conjuguée* de la droite donnée D.

Cherchons les éléments de la droite Δ en fonction de ceux de la droite D qui sont m, n, μ, ν et $\omega = m\nu - n\mu$.

Les équations Δ donnent

$$x = \frac{k\mu + mkz}{m\nu - n\mu} = m'z + \mu',$$
$$y = \frac{nkz + k\nu}{m\nu - n\mu} = n'z + \nu',$$

m', n', μ', ν' et $\omega' = m'\nu' - n'\mu'$ étant les éléments de la droite Δ. On aura alors les formules

$$m' = \frac{km}{\omega}, \quad n' = \frac{kn}{\omega}, \quad \mu' = \frac{k\mu}{\omega}, \quad \nu' = \frac{k\nu}{\omega},$$

et

$$\omega' = \frac{k^2}{\omega}.$$

On peut aussi considérer la droite Δ comme le lieu des foyers des plans passant par la droite D.

Rappelons encore une définition contenue dans le mémoire cité précédemment. Une surface S étant donnée, chacun de ses plans tangents a un foyer φ. Le lieu des points φ est une deuxième surface Σ qui est dite la *conjuguée* de S, et l'on démontre que le lieu des foyers des plans tangents à la surface Σ n'est autre que la surface primitive S. On peut aussi considérer Σ comme l'enveloppe des plans normaux aux trajectoires des points de S, et si l'on cherche l'enveloppe des plans normaux aux trajectoires des points de Σ on retrouve la surface S.

Étant donnée une courbe C, si l'on mène les plans normaux aux trajectoires de ses différents points, la développable, enveloppe de ces plans, aura pour arête de rebroussement une deuxième courbe Γ que l'on peut regarder comme la conjuguée de la courbe C. On verrait aisément que l'enveloppe des plans normaux aux trajectoires des points de Γ a pour arête de rebroussement la courbe primitive C elle-même.

On peut aussi considérer la courbe Γ comme le lieu des foyers des plans osculateurs de C, et démontrer que, inversement, le lieu des foyers des plans osculateurs de Γ n'est autre que la courbe C.

Si l'on prend enfin les droites conjuguées de toutes celles d'un complexe, on obtient un deuxième complexe que nous désignerons sous le nom de *conjugué* par rapport au premier.

Il est aisé de voir que le degré du complexe conjugué est le même que celui du complexe proposé. Soit, en effet,

$$\varphi(m, n, \mu, \nu, \omega) = 0,$$

l'équation de ce dernier. Pour obtenir l'équation du conjugué, il suffira de remplacer dans l'équation précédente m, n, μ, ν, ω par leurs valeurs

$$m = \frac{km'}{\omega'}, \quad n = \frac{kn'}{\omega'}, \quad \mu = \frac{k\mu'}{\omega'}, \quad \nu = \frac{k\nu'}{\omega'}, \quad \omega = \frac{k^2}{\omega'},$$

tirées des relations qui unissent les éléments d'une droite à ceux de sa conjuguée.

On parvient ainsi à l'équation

$$\varphi\left(\frac{km'}{\omega'}, \frac{kn'}{\omega'}, \frac{k\mu'}{\omega'}, \frac{k\nu'}{\omega'}, \frac{k^2}{\omega'}\right) = 0,$$

qui représente le complexe conjugué et dont le degré est le même que celui du complexe proposé. La démonstration géométrique de ce résultat n'offrirait d'ailleurs aucune difficulté. On verrait aisément que l'ordre du cône du premier complexe est égal à la classe des courbes planes de son conjugué.

Droites normales aux trajectoires de leurs points.

5. Une droite représentée par les équations

$$x = mz + \mu,$$
$$y = nz + \nu,$$

sera normale aux trajectoires de ses différents points, si parmi ceux-ci on peut en trouver un dont les coordonnées a, b et c satisfassent à la condition

$$-br.m + ar.n + w' = 0,$$

ainsi qu'aux équations de la droite. On devra donc avoir, en posant $\frac{w'}{r} = k$,

$$-(nc + \nu)m + (mc + \mu)n + k = 0,$$

ou bien

$$m\nu - n\mu = \omega = k,$$

équation d'un complexe linéaire qui a pour axe l'axe instantané glissant et pour paramètre le rapport $\frac{w'}{r}$.

Il est facile d'obtenir l'équation du même complexe en prenant des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

Soient A, B et C les composantes de la vitesse du point du solide qui se trouve actuellement en O, et P, Q, R les composantes de la rotation instantanée.

La vitesse d'un point quelconque M (a, b, c) du corps aura pour projections

$$v_x = A + Qc - Rb,$$
$$v_y = B + Ra - Pc,$$
$$v_z = C + Pb - Qa,$$

et la droite

$$x = mz + \mu,$$
$$y = nz + \nu,$$

fera partie du complexe cherché, si l'on a

$$(A + Qc - Rb)\,m + (B + Ra - Pc)\,n + (C + Pb - Qa) = 0,$$

ainsi que

$$a = mc + \mu,$$
$$b = nc + \nu.$$

Éliminant a et b, il vient

$$[A + Qc - R\,(nc + \nu)]\,m + [B + R\,(mc + \mu) - Pc]\,n + C + P\,(nc + \nu) - Q\,(mc + \mu) = 0;$$

or la coordonnée c disparaît et l'on a

$$(1) \qquad Am + Bn + C + P\nu - Q\mu - R\omega = 0,$$

équation qui peut représenter tous les complexes linéaires possibles et qui donne une signification cinématique des six coefficients d'un complexe linéaire donné *a priori*. On arrive ainsi à cette proposition :

Un complexe linéaire quelconque étant donné par son équation, si l'on imprime à un point O *d'un système solide une vitesse dont les projections soient égales aux coefficients de m, n et* 1, *et une rotation dont les composantes aient pour valeurs les coefficients de ν, $-\mu$, $-\omega$, on obtient un certain mouvement de ce solide; dans ce mouvement l'ensemble des droites normales aux trajectoires de leurs points constitue le complexe donné, et l'axe de ce dernier n'est autre chose que l'axe instantané glissant relatif au mouvement fictif imprimé au solide.*

Cela posé, il nous sera facile d'obtenir l'équation d'un complexe linéaire dont l'axe et le paramètre seraient donnés.

Soient u, v, w les coordonnées d'un point quelconque S de cet axe, α, β, γ ses cosinus directeurs, g la vitesse de glissement et r la vitesse de rotation relative à ce même axe. D'après ce qui précède, il suffit d'obtenir les composantes de la vitesse du point O dont les coordonnées par rapport à S sont évidemment $-u$, $-v$, $-w$. Ces composantes A, B, C ont donc pour valeurs

$$\begin{aligned} A &= g\alpha - r\beta w + r\gamma v, \\ B &= g\beta - r\gamma u + r\alpha w, \\ C &= g\gamma - r\alpha v + r\beta u; \end{aligned}$$

quant aux projections de la rotation, elles sont

$$P = \alpha r, \quad Q = \beta r, \quad R = \gamma r,$$

et le complexe cherché aura pour équation

$$(g\alpha - r\beta w + r\gamma v)\, m + (g\beta - r\gamma u + r\alpha w)\, n + (g\gamma - r\alpha v + r\beta u) \\ + \alpha r v - \beta r \mu - r\gamma\omega = 0.$$

Si les équations de l'axe sont données sous la forme

$$\begin{aligned} x &= m_1 z + \mu_1, \\ y &= n_1 z + \nu_1, \end{aligned}$$

il suffira de remplacer dans l'équation précédente u par $\mu_1 + m_1 w$ et v par $\mu_1 + n_1 w$, ce qui donne, en posant $\frac{\alpha}{\gamma} = m_1$, $\frac{\beta}{\gamma} = n_1$ et $m_1\nu_1 - n_1\mu_1 = \omega_1$ et $\frac{g}{r} = k_1$,

$$(2) \qquad (k_1 m_1 + \nu_1)\, m + (k_1 n_1 - \mu_1)\, n + k_1 - \omega_1 + m_1 \nu - n_1 \mu - \omega = 0,$$

pour l'équation d'un complexe dont l'axe et le paramètre seraient donnés. D'ailleurs l'identification des équations (1) et (2) nous permettrait d'obtenir k_1, m_1, n_1, μ_1, ν_1, c'est à dire le paramètre et les éléments de l'axe d'un complexe quelconque représenté par une équation de la forme (1).

Vitesse en un point fixe de l'espace.

6. Considérons actuellement un mouvement indéfini quelconque d'un système solide, et un point S fixe dans l'espace. A une époque quelconque t le point S se trouve traversé par un certain point M du corps mobile, et ce point M possèdera à l'instant de son passage au point fixe S une certaine vitesse v. A l'époque $t + \Delta t$ le même point S sera traversé par un autre point M' du corps, et ce point M' possèdera lors de son passage en S une autre vitesse v', et ainsi de suite... Il est clair que l'ensemble des vitesses successives v, v', ... que nous appellerons *vitesses en* S formeront un cône dont la forme dépendra de la nature du mouvement du solide.

Si nous regardons maintenant m_1, n_1, μ_1, ν_1, ... comme des fonctions de t, l'axe du complexe (2) coïncidera successivement avec toutes génératrices d'une surface réglée lieu des axes instantanés glissants, et ce complexe deviendra variable avec le temps. Pour abréger, représentons par Ω_1 le premier membre de son équation

$$\Omega_1 = 0.$$

A l'époque $t + \Delta t$, les éléments m_1, n_1, ... deviennent $m_1 + \Delta m_1$, $n_1 + \Delta n_1$, ... et l'équation du nouveau complexe peut s'écrire

$$\Omega_1 + \Delta\Omega_1 = 0.$$

Faisant tendre Δt vers 0, la congruence

$$\Omega_1 = 0, \quad \frac{d\Omega_1}{dt} = 0,$$

sera évidemment constituée par les droites fixes de l'espace qui ont la propriété d'être traversées normalement par les points du solide, non seulement à l'époque t, mais encore à l'époque $t + dt$. Les droites de cette congruence étant normales à v et à v' sont normales au cône des *vitesses en* S. Nous arrivons donc à cette proposition :

Quand un solide est en mouvement, il existe une infinité de droites fixes normales aux cônes des vitesses de tous leurs points, et ces droites forment une congruence.

Si nous considérons de même le système des équations,

$$\Omega_1 = 0, \quad \frac{d\Omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\Omega_1}{dt^2} = 0,$$

nous obtenons un hyperboloïde dont toutes les génératrices d'un certain système sont normales à la fois aux vitesses en chacun de leurs points et cela pour trois époques consécutives, d'où l'on conclut que :

Quand un corps possède un mouvement indéfini, il existe à chaque instant une infinité de points pour lesquels le cône des vitesses présente un élément plan, c'est à dire dont la courbure sphérique est nulle. Ces points forment un hyperboloïde et ces éléments plans sont normaux aux génératrices de l'un des systèmes de cette surface.

Parmi les différents points fixes S, il en est qui possèdent une propriété remarquable. En général, la *vitesse en* S n'est pas la même à l'époque t qu'à l'époque $t + \Delta t$. Il y a donc pour ainsi dire une variation de la vitesse en S. Cherchons donc, en employant nos axes de coordonnées ordinaires, les expressions des composantes de cette vitesse en S (a, b, c) à l'époque t.

Le point S' qui au bout d'un temps t infiniment petit *sera* en S (a, b, c), a pour coordonnées actuelles $a + brt$, $b - art$, $c - w't$. D'après nos formules générales appliquées au point S', la vitesse de ce dernier point, au moment de son passage en S, c'est à dire à l'époque t, aura pour composantes

$$\begin{aligned} v_x &= -(b - art)\, r + [u'' - (a + brt)\, r^2 - (b - art)\, r']\, t, \\ v_y &= (a + brt)\, r + [a + brt)\, r' - (b - art)\, r^2 - (c - w' t)\, p']\, t, \\ v_z &= w' + [w'' + (b - art)\, p']\, t, \end{aligned}$$

ou, en négligeant les termes en t^2,

$$\begin{aligned} v_x &= -\, br + (u'' - br')\, t, \\ v_y &= ar + (ar' - cp')\, t, \\ v_z &= w' + (w'' + bp')\, t, \end{aligned}$$

d'où l'on voit que la *vitesse en* S change généralement de grandeur et de direction.

Si l'on désigne maintenant par *accélération en* S une certaine accélération dont les composantes seraient $u'' - br'$, $ar' - cp'$, $w'' + bp'$, on voit que :

Le lieu des points où l'accélération a une valeur donnée A, *est un cylindre :*

$$(u'' - br')^2 + (ar' - cp')^2 + (w'' + bp')^2 = A^2.$$

Cette accélération n'est nulle pour aucun point de l'espace, à moins que le mouvement considéré soit d'une nature particulière.

Il faut en effet que l'on ait $\frac{u''}{r'} + \frac{w''}{p'} = 0$, et alors l'accélération en tous les points S de la droite

$$u'' - br'' = 0, \quad ar' - cp' = 0,$$

parallèle au plan zOx, est nulle. Cette droite est aussi l'axe du cylindre des accélérations.

Il existe une infinité de points S où la vitesse à l'époque O a la même direction qu'à l'époque t. Il suffit, pour obtenir ces points, de considérer les équations

$$\frac{u'' - br'}{-\, br} = \frac{ar' - cp'}{ar} = \frac{w'' + bp'}{w'},$$

ou bien

$$bc = \frac{u''}{p'}\, a$$

et

$$rp'\, b^2 + (rw'' - r'w')\, b + u''w' = 0,$$

qui représentent deux droites rencontrant l'axe des y et parallèles au plan zOx; d'où l'on conclut que :

Quand un solide possède un mouvement indéfini, il existe une infinité de points fixes où la vitesse conserve une direction constante au 3e *ordre près. Ces points sont situés sur deux droites variant avec le temps. Ces deux droites rencontrent la tangente à la base de la roulette menée par le point central de l'axe instantané glissant perpendiculairement à ce dernier.*

Soit S un point de l'une de ces droites, le plan fixe P qui serait perpendiculaire à la vitesse en S aurait la propriété d'avoir le même foyer à l'époque t qu'à l'époque $t + \Delta t$, on peut donc dire que :

Quand un solide se déplace, il existe à chaque instant une infinité de plans fixes dont les foyers restent invariables au 3e ordre près. Ces plans sont normaux aux vitesses actuelles des points de deux droites.

Revenons actuellement à la congruence

$$\Omega_1 = 0, \quad \frac{d\Omega_1}{dt} = 0,$$

des droites normales aux vitesses en tous leurs points, aussi bien à l'époque t qu'à l'époque $t + dt$. Si en un point S la vitesse a conservé sa direction, toute perpendiculaire menée par S à cette vitesse fera partie de la congruence, donc S est un point de l'une des directrices de cette dernière. D'où l'on conclut que :

La congruence des droites normales aux cônes des vitesses de chacun de leurs points a pour directrices les deux droites trouvées précédemment.

Si l'on éliminait t entre les deux équations de la congruence, on obtiendrait un nouveau complexe dont le cône aurait ses génératrices perpendiculaires à deux génératrices consécutives Sv, Sv' du cône S, c'est à dire au plan tangent de ce dernier. Autrement dit le cône du nouveau complexe est supplémentaire du cône des vitesses.

Considérons de nouveau l'hyperboloïde

$$\Omega_1 = 0, \quad \frac{d\Omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\Omega_1}{dt} = 0,$$

lieu des points fixes où les vitesses à trois époques consécutives t, $t + dt$ et $t + 2dt$ sont dans un même plan, c'est à dire où le cône des vitesses a une courbure sphérique nulle. En un point S de l'une des droites que l'on vient de trouver, la vitesse à l'époque t a la même direction qu'à l'époque $t + dt$, donc on peut dire qu'en S trois vitesses consécutives sont dans un même plan, d'où l'on voit que :

L'hyperboloïde lieu des points où le cône des vitesses a une courbure sphérique nulle, contient les deux droites trouvées précédemment.

Si enfin aux trois équations écrites plus haut on adjoint $\frac{d^3\Omega_1}{dt^3} = 0$, on obtient quatre complexes linéaires, et les deux droites communes à ces quatre systèmes constitueront le lieu des points fixes de l'espace pour lesquels les cônes des vitesses sont surosculateurs à des plans, d'où l'on peut conclure que :

Le lieu des points fixes où les cônes des vitesses sont surosculateurs à des plans, se compose d'un système de deux droites.

En résumé, on peut se proposer sur les vitesses qui règnent en un point fixe de l'espace des questions analogues à celles que l'on traite à propos des vitesses successives d'un point mobile avec le solide en mouvement. Par exemple le plan de deux vitesses consécutives en S, c'est à dire le plan tangent au cône des vitesses, serait l'analogue du plan de deux vitesses consécutives d'un point mobile M, c'est à dire du plan osculateur de sa trajectoire.

Courbes qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées.

7. Reprenons le complexe $\omega = k$ des droites perpendiculaires aux trajectoires de leurs points, puis cherchons les droites qui partent d'un point donné a, b, c. En représentant l'une de celles-ci par les équations

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma},$$

il vient, pour les éléments ordinaires de la droite,

$$m = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad n = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \mu = a - \frac{\alpha c}{\gamma}, \quad \nu = b - \frac{\beta c}{\gamma},$$

et

$$\omega = m\nu - n\mu = \frac{\alpha b - \beta a}{\gamma}.$$

Le complexe considéré prend donc la forme

$$\alpha b - \beta a = k\gamma.$$

Remplaçant enfin α, β, γ par da, db, dc respectivement, il vient

$$b\,da - a\,db = k\,dc,$$

qui n'est autre chose que l'équation différentielle des courbes normales aux trajectoires de tous leurs points.

Si à cette équation on adjoint celle d'une surface quelconque, $c = \varphi(a, b)$, on aura

$$b\,da - a\,db = k\left(\frac{d\varphi}{da}\,da + \frac{d\varphi}{db}\,db\right),$$

pour l'équation différentielle des courbes tracées sur la surface.

Les courbes précédentes ont la propriété d'être à elles-mêmes leurs conjuguées. En effet, les plans osculateurs de leurs différents points sont normaux aux trajectoires de ces derniers, ainsi qu'il est facile de s'en assurer en remarquant que les relations

$$\frac{db\,d^2c - dc\,d^2b}{-br} = \frac{dc\,d^2a - da\,d^2c}{ar} = \frac{da\,d^2b - db\,d^2a}{w'},$$

sont des conséquences de l'équation différentielle de ces courbes.

Complexe des vitesses.

8. Considérons les vitesses simultanées de tous les points d'un solide en mouvement, et prolongeons indéfiniment les droites sur lesquelles elles sont comptées, on obtiendra un système de droites dont nous allons chercher l'équation.

Une droite

$$x = mz + \mu,$$
$$y = nz + \nu,$$

fera partie du système considéré s'il existe un point a, b, c qui soit situé sur cette droite et dont la vitesse ait pour coefficients angulaires m et n. On aura donc les relations

$$\frac{-br}{m} = \frac{ar}{n} = \frac{w'}{1},$$

jointes aux égalités

$$a = mc + \mu,$$
$$b = nc + \nu.$$

Éliminant a, b, c, il vient

$$-\frac{nc + \nu}{m} = \frac{(mc + \mu)}{n} = k,$$

et par suite

$$nc + \nu + mk = 0,$$
$$mc + \mu - nk = 0,$$

d'où

(1) $$k(m^2 + n^2) + \omega = 0,$$

équation qui représente un complexe du 2e ordre, et à l'aide des substitutions ordinaires on obtient pour le cône qui a son sommet en S (a, b, c) l'équation

(2) $$k(\alpha^2 + \beta^2) + (b\alpha - a\beta)\gamma = 0;$$

ce cône contient la verticale du point S ainsi que la vitesse de ce même point.

Ce complexe a la propriété remarquable de se confondre avec son conjugué.

Si, en effet, on remplace dans son équation m par $\frac{km'}{\omega'}$, n par $\frac{kn'}{\omega'}$ et ω par $\frac{k'}{\omega'}$, on trouve

$$k(m'^2 + n'^2) + \omega' = 0,$$

c'est à dire le même complexe.

Cherchons encore le système des droites perpendiculaires à leurs conjuguées. On devra avoir

$$m \cdot \frac{km}{\omega} + n\frac{kn}{\omega} + 1 = 0,$$

ce qui donne encore le même complexe

$$k(m^2 + n^2) + \omega = 0.$$

Toutes ces remarques résultent des propriétés géométriques connues des droites tangentes à la trajectoire d'un de leurs points.

Il nous reste à obtenir la conique du complexe des vitesses. Il nous suffira pour cela de regarder une droite quelconque comme l'intersection d'un plan indéterminé

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

et du plan de la conique

$$ax + by + cz = d.$$

Les éléments de la droite ont pour expressions

$$m = \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - b\alpha}, \quad \mu = \frac{\beta d - \delta b}{a\beta - b\alpha}, \quad \omega = \frac{d\gamma - c\delta}{a\beta - \alpha b}.$$
$$n = \frac{\alpha c - a\gamma}{a\beta - b\alpha}, \quad \nu = \frac{a\delta - \alpha d}{a\beta - b\alpha},$$

On pourra donc écrire l'équation du complexe sous la forme suivante, qui mettra en évidence toutes les droites d'un même plan :

$$k\left[(b\gamma - \beta c)^2 + (\alpha c - a\gamma)^2\right] + (d\gamma - c\delta)(a\beta - b\alpha) = 0,$$

dans laquelle δ n'entre qu'au 1^er degré, d'où l'on conclut que toutes les coniques considérées sont du genre parabole. Remarquons en particulier les plans parallèles à Oz pour lesquels on a $c = 0$, ce qui donne

$$k(a^2 + b^2)\gamma + (a\beta - b\alpha)d = 0.$$

D'où l'on voit que la normale au plan indéterminé (α, β, γ) décrit un plan, et que par suite toutes les droites de ce plan sont parallèles.

Traitons encore la question suivante : étant donné un point M (a, b, c), trouver les points M′ infiniment voisins de M et tels que les vitesses de M et de M′ se rencontrent. Il suffit d'exprimer que les trois droites MM′, Mv et M′v' sont dans un même plan, ce qui donne, en désignant par $a + da$, $b + db$, $c + dc$ les coordonnées de M′,

$$\begin{vmatrix} -br & av & w' \\ -(b+db)r & (a+da)r & w' \\ da & db & dc \end{vmatrix} = 0,$$

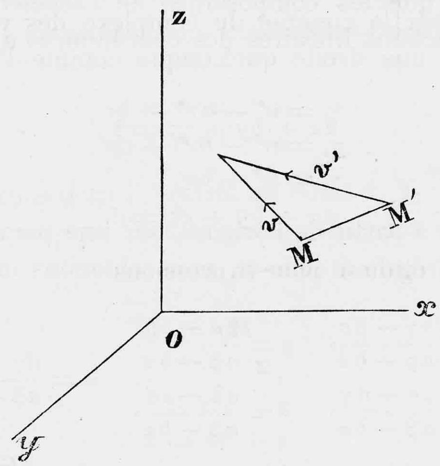
ou bien

$$k(da^2 + db^2) + dc(bda - adb) = 0,$$

équation différentielle qui convient à toutes les courbes telles que les vitesses de tous leurs points forment une surface développable.

On remarquera que le cône des directions MM′ n'est autre que celui du complexe des vitesses. On voit en effet que si les vitesses de M et de M′ concourent, la conjuguée de MM′ lui est perpendiculaire.

Fig. 4.



Si maintenant l'on adjoint à l'équation différentielle précédente celle d'une surface quelconque

$$c = \varphi(a, b),$$

on voit que *sur toute surface il existe deux familles de courbes telles que les vitesses de tous leurs points constituent une surface développable.*

En employant les coordonnées semi-polaires, ou en posant

$$a = \rho \cos \omega, \quad b = \rho \sin \omega, \quad c = \varphi(\rho, \omega),$$

l'équation différentielle prend la forme

$$k\,(d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2) = \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\, d\rho + \frac{d\varphi}{d\omega}\, d\omega\right) \rho^2\, d\omega,$$

et il est facile de l'intégrer lorsque la surface donnée est de révolution autour de Oz, ou lorsqu'elle se réduit à un conoïde dont la directrice serait l'axe Oz. Si, en effet, $c = \varphi(\omega)$, les variables se séparent aisément.

Les courbes que l'on obtient ainsi comprennent comme cas particulier la cubique gauche signalée par M. Chasles, comme le lieu des points dont les vitesses concourent en un point donné et forment ainsi le cône du complexe de ces vitesses.

Si l'on cherchait enfin le système des caractéristiques, on retomberait sur la même équation. Cela résulte de ce que la caractéristique d'un plan est, comme on sait, tangente à la trajectoire de l'un de ses points.

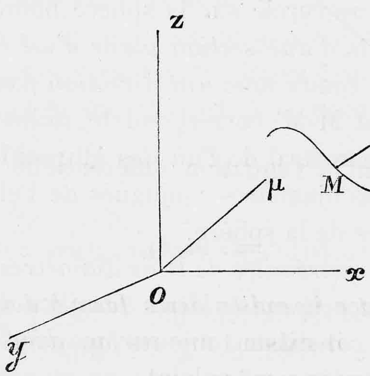
Éléments du second ordre. — Étude des accélérations simultanées des différents points d'un solide en mouvement.

9. Nous avons vu que les composantes de l'accélération d'un point quelconque M sont des fonctions linéaires des coordonnées a, b, c de ce point. Elles ont pour expressions

$$\begin{aligned} \gamma_x &= u'' - ar^2 - br', \\ \gamma_y &= ar' - br^2 - cp', \\ \gamma_z &= w'' + bp'. \end{aligned}$$

Convenons de porter à partir de l'origine, sur une parallèle à l'accélération du point M, une longueur égale à celle-ci, nous obtenons un point μ dont les coor-

Fig. 5.



données sont γ_x, γ_y, γ_z. A un système de points M correspond un système de points μ homographiques du premier. Si M décrit une droite, μ en décrit une autre. A une surface du degré m décrite par M correspond une surface du même degré engendrée par μ.

En égalant à 0 les trois composantes de l'accélération γ_x, γ_y, γ_z, on obtient un certain point C auquel correspond l'origine O dans le système des points μ.

Cela posé, si μ décrit une sphère ayant pour centre l'origine, M engendre un ellipsoïde ayant pour centre le point C.

Donc, *le lieu des points qui ont une accélération de grandeur donnée est un ellipsoïde* désigné sous le nom d'ellipsoïde des accélérations.

Si le rayon de la sphère lieu des points μ varie de 0 à l'infini, l'ellipsoïde, lieu des points M, variera en grandissant, et en restant concentrique et homothétique à lui-même.

Si le point μ décrit une droite passant par l'origine, le point M en décrira une autre passant par le point C.

Donc, *le lieu des points dont les accélérations ont une direction donnée est une* *droite passant par le point C que l'on désigne sous le nom de centre des accélérations.*

Supposons que μ se déplace sur une droite quelconque ne passant pas par l'origine, la ligne $O\mu$ décrit un plan et le point M une certaine droite dont tous les points auront des accélérations parallèles à un même plan. Si le point μ décrit un plan passant par l'origine, le point M engendrera un plan déterminé.

Donc, *le lieu des points dont les accélérations sont parallèles à un même plan est un autre plan passant par le centre des accélérations.*

Si le lieu des points μ est un cône de révolution ayant l'origine pour sommet, le lieu des points M sera un cône du second degré.

Donc, *le lieu des points dont les accélérations font un angle constant avec une direction fixe est un cône du 2e ordre. Par suite, le lieu des points d'un plan dont les accélérations font un angle donné avec une droite est une conique.*

Supposons que le point M décrive une section plane sur un ellipsoïde d'accélération, le point μ engendrera un cercle sur la sphère homologue. Donc, *les accélérations des différents points d'une section plane d'un ellipsoïde d'accélération sont égales et font des angles égaux avec une direction fixe.*

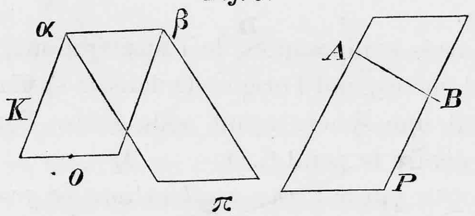
Au milieu M d'un segment $M'M''$ correspond le milieu μ du segment homologue $\mu'\mu''$, donc à un plan diamétral de l'un des ellipsoïdes correspond un plan diamétral de la sphère. A trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde correspondent trois diamètres rectangulaires de la sphère.

Donc, *les accélérations des extrémités de trois diamètres conjugués de l'un des ellipsoïdes d'accélération sont perpendiculaires deux à deux.*

Dans un plan quelconque, il existe toujours un point dont l'accélération est normale à ce plan, et il n'en existe qu'un seul.

Considérons un plan P et son homologue π; par l'origine O menons un plan k parallèle à P, ce plan coupera le plan π suivant une droite $\alpha\beta$. La droite AB

Fig. 6.



homologue de $\alpha\beta$ sera le lieu des points du plan P dont les accélérations seront contenues dans le plan lui-même. L'intersection de cette droite AB et de la caractéristique du plan P est un point dont la trajectoire est osculatrice à ce plan.

Si le plan P tourne autour d'une droite D, son homologue π tourne autour d'une droite Δ, homologue de D, tandis que le plan k tourne autour d'une autre droite Od parallèle à D. Dans ces conditions, $\alpha\beta$ engendre un hyperboloïde, et il en est de même de AB.

D'un autre côté, on sait que le lieu des caractéristiques des plans qui passent par une droite D est un hyperboloïde. En combinant cette proposition avec la précédente et en remarquant que les deux hyperboloïdes ont une droite commune, on arrive à cette proposition :

Les plans passant par une même droite sont osculateurs aux trajectoires d'une série de points formant une cubique gauche.

A une série de plans P parallèles entre eux correspond une série de plans π également parallèles entre eux. D'un autre côté la direction de k étant invariable, $\alpha\beta$ décrit un plan passant par l'origine, et la droite AB en décrit un autre; d'ailleurs les caractéristiques de plusieurs plans parallèles sont dans un même plan; on peut donc dire que :

Une série de plans parallèles étant donnée, les points dont les trajectoires sont osculatrices à ces plans sont en ligne droite.

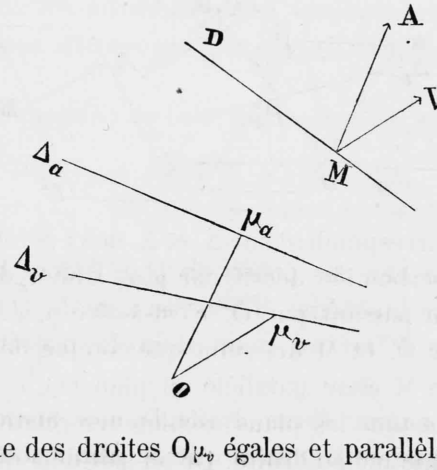
Enfin si par l'origine on abaisse des perpendiculaires sur tous les plans π qui passent par Δ, les pieds de ces perpendiculaires formeront un cercle. Donc, *si un plan tourne autour d'une droite, le point de ce plan qui a l'accélération la plus faible décrit une conique.*

Plans osculateurs des trajectoires des différents points d'une droite.

10. Considérons une droite D, son homologue sera Δ_a. L'accélération MA du point M étant égale et parallèle à $O\mu_a$ qui décrit un plan, décrit elle-même un paraboloïde.

Si maintenant on opère sur les vitesses comme sur les accélérations, c'est à dire

Fig. 7.



si par l'origine on mène des droites $O\mu_v$ égales et parallèles aux vitesses MV des différents points de la droite D, on obtiendra une autre droite Δ_v homologue de D.

Or il est clair que les vitesses MV forment un paraboloïde, donc le plan osculateur AMV qui est tangent à la fois à deux paraboloïdes a pour enveloppe la développable circonscrite à ces deux surfaces.

Si M varie sur la droite D, les points μ_a et μ_v varieront respectivement sur Δ_a et Δ_v en décrivant sur ces deux droites des divisions homographiques, par suite la droite $\mu_a\mu_v$ engendre un hyperboloïde, tandis que le plan $O\mu_a\mu_v$ enveloppe le cône qui lui est circonscrit.

Donc, *les plans menés par un même point parallèlement aux plans osculateurs des différents points d'une droite enveloppent un cône du second degré.*

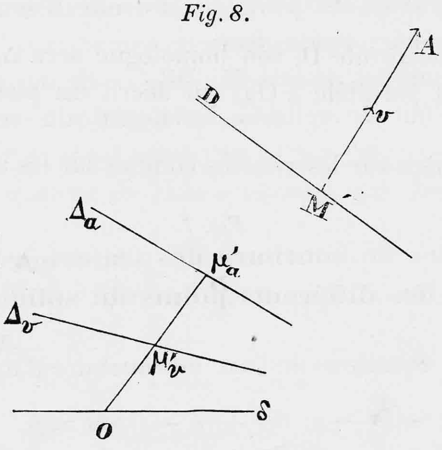
Ce qui précède suppose que la vitesse V du point M a une direction distincte de celle de son accélération MA. Or il existe une infinité de points du solide pour lesquels la vitesse et l'accélération ont la même direction. Ces points sont donnés par les équations

$$\frac{u'' - ar^2 - br'}{-br} = \frac{ar' - br^2 - cp'}{ar} = \frac{w'' + bp'}{w'},$$

et constituent une cubique gauche, intersection d'un cylindre parabolique parallèle à Oz et d'un paraboloïde hyperbolique. Or on sait qu'une droite D peut rencontrer soit une fois, soit deux fois, cette cubique gauche.

Considérons d'abord une droite D n'ayant qu'un point commun M' avec la

Fig. 8.



cubique. Au point M' correspondent sur Δ_a et Δ_v deux points μ_a et μ_v en ligne droite avec le point O. L'hyperboloïde décrit par $\mu_a\mu_v$ admet donc pour l'une de ses génératrices une droite passant par O, c'est-à-dire $\mu'_a\mu'_v$. Soit $O\delta$ la deuxième génératrice passant par O, et M un point quelconque de D. Le plan osculateur MAV à la trajectoire de M étant parallèle au plan $O\mu_a\mu_v$ qui passe constamment par δ, on peut dire que tous les plans osculateurs relatifs aux différents points de D sont parallèles à une même droite. Or on sait déjà qu'ils sont tangents à un paraboloïde hyperbolique, donc *ces plans osculateurs enveloppent un cylindre parabolique.*

Considérons actuellement une droite D ayant deux points communs avec la cubique gauche. Soient M′ et M″ ces deux points, μ'_a, μ'_v les homologues de M′ et μ''_a, μ''_v ceux de M″.

Les points μ'_a et μ'_v étant en ligne droite avec le point O ainsi que les points μ''_a et μ''_v, il s'ensuit que les droites Δ_a et Δ_v sont dans un même plan avec l'origine. Dans ce cas, le plan osculateur MAV relatif à un point quelconque de D parallèle au plan $O\mu_a\mu_v$ qui est invariable, conserve lui-même une direction constante.

Donc, *si une droite rencontre deux fois la cubique, les plans osculateurs des trajectoires de tous ses points sont parallèles entre eux.*

Si en particulier la droite D rencontre la cubique gauche en deux points M′ et M″ tels que les vitesses v' et v'' de ces points soient concourantes, le plan $O\mu'_a\mu'_v$ sera parallèle au plan des deux vitesses et de la droite D. On peut donc dire que, dans le cas actuel, *les plans osculateurs relatifs à tous les points de la droite sont confondus en un seul, et on a une droite qui décrit un élément de surface plane.*

On se rend compte de ces résultats en remarquant qu'un point de la cubique précédente ayant sa vitesse et son accélération dirigées suivant une même droite décrit un élément rectiligne au 3e ordre près. Dès lors, la droite D a deux de ses points M′ et M″ qui glissent sur deux droites fixes pendant un temps infiniment petit. On sait alors que tous les points de la droite D se meuvent dans des plans parallèles à la fois aux deux droites fixes.

Cette propriété qu'ont les points M′, M″, ... de la cubique de décrire des éléments rectilignes, fait de celle-ci l'analogue du cercle d'inflexion de la géométrie plane.

Étude des axes de courbure des trajectoires simultanées des différents points du solide.

11. On sait que les équations de l'axe de courbure d'une courbe gauche sont

$$(1)\quad \begin{cases} (X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0, \\ (X-x)\,d^2x + (Y-y)\,d^2y + (Z-z)\,d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{cases}$$

x, y, z désignant des coordonnées courantes, et x, y et z des fonctions déterminées d'une variable indépendante qui sera le temps t dans la question qui nous occupe. Remplaçant dans le système (1) x, y, z par leurs développements et faisant ensuite $t=0$, il vient

$$-(X-a)\,br + (Y-b)\,ar + (Z-c)\,w' = 0,$$

$$(X-a)(u''-ar^2-br') + (Y-b)(ar'-br^2-cp') + (Z-c)(w''+bp') = a^2r^2 + b^2r^2 + w'^2,$$

ou en réduisant

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} -brX + arY + (z-c)w' = 0, \\ (u'' - ar^2 - br')X + (ar' - br^2 - cp')Y + (w'' + bp')Z = au'' + cw''' + w'^2. \end{array}\right.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$x = a + a't + a''\frac{t^2}{2},$$

$$y = b + b't + b''\frac{t^2}{2},$$

$$z = c + c't + c''\frac{t^2}{2},$$

$$cw' = d', \quad au'' + cw'' + w'^2 = d'',$$

et nous aurons pour représenter l'axe de courbure de la trajectoire du point a, b, c les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a'X + b'Y + c'Z = d', \\ a''X + b''Y + c''Z = d''. \end{array}\right.$$

Nous voyons immédiatement que l'axe de courbure se transporte à l'infini si le point correspondant fait partie de la courbe gauche

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'},$$

qui n'est autre que la cubique d'inflexion.

On voit aussi que l'axe de courbure est indéterminé dans le plan

$$a'X + b'Y + c'Z = d',$$

pour les points satisfaisant aux relations

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'} = \frac{d''}{d'},$$

qui, développées, donnent

$$\frac{u'' - ar^2 - br'}{-br} = \frac{ar' - br^2 - cp'}{ar} = \frac{w'' + bp'}{w'} = \frac{au'' + cw'' + w'^2}{cw'}.$$

Multipliant les deux termes des trois premières fractions par a, b, c respectivement, ajoutant termes à termes et retranchant des termes de la quatrième, il vient

$$a^2r^2 + b^2r^2 + w'^2 = 0,$$

cylindre imaginaire coupant la cubique d'inflexion en quatre points imaginaires, tels que les plans qui ont ces points pour foyers offrent une indétermination complète pour les axes de courbure qu'ils peuvent contenir.

Nous remarquerons enfin que les équations de l'axe de courbure sont linéaires par rapport aux coordonnées a, b, c du point décrivant, ce qui montre que le lieu des points dont les axes de courbure passent par un point donné x, y, z, est une droite dont nous aurons à nous occuper ultérieurement.

Lieu des axes de courbure relatifs aux différents points d'une droite.

12. Considérons une droite D ayant pour équations

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=\rho.$$

Pour obtenir l'axe de courbure d'un point quelconque de cette droite, il suffira de remplacer dans les équations (3) a, b, c par $a+\alpha\rho$, $b+\beta\rho$, $c+\gamma\rho$ respectivement. Si, pour abréger, nous posons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lll} -\beta\rho r=\alpha', & -\alpha r^2-\beta r'=\alpha'', & \gamma w'=\delta', \\ \alpha\rho r=\beta', & \alpha r'-\beta r^2-\gamma p'=\beta'', & \alpha u''+\gamma w''=\delta'', \\ & \beta p'=\gamma'', & \end{array}\right.$$

les résultats de la substitution indiquée dans a', b', c', a'', b'', c'', d' et d'' seront

$$a'+\alpha'\rho,\quad b'+\beta'\rho,\quad c'+\gamma'\rho,\quad a''+\alpha''\rho,\quad \text{etc...},$$

et les équations de l'axe de courbure deviendront

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} a'x+b'y+c'z-d'+\rho\,[\alpha'x+\beta'y+\gamma'z-\delta']=0, \\ a''x+b''y+c''z-d''+\rho\,[\alpha''x+\beta''y+\gamma''z-\delta'']=0. \end{array}\right.$$

Si maintenant on fait varier ρ de $-\infty$ à $+\infty$, le premier plan (5) tourne autour de la droite

$$\Delta\left\{\begin{array}{l} a'x+b'y+c'z-d'=0, \\ \alpha'x+\beta'y+\gamma'z-\delta'=0, \end{array}\right.$$

et le deuxième plan (5) autour de la droite

$$\Delta'\left\{\begin{array}{l} a''x+b''y+c''z-d''=0, \\ \alpha''x+\beta''y+\gamma''z-\delta''=0. \end{array}\right.$$

Le lieu cherché est donc un hyperboloïde passant par les droites Δ et Δ' dont la première est visiblement la conjuguée de la droite donnée D.

Lorsque les droites Δ et Δ' se rencontrent, l'hyperboloïde précédent se réduit à un cône; il faut pour cela que l'on ait

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix}=0,$$

équation du second degré en α, β, γ et en a, b, c, et qui évidemment représente un complexe du second ordre. Ainsi :

Les droites telles que les axes de courbure relatifs à tous leurs points forment un cône, constituent un complexe du second ordre. Or il est évident que tous les points de la droite D, ayant pour axes de courbure les différentes génératrices d'un cône S, restent à des distances constantes au 3e ordre près du sommet de ce cône. En d'autres termes, on peut dire que la droite D pivote autour du point S. Donc :

Quand un solide se déplace, les droites qui ont la propriété de pivoter autour de certains points forment un complexe du second ordre. Nous désignerons ces droites sous le nom de DROITES PIVOTANTES.

On voit aussi que, parmi les axes de courbure des différents points de la droite pivotante, figure la conjuguée de cette droite. Donc, *la conjuguée d'une pivotante est un axe de courbure.* Nous verrons plus tard que la proposition réciproque est également vraie.

Si les droites Δ et Δ' sont parallèles, l'hyperboloïde précédent devient un cylindre parallèle à la droite Δ conjuguée de D.

Pour que cela ait lieu, il faut que l'on ait :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Or les quantités a', b', c', a'', ... sont linéaires en a, b, c, tandis que α', β', γ', α''... sont linéaires et homogènes en α, β, γ. On voit donc que d'un point quelconque de l'espace partent deux droites dont tous les points ont des axes de courbure parallèles. Ces droites sont les mêmes que celles qui s'appuient deux fois sur la cubique d'inflexion. On peut dire aussi qu'*elles pivotent autour de points situés à l'infini et que tous leurs points se meuvent dans des plans parallèles en négligeant les quantités du 3e ordre.*

Si aux équations (7) on adjoint les suivantes :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ \alpha' & \beta' & \delta' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ \alpha' & \beta' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \delta'' \end{vmatrix} = 0,$$

on aura exprimé que les droites Δ et Δ' se confondent, et les droites D qui satisfont à la fois aux équations (7) et (8), et qui sont en nombre limité, ont la propriété de tourner autour de leurs conjuguées respectives Δ et cela au 3e ordre près. On peut dire que les trajectoires de tous les points de D ont un seul et même axe de courbure Δ qui reste pour ainsi dire conjugué de D pendant deux instants consécutifs. Considérons d'ailleurs les droites Δ et Δ' dont la première Δ est évidemment la conjuguée de D. Au bout du temps $t + dt$, la droite D est venue en D′, et à cette nouvelle époque elle a une autre conjuguée que l'on obtiendrait en changeant t en $t + dt$ dans les équations Δ. On n'obtiendra pas ainsi le système Δ', mais un système qui peut le remplacer dans tous les calculs précédents. On peut donc dire que :

1° Si les deux conjuguées consécutives d'une droite D ne se rencontrent pas, le lieu des axes de courbure des points de D est un hyperboloïde;

2° Si les deux conjuguées consécutives de D se rencontrent, les axes de courbure des points de cette droite forment un cône dont le sommet est un *pivot;*

3° Si ces mêmes conjuguées sont parallèles, les axes de courbure des points de la droite forment un cylindre, et son pivot a passé à l'infini;

4° Si une droite D est telle que sa conjuguée à l'époque t soit la même qu'à l'époque $t + dt$, tous les points de cette droite ont le même axe de courbure et cet axe est pour ainsi dire une *conjuguée persistante.*

Il est maintenant facile d'introduire dans l'équation (6) du complexe des pivotantes les éléments ordinaires d'une droite. Cette équation peut s'écrire, en effet :

$$\begin{vmatrix} -br, & ar, & w', & w'c \\ -\beta r, & \alpha r, & 0, & w'\gamma \\ u'' - ar^2 - br', & ar' - br^2 - cp', & w'' + bp', & au'' + cw'' + w'^2 \\ -\alpha r^2 - \beta r', & \alpha r' - \beta r^2 - \gamma p', & \beta p', & \alpha u'' + \gamma w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Divisant par r les deux premières lignes et posant $\frac{w'}{r} = k$, il vient

$$\begin{vmatrix} -b, & ar, & k, & kc \\ -\beta, & \alpha r, & 0, & k\gamma \\ u'' - ar^2 - br', & ar' - br^2 - cp', & w'' + bp', & au'' + cw'' + w'^2 \\ -\alpha r^2 - \beta r', & \alpha r' - \beta r^2 - \gamma p', & \beta p', & \alpha u'' + \gamma w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliant enfin les deux premières lignes par r', puis retranchant de la troisième et de la quatrième respectivement, on a, en posant $w'' - kr' = g$,

$$\begin{vmatrix} -b, & a, & k, & kc \\ -\beta, & \alpha, & 0, & k\gamma \\ u'' - ar^2, & -br^2 - cp', & g + bp', & au'' + cg + w'^2 \\ -\alpha r^2, & -\beta r^2 - \gamma p', & \beta p', & \alpha u'' + \gamma g \end{vmatrix} = 0,$$

pour représenter le cône du complexe relatif au point a, b, c.

Il vient ensuite, en faisant $a = \mu$, $b = \nu$, $c = 0$, $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\beta}{\gamma} = n$,

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} -\nu, & \mu, & k, & 0 \\ -n, & m, & 0, & k \\ u'' - r^2\mu, & -\nu r^2 - & g + \rho'\nu, & u''\mu + w'^2 \\ -mr^2, & -nr^2 - p', & np', & mu'' + g \end{vmatrix} = 0;$$

puis, en développant et en posant $m\nu - n\mu = \omega$,

$$
(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & p'u''\omega^2 + gu''\omega m - (p'w'^2 + k\nu^2 u'')\,\omega n + kp'r^2\omega\mu + gp'\,\omega\nu \\ & \quad + (g^2 + k^2r^4)\,\omega + k\,(r^2w'^2 + u''^2)\,m^2 + kr^2w'^2n^2 + 2kp'u''n\mu + kp'^2\nu^2 \\ & \qquad + kgu''m + (kp'w'^2 + ku''r^2)\,n - k^2p'r^2\mu + kgp'\nu + k^2p'u'' = 0. \end{aligned} \right.
$$

La conique du complexe qui est comprise dans un plan quelconque

$$
(11) \qquad ax + by + cz - d = 0,
$$

dont la normale a pour cosinus directeurs a, b, c et dont la distance à l'origine est d, se trouvera en considérant une droite quelconque de l'espace comme l'intersection du plan précédent supposé fixe et d'un plan indéterminé

$$
(12) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0.
$$

Les éléments de la droite suivant laquelle se coupent ces deux plans sont :

$$
\begin{aligned} m &= \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - b\alpha}, & \mu &= \frac{\beta d - \delta b}{a\beta - b\alpha}, \\ n &= \frac{\alpha c - a\gamma}{a\beta - b\alpha}, & \nu &= \frac{a\delta - \alpha d}{a\beta - b\alpha}, \end{aligned} \qquad \omega = \frac{d\gamma - c\delta}{a\beta - b\alpha}.
$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (10), on a

$$
(13) \left\{ \begin{aligned} & p'u''(d\gamma - c\delta)^2 + gu''(d\gamma - c\delta)(b\gamma - \beta c) - (p'w'^2 + kr^2u'')(d\gamma - c\delta)(\alpha c - \gamma a) \\ & + kp'r^2(d\gamma - c\delta)(\beta d - \delta b) + gp'(d\gamma - c\delta)(a\delta - \alpha d) + (g^2 + k^2r^4)(d\gamma - c\delta)(a\beta - b\alpha) \\ & + k(r^2w'^2 + u''^2)(b\gamma - \beta c)^2 + kr^2w'^2(\alpha c - \gamma a)^2 + 2kp'u''(\alpha c - \gamma a)(\beta d - \delta b) \\ & + kp'^2(a\delta - \alpha d)^2 + kgu''(b\gamma - \beta c)(a\beta - b\alpha) + (kp'w'^2 + k^2u''r^2)(\alpha c - \gamma a)(a\beta - b\alpha) \\ & \qquad - kp'r^2(\beta d - \delta b)(a\beta - b\alpha) + kgp'(a\delta - \alpha d)(a\beta - b\alpha) + k^2p'u''(a\beta - b\alpha)^2 = 0, \end{aligned} \right.
$$

et cette équation, ordonnée par rapport à δ, prendra la forme

$$
M\delta^2 + (Nd + N')\,\delta + Pd^2 + Qd + R = 0.
$$

Pour chaque direction (α, β, γ) de l'axe du plan mobile (12), on trouve deux distances δ' et δ'' de ce plan à l'origine, et par conséquent à deux plans parallèles coupant le plan fixe (11) suivant deux tangentes parallèles de la conique du complexe. La demi-somme $\dfrac{d' + d''}{2}$ représentera l'x, l'y ou le z du centre de la conique, si l'on a soin de prendre la direction (α, β, γ) parallèle à l'axe des x, à l'axe des y ou à l'axe de z.

Calculons d'abord l'abscisse du centre x_1, on aura

$$
x_1 = \frac{\delta' + \delta''}{2} = -\frac{Nd + N'}{2M},
$$

en remplaçant dans N et N' α par 1, β par 0 et γ par 0. On aura de même y_1 en faisant dans N et N', $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, et enfin z_1 en faisant dans les mêmes fonctions $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$. Si maintenant on désigne par N_α, N_β, N_γ les résultats de ces trois séries de substitutions, on voit immédiatement que quand d varie ou quand le plan (H) se transporte parallèlement à lui-même, le lieu des centres des coniques du complexe est une droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à N_α, N_β et N_γ.

Or la quantité N a pour expression le coefficient même de $d\delta$ dans l'équation (13), c'est-à-dire

$$N = -2p'u''c\gamma - kp'r^2b\gamma - kp'r^2c\beta + gp'a\gamma + gp'\alpha c - 2kp'^2a\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} N_\alpha &= gp'c - 2kp'^2a, \\ N_\beta &= -kp'r^2c, \\ N_\gamma &= -2p'u''c - kp'r^2b + gp'a, \end{aligned}$$

et le plan (11) aura une direction principale si l'on a

$$\frac{gp'c - 2kp'^2a}{a} = \frac{-kp'r^2c}{b} = \frac{-2p'u''c - kp'r^2b + gp'a}{c}.$$

Désignant par S la valeur commune de ces trois rapports divisée préalablement par p', il vient

$$\begin{aligned} (2kp' + S)a \qquad\qquad - gc &= 0, \\ Sb + kr^2c &= 0, \\ -ga + kr^2b + (2u''+S)c &= 0, \end{aligned}$$

et l'on a pour déterminer S

$$\begin{vmatrix} 2kp' + S & 0 & -g \\ & S & kr^2 \\ -g & kr^2 & 2u'' + S \end{vmatrix} = 0,$$

équation du 3e degré dont les racines sont toujours réelles, et permettent de trouver trois directions rectangulaires qui sont celles des plans principaux cherchés.

Complexe des axes de courbure.

13. Une droite A

$$\text{(A)} \qquad \frac{x - A}{\alpha} = \frac{y - B}{\beta} = \frac{z - C}{\gamma} = \rho$$

sera un axe de courbure, si l'on peut trouver un point a, b, c dont l'axe puisse coïncider avec la droite A. Or les équations de cet axe sont

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & -brx + ary + w'(z - c) = 0, \\ & (u'' - ar^2 - br')x + (ar' - br^2 - cp')y + (w'' + bp')z = au'' + cw'' + w'^2. \end{aligned} \right.$$

Remplaçant x, y, z par $A + \alpha\rho$, $B + \beta\rho$, $C + \gamma\rho$ respectivement et exprimant que les résultats sont nuls quel que soit ρ, il vient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} -br\,A + ar\,B + w'\,(C - c) &= 0,\\ -br\,\alpha + ar\,\beta + w'\,\gamma \qquad &= 0,\\ (u'' - ar^2 - br')\,A + (ar' - br^2 - cp')\,B + (w'' + bp')\,C &= au'' + cw'' + w'^2,\\ (u'' - ar^2 - br')\,\alpha + (ar' - br^2 - cp')\,\beta + (w'' + bp')\,\gamma &= 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminant enfin a, b, c, et posant $\dfrac{w'}{r} = k$,

$$\begin{vmatrix} B, & -A, & -K, & KC \\ \beta, & -\beta, & 0, & k\gamma \\ Br' - Ar^2 - u'', & p'C - r^2B - r'A, & -r'B - w'', & Au'' + Cw'' - w'^2 \\ \beta r' - \alpha r^2, & p'\gamma - r^2\beta - r'\alpha, & -p'\beta, & \alpha u + \gamma w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliant ensuite la première et la deuxième ligne par r' et retranchant respectivement de la troisième et de la quatrième, il vient, en posant $w'' - kr' = g$,

$$\begin{vmatrix} B, & -A, & -K, & KC \\ \beta, & -\alpha, & 0, & k\gamma \\ -Ar^2 - u'', & p'C - r^2B, & -p'B - g, & Au'' + Cg - w'^2 \\ -\alpha r^2, & p'\gamma - r^2\beta, & -p'\beta, & \alpha u'' + \gamma g \end{vmatrix} = 0,$$

pour représenter le cône du complexe dont le sommet est A, B, C.

Introduisons maintenant les éléments de la droite, en faisant $A = \mu$, $B = \nu$, $C = 0$, $\dfrac{\alpha}{\gamma} = m$, $\dfrac{\beta}{\gamma} = n$, on aura l'équation

$$\begin{vmatrix} \nu, & -\mu, & -k, & 0 \\ n, & -m, & 0, & k \\ -\mu r^2 - u'', & -r^2\nu, & -p'\nu - g, & u''\mu - w'^2 \\ -mr^2, & p' - nr^2, & p'n, & u''m + g \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on trouve

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} & p'u''\omega^2 + gu''\omega m + (p'w'^2 + kr^2u'')\,\omega n - kp'r^2\omega\mu + gp'\omega\nu \\ & + (g^2 + k^2r^4)\,\omega + k\,(r^2w'^2 + u''^2)\,m^2 + kr^2w'^2n^2 + 2kp'u''n\mu + kp'^2\nu^2 \\ & + kgu''m - k\,(p'w'^2 + kr^2u'')\,n + k^2p'r^2\mu + kgp'\nu + k^2p'u'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Comparant cette équation $C = 0$ avec celle du complexe des pivotantes dont nous désignerons le premier membre par P, on constate l'égalité

$$C = P + (\omega - k)\,[(p'w'^2 - kr^2u'')\,n - kp'r^2\mu],$$

d'où l'on conclut que les droites des complexes linéaires $\omega = k$ et $(p'w'^2 - kr^2u'')\,n - kp'r^2\mu = 0$, qui font partie de l'un des complexes $C = 0$ ou $P = 0$, font partie de l'autre.

On voit aussi que les complexes C et P sont conjugués. Si, en effet, dans l'équation $C = 0$ on fait les substitutions

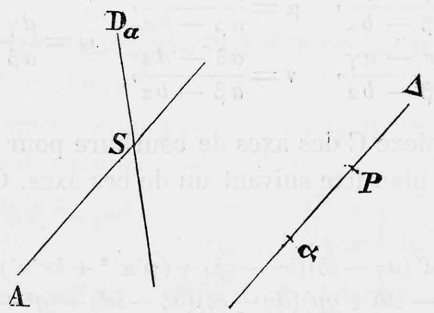
$$m = \frac{km'}{\omega'}, \quad n = \frac{kn'}{\omega'}, \quad \mu = \frac{k\mu'}{\omega'}, \quad \nu = \frac{k\nu'}{\omega'}, \quad \omega = \frac{k^2}{\omega'^2},$$

on retrouve l'équation $P = 0$.

Il est facile de se rendre compte de ce résultat. Nous avons déjà vu en effet que la conjuguée d'une pivotante est un axe de courbure, il suffit donc d'établir la proposition réciproque.

Soit D_α une droite quelconque et Δ sa conjuguée. Si la droite D_α est un axe de

Fig. 9.



courbure, elle ne peut l'être que pour un point α de sa conjuguée Δ qui est, comme on sait, le lieu des foyers des plans (D_α, α) passant par D_α. Soit maintenant P un point quelconque de Δ, P étant le foyer du plan (D_α, P), l'axe de courbure du point P ne peut être que dans ce plan, donc l'axe de courbure SA de P rencontre D_α en un point S. Cela posé, quand le solide se déplace, P reste à une distance constante au 3e ordre près de tous les points de l'axe SA et en particulier du point S. De même α dans son mouvement reste à une distance constante au 3e ordre près de tous les points de son axe de courbure et entre autres de S. Nous avons donc deux points α et P d'une droite Δ qui conservent leurs distances au point S, donc tous les points de Δ pivotent autour de S, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte aussi de ce qui précède que les axes de courbure de tous les points de Δ rencontrent D_α en un même point S.

En résumé :

1° *Les axes de courbure de tous les points d'une pivotante* Δ *forment un cône dont le sommet est le pivot* S *de* Δ *et qui contient la conjuguée* D *de cette dernière.*

2° *Les pivotantes de tous les points d'un axe de courbure* D_α *forment un cône dont le sommet est le point* α *correspondant à cet axe et qui contient la conjuguée* Δ *de ce dernier.*

Coniques du complexe des axes de courbure.

14. Si nous considérons un axe de courbure comme l'intersection d'un plan fixe

$$(1) \qquad ax + by + cz = d$$

et d'un plan indéterminé

$$(2) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

il suffira de faire

$$m = \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - b\alpha}, \quad \mu = \frac{\beta d - \delta b}{a\beta - b\alpha}, \quad \omega = \frac{d\gamma - c\delta}{a\beta - b\alpha},$$
$$n = \frac{\alpha c - a\gamma}{a\beta - b\alpha}, \quad \nu = \frac{a\delta - d\alpha}{a\beta - b\alpha}$$

dans l'équation du complexe C des axes de courbure pour obtenir l'ensemble des plans (2) qui coupent le plan fixe suivant un de ces axes. On obtient ainsi l'équation

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & p'u''(d\gamma - c\delta)^2 + gu''(d\gamma - c\delta)(b\gamma - c\beta) + (p'w'^2 + kr^2u'')(d\gamma - c\delta)(\alpha c - a\gamma) \\ & - kp'r^2(d\gamma - c\delta)(\beta d - \delta b) + gp'(d\gamma - c\delta)(a\delta - \alpha d) + (g^2 + k^2r^4)(d\gamma - c\delta)(a\beta - b\alpha) \\ & + k(r'w'^2 + u''^2)(b\gamma - \beta c)^2 + kr^2w'^2(\alpha c - a\gamma)^2 + 2kp'u''(\alpha c - a\gamma)(\beta d - \delta b) \\ & + kp'^2(a\delta - \alpha d)^2 + kgu''(b\gamma - \beta c)(a\beta - \alpha b) - k(p'w'^2 + kr^2u'')(\alpha c - a\gamma)(a\beta - \alpha b) \\ & \quad + k^2p'r^2(\beta d - \delta b)(a\beta - \alpha b) + kgp'(a\delta - \alpha d)(a\beta - \alpha b) + k^2p'u''(a\beta - \alpha b)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Égalant à 0 le coefficient de δ^2, on a, en divisant par p',

$$u''c^2 - kr^2bc - gac + kp'a^2 = 0,$$

d'où l'on conclut que, *pour tous les plans* (1) *dont la normale est parallèle à un certain cône du second degré, la conique du complexe se réduit à une parabole.* Il est facile de se rendre compte de ce résultat.

Tous les points de la cubique d'inflexion ont en effet leurs axes de courbure situés à l'infini dans un plan normal à la trajectoire de ces points. Cherchons donc le cône des droites parallèles aux vitesses des différents points A, B, C de cette cubique dont les équations sont

$$\frac{u'' - Ar^2 - Br'}{-B} = \frac{Ar' - Br^2 - Cp'}{A} = \frac{w'' + Bp'}{k'}.$$

Pour un point quelconque de ce cône XYZ, on aura

$$\frac{X}{-B} = \frac{Y}{A} = \frac{Z}{K};$$

éliminant ensuite A et B entre ces dernières équations et l'une des précédentes, on obtient, en posant toujours $w'' - kr' = g$, l'équation

$$u''Z^2 - kr^2YZ - gXZ - kp'X^2 = 0,$$

qui est identique avec celle des directions normales aux plans paraboliques.

Comme dans l'étude du complexe des pivotantes, nous calculerons le coefficient de $d\delta$ dans l'équation (3), ce qui nous donne

$$-u''c\gamma + kr^2\gamma b + kr^2\beta c + ga\gamma + g\alpha c - 2kp'a\alpha.$$

Dans cette expression, nous ferons successivement les substitutions $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, puis $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 1$, et enfin $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, et nous aurons des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs du diamètre des plans parallèles au plan (1). Ce dernier sera donc un plan principal, lorsqu'on aura

$$\frac{gc - 2kp'a}{a} = \frac{kr^2c}{b} = \frac{-u''c + kr^2b + ga}{c} = \text{S},$$

en désignant par S la valeur commune de ces trois rapports. On obtient pour déterminer cette inconnue auxiliaire, la relation

$$\begin{vmatrix} 2kp' + \text{S}, & & -g \\ & \text{S}, & -kr^2 \\ -g, & -kr^2, & u'' + \text{S} \end{vmatrix} = 0.$$

Aux trois racines de cette équation correspondront les trois directions rectangulaires entre elles des plans principaux du complexe des axes de courbure.

Pour étudier les coniques singulières contenues dans la série des plans parallèles aux plans (1), nous pouvons dans l'équation (3) faire $\delta = 0$. Celle-ci représentera alors l'ensemble des plans qui, passant par l'origine, touchent la conique du complexe contenue dans le plan (1). Cette conique se réduira à un système de deux points si le cône supplémentaire des directions α, β, γ se réduit à un système de deux plans.

L'équation (3) homogène en α, β, γ, où l'on fait $\delta = 0$ et que l'on ordonne par rapport à ces lettres, a pour coefficients des polynomes du second degré en d; il semble donc que la condition qui exprime que le cône (3) se réduit à deux plans sera du sixième en d; mais il est facile de voir que les termes en d^6 et en d^5 disparaissent, d'où l'on conclut que, *parmi les plans parallèles à un plan donné, il en est quatre pour lesquels la conique se réduit à deux points.*

Pour continuer cette étude des coniques singulières, il nous paraît préférable de procéder un peu différemment. Au lieu de déterminer le plan (1) par ses cosinus directeurs et sa distance à l'origine, nous prendrons pour paramètres de ce plan les coordonnées a, b, c de son foyer F.

Nous avons démontré que les axes de courbure et les pivotantes sont des droites conjuguées deux à deux, de sorte que, aux axes de courbure A enveloppant la conique du plan P, correspondent les génératrices d'un cône ayant pour sommet le foyer du plan et qui n'est autre que le cône π du complexe des pivotantes.

Supposons actuellement que pour un point F le cône des pivotantes se réduise

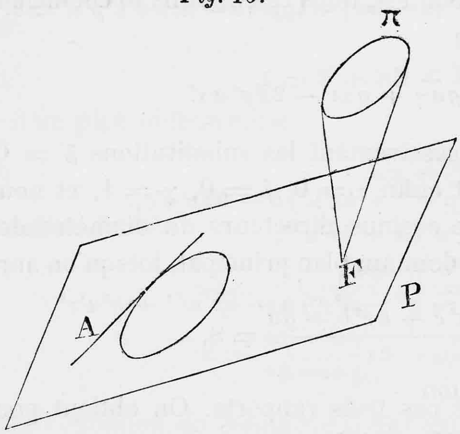


Fig. 10.

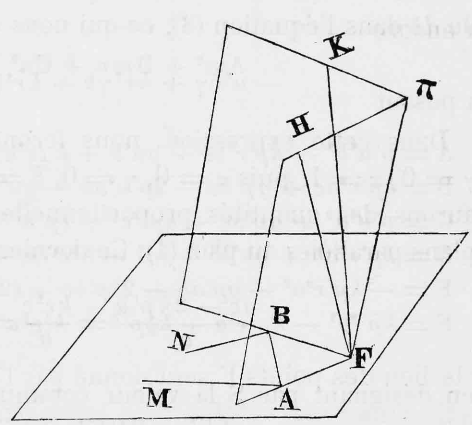


Fig. 11.

à un système de deux plans FH et FK, et voyons ce que devient la conique enveloppe des axes de courbure.

A une pivotante FH située dans le plan H, correspond une droite AM conjuguée de FH qui, comme on sait, se trouve dans le plan P et passe par le foyer A du plan H. De même à une pivotante FK située dans K correspond la conjuguée BN située dans le plan P et passant par B foyer du plan K.

Les axes de courbure contenus dans le plan P passent donc les uns par A, les autres par B, par suite la conique qu'ils enveloppent se réduit à deux points (A, B).

Pour obtenir le lieu des points F, sommet des cônes évanouissants du complexe des pivotantes, il suffira d'introduire dans l'équation de ce dernier les coordonnées du point F et les cosinus directeurs de la droite représentée par le système

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}.$$

On aura, pour exprimer les éléments ordinaires de cette droite, m, n, μ, ν et $\omega = m\nu - n\mu$, les formules

$$m = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad n = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \mu = a - \frac{\alpha}{\gamma}c, \quad \nu = b - \frac{\beta}{\gamma}c,$$

ainsi que

$$\omega = \alpha b - \beta a;$$

on peut même conserver m et n et faire dans l'équation du complexe

$$\mu = a - mc, \quad \nu = b - nc, \quad \omega = mb - na,$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&p'u''(mb-na)^2+gu''(mb-na)m-(p'w'^2+kr^2u'')(mb-na)n+kp'v^2(mb-na)(a-mc)\\
&+gp'(mb-na)(b-nc)+(g^2+k^2r^4)(mb-na)+k(r^2w'^2+u''^2)m^2+kr^2w'^2n^2\\
&+2kp'u''n(a-mc)+kp'^2(b-nc)^2+kgu''m+(kp'w'^2+k^2u''r^2)n\\
&\qquad\qquad-kp'r^2(a-mc)+kgp'(b-nc)+k^2p'u''=0,
\end{aligned}
$$

ou encore

$$\mathrm{A}m^2+\mathrm{B}mn+\mathrm{C}n^2+\mathrm{D}m+\mathrm{E}n+\mathrm{F}=0,$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}&=p'u''b^2-kp'r^2bc+gu''b+k(r^2w'^2+u''^2),\\
\mathrm{B}&=kp'r^2ac+gp'bc-2p'u''ab-gu''a-(p'w'^2+kr^2u'')b-2kp'u''c,\\
\mathrm{C}&=p'u''a^2+gp'ac+kp'^2c^2+(p'w'^2+kr^2u'')a+kr^2w'^2,\\
\mathrm{D}&=kp'r^2ab+gp'b^2+(g^2+k^2r^4)b-kp'r^2c+kgu'',\\
\mathrm{E}&=-kp'r^2a^2-gp'ab-2kp'bc+(2kp'u''-g^2-k^2r^4)a+kp'w'^2+k^2u''r^2,\\
\mathrm{F}&=kp'^2b^2-kp'r^2a+kgp'b+k^2p'u'',
\end{aligned}
$$

et le lieu des points F sera donné par l'équation

$$\mathrm{AE}^2-\mathrm{BDE}+\mathrm{CD}^2+\mathrm{F}(\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC})=0.$$

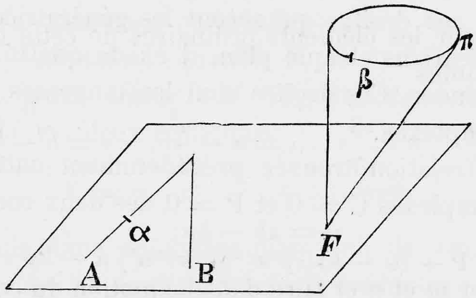
Or il est facile de s'assurer que tous les termes dont le degré en a, b, c est supérieur au quatrième se détruisent, donc le lieu des points F est une surface du quatrième ordre que nous désignerons par S. Quant aux plans P qui ont pour foyers les points de S, on sait qu'ils enveloppent une surface Σ appelée la *conjuguée* de S et qui est de la quatrième classe.

On conclut de là que *par une droite quelconque il passe quatre plans pour lesquels la conique du complexe des axes de courbure se réduit à un système de deux points.*

Revenons actuellement au cas général où le plan P contient une conique proprement dite, et cherchons le lieu des points dont les trajectoires ont des axes de courbure situés dans ce plan.

Soit F le foyer du plan, A son axe de courbure qui en fait nécessairement

Fig. 12.



partie. Le point F restant à une distance constante au 3e ordre près de tous les points de la droite A, les pivotantes de tous les points de A passent par F et forment un cône du second degré.

Une génératrice quelconque π de ce cône pivotant autour d'un certain point α de A, on peut affirmer que les axes de courbure de tous les points de la génératrice π rencontrent A au même point α. Par suite, le cône F est le lieu des points dont les axes de courbure rencontrent la droite A; mais ces axes ne sont pas tous dans le plan P.

Considérons maintenant un second axe de courbure B situé dans le plan P, soit β le point qui lui correspond. Le lieu des points dont les axes de courbure rencontrent B est un second cône dont le sommet est β. Or F ayant pour axe A qui rencontre B, fait partie de ce dernier lieu; donc le cône F et le cône β ont une génératrice commune $F\beta$, et par suite se coupent suivant une cubique gauche. Les axes de courbure des points de cette cubique rencontrent donc à la fois A et B, et par suite ils sont dans le plan P.

On peut donc dire que *le lieu des points dont les trajectoires ont leurs axes de courbure dans un plan donné, est une cubique gauche passant par le foyer de ce plan.*

Soient M' et M'' deux axes de courbure tangents à la conique, μ' et μ'' les points correspondants de la cubique. Ces deux points restant à des distances constantes, l'un de M', l'autre de M'', on peut dire que la corde $\mu' \mu''$ de la cubique pivote autour de l'intersection I de M' et M''. Donc *les pivotantes de tous les points d'un plan* P *sont les cordes d'une cubique gauche.*

Si les points μ' et μ'' tendent à se confondre sur la cubique, le point I devient un point de la conique; on peut donc dire que *les pivotantes de tous les points de la conique sont les tangentes d'une cubique gauche.*

Il est évident que ce que l'on vient de dire sur les axes de courbure et sur les coniques qu'ils enveloppent dans chaque plan peut se répéter à propos des pivotantes et des coniques correspondantes, il suffit de permuter pour ainsi dire les noms de ces deux classes de droites.

Il existe des droites qui sont à la fois pivotantes et axes de courbure. Ces droites font partie de deux complexes du second degré. Par chaque point de l'espace, on peut mener quatre de ces droites qui seront les génératrices communes à deux cônes du second degré. Dans chaque plan, il existe quatre droites possédant la double propriété demandée. Ces droites sont les tangentes communes aux deux coniques des deux complexes.

Rappelons enfin la relation trouvée précédemment entre les deux premiers membres des deux complexes $C = 0$ et $P = 0$ des deux complexes considérés

$$C = P + (\omega - k)\,[(p'w'^2 + kr^2u'')\,n - kp'\,r^2\mu].$$

Elle nous montre que si une droite du complexe linéaire $\omega = k$ appartient à $C = 0$, elle appartient aussi à $P = 0$. Donc *le foyer d'un plan quelconque est le* *point de rencontre de deux tangentes commun aux deux coniques. On en dirait autant du complexe linéaire* $(p'w'^2 + kr^2u'')\,n - kp'r^2\mu = 0$. *Donc, dans chaque plan on connaît deux points de rencontre des tangentes communes aux deux coniques.*

Recherche des points du solide dont les trajectoires sont surosculatrices à des plans.

15. Considérons un solide en mouvement et soit M (a, b, c) l'un de ses points. Les coordonnées du point M qui, à l'époque t, étaient a, b, c, deviendront, aux époques $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, etc..., $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$, etc..., et correspondront aux positions successives M_1, M_2, M_3, etc..., du point M. Pour que les quatre points M, M_1, M_2, M_3 soient dans un même plan, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_1 - a, & b_1 - b, & c_1 - c \\ a_2 - a_1, & b_2 - b_1, & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_2, & b_3 - b_2, & c_3 - c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Divisant par Δt chaque ligne de ce déterminant, puis retranchant chaque ligne de la suivante et faisant tendre Δt vers 0, on arrive à l'équation

$$F_1 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

pour exprimer que les 4 points M, M_1, M_2, M_3 sont dans un même plan, d'où l'on conclut que *le lieu des points tels que leurs trajectoires aient quatre points infiniment voisins dans un même plan est une surface du 3^e^ ordre* (1) *contenant la cubique d'inflexion*

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}.$$

Pour tous les points de cette cubique, M, M_1, M_2 sont en ligne droite, et par suite M, M_1, M_2, M_3 sont bien dans un même plan.

Changeant t en $t + \Delta t$ dans l'équation $F_1 = 0$, il vient $F_1 + \Delta F_1 = 0$ qui représente le lieu des points tels que M_1, M_2, M_3, M_4 sont dans un même plan. Les points qui satisfont aux deux équations

$$F_1 = 0 \quad \text{et} \quad F_1 + \Delta F_1 = 0,$$

ont la propriété d'avoir dans un même plan cinq de leurs positions consécutives. Or, si l'on retranche les deux équations précédentes et si l'on divise par Δt,

(1) A. Schoenflies. *Journal de Crelle,* 89^e^ volume.

il vient, en faisant tendre Δt vers 0,

$$F_1 = 0, \quad \frac{dF_1}{dt} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \end{vmatrix} = F_2 = 0.$$

Les points communs à ces deux surfaces du 3[e] ordre ont en général des trajectoires surosculatrices à des plans.

Il faut toutefois en excepter les points de la cubique

$$(C_2) \qquad \frac{a''}{a'''} = \frac{b''}{b'''} = \frac{c''}{c'''},$$

qui est commune aux deux surfaces. Pour les points de cette cubique, en effet, les points M_1, M_2, M_3 sont en ligne droite; mais en général le plan $M\, M_1\, M_2\, M_3$ n'est pas le même que le plan $M_1\, M_2\, M_3\, M_4$; ces deux plans n'ont en commun que la droite $M_1\, M_2\, M_3$.

Les surfaces $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ se coupent suivant une courbe gauche du 9[e] ordre qui se dédouble en une cubique C_2 et en une courbe du 6[e] ordre, et l'on conclut de là que :

Le lieu des points d'un solide dont les trajectoires ont cinq points consécutifs dans un même plan est une courbe du 6[e] ordre [1].

Changeant encore t en $t + \Delta t$ dans les équations précédentes, on obtient la nouvelle équation

$$\frac{dF_2}{dt} = \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & c^{\text{V}} \end{vmatrix} = F_3 = 0,$$

qui exprime que les points M_2, M_3, M_4, M_5 sont dans un même plan.

Les 3 surfaces du 3[e] ordre

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

ont 27 points communs. Cherchons si tous ces points ont 6 positions consécutives dans un même plan. La cubique gauche C_2 qui appartient à $F_1 = 0$ et à $F_2 = 0$, coupe F_3 en neuf points. Or, ainsi que nous l'avons vu, ces neuf points ne conviennent pas à la question, car les plans $M\, M_1\, M_2\, M_3$ et $M_1\, M_2\, M_3\, M_4$ sont en général différents.

De même les deux surfaces $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ont en commun la cubique

$$(C_3) \qquad \frac{a'''}{a^{\text{IV}}} = \frac{b'''}{b^{\text{IV}}} = \frac{c'''}{c^{\text{IV}}}.$$

(1) A. Schoenflies. *Loc. cit.*

Les points de cette courbe prennent les positions M_2, M_3, M_4, qui seront en ligne droite, il est vrai, mais les plans $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ et $M_2\,M_3\,M_4\,M_5$ sont différents en général. Or cette cubique C_3 perce la surface $F_1 = 0$ en neuf points qui ne conviennent pas à la question. Des 27 points communs aux surfaces F_1, F_2, F_3, il ne reste donc que neuf points qui possèdent la propriété demandée. On conclut de là que :

Dans un solide en mouvement, il existe en général neuf points dont les trajectoires ont un contact du 5ᵉ ordre avec un plan (1).

Il n'existe pas de points du solide dont les trajectoires aient avec un plan un contact d'un ordre plus élevé, à moins que le mouvement considéré soit d'une nature particulière.

Il est actuellement facile d'obtenir le système des plans surosculateurs aux trajectoires des diverses catégories de points obtenues précédemment.

Pour qu'un plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$$

convienne à la question, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c - \delta &= 0, \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' &= 0, \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' &= 0, \\ \alpha a''' + \beta b''' + \gamma c''' &= 0. \end{aligned}$$

Remplaçant a', b', c', a'', b'', c'' par leurs valeurs connues et ordonnant par rapport aux coordonnées a, b, c, il vient

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c &= \delta, \\ X' a + Y' b + Z' c &= U', \\ X'' a + Y'' b + Z'' c &= U'', \\ X''' a + Y''' b + Z''' c &= U''', \end{aligned}$$

X', Y', Z', U', X'', etc..., représentant des fonctions linéaires et homogènes en α, β, γ. Tirant de ces dernières équations les valeurs de a, b, c pour les porter dans $F_1 = 0$, on arrive à une équation du 9ᵉ ordre en α, β, γ et du 3ᵉ en δ. D'où l'on conclut que le système des plans surosculateurs aux trajectoires de certains de leurs points enveloppe une surface de la quatrième classe, dont l'équation s'obtiendrait en éliminant a, b, c entre les quatre relations précédentes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ X'' & Y'' & Z'' & U'' \\ X' & Y' & Z' & U' \\ X''' & Y''' & Z''' & U''' \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendrait les plans qui ont un contact du quatrième ordre avec les trajec-

(1) A. Schoenflies. *Loc. cit.*

toires d'un de leurs points en opérant d'une manière analogue, c'est-à-dire en adjoignant à l'équation précédente la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ X'' & Y'' & Z'' & U'' \\ X''' & Y''' & Z''' & U''' \\ X^{\text{IV}} & Y^{\text{IV}} & Z^{\text{IV}} & U^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on a en outre

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ X''' & Y''' & Z''' & U''' \\ X^{\text{IV}} & Y^{\text{IV}} & Z^{\text{IV}} & U^{\text{IV}} \\ X^{\text{V}} & Y^{\text{V}} & Z^{\text{V}} & U^{\text{V}} \end{vmatrix} = 0,$$

les plans correspondants contiendront 6 positions consécutives de l'un de leurs points, et ils seront au nombre de neuf, ainsi que cela a été vu précédemment.

Étude des sphères osculatrices aux trajectoires des différents points d'un corps solide.

16. Si l'on décompose le mouvement d'un système solide en une translation définie par trois fonctions du temps u, v, w représentant les coordonnées variables d'un point déterminé O′ de ce système, et en une rotation autour de ce même point, les formules qui donneront la position d'un point quelconque à l'époque t seront

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= u + a + A't + A''\frac{t^2}{1.2} + A'''\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots, \\ y &= v + b + B't + B''\frac{t^2}{1.2} + B'''\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots, \\ z &= w + c + C't + C''\frac{t^2}{1.2} + C'''\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

a, b, c désignant les coordonnées initiales du point considéré, et A', B', C', A'', B'', C'', etc..., des fonctions linéaires et homogènes en a, b et c.

Ces fonctions homogènes satisfont à certaines identités que nous allons établir et qui nous serviront à simplifier quelques formules ultérieures.

Il est évident que la distance δ d'un point quelconque M (x, y, z) du corps à l'origine mobile O′ (u, v, w) ne doit pas changer avec le temps, par suite l'expression

$$\delta^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2,$$

ou bien

$$\delta^2 = \left(a + A't + A''\frac{t^2}{1.2} + A'''\frac{t^3}{1.2.3}\right)^2 + \left(b + B't + B''\frac{t^2}{1.2} + B'''\frac{t^3}{1.2.3}\right)^2 + \left(c + C't + C''\frac{t^2}{1.2} + C'''\frac{t^3}{1.2.3}\right)^2,$$

ne doit pas dépendre de t.

On a donc, quelles que soient a, b et c, les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &a\mathrm{A}' + b\mathrm{B}' + c\mathrm{C}' = 0,\\ &\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \mathrm{C}'^2 + a\mathrm{A}'' + b\mathrm{B}'' + c\mathrm{C}'' = 0,\\ &3\mathrm{A}'\mathrm{A}'' + 3\mathrm{B}'\mathrm{B}'' + 3\mathrm{C}'\mathrm{C}'' + a\mathrm{A}''' + b\mathrm{B}''' + c\mathrm{C}''' = 0,\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Cela posé, le centre de la sphère osculatrice est donné par les équations

$$\begin{aligned} &(\mathrm{X}-x)\,dx + (\mathrm{Y}-y)\,dy + (\mathrm{Z}-z)\,dz = 0,\\ &(\mathrm{X}-x)\,d^2x + (\mathrm{Y}-y)\,d^2y + (\mathrm{Z}-z)\,d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2,\\ &(\mathrm{X}-x)\,d^3x + (\mathrm{Y}-y)\,d^3y + (\mathrm{Z}-z)\,d^3z = 3\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z),\end{aligned}$$

qui, appliquées au cas actuel, deviennent

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{X}-a)(u'+\mathrm{A}') + (\mathrm{Y}-b)(v'+\mathrm{B}') + (\mathrm{Z}-c)(w'+c') = 0,\\ &(\mathrm{X}-a)(u''+\mathrm{A}'') + (\mathrm{Y}-b)(v''+\mathrm{B}'') + (\mathrm{Z}-c)(w''+c'') = (u'+\mathrm{A}')^2 + (v'+\mathrm{B}')^2\\ &\qquad\qquad + (w'+\mathrm{C}')^2,\\ &(\mathrm{X}-a)(u'''+\mathrm{A}''') + (\mathrm{Y}-b)(v'''+\mathrm{B}''') + (\mathrm{Z}-c)(w'''+c''') = 3\,(u'+\mathrm{A}')(u''+\mathrm{A}'')\\ &\qquad\qquad + 3\,(v'+\mathrm{B}')(v''+\mathrm{B}'')\\ &\qquad\qquad + 3\,(w'+\mathrm{C}')(w''+\mathrm{C}'').\end{aligned}\right.$$

Si maintenant on tient compte des identités (2), on voit que les équations (3) sont linéaires en a, b, c.

Représentons, comme cela a été fait précédemment, par $a'\ b'\ c'$ les coefficients de t, c'est-à-dire $u'+\mathrm{A}'$, $v'+\mathrm{B}'$, $w'+\mathrm{C}'$, par a'', b'', c'' les coefficients de $\dfrac{t^2}{1.2}$, c'est-à-dire $u''+\mathrm{A}''$, $v''+\mathrm{B}''$, $w''+\mathrm{C}''$, etc..., et les équations (3) prendront la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-a)\,a' + (y-b)\,b' + (z-c)\,c' = 0,\\ &(x-a)\,a'' + (y-b)\,b'' + (z-c)\,c'' - a'^2 - b'^2 - c'^2 = 0,\\ &(x-a)\,a''' + (y-b)\,b''' + (z-c)\,c''' - 3a'a'' - 2b'b'' - 3c'c'' = 0;\end{aligned}\right.$$

or, d'après les formules

$$\begin{aligned} &a' = -br, && a'' = u'' - ar^2 - br', && a''' = u''' + (q'' + rp')\,c + (r^3 - r'')\,b - 3rr'a,\\ &b' = ar, && b'' = ar' - br^2 - cp', && b''' = v''' + (r'' - r^3)\,a - 3rr'b - p''c,\\ &c' = w', && c'' = w'' + bp', && c''' = w''' + (2p'r - q'')\,a + p''b,\end{aligned}$$

les équations (4) deviennent, après réductions,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &a'x + b'y + c'z = cw',\\ &a''x + b''y + c''z = au'' + cw' + w'^2,\\ &a'''x + b'''y + c'''z = au''' + bv''' + cw'' - 3u''rb + 3w'w'',\end{aligned}\right.$$

et sont effectivement linéaires par rapport aux coordonnées du point décrivant a, b, c. On voit par là que *le centre de la sphère osculatrice et le point correspondant à ce centre sont liés l'un à l'autre par des relations linéaires par rapport aux coordonnées de ces points.*

Si l'on a

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

le centre de la sphère osculatrice est rejeté à l'infini. On peut donc dire que dans un solide en mouvement il existe à chaque instant une infinité de ses points dont les trajectoires sont planes au quatrième ordre près, et l'on voit que ces points sont sur une surface du 3e ordre contenant la cubique d'inflexion.

On peut dire aussi que *sur chaque droite du solide il y a trois points qui décrivent des éléments de courbes planes.*

Si cette droite rencontre une fois la cubique d'inflexion, elle ne contient plus que deux points jouissant de cette propriété, et si elle rencontre deux fois la même cubique, elle n'offre plus qu'un point décrivant un élément de courbe plane.

Si l'on désigne par d', d'' et d''' respectivement les seconds membres des équations (5), et si l'on adjoint à l'équation (6) la suivante :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix} = 0,$$

on obtient une certaine courbe dont les points ont en général un centre indéterminé de sphère osculatrice. Ces points ont pour ainsi dire à l'époque t le même axe de courbure qu'à l'époque $t + dt$. Ils décrivent des éléments de courbes planes dont les développées offrent un point de rebroussement, de même qu'une conique à l'extrémité de l'un de ses axes. On peut dire aussi que les trajectoires de ces points sont surosculatrices à des cercles.

Il faut toutefois retrancher du lieu précédent la courbe dont les équations seraient

$$(8) \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''}.$$

les points de cette cubique décrivent des éléments de courbes planes au quatrième ordre près; de plus les éléments de ces courbes sont dans des plans verticaux puisque leurs vitesses, leurs accélérations et leurs suraccélérations ont leurs projections horizontales confondues en direction; mais rien ne prouve que leurs axes de courbure sont les mêmes à l'époque t qu'à l'époque $t + dt$, et n'en est ainsi que pour certains points où la courbe (8) est traversée par la partie restante de la courbe (6, 7). Le lieu cherché est donc du 6e ordre, et tous ses points ont leurs trajectoires surosculatrices à des cercles.

Pour que la trajectoire d'un point eût avec un cercle un contact d'un ordre plus élevé, il faudrait aux équations (6) et (7) adjoindre les deux suivantes :

$$\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & d^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait ainsi exprimé que les trois axes de courbure consécutifs de la trajectoire du point cherché se confondent en un seul; mais les quatre équations que l'on obtient de cette manière ne peuvent en général être satisfaites simultanément puisque l'on n'a que trois inconnues a, b et c.

Trajectoires surosculatrices à des sphères.

17. La distance R d'un point mobile (a, b, c) à un point fixe (A, B, C) est donnée par la formule

$$(a-\mathrm{A})^2+(b-\mathrm{B})^2+(c-\mathrm{C})^2=\mathrm{R}^2.$$

Si l'on veut exprimer que cette distance n'éprouve qu'une variation du 5^e ordre pour un déplacement du 1er ordre du solide, il suffit d'égaler à 0 les quatre premières dérivées de cette distance, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&(a-\mathrm{A})\,a' +(b-\mathrm{B})\,b' +(c-\mathrm{C})\,c'=0,\\
&(a-\mathrm{A})\,a'' +(b-\mathrm{B})\,b'' +(c-\mathrm{C})\,c''+a'^2+b'^2+c'^2=0,\\
&(a-\mathrm{A})\,a''' +(b-\mathrm{B})\,b''' +(c-\mathrm{C})\,c'''+3a'a''+3b'b''+3c'c''=0,\\
&(a-\mathrm{A})\,a^{\mathrm{IV}} +(b-\mathrm{B})\,b^{\mathrm{IV}} +(c-\mathrm{C})\,c^{\mathrm{IV}}+4a'a'''+4b'b'''+4c'c'''+3a''^2+3b''^2+3c''^2=0;
\end{aligned}$$

et si l'on tient compte des identités (2), on voit que ces équations prennent la forme

$$\begin{aligned}
a'\mathrm{A}+b'\mathrm{B}+c'\mathrm{C}&=d',\\
a''\mathrm{A}+b''\mathrm{B}+c''\mathrm{C}&=d'',\\
a'''\mathrm{A}+b'''\mathrm{B}+c'''\mathrm{C}&=d''',\\
a^{\mathrm{IV}}\mathrm{A}+b^{\mathrm{IV}}\mathrm{B}+c^{\mathrm{IV}}\mathrm{C}&=d^{\mathrm{IV}},
\end{aligned}$$

$a'\ b'\ \ldots\ a''\ b''\ \ldots\ d',\ d'',\ d''',\ d^{\mathrm{IV}}$ représentant des polynômes linéaires en a, b, c.

Éliminant A, B, C, il vient

$$(\mathrm{F}_1)\qquad \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{\mathrm{IV}} & b^{\mathrm{IV}} & c^{\mathrm{IV}} & d^{\mathrm{IV}} \end{vmatrix}=0,$$

d'où l'on conclut que :

Le lieu des points dont les trajectoires sont surosculatrices à des sphères est une surface du 4^e ordre.

Cette surface contient le lieu des points dont les trajectoires sont surosculatrices à des cercles.

L'équation précédente est en effet satisfaite si l'on a simultanément

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}=0 \quad\text{et}\quad \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix}=0,$$

ce qui donne une courbe gauche du 9e ordre se dédoublant en une courbe du 6e et une cubique

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''}.$$

Si l'on voulait que le point mobile avec le corps restât à une distance infiniment petite du 6e ordre de sa sphère osculatrice, il faudrait adjoindre à l'équation (F_1) la suivante :

$$(F_2) \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} & d^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & c^{\text{V}} & d^{\text{V}} \end{vmatrix} = 0.$$

Le système (F_1, F_2) représente une courbe gauche du 16e ordre; mais il est facile de voir que cette courbe ne convient pas tout entière à la question.

Désignons par $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ six positions consécutives infiniment voisines du point A. L'équation $(F_1) = 0$ exprime que A, A_1, A_2, A_3, A_4 sont situés sur une même sphère. L'équation (F_2) exprime de même que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ont aussi cette propriété, de sorte qu'*en général* les points A communs à (F_1) et à (F_2) sont tels que les six positions successives qu'ils prennent sont sur une même sphère.

Considérons cependant la courbe gauche C_2

$$C_2 \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & d^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est visiblement commune à F_1 et à F_2. Cette courbe est du 6e ordre si l'on fait abstraction de la cubique

$$\frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \frac{a^{\text{IV}}}{b^{\text{IV}}},$$

et elle est composée des points tels que A_1, A_2, A_3, A_4 sont sur un même cercle C. Or (F_1) exprime que A et le cercle C sont sur une même sphère. D'un autre côté, F_2 exprime que A_5 et C sont sur une sphère et il arrivera généralement que A et C ne seront pas sur la même sphère que A_5 et C. Donc

Le lieu des points dont les distances à des sphères restent infiniment petites du 6e ordre est une courbe gauche du 10e ordre.

Exprimons enfin que le point A mobile avec le solide reste à une distance infiniment petite du 7e ordre d'une sphère convenablement choisie. Il faut aux équations (F_1) et (F_2) adjoindre la suivante :

$$(F_3) \qquad \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} & d^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & c^{\text{V}} & d^{\text{V}} \\ a^{\text{VI}} & b^{\text{VI}} & c^{\text{VI}} & d^{\text{VI}} \end{vmatrix} = 0,$$

et les points cherchés feront partie des trois surfaces F_1, F_2, F_3. Or ces surfaces se coupent en 64 points.

Voyons quels sont les points communs qui ne conviennent pas à la question. Ainsi que nous l'avons vu, la courbe gauche C_2 est formée de points qui ne font pas partie de la solution, et comme cette courbe est du 6ᵉ ordre, elle perce F_3 en 24 points qu'il faut rejeter.

De même F_2 et F_3 ont en commun la courbe C_3 du 6ᵉ ordre :

$$C_3 \qquad \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & c^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & c^{\text{V}} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a''' & b''' & d''' \\ a^{\text{IV}} & b^{\text{IV}} & d^{\text{IV}} \\ a^{\text{V}} & b^{\text{V}} & d^{\text{V}} \end{vmatrix} = 0.$$

Les points A de cette courbe prennent des positions successives A_2, A_3, A_4, A_5 situées sur un même cercle C' et il arrive généralement que A_1 et C' ne déterminent pas la même sphère que A_6 et C'. Or la courbe C_3 rencontre la surface F_1 en 24 points qu'il faut encore rejeter. Des 64 points communs aux trois surfaces F_1, F_2, F_3, il ne reste donc en général que 16 points convenant à la question; d'où l'on conclut que :

Dans un solide en mouvement, il existe 16 points dont les distances à des sphères restent infiniment petites du 7ᵉ ordre.

Il n'existe pas de points du solide dont les trajectoires aient avec des sphères des contacts d'un ordre plus élevé.

Lieu des centres des sphères osculatrices des différents points d'une droite.

18. Il est facile d'obtenir le lieu des centres des sphères osculatrices aux trajectoires simultanées des différents points d'une droite quelconque D

$$\text{D} \qquad \begin{aligned} a &= mc + \mu, \\ b &= nc + \nu. \end{aligned}$$

Il suffit pour cela de remplacer dans (5) a et b par les valeurs précédentes. On obtient ainsi trois équations linéaires en c, et l'élimination de cette quantité conduit aux équations de deux hyperboloïdes ayant une génératrice commune, c'est-à-dire à celles d'une cubique gauche.

Donc, *le lieu des centres des sphères osculatrices relatives aux différents points d'une droite est une cubique évidemment située sur l'hyperboloïde des axes de courbure appartenant à ces mêmes points.*

Supposons maintenant que la droite D rencontre une fois la courbe (6), (7). Les coordonnées x, y, z du centre de la sphère relative à un point de la droite s'exprimeront par des fractions rationnelles par rapport à c :

$$x = \frac{M}{\Delta}, \quad y = \frac{N}{\Delta}, \quad z = \frac{P}{\Delta},$$

dont les termes M, N, P, Δ sont des polynômes du 3e degré en c. D'ailleurs, la droite D rencontre la courbe (6), (7) dont les équations, après l'élimination de a et b, ne sont autres que

$$M = 0, \quad \Delta = 0,$$

on voit donc que M et Δ sont divisibles par $c - c'$, c' étant le z de ce point de rencontre. Il en est de même des polynômes N et P.

Les valeurs de x, y et z se réduisent donc à des fractions de la forme

$$x = \frac{mc^2 + m'c + m''}{\delta c^2 + \delta' c + \delta''}, \quad y = \frac{nc^2 + n'c + n''}{\delta c^2 + \delta' c + \delta''}, \quad z = \frac{pc^2 + p'c + p''}{\delta c^2 + \delta' c + \delta''},$$

et le lieu des centres cherché s'obtiendra en éliminant c entre les équations

$$\begin{aligned}
(\delta x - m)c^2 + (\delta' x - m')c + \delta'' x - m'' &= 0,\\
(\delta y - n)c^2 + (\delta' y - n')c + \delta'' y - n'' &= 0,\\
(\delta z - p)c^2 + (\delta' z - p')c + \delta'' z - p'' &= 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix}
\delta x - m, & \delta' x - m', & \delta'' x - m''\\
\delta y - n, & \delta' y - n', & \delta'' y - n''\\
\delta z - p, & \delta' z - p', & \delta'' z - p''
\end{vmatrix} = 0,$$

relation du premier degré représentant un plan, puis une autre équation

$$\begin{aligned}
&[(\delta x - m)(\delta' y - n') - (\delta' x - m'')(\delta y - n)][(\delta' x - m')(\delta'' y - n'') - (\delta'' x - m'')(\delta' y - n')]\\
&\qquad = [(\delta x - m)(\delta'' y - n'') - (\delta'' x - m'')(\delta y - n)]^2,
\end{aligned}$$

qui est celle d'un cylindre du second degré.

On peut donc dire que *le lieu des centres des sphères osculatrices des points d'une droite qui rencontre une fois la courbe* (6), (7) *se réduit à une conique.*

Si la rencontre R de la droite et de la courbe (6, 7) n'a pas lieu sur la cubique (8), on peut dire que ce point de rencontre possède un axe permanent, ou encore que le centre de la sphère osculatrice du point R est indéterminé sur cet axe. Le lieu cherché se compose donc dans le cas actuel d'une droite et d'une conique.

Considérons maintenant une droite D rencontrant la courbe (6, 7) en deux points R' et R'' dont les z soient c' et c''. Les fractions qui expriment les coordonnées du centre de la sphère osculatrice prennent, après la suppression des facteurs $(c - c')$ et $(c - c'')$, la forme

$$x = \frac{mc + m'}{\delta c + \delta'}, \quad y = \frac{nc + n'}{\delta c + \delta'}, \quad z = \frac{pc + p'}{\delta c + \delta'},$$

et l'élimination de c entre ces équations donne deux plans.

Donc, si une droite D rencontre la courbe (6, 7) en deux points R′ et R″, le lieu des centres des sphères osculatrices relatives à ses différents points se réduit à une droite.

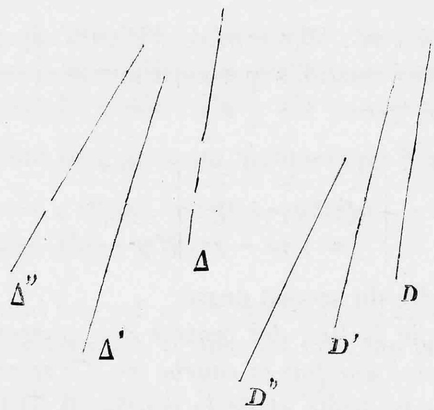
Si cependant les points R′ et R″ ne font pas partie de la cubique (8), il convient d'adjoindre à la droite trouvée précédemment les axes de courbure de R′ et de R″ dont tous les points peuvent être considérés comme des centres de sphères osculatrices, soit par rapport à R′, soit par rapport à R″.

Il peut arriver enfin que la droite D rencontre trois fois la courbe (6, 7) en R′, R″ et R‴, un ou deux de ces points pouvant faire partie de la cubique (8). Les coordonnées x, y, z du centre de la sphère se réduisent à des constantes. On peut donc dire, dans ce cas, que *tous les points de la droite ont le même centre de sphère osculatrice.*

Enfin lorsqu'un ou deux des points de rencontre R′, R″, R‴ ne se trouvent pas sur la cubique (8), on peut adjoindre au point trouvé précédemment les axes permanents de ces points de rencontre.

On peut essayer de se rendre compte de ces résultats à l'aide de considérations

Fig. 13.



géométriques. Soient D, D′ et D″ les positions de la droite considérée aux époques t, $t + dt$ et $t + 2dt$. Les conjuguées de la droite seront pour ces mêmes époques Δ, Δ′, Δ″.

On sait, d'après une démonstration due à M. Mannheim et basée sur la considération des conjuguées successives d'une droite, que le lieu des axes de courbure des différents points de D est un certain hyperboloïde s'appuyant sur Δ et Δ′, de même le lieu des axes de courbure de D′ est un autre hyperboloïde passant par Δ′ et Δ″. Ces deux hyperboloïdes ayant en commun la droite Δ′ se coupent suivant une cubique gauche dont chaque point est l'intersection des deux axes de courbure consécutifs d'un même point de D, c'est-à-dire le centre de la sphère osculatrice de la trajectoire de ce dernier.

Si un point de D admet le même axe de courbure à l'époque t qu'à l'époque $t + dt$, les deux hyperboloïdes précédents ont en commun deux droites, l'une Δ', l'autre l'axe permanent. On sait alors que l'intersection des deux surfaces se compose d'une conique et d'une droite qui n'est autre que l'axe.

Si deux points de D admettent respectivement les mêmes axes aux deux époques consécutives, les deux hyperboloïdes ont en commun, outre la droite Δ', deux autres droites rencontrant Δ'. On sent alors qu'ils ont encore une autre droite commune qui n'est autre que le lieu trouvé précédemment pour le cas actuel.

Proposons-nous actuellement la résolution de la question inverse de la précédente. Étant donné un point fixe x, y, z, trouver dans le solide en mouvement un point mobile a, b, c qui admette le point fixe pour centre de sa sphère osculatrice.

Il suffit évidemment pour cela de résoudre les équations (5) par rapport à a, b, c en y regardant x, y et z comme des quantités données. Ordonnons donc ces équations par rapport à a, b, c, et nous aurons

$$\begin{aligned} X'a + Y'b + Z'c &= U', \\ X''a + Y''b + Z''c &= U'', \\ X'''a + Y'''b + Z'''c &= U''', \end{aligned}$$

où, pour abréger, X', Y', Z', X'', Y'', etc..., U', U'', U''' représentent des fonctions linéaires en x, y et z. Ces relations permettront de trouver le point (a, b, c) correspondant au centre x, y, z.

Si l'on a

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} = 0,$$

le point décrivant se trouve à l'infini. Donc, *il existe une infinité de points formant une surface du 3e ordre, et qui sont les centres des sphères relatives à des points situés à l'infini.*

Si l'on a en outre

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & U' \\ X'' & Y'' & U'' \\ X''' & Y''' & U''' \end{vmatrix} = 0,$$

les points qui satisfont à ces deux équations, à l'exception toutefois de ceux de la cubique

$$\frac{X'}{Y'} = \frac{X''}{Y''} = \frac{X'''}{Y'''},$$

ont la propriété d'être des centres de sphères osculatrices communs à tous les points d'une droite.

Les points du solide dont les sphères osculatrices ont leurs centres sur une droite donnée C

$$(C) \qquad \begin{aligned} x &= mz + \mu, \\ y &= nz + \nu, \end{aligned}$$

sont sur une cubique gauche.

Si la droite C rencontre en un point S′ la courbe (P, Q), le lieu des points du solide dont les sphères ont leurs centres sur cette droite se réduit à une conique à laquelle il faut adjoindre une droite, si le point S′ n'est pas sur la cubique (α).

Lorsque la droite C rencontre (P, Q) en deux points S′ et S″, le lieu cherché se réduit à une droite à laquelle il convient d'adjoindre deux autres droites, si S′ et S″ ne font pas partie de la cubique (α).

Lorsque la droite C rencontre (P, Q) en trois points S′, S″, S‴, le lieu se réduit à un point auquel il faut joindre une ou deux autres droites selon que un ou deux des points S′, S″, S‴ seront étrangers à la cubique (α).

Déplacement d'une droite considérée comme un élément de l'espace.

19. Proposons-nous actuellement d'étudier le mouvement des différentes droites d'un solide qui se déplace, sans porter notre attention sur la trajectoire de l'un de ses points désigné *a priori*. Autrement dit, cherchons suivant quelles lois varient simultanément les éléments des différentes droites liées au corps solide.

Considérons la droite M_1D_1 représentée par les équations

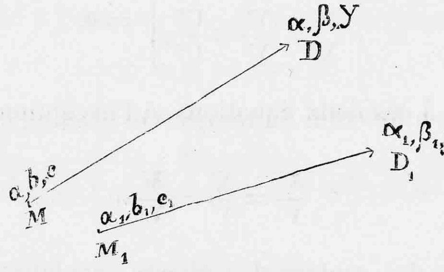
$$(1) \qquad \frac{x-a_1}{\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\beta_1} = \frac{z-c_1}{\gamma_1} = \rho,$$

et qui n'est autre que la droite MD

$$(2) \qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = \rho,$$

à laquelle on a fait subir un certain déplacement.

Fig. 14.



Les équations (2) correspondent à la position initiale de la droite, et les équations (1) représentent la droite mobile si l'on y considère $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, comme des fonctions du temps. Les trois premières fonctions nous sont connues par leurs développements en séries

$$a_1 = a + a't + a'' \frac{t^2}{1.2} + a''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$b_1 = b + b't + b'' \frac{t^2}{1.2} + b''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$c_1 = c + c't + c'' \frac{t^2}{1.2} + c''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Quant aux fonctions α_1, β_1, γ_1, elles ne sont autre chose que les coordonnées variables d'un point dont les coordonnées initiales seraient α, β, γ, diminuées respectivement des projections du déplacement de l'origine mobile sur les axes fixes, ce qui nous donne les formules

$$\alpha_1 = \alpha - \beta r t + (-\alpha r^2 - \beta r^2)\frac{t^2}{2} + [-3rr'\alpha + (r^3 - r'')\beta + (q'' + rp')\gamma]\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$\beta_1 = \beta + \alpha r t + (\alpha r' - \beta r^2 - \gamma p')\frac{t^2}{2} + [(r'' - r^3)\alpha - 3rr'\beta - p''\gamma]\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$\gamma_1 = \gamma + \beta p' \frac{t^2}{1.2} + [(2p'r - q'')\alpha + p''\beta]\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots$$

que nous écrirons plus simplement sous la forme

$$\alpha_1 = \alpha + \alpha' t + \alpha'' \frac{t^2}{1.2} + \alpha''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$\beta_1 = \beta + \beta' t + \beta'' \frac{t^2}{1.2} + \beta''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$\gamma_1 = \gamma + \gamma' t + \gamma'' \frac{t^2}{1.2} + \gamma''' \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots.$$

De même les éléments d'une droite mobile

$$D_1 \qquad \begin{aligned} x &= m_1 z + \mu_1, \\ y &= n_1 z + \nu_1, \end{aligned}$$

dont la situation initiale est donnée par les équations

$$D \qquad \begin{aligned} x &= mz + \mu, \\ y &= nz + \nu, \end{aligned}$$

s'obtiendront aisément en fonction du temps. On a en effet

$$m_1 = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \quad n_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \mu_1 = a_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} c_1, \quad \nu_1 = b_1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} c_1,$$

et

$$\omega_1 = m_1 \nu_1 - n_1 \mu_1.$$

Il est du reste facile de voir que l'origine M, à partir de laquelle on compte la longueur ρ, peut être prise en un point quelconque de la droite elle-même. Si en effet dans les formules précédentes on remplace les coordonnées initiales a, b, c par $a + \alpha p$, $b + \beta p$, $c + \gamma p$ respectivement, on voit que m_1 et n_1 ne changent pas. D'un autre côté, a_1 devient $a_1 + \alpha_1 p$, b_1 et c_1 se changent en $b_1 + \beta_1 p$ et $c_1 + \gamma_1 p$, par suite on a

$$\mu_1 = a_1 + \alpha_1 p - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}(c_1 + \gamma_1 p) = a_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} c_1,$$

$$\nu_1 = b_1 + \beta_1 p - \frac{\beta_1}{\gamma_1}(c_1 + \gamma_1 p) = b_1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} c_1,$$

ce qui prouve que μ_1 et ν_1 conservent les mêmes valeurs; il en est de même de ω_1. On pourra donc, quand on le voudra, prendre pour origine de la droite sa trace horizontale. Il suffira de faire $c = 0$, $a = \mu$, $b = \nu$ dans les expressions des éléments variables de la droite, c'est-à-dire de m_1 n_1 μ_1 ν_1 et ω_1.

Néanmoins, dans la plupart des cas, il sera préférable pour la symétrie des formules de conserver les éléments a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1, dont les expressions nous sont connues en fonction du temps et de leurs valeurs initiales a, b, c, α, β, γ.

Éléments des surfaces réglées décrites par les différentes droites du solide.

20. Considérons une droite quelconque dont la position initiale est donnée par les équations

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma},$$

on aura à l'époque t, pour représenter la même droite,

$$\frac{x-a_1}{\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\beta_1} = \frac{z-c_1}{\gamma_1}.$$

La plus courte distance entre cette droite et celle qui en est infiniment voisine, c'est-à-dire qui correspond à l'époque $t + dt$, a pour expression

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \end{vmatrix} dt}{\sqrt{(\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1)^2 + (\beta_1\gamma'_1 - \gamma_1\beta'_1)^2 + (\gamma_1\alpha'_1 - \alpha_1\gamma'_1)^2}},$$

ou bien

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \end{vmatrix} dt}{\sqrt{\alpha'^2_1 + \beta'^2_1 + \gamma'^2_1}}.$$

D'un autre côté, l'angle $d\sigma$ des deux génératrices consécutives a pour valeur

$$d\sigma = \sqrt{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2}\, dt.$$

Le paramètre de distribution P relatif à cette génératrice aura par suite pour expression

$$\mathrm{P} = \frac{\delta}{d\sigma} = \frac{\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' \end{vmatrix}}{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2}.$$

Ce paramètre est donc, pour chaque droite mobile du solide, une fonction du temps dont la valeur initiale s'obtiendra en y faisant $t = 0$. On obtient ainsi pour la valeur de ce paramètre au départ

$$\mathrm{P}_0 = \frac{\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}}{(\alpha^2 + \beta^2)\, r^2} = \frac{\begin{vmatrix} -br & ar & w \\ \alpha & \beta & \gamma \\ -\beta r & \alpha r & 0 \end{vmatrix}}{(\alpha^2 + \beta^2)\, r^2}.$$

Développant ensuite, il vient

$$(\alpha^2 + \beta^2)\left(\mathrm{P}_0 - \frac{w'}{r}\right) = (a\beta - \beta\alpha)\,\gamma.$$

Puis faisant $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\beta}{\gamma} = n$, $a = \mu$, $b = \nu$, on a la relation

$$(m^2 + n^2)\left(\mathrm{P}_0 - \frac{w'}{r}\right) = m\nu - n\mu = \omega,$$

d'où l'on conclut que *l'ensemble des droites qui engendrent des éléments de surfaces réglées de même paramètre, constitue un complexe du second ordre.* On reconnaît du reste que ce complexe n'est autre que celui des vitesses dans un mouvement hélicoïdal dont le paramètre serait l'excès du paramètre de distribution donné sur le quotient $\frac{w'}{r}$ relatif au mouvement du solide autour de l'axe instantané initial Oz.

Si dans l'équation précédente on fait $\mathrm{P}_0 = 0$, on obtient le complexe des vitesses ou, si l'on veut, le complexe des droites tangentes à la trajectoire de l'un de leurs points.

Considérons actuellement le système des équations

$$\mathrm{P} = 0, \quad \frac{d\mathrm{P}}{dt} = 0,$$

qui peuvent s'écrire, en les combinant et en y faisant $t = 0$,

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les droites qui conviendront à ces deux équations auront la propriété d'engendrer des éléments de surfaces réglées telles que leur paramètre de distribution est nul pendant deux instants consécutifs. On peut dire aussi que la plus courte distance de deux génératrices consécutives reste du 3e ordre, ou que les droites considérées décrivent des éléments de surfaces développables. On voit du reste que par chaque point du solide il passe quatre droites possédant la propriété précédente.

Parmi ces droites, il en est qui se meuvent de manière à rester parallèles à un plan fixe. Pour les obtenir, il suffit de poser, en désignant par λ, μ, ν les cosinus de ce plan,

$$\alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu = 0,$$
$$\alpha'_1\lambda + \beta'_1\mu + \gamma'_1\nu = 0,$$
$$\alpha''_1\lambda + \beta''_1\mu + \gamma''_1\nu = 0,$$

Éliminons λ, μ et ν et faisons $t — 0$, il vient

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2)\gamma r^2 + \beta p' = 0,$$

équation qui représente un cône du 3e ordre.

On peut donc dire que *toutes les droites qui sont parallèles à un certain cône du 3e ordre se meuvent parallèlement à un plan, ou que la courbure sphérique de l'indicatrice des surfaces réglées qu'elles engendrent est égale à* 0.

Il est maintenant évident que les droites qui, tout en décrivant des éléments de surfaces développables, se meuvent parallèlement à un plan, engendreront des éléments de surfaces planes. On voit en outre que ces droites satisfaisant à trois équations constituent une surface.

Donc, *dans un solide en mouvement, il existe toute une surface réglée composée de droites décrivant des éléments plans. Cette surface réglée est pour ainsi dire l'analogue de la courbe d'inflexion, si l'on regarde la droite comme un élément de l'espace.*

La surface que l'on vient d'obtenir est la même que celles des droites qui s'appuient deux fois sur la cubique d'inflexion, en des points tels que les vitesses de ces points soient concourantes. On a vu en effet que de pareilles droites décrivent des éléments plans.

Il est d'ailleurs facile d'obtenir le système des plans dans lesquels se meuvent les droites que l'on vient de trouver. Soient A, B, C les cosinus directeurs de l'un d'eux, et D sa distance à l'origine. Le plan

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

devant contenir la droite mobile à trois époques consécutives, on aura

$$\begin{array}{ll} Aa + Bb + Cc - D = 0, & A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \\ Aa' + Bb' + Cc' = 0, & A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0, \\ Aa'' + Bb'' + Cc'' = 0, & A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = 0. \end{array}$$

Introduisant dans ces équations les éléments ordinaires de la droite, c'est-à-dire faisant $m = \frac{\alpha}{\gamma}$, $n = \frac{\beta}{\gamma}$, $\mu = a$, $\nu = b$ et $c = 0$, il vient

$$\begin{array}{r} A\mu + B\nu - D = 0, \\ -A\nu r + B\mu r + Cw' = 0, \\ A(u'' - \mu r^2 - \nu r') + B(\mu r' - \nu r^2) + C(w'' + \nu p') = 0, \end{array}$$

ainsi que

$$\begin{array}{r} Am + Bn + C = 0, \\ -Anr + Bmr = 0, \\ A(-mr^2 - nr') + B(mr' - nr^2 - p') + Cnp' = 0. \end{array}$$

Éliminant enfin μ, ν, m et n, on aura

$$\begin{vmatrix} A & B & -D \\ B & -A & KC \\ Br' - Ar^2, & Cp' - Br^2 - Ar', & Au'' + Cw'' \end{vmatrix} = 0, \text{ et } \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & -A & 0 \\ Br' - Ar^2, & Cp' - Br^2 - Ar', & -Bp' \end{vmatrix} = 0.$$

A chaque direction A, B, C parallèle à un certain cône du 3^e ordre, correspond une certaine valeur de la distance D. Ces différents plans enveloppent par conséquent une développable dont la podaire par rapport à l'origine s'obtiendrait en faisant $A = \frac{x}{D}$, $B = \frac{y}{D}$, $C = \frac{z}{D}$ et $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ce qui donne pour les équations de cette podaire

$$\begin{vmatrix} x & y & -(x^2 + y^2 + z^2) \\ y & -x & k \\ yr' - xr^2 & zp' - yr^2 - xr' & u''x + w''z \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & -x & 0 \\ yr' - xr^2 & zp' - yr^2 - xr' & yp' \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire l'intersection d'une surface du 4^e ordre et d'un cône du 3^e. Les plans perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs seront les plans cherchés.

Axe d'une droite.

21. Lorsqu'on ne considère que des quantités infiniment petites du premier ordre, une droite quelconque du solide peut être considérée comme animée d'un mouvement de rotation *sans glissement* autour d'une autre droite que l'on désigne sous le nom de conjuguée de la première. Si maintenant on veut tenir compte des infiniment petits du second ordre, il faut à chaque droite attribuer un autre axe de rotation, et même adjoindre à la rotation un certain *glissement* le long de cet axe.

Dans ce qui va suivre, la droite sera considérée comme un élément de l'espace et nous ne nous occuperons nullement de la trajectoire de tel ou tel point désigné sur cette droite.

Cela posé, soient

$$(D) \qquad x = a + \alpha\rho, \quad y = b + \beta\rho, \quad z = c + \gamma p,$$

les équations de la droite considérée D et

$$(R) \qquad x = A + \lambda\rho, \quad y = B + \mu\rho, \quad z = C + \nu\rho,$$

celles de l'axe cherché R que nous regarderons comme fixe.

La droite mobile D devant faire avec la droite fixe R un angle constant au 3[e] ordre près, on aura, en désignant cet angle par θ,

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = \cos\theta, \\ \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu = 0, \\ \alpha''\lambda + \beta''\mu + \gamma''\nu = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\lambda}{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''} = \frac{\mu}{\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''} = \frac{\nu}{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''} = \frac{1}{D},$$

en posant

$$(2) \qquad D^2 = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2.$$

On aura aussi

$$(3) \qquad \cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}{D} = \frac{\gamma(\alpha^2 + \beta^2) r^3 + \beta p' r}{D}.$$

Ces formules nous donnent la direction de l'axe R, quand on connaît celle de la droite D, et font connaître le rayon sphérique θ de l'indication de la surface réglée décrite par la droite.

Développons les deux dernières équations (1), il vient

$$- \beta r \lambda + \alpha r \mu = 0,$$
$$(- \alpha r^2 - \beta r')\lambda + (\alpha r' - \beta r^2 - \gamma p')\mu + \beta p'\nu = 0;$$

posant ensuite $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\beta}{\gamma} = n$, $\frac{\lambda}{\nu} = m'$, $\frac{\mu}{\nu} = n'$, on aura entre les coefficients angulaires des droites D et R les relations

$$nm' - mn' = 0,$$
$$r^2 (mm' + nn') + p' (n - n') = 0,$$

linéaires par rapport à ces quatre éléments.

D'un autre côté, la plus courte distance δ des droites D et R a pour expression

$$(4) \qquad \delta = \frac{\begin{vmatrix} A - a, & \alpha, & \lambda \\ B - b, & \beta, & \mu \\ C - c, & \gamma, & \nu \end{vmatrix}}{\sin\theta}.$$

Cette quantité devant rester constante au 3ᵉ ordre près, et θ étant lui-même constant ainsi que λ, μ, ν, préalablement déterminés par les équations (1), on aura

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} -a' & \alpha & \lambda \\ -b' & \beta & \mu \\ -c' & \gamma & \nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A - a & \alpha' & \lambda \\ B - b & \beta' & \mu \\ C - c & \gamma' & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

ainsi que

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} -a'' & \alpha & \lambda \\ -b'' & \beta & \mu \\ -c'' & \gamma & \nu \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -a' & \alpha' & \lambda \\ -b' & \beta' & \mu \\ -c' & \gamma' & \nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A - a & \alpha'' & \lambda \\ B - b & \beta'' & \mu \\ C - c & \gamma'' & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

équations du premier degré en A, B, C et dont le système représente la droite cherchée R, pourvu que λ, μ, ν y soient remplacés par leurs valeurs tirées de (2).

Donc, *à une droite donnée* D *correspond un axe* R.

Inversement, à un axe donné R (A, B, C, λ, μ, ν) correspond une droite, intersection des plans que représenteraient (5) et (6) si on y regardait a, b, c comme des coordonnées courantes, et si l'on y remplaçait α, β, γ par leurs valeurs tirées de (1) en fonction de λ, μ, ν supposés connus.

Cherchons actuellement la vitesse angulaire de la rotation de la droite D autour de son axe R. Cette vitesse ne doit pas être confondue avec celle d'un quelconque des points de la droite. Elle n'est autre, dans la question qui nous occupe, que la vitesse angulaire de la plus courte distance δ, ou plutôt l'angle de la ligne δ relative à l'époque t avec la ligne δ' relative à l'époque $t + dt$, divisée par l'élément du temps.

Or on a, en désignant par ξ, η, ζ les cosinus de cette plus courte distance,

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$
$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\xi}{\beta\nu - \gamma\mu} = \frac{\eta}{\gamma\lambda - \alpha\nu} = \frac{\zeta}{\alpha\mu - \beta\nu} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

On a du reste, en appelant ω la vitesse cherchée,

$$\omega^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2;$$

par suite, en remarquant que λ, μ, ν ainsi que θ sont des constantes ou plutôt que leurs dérivées premières et leurs dérivées secondes sont nulles, on a

$$\begin{aligned}\omega^2 \sin^2\theta &= (\beta'\nu - \gamma'\mu)^2 + (\gamma'\lambda - \alpha'\nu)^2 + (\alpha'\mu - \beta'\lambda)^2,\\ &= \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - (\alpha'\lambda + \beta'\mu + p'\nu)^2,\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'une des équations (1),

$$\omega^2 = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{\sin^2\theta}. \tag{7}$$

La dérivée première de la vitesse angulaire ω sera donnée par la relation

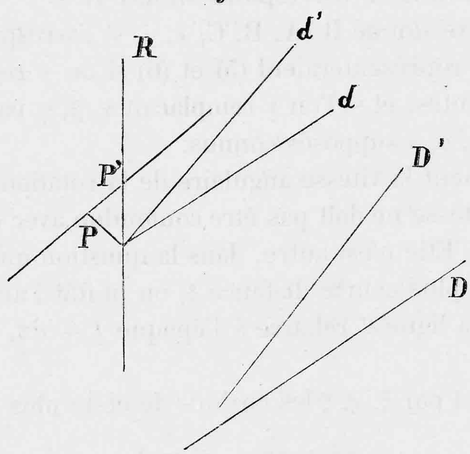
$$\omega\omega' = \frac{\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$\omega' = \frac{\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''}{\sin\theta\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}. \tag{8}$$

Il nous reste à calculer la vitesse de glissement de la droite D dans la direction de la droite R. Il est à peine nécessaire de faire remarquer que cette vitesse n'est celle d'aucun point assigné sur la droite D considérée actuellement un élément de l'espace. Cette vitesse de glissement n'est autre chose que celle avec laquelle se déplace sur l'axe fixe R le pied de la plus courte de cet axe et de la droite mobile D.

Fig. 15.



Soient D et D' deux positions consécutives de la droite mobile, P et P' les pieds correspondants de sa plus courte distance avec R.

Par le point P menons deux droites Pd et Pd' parallèles respectivement à D et à D′. L'élément de plan $d'Pd$ est situé dans le plan qui contient D et sa parallèle Pd. Donc, si par P′ on mène une parallèle à D′, c'est-à-dire $P'd'_1$, la plus courte distance PK de Pd et de $P'd_1$ sera égale à celle des deux droites D et D′.

Or on a $PK = PP' \sin\theta$, par suite

$$PP' = \frac{PK}{\sin\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} dt}{\sin\theta\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}.$$

Si l'on désigne par g le rapport $\frac{PP'}{dt}$, et si l'on tient compte de l'équation (7), il vient

$$g = \frac{\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}}{\omega\sin^2\theta}.$$

Le mouvement hélicoïdal que possède la droite D autour de son axe R aura pour paramètre $\frac{g}{\omega}$, et on aura, en posant $\frac{g}{\omega}$,

$$(9)\qquad k = \frac{\begin{vmatrix} a' & \alpha & \alpha' \\ b' & \beta & \beta' \\ c' & \gamma & \gamma' \end{vmatrix}}{\omega^2\sin^2\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a' & \alpha & \alpha \\ b' & \beta & \beta \\ c' & \gamma & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}.$$

Les formules précédentes entraînent un certain nombre de conséquences. Considérons l'ensemble des droites D qui ont une même direction (α, β, γ). Ces droites auront des axes R possédant tous la même direction (λ, μ, ν), ainsi que cela résulte des équations (1). L'angle θ de chaque droite D avec l'axe qui lui correspond est également constant.

La vitesse angulaire ω de la rotation de chaque droite D autour de son axe est également le même, ainsi qu'on le constate à l'aide de la formule (7).

Les équations (5) et (6), dans lesquelles nous pouvons faire $C = 0$ et $c = 0$, nous montrent que les coordonnées A et B de la trace horizontale de R sont des fonctions entières et linéaires des coordonnées a et b de la trace de D.

Donc, *si parmi les droites* D *ayant une même direction on considère celles qui formeraient un cylindre de l'ordre m, on peut dire que le lieu de leurs axes* R *est également un cylindre d'ordre m.*

Décrivons l'équation (9) qui donne la valeur du paramètre de la surface hélicoïdale décrite par la droite D, il vient

$$(10)\quad k' = \frac{\left(\begin{vmatrix} a'' & \alpha & \alpha' \\ b'' & \beta & \beta' \\ c'' & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & \alpha & \alpha'' \\ b' & \beta & \beta'' \\ c' & \gamma & \gamma'' \end{vmatrix}\right)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2) - 2(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')\begin{vmatrix} a' & \alpha & \alpha' \\ b' & \beta & \beta' \\ c' & \gamma & \gamma' \end{vmatrix}}{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)};$$

d'où l'on voit, en considérant a, b, c comme des coordonnées courantes, que *le lieu des droites* D, *dont le glissement le long de leurs axes respectifs est nul au 3^e ordre près, est un plan passant par la droite représentée par les équations* (9) *et* (10). On peut donc dire que, parmi les droites qui ont une même direction, il en existe une infinité formant un plan et décrivant des éléments d'hyperboloïde de révolution.

Si l'on égalait seulement à zéro la dérivée K' du paramètre, on obtiendrait, en développant la quantité K en série ordonnée suivant les puissances de t, une expression de la forme $K + K'' \dfrac{t^2}{1.2}$ dont la valeur serait constante au second ordre près. L'équation (10) représenterait alors l'ensemble des droites qui engendrent des éléments de surfaces hélicoïdales. Or cette équation est homogène et du 4^e degré en α, β, γ; on voit donc que, *par chaque point de l'espace, on peut mener une infinité de droites décrivant des éléments de surfaces hélicoïdales et que ces droites forment un cône du quatrième ordre.*

Il est évident maintenant que de pareils éléments de surfaces réglées, présentant un paramètre de distribution constant pendant deux intervalles de temps consécutifs, sont osculateurs à des hyperboloïdes de révolution; seulement ces hyperboloïdes n'ont plus pour axes les droites R correspondantes, comme cela avait lieu pour les droites satisfaisant à la fois aux équations (9) et (10).

Droites qui glissent sur des points fixes.

22. Dans un solide en mouvement, il existe un système de droites ayant la propriété de passer respectivement par des points fixes ou plus exactement de rester à une distance infiniment petite du 3^e ordre de ces points.

Soient a, b, c les coordonnées d'un point fixe dans l'espace. La droite, qui dans sa position initiale passe par ce point, a pour équations

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}.$$

Désignons par a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 les valeurs des coordonnées du point qui étaient primitivement a, b, c, et celles des cosinus de la droite relatifs à l'époque t. Les équations de la droite mobile seront

$$\frac{x-a_1}{\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\beta_1} = \frac{z-c_1}{\gamma_1},$$

et comme elle doit passer par le point a, b, c, on aura constamment

$$\frac{a_1-a}{\alpha_1} = \frac{b_1-b}{\beta_1} = \frac{c_1-c}{\gamma_1}.$$

Remplaçant les six éléments variables par leurs développements, il vient, en divisant par t,

$$\frac{a' + a''\frac{t}{2}\cdots}{\alpha + \alpha' t + \alpha''\frac{t^2}{2}} = \frac{b' + b''\frac{t}{2}\cdots}{\beta + \beta' t + \beta''\frac{t^2}{2}} = \frac{c' + c''\frac{t}{2}\cdots}{\gamma + \gamma' t + \gamma''\frac{t^2}{2}}.$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de t, il vient d'abord

$$\frac{a'}{\alpha} = \frac{b'}{\beta} = \frac{c'}{\gamma}.$$

On voit déjà que la droite doit avoir la direction de la vitesse du point du solide qui au départ se trouve en a, b, c.

On a encore

$$\frac{\beta a''}{2} + \beta' a' = \alpha\frac{b''}{2} + \alpha' b',$$
$$\frac{\gamma b''}{2} + \gamma' b' = \beta\frac{c'}{2} + \beta' c';$$

remplaçant ensuite $a'\ b' \ldots a'' \ldots \alpha'\ \beta' \ldots$ par leurs valeurs connues et éliminant α, β, γ, il vient, après réductions,

$$(a^2 + b^2)\, r^2 - p' bc + u'' a = 0,$$
$$rp' ab + (rw'' - r'w')\, a + w' p' c - r^2 w' b = 0;$$

d'où l'on conclut que *le lieu des points fixes de l'espace sur lesquels peuvent glisser des droites mobiles est l'intersection de deux surfaces du second degré. Quant aux droites cherchées elles-mêmes, elles forment une surface réglée du quatrième ordre que l'on obtiendrait en éliminant a, b, c entre les équations*

$$\frac{X - a}{-br} = \frac{Y - b}{ar} = \frac{Z - c}{w'} = \lambda$$

et les deux précédentes.

On peut donc dire que, *dans un solide en mouvement, il existe un système de droites qui glissent sur des points fixes. Les points fixes forment une cubique gauche et les droites une surface du quatrième ordre.*

Cette proposition est l'analogue de celle qui est relative à la cubique d'inflexion dont tous les points considérés comme mobiles glissent sur une surface réglée regardée comme fixe.

On peut parvenir aux résultats précédents en suivant une voie toute différente. Au lieu de considérer la trajectoire d'un point quelconque A lié au corps solide, on peut se proposer de trouver le lieu des points du solide qui dans leurs mouvements viennent successivement passer à travers le point A considéré comme fixe dans l'espace.

Soient x, y, z les coordonnées du point M qui, au bout d'un temps t, *parviendra* au point fixe A (a, b, c); on aura évidemment

$$a = x + yrt + (u'' - xr^2 - yr')\frac{t^2}{2} + \ldots,$$

$$b = y + xrt + (xr' - yr^2 - zp')\frac{t^2}{2} + \ldots,$$

$$c = z + w't + (w'' + yp')\frac{t^2}{2} + \ldots;$$

d'où l'on tire aisément, pour les équations de la courbe MA qui est pour ainsi dire destinée à *glisser* continuellement sur le point A, les formules

$$x = a + brt + (-u'' - ar^2 + br')\frac{t^2}{2} + \ldots,$$

$$y = b - art + (-br^2 - ar' + cp')\frac{t^2}{2} + \ldots,$$

$$z = c - w't + (-w'' - bp')\frac{t^2}{2} + \ldots.$$

Or il existe des points A pour lesquels ces *courbes glissantes* offrent des points d'inflexion, c'est-à-dire des éléments rectilignes.

D'un autre côté, il est évident que la tangente à l'une de ces courbes en A, tangente que nous supposerons liée au corps solide, glissera sur le point A comme la courbe elle-même.

Cherchons donc le lieu des points A pour lesquels la courbe glissante a un rayon de courbure infini. En écrivant que les coefficients de $\frac{t^2}{2}$ sont proportionnels à ceux de t, on obtient les équations

$$\frac{-u'' - ar^2 + br'}{br} = \frac{-br^2 - ar' + cp'}{-ar} = \frac{-w'' - bp'}{-w'},$$

qui représentent une cubique gauche ne différant pas de celle que l'on a trouvée précédemment.

Il est d'ailleurs évident que l'on pourrait se proposer sur les courbes glissantes, sur leurs tangentes, sur leurs axes de courbure, etc..., toute une série de questions analogues à celles que l'on a traitées relativement aux trajectoires des points considérés comme liés aux solides. La plupart des résultats présenteraient une complète analogie avec ceux que l'on rencontre dans l'étude des trajectoires.

On peut du reste, pour abréger, écrire les équations des courbes glissantes relatives au point A (a, b, c) sous la forme

$$X = a + x't + x''\frac{t^2}{2} + \dots,$$

$$Y = b + y't + y''\frac{t^2}{2} + \dots,$$

$$Z = c + z't + z''\frac{t^2}{2} + \dots.$$

Les coefficients x' y' z' x'' ... étant linéaires en a, b, c, l'analogie entre ces courbes et les trajectoires ordinaires devient évidente.

Courbure des éléments de surfaces décrites par les différentes droites du solide.

23. Considérons un point A (a, b, c) du solide et une droite AD passant par ce point. Cette droite engendrera une surface réglée et nous nous proposons d'abord d'étudier l'élément de cette surface qui se trouve dans le voisinage du point A. Il nous sera facile ensuite d'appliquer les résultats trouvés à tous les autres points de la droite AD

$$(1) \qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = \rho,$$

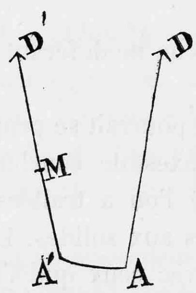
en remplaçant dans toutes les formules a, b, c par $a + \alpha\rho$, $b + \beta\rho$, $c + \gamma\rho$ respectivement.

Le plan tangent à la surface en A devant contenir la droite AD, ainsi que la vitesse de A, a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - a & \alpha & a' \\ Y - b & \beta & b' \\ Z - c & \gamma & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous ferons dépendre les coordonnées d'un point voisin de A sur la surface de

Fig. 16.



deux variables l'une t, l'autre une longueur infiniment petite $\delta\rho$ portée à chaque instant sur la génératrice mobile à partir du point mobile A. Si t varie seule, le point M décrit une trajectoire, si $\delta\rho$ varie seule, M décrit une génératrice A′D′.

Or les coordonnées de M (x, y, z) ont pour expressions

$$x = a_1 + \alpha_1 \delta\rho, \quad y = b_1 + \beta_1 \delta\rho, \quad z = c_1 + \gamma_1 \delta\rho,$$

$a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ étant des fonctions connues du temps t. Remplaçant ces fonctions par leurs développements, il vient

$$(3) \quad \begin{cases} x = a + a' t + a'' \dfrac{t^2}{2} + \left(\alpha + \alpha' t + \alpha'' \dfrac{t^2}{2}\right) \delta\rho, \\ y = b + b' t + b'' \dfrac{t^2}{2} + \left(\beta + \beta' t + \beta'' \dfrac{t^2}{2}\right) \delta\rho, \\ z = c + c' t + c'' \dfrac{t^2}{2} + \left(\gamma + \gamma' t + \gamma'' \dfrac{t^2}{2}\right) \delta\rho. \end{cases}$$

La distance ε du point M (x, y, z) au plan tangent (2) est donnée par l'équation

$$D\varepsilon = \begin{vmatrix} a' t + a'' \dfrac{t^2}{2} + \left(\alpha + \alpha' t + \alpha''\right) \delta\rho & \alpha & a' \\ b' t + b'' \dfrac{t^2}{2} + \left(\beta + \beta' t + \beta''\right) \delta\rho & \beta & b' \\ c' t + c'' \dfrac{t^2}{2} + \left(\gamma + \gamma' t + \gamma''\right) \delta\rho & \gamma & c' \end{vmatrix},$$

ou, en simplifiant et en négligeant les termes du 3e ordre,

$$2D\varepsilon = \begin{vmatrix} a'' & \alpha & a' \\ b'' & \beta & b' \\ c'' & \gamma & c' \end{vmatrix} t^2 + 2 \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha & a' \\ \beta' & \beta & b' \\ \gamma' & \gamma & c' \end{vmatrix} t\delta\rho,$$

après avoir posé

$$(4) \quad \begin{cases} D^2 = (\beta c' - b'\gamma)^2 + (\gamma a' - c'\alpha)^2 + (\alpha b' - \beta a')^2, \\ \quad\; = a'^2 + b'^2 + c'^2 - (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)^2. \end{cases}$$

Désignant alors par V la vitesse du point A et par θ l'angle de cette vitesse avec la génératrice, on a

$$D^2 = V^2 - V^2 \cos^2 \theta^2 = V^2 \sin^2 \theta.$$

Faisons pour abréger

$$\begin{vmatrix} a'' & \alpha & a' \\ b'' & \beta & b' \\ c'' & \gamma & c' \end{vmatrix} = T, \quad \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha & a' \\ \beta' & \beta & b' \\ \gamma' & \gamma & c' \end{vmatrix} = U,$$

et le lieu des points situés à une distance ε du plan tangent sera représenté dans le système des coordonnées $(t, \delta\rho)$ par l'équation

$$(5) \quad 2D\varepsilon = Tt^2 + 2U\, t\delta\rho,$$

qui permet d'étudier la forme de l'indicatrice de la surface. A chaque valeur de t correspond une valeur de $\delta\rho$ convenant à un point de cette courbe infiniment petite.

Si l'on fait $\varepsilon = 0$, l'équation (5) donne, pour la courbe suivant laquelle la surface est coupée par son plan tangent, d'abord $t = 0$, c'est-à-dire la génératrice, ce qui devait être, puis $\delta\rho = -\frac{T}{2U}t$ qui correspond à la deuxième direction asymptotique relative au point A.

Si l'on a

$$T = \begin{vmatrix} a'' & \alpha & a' \\ b'' & \beta & b' \\ c'' & \gamma & c' \end{vmatrix} = 0,$$

auquel cas la droite AD contient visiblement le plan osculateur de la trajectoire de A, il vient $\delta\rho = 0$, par suite la vitesse de A coïncide avec la deuxième direction asymptotique.

Si la droite initiale est telle que l'on ait

$$U = \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha & a' \\ \beta' & \beta & b' \\ \gamma' & \gamma & c' \end{vmatrix} = 0,$$

les deux directions asymptotiques se confondent. Cela pouvait se prévoir, car la droite appartenant au complexe des vitesses qui a pour équation $U = 0$ est tangente à la trajectoire de l'un de ses points et engendre un élément de développable.

Les équations de la deuxième direction asymptotique s'obtiendront en remplaçant dans le système (3) $\delta\rho$ par sa valeur $-\frac{T}{2U}t$, et en négligeant les termes en t^2, ..., ce qui donne

$$x = a + \left(a' - \alpha\frac{T}{2U}\right)t,$$
$$y = b + \left(b' - \beta\frac{T}{2U}\right)t,$$
$$z = c + \left(c' - \gamma\frac{T}{2U}\right)t.$$

Désignons par λ, μ, ν les cosinus de cette droite, il vient

$$\frac{\lambda}{a' - \alpha\frac{T}{2U}} = \frac{\mu}{b' - \beta\frac{T}{2U}} = \frac{\nu}{b' - \gamma\frac{T}{2U}} = \frac{1}{\sqrt{V^2 + \frac{T^2}{4U^2} - \frac{GT}{U}}} = \frac{\cos\psi}{G - \frac{V}{2U}},$$

en posant $G = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'$ et en représentant par ψ l'angle de la direction cherchée avec la génératrice.

On peut dire aussi que la direction asymptotique est celle de la diagonale du parallélogramme construit sur la vitesse du point A et sur une longueur $-\frac{T}{2U}$ portée sur la génératrice. Cette direction sera perpendiculaire à la génératrice si l'on a

$$\alpha\left(a'-\alpha\frac{T}{2U}\right)+\beta\left(b'-\beta\frac{T}{2U}\right)+\gamma\left(c'-\gamma\frac{T}{2U}\right)=0,$$

ou bien

$$G-\frac{T}{2U}=0.$$

Avant d'étudier la manière dont varient les résultats précédents lorsque le point A parcourt toute la génératrice AD, cherchons les deux rayons de courbure de l'élément de surface voisin de A (a, b, c).

La distance MA ou ds est donnée par la formule

$$ds^2=(a't+\alpha\delta\rho)^2+(b't+\beta\delta\rho)^2+(c't+\gamma\delta\rho)^2,$$

ou

$$ds^2=V^2t^2+\delta\rho^2+2Gt\delta\rho.$$

Si on appelle R le rayon de courbure de la section normale dirigée suivant AM, on aura évidemment $ds^2=2R\varepsilon$. On arrive ainsi aux deux équations

$$\begin{aligned}2R\varepsilon&=V^2t^2+\delta\rho^2+2Gt\delta\rho,\\ 2D\varepsilon&=Tt^2\qquad\quad\;\;+2Ut\delta\rho,\end{aligned}$$

qui représentent, la première, un cercle infiniment petit de rayon ds tracé sur la surface, la seconde, l'indicatrice relative au point A. Le système des sécantes communes à ces deux courbes infiniment petites s'obtiendra en multipliant la première équation par D, la seconde par R et en retranchant membre à membre. Il vient alors

$$(DV^2-RT)\,t^2+D\,\delta\rho^2+2\,(GD-UR)\,t\delta\rho=0.$$

Pour que ces sécantes communes se confondent, c'est-à-dire pour que le cercle soit tangent à l'indicatrice, il faut que l'on ait

$$(GD-UR)^2-D\,(DV^2-RT)=0,$$

ou bien

$$U^2R^2-(2GU-T)\,DR+D^2\,(G^2-V^2)=0;$$

puis remarquant que

$$D^2=a'^2+b'^2+c'^2-(a'\alpha+b'\beta+c'\gamma)^2=V^2-G^2,$$

on a, pour déterminer les rayons de courbure de l'élément considéré, l'équation

$$U^2R^2-D\,(2GU-T)\,R-D^4=0.$$

On voit que la courbure est nulle si $U=0$, cela devait être, puisque la droite fait alors partie du complexe des vitesses. On voit aussi que les courbures principales sont égales et opposées, si l'on a

$$2GU - T = 0,$$

équation trouvée précédemment en exprimant que les lignes asymptotiques sont rectangulaires.

Il est actuellement facile de voir ce que deviennent les formules précédentes lorsque le point A occupe différentes positions le long d'une même génératrice initiale. Il suffit de changer dans toutes les équations a, b, c en $a + \alpha\rho$, $b + \beta\rho$, $c + \gamma\rho$. Si l'on désigne par U_1, T_1, G_1, etc... les valeurs des fonctions U, T, G, ..., pour le nouveau point A, on aura

$$U_1 = \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha & a' + \alpha'\rho \\ \beta' & \beta & b' + \beta'\rho \\ \gamma' & \gamma & c' + \gamma'\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha & a' \\ \beta' & \beta & b' \\ \gamma' & \gamma & c' \end{vmatrix} = U;$$

donc la fonction U ne change pas le long de AD.

La quantité G_1, relative au point A, a pour valeur

$$G_1 = (a' + \alpha'\rho)\,\alpha + (b' + \beta'\rho)\,\beta + (c' + \gamma'\rho)\,\gamma = G,$$

donc elle est également constante.

Le déterminant T_1 devient

$$T_1 = \begin{vmatrix} a'' + \alpha''\rho & \alpha & a' + \alpha'\rho \\ b'' + \beta''\rho & \beta & b' + \beta'\rho \\ c'' + \gamma''\rho & \gamma & c' + \gamma'\rho \end{vmatrix},$$

et son développement

$$T_1 = \begin{vmatrix} \alpha'' & \alpha & \alpha & \alpha' \\ \beta'' & \beta & \beta & \beta' \\ \gamma'' & \gamma & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} \rho^2 + \left\{ \begin{vmatrix} \alpha'' & \alpha & a' \\ \beta'' & \beta & b' \\ \gamma'' & \gamma & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & \alpha & \alpha' \\ b'' & \beta & \beta' \\ c'' & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} \right\} \rho + \begin{vmatrix} a'' & \alpha & a' \\ b'' & \beta & b' \\ c'' & \gamma & c' \end{vmatrix}$$

peut s'écrire, pour abréger,

$$T_1 = M\rho^2 + N\rho + T.$$

Enfin, on a

$$D^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 - (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)^2$$

et par suite

$$\begin{aligned} D_1^2 &= a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2\,(a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma')\,\rho + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\,\rho^2 - G^2 \\ &= D^2 + 2\,(a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma')\,\rho + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\,\rho^2. \end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, on peut étudier l'élément de surface voisin d'un point quelconque A_1 de la génératrice initiale.

Si l'on veut, par exemple, trouver une droite telle que les courbures soient égales et opposées quel que soit le point A_1, c'est-à-dire tout le long de la génératrice, on devra avoir, pour toutes valeurs de ρ,

$$T_1 - 2U_1G_1 = M\rho^2 + N\rho + T - 2UG = 0,$$

ce qui donne

$$M = 0, \quad N = 0, \quad T - 2UG = 0.$$

Les droites satisfaisant à ces trois équations forment une surface qui est la même que celles des droites décrivant des éléments hélicoïdaux à plans directeurs, et l'on sait que ces surfaces ont en tous leurs points des courbures égales et opposées.

Déplacement d'un plan.

24. Considérons un plan lié au solide et qui dans sa position initiale aurait pour équation

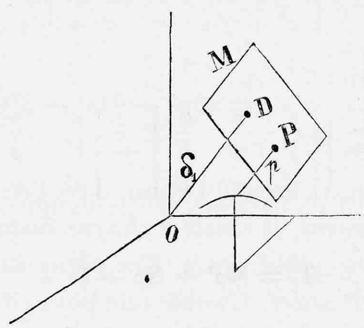
$$\alpha x + \beta y + z - \delta = 0,$$

α, β, γ étant les cosinus de sa normale et δ sa distance à l'origine.

Soient ensuite α_1, β_1, γ_1, δ_1, les fonctions du temps qui représentent à une époque quelconque les éléments correspondants de ce plan mobile. On connaît les développements en séries des trois cosinus, il nous reste donc à chercher celui de la fonction δ_1.

Soit O′ un point lié au solide dont la distance p au plan M reste constante, u, v, w les coordonnées de ce point qui varient avec t, et enfin δ_1 la distance de

Fig. 17.



l'origine fixe O au plan variable M. On a, d'après le théorème des projections, à toute époque

$$\delta_1 = p + \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w.$$

Dérivant par rapport à t, il vient

$$\begin{aligned}
\delta'_1 &= \alpha'_1 u + \beta'_1 v + \gamma'_1 w + \alpha_1 u' + \beta_1 v' + \gamma_1 w', \\
\delta''_1 &= \alpha''_1 u + \beta''_1 v + \gamma''_1 w + 2\,[\alpha'_1 u' + \beta'_1 v' + \gamma'_1 w'] + \alpha_1 u'' + \beta_1 v'' + \gamma_1 w'', \\
\delta'''_1 &= \alpha'''_1 u + \beta'''_1 v + \gamma'''_1 w + 3\,[\alpha''_1 u' + \beta''_1 v' + \gamma''_1 w'] + 3\,[\alpha'_1 u'' + \beta'_1 v'' + \gamma'_1 w''] \\
&\quad + \alpha_1 u''' + \beta_1 v''' + \gamma_1 w'''.
\end{aligned}$$

Faisant ensuite $t = 0$ et remplaçant α'_1, β'_1, γ'_1, α''_1, etc... par les valeurs qu'ils ont, eu égard au choix des axes de coordonnées, on aura

$$\delta' = \gamma w', \quad \delta'' = \alpha u'' + \gamma w'',$$
$$\delta''' = \alpha u''' + \beta u''' + \gamma w''' + 3\beta\,[p'w' - ru''],$$

ce qui donne pour le développement de la fonction δ_1

$$\delta_1 = \delta + \gamma w' \frac{t}{1} + (\alpha u'' + \gamma w'') \frac{t^2}{1.2} + [\alpha u''' + \beta v''' + \gamma w''' \, 3\beta\,(p'w' - ru'')] \frac{t^3}{6} \cdot$$

Considérons actuellement le plan comme un élément de l'espace et, sans nous occuper de la trajectoire d'aucun de ses points désignés à l'avance, proposons-nous de classer les plans du solide d'après la nature de l'élément de surface que ces plans enveloppent dans leurs mouvements.

Les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de rebroussement s'obtiennent en résolvant les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta', \\ \alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z = \delta'_1, \\ \alpha''_1 x + \beta''_1 y + \gamma''_1 z = \delta''_1, \end{cases}$$

et pour obtenir le point où le plan considéré est osculateur à cette arête dans sa position initiale, il suffit de faire $t = 0$ dans les équations (1), et il vient

$$(1)' \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = w'\gamma, \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \alpha u'' + \gamma w''. \end{cases}$$

Si l'on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta p' + \gamma(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

le plan mobile est osculateur à l'arête à l'infini, d'où l'on conclut que :

Dans un solide en mouvement, il existe à chaque instant une infinité de plans qui enveloppent des éléments cylindriques. Ces plans sont perpendiculaires aux génératrices d'un cône du 3e ordre. Comme cela pouvait se prévoir, ce cône n'est autre que celui qui correspond aux droites se mouvant parallèlement à un plan fixe.

Si, outre la relation (2), on a

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \delta' & \beta' & \gamma' \\ \delta'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

le plan considéré étant osculateur en un point indéterminé aura la propriété de glisser sur une droite fixe. Or l'équation (3) représente en coordonnées polaires une certaine surface dont le rayon vecteur δ a pour expression

$$\delta = \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)},$$

f désignant une fonction homogène et du 3[e] degré en α, β, γ, et φ une fonction homogène du 2[e] degré. Si on remplace α, β, γ par $\frac{x}{\delta}$, $\frac{y}{\delta}$, $\frac{z}{\delta}$, respectivement, on a une équation du quatrième degré qui représente la podaire de la surface enveloppée par les plans satisfaisant à l'équation (3).

Donc, *dans un solide en mouvement, il existe une infinité de plans ayant la propriété de glisser sur des droites fixes ou plutôt de rester à une distance du 3[e] ordre de ces droites.*

Ces plans forment une développable dont la podaire relative à l'origine est l'intersection d'une surface du 4[e] ordre et d'un cône du 3[e].

Courbure de l'arête de rebroussement.

25. Pour obtenir la courbure de l'arête de rebroussement, il suffit de chercher à l'aide des équations (1) l'expression de l'élément ds de cette ligne, ainsi que l'angle de contingence relatif à ce même élément. Or on a, en dérivant les équations (1) et en faisant ensuite $t = 0$,

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' + \alpha \dfrac{dx}{dt} + \beta \dfrac{dy}{dt} + \gamma \dfrac{dz}{dt} = 0, \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z - \delta'' + \alpha' \dfrac{dx}{dt} + \beta' \dfrac{dy}{dt} + \gamma' \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z - \delta''' + \alpha'' \dfrac{dx}{dt} + \beta'' \dfrac{dy}{dt} + \gamma'' \dfrac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

et si l'on tient compte des équations (1)$'$, le système (4) se réduit à

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt} = 0,$$
$$\alpha' \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \gamma' \frac{dz}{dt} = 0,$$
$$\alpha'' \frac{dx}{dt} + \beta'' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt} = \mathrm{D},$$

en désignant par D le déterminant,

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta''' \end{vmatrix},$$

il vient alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(\beta\gamma' - \gamma\beta')}{d}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{D(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')}{d}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{D(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{d},$$

en posant

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait ensuite

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (\beta\gamma'' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2, \\ &= \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \end{aligned}$$

on aura

$$ds^2 = \frac{D^2\Delta^2}{d^2}\,dt^2.$$

Il nous reste à calculer l'angle de contingence $d\theta$ relatif au même intervalle de temps dt. En désignant par λ, μ, ν les cosinus de la tangente à l'arête de rebroussement, on aura

$$\lambda\Delta = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \mu\Delta = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \nu\Delta = \alpha\beta' - \beta\alpha';$$

puis différentiant, il vient

$$\begin{aligned} \Delta d\lambda + \lambda d\Delta &= (\beta\gamma'' - \gamma\beta'')\,dt, \\ \Delta d\mu + \mu d\Delta &= (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')\,dt, \\ \Delta d\nu + \nu d\Delta &= (\alpha\beta'' - \beta\alpha'')\,dt. \end{aligned}$$

Élevons au carré et ajoutons en remarquant que $d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = d\theta^2$, il vient

$$\Delta^2 d\theta^2 + (d\Delta)^2 = \left[[\beta\gamma'' - \gamma\beta'']^2 + (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')^2 + (\alpha\beta'' - \beta\alpha'')^2\right].$$

Or si l'on différentie l'équation

$$\Delta = \sqrt{(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2},$$

on aura

$$d\Delta = \frac{(\beta\gamma' - \gamma\beta')(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'') + (\alpha\beta' - \beta\alpha')(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')}{\Delta},$$

par suite

$$\begin{aligned} \Delta^4 d\theta^2 = {} & [(\beta\gamma'' - \gamma\beta'')^2 + (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')^2 + (\alpha\beta'' - \beta\alpha'')^2][(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2] \\ & - [(\beta\gamma' - \gamma\beta')(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'') + (\alpha\beta' - \beta\alpha')(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')]^2, \end{aligned}$$

et, d'après une identité connue,

$$\begin{aligned} \Delta^4 d\theta^2 = {} & [(\beta\gamma'' - \gamma\beta'')(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') - (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')(\beta\gamma' - \gamma\beta')]^2 \\ & + [(\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')(\alpha\beta' - \beta\alpha') - (\alpha\beta'' - \beta\alpha'')(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')]^2 \\ & + [(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')(\beta\gamma' - \gamma\beta') - (\beta\gamma'' - \gamma\beta'')(\alpha\beta' - \gamma\alpha')]^2. \end{aligned}$$

Mais les parenthèses précédentes ont respectivement pour valeurs γd, αd, βd, ainsi qu'il est facile de s'en assurer après réductions, donc on a simplement

$$\Delta^4 \, d\theta^2 = d^2.$$

Le rayon de courbure cherché R devient donc

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\frac{\Delta \mathrm{D}}{d}}{\frac{d}{\Delta^2}} = \frac{\mathrm{D}\Delta^3}{d^2}.$$

L'arête de rebroussement aura un rayon de courbure nul si l'on a $\mathrm{D} = 0$. Or cette condition est celle qu'il faudrait écrire si l'on voulait exprimer que le plan mobile passe par un point fixe ou plutôt qu'il en reste à une distance du 4^e ordre. On a en effet, en désignant par a, b, c les coordonnées de ce point,

$$\begin{aligned} \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c - \delta\, &= 0, \\ \alpha' a + \beta' b + \gamma' c - \delta' &= 0, \\ \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c - \delta'' &= 0, \\ \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c - \delta''' &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne par l'élimination de a, b, c l'équation $\mathrm{D} = 0$.

Donc, *dans un solide en mouvement, il existe une infinité de plans ayant la propriété de glisser sur des points fixes.*

L'enveloppe de ces plans a pour podaire une surface du 5^e ordre, et les points fixes forment une surface du 3^e que l'on obtiendrait en éliminant α, β, γ *entre les trois dernières des équations précédentes homogènes et linéaires par rapport à ces cosinus.*

Calculons encore le rayon de torsion T de l'arête, on a évidemment $d\tau = \sqrt{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1}$, en désignant par l'angle de deux plans osculateurs consécutifs ou encore $d\tau = r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, dt$, par suite

$$\mathrm{T} = \frac{ds}{dt} = \frac{\frac{\mathrm{D}\Delta}{d}}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\mathrm{D}}{d},$$

si l'on remarque que Δ est aussi égal à $\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$ ou à $r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Déplacements simultanés des différents plans qui passent par une même droite.

26. Après l'étude des trajectoires simultanées des différents points d'une même droite, on peut se proposer celle des déplacements simultanés de tous les plans qui passent par cette droite, en considérant ces plans comme des éléments de l'espace et sans s'occuper des trajectoires de tel ou tel de leurs points.

Nous avons déjà vu qu'un plan quelconque

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0 \tag{1}$$

glisse sur un point fixe dont on obtient les coordonnées en résolvant les équations

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' = 0, \tag{2}$$

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z - \delta'' = 0, \tag{3}$$

jointes à la précédente (1).

Si l'on exprime en outre que ce plan passe par la droite fixe de D

$$\frac{x - A}{\lambda} = \frac{y - B}{\mu} = \frac{z - C}{\nu}, \tag{4}$$

il vient

$$A\alpha + B\beta + C\gamma - \delta = 0, \tag{5}$$

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma \qquad = 0. \tag{6}$$

Pour obtenir le lieu des points fixes sur lesquels glissent les différents plans passant par D, il suffira d'éliminer α, β, γ et δ entre les équations (1), (2), (3), (5) et (6).

Ordonnons (2) et (3) par rapport à α, β, γ, il vient

$$(ry)\,\alpha + (-rx)\,\beta - w'\gamma = 0,$$

$$(r'y - r^2x - u'')\,\alpha + (p'z - r^2y - r'x)\,\beta + (-w'' - p'y)\,\gamma = 0,$$

ce que nous écrivons plus simplement

$$X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma = 0,$$

$$X''\alpha + Y''\beta + Z''\gamma = 0.$$

L'élimination indiquée donne alors les équations

$$\begin{vmatrix} x - A & X' & \lambda \\ y - B & Y' & \mu \\ z - C & Z' & \nu \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & X' & X'' \\ \mu & Y' & Y'' \\ \nu & Z' & Z'' \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

qui sont celles de deux hyperboloïdes contenant en commun la droite

$$\frac{X'}{\lambda} = \frac{Y'}{\mu} = \frac{Z'}{\nu}, \tag{9}$$

et il est facile de voir que les points de cette droite ne font pas partie du lieu en général. On peut donc dire que :

Dans un solide en mouvement, les plans passant par une même droite glissent respectivement sur les différents points d'une cubique gauche.

Avant d'examiner les cas qui peuvent se présenter relativement à la situation de la droite donnée D, rappelons qu'il existe dans le solide une infinité de plans pour lesquels le point fixe de glissement est indéterminé. Ces plans enveloppent une développable et leur ensemble est représenté par le système des équations

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

dont il faut retrancher la solution $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}$.

Cela posé, si par la droite D on peut mener un plan tangent à la développable (10), on aura dans ce plan une certaine droite dont tous les points conviennent à la question. La cubique gauche trouvée précédemment se dédouble donc en une droite et une conique.

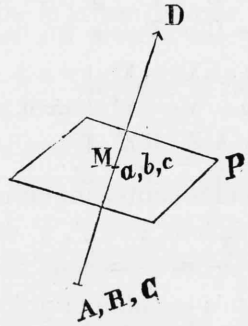
Si par la droite D on peut mener deux plans tangents à la développable (10), on aura dans chacun d'eux une droite dont tous les points feront partie du lieu cherché. La cubique se décompose alors en trois droites dont les deux premières constituent une solution singulière de la question et dont la troisième est le lieu des points de glissement de tous les plans passant par la droite D. On peut donc dire que :

Dans un solide en mouvement, il existe une infinité de droites telles que les plans qui les contiennent ont leurs points de glissement sur une même ligne droite.

On peut également se proposer la question inverse de la précédente et chercher le système des plans qui glissent sur les différents points d'une droite D :

$$\frac{x - A}{\lambda} = \frac{y - B}{\mu} = \frac{z - C}{\nu} = \rho.$$

Fig. 18.



Un plan P :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

glissera sur un point M (a, b, c) si l'on a les équations

$$\begin{aligned} \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c - \delta' &= 0, \\ \alpha' a + \beta' b + \gamma' c - \delta' &= 0, \\ \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c - \delta'' &= 0. \end{aligned}$$

Retranchons les deux premières l'une de l'autre, et ordonnons les deux dernières par rapport à α, β, γ, il vient

$$\begin{aligned} (x-a)\,\alpha + (y-b)\,\beta + (z-c)\,\gamma &= 0, \\ A'\alpha \quad + \quad B'\beta \quad + \quad C'\gamma &= 0, \\ A''\alpha \quad + \quad B''\beta \quad + \quad C''\gamma &= 0, \end{aligned}$$

A', B', C', A''... désignant des fonctions linéaires en a, b, c. L'élimination de α, β, γ donne ensuite

$$\begin{vmatrix} x-a & A' & A'' \\ y-b & B' & B'' \\ z-c & C' & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

pour l'équation du plan qui glisse sur le point M. Remplaçons maintenant a, b, c par $A + \lambda\rho$, $B + \mu\rho$, $C + \nu\rho$, il vient

$$\begin{vmatrix} x - A - \lambda\rho, & A' + A'_1\rho & A'' + A''_1\rho \\ y - B - \mu\rho, & B' + B'_1\rho & B'' + B''_1\rho \\ z - C - \nu\rho, & C' + C'_1\rho & C'' + C''_1\rho \end{vmatrix} = 0,$$

relation du 3e degré en ρ, ou A'_1, B'_1, C'_1, A''_1, représentant des fonctions linéaires connues des cosinus donnés λ, μ, ν. Il est facile d'obtenir la surface qui enveloppe ce plan quand on fait varier ρ.

Si la droite donnée satisfait à la relation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & A'_1 & A''_1 \\ \mu & B'_1 & B''_1 \\ \nu & C'_1 & C''_1 \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation du plan s'abaisse au second ordre et son enveloppe se réduit à un cylindre.

Si la droite D rencontre une fois la cubique

$$\frac{A'}{A''} = \frac{B'}{B''} = \frac{C'}{C''},$$

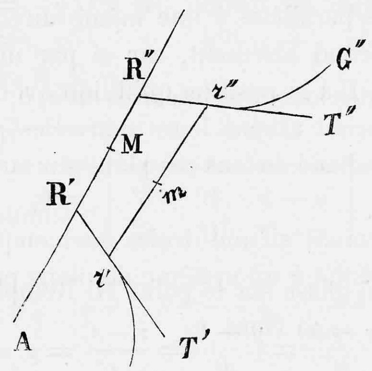
l'équation du plan contient en facteur $\rho - \rho'$, ρ' désignant le rayon recteur du point de rencontre, et s'abaisse encore au second ordre.

Si la droite D rencontre deux fois la cubique précédente qui n'est autre que le lieu des points d'inflexion des *courbes glissantes*, l'équation du même plan s'abaisse au premier degré en ρ et ce dernier reste parallèle à un plan fixe quand

M parcourt la droite D. D'ailleurs cette équation prend la forme $\Delta\rho + P = 0$, P étant jonction de x, y, z et Δ ne contenant pas ces mêmes lettres.

Il est du reste facile de se rendre compte de ce dernier résultat. Soient R′ et R″ les points où la droite D rencontre la cubique d'inflexion des courbes glissantes. Ces courbes G′ et G″ supposées liées au solide glissent à travers les points fixes R′ et R″ et présentent en outre des points d'inflexion en ces points. Par leurs tangentes R′T′ et R″T″ on peut mener deux plans parallèles, et considérer la

Fig. 19.



série des droites du solide $r'r''$ qui viendront successivement s'appliquer sur R′R″. Il est clair que le lieu des points m qui viendront passer à travers M sera une courbe dont les points seront tous à la même distance des plans parallèles menés par R′T′ et R″T″, donc toutes les courbes glissantes Mm relatives aux différents points de D ont leurs plans osculateurs parallèles entre eux. D'ailleurs, il est évident que le plan osculateur d'une courbe Mm qui glisse sur M, glisse lui-même sur M au 3e ordre près.

Axe d'un plan.

27. Lorsqu'on veut amener un plan d'une position à une autre infiniment voisine en faisant abstraction des trajectoires de ses points et de tout glissement du plan sur lui-même, on peut le faire tourner autour d'une droite convenablement choisie que nous appellerons l'*axe du plan,* par analogie avec l'axe de courbure d'un point à l'aide duquel on peut faire également passer ce point d'une position à une autre infiniment voisine, en négligeant les quantités du 3e ordre.

Or, il est évident que nous pouvons considérer l'axe d'un plan P,

$$\text{(P)} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

comme le lieu des points fixes (a, b, c) tels que le plan P reste à une distance invariable de ces points. Désignant par p cette distance, on a

$$p = \alpha a + \beta b + \gamma c - \delta,$$

et en dérivant deux fois on obtient les relations

$$(\mathrm{R}) \qquad \begin{cases} \alpha' a + \beta' b + \gamma' c - \delta' = 0, \\ \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c - \delta'' = 0, \end{cases}$$

qui seront les équations de l'*axe du plan.*

On remarquera que la quantité δ ne figure pas dans les équations de cet axe et que par suite tous les plans parallèles à une même direction n'ont qu'un seul et même axe. Cela se comprend aisément, car si par une rotation autour d'une droite R on amène un plan P à la position qu'il doit avoir en tant que plan, tous les plans parallèles à P auront atteint leurs nouvelles positions respectives, de sorte qu'un glissement simultané de tous ces plans sur eux-mêmes fera prendre au solide sa nouvelle position.

Demandons-nous inversement si une droite quelconque fixe de l'espace peut servir d'axe à un plan ou plutôt à un système de plans parallèles. Soient

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{x - \mathrm{A}}{\lambda} = \frac{y - \mathrm{B}}{\mu} = \frac{z - \mathrm{C}}{\nu} = \rho$$

les équations d'une droite. Pour qu'elle soit l'axe d'un plan, il faut que l'on puisse déterminer α, β, γ de manière à ce que (R) coïncide avec (D), ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha' \mathrm{A} + \beta' \mathrm{B} + \gamma' \mathrm{C} - \delta' &= 0, \\ \alpha'' \mathrm{A} + \beta'' \mathrm{B} + \gamma'' \mathrm{C} - \delta'' &= 0, \\ \alpha' \lambda + \beta' \mu + \gamma' \nu &= 0, \\ \alpha'' \lambda + \beta'' \mu + \gamma'' \nu &= 0, \end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à α, β, γ,

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}r\,\alpha && - \mathrm{A}r\,\beta && - w''\gamma = 0, \\ &(r'\mathrm{B} - r^2\mathrm{A} - u'')\,\alpha && + (p'\mathrm{C} - \mathrm{B}r^2 - \mathrm{A}r')\,\beta && + (-w'' - p'\mathrm{B})\,\gamma = 0, \\ &\mu r\,\alpha && - \lambda r\,\beta && = 0, \\ &(r'\mu - r^2\lambda)\,\alpha && + (p'\nu - r^2\mu - r'\lambda)\,\beta && + (-p'\mu)\,\gamma = 0. \end{aligned}$$

Éliminant ensuite α, β, γ, on arrive aux deux équations suivantes où on a posé $\dfrac{w'}{r} = k$,

$$\begin{vmatrix} \mathrm{B}, & -\mathrm{A}, & -k \\ \mu, & -\lambda, & 0 \\ r'\mathrm{B} - r^2\mathrm{A} - u'', & p'\mathrm{C} - \mathrm{B}r^2 - \mathrm{A}r', & -w'' - p'\mathrm{B} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{B}, & -\mathrm{A}, & -k \\ \mu, & -\lambda, & 0 \\ r'\mu - r^2\lambda, & p'\nu - r^2\mu - r'\lambda, & -p'\mu \end{vmatrix} = 0.$$

On voit par suite que tous les axes possibles font partie d'une certaine congruence. Par un point de l'espace A, B, C, *il passe deux axes, intersections du cône que représente la dernière équation et du plan que donne l'avant-dernière.*

Cherchons encore le lieu des axes des plans qui passent par une même droite D. Entre les équations (R) et les suivantes qui expriment que le plan P contient la droite donnée D :

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma - \delta &= 0, \\ \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu \quad &= 0, \end{aligned}$$

il faut éliminer α, β, γ et δ, ou, ce qui revient au même, α, β, γ entre les équations R et la dernière écrite.

Ordonnons les équations R, il vient

$$\begin{aligned} br\,\alpha \qquad\qquad & - ar\,\beta \qquad\qquad\qquad & - w'\,\gamma = 0, \\ (r'b - ar^2 - u'')\,\alpha + & (p'c - r^2b - r'a)\,\beta + & (- w'' - p'b)\,\gamma = 0, \end{aligned}$$

et l'élimination indiquée donne

$$\begin{vmatrix} b, & -a & -k \\ r'b - r^2a - u'', & p'c - br^2 - r'a, & -w'' - p'b \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu des axes cherché est donc un hyperboloïde contenant la cubique gauche d'inflexion des courbes glissantes, ainsi que la droite parallèle à Oz,

$$\frac{b}{\lambda} = \frac{-a}{\mu} = \frac{-k}{\nu}.$$

Ce lieu ne dépend du reste que de la direction de la droite donnée D. L'hyperboloïde qu'on vient de trouver se réduit à un cône si la direction λ, μ, ν fait partie d'un cône du quatrième ordre facile à obtenir.

Nous allons enfin essayer de faire voir *a priori* que le lieu trouvé précédemment devait passer par la cubique d'inflexion des courbes glissantes. Comme nous l'avons dit déjà, le plan osculateur d'une courbe glissant sur un point fixe M passe constamment par ce point, par suite l'axe du plan ne peut manquer de passer par le point M. Si maintenant la courbe MC présente en M un élément rectiligne, tout plan passant par MC glissera sur M et son axe rencontrera le point M.

D'un autre côté, les tangentes aux courbes MC relatives à tous les points M de la cubique sont parallèles à un cône du second degré, donc il existe sur cette cubique deux points M′ et M″ tels que les tangentes à la courbe glissante sont parallèles à un plan quelconque P. On a donc ainsi trois plans parallèles devant avoir un même axe qui ne saurait différer de M′M″, corde de la cubique.

Les points de la cubique sont donc associés deux à deux. A chaque système de plans parallèles correspond un seul et même axe qui passe par deux points M′

et M″ de cette cubique. Quant à la congruence que nous avons trouvée pour le système des axes de tous les plans du solide, elle n'est autre que l'ensemble de toutes les cordes d'une certaine cubique gauche.

Sphère osculatrice de l'enveloppe d'un plan quelconque du solide.

28. Soit P un plan lié au solide, P_1, P_2, P_3 trois positions consécutives infiniment voisines de ce plan. Il existe toujours un point C fixe dans l'espace situé à égale distance de ces quatre plans, et qui serait le centre d'une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre. Il est évident maintenant que, si par le point C supposé connu, on imagine un plan parallèle à P et lié au solide, ce dernier plan glissera sur le point C pendant le déplacement du corps, ou plutôt restera à une distance de ce point infiniment petite du quatrième ordre.

Réciproquement, si l'on trouve un plan qui glisse sur un point fixe C, tout plan parallèle à celui-ci glissera sur une sphère d'un rayon égal à la distance invariable des deux plans liés au solide.

Étant donné un point C (a, b, c), cherchons si un plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$$

peut rester à une distance du quatrième ordre de ce point. Il faut que l'on ait

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c - \delta\ &= 0,\\ \alpha'\, a + \beta'\, b + \gamma'\, c - \delta' &= 0,\\ \alpha'' a + \beta''\, b + \gamma'' c - \delta'' &= 0,\\ \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c - \delta''' &= 0.\end{aligned}\right.$$

Pour chaque direction (α, β, γ), les trois dernières de ces équations déterminent en général un point C (a, b, c) sur lequel peut glisser un plan, et la première fera connaître la distance à l'origine δ du plan glissant.

Or, on a vu que δ', δ'' et δ''' sont linéaires et homogènes en α, β, γ; ordonnant donc les trois dernières équations par rapport à ces cosinus, il vient

$$\begin{aligned} A'\,\alpha + B'\,\beta + C'\,\gamma &= 0,\\ A''\,\alpha + B''\,\beta + C''\gamma &= 0,\\ A'''\alpha + B'''\beta + C'''\gamma &= 0,\end{aligned}$$

où A′, B′, C′, A″, ... représentent des fonctions linéaires en a, b, c.

Éliminons α, β, γ, nous aurons

$$(F_1)\qquad \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on conclut que :

Le lieu des points fixes sur lesquels des plans liés au solide sont susceptibles de glisser forment une surface du 3^e^ ordre.

Par suite, on voit que :

Le lieu de tous les centres des sphères osculatrices aux développables engendrées par tous les plans d'un solide en mouvement est une surface du 3^e^ degré.

Éliminant a, b, c entre les équations (1), il vient

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta''' \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui représente l'ensemble des plans susceptibles de rester à une distance du 4^e^ ordre de l'un de leurs points supposé fixe. Cet ensemble de plans enveloppe une certaine surface vue d'un point quelconque de l'espace suivant un cône du 4^e^ ordre.

Si l'on a simultanément

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \delta''' \end{vmatrix} = 0,$$

le point de glissement C (a, b, c) est indéterminé sur la droite

$$\alpha' a + \beta' b + \gamma' c - \delta' = 0,$$
$$\alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c - \delta'' = 0.$$

Or les cônes (3) se coupent suivant 9 droites dont il faut retrancher les 3 droites que représentent les équations

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\alpha'''}{\beta'''},$$

d'où l'on conclut que :

Il existe six directions de plans parallèles tels que chacun des plans de ces séries a un point de glissement. Pour toutes les autres directions il n'existe qu'un plan susceptible de glisser sur un point fixe.

Cherchons actuellement s'il existe des plans qui dans leurs déplacements restent à des distances infiniment petites du 5^e^ ordre de l'un de leurs points; aux équations (1) il suffit de joindre la suivante

$$(4) \qquad \alpha^{\text{IV}} a + \beta^{\text{IV}} b + \gamma^{\text{IV}} c - \delta^{\text{IV}} = 0,$$

ce qui donne par l'élimination de a, b, c

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta''' \\ \alpha^{\text{IV}} & \beta^{\text{IV}} & \gamma^{\text{IV}} & \delta^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui représente un cône du 4e ordre. Aux génératrices de ce cône correspondent des plans dont la distance δ à l'origine est donnée par la relation (2), d'où l'on conclut que :

Dans un solide en mouvement, il existe une infinité de plans qui restent à des distances infiniment petites du 5e ordre de l'un de leurs points supposé fixe. Les axes de ces plans sont parallèles à un cône du 4e ordre.

Éliminant α, β, γ entre les deux dernières (1) et l'équation (4) préalablement mise sous la forme

$$A^{\text{IV}}\alpha + B^{\text{IV}}\beta + C^{\text{IV}}\gamma = 0,$$

il vient

$$\begin{vmatrix} A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \\ A^{\text{IV}} & B^{\text{IV}} & C^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on voit que *les points fixes sur lesquels glissent les plans que l'on vient de trouver font partie de l'intersection de deux surfaces du 3e ordre.*

Adjoignant enfin aux équations (1) et (4) la relation

$$(6) \qquad \alpha^{\text{V}} a + \beta^{\text{V}} b + \gamma^{\text{V}} c - \delta^{\text{V}} = 0,$$

on aura exprimé que le plan reste pendant son déplacement à une distance du 6e ordre d'un point fixe.

L'élimination de a, b, c conduit à la nouvelle équation

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta''' \\ \alpha^{\text{IV}} & \beta^{\text{IV}} & \gamma^{\text{IV}} & \delta^{\text{IV}} \\ \alpha^{\text{V}} & \beta^{\text{V}} & \gamma^{\text{V}} & \delta^{\text{V}} \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente un certain cône du 4e ordre. Ce dernier cône coupe celui qui a été précédemment obtenu suivant 16 droites, et les plans normaux à ces droites dont les distances à l'origine seront données par l'équation (2) posséderont en général la propriété demandée; d'où l'on voit que :

Dans un solide en mouvement, il peut exister 16 plans qui ont la propriété de rester pendant leurs déplacements à une distance infiniment petite du 6e ordre de l'un de leurs points considéré comme fixe.

L'élimination de α, β, γ entre les équations (4), (6) et la dernière (1) ordonnées par rapport à ces cosinus donne

$$(F_3) \qquad \begin{vmatrix} A''' & B''' & C''' \\ A^{\text{IV}} & B^{\text{IV}} & C^{\text{IV}} \\ A^{\text{V}} & B^{\text{V}} & C^{\text{V}} \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on voit que :

Les points fixes dont les distances à certains plans mobiles avec le corps restent infiniment petites du 6e ordre sont les points communs à trois surfaces du 3e ordre.

CHAPITRE II

DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A QUATRE CONDITIONS.

29. Lorsqu'un solide est assujetti à quatre conditions, les six paramètres qui déterminent sa position dans l'espace sont liés par quatre équations. On peut par suite regarder quatre de ces paramètres comme des fonctions des deux autres, ou encore considérer les six paramètres comme des fonctions de deux variables indépendantes que nous désignerons par s et t dans tout ce qui va suivre.

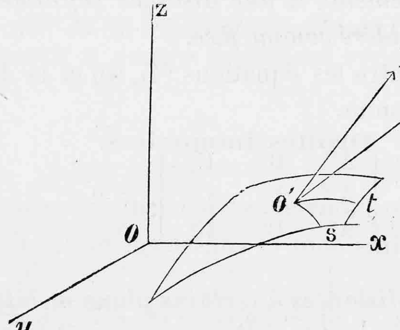
Si, laissant s constant, on fait varier t, le solide subit un déplacement dans lequel une certaine surface réglée liée au corps roulera avec glissement sur une autre surface réglée fixe dans l'espace.

De même si l'on donne à t une valeur constante, la variation de s fera subir au solide un déplacement comportant une autre série d'axes instantanés glissants.

Si enfin on suppose s liée à t par une équation quelconque $s = \varphi(t)$, le solide prendra un mouvement déterminé donnant lieu à une série d'axes instantanés glissants formant une surface réglée dont la nature dépendra de la forme de la fonction φ que l'on peut faire varier arbitrairement.

Cela posé, pour étudier les déplacements du solide, nous nous donnerons la surface trajectoire de l'un de ses points O′ dont les coordonnées par rapport aux axes fixes seront des fonctions de s et de t que nous désignerons par $u\ (s,\ t)$, $v\ (s,\ t)$, $w\ (s,\ t)$.

Fig. 20.



On peut alors supposer que la variation de t seule fait décrire au point O′ la ligne O_s en même temps qu'elle fait tourner le solide autour de O'T. De même si s varie seule on peut admettre que le point O' décrit une autre courbe O'_s et que le corps tourne autour d'un autre axe O'R.

Il est évident maintenant que si l'on se borne d'abord à la considération des infiniment petits du premier ordre, le déplacement d'un point quelconque du corps sera la somme géométrique des déplacements dus séparément à la varation de t et à la variation de s.

Comptons actuellement les valeurs de s et t à partir de celles qui sont relatives au point O', désignons par p_t, q_t, r_t les composantes de la rotation autour de O'T, par p_s q_s r_s celles de la rotation autour de $O's$, et on aura, pour les projections δx, δy, δz du déplacement d'un point quelconque (a, b, c) du solide, les expressions

$$\begin{aligned} \delta x &= (u'_t + q_t c - r_t b)\, t + (u'_s + q_s c - r_s b)\, s, \\ \delta y &= (v'_t + r_t a - p_t c)\, t + (v'_s + r_s a - p_s c)\, s, \\ \delta z &= (w'_t + p_t b - q_t a)\, t + (w'_s + p_s b - q_s a)\, s. \end{aligned}$$

Considérons le mouvement du corps caractérisé par la relation $s = \varphi(t)$ liant les deux variables indépendantes. Développant $\varphi(t)$ en série, on a

$$s = \lambda t + \lambda' \frac{t^2}{1.2} + \dots,$$

ou simplement $s = \lambda t$, si l'on se borne aux infiniment petits du 1er ordre. Il vient alors, pour les composantes de la vitesse dans ce mouvement particulier,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u'_t + \lambda u_s + (q_t + \lambda q_s)\, c - (r_t + \lambda r_s)\, b, \\ \frac{dy}{dt} &= v'_t + \lambda v'_s + (r_t + \lambda r_s)\, a - (p_t + \lambda p_s)\, c, \\ \frac{dz}{dt} &= w'_t + \lambda w'_s + (p_t + \lambda p_s)\, b - (q_t + \lambda q_s)\, a. \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait varier la forme de la fonction φ, par suite la valeur de λ, la vitesse du point (a, b, c) prendra toutes les directions possibles dans un plan qui n'est autre que le plan tangent à la surface trajectoire de ce point.

Droites immobiles.

30. Cherchons si, dans le mouvement particulier caractérisé par une certaine valeur de λ, il existe des points dont la vitesse est nulle. Il suffit de résoudre les équations

$$\begin{aligned} u'_t + \lambda u'_s + (q_t + \lambda q_s)\, c - (r_t + \lambda r_s)\, b &= 0, \\ v'_t + \lambda v'_s + (r_t + \lambda r_s)\, a - (p_t + \lambda p_s)\, c &= 0, \\ w'_t + \lambda w'_s + (p_t + \lambda p_s)\, b - (q_t + \lambda q_s)\, a &= 0. \end{aligned}$$

Or, le déterminant des inconnues a, b, c est nul, donc les points cherchés n'existent que si les équations précédentes sont compatibles, ce qui exige la condition

$$(u'_t + \lambda u'_s)(p_t + \lambda p_s) + (v'_t + \lambda v'_s)(q_t + \lambda q_s) + (w'_t + \lambda w'_s)(r_t + \lambda r_s) = 0.$$

Cette équation du second degré en λ a deux racines λ', λ''. A chacune de ces racines correspond un mouvement particulier dans lequel deux quelconques des équations (2) représentent une droite immobile ou plutôt dont les points n'éprouvent que des déplacements du second ordre. On peut donc dire que :

Parmi tous les déplacements possibles d'un solide assujetti à quatre conditions, il en est deux qui se réduisent à des rotations sans glissement *autour de deux droites respectivement.*

Désignons par Δ' la droite immobile correspondant à la racine λ', et par Δ'', celle qui est relative à λ''. Considérons un point quelconque M du solide et cherchons le plan tangent à sa surface trajectoire.

Opérons d'abord un changement de variables indépendantes et posons

$$s - \lambda' t = s',$$
$$s - \lambda'' t = t'.$$

Si $s' = 0$ et si t' varie seule, on a constamment $s = \lambda' t$, par suite le solide tourne autour de Δ'.

Si $t' = 0$, et si s' varie à partir de O, on a de même constamment $s = \lambda'' t$, donc le solide tourne autour de Δ''.

Les variations simultanées de s' et de t' produiront donc dans le solide des déplacements qui seront les résultats de combinaisons dans des proportions variables de deux rotations, l'une autour de Δ', l'autre autour de Δ''.

Or, dans la rotation autour de Δ', un point M décrit une trajectoire normale au plan ($M\Delta'$); de même pendant la rotation autour de Δ'', la vitesse du point M est perpendiculaire au plan ($M\Delta''$), donc le plan de ces deux vitesses, qui n'est autre que le plan tangent à la surface trajectoire de M, est normal à l'intersection des plans $M\Delta'$ et $M\Delta''$. On peut conclure de là que :

Les normales aux surfaces trajectoires qui peuvent décrire les différents points d'un solide assujetti à quatre conditions rencontrent toutes deux mêmes droites.

Axes instantanés glissants.

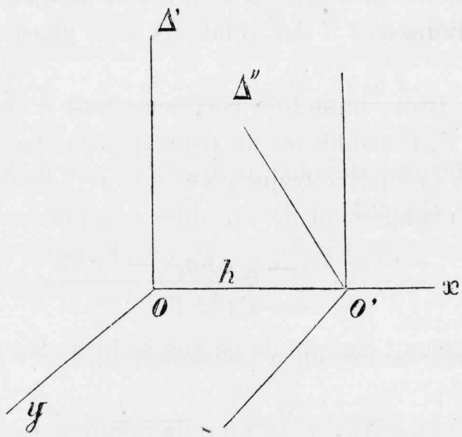
31. A chaque valeur attribuée au paramètre λ correspond un mouvement particulier donnant lieu comme on sait à un certain axe instantané glissant. Proposons-nous de chercher le lieu de ces axes. Pour simplifier les calculs, nous prendrons pour axe des z la droite Δ' et pour axe des x la plus courte distance de Δ' et de Δ'' dont nous désignerons la longueur par h.

Les formules générales du déplacement d'un point quelconque (a, b, c) deviendront

$$\begin{aligned} \delta x &= -br_t t + (q_s c - br_s)s, \\ \delta y &= ar_t t + (a-h)r_s s, \\ \delta z &= - (a-h)q_s s, \end{aligned}$$

r_t étant la rotation autour de Δ', r_s et q_s désignant les composantes suivant Oz et Oy de la rotation autour de Δ'', et (s, t) les nouvelles variables relatives aux deux rotations.

Fig. 21.



Au mouvement caractérisé par la relation $s = \lambda t$, correspond pour un point M une vitesse dont les composantes seront

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -br_t + (cq_s - br_s)\lambda, \\ \frac{dy}{dt} &= ar_t + (a-h)r_s\lambda, \\ \frac{dz}{dt} &= - (a-h)q_s\lambda, \end{aligned}$$

et l'axe instantané correspondant aura pour équations

$$\frac{-br_t + \lambda(cq_s - br_s)}{0} = \frac{ar_t + (a-h)r_s\lambda}{q_s\lambda} = \frac{-(a-h)q_s\lambda}{r_t + \lambda r_s}.$$

Ces relations expriment en effet que la vitesse du point a, b, c est dirigée suivant l'axe de la rotation qui résulterait d'une rotation $(0, 0, r_t)$ autour de Δ' et d'une autre $(0, q_s\lambda, r_s\lambda)$ autour de Δ''.

L'élimination de λ donne ensuite pour le lieu des axes instantanés

$$a = \frac{h}{q_s}\,\frac{r_s bc + q_s b^2}{b^2 + c^2},$$

équation qui représente un conoïde ayant pour directrice l'axe des x et pour plan directeur le plan yOz. Ce conoïde contient d'ailleurs les droites Δ' et Δ'' qui ne sont autre chose que les axes instantanés correspondant à $\lambda = 0$ et à $\lambda = \infty$.

Foyers d'un plan.

32. Dans le mouvement caractérisé par la relation $s = \lambda t$, le foyer du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0 \tag{1}$$

est donné par les équations

$$\frac{-br_t + (q_s c - r_s b)\lambda}{\alpha} = \frac{ar_t + (a-h)r_s\lambda}{\beta} = \frac{-(a-h)q_s\lambda}{\gamma}.$$

Multipliant les deux termes de chaque fraction par a, b, c respectivement et ajoutant terme à terme, il vient

$$\frac{-(a-h)q_s\lambda}{\gamma} = \frac{chq_s\lambda - hr_s b\lambda}{a\alpha + b\beta + c\gamma},$$

puis divisant par λ, et tenant compte de ce que le foyer fait partie du plan, on a

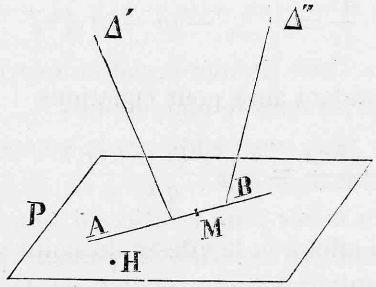
$$\frac{(a-h)q_s}{\gamma} = \frac{hr_s b - cq_s h}{\delta}. \tag{2}$$

Donc, *le lieu des foyers est une droite, intersection des plans* (1) *et* (2). *Il es facile de voir que cette droite rencontre Δ' et par analogie Δ''.*

On conclut de là que *le lieu des foyers d'un même plan est la droite qui joint les traces de Δ' et Δ'' sur ce plan.*

On peut se rendre compte de ce résultat en remarquant que la droite AB qui

Fig. 22.



joint ces deux traces est perpendiculaire à toutes les trajectoires possibles d'un point quelconque M de ses points. Or, il est évident que l'on peut combiner les rotations autour de Δ' et Δ'' dans un rapport tel que la trajectoire qui en résulte pour M soit normale au plan P.

Inversement un point quelconque M pris hors de AB ne peut être un foyer du plan P. La surface trajectoire de H est en effet normale à la droite qui, menée par ce point, rencontrerait Δ' et Δ''. Cette surface est donc oblique au plan P et par suite aucune des vitesses possibles de H ne peut être normale au plan P.

COROLLAIRE. — *Le lieu des foyers de tous les plans qui passent par une droite fixe est un hyperboloïde contenant Δ', Δ'', ainsi que la droite donnée.*

Conjuguées d'une droite donnée.

33. A chaque déplacement possible du solide correspond pour une même droite D une conjuguée Δ qui, comme on sait, est le lieu des foyers des plans passant par D. Or, on vient de voir que le lieu des foyers de tous les plans qui passent par une même droite est un hyperboloïde contenant D, Δ' et Δ'', donc le système des conjuguées d'une même droite D n'est autre que celui des génératrices de cet hyperboloïde qui ne rencontrent pas Δ' et Δ''.

Il y a donc un mouvement du solide dans lequel la conjuguée de D est Δ', un autre dans lequel cette conjuguée est Δ'' et enfin un troisième dans lequel cette conjuguée est la droite D elle-même.

Caractéristiques d'un plan.

34. A chaque mouvement possible du solide caractérisé par la relation $s = \lambda t$, répond pour le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

une certaine caractéristique donnée par l'équation

$$\alpha [- b r_t + (q_s c - b r_s) \lambda] + \beta [a r_t + (a - h) q_s \lambda] + \gamma [-(a - h) q_s \lambda] = 0,$$

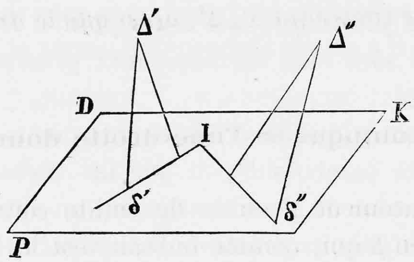
jointe à l'équation du plan. Cette dernière relation exprime en effet que la vitesse du point (a, b, c) est comprise dans le plan donné.

Si λ varie, on voit que le plan représenté par la seconde équation tourne autour d'une droite fixe. On conclut de là que :

Les caractéristiques d'un même plan relatives à tous les mouvements possibles d'un solide assujetti à quatre conditions passent par un même point de ce plan.

Il est facile de se rendre compte de ce résultat. Si l'on imprime au solide une rotation quelconque autour de Δ', tous les points de la projection δ' de Δ' sur le plan P auront leurs trajectoires tangentes à ce plan. De même pour une rotation autour de Δ'', tous les points de δ'' projection de Δ'' sur P auront leurs vitesses dans le plan. Donc le point I intersection de δ' et δ'' aura toutes ses trajectoires possibles situées dans le plan P, donc enfin I fera partie de toutes les caractéristiques que le plan P aura pour toutes les combinaisons de deux rotations autour de Δ' et de Δ''.

Fig. 23.



Si l'on considère tous les plans P passant par une même droite DK, on sait que le lieu de la projection δ' est un hyperboloïde. Il en est de même pour δ'', donc le lieu des points I est une cubique gauche, car les deux hyperboloïdes précédents ont en commun la droite DK.

Plans tangents aux surfaces trajectoires.

35. Si l'on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la surface trajectoire d'un point M (a, b, c), par $a'_t\ b'_t\ c'_t$ les composantes de la vitesse de ce point due à la variation de t, et par a'_s, b'_s, c'_s, celles de la vitesse qui résulte de la variation de s, on aura

$$a'_t\alpha + b'_t\beta + c'_t\gamma = 0,$$
$$a'_s\alpha + b'_s\beta + c'_s\gamma = 0,$$

ce qui donne, pour l'équation du plan tangent à la surface trajectoire de M,

$$\begin{vmatrix} X - a & a'_t & a'_s \\ Y - b & b'_t & b'_s \\ Z - c & c'_t & c'_s \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(X - a)(a - h)a + (Y - b)(a - h)b + (Z - c)(ac - bhk) = 0,$$

après avoir posé $\frac{r_s}{q_s} = K$, en représentant par K la cotangente de l'angle des droites Δ' et Δ''.

La plupart des propriétés des plans tangents résultent de celle de la normale qui rencontre constamment deux droites fixes. Ainsi le point de contact relatif à un plan donné P s'obtiendra en abaissant par Δ' et Δ'' des plans perpendiculaires à P. L'intersection de ces deux plans sera une droite IK qui, s'appuyant à la fois sur Δ' et Δ'', sera normale à toutes les trajectoires possibles de ses points, et sa trace I sur le plan P sera le point de contact cherché. A une série de plans parallèles à P correspondra une série de points de contact sur la droite IK.

A un faisceau de plans passant par une même droite D *correspondra une série de points de contact* I *situés sur une cubique trouvée précédemment.*

Si l'on considère les plans qui ont leurs points de contact sur une même droite D, *on voit qu'ils sont tous normaux aux génératrices d'un hyperboloïde déterminé par* D, Δ' *et* Δ''.

Si l'on remarque en outre que les vitesses des points de D dues à la rotation autour de Δ' forment un paraboloïde, et que les vitesses de ces mêmes points relatives à la rotation autour de Δ'' en constituent un autre [1], on pourra dire que *les plans tangents aux différents points de* D *forment la développable circonscrite à ces deux paraboloïdes.*

Dans le cas où D rencontre l'une des droites Δ', Δ'', Δ' par exemple, les vitesses des points de D résultant de la rotation autour de Δ' seront parallèles entre elles comme étant toutes perpendiculaires au plan $(D\Delta')$, et tous les plans tangents relatifs aux points de D seront parallèles à une même droite; par suite ils envelopperont un cylindre.

D'un autre côté, soit R le point de rencontre du plan $(D\Delta')$ avec Δ'', et M un point quelconque de D. Le plan tangent à la surface trajectoire de M étant perpendiculaire à MR, enveloppera un cylindre perpendiculaire au plan $D\Delta$ et dont la trace sur ce plan sera une parabole ayant R pour foyer et D pour tangente au sommet.

Si D rencontre enfin Δ' et Δ'', tous les plans tangents relatifs aux points de D seront parallèles entre eux.

Il existe en outre une classe remarquable de droites qui ont la propriété d'être tangentes aux surfaces trajectoires de tous leurs points. Pour obtenir ces droites, il suffira d'exprimer que, pour un point quelconque de l'une d'elles D,

$$\text{(D)} \qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = \rho,$$

dont les coordonnées sont $a + \alpha\rho$, $b + \beta\rho$, $c + \gamma\rho$, les vitesses dues à la variation de t d'une part et à la variation de s d'autre part, sont dans un même plan avec la direction α, β, γ, ce qui donne l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha, & a'_t + \alpha'_t\rho, & a'_s + \alpha'_s\rho \\ \beta, & b'_t + \beta'_t\rho, & b'_s + \beta'_s\rho \\ \gamma, & c'_t + \gamma'_t\rho, & c'_s + \gamma'_s\rho \end{vmatrix} = 0,$$

qui doit avoir lieu quel que soit ρ.

[1] Mannheim.

Ordonnons par rapport à ρ et égalons à 0 1° le coefficient de ρ^2, il vient

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha'_t & \alpha'_s \\ \beta & \beta'_t & \beta'_s \\ \gamma & \gamma'_t & \gamma'_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta r_t & \gamma q_s - \beta r_s \\ \beta & \alpha r_t & \alpha r_s \\ \gamma & 0 & -\alpha q_s \end{vmatrix} = \alpha q_s [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2] = \alpha q_s = 0,$$

d'où l'on conclut que les droites cherchées sont parallèles à $y\mathrm{O}z$.

Les coefficients de ρ et le terme indépendant égalés à 0 donnent en outre

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha'_t & a'_s \\ \beta & \beta'_t & b'_s \\ \gamma & \gamma'_t & c'_s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \alpha'_s & a'_t \\ \beta & \beta'_s & b'_t \\ \gamma & \gamma'_s & c'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ainsi que

$$\begin{vmatrix} \alpha & a'_t & a'_s \\ \beta & b'_t & b'_s \\ \gamma & c'_t & c'_s \end{vmatrix} = 0.$$

En tenant compte enfin de l'équation $\alpha = 0$ et en éliminant $\frac{\beta}{\gamma}$ entre les deux dernières relations, on parvient aisément à l'équation

$$a = \frac{h}{q_s} \frac{r_s bc + q_s b^2}{b^2 + c^2},$$

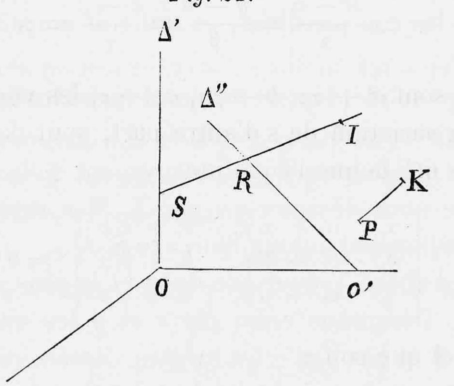
qui n'est autre que celle du conoïde des axes instantanés relatifs à tous les mouvements possibles du solide.

Ce résultat pouvait se prévoir, car un axe instantané glissant contenant les vitesses de tous ses points contient par cela même une tangente à la surface trajectoire de l'un quelconque de ses points.

Revenons enfin à l'équation du plan tangent à la surface trajectoire du point (a, b, c) :

$$(\mathrm{X} - a)(a - h)\,a + (\mathrm{Y} - b)(a - h)\,b + (\mathrm{Z} - c)(ac - bh\mathrm{K}) = 0.$$

Fig. 24.



Cette équation nous montre que le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont des plans tangents passant par un point donné P (X, Y, Z), est une surface du 3e ordre.

Il est facile de voir que cette surface admet deux séries de sections circulaires dont les plans passent par Δ' et Δ''.

Considérons en effet un plan quelconque passant par Δ' et rencontrant Δ'' en R. Abaissons du point fixe P une perpendiculaire PK sur ce plan, et menons par R une droite quelconque RS. Si par PK on mène un plan perpendiculaire à RS qui coupe RS en I, le point I sera un point du lieu. Or, si RS tourne autour de R en rencontrant toujours Δ', le sommet I de l'angle droit RIK décrira une circonférence appartenant au lieu cherché.

On en dirait autant de tous les plans passant par Δ''. Ces propriétés de la surface du 3e ordre qui nous occupe sont du reste faciles à mettre en évidence à l'aide de son équation elle-même.

Cas où les droites immobiles Δ' et Δ'' sont imaginaires.

36. Les calculs et les raisonnements qui précèdent supposent pour la plupart l'existence des deux droites Δ' et Δ'', susceptibles de rester immobiles pour deux déplacements convenablement choisis du solide. Ces deux déplacements correspondent à deux valeurs λ' et λ'' du rapport des infiniment petits $\frac{s}{t}$ qui sont racines d'une certaine équation du second degré. Si ces racines sont imaginaires, les droites Δ' et Δ'' le deviennent aussi et le choix des axes qui nous ont servi devient impossible. Malgré la restriction à laquelle est soumis le choix des axes précédemment employés, nous avons cru devoir nous y arrêter afin de montrer plus aisément les propriétés des droites Δ' et Δ'' quand elles existent.

Il nous faut néanmoins adopter dans nos calculs un système de coordonnées qui convienne à tous les cas possibles, et qui soit constitué avec des éléments toujours réels.

La situation du corps solide dépend de deux variables indépendantes s et t que l'on peut toujours supposer croître à partir de 0.

Si t varie seule, le solide prend un mouvement hélicoïdal autour d'un axe instantané glissant que nous désignerons par T. Si s varie seule, le corps prend un autre mouvement hélicoïdal autour d'un axe S.

Cela posé, prenons d'abord T pour axe des z et la plus courte distance de T et de S pour axe des x. Désignons enfin par r et g les vitesses de rotation et de glissement relatives à T et par ρ et γ les mêmes vitesses relatives à S.

Le déplacement d'un point quelconque du solide, pour une combinaison de ces deux mouvements hélicoïdaux, sera donné par les formules

$$\begin{aligned}
\delta x &= -brt + (\rho \sin \theta c - \rho \cos \theta b)\, s,\\
\delta y &= \quad art + [\gamma \sin \theta \ + \rho \cos \theta\, (a-h)]s,\\
\delta z &= \quad gt + [\gamma \cos \theta \ - \rho \sin \theta\, (a-h)]s,
\end{aligned}$$

θ désignant l'angle des deux axes instantanés glissants.

Posons $\frac{s}{t} = m$; à chaque valeur de m correspond un mouvement particulier du solide, par suite un axe instantané glissant dont les équations seront

$$\frac{-br + (\rho \sin \theta c - \rho \cos \theta b)m}{0} = \frac{ar + [\gamma \sin \theta + \rho \cos \theta\,(a-h)]\,m}{\rho \sin \theta\, m}$$

$$= \frac{g + [\gamma \cos \theta - \rho \sin \theta\,(a-h)]\,m}{r + \rho \cos \theta m}.$$

Si m varie, le lieu de ces axes instantanés sera un conoïde dont l'équation s'obtiendra en éliminant m entre les précédentes. Or la valeur de m tirée de la première est

$$m = \frac{br}{\rho \sin \theta c - \rho \cos \theta b}.$$

Cette valeur est une fonction du rapport $\frac{b}{c}$ et, portée dans la seconde, elle conduit à une équation de la forme

$$\mathrm{A}\frac{b^2}{c^2} + \mathrm{B}\frac{b}{c} + \mathrm{C} = 0,$$

A, B, C étant linéaires et entiers par rapport à l'abscisse a. D'un autre côté, à chaque valeur de a correspondent deux valeurs de $\frac{b}{c}$, par suite deux génératrices du conoïde. Ces deux génératrices seront rectangulaires si l'on a

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = -1,$$

condition qui est satisfaite pour une certaine valeur de a et pour une seule. On peut donc dire que :

Parmi tous les déplacements que l'on peut faire subir à un corps solide assujetti à quatre conditions, il en existe deux pour lesquels les axes instantanés glissants sont rectangulaires et concourants.

Prenons actuellement ces deux axes instantanés l'un pour axe des z, l'autre pour axe des y. Le déplacement d'un point quelconque du solide (a, b, c) sera donné par les formules

$$\begin{aligned}
\delta x &= -brt + \rho c . s,\\
\delta y &= art + \gamma s,\\
\delta z &= gt - \rho a . s,
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant les droites immobiles Δ' et Δ''. On aura

$$\begin{aligned} -br + \rho c\, m &= 0, \\ ar + \gamma\, m &= 0, \\ g - \rho a\, m &= 0. \end{aligned}$$

Pour que les deux dernières équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$-\frac{\gamma m}{r} = \frac{g}{\rho m},$$

d'où $m^2 = -\frac{gr}{\gamma\rho}$, ce qui donne deux valeurs de m égales et de signes contraires, par suite deux abscisses a égales et opposées.

Les deux droites Δ' et Δ'' sont donc situées de part et d'autre du plan SOT et à égale distance de ce dernier. Elles sont du reste également inclinées sur OT et en sens contraire, comme l'indiquent les valeurs de $\frac{b}{c}$ tirées de la première équation.

Seulement pour que ces droites soient réelles, il faut que l'on ait la condition

$$\frac{gr}{\gamma\rho} < 0,$$

ou encore que les paramètres hélicoïdaux $\frac{g}{r}$ et $\frac{\gamma}{\rho}$ soient de signes contraires.

Quant au conoïde des axes instantanés, son équation relative aux nouveaux axes s'obtiendra en éliminant m entre les relations

$$\frac{-br + \rho c m}{0} = \frac{ar + \gamma m}{\rho m} = \frac{g - a\rho m}{r},$$

ce qui conduit à l'équation

$$a\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left[\frac{\gamma}{\rho} - \frac{g}{r}\right]\frac{b}{c} + a = 0,$$

qui nous montre que dans chaque plan perpendiculaire à l'axe des x, le conoïde lieu des axes instantanés a deux génératrices faisant avec l'axe des z des angles complémentaires. On voit aussi que l'angle des deux axes n'est droit que pour $a = 0$, et que les limites entre lesquelles les génératrices du conoïde sont réelles sont données par l'inégalité

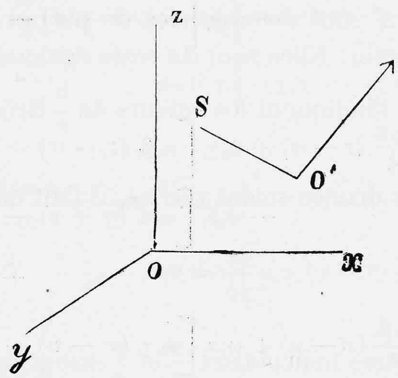
$$\left[\frac{\gamma}{\rho} - \frac{g}{r}\right]^2 - 4a^2 > 0.$$

Pour chacune de ces deux abscisses extrêmes, les deux axes instantanés se confondent en un seul.

Étude des éléments du second ordre des surfaces trajectoires.

37. Nous avons vu que tous les déplacements possibles d'un solide assujetti à quatre conditions pouvaient être réalisés à l'aide de deux mouvements hélicoïdaux autour de deux axes rectangulaires et concourants. Cela étant vrai pour toutes les valeurs des variables indépendantes s et t, on peut supposer que les coordonnées u, v, w du point de concours O′ de ces axes sont trois fonctions déterminées de s et de t. On peut aussi considérer les cosinus de l'axe O′T comme des fonctions de s et de t que nous désignerons par α_t, β_t, γ_t. Les vitesses de rotation et de glis-

Fig. 25.



sement relatives à l'axe O′T sont aussi des fonctions de s et de t que nous représenterons par ω_t et g_t.

Appelant α_s, β_s, γ_s, ω_s et g_s les quantités analogues relatives à l'axe O′S et qui sont des fonctions de s et de t, on aura pour la vitesse d'un point quelconque M (x, y, z) du solide relative au mouvement hélicoïdal autour de O′T les expressions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_t\beta_t(z-w) - \omega_t\gamma_t(y-v) + \alpha_t g_t, \\ \frac{dy}{dt} &= \omega_t\gamma_t(x-u) - \omega_t\alpha_t(z-w) + \beta_t g_t, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega_t\alpha_t(y-v) - \omega_t\beta_t(x-u) + \gamma_t g_t. \end{aligned}\right.$$

Les composantes relatives à la rotation autour de O′S seront de même

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \omega_s\beta_s(z-w) - \omega_s\gamma_s(y-v) + \alpha_s g_s, \\ \frac{dy}{ds} &= \omega_s\gamma_s(x-u) - \omega_s\alpha_s(z-w) + \beta_s g_s, \\ \frac{dz}{ds} &= \omega_s\alpha_s(y-v) - \omega_s\beta_s(x-u) + \gamma_s g_s, \end{aligned}\right.$$

Ces relations, que nous pouvons considérer comme les équations différentielles des surfaces trajectoires, vont nous permettre de développer les coordonnées x, y, z en séries ordonnées suivant les puissances de s et de t. Elles donnent, par la dérivation,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\omega_t\beta_t}{dt}(z-w)-\frac{d\omega_t\gamma_t}{dt}(y-v)+\omega_t\beta_t\left[\frac{dx}{dt}-\frac{dw}{dt}\right]-\omega_t\gamma_t\left[\frac{dy}{dt}-\frac{dv}{dt}\right]+g_t\frac{d\alpha_t}{dt}+\alpha_t\frac{dg_t}{dt},$$

et, remplaçant $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs tirées de (1),

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\omega_t\beta_t}{dt}(z-w)-\frac{d\omega_t\gamma_t}{dt}(y-v)&+\omega_t\beta_t\left[\omega_t\alpha_t(y-v)-\omega_t\beta_t(x-u)+\gamma_t g_t-\frac{dw}{dt}\right]\\&-\omega_t\gamma_t\left[\omega_t\gamma_t(x-u)-\omega_t\alpha_t(z-w)+\beta_t g_t-\frac{dv}{dt}\right]\\&+g_t\frac{d\alpha_t}{dt}+\alpha_t\frac{dg_t}{dt},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d\omega_t\gamma_t}{dt}(x-u)-\frac{d\omega_t\alpha_t}{dt}(z-w)&+\omega_t\gamma_t\left[\omega_t\beta_t(z-w)-\omega_t\gamma_t(y-v)+\alpha_t g_t-\frac{du}{dt}\right]\\&-\omega_t\alpha_t\left[\omega_t\alpha_t(y-v)-\omega_t\beta_t(x-u)+\gamma_t g_t-\frac{dw}{dt}\right]\\&+g_t\frac{d\beta_t}{dt}+\beta_t\frac{dg_t}{dt},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d\omega_t\alpha_t}{dt}(y-v)-\frac{d\omega_t\beta_t}{dt}(x-u)&+\omega_t\alpha_t\left[\omega_t\gamma_t(x-u)-\omega_t\alpha_t(z-w)+\beta_t g_t-\frac{dv}{dt}\right]\\&-\omega_t\beta_t\left[\omega_t\beta_t(z-w)-\omega_t\gamma_t(y-v)+\alpha_t g_t-\frac{du}{dt}\right]\\&+g_t\frac{d\gamma_t}{dt}+\gamma_t\frac{dg_t}{dt}.\end{aligned}$$

Mettant ensuite les indices s à la place des indices t, nous aurons les valeurs de $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$.

Donnons maintenant aux variables s et t la valeur O en tenant compte de ce que pour $s=0$ et $t=0$ l'angle TO'S coïncide avec zOy. On aura

$$\alpha_t=0,\quad \beta_t=0,\quad \gamma_t=1,\quad u=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \frac{d\gamma_t}{dt}=0,$$

ce qui donne

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\omega_t\frac{d\beta_t}{dt}z-\frac{d\omega_t}{dt}y-\omega_t^2x+\omega_t\frac{dv}{dt}+g_t\frac{d\alpha_t}{dt},\\\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d\omega_t}{dt}x-\omega_t\frac{d\alpha_t}{dt}z-\omega_t^2y-\omega_t\frac{du}{dt}+g_t\frac{d\beta_t}{dt},\\\frac{d^2z}{dt^2}&=\omega_t\frac{d\alpha_t}{dt}y-\omega_t\frac{d\beta_t}{dt}x+y_t\frac{dg_t}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Pour obtenir $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$, il faudra faire dans les formules analogues aux précédentes

$$\alpha_s = 0, \quad \beta_s = 1, \quad \gamma_s = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{d\beta_s}{ds} = 0,$$

et l'on aura

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d\omega_s}{ds} z - \omega_s \frac{d\gamma_s}{ds} y - \omega_s^2 x = \omega_s \frac{dw}{ds} + g_s \frac{d\alpha_s}{ds}, \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \omega_s \frac{d\gamma_s}{ds} x - \omega_s \frac{d\alpha_s}{ds} z + \frac{dg_s}{ds}, \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= \omega_s \frac{d\alpha_s}{ds} y - \frac{d\omega_s}{ds} x - \omega_s^2 z + \omega_s \frac{du}{ds} + g_s \frac{d\gamma_s}{ds}. \end{aligned} \right.$$

Il nous reste à calculer $\frac{d^2x}{dt\,ds}$, $\frac{d^2y}{dt\,ds}$, $\frac{d^2z}{dt\,ds}$; or on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt\,ds} = \frac{d\,\omega_t\beta_t}{ds}(z-w) - \frac{d\,\omega_t\gamma_t}{ds}(y-v) &+ \omega_t\beta_t\left[\omega_s\alpha_s(y-v) - \omega_s\beta_s(x-u) + \gamma_s g_s - \frac{dw}{ds}\right] \\ &- \omega_t\gamma_t\left[\omega_s\gamma_s(x-u) - \omega_s\alpha_s(z-w) + \beta_s g_s - \frac{dv}{ds}\right] \\ &+ \alpha_t\frac{dg_t}{ds} + g_t\frac{d\alpha_t}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt\,ds} = \frac{d\,\omega_t\gamma_t}{ds}(x-u) - \frac{d(\omega_t\alpha_t)}{ds}(z-w) &+ \omega_t\gamma_t\left[\omega_s\beta_s(z-w) - \omega_s\gamma_s(y-v) + \alpha_s g_s - \frac{du}{ds}\right] \\ &- \omega_t\alpha_t\left[\omega_s\alpha_s(y-v) - \omega_s\beta_s(x-u) + \gamma_s g_s - \frac{dw}{ds}\right] \\ &+ \beta_t\frac{dg_t}{ds} + g_t\frac{d\alpha_t}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt\,ds} = \frac{d\,\omega_t\alpha_t}{ds}(y-v) - \frac{d\,\omega_t\beta_t}{ds}(x-u) &+ \omega_t\alpha_t\left[\omega_s\gamma_s(x-u) - \omega_s\alpha_s(z-w) + \beta_s g_s - \frac{dv}{ds}\right] \\ &- \omega_t\beta_t\left[\omega_s\beta_s(z-w) - \omega_s\gamma_s(y-v) + \alpha_s g_s - \frac{du}{ds}\right] \\ &+ \gamma_t\frac{dg_t}{ds} + g_t\frac{d\gamma_t}{ds}. \end{aligned}$$

Faisant enfin $t = 0$ et $s = 0$, il vient

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt\,ds} &= \omega_t \frac{d\beta_t}{ds} z - \frac{d\omega_t}{ds} y - \omega_t g_s + \omega_t \frac{dv}{ds} + g_t \frac{d\alpha_t}{ds}, \\ \frac{d^2y}{dt\,ds} &= \frac{d\omega_t}{ds} x - \omega_t \frac{d\alpha_t}{ds} z + \omega_t\omega_s z - \omega_t \frac{du}{ds} + g_t \frac{d\beta_t}{ds}, \\ \frac{d^2z}{dt\,ds} &= \omega_t \frac{d\alpha_t}{ds} y - \omega_t \frac{d\beta_t}{ds} x + \frac{dg_t}{ds}. \end{aligned} \right.$$

On aurait pu procéder dans un ordre inverse et on aurait trouvé

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds\,dt} &= \frac{d\omega_s}{dt} z - \omega_s \frac{d\gamma_s}{dt} y + \omega_s g_t - \omega_s \frac{dw}{dt} + g_s \frac{d\alpha_s}{dt}, \\ \frac{d^2y}{ds\,dt} &= \omega_s \frac{d\gamma_s}{dt} x - \omega_s \frac{d\alpha_s}{dt} z + \frac{dg_s}{dt}, \\ \frac{d^2z}{ds\,dt} &= \omega_s \frac{d\alpha_s}{dt} y - \frac{d\omega_s}{dt} x + \omega_s\omega_t y + \omega_s \frac{du}{dt} + g_s \frac{d\gamma_s}{dt}. \end{aligned}$$

Or ces dérivées doivent être identiques pour tous les points de l'espace, donc entre les valeurs initiales des différentes fonctions qui servent de coefficients à x, y, z et de termes constants, on a les relations

$$
(\mathrm{R})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\omega_s}{dt} = \omega_t \frac{d\beta_t}{ds}, \qquad \frac{d\omega_t}{ds} = \omega_s \frac{d\gamma_s}{dt}, \qquad \omega_t \frac{d\alpha_t}{ds} - \omega_s \frac{d\alpha_s}{dt} = \omega_t\omega_s,\\
&\omega_s g_t - \omega_s \frac{dw}{dt} + g_s \frac{d\alpha_s}{dt} = -\omega_t g_s + g_t \frac{d\alpha_t}{ds} + \omega_t \frac{dv}{ds},\\
&\qquad\qquad \frac{dg_t}{ds} = \omega_s \frac{du}{dt} + g_s \frac{d\gamma_s}{dt},\\
&\qquad\qquad \frac{dg_s}{dt} = g_t \frac{d\beta_t}{ds} - \omega_t \frac{du}{ds}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, pour abréger, on désigne par A''_{tt}, B''_{tt}, C''_{tt}, A''_{st}, etc..., les valeurs des dérivées $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{ds\,dt}$, etc..., les coordonnées d'un point quelconque du solide qui étaient primitivement a, b, c deviendront, après le déplacement,

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
x &= a + A'_t t + A'_s s + \frac{1}{1.2}[A''_{tt}t^2 + 2A''_{st}st + A''_{ss}s^2] + \ldots,\\
y &= b + B'_t t + B'_s s + \frac{1}{1.2}[B''_{tt}t^2 + 2B''_{st}st + B''_{ss}s^2] + \ldots,\\
z &= c + C'_t t + C'_s s + \frac{1}{1.2}[C''_{tt}t^2 + 2C''_{st}st + C''_{ss}s^2] + \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Considérons actuellement une droite dont les cosinus étaient α, β, γ avant le mouvement du corps, et cherchons sa nouvelle direction. Pour cela, à partir du point O′, menons une parallèle à la droite donnée et portons sur cette droite une longueur égale à l'unité. Les coordonnées de son extrémité seront α, β, γ. Après le déplacement, les coordonnées du point (α, β, γ) seront données par les formules (7). Il est clair que si l'on retranche des résultats trouvés les coordonnées nouvelles de l'origine O′, on aura les nouveaux cosinus directeurs de la droite.

Or les nouvelles coordonnées de l'origine mobile O′ s'obtiennent en faisant dans les formules (7) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, ce qui les réduit à leurs termes constants, donc les nouveaux cosinus auront pour expressions

$$
(8)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha + \alpha'_t t + \alpha'_s s + \frac{1}{1.2}[\alpha''_{tt}t^2 + 2\alpha''_{st}st + \alpha''_{ss}s^2] + \ldots,\\
\beta_1 &= \beta + \beta'_t t + \beta'_s s + \frac{1}{1.2}[\beta''_{tt}t^2 + 2\beta''_{st}st + \beta''_{ss}s^2] + \ldots,\\
\gamma_1 &= \gamma + \gamma'_t t + \gamma'_s s + \frac{1}{1.2}[\gamma''_{tt}t^2 + 2\gamma''_{st}st + \gamma''_{ss}s^2] + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\alpha'_t &= -\beta\omega_t, & \alpha'_s &= \gamma\omega_s,\\
\beta'_t &= \alpha\omega_t, & \beta'_s &= 0,\\
\gamma'_t &= 0, & \gamma'_s &= \alpha\omega_s,
\end{aligned}
$$

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha''_{tt} &= \omega_t \frac{d\beta_t}{dt}\gamma - \frac{d\omega_t}{dt}\beta - \omega_t^2\alpha, &\quad \alpha''_{ss} &= \frac{d\omega_s}{ds}\gamma - \omega_s\frac{d\gamma_s}{ds}\beta - \omega_s^2\alpha,\\
\beta''_{tt} &= \frac{d\omega_t}{dt}\alpha - \omega_t\frac{d\alpha_t}{dt}\gamma - \omega_t^2\beta, &\quad \beta''_{ss} &= \omega_s\frac{d\gamma_s}{ds}\alpha - \omega_s\frac{d\alpha_s}{ds}\gamma,\\
\gamma''_{tt} &= \omega_t\frac{d\alpha_t}{dt}\beta - \omega_t\frac{d\beta_t}{dt}\alpha, &\quad \gamma''_{ss} &= \omega_s\frac{d\alpha_s}{ds}\beta - \frac{d\omega_s}{ds}\alpha - \omega_s^2\gamma,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha''_{st} &= \omega_t\frac{d\beta_t}{ds}\gamma - \frac{d\omega_t}{ds}\beta,\\
\beta''_{st} &= \frac{d\omega_t}{ds}\alpha + \left[\omega_t\omega_s - \omega_t\frac{d\alpha_t}{ds}\right]\gamma,\\
\gamma''_{st} &= \omega_t\frac{d\alpha_t}{ds}\beta - \omega_t\frac{d\beta_t}{ds}\alpha,
\end{aligned}
$$

d'où l'on voit que les nouveaux cosinus α_1, β_1, γ_1 sont des fonctions linéaires et homogènes des anciens α, β, γ.

Considérons dans chacun des coefficients A'_t, A''_{tt}, A''_{st}, A''_{ss}, B'_t, etc..., les parties homogènes en a, b, c que nous désignerons par $\mathcal{A}'_t$, $\mathcal{A}''_{tt}$, $\mathcal{A}''_{st}$, etc... Pour tout déplacement du solide, la distance d'un point mobile M (x, y, z) à l'origine mobile O′ doit rester constante. Or, cette distance est donnée par la formule

$$\delta^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2,$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
\delta^2 = &\left[a + \mathcal{A}'_t t + \mathcal{A}'_s s + \frac{1}{2}(\mathcal{A}''_{tt}t^2 + 2\mathcal{A}''_{st}st + \mathcal{A}''_{ss}s^2)\dots\right]^2\\
+ &\left[b + \mathcal{B}'_t t + \mathcal{B}'_s s + \frac{1}{2}(\mathcal{B}''_{tt}t^2 + 2\mathcal{B}''_{st}st + \mathcal{B}''_{ss}s^2)\dots\right]^2\\
+ &\left[c + \mathcal{C}'_t t + \mathcal{C}'_s s + \frac{1}{2}(\mathcal{C}''_{tt}t^2 + 2\mathcal{C}''_{st}st + \mathcal{C}''_{ss}s^2)\dots\right]^2,
\end{aligned}
$$

et comme elle doit être indépendante de t et de s et constamment égale à $a^2 + b^2 + c^2$, on aura les identités

$$a\mathcal{A}'_t + b\mathcal{B}'_t + c\mathcal{C}'_t = 0, \quad a\mathcal{A}'_s + b\mathcal{B}'_s + c\mathcal{C}'_s = 0,$$

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a\mathcal{A}''_{tt} + b\mathcal{B}''_{tt} + c\mathcal{C}''_{tt} + \mathcal{A}'^2_t\ \mathcal{B}'^2_t + \mathcal{C}'^2_t = 0,\\
&a\mathcal{A}''_{ss} + b\mathcal{B}''_{ss} + c\mathcal{C}''_{ss} + \mathcal{A}'^2_s\ \mathcal{B}'^2_s + \mathcal{C}'^2_s = 0,\\
&a\mathcal{A}''_{st} + b\mathcal{B}''_{st} + c\mathcal{C}''_{st} + \mathcal{A}'_s\mathcal{A}'_t + \mathcal{B}'_s\mathcal{B}'_t + \mathcal{C}'_s\mathcal{C}'_t = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si dans ces mêmes identités on remplace a, b, c par les cosinus d'une droite α, β, γ, on parvient aux relations

$$\alpha\alpha'_t + \beta\beta'_t + \gamma\gamma'_t = 0, \quad \alpha\alpha'_s + \beta\beta'_s + \gamma\gamma'_s = 0,$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha\alpha''_{tt} + \beta\beta''_{tt} + \gamma\gamma''_{tt} + \alpha'^2_t + \beta'^2_t + \gamma'^2_t = 0,\\
&\alpha\alpha''_{ss} + \beta\beta''_{ss} + \gamma\gamma''_{ss} + \gamma'^2_s + \beta'^2_s + \gamma'^2_s = 0,\\
&\alpha\alpha''_{st} + \beta\beta''_{st} + \gamma\gamma''_{st} + \gamma'_s\gamma'_t + \beta'_s\beta'_t + \gamma'_s\gamma'_t = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

qui s'obtiendraient du reste en différentiant l'égalité

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

soit par rapport à t, soit par rapport à s. Toutes ces identités, ainsi que quelques autres que l'on pourrait obtenir en exprimant que l'angle de deux droites reste constant pendant le déplacement ou encore en exprimant que la distance d'un point à une droite reste également constante, pourront nous servir à simplifier certains résultats ultérieurs.

Enfin, pour obtenir plus de symétrie dans les notations, nous désignerons continuellement dans ce qui va suivre par A'_s, B'_s, C'_s, A'_t, B'_t, C'_t les coefficients de s et de t dans les développements de x, y, z, en rappelant toutefois leurs valeurs

$$\begin{aligned} A'_s &= \omega_s c, & A'_t &= -\,\omega_t b, \\ B'_s &= g_s, & B'_t &= \omega_t a, \\ C'_s &= \omega_s a, & C'_t &= g_t. \end{aligned}$$

Axes de courbure des trajectoires possibles d'un point quelconque du solide.

38. A chaque relation $s = \varphi(t)$ que l'on peut établir entre les variables indépendantes s et t correspond un mouvement déterminé du solide. Si l'on se borne à l'étude des éléments du second ordre des trajectoires ou des surfaces trajectoires, on peut remplacer la relation précédente par une autre de la forme $s = mt + nt^2$ ... obtenue en développant la fonction $\varphi(t)$ en série.

Pour une valeur déterminée de m, le solide prendra un mouvement dans lequel la trajectoire de chaque point aura une tangente déterminée. Ce mouvement se subdivise pour ainsi dire en une infinité d'autres qui dépendent de la valeur de n que l'on associe à m. De cette valeur de n dépendront les éléments du second ordre tels que les plans osculateurs, les axes de courbure, etc..., des différentes trajectoires qui ont déjà une même tangente.

La substitution $s = mt + nt^2$ dans les formules générales (7) donne

$$x = a + (A'_s m + A'_t)\,t + \frac{1}{2}(A''_{ss} m^2 + 2A''_{st} m + A''_{tt} + 2A'_s n)\,t^2,$$

$$y = b + (B'_s m + B'_t)\,t + \frac{1}{2}(B''_{ss} m^2 + 2B''_{st} m + B''_{tt} + 2B'_s n)\,t^2,$$

$$z = c + (C'_s m + C'_t)\,t + \frac{1}{2}(C''_{ss} m^2 + 2C''_{st} m + C''_{tt} + 2C'_s n)\,t^2,$$

et les équations de l'axe de courbure deviennent

$$(1) \quad (X - a)(A'_s m + A'_t) + (Y - b)(B'_s m + B'_t) + (Z - c)(C'_s m + C'_t) = 0,$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} &(X - a)[A''_{ss} m^2 + 2A''_{st} m + B''_{tt} + 2A'_s n] \\ &+ (Y - b)[B''_{ss} m^2 + 2B''_{st} m + B''_{tt} + 2B'_s n] \\ &+ (Z - c)[C''_{ss} m^2 + 2C''_{st} m + C''_{tt} + 2C'_s n] = A'_s m + A'_t)^2 + B'_s m + B'_t)^2 + (C'_s m + C'_t]^2. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, en vertu des identités (10), s'abaissent au premier degré par rapport aux coordonnées a, b, c du point décrivant.

Donnons à m une valeur constante et faisons varier n. Le plan (1) ne change pas, et le plan (2) tourne autour d'une droite qui perce le plan (1) en un point C. Ce point, étant commun à tous les axes de courbure des courbes qui ont la même tangente sur la surface trajectoire, n'est autre que le centre de courbure de la section normale de cette surface qui contient la vitesse du point décrivant relative à la valeur constante du coefficient m.

Les coordonnées du point C seront données par les équations

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(X-a)A'_t+(Y-b)B'_t+(Z-c)C'_t=0,\\&(X-a)A'_s+(Y-b)B'_s+(Z-c)C'_s=0,\\&(X-a)[A''_{ss}m^2+2A''_{st}m+A''_{tt}]+(Y-b)[B''_{ss}m^2+2B''_{st}m+B''_{tt}]+(Z-c)[C''_{ss}m^2+2C''_{st}m+C''_{tt}]\\&\qquad=Em^2+2Gm+F,\end{aligned}\right.$$

en posant

$$A_s'^2+B_s'^2+C_s'^2=E,\quad A'_sA'_t+B'_sB'_t+C'_sC'_t=G,\quad A_t'^2+B_t'^2+C_t'^2=F.$$

Le déterminant de ces équations

$$\begin{vmatrix}A'_t & B'_t & C'_t\\ A'_s & B'_s & C'_s\\ A''_{ss}m^2+2A''_{st}m+A''_{tt}, & B''_{ss}m^2+2B''_{st}m+B''_{tt}, & C''_{ss}m^2+2C''_{st}m+C''_{tt}\end{vmatrix}$$

peut s'écrire $Sm^2+2Um+T$, en posant

$$\begin{vmatrix}A'_t & B'_t & C'_t\\ A'_s & B'_s & C'_s\\ A''_{ss} & B''_{ss} & C''_{ss}\end{vmatrix}=S,\quad \begin{vmatrix}A'_t & B'_t & C'_t\\ A'_s & B'_s & C'_s\\ A''_{st} & B''_{st} & C''_{st}\end{vmatrix}=U,\quad \begin{vmatrix}A'_t & B'_t & C'_t\\ A'_s & B'_s & C'_s\\ A''_{tt} & B''_{tt} & C''_{tt}\end{vmatrix}=T,$$

et les coordonnées du centre cherché auront pour valeurs

$$(4)\left\{\begin{aligned}X-a&=\frac{(B'_tC'_s-B'_sC'_t)[Em^2+2Gm+F]}{Sm^2+2Um+T},\\Y-b&=\frac{(C'_tA'_s-C'_sA'_t)[Em^2+2Gm+F]}{Sm^2+2Um+T},\\Z-c&=\frac{(A'_tB'_s-A'_sB'_t)[Em^2+2Gm+F]}{Sm^2+2Um+T},\end{aligned}\right.$$

ce qui donne pour le rayon de cette section normale

$$\rho=\frac{Em^2+2Gm+F}{Sm^2+2Um+T}\sqrt{(B'_tC'_s-B'_sC'_t)^2+(C'_tA'_s-A'_tC'_s)^2+(A'_tB'_s-B'_tA'_s)^2}.$$

Nous reviendrons plus tard sur ces formules. L'axe de courbure représenté par les équations (1) et (2) sera parallèle au plan tangent à la surface trajectoire du point M (a, b, c) si l'on a

$$\begin{vmatrix} A'_s m + A'_t, & B'_s m + B'_t, & C'_s m + C'_t \\ A''_{ss} m^2 + 2A''_{st} m + A''_{tt} + 2A'_s n, & B''_{ss} m^2 + 2B''_{st} m + B''_{tt} + 2B'_s n, & C''_{ss} m^2 + 2C''_{st} m + C''_{tt} + 2C'_s n \\ B'_t C'_s - B'_s C'_t, & C'_t A'_s - C'_s A'_t, & A'_t B'_s - A'_s B'_t \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on conclut que :

Dans tous les déplacements possibles à un solide assujetti à quatre conditions, le lieu des points qui décrivent des éléments géodésiques de leurs surfaces trajectoires respectives est une surface du 4ᵉ ordre contenant les deux droites Δ' *et* Δ''. *Ces dernières droites sont en effet représentées par le système des équations*

$$\frac{A'_s}{A'_t} = \frac{B'_s}{B'_t} = \frac{C'_s}{C'_t}.$$

On voit aussi que *sur toute droite rencontrant* Δ' *et* Δ'' *(en supposant ces dernières réelles), il existe deux points décrivant des éléments géodésiques.*

Si, dans le même mouvement caractérisé par la substitution $S = mt + nt^2$, nous exprimons que le plan tangent à la surface trajectoire du point M (a, b, c) est perpendiculaire à l'axe de courbure, nous arrivons aux équations

$$(A'_s m + A'_t)(B'_t C'_s - C'_t B'_s) + (B'_s m + B'_t)(C'_t A'_s - C'_s A'_t) + (C'_s m + C'_t)(A'_t B'_s - A'_s B'_t) = 0.$$

$$\begin{aligned} &(A''_{ss} m^2 + 2A''_{st} m + A''_{tt} + 2A'_s n)(B'_t C'_s - C'_t B'_s) \\ &+ (B''_{ss} m^2 + 2B''_{st} m + B''_{tt} + 2B'_s n)(C'_t A'_s - A'_t C'_s) \\ &+ (C''_{ss} m^2 + 2C''_{st} m + C''_{tt} + 2C'_s n)(A'_t B'_s - B'_t A'_s) = 0, \end{aligned}$$

dont la première est identiquement satisfaite ; quant à la seconde, elle ne contient plus le coefficient n et elle peut s'écrire

$$\text{(5)} \qquad S m^2 + 2U m + T = 0,$$

d'où l'on conclut que :

Dans tous les déplacements possibles d'un solide assujetti à quatre conditions, le lieu des points dont les trajectoires sont tangentes à des directions asymptotiques de leurs surfaces trajectoires respectives est une surface du 3ᵉ ordre contenant les droites Δ' *et* Δ'' *quand elles existent* (¹).

Sur une droite rencontrant Δ' *et* Δ'', *il n'y a qu'un seul point jouissant de cette propriété.*

Inversement pour un point donné du solide (a, b, c), il existe deux déplacements caractérisés par les substitutions $s = m't$ et $s = m''t$ qui font décrire à ce point des trajectoires tangentes aux directions asymptotiques de sa surface trajectoire. Il suffit en effet de prendre pour m' et m'' les racines de l'équation (5). Ces

(¹) Mannheim.

racines seront égales si l'on a

$$(6)\qquad U^2 - ST = 0,$$

d'où l'on conclut que :

Le lieu des points dont les surfaces trajectoires offrent des points paraboliques est une surface du 6e ordre contenant Δ' et Δ'' (1).

Considérons la droite représentée par le système

$$(7)\qquad \begin{cases} A'_t\lambda + B'_t\mu + C'_t\nu = 0, \\ A'_s\lambda + B'_s\mu + C'_s\nu = 0, \end{cases}$$

et qui est le lieu des points dont les normales à leurs surfaces trajectoires ont une direction donnée (λ, μ, ν), cette droite rencontre Δ' et Δ'' et l'on a

$$(8)\qquad \frac{\lambda}{B'_t C'_s - B'_s C'_t} = \frac{\mu}{C'_t A'_s - C'_s A'_t} = \frac{\nu}{A'_t B'_s - B'_t A'_s}.$$

Remplaçant dans l'équation (6), c'est-à-dire dans S, T, U, les déterminants mineurs $B'_t C'_s - B'_s C'_t$, ... par des quantités proportionnelles λ, μ, ν, il vient

$$[A''_{st}\lambda + B''_{st}\mu + C''_{st}\nu]^2 - [A''_{ss}\lambda + B''_{ss}\mu + C''_{ss}\nu]\,[A''_{tt}\lambda + B''_{tt}\mu + C''_{tt}\nu] = 0,$$

équation d'une surface du 2e ordre dont l'intersection avec la droite donne les points paraboliques.

On peut dire aussi que la surface (6) sépare l'espace en deux régions dont l'une contient les points dont les surfaces trajectoires ont des indicatrices elliptiques et l'autre les points à indicatrices hyperboliques.

Si un point de l'espace M (a, b, c) est tel que ses coordonnées annulent simultanément les fonctions S, U et T, un déplacement quelconque imprimé au corps fera décrire à ce point une direction asymptotique, car l'équation (5) sera satisfaite quelle que soit m.

Or, à l'aide des équations (7), on peut prendre pour coordonnées du point inconnu $\frac{\mu}{\lambda}$, $\frac{\nu}{\lambda}$, et conserver a. D'un autre côté, les équations

$$S = 0, \quad U = 0, \quad T = 0,$$

deviennent, en se servant des équations (8),

$$(9)\qquad \begin{cases} A''_{ss}\lambda + B''_{ss}\mu + C''_{ss}\nu = 0, \\ A''_{st}\lambda + B''_{st}\mu + C''_{st}\nu = 0, \\ A''_{tt}\lambda + B''_{tt}\mu + C''_{tt}\nu = 0, \end{cases}$$

relations linéaires en a, b, c et λ, μ, ν. Tirant b et c du système (7) pour les porter dans le système (9), on obtient 3 équations linéaires en a et du second degré

(1) Mannheim.

en λ, μ, ν. L'élimination de a entre ces dernières conduit à deux cônes du 4e ordre en λ, μ, ν, pouvant avoir 16 génératrices communes. Enfin à chaque direction de ces génératrices λ, μ, ν correspond, d'après l'une quelconque des équations (9), un seul point donné par son abscisse a. On peut donc dire que :

Dans un solide assujetti à quatre conditions, il existe 16 points décrivant des éléments plans.

Sur une droite rencontrant Δ' et Δ'', il ne peut exister qu'un seul de ces points.

Enfin, d'après les équations (9), *on peut remarquer que ces 16 points sont sur une surface du 3e ordre*

$$\begin{vmatrix} A''_{ss} & B''_{ss} & C''_{ss} \\ A''_{st} & B''_{st} & C''_{st} \\ A''_{tt} & B''_{tt} & C''_{tt} \end{vmatrix} = 0.$$

Soient encore m' et m'' les deux racines de l'équation (5) correspondant aux mouvements particuliers qui font marcher le point M (a, b, c) suivant des directions asymptotiques. Les composantes des vitesses du point M seront pour le mouvement (m') proportionnelles à

$$A'_s m' + A'_t, \quad B'_s m' + B'_t, \quad C'_s m' + C'_t,$$

et pour le mouvement (m'') à

$$A''_s m'' + A'_t, \quad B'_s m'' + B'_t, \quad C'_s m'' + C'_t.$$

Ces deux vitesses seront rectangulaires, si l'on a

$$(A'_s m' + A'_t)(A'_s m'' + A'_t) + (B'_s m' + B'_t)(B'_s m'' + B'_t) + (C'_s m' + C'_t)(C'_s m'' + C'_t) = 0,$$

ou bien

$$E m' m'' + G(m' + m'') + F = 0;$$

et comme on a d'ailleurs

$$m' m'' = \frac{T}{S}, \quad m' + m'' = -\frac{2U}{S},$$

il vient

$$ET - 2GU + SF = 0,$$

équation du 5e ordre en a, b, c, d'où l'on conclut que :

Le lieu des points du solide dont les surfaces trajectoires ont des courbures égales et opposées est une surface du 5e ordre [1].

Cette surface passe par Δ' et Δ'', et toute droite qui rencontre à la fois Δ' et Δ'' ne présente plus que trois points jouissant de cette propriété.

---

[1] Mannheim.

Courbure des surfaces trajectoires.

39. L'équation du plan tangent à la surface trajectoire du point M (a, b, c) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} X-a, & A'_t, & A'_s \\ Y-b, & B'_t, & B'_s \\ Z-c, & C'_t, & C'_s \end{vmatrix} = 0.$$

La distance ε à ce plan du point déplacé M′ est donnée par la formule

$$D\varepsilon = \begin{vmatrix} A'_s s + A'_t t + \frac{1}{2}(A''_{ss}s^2 + 2A''_{st}st + A''_{tt}t^2), & A'_t, & A'_s \\ B'_s s + B'_t t + \frac{1}{2}(B''_{ss}s^2 + 2B''_{st}st + B''_{tt}t^2), & B'_t, & B'_s \\ C'_s s + C'_t t + \frac{1}{2}(C''_{ss}s^2 + 2C''_{st}st + C''_{tt}t^2), & C'_t, & C'_s \end{vmatrix},$$

qui se réduit visiblement à

$$(2) \qquad 2D\varepsilon = Ss^2 + 2U\,st + Tt^2.$$

Cette équation représente, à l'aide des variables s et t, l'indicatrice de la surface trajectoire. D'un autre côté, la distance $MM' = ds$ a pour expression

$$ds^2 = (A'_s s + A'_t t)^2 + (B'_s s + B'_t t)^2 + (C'_s s + C'_t t)^2,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad 2R\varepsilon = ds^2 = Es^2 + 2G\,st + Ft^2.$$

Si l'on désigne par R le rayon de courbure de la section normale dirigée suivant MM′, on aura ainsi l'équation d'un cercle de rayon ds tracé sur la surface. Exprimons que ce cercle est doublement tangent à la conique indicatrice ou que les sécantes communes se confondent. Multiplions pour cela (2) par R et (3) par D, puis retranchons, il vient

$$(SR - ED)\,s^2 + 2\,(UR - DG)\,st + (TR - FD)\,t^2 = 0.$$

Les sécantes communes se confondront si l'on a la relation

$$(UR - DG)^2 - (SR - ED)\,(TR - FD) = 0,$$

ou bien

$$(U^2 - ST)\,R^2 + (EDT + SFD - 2UGD)\,R + D^2\,(G^2 - FE) = 0,$$

équation du second degré qui donne les deux rayons de courbure principaux de la surface trajectoire du point M (a, b, c).

Or, on a posé

$$
\begin{aligned}
D^2 &= (B'_t C'_s - C'_t B'_s)^2 + (C'_t A'_s - A'_t C'_s)^2 + (A'_t B'_s - B'_t A'_s)^2, \\
&= (A'^2_t + B'^2_t + C'^2_t)(A'^2_s + B'^2_s + C'^2_s) - (A'_t A'_s + B'_t B'_s + C'_t C'_s)^2, \\
&= EF - G^2,
\end{aligned}
$$

par suite, l'équation aux rayons de courbure peut s'écrire

$$(U^2 - ST) R^2 + D (ET + SF - 2UG) R - D^4 = 0.$$

Cette relation nous permettrait de retrouver quelques-uns des résultats précédents et nous donne en outre l'expression de la courbure

$$\frac{1}{R' R''} = \frac{U^2 - ST}{D^4}.$$

Considérons une droite de direction λ, μ, ν rencontrant Δ' et Δ'', quand elles existent, ou dans tous les cas la droite

$$
\begin{aligned}
A'_t \lambda + B'_t \mu + C'_t \nu &= 0, \\
A'_s \lambda + B'_s \mu + C'_t \nu &= 0,
\end{aligned}
$$

on aura, en remplaçant dans l'expression de la courbure $B'_t C'_s - B'_s C'_t$, etc..., par des quantités proportionnelles λ, μ, ν,

$$\frac{1}{R' R''} = \frac{(A''_{st} \lambda + B''_{st} \mu + C''_{st} \nu)^2 - (A''_{ss} \lambda + B''_{ss} \mu + C''_{ss} \nu)(A''_{tt} \lambda + B''_{tt} \mu + C''_{tt} \nu)}{D^2},$$

d'où l'on conclut que *le long d'une droite rencontrant Δ' et Δ'', la courbure s'exprime par une fraction rationnelle dont les deux termes sont du second degré par rapport à l'abscisse du point de cette droite. Cette courbure s'annule par conséquent deux fois.*

Il nous reste à obtenir les directions des lignes de courbure principales. Il suffit pour cela de chercher le maximum ou le minimum d'une fonction ds^2 de deux variables s et t

$$ds^2 = Es^2 + 2G\, st + Ft^2,$$

liées par l'équation de l'indicatrice

$$2D\varepsilon = Ss^2 + 2U\, st + Tt^2.$$

Égalant à 0 les différentielles des deux expressions et éliminant le rapport $\frac{ds}{dt}$, il vient

$$\frac{Ss + Ut}{Es + Gt} = \frac{Us + Tt}{Gs + Ft},$$

ou bien

$$(SG - UE) s^2 + (ST - ET) st + (UF - GT) t^2 = 0,$$

équation qui donne pour $\frac{s}{t}$ deux valeurs m' et m'' correspondant à des déplacements faisant décrire au point M (a, b, c) des directions principales. On peut donc dire que pour un même déplacement dans lequel $\frac{s}{t} = m$, *le lieu des points qui se meuvent suivant des directions principales est une surface du 5^e ordre, et que toute droite rencontrant Δ' et Δ'' n'a que trois points jouissant de cette propriété.*

Quant aux tangentes principales, elles ont pour équations

$$\frac{X - a}{A'_s m' + A'_t} = \frac{Y - b}{B'_s m' + B'_t} = \frac{Z - c}{C'_s m' + C'_t},$$
$$\frac{X - a}{A'_s m'' = A'_t} = \frac{Y - b}{B'_s m'' + B'_t} = \frac{Z - c}{C'_s m'' + C'_t}.$$

Il est du reste facile de vérifier qu'elles sont rectangulaires ou que

$$E m' m'' + G(m' + m'') + F = 0,$$

en ayant égard à l'équation qui a fourni les valeurs de m' et m'' et qui donne

$$m' m'' = \frac{UF - GT}{SG - UE}, \quad \text{et} \quad m' + m'' = \frac{ET - SF}{SG - UE},$$

d'où résulte l'égalité précédente.

Directions conjuguées sur les surfaces trajectoires.

40. L'équation de la conique indicatrice est, dans le système des coordonnées s et t,

$$2D\varepsilon = Ss^2 + 2Ust + Tt^2.$$

Considérons le point de cette conique M' correspondant au couple de valeurs (s, t) de ces variables. Si l'on différentie l'équation précédente, il vient

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{Us + Tt}{Ss + Ut}.$$

Désignant ensuite $\frac{s}{t}$ par μ, on voit que le rapport des accroissements $\frac{ds}{dt} = \mu'$ qu'il faut donner simultanément à s et à t pour suivre la conique indicatrice est lié au rapport $\frac{s}{t} = \mu$ par la relation

$$\mu' = -\frac{U\mu + T}{S\mu + U},$$

ou bien

$$S\mu\mu' + U(\mu + \mu') + T = 0.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les coefficients μ et μ' pour que les déplacements correspondants fassent décrire au point M (a, b, c) deux directions conjuguées sur sa surface trajectoire.

Inversement, étant donnés deux déplacements quelconques caractérisés par les rapports μ et μ', *le lieu des points auxquels ces deux déplacements font décrire des trajectoires conjuguées est une surface du 3e ordre contenant encore les droites Δ' et Δ''.*

Si à l'équation précédente on joint la relation

$$(A'_s \mu + A'_t)(A'_s \mu' + A'_t) + (B'_s \mu + B'_t)(B'_s \mu' + B'_t) + (C'_s \mu + C'_t)(C'_s \mu' + C'_t) = 0,$$

qui exprime que les trajectoires correspondantes sont rectangulaires, il vient, en simplifiant,

$$E\mu\mu' + G(\mu + \mu') + F = 0,$$

équation qui représente une surface du 2e ordre. On peut donc dire que :

Si l'on donne à un solide assujetti à quatre conditions deux déplacements quelconques, il existe dans ce solide une infinité de points auxquels ces deux déplacements font décrire des éléments de lignes de courbure, et ces points sont sur l'intersection d'une surface du 3e ordre et d'une surface du 2e ordre.

Ombilics des surfaces trajectoires.

41. Rappelons les formules qui donnent les projections $X - a$, $Y - b$, $Z - c$ du rayon de courbure d'une section normale de la surface décrite par M (a, b, c),

$$X - a = \frac{(B'_t C'_s - C'_t B'_s)(Em^2 + 2Gm + F)}{Sm^2 + 2Um + T},$$

$$Y - b = \frac{(C'_t A'_s - A'_t C'_s)(Em^2 + 2Gm + F)}{Sm^2 + 2Um + T},$$

$$Z - c = \frac{(A'_t B'_s - B'_t A'_s)(Em^2 + 2Gm + F)}{Sm^2 + 2Um + T},$$

on voit que, si l'on a

$$\frac{E}{S} = \frac{G}{U} = \frac{F}{T},$$

le rayon de courbure est indépendant de m, c'est-à-dire indépendant de la direction de MM'. L'élément de surface présente donc en M un ombilic. D'où l'on conclut que *le lieu des points ombilicaux est l'intersection de deux surfaces du 5e ordre, et les coordonnées du centre de courbure seront*

$$X - a = \frac{B'_t C'_s - C'_t B'_s}{S} E, \quad Y - b = \frac{C'_t A'_s - C'_s A'_t}{S} E, \quad Z - c = \frac{A'_t B'_s - B'_t A'_s}{S} E.$$

Cas particulier où les droites Δ' et Δ'' se rencontrent constamment.

42. Si les quatre conditions imposées au solide sont telles que les droites Δ' et Δ'' se rencontrent quelles que soient les variables indépendantes s et t, on peut, ainsi que l'a fait remarquer M. Ribeaucour dans une note sur la déformation des surfaces (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 14 février 1870), considérer le mouvement indéterminé du solide comme résultant du roulement d'une surface liée au corps sur une surface fixe dans l'espace et applicable sur la première.

Introduisons l'hypothèse précédente dans les formules générales du déplacement d'un point quelconque M (a, b, c) que nous rappelons ici,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a - \omega_t bt + \omega_s c.s + \frac{1}{2}[A''_{ss}s^2 + 2A''_{st}st + A''_{tt}t^2] + \ldots, \\ y &= b + \omega_t at + g_s s + \frac{1}{2}[B''_{ss}s^2 + 2B''_{st}st + B''_{tt}t^2] + \ldots, \\ z &= c + g_t t - \omega_s as + \frac{1}{2}[C''_{ss}s^2 + 2C''_{st}st + C''_{tt}t^2] + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Par définition les droites Δ' et Δ'' sont des droites susceptibles de devenir *immobiles* pour des déplacements convenablement choisis, c'est-à-dire pour des valeurs convenables du rapport $\frac{s}{t}$ des deux variables supposées infiniment petites. Posons donc $\frac{s}{t} = m$, et le déplacement du point (a, b, c) aura pour projections

$$\begin{aligned} \delta x &= [-\omega_t b + \omega_s c.m]\,t + \frac{t^2}{2}[A''_{ss}m^2 + \ldots, \\ \delta y &= [\omega_t a + g_s\, m]\,t + \frac{t^2}{2}[B''_{ss}m^2 + \ldots, \\ \delta z &= [g_t - \omega_s a\, m]\,t + \frac{t^2}{2}[C''_{ss}m^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Pour qu'un point du solide soit immobile au 2e ordre près, il faut que l'on ait

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} -\omega_t b + \omega_s c m &= 0, \\ \omega_t a + g_s m &= 0, \\ g_t - \omega_s a m &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières équations donnent, par l'élimination de m,

$$a^2 = -\frac{g_t g_s}{\omega_t \omega_s},$$

ce qui montre que les droites Δ' et Δ'' sont situées, ainsi qu'on l'avait vu précédemment, à égale distance de part et d'autre du plan zOy. Donc, pour que ces droites se rencontrent, il faut que la valeur de a soit nulle, ce qui exige que $g_t = 0$. On voit de plus que, d'après la seconde équation (2), il faut que g_s soit aussi nul.

Ainsi, pour que les droites Δ' et Δ'' se rencontrent, il faut que les deux vitesses de glissement le long des axes instantanés concourants et rectangulaires soient nulles. De plus, pour que Δ' et Δ'' se rencontrent constamment, il faut que les deux fonctions g_s et g_t des deux variables s et t soient nulles, ainsi que toutes leurs dérivées partielles.

Étudions actuellement les simplifications que les résultats précédents vont amener, soit dans les formules fondamentales, soit dans les six relations qui expriment l'identité des dérivées $\frac{d^2x}{ds\,dt}$ et $\frac{d^2x}{dt\,ds}$, etc... Ces relations se réduisent aux suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\omega_s}{dt} = \omega_t\frac{d\beta_t}{ds}, \quad \frac{d\omega_t}{ds} = \omega_s\frac{d\gamma_s}{dt}, \quad \omega_t\frac{d\alpha_t}{ds} - \omega_s\frac{d\alpha_s}{dt} = \omega_s\omega_t, \\ &\omega_t\frac{dv}{ds} + \omega_s\frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{du}{ds} = 0; \end{aligned}\right.$$

les formules du déplacement deviennent plus simples que les formules (1) et l'on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} A''_{tt} &= \omega_t\frac{d\beta_t}{dt}c - \frac{d\omega_t}{dt}b - \omega_t^2 a + \omega_t\frac{dv}{dt}, \\ B''_{tt} &= \frac{d\omega_t}{dt}a - \omega_t\frac{d\alpha_t}{dt}c - \omega_t^2 b, \\ C''_{tt} &= \omega_t\frac{d\alpha_t}{dt}b - \omega_t\frac{d\beta_t}{dt}a, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} A''_{ss} &= \frac{d\omega_s}{ds}c - \omega_s\frac{d\gamma_s}{ds}b - \omega_s^2 a - \omega_s\frac{dw}{ds}, \\ B''_{ss} &= \omega_s\frac{d\gamma_s}{ds}a - \omega_s\frac{d\alpha_s}{ds}c, \\ C''_{ss} &= \omega_s\frac{d\alpha_s}{ds}b - \frac{d\omega_s}{ds}a - \omega_s^2 c, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} A''_{st} &= \omega_t\frac{d\beta_t}{ds}c - \frac{d\omega_t}{ds}b + \omega_t\frac{dv}{ds}, \\ B''_{st} &= \frac{d\omega_t}{ds}a - \left[\omega_t\frac{d\alpha_t}{ds} - \omega_t\omega_s\right]c, \\ C''_{st} &= \omega_t\frac{d\alpha_t}{ds}b - \omega_t\frac{d\beta_t}{ds}a. \end{aligned}\right.$$

Les deux équations $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{du}{ds} = 0$ nous montrent que le point de rencontre des axes instantanés rectangulaires varie sur une surface tangente au plan de ces axes qui n'est autre dans l'état initial que le plan zOy. Les deux surfaces, applicables l'une sur l'autre et dont l'une supposée liée au solide roule sur l'autre supposée fixe, sont donc tangentes entre elles et ont pour plan tangent commun le plan zOy.

Cherchons actuellement les valeurs que prennent, dans le cas particulier qui nous occupe, les différentes fonctions qui figurent dans l'étude des surfaces trajectoires. On a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} B'_t C'_s - C'_t B'_s &= -\omega_s\omega_t a^2,\\ C'_s A'_s - A'_t C'_s &= -\omega_s\omega_t ab,\\ A'_t B'_s - B'_t A'_s &= -\omega_s\omega_t ac,\\ D^2 &= \omega_s^2\omega_t^2 a^2(a^2+b^2+c^2),\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} E &= A'^2_s + B'^2_s + C'_s = \omega_s^2(a^2+c^2),\\ G &= A'_s A'_t + B'_s B'_t + C'_s C'_t = -\omega_s\omega_t bc,\\ F &= A'^2_t + B'^2_t + C'^2_t = \omega_t^2(a^2+b^2),\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} S &= -A''_{ss}\omega_t\omega_s a^2 - B''_{ss}\omega_t\omega_s ab - C''_{ss}\omega_s\omega_t ac = -\omega_s\omega_t a[A''_{ss}a + B''_{ss}b + C''_{ss}c],\\ U &= -A''_{st}\omega_t\omega_s a^2 - B''_{st}\omega_t\omega_s ab - C''_{st}\omega_s\omega_t ac = -\omega_s\omega_t a[A''_{st}a + B''_{st}b + C''_{st}c],\\ T &= -A''_{tt}\omega_t\omega_s a^2 - B''_{tt}\omega_t\omega_s ab - C''_{tt}\omega_s\omega_t ac = -\omega_s\omega_t a[A''_{tt}a + B''_{tt}b + C''_{tt}c].\end{aligned}\right.$$

Quant aux dernières parenthèses, les formules (4), (5), (6) donnent

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} A''_{ss}a + B''_{ss}b + C''_{ss}c &= -\omega_s^2(a^2+c^2) - \omega_s\frac{dw}{ds}a = -E - \omega_s\frac{dw}{ds}a,\\ A''_{st}a + B''_{st}b + C''_{st}c &= \omega_s\omega_t bc + \omega_t\frac{dv}{ds}a \qquad = -G + \omega_t\frac{dv}{ds}a,\\ A''_{tt}a + B''_{tt}b + C''_{tt}c &= -\omega_t^2(a^2+b^2) + \omega_t\frac{dv}{dt}a = -F + \omega_t\frac{dv}{dt}a.\end{aligned}\right.$$

Le point tangent à la surface trajectoire du point M (a, b, c) devient

$$\begin{vmatrix} X-a, & A'_t, & A'_s\\ Y-b, & B'_t, & B'_s\\ Z-c, & C'_t, & C'_s\end{vmatrix} = -\omega_t\omega_s a^2(X-a) - \omega_t\omega_s ab(Y-b) - \omega_t\omega_s ac(Z-c) = 0,$$

ou simplement

$$a(X-a) + b(Y-b) + c(Z-c) = 0;$$

d'où l'on voit que ce plan est perpendiculaire au rayon vecteur OM du point décrivant. Cela devait être, puisque le mouvement du solide peut être considéré comme résultant du roulement l'une sur l'autre de deux surfaces se touchant en un point O qui joue le rôle de centre instantané de rotation.

Considérons le mouvement particulier du solide correspondant à $\frac{s}{t} = m$. Le point M va prendre une certaine direction sur sa surface trajectoire et le centre de courbure de la section normale correspondante sera donné par les formules générales

$$X - a = \frac{(B'_t C'_s - B'_s C'_t)(Em^2 + 2Gm + F)}{sm^2 + 2Um + T},$$

$$Y - b = \frac{(C'_t A'_s - C'_s A'_t)(Em^2 + 2Gm + F)}{sm^2 + 2Um + T},$$

$$Z - c = \frac{(A'_t B'_s - A'_s B'_t)(Em^2 + 2Gm + F)}{sm^2 + 2Um + T}.$$

Comme on a, d'après (9) et (10),

$$S = \omega_s \omega_t a \left[E + \omega_s \frac{dw}{ds} a\right], \quad U = \omega_s \omega_t a \left[G - \omega_t \frac{dv}{ds} a\right], \quad T = \omega_s \omega_t a \left[F - \omega_t \frac{dv}{dt} a\right],$$

il vient

$$X - a = \frac{-\omega_s \omega_t a^2 [Em^2 + 2Gm + F]}{\omega_s \omega_t a [Em^2 + 2Gm + F] + \omega_s \omega_t a^2 \left[\omega_s \frac{dw}{ds} m^2 - 2\omega_t \frac{dv}{ds} m - \omega_t \frac{dv}{dt}\right]},$$

ou encore

$$X - a = \frac{-a [Em^2 + 2Gm + F]}{Em^2 + 2Gm + F + a \left[\omega_s \frac{dw}{ds} m^2 - 2\omega_t \frac{dv}{ds} m - \omega_t \frac{dv}{dt}\right]},$$

et de même

$$Y - b = \frac{-b [Em^2 + 2Gm + F}{Em^2 + 2Gm + F + a \left[\omega_s \frac{dw}{ds} m^2 - 2\omega_t \frac{dv}{ds} m - \omega_t \frac{dv}{dt}\right]},$$

$$Z - c = \frac{-c [Em^2 + 2Gm + F]}{Em^2 + 2Gm + F + a \left[\omega_s \frac{dw}{ds} m^2 - 2\omega_t \frac{dv}{ds} m - \omega_t \frac{dv}{dt}\right]}.$$

On pourra obtenir le rayon de courbure de la section normale considérée en posant

$$P = Em^2 + 2Gm + F,$$

$$K = \omega_s \frac{dw}{ds} m^2 - 2\omega_t \frac{dv}{ds} m - \omega_t \frac{dv}{dt},$$

P étant une fonction homogène du deuxième degré en a, b, c et K étant indépendante de ces coordonnées, il vient alors

$$R = \frac{P\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{P + aK}.$$

On voit par suite que, *pour un même déplacement, le lieu des points qui se meuvent suivant des directions asymptotiques de leurs surfaces trajectoires respectives est une surface du second degré*

$$P + aK = 0,$$

tangente en O au plan zOy.

Cette surface du second peut être considérée comme jouant un rôle analogue à celui du cercle d'inflexion de la géométrie plane qui est aussi tangent à la base de la roulette; mais elle varie avec la valeur de m, c'est-à-dire avec le choix du mouvement donné au solide.

Exprimons maintenant que le rayon de courbure de la section normale à la surface trajectoire est infini quel que soit m, il vient

$$S = 0, \quad U = 0, \quad T = 0,$$

ou, en développant,

$$-\omega_s^2(a^2+c^2) - \omega_s \frac{dw}{ds} a = 0,$$

$$\omega_s \omega_t\, bc + \omega_t \frac{dv}{ds} a = 0,$$

$$-\omega_t^2(a^2+b^2) + \omega_t \frac{dv}{dt} a = 0.$$

L'élimination de a donne deux cônes du second degré se coupant suivant quatre droites partant de l'origine et sur chacune de ces droites se trouve un seul point, sans compter l'origine, qui décrit une surface dont toutes les sections normales ont un rayon infini. On peut donc dire que :

Lorsque le mouvement d'un solide est déterminé par le roulement d'une surface sur une autre applicable sur la première, il existe quatre points décrivant des éléments plans par l'ensemble de leurs déplacements possibles.

Les points du solide dont les surfaces trajectoires offrent un ombilic sont donnés par les équations

$$\frac{S}{E} = \frac{U}{G} = \frac{T}{F},$$

ou, en tenant compte des relations (10),

$$\frac{-E - \omega_s \frac{dw}{ds} a}{E} = \frac{-G + \omega_t \frac{dv}{ds} a}{G} = \frac{-F + \omega_t \frac{dv}{dt} a}{F},$$

et, en simplifiant, on a

$$\frac{E}{-\omega_s \frac{dw}{ds}} = \frac{G}{\omega_t \frac{dv}{ds}} = \frac{F}{\omega_t \frac{dv}{dt}},$$

ce qui donne deux cônes du second degré

$$\frac{\omega_s(a^2+c^2)}{-\frac{dw}{ds}} = \frac{\omega_s bc}{\frac{dv}{ds}} = \frac{\omega_t(a^2+b^2)}{\frac{dv}{dt}};$$

d'où l'on conclut que *les points dont les surfaces trajectoires offrent des ombilics* *se trouvent sur quatre droites issues du point O. Ces droites sont du reste les mêmes que celles qui contenaient les points décrivant des éléments plans qui ne sont que des cas particuliers d'ombilics.*

Les points dont les surfaces trajectoires présentent des courbures égales et opposées sont donnés par l'équation

$$\mathrm{ET} - 2\mathrm{GU} + \mathrm{SF} = 0,$$

et, en tenant compte des relations (10),

$$\mathrm{E}\left[-\mathrm{F} + \omega_t \frac{dv}{dt} a\right] - 2\mathrm{G}\left[-\mathrm{G} + \omega_t \frac{dv}{ds} a\right] + \mathrm{F}\left[-\mathrm{E} - \omega_s \frac{dw}{ds} a\right] = 0,$$

ou encore

$$2(\mathrm{G}^2 - \mathrm{EF}) + a\left[\omega_t \frac{dv}{dt} \mathrm{E} - 2\omega_t \frac{dv}{ds} \mathrm{G} - \omega_s \frac{dw}{ds} \mathrm{F}\right] = 0,$$

ou enfin, à cause de $\mathrm{G}^2 - \mathrm{EF} = -\mathrm{D}^2 = -\omega_s^2 \omega_t^2 a^2 (a^2 + b^2 + c^2)$,

$$-2\omega_s^2 \omega_t^2 a^2 (a^2 + b^2 + c^2) + a\left[\omega_t \frac{dv}{dt} \mathrm{E} - 2\omega_t \frac{dv}{ds} \mathrm{G} - \omega_s \frac{dw}{ds} \mathrm{F}\right] = 0;$$

d'où l'on conclut, en divisant par a, que :

Le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont des courbures égales et opposées est une surface du 3ᵉ ordre présentant à l'origine un point singulier pour lequel le cône des tangentes est

$$\omega_t \frac{dv}{dt} \mathrm{E} - 2\omega_t \frac{dv}{ds} \mathrm{G} - \omega_s \frac{dw}{ds} \mathrm{F} = 0.$$

Étudions aussi les directions des lignes de courbure sur chaque surface trajectoire. Les valeurs m' et m'' du rapport $\frac{s}{t}$ qui font décrire à un point M (a, b, c) des lignes tangentes aux lignes de courbure sont données par l'équation

$$(\mathrm{SG} - \mathrm{UE})\, s^2 + (\mathrm{SF} - \mathrm{ET})\, st + (\mathrm{UF} - \mathrm{GT})\, t^2 = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (10),

$$\begin{aligned} &\left[\mathrm{G}\left(-\mathrm{E} - \omega_s \frac{dw}{ds} a\right) - \mathrm{E}\left(-\mathrm{G} + \omega_t \frac{dv}{ds} a\right)\right] s^2 \\ +&\left[\mathrm{F}\left(-\mathrm{E} - \omega_s \frac{dw}{ds} a\right) - \mathrm{E}\left(-\mathrm{F} - \omega_t \frac{dv}{dt} a\right)\right] st \\ +&\left[\mathrm{F}\left(-\mathrm{G} + \omega_t \frac{dv}{ds} a\right) - \mathrm{G}\left(-\mathrm{F} - \omega_t \frac{dv}{dt} a\right)\right] s^2 = 0, \end{aligned}$$

et en réduisant, puis en divisant par a,

$$\left[-\omega_s \frac{dw}{ds} \mathrm{G} - \omega_t \frac{dv}{ds} \mathrm{E}\right] s^2 + \left[-\omega_s \frac{dw}{ds} \mathrm{F} + \omega_t \frac{dv}{dt} \mathrm{E}\right] st + \left[\omega_t \frac{dv}{ds} \mathrm{F} + \omega_t \frac{dv}{dt} \mathrm{G}\right] t^2 = 0,$$

équation homogène et du second degré en a, b, c; d'où l'on conclut que : *pour un même déplacement du solide, le lieu des points qui décrivent des lignes de courbure est un cône du second degré* et que *tous les points d'une ligne issue de l'origine décrivent simultanément des éléments de lignes de courbure s'il en est ainsi d'un seul de ses points.*

Donnons enfin au solide deux déplacements définis par les valeurs μ et μ' du rapport $\frac{s}{t}$. Le lieu des points auxquels ces deux déplacements font décrire des éléments conjugués l'un de l'autre est donné par l'équation

$$S\mu\mu' + U(\mu + \mu') + T = 0,$$

qui, divisée par a, représente une surface du 2^e ordre.

Pour que ces directions conjuguées soient en même temps rectangulaires, il faut que l'on ait

$$E\mu\mu' + G(\mu + \mu') + F = 0,$$

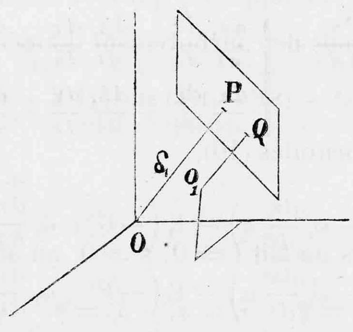
et *les points communs à ces deux surfaces du 2^e ordre décrivent successivement des directions principales. D'un autre côté, d'après les valeurs* (10) *de* S, U, T, *en retranchant l'une de l'autre ces dernières équations, on obtient celle d'un plan perpendiculaire à* Ox. *Donc, le lieu cherché est une conique.*

Déplacements d'un plan.

43. Considérons le plan qui, dans sa position initiale, a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0;$$

Fig. 26.



Si l'on donne aux variables s et t deux valeurs infiniment petites, son équation devient

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0.$$

Les valeurs des nouveaux cosinus ou plutôt leurs développements sont déjà connus. Il reste donc à calculer δ_1.

Soit O_1 la position du point du solide qui était en O, pour $s = 0$ et $t = 0$. Les coordonnées ξ, η, ζ de ce point O_1 (qu'il ne faut pas confondre avec O′, point de concours des axes instantanés rectangulaires relatifs aux valeurs s et t des variables indépendantes) s'obtiendront en faisant $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, dans les formules générales, et ont pour expressions

$$\xi = \quad + \frac{1}{2}\left[\left(\omega_t \frac{dv}{dt} + g_t \frac{d\alpha_1}{dt}\right) t^2 + 2\left(-\omega_t g_s + \omega_t \frac{dv}{ds} + g_1 \frac{d\alpha_t}{dt}\right) st + \left(g_s \frac{d\alpha_s}{ds} - \omega_s \frac{dw}{ds}\right) s^2\right],$$

$$\eta = g_s s + \frac{1}{2}\left[\left(-\omega_t \frac{du}{dt} + g_t \frac{d\beta_t}{dt}\right) t^2 + 2\left(-\omega_t \frac{du}{ds} + g_t \frac{d\beta_t}{ds}\right) st + \frac{dg_s}{ds} s^2\right],$$

$$\zeta = g_t t + \frac{1}{2}\left[\left(\gamma_t \frac{dg_t}{dt}\right) t^2 + 2\left(\frac{dg_t}{ds}\right) st + \left(\omega_s \frac{du}{ds} + g_s \frac{d\gamma_s}{ds}\right) s^2\right].$$

Or, d'après le théorème des projections, on a

$$d_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta + \delta\,;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \xi \frac{d\alpha_1}{dt} + \eta \frac{d\beta_1}{dt} + \zeta \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_1 \frac{d\xi}{dt} + \beta_1 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\zeta}{dt},$$

$$\frac{d\delta_1}{ds} = \xi \frac{d\alpha_1}{ds} + \eta \frac{d\beta_1}{ds} + \zeta \frac{d\gamma_1}{ds} + \alpha_1 \frac{d\xi}{ds} + \beta_1 \frac{d\eta}{ds} + \gamma_1 \frac{d\zeta}{ds},$$

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = \xi \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \eta \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{d\beta_1}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{d\gamma_1}{dt}\right) + \alpha_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2\eta}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2\delta_1}{ds^2} = \xi \frac{d^2\alpha_1}{ds^2} + \eta \frac{d^2\beta_1}{ds^2} + \zeta \frac{d^2\gamma_1}{ds^2} + 2\left(\frac{d\xi}{ds}\frac{d\alpha_1}{ds} + \frac{d\eta}{ds}\frac{d\beta_1}{ds} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\gamma_1}{ds}\right) + \alpha_1 \frac{d^2\xi}{ds^2} + \beta_1 \frac{d^2\eta}{ds^2} + \gamma_1 \frac{d^2\zeta}{ds^2},$$

$$\frac{d^2\delta_1}{dt\,ds} = \xi \frac{d^2\alpha_1}{dt\,ds} + \eta \frac{d^2\beta_1}{dt\,ds} + \zeta \frac{d^2\gamma_1}{dt\,ds} + \left[\begin{array}{l} \dfrac{d\alpha_1}{dt}\dfrac{d\xi}{ds} + \dfrac{d\beta_1}{dt}\dfrac{d\eta}{ds} + \dfrac{d\gamma_1}{dt}\dfrac{d\zeta}{ds} \\ \dfrac{d\alpha_1}{ds}\dfrac{d\xi}{dt} + \dfrac{d\beta_1}{ds}\dfrac{d\eta}{dt} + \dfrac{d\gamma_1}{ds}\dfrac{d\zeta}{dt} \end{array}\right] + \alpha_1 \frac{d^2\xi}{dt\,ds} + \beta_1 \frac{d^2\eta}{dt\,ds} + \gamma_1 \frac{d^2\zeta}{dt\,ds},$$

Si dans ces dérivées partielles on fait $t = 0$, $s = 0$, on aura

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma,$$

$$\frac{d\xi}{dt_0} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt_0} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt_0} = g_t, \quad \frac{d\xi}{ds_0} = 0, \quad \frac{d\eta}{ds_0} = g_s, \quad \frac{d\zeta}{ds_0} = 0,$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt_0} = -\omega_1 \beta, \quad \frac{d\beta_1}{dt_0} = \omega_t \alpha, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds_0} = \omega_s \gamma, \quad \frac{d\beta_1}{ds_0} = 0, \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = -\omega_s \alpha.$$

$$\frac{d^2\xi}{dt_0^2} = \omega_t \frac{dv}{dt} + g_t \frac{d\alpha_t}{dt}, \quad \frac{d^2\eta}{dt_0^2} = -\omega_t \frac{du}{dt} + g_t \frac{d\beta_t}{dt}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{dg_t}{dt},$$

$$\frac{d^2\xi}{ds_0^2} = g_s \frac{d\alpha_s}{ds} - \omega_s \frac{dw_s}{ds}, \quad \frac{d^2\eta}{ds_0^2} = \frac{dg_s}{ds}, \quad \frac{d^2\zeta}{ds^2} = \omega_s \frac{du}{ds} + g_s \frac{d\gamma_s}{ds},$$

$$\frac{d^2\xi}{dt\,ds} = -\omega_t g_s + \omega_t \frac{dv}{ds} + g_t \frac{d\alpha_t}{ds}, \quad \frac{d^2\eta}{dt\,ds} = -\omega_t \frac{du}{ds} + g_t \frac{d\beta_t}{ds}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt\,ds} = \frac{dg_t}{ds}.$$

On aura alors, en écrivant le développement de δ_1 sous la forme

$$\delta_1 = \delta + \delta'_t t + \delta'_s s + \frac{1}{2}\left[\delta''_{ss} s^2 + 2\delta''_{st} st + \delta''_{tt} t^2\right] + \ldots$$

$$\delta'_t = \gamma g_t, \quad \delta'_s = \beta g_s,$$

$$\delta''_{tt} = \alpha\left[\omega_t \frac{dv}{dt} + g_t \frac{d\alpha_t}{dt}\right] + \beta\left[-\omega_t \frac{du}{dt} + g_t \frac{d\beta_t}{dt}\right] + \gamma \frac{dg_t}{dt},$$

$$\delta''_{ss} = \alpha\left[g_s \frac{d\alpha_s}{ds} - \omega_s \frac{dw_s}{ds}\right] + \beta\left[\frac{dg_s}{ds}\right] + \gamma\left[\omega_s \frac{du}{ds} + g_s \frac{d\gamma_s}{ds}\right],$$

$$\delta''_{st} = \omega_t g_s \alpha - \omega_s g_t \alpha + \alpha\left[-\omega_t g_s + \omega_t \frac{dv}{ds} + g_t \frac{d\alpha_t}{ds}\right] + \beta\left[-\omega_t \frac{du}{ds} + g_t \frac{d\beta_t}{ds}\right] + \gamma \frac{dg_t}{ds},$$

d'où l'on conclut que δ'_t, δ'_s, δ''_{tt}, δ''_{ts}, δ''_{ss} sont linéaires et homogènes en α, β, γ.

Enveloppe d'un plan.

44. Un plan lié au solide et dont l'équation était pour $t = 0$ et $s = 0$

(1) $$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

devient, pour les valeurs infiniment petites t et s attribuées aux variables indépendantes,

(2) $$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0.$$

La surface enveloppée par ce plan s'obtiendra en éliminant s et t entre cette équation et les suivantes :

$$\frac{d\alpha_1}{ds} x + \frac{d\beta_1}{ds} y + \frac{d\gamma_1}{ds} z - \frac{d\delta_1}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} x + \frac{d\beta_1}{dt} y + \frac{d\gamma_1}{dt} z - \frac{d\delta_1}{dt} = 0.$$

Le point où ce plan touche son enveloppe dans sa position initiale sera donné par les équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

$$\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z - \delta'_s = 0,$$

$$\alpha'_t x + \beta'_t y + \gamma'_t z - \delta'_t = 0,$$

et en désignant par a, b, c les coordonnées de ce point, on aura

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \delta'_s & \beta'_s & \gamma'_s \\ \delta'_t & \beta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \alpha'_s & \delta'_s & \gamma'_s \\ \alpha'_t & \delta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix}}, \quad c = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \delta'_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix}}.$$

La distance du point fixe (a, b, c) au plan variable (2) aura pour expression

$$D = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & -\delta_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix}}.$$

Remplaçant dans cette dernière équation α, β, γ et δ par leurs valeurs connues en fonction de s et de t, on voit que les termes indépendants de s et de t, ainsi que les termes du premier degré par rapport à ces lettres, se détruisent comme formés de déterminants contenant des lignes identiques. Il reste donc, en posant

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t \end{vmatrix},$$

$$2d\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \alpha''_{ss}s^2 + 2\alpha''_{st}st + \alpha''_{tt}t^2, & \beta''_{ss}s^2 + 2\beta''_{st}st + \beta''_{tt}t^2, & \gamma''_{ss}s^2 + 2\gamma''_{st}st + \gamma''_{tt}t^2, & -(\delta''_{ss}s^2 + 2\delta''_{st}st + \delta''_{tt}t^2) \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & -\delta \\ \alpha'_s, & \beta'_s, & \gamma'_s, & -\delta'_s \\ \alpha'_t, & \beta'_t, & \gamma'_t, & -\delta'_t \end{vmatrix}.$$

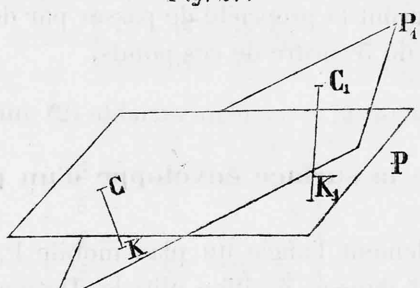
ou, en faisant,

$$\begin{vmatrix} \alpha''_{ss} & \beta''_{ss} & \gamma''_{ss} & -\delta''_{ss} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma' & -\delta'_t \end{vmatrix} = \mathrm{S}, \quad \begin{vmatrix} \alpha''_{st} & \beta''_{st} & \gamma''_{st} & -\delta''_{st} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix} = \mathrm{U}, \quad \begin{vmatrix} \alpha''_{tt} & \beta''_{tt} & \gamma''_{tt} & -\delta''_{tt} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix} = \mathrm{T},$$

$$(3) \qquad 2d\mathrm{D} = \mathrm{S}s^2 + 2\mathrm{U}\,st + \mathrm{T}t^2.$$

Telle est la formule qui donne la distance $\mathrm{D} = \mathrm{CK}$ du point C où le plan P touchait son enveloppe dans sa position initiale, au plan mobile P_1. Si maintenant on admet comme évident que, deux plans P et P_1 infiniment voisins et tangents à une même surface en C et en C_1 étant donnés, la distance du point C au plan P_1 est égale à la distance du point C_1 au plan P (au 3e ordre près), on pourra regarder l'équation (3) comme représentant la développable indicatrice de la surface enveloppe, en ce sens que pour tout système de valeurs de s et de t satisfaisant à (3), on a un plan mobile P_1 touchant l'enveloppe en un point C_1 dont la distance au plan initial P est constamment égale à D.

Fig. 27.



Autrement dit, l'équation (3) représente la développable circonscrite le long de l'indicatrice de la surface considérée.

La quantité d est d'ailleurs indépendante de s et de t et a pour expression

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \omega_s\gamma & 0 & -\omega_s\alpha \\ -\omega_t\beta, & \omega_t\alpha & 0 \end{vmatrix} = \omega_s\omega_t\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \omega_s\omega_t\alpha.$$

La quantité d n'est donc nulle que si le plan P est parallèle à l'axe des x.

Si l'on met de côté ce cas particulier, on voit qu'il existe deux mouvements du solide caractérisés par les valeurs m' et m'' du rapport $\frac{s}{t}$ pour lesquels le plan mobile continue à passer par le point fixe C. Ces valeurs sont les racines de l'équation

$$(4) \qquad \mathrm{S}m^2 + 2\mathrm{U}m + \mathrm{T} = 0.$$

Dans ces deux mouvements, le plan mobile tourne autour des tangentes asymptotiques de la surface enveloppe.

Inversement pour un mouvement déterminé par m, l'équation (4) représente l'ensemble des plans qui jouissent de la propriété précédente. Il est aisé de voir que cette relation peut s'écrire

$$\delta = \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{f(\alpha, \beta, \gamma)},$$

φ désignant une fonction homogène et du 4e ordre en α, β, γ, et f une autre fonction homogène du 3e ordre. Remplaçant α, β, γ par $\frac{x}{\delta}$, $\frac{y}{\delta}$, $\frac{z}{\delta}$, il vient

$$\delta^2 = \frac{\varphi(x, y, z)}{f(x, y, z)},$$

équation du 5e degré qui donne la podaire de l'enveloppe des plans cherchés.

On peut considérer les 3 équations

$$S = 0, \quad U = 0, \quad T = 0,$$

comme représentant 3 systèmes de plans. A chacun de ces systèmes correspond une podaire du 5e ordre et une certaine enveloppe. Les plans tangents communs à ces trois enveloppes auront la propriété de passer par des points fixes ou plutôt de rester à une distance du 3e ordre de ces points.

Courbure de la surface enveloppe d'un plan mobile.

45. Calculons actuellement l'angle du plan mobile P_1 avec le plan fixe P qui n'est autre que le plan P_1 dans sa position initiale. Désignant par θ l'angle de ces deux plans, on a évidemment

$$\theta^2 = (\alpha'_s s + \alpha'_t t)^2 + (\beta'_s s + \beta'_t t)^2 + (\gamma'_s s + \gamma'_t t)^2,$$

ou bien

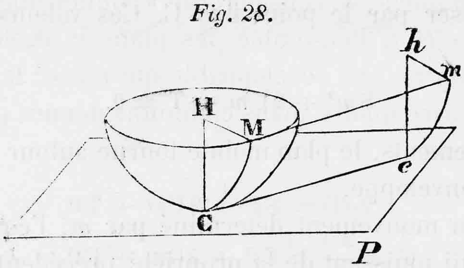
$$\theta^2 = (\alpha'^2_s + \beta'^2_s + \gamma'^2_s) s^2 + 2(\alpha'_s \alpha'_t + \beta'_s \beta'_t + \gamma'_s \gamma'_t) st + (\alpha'^2_t + \beta'^2_t + \gamma'^2_t) t^2,$$

formule que nous écrirons, pour abréger,

$$\theta^2 = Es^2 + 2G\, st + Ft^2. \tag{5}$$

Considérons maintenant l'élément (E) de la surface enveloppe et le cylindre

Fig. 28.



(MCmc) circonscrit à cet élément. Soient en outre mc une section droite de ce cylindre et R le rayon de courbure de cette section droite. On a évidemment

$$\overline{mc}^2 = 2R.\overline{ch} = 2RD,$$

$$\overline{mc} = R\theta,$$

d'où, en éliminant $\overline{mc}$, $R = \frac{2D}{\theta^2}$.

Telle est l'expression du rayon de courbure de la section droite du cylindre circonscrit à la surface enveloppe. Remplaçant D et θ^2 par leurs valeurs, il vient

$$R = \frac{Ss^2 + 2Ust + Tt^2}{(Es^2 + 2Gst + Ft^2)\,d}. \tag{6}$$

A chaque valeur m du rapport $\frac{s}{t}$ correspondent un élément de cylindre circonscrit et un rayon de ce cylindre. Le maximum ou le minimum de ce rayon a lieu lorsque le cylindre est circonscrit suivant une ligne de courbure. Or, le maximum de l'expression

$$R = \frac{Sm^2 + 2Um + T}{Em^2 + 2Gm + F}$$

est donné par l'équation

$$(SG - UE)\,m^2 + (SF - TE)\,m + UF - TG = 0, \tag{7}$$

dont les racines m' et m'' déterminent les deux mouvements dans lesquels le plan mobile enveloppe les cylindres circonscrits suivant les lignes de courbure.

Si l'on avait

$$\frac{S}{E} = \frac{U}{G} = \frac{T}{F},$$

le rayon de courbure du cylindre serait indépendant de m et les plans qui conviennent à ces équations auront la propriété d'envelopper des éléments de surface présentant des ombilics.

Pour former l'équation aux rayons de courbure principaux, on pourrait éliminer m entre (6) et (7). On peut aussi procéder de la manière suivante :

L'équation (5) dans laquelle on considèrerait θ comme une constante représente, à l'aide des variables s et t, l'ensemble des plans P_1 également inclinés sur le plan P. Cet ensemble forme une développable qui a avec la développable circonscrite le long de l'indicatrice quatre plans communs donnés par les valeurs de s et t satisfaisant aux équations

$$2dD = Ss^2 + 2Ust + Tt^2,$$

$$\theta^2 = \frac{2D}{R} = Es^2 + 2Gst + Ft^2.$$

Exprimons que ces quatre plans se confondent deux à deux. Multiplions la dernière équation par dR et retranchons, il vient

$$(S - EdR)\,s^2 + 2\,(U - GdR)\,st + (T - FdR)\,t^2 = 0,$$

pour déterminer les valeurs de $\frac{s}{t}$ qui correspondent aux plans communs aux deux développables. Ces couples de plans seront confondus si l'on a

$$(U - GdR)^2 - (S - EdR)(T - FdR) = 0,$$

ou encore

$$d^2(G^2 - EF) R^2 + d[ET + SF - 2UG] R + U^2 - ST = 0,$$

équation qui donne les deux rayons de courbure principaux.

Quant aux directions des lignes de courbure, on les obtiendra en remarquant que leurs cosinus directeurs sont proportionnels à l'excès des cosinus du plan P_1

$$\alpha + \alpha'_s s + \alpha'_t t, \quad \beta + \beta'_s s + \beta'_t t, \quad \gamma + \gamma'_s s + \gamma'_t t,$$

tangent à l'extrémité du grand axe de l'indicatrice sur ceux du plan initial P qui sont α, β, γ.

La tangente à l'une des lignes de courbure a donc pour équations

$$\frac{X - a}{\alpha'_s s + \alpha'_t t} = \frac{Y - b}{\beta'_s s + \beta'_t t} = \frac{Z - c}{\gamma'_s s + \gamma'_t t},$$

en faisant $\frac{s}{t} = m'$ ou $\frac{s}{t} = m''$, m' et m'' étant les racines de l'équation (7).

Il est du reste facile de voir que les deux directions trouvées sont rectangulaires, ou que l'on a

$$(\alpha'_s m' + \alpha'_t)(\alpha'_s m'' + \alpha'_t) + (\beta'_s m' + \beta'_t)(\beta'_s m'' + \beta'_t) + (\gamma'_s m' + \gamma'_t)(\gamma'_s m'' + \gamma'_t) = 0,$$

ou encore que

$$E m' m'' + G(m' + m'') + F = 0,$$

en ayant égard à l'équation (7) qui a donné m' et m''.

On peut aussi former l'équation du système des plans normaux principaux. Considérons pour cela les trois plans

$$\begin{aligned} P &= \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0, \\ P_s &= \alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z - \delta'_s = 0, \\ P_t &= \alpha'_t x + \beta'_t y + \gamma'_t z - \delta'_t = 0, \end{aligned}$$

dont l'intersection donne le point de contact initial C. On voit d'abord que P_s et P_t sont tous les deux perpendiculaires à P, car on a

$$\alpha\alpha'_s + \beta\beta'_s + \gamma\gamma'_s = 0, \quad \text{et} \quad \alpha\alpha'_t + \beta\beta'_t + \gamma\gamma'_t = 0.$$

On peut donc représenter un plan normal quelconque à la surface enveloppe au point C par l'équation

$$P_s m + P_t = 0.$$

Si dans cette dernière équation on donne à m la valeur m', l'une des racines de l'équation (7), le plan normal correspondant ayant ses cosinus directeurs proportionnels à

$$\alpha'_s m' + \alpha'_t, \quad \beta'_s m' + \beta'_t, \quad \gamma'_s m' + \gamma'_t,$$

sera un plan principal. On en dirait autant pour l'autre racine m''. Éliminant m

entre l'équation du plan normal et l'équation (7), il vient pour le système des plans normaux principaux

$$(SG - UE)\,P_t^2 + [FS - TE]\,P_tP_s + (UF - TG)\,P_s^2 = 0.$$

Avant de nous occuper des surfaces enveloppes présentant un ombilic, revenons sur les fonctions S, U, T, dont les valeurs sont

$$S = \begin{vmatrix} \alpha''_{ss} & \beta''_{ss} & \gamma''_{ss} & -\delta''_{ss} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} \alpha''_{st} & \beta''_{st} & \gamma''_{st} & -\delta''_{st} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} \alpha''_{tt} & \beta''_{tt} & \gamma''_{tt} & -\delta''_{tt} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha'_s & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix}.$$

Multiplions les trois premières colonnes de chacun de ces déterminants par α, β, γ et ajoutons pour former avec les sommes obtenues les premières colonnes. Il vient, en tenant compte des identités connues,

$$\begin{aligned} \alpha\alpha''_{ss} + \beta\beta''_{ss} + \gamma\gamma''_{ss} &= -\alpha_s'^2 - \beta_s'^2 - \gamma_s'^2 = -E, \\ \alpha\alpha''_{st} + \beta\beta''_{st} + \gamma\gamma''_{st} &= -\alpha_s\alpha'_t - \beta_s\beta'_t - \gamma'_s\gamma'_t = -G, \\ \alpha\alpha''_{tt} + \beta\beta''_{tt} + \gamma\gamma''_{tt} &= -\alpha_t'^2 - \beta_t'^2 - \gamma_t'^2 = -F, \end{aligned}$$

$$\alpha\beta\gamma S = \begin{vmatrix} -E & \beta''_{ss} & \gamma''_{ss} & -\delta''_{ss} \\ 1 & \beta & \gamma & -\delta \\ 0 & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ 0 & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix}, \quad \alpha\beta\gamma U = \begin{vmatrix} -G & \beta''_{st} & \gamma''_{st} & -\delta''_{st} \\ 1 & \beta & \gamma & -\delta \\ 0 & \beta'_s & \gamma' & -\delta'_s \\ 0 & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix}, \quad \alpha\beta\gamma T = \begin{vmatrix} -F & \beta''_{tt} & \gamma''_{tt} & -\delta''_{tt} \\ 1 & \beta & \gamma & -\delta \\ 0 & \beta'_s & \gamma'_s & -\delta'_s \\ 0 & \beta'_t & \gamma'_t & -\delta'_t \end{vmatrix},$$

ou, en ordonnant par rapport aux éléments des premières colonnes,

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma S &= E\,(m_2\delta + n_3) + \lambda_3, \\ \alpha\beta\gamma U &= G\,(m_2\delta + n_3) + \mu_3, \\ \alpha\beta\gamma T &= F\,(m_2\delta + n_3) + \nu_3, \end{aligned}$$

m_2 et n_3, ainsi que λ_3, μ_3, ν_3, représentant des fonctions homogènes en α, β, γ et d'un degré égal à leurs indices.

En tenant compte de ces formules, le rayon de courbure de la section droite du cylindre circonscrit à l'enveloppe devient, d'après (6),

$$\alpha\beta\gamma R = \frac{m_2\delta + n_3}{d} + \frac{\lambda_3 s^2 + 2\mu_3\,st + \nu_3 t^2}{d\,(Es^2 + 2Gst + Ft^2)}.$$

Cette expression se compose de deux parties dont l'une est indépendante de la valeur du rapport $\frac{s}{t} = m$, c'est-à-dire de la nature du déplacement particulier donné au solide, et linéaire par rapport à δ.

La seconde partie seule dépend de $\frac{s}{t}$ et elle sera maximum ou minimum si l'on a

$$(\lambda_3 G - \mu_3 E)\,m^2 + (\lambda_3 F - \nu_3 E)\,m + (\mu_3 F - \nu_3 G) = 0.$$

D'où l'on voit que la valeur de m ne dépend uniquement que de la direction du plan et non de sa distance à l'origine. On peut donc dire que :

Si un plan enveloppe une développable circonscrite suivant une ligne de courbure de son enveloppe, il en sera de même de tous les plans parallèles du solide.

Pour un même déplacement particulier, les plans qui possèdent cette propriété sont perpendiculaires à un cône du 5e ordre.

Le système des plans normaux principaux de la surface enveloppe d'un plan est

$$(\lambda_3 G - \mu_3 E)\, P_t^2 + [\lambda_3 F - \nu_3 E]\, P_t P_s + [\mu_3 F - \nu_3 G]\, P_s^2 = 0.$$

On voit qu'il est le même pour tous les plans du solide parallèles à une même direction, car dans cette dernière équation la distance δ ne figure nullement.

Le système des plans ombilicaux est donné par les équations

$$\frac{S}{E} = \frac{U}{G} = \frac{T}{F},$$

qui, d'après les remarques précédentes, peuvent se simplifier et se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\lambda_3}{E} = \frac{\mu_3}{G} = \frac{\nu_3}{F},$$

représentant deux cônes du 5e ordre. D'où l'on conclut que *tous les plans normaux aux génératrices communes à deux cônes du 5e ordre sont des plans ombilicaux.*

Le système des plans qui glissent sur des points fixes est donné par les équations

$$S = 0, \quad U = 0, \quad T = 0,$$

qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} E(m_2\delta + n_3) + \lambda_3 &= 0, \\ G(m_2\delta + n_3) + \mu_3 &= 0, \\ F(m_2\delta + n_3) + \nu_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire les relations

$$\frac{\lambda_3}{E} = \frac{\mu_3}{G} = \frac{\nu_3}{F},$$

qui donnent les directions des plans ombilicaux trouvées précédemment. On voit ensuite qu'à chacune de ces directions correspond un seul plan susceptible de glisser sur un point fixe de l'espace, quel que soit le déplacement donné au solide. δ n'entre en effet qu'au premier degré dans les équations précédentes.

Ainsi *dans chaque série de plans ombilicaux, on a un plan et un seul glissant sur un point fixe.*

Les plans qui enveloppent des éléments de surface à courbures égales et opposées sont donnés par l'équation

$$ET + SF - 2UG = 0,$$

qui se réduit, en ayant égard aux valeurs de U, S, T, à la forme

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{F}\,(m_2\delta + n_3) + \nu_3] + \mathrm{F}\,[\mathrm{E}\,(m_2\delta + n_3) + \lambda_3] - 2\mathrm{G}\,[\mathrm{G}\,(m_2\delta + n_3) + \mu_3] = 0,$$

ou encore

$$2\,(\mathrm{EF} - \mathrm{G}^2)\,(m_2\delta + n_3) + \mathrm{E}\nu_3 + \mathrm{F}\lambda_3 - 2\mathrm{G}\mu_3 = 0,$$

d'où l'on conclut que :

Les plans dont les surfaces enveloppes présentent des courbures égales et opposées enveloppent une surface dont la podaire, par rapport à l'origine, est une surface du 5^e ordre.

Cas particulier où les droites Δ' et Δ'' se rencontrent constamment.

46. Si dans toutes les formules précédentes on fait $g_t = 0$, $g_s = 0$, $\dfrac{dg_t}{ds} = 0$, $\dfrac{dg_t}{dt} = 0$, $\dfrac{dg_s}{dt} = 0$, $\dfrac{dg_s}{ds} = 0$, $\dfrac{du}{dt} = 0$, et $\dfrac{du}{ds} = 0$, on obtiendra les résultats relatifs au cas qui nous occupe. On aura alors

$$\delta'_s = 0, \quad \delta'_t = 0, \quad \delta''_{ss} = -\,\omega_s \frac{dw}{ds}\,\alpha, \quad \delta''_{tt} = \omega_t \frac{dv}{dt}\,\alpha, \quad \delta''_{st} = \omega_t \frac{dv}{ds}\,\alpha,$$

ce qui donne pour les valeurs de S, U, T,

$$\alpha\beta\gamma\mathrm{S} = \begin{vmatrix} -\mathrm{E} & \beta''_{ss} & \gamma''_{ss} & +\omega_t \dfrac{dw}{ds}\alpha \\ 1 & \beta & \gamma & -\delta \\ 0 & 0 & \gamma'_s & 0 \\ 0 & \beta'_t & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha\beta\gamma\mathrm{U} = \begin{vmatrix} -\mathrm{G} & \beta''_{st} & \gamma''_{st} & -\omega_t \dfrac{dv}{ds}\alpha \\ 1 & \beta & \gamma & -\delta \\ 0 & 0 & \gamma'_s & 0 \\ 0 & \beta'_t & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha\beta\gamma\mathrm{T} = \begin{vmatrix} -\mathrm{F} & \beta''_{tt} & \gamma''_{tt} & -\omega_t \dfrac{dv}{dt}\alpha \\ 1 & \beta & \gamma & -\delta \\ 0 & 0 & \gamma'_s & 0 \\ 0 & \beta'_t & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où l'on tire

$$\alpha\beta\gamma\mathrm{S} = -\,\mathrm{E}\delta\beta'_t\gamma'_s + \omega_s \frac{dw}{ds}\alpha\beta'_t\gamma'_s = \mathrm{E}\delta\,\omega_t\omega_s\alpha^2 - \omega_s^2\omega_t \frac{dw}{ds}\alpha^3,$$

$$\alpha\beta\gamma\mathrm{U} = -\,\mathrm{G}\delta\beta'_t\gamma'_s - \omega_t \frac{dv}{ds}\alpha\beta'_t\gamma'_s = \mathrm{G}\delta\,\omega_t\omega_s\alpha^2 + \omega_s\omega_t^2 \frac{dv}{ds}\alpha^3,$$

$$\alpha\beta\gamma\mathrm{T} = -\,\mathrm{F}\delta\beta'_t\gamma'_s - \omega_t \frac{dv}{dt}\alpha\beta'_t\gamma'_s = \mathrm{F}\delta\,\omega_t\omega_s\alpha^2 + \omega_s\omega_t^2 \frac{dv}{dt}\alpha^3.$$

Le point où un plan donné touche son enveloppe est donné par les équations

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta &= 0, \\ \alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z &= 0, \\ \alpha'_t x + \beta'_t y + \gamma'_t z &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on voit que, pour un système de plans parallèles, les points de contact avec les surfaces enveloppes respectives sont sur une perpendiculaire abaissée de l'origine sur tous les plans représentés par les deux dernières équations.

Les fonctions E, G, F qui figurent dans l'expression du rayon de courbure de la section droite du cylindre circonscrit ont pour valeurs

$$E = \omega_s^2 (\alpha^2 + \gamma^2), \qquad G = -\omega_s\omega_t\beta\gamma, \qquad F = \omega_t^2 (\alpha^2 + \beta^2),$$

et la quantité δ est égale à $\omega_s\omega_t\alpha$.

On a donc pour l'expression de ce rayon de courbure

$$\alpha\beta\gamma R = \frac{\left[E\delta\,\omega_s\omega_t\alpha^2 - \omega_s^2\omega_t\dfrac{dw}{ds}\alpha^3\right]s^2 + 2\left[G\delta\,\omega_s\omega_t\alpha^2 + \omega_s\omega_t^2\dfrac{dv}{ds}\alpha^3\right]st + \left[F\delta\,\omega_s\omega_t\alpha^2 + \omega_s\omega_t^2\dfrac{dv}{dt}\alpha^3\right]t^2}{\omega_s\omega_t\alpha\,[Es^2 + 2Gst + Ft^2]},$$

d'où

$$\beta\gamma R = \delta + \frac{\left(-\omega_s\dfrac{dw}{ds}\right)s^2 + 2\omega_t\dfrac{dv}{ds}st + \omega_t\dfrac{dv}{dt}t^2}{Es^2 + 2Gst + Ft^2}\alpha.$$

On voit par là que le rayon R se compose d'une partie proportionnelle à la distance δ du plan à l'origine, et d'une autre partie qui ne dépend que de la direction du plan et du rapport $\frac{s}{t}$ relatif à tel ou tel mouvement particulier du solide.

Le maximum du rayon de courbure, c'est-à-dire le rayon de courbure principal, correspondra au mouvement $\frac{s}{t} = m$, m étant racine de l'équation (7), ou dans le cas actuel

$$\left[-\omega_s\frac{dw}{ds}G - \omega_t\frac{dv}{ds}E\right]m^2 + \left[-F\omega_s\frac{dw}{ds} - \omega_t\frac{dv}{dt}E\right]m + F\omega_t\frac{dv}{ds} - G\omega_t\frac{dv}{dt} = 0,$$

d'où l'on voit que, *pour un même mouvement* $m = \frac{s}{t}$ *du corps solide, les plans qui enveloppent les développables circonscrites suivant les lignes de courbure sont perpendiculaires à un cône du second degré.*

Si un plan a cette propriété, tous les plans qui lui sont parallèles la possèdent également.

Les plans qui enveloppent des surfaces présentant un ombilic sont donnés par les équations

$$\frac{-\omega_s\dfrac{dw}{ds}}{E} = \frac{\omega_t\dfrac{dv}{ds}}{G} = \frac{\omega_t\dfrac{dv}{dt}}{F},$$

qui représentent deux cônes du second degré; donc, *dans le cas actuel, il existe quatre séries parallèles de plans ombilicaux.*

Les plans qui glissent sur des points fixes sont donnés par les équations $U = 0$,

$S = 0$, $T = 0$, qui donnent

$$E\delta - \omega_s \frac{dw}{ds}\alpha = 0, \quad G\delta + \omega_t \frac{dv}{ds}\alpha = 0, \quad F\delta + \omega_t \frac{dv}{dt}\alpha = 0.$$

L'élimination de δ conduisant aux deux cônes précédents, on voit que *dans chacune des quatre séries de plans précédents il existe un plan et un seul qui glisse sur un point fixe.*

Mouvement d'une droite faisant partie d'un solide assujetti à quatre conditions.

47. Considérons une droite quelconque liée au corps solide, les éléments de cette droite seront des fonctions déterminées des variables indépendantes s et t, à l'aide desquelles on peut exprimer les paramètres de position de ce solide. Les équations de cette droite seront

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + \alpha\rho, \\ y = b + \beta\rho, \\ z = c + \gamma\rho, \end{cases}$$

a, b, c, α, β, γ étant des fonctions connues de s et de t, et ρ une indéterminée.

Si l'on attribue à s une valeur constante, x, y, z seront des fonctions de t et de ρ et les équations (1) représenteront une surface réglée contenant un paramètre s. Si maintenant on fait varier ce paramètre s, la surface réglée (1) changera de forme et de position et enveloppera une certaine surface dont il s'agit d'obtenir les équations.

Soit M un point de la surface réglée dont le paramètre est s, et soient t et ρ ses coordonnées sur cette surface. Si l'on change s en $s + \delta s$, on obtiendra une seconde surface réglée, et pour que le point M appartienne aussi à cette deuxième surface, il faut que l'on puisse trouver un système de valeurs $s + ds$, $t + dt$, $\rho + d\rho$ qui donne pour les coordonnées x, y, z du point M les mêmes valeurs que s, t, ρ, de sorte que ce dernier point serait l'intersection d'une génératrice de la première surface avec une certaine génératrice de la seconde.

On doit donc avoir simultanément

$$(2) \qquad \begin{cases} (a'_s + \alpha'_s\rho)\,ds + (a'_t + \alpha'_t\rho)\,dt + \alpha\,d\rho = 0, \\ (b'_s + \beta'_s\rho)\,ds + (b'_t + \beta'_t\rho)\,dt + \beta\,d\rho = 0, \\ (c'_s + \gamma'_s\rho)\,ds + (c'_t + \gamma'_t\rho)\,dt + \gamma\,d\rho = 0, \end{cases}$$

ce qui exige la condition

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a'_s + \alpha'_s\rho, & a'_t + \alpha'_t\rho, & \alpha \\ b'_s + \beta'_s\rho, & b'_t + \beta'_t\rho, & \beta \\ c'_s + \gamma'_s\rho, & c'_t + \gamma'_t\rho, & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Si de cette équation on tire la valeur de ρ pour la porter dans les équations (1), ces dernières représenteront, à l'aide des coordonnées curvilignes s et t, une surface qui n'est autre que l'enveloppe cherchée.

L'équation (3) étant du second degré en ρ, on voit que l'enveloppe se compose de deux nappes que nous désignerons par Σ' et Σ'' qui correspondent aux deux déterminations de ρ, ρ' et ρ'' tirées de l'équation (3).

On peut donc dire que, *pour toutes les positions que l'on peut donner à un solide assujetti à quatre conditions, une droite quelconque liée à ce solide reste constamment tangente à deux surfaces déterminées Σ' Σ'' qui dépendent de la droite que l'on a choisie, de sorte que si l'on connaissait les surfaces Σ' et Σ'' qui appartiennent à une droite donnée, on aurait une idée exacte de tous les déplacements qu'elle peut subir en considérant qu'elle doit rester tangente à deux surfaces à la fois.*

Les équations (3) exprimant que les équations (2) se réduisent à deux, on tire des deux premières, par exemple,

$$(4)\quad \frac{ds}{\beta(a'_t+\alpha'_t\rho)-\alpha(b'_t+\beta'_t\rho)}=\frac{dt}{\alpha(b'_s+\beta'_s\rho)-\beta(a'_s+\alpha'_s\rho)}=\frac{d\rho}{(a'_s+\alpha'_s\rho)(b'_t+\beta'_t\rho)-(b'_s+\beta'_s\rho)(a'_s+\alpha'_s\rho)}$$

relations qui donnent pour $\frac{ds}{dt}$ deux valeurs correspondant aux deux valeurs de ρ fournies par l'équation (3).

Si l'on parvenait à intégrer l'équation (4), on obtiendrait une valeur de s fonction de t. A cette valeur de s correspondrait un mouvement déterminé du solide dans lequel la droite engendrerait une développable. Or, comme ρ est susceptible de deux déterminations ρ' et ρ'', on trouverait deux mouvements pour lesquels la droite engendrerait des surfaces développables.

Donc, *parmi tous les mouvements que l'on peut donner à un solide assujetti à quatre conditions, il en existe deux qui font décrire à une même droite une surface développable.* Mais comme cela a lieu pour toutes les positions acquises par la droite, on voit qu'une même droite peut décrire une double infinité de développables. Pour tout autre mouvement, la droite ne décrira plus une développable, mais elle restera tangente aux deux surfaces Σ' et Σ'' qui lui appartiennent.

Supposons que de l'équation (3) on ait tiré la valeur de ρ pour la porter dans le système (1), on obtiendra, avons-nous dit, les équations de l'enveloppe (Σ', Σ''). Si maintenant dans ces équations on fait varier t en laissant s constant, on obtiendra les équations de la courbe de contact de la surface réglée (1) avec son enveloppe (Σ', Σ''). Si, au contraire, on fait varier s en laissant t constant, on obtiendra l'arête de rebroussement (tracée sur Σ' Σ'') de la développable engendrée par la droite considérée.

Lorsque les valeurs de ρ tirées de l'équation (3) sont égales, les valeurs de $\frac{ds}{dt}$ qui s'expriment rationnellement en fonction de ρ d'après l'équation (4) sont aussi égales, et les deux mouvements infiniment petits qui sont capables de faire décrire à la droite des développables se confondent en un seul. La droite décrit alors une développable unique qui a pour arête de rebroussement l'intersection des deux nappes Σ' et Σ''.

Dans ce dernier cas, la valeur unique de ρ s'exprimera rationnellement par rapport aux éléments de la droite, et si on la porte dans l'équation (4), on aura une équation différentielle entre s, t et $\frac{ds}{dt}\cdot$ Intégrant cette équation du premier degré en $\frac{ds}{dt}$, on obtiendra pour s une valeur $s = \varphi(t)$ correspondant à un mouvement déterminé du corps solide, mouvement dans lequel la droite restera tangente à l'intersection des deux nappes Σ' et Σ''.

Nous allons maintenant classer les droites du solide, d'après les situations de leurs points de contact avec Σ' et Σ'' que nous désignerons par φ' et par φ'', et d'après les situations relatives des plans tangents en φ' et φ'' à ces mêmes nappes.

Développons d'abord l'équation en ρ afin d'étudier les différents cas que peuvent présenter les dispositions des points de contact φ' et φ'' de la droite D.

L'équation (3) ordonnée par rapport aux puissances de ρ devient

$$\begin{vmatrix} \alpha'_s & \alpha'_t & \alpha \\ \beta'_s & \beta'_t & \beta \\ \gamma'_s & \gamma'_t & \gamma \end{vmatrix} \rho^2 + \left\{ \begin{vmatrix} a'_s & \alpha'_t & \alpha \\ b'_s & \beta'_t & \beta \\ c'_s & \gamma'_t & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_s & a'_t & \alpha \\ \beta'_s & b'_t & \beta \\ \gamma'_s & c'_t & \gamma \end{vmatrix} \right\} \rho + \begin{vmatrix} a'_s & a'_t & \alpha \\ b'_s & b'_t & \beta \\ c'_s & c'_t & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$(5) \qquad P\rho^2 + Q\rho + T = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} P &= \omega_s\omega_t\alpha, \\ Q &= \omega_s\omega_t\, c\,\alpha\gamma + g_s\omega_t\beta\gamma + \omega_s\omega_t a\,(\alpha^2+\beta^2) \\ &\qquad + \omega_s\omega_t\, b\,\alpha\beta + \omega_s\omega_t a\,(\alpha^2+\gamma^2) - g_t\omega_s\beta\gamma, \\ T &= \alpha\,(g_s g_t + \omega_s\omega_t\alpha^2) - \beta\,(\omega_s g_t c - \omega_s\omega_t ab) + \gamma\,(\omega_s\omega_t ac + g_t\omega_t b). \end{aligned}$$

D'après ces valeurs des coefficients de l'équation (5) on voit que si $P = 0$, ou bien si $\alpha = 0$, l'une des valeurs de ρ devient infinie. Cela pouvait se prévoir. La droite considérée D étant en effet perpendiculaire à l'axe des x, on peut toujours trouver dans le conoïde lieu des axes instantanés glissants une génératrice parallèle à la droite D, et dans le mouvement du solide qui admet cet axe instantané, la droite D se déplacera parallèlement à elle-même, donc l'une des racines de (5) devient infinie.

Si, en même temps que $P = 0$, on a $Q = 0$, les deux valeurs de ρ deviennent infinies. Cela aura lieu si, avec $\alpha = 0$, on a

$$\omega_s\omega_t\, a\,(\beta^2+\gamma^2) + (g_s\omega_t - g_t\omega_s)\,\beta\gamma = 0,$$

ou bien

$$a\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + \left[\frac{g_s}{\omega_s} - \frac{g_t}{\omega_t}\right]\frac{\beta}{\gamma} + a = 0,$$

autrement dit, si la droite D perpendiculaire à Ox est en même temps parallèle à l'une des génératrices du conoïde qui ont même abscisse qu'elle.

Si enfin on a en même temps P = 0, Q = 0 et T = 0, il faut adjoindre aux conditions précédentes l'équation

$$\gamma\,(\omega_s\omega_t a c + g_s\omega_t b) - \beta\,(\omega_s g_t c - \omega_s\omega_t a b) = 0,$$

et l'élimination de β et de γ conduit au conoïde des axes instantanés. Cela pouvait se prévoir, car un axe instantané glissant est une droite qui, dans le déplacement correspondant du solide, est tangente à la fois à la trajectoire de tous ses points.

Si l'on a seulement T = 0, l'une des valeurs de ρ est nulle. Or l'équation T = 0 exprime visiblement que la droite est située dans le plan tangent à la surface trajectoire du point (a, b, c), il existe donc un déplacement du solide pour lequel le point (a, b, c) se meut tangentiellement à la droite D, ce qui explique l'existence de la racine nulle $\rho' = 0$.

Les droites du solide pour lesquelles les points de contact avec les surfaces Σ' et Σ'' sont confondus en un seul forment un complexe du 4e ordre

$$Q^2 - LPT = 0.$$

Le cône de ce complexe relatif à un point quelconque M (a, b, c) est doublement tangent d'une part au plan perpendiculaire mené par M à l'axe des x, d'autre part, au plan tangent à la surface trajectoire de ce même point, le contact ayant lieu le long des intersections de ces plans P = 0, T = 0 avec le cône du 2e ordre Q = 0.

Pour toutes les droites de ce complexe, les valeurs de ρ' et de ρ'' étant égales, les valeurs de m' et de m'' le sont aussi d'après l'équation (4). Donc les deux mouvements du solide qui font décrire à la droite D des éléments de développables sont confondus en un seul, sans que les plans tangents π' et π'' aux deux nappes Σ' et Σ'' soient également confondus. Dans ce mouvement unique la droite considérée glisse sur l'intersection des nappes Σ' et Σ'' en lui restant tangente.

Il est facile d'ailleurs de former l'équation du second degré en m dont les racines m' et m'' donneront les déplacements qui feront décrire à une droite D les deux développables qu'elle peut engendrer.

La condition pour que deux droites infiniment voisines se rencontrent est, en effet,

$$\begin{vmatrix} da, & d\alpha, & \alpha \\ db, & d\beta, & \beta \\ dc, & d\gamma, & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en posant $\frac{s}{t} = m$,

$$\begin{vmatrix} a'_s m + a'_t, & \alpha'_s m + \alpha'_t, & \alpha \\ b'_s m + b'_t, & \beta'_s m + \beta'_t, & \beta \\ c'_s m + c'_t, & \gamma'_s m + \gamma'_t, & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et en ordonnant

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a'_s & \alpha'_s & \alpha \\ b'_s & \beta'_s & \beta \\ c'_s & \gamma'_s & \gamma \end{vmatrix} m^2 + \left\{ \begin{vmatrix} a'_s & \alpha'_t & \alpha \\ b'_s & \beta'_t & \beta \\ c'_s & \gamma'_t & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_t & \alpha'_s & \alpha \\ b'_t & \beta'_s & \beta \\ c'_t & \gamma'_s & \gamma \end{vmatrix} \right\} m + \begin{vmatrix} a'_t & \alpha'_t & \alpha \\ b'_t & \beta'_t & \beta \\ c'_t & \gamma'_t & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

équation que nous écrirons sous la forme

$$(6)'\qquad P_1 m^2 + Q_1 m + T_1 = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} P_1 &= \omega_s^2 \alpha \beta c - g_s \omega_s (\alpha^2 + \gamma^2) - \omega_s^2 a \beta \gamma, \\ Q_1 &= \omega_s \omega_t c \alpha\gamma + g_s \omega_t \beta\gamma + \omega_s \omega_t a (\alpha^2 + \beta^2) \\ &\quad - \omega_s \omega_t b \alpha\beta + \omega_s \omega_t a (\alpha^2 + \gamma^2) + g_t \omega_s \beta\gamma, \\ T_1 &= - \omega_t^2 b \alpha\gamma + \omega_t^2 a \beta\gamma - \omega_t g_t (\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned}$$

Si l'on donne dans l'équation (6) une valeur déterminée à m, on obtient un complexe du second ordre qui n'est autre chose que celui des droites qui, pour le déplacement correspondant, restent tangentes à la trajectoire de l'un de leurs points. Autrement dit, on obtient le complexe des vitesses relatif au mouvement caractérisé par la valeur m du rapport $\frac{s}{t}$.

Si l'on fait varier m, c'est-à-dire si l'on donne au solide tous les déplacements compatibles avec les conditions qui lui sont imposées, le cône du complexe variera et enveloppera un cône du 4e ordre

$$Q_1^2 - L P_1 T_1 = 0.$$

En se plaçant à un autre point de vue, le complexe du 4e ordre qui précède est formé des droites pour lesquelles les deux déplacements qui leur font décrire des développables sont confondus en un seul.

Cherchons actuellement les droites du solide pour lesquelles les plans tangents aux surfaces Σ' et Σ'' sont rectangulaires. Pour le déplacement m', la droite glisse sur Σ'' en restant tangente à Σ', pour le déplacement m'' la droite glisse sur Σ' en restant tangente à Σ''. Dans le premier mouvement, le plan qui contient les deux positions consécutives de la droite a pour cosinus directeurs λ, μ, ν déterminés par les équations

$$\begin{aligned} \lambda\alpha \;\; + \mu\beta \;\; + \nu\gamma \;\; &= 0, \\ \lambda d\alpha + \mu d\beta + \nu d\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Dans le second mouvement, le plan de deux positions consécutives de la droite contient encore α, β, γ, ainsi que les autres variations des cosinus de la droite, que nous représenterons par $d'\alpha$, $d'\beta$, $d'\gamma$.

Les deux plans dans lesquels se meut successivement la droite contenant en commun la direction α, β, γ, seront rectangulaires si l'on a

$$d\alpha\, d'\alpha + d\beta\, d'\beta + d\gamma\, d'\gamma = 0,$$

ou en développant

$$(\alpha'_s m' + \alpha'_t)(\alpha'_s m'' + \alpha'_t) + (\beta'_s m' + \beta'_t)(\beta'_s m'' + \beta'_t) + (\gamma'_s m' + \gamma'_t)(\gamma'_s m'' + \gamma'_t) = 0,$$

ou enfin

$$(\alpha_s'^2 + \beta_s'^2 + \gamma_s'^2)\, m' m'' + (\alpha'_s \alpha'_t + \beta'_s \beta'_t + \gamma'_s \gamma'_t)(m' + m'') + \alpha_t'^2 + \beta_t'^2 + \gamma_t'^2 = 0.$$

Or, m' et m'' étant racines de l'équation (6), la condition précédente devient

$$\omega_s^2 (\gamma^2 + \alpha^2)\, T_1 - (-\,\omega_s \omega_t\, \beta\gamma)\, Q_1 + \omega_t^2 (\alpha^2 + \beta^2)\, P_1 = 0.$$

Remplaçant T_1, Q_1 et P_1 par leurs valeurs et simplifiant, il vient

$$\omega_s \omega_t (c\beta - b\gamma) - \alpha (g_t \omega_s + g_s \omega_t) = 0,$$

équation d'un complexe linéaire ayant pour axe l'axe des x et pour paramètre k dont l'expression est

$$k = \frac{g_t \omega_s + g_s \omega_t}{\omega_s \omega_t}.$$

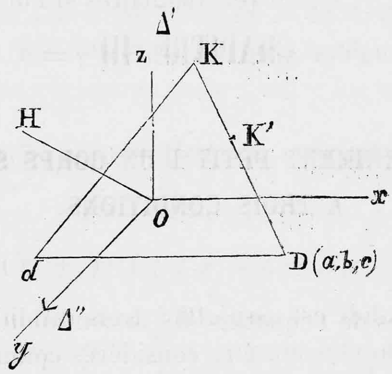
Donc, *l'ensemble des droites pour lesquelles les surfaces Σ' et Σ'' sont rectangulaires constitue un complexe linéaire ayant pour axe la perpendiculaire au plan déterminé par Δ' et Δ''.*

Cas particulier où les droites Δ' et Δ'' se rencontrent constamment.

48. Si les deux droites Δ' et Δ'' se rencontrent, les quantités g_s et g_t sont nulles et le mouvement du solide peut être considéré comme résultant de la combinaison dans une proportion quelconque de deux rotations sans glissement autour de Δ' et Δ'' qui ne sont autres que Oy et Oz. Cela posé, considérons une droite quelconque D ayant pour trace K sur le plan zOy. On peut imprimer au solide deux rotations, l'une autour de Δ', l'autre autour de Δ'', et telles que l'axe de la rotation résultante soit la ligne OK. Dans le mouvement résultant, la droite DK décrit un cône dont le sommet est K. Ce point est donc un point de la surface Σ' et la longueur DK n'est donc autre chose que la racine ρ' de l'équation (3). On voit de plus que $\rho' = -\dfrac{a}{\alpha}$.

Si maintenant on combine les deux rotations autour de Δ' et Δ'' dans un rapport tel que l'axe de la rotation résultante soit dirigé suivant OH perpendiculaire au plan projetant DKd de la droite sur le plan yOz, il est évident que la droite DK

Fig. 29.



se mouvant dans le plan DKd, il y a rencontre entre deux positions consécutives de cette droite au point où elle est coupée par le plan mené par OH perpendiculaire à sa direction. Soit K' ce point, DK' sera égale à ρ'' deuxième racine de l'équation (3). On voit du reste aisément que $DK' = a\alpha + b\beta + c\gamma$, qui n'est que la projection des trois coordonnées du point D sur la direction α, β, γ.

Il est également facile de se rendre compte de ces résultats à l'aide du calcul. L'équation en ρ, dans le cas qui nous occupe, se réduit à la forme

$$\alpha\rho^2 + [\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma) + a]\rho + a(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\rho' = -\frac{a}{\alpha}, \quad \rho'' = -(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

ce qui donne les longueurs DK et DK' indiquées précédemment.

CHAPITRE III

DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A TROIS CONDITIONS.

49. Lorsqu'un corps solide est assujetti à trois conditions, les paramètres qui en déterminent la situation peuvent être considérés comme des fonctions de trois variables indépendantes que nous désignerons par r, s et t. Si r varie seule, le solide prendra un certain mouvement que l'on peut regarder comme résultant de la translation d'un point quelconque O′ du solide combinée avec une rotation autour d'un axe passant par O′. Les variations des coordonnées d'un point du corps M (a, b, c) auront pour expressions

$$\begin{aligned}
\partial_r x &= r\,[u'_r + q_r c - r_r b],\\
\partial_r y &= r\,[v'_r + r_r a - p_r c],\\
\partial_r z &= r\,[w'_r + p_r b - q_r a],
\end{aligned}$$

p_r, q_r, r_r représentant les composantes de la rotation, u'_r, v'_r, w'_r celles de la vitesse du point O′.

On en dirait autant pour le cas où l'on ferait varier successivement s et t. Or il est évident que le déplacement du point M est égal à la somme géométrique des trois déplacements correspondant aux valeurs r, s, t que l'on peut supposer infiniment petites. On a donc

$$\begin{aligned}
\partial x &= r\,(u'_r + q_r c - r_r b) + s\,(u'_s + q_s c - r_s b) + t\,(u'_t + q_t c - r_t b),\\
\partial y &= r\,(v'_r + r_r a - p_r c) + s\,(v'_s + r_s a - p_s c) + t\,(v'_t + r_t a - p_t c),\\
\partial z &= r\,(w'_r + p_r b - q_r a) + s\,(w'_s + p_s b - q_s a) + t\,(w'_t + p_t b - q_t a),
\end{aligned}$$

pour exprimer les trois composantes ∂x, ∂y, ∂z du déplacement d'un point quelconque du solide dont les coordonnées initiales seraient a, b, c.

Avant de chercher à simplifier ces formules, proposons-nous la question suivante : Quels sont les points M du solide qui sont susceptibles de rester immobiles quand on donne aux infiniment petits r, s, t un système de valeurs convenablement choisies?

Si dans les équations (1) on fait $\partial x = 0$, $\partial y = 0$, $\partial z = 0$, le déterminant des inconnues a, b, c étant nul, il faut que l'on ait

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(ru'_r + su'_s + tu'_t)(p_r r + p_s s + p_t t) + (rv'_r + sv'_s + tv'_t)(q_r r + q_s s + q_t t) \\ &\qquad + (rw'_r + sw'_s + tw'_t)(r_r r + r_s s + r_t t) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour tout système de valeurs de r, s, t satisfaisant à cette équation, les deux premières équations (1) où l'on a fait $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, représentent une droite lieu de points immobiles. Éliminons r, s, t entre les deux premières équations (1) et l'équation (2), ou, ce qui revient au même, entre les trois équations (1), il vient

$$(3)\quad \begin{vmatrix} u'_r + q_r c - r_r b, & u'_s + q_s c - r_s b, & u'_t + q_t c - r_t b \\ v'_r + r_r a - p_r c, & v'_s + r_s a - p_s c, & v'_t + r_t a - p_t c \\ w'_r + p_r b - q_r a, & w'_s + p_s b - q_s a, & w'_t + p_t b - q_t a \end{vmatrix} = 0,$$

équation du second degré en a, b, c et qui représente un hyperboloïde. D'où l'on conclut que :

Le lieu des droites susceptibles de devenir immobiles pour tous les systèmes de valeurs de r, s, t satisfaisant à l'équation (2) est un hyperboloïde.

Supposons actuellement que l'on ait pris pour axes de coordonnées les axes principaux de l'hyperboloïde précédent. Effectuons en outre un changement de variables en posant

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} u'_r r + u'_s s + u'_t t &= r', \\ v'_r r + v'_s s + v'_t t &= s', \\ w'_r r + w'_s s + w'_t t &= t', \end{aligned} \right.$$

ce qui est possible si le déterminant des anciennes variables n'est pas nul dans les équations (4). Cela revient à prendre pour nouvelles variables indépendantes les coordonnées infiniment petites du point mobile O′ par rapport aux axes fixes qui ont été choisis précédemment. Il vient alors, en supprimant les accents,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= r(1 + q_r c - r_r b) + s(q_s c - r_s b) + t(q_t c - r_t b), \\ \delta y &= r(r_r a - p_r c) + s(1 + r_s a - p_s c) + t(r_t a - p_t c), \\ \delta z &= r(p_r b - q_r a) + s(p_s b - q_s a) + t(1 + p_t b - q_t a), \end{aligned} \right.$$

et l'hyperboloïde lieu des droites immobiles devient

$$\begin{vmatrix} 1 + q_r c - r_r b, & q_s c - r_s b, & q_t c - r_t b \\ r_r a - p_r c, & 1 + r_s a - p_s c, & r_t a - p_t c \\ p_r b - q_r a, & p_s b - q_s a, & 1 + p_t b - q_t a \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} 1 + q_r c - r_r b, & r_r a - p_r c, & p_r b - q_r a \\ q_s c - r_s b, & 1 + r_s a - p_s c, & p_s b - q_s a \\ q_t c - r_t b, & r_t a - p_t c, & 1 + p_t b - q_t a \end{vmatrix} = 0.$$

Cette surface étant rapportée à son centre, les coefficients de a, b, c doivent être nuls, donc on a

$$r_s - q_t = 0, \quad p_t - r_r = 0, \quad q_r - p_s = 0.$$

D'un autre côté, si dans le système (5) on fait $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, on obtient trois équations qui, pour être compatibles, exigent la condition

$$r\,(p_r r + p_s s + p_t t) + s\,(q_r r + q_s s + q_t t) + t\,(r_r r + r_s s + r_t t) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(7) \qquad p_r r^2 + q_s s^2 + r_t t^2 + rs\,(p_s + q_r) + rt\,(p_t + r_r) + st\,(q_t + r_s) = 0.$$

Cette équation du second degré représente un cône d'où l'on voit que, pour qu'il existe une droite immobile Δ dans le solide, il faut que l'origine O′ mobile avec le corps décrive une certaine génératrice Og du cône (7). Mais alors le plan (O, Δ) ne peut être que perpendiculaire à Og, et comme le plan (O, Δ) est tangent au cône asymptote de l'hyperboloïde, on voit que le cône (7) est le cône supplémentaire de ce cône asymptote. Or, l'hyperboloïde étant rapporté à ses axes principaux, il doit en être de même du cône (7), par suite, on a

$$p_s + q_r = 0, \quad p_t + r_r = 0, \quad q_t + r_s = 0,$$

et en tenant compte des relations

$$p_s - q_r = 0, \quad p_t - r_r = 0, \quad q_t - r_s = 0,$$

on voit que l'on a

$$p_s = 0, \quad q_r = 0, \quad p_t = 0, \quad r_r = 0, \quad q_t = 0, \quad r_s = 0.$$

Les formules fondamentales qui donnent le déplacement d'un point quelconque du solide M (a, b, c) deviennent alors

$$\begin{aligned} dx &= r + (q_s c).s - r_t b.t, \\ dy &= -\,p_r c.r + s + r_t a.t, \\ dz &= p_r b r - q_s a.s + t. \end{aligned}$$

On voit par là que le déplacement du solide dû à la variation simultanée des quantités r, s, t peut être considéré comme résultant de la combinaison de trois mouvements hélicoïdaux effectués autour de trois droites rectangulaires qui sont les axes principaux de l'hyperboloïde lieu des droites immobiles.

Si l'on désigne maintenant par P, Q, R les vitesses de rotation autour des axes Ox, Oy, Oz, l'équation de l'hyperboloïde (3) devient

$$\begin{vmatrix} 1 & Qc & -Rb \\ -Pc & 1 & Ra \\ Pb & -Qa & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\frac{a^2}{P} + \frac{b^2}{Q} + \frac{c^2}{R} + \frac{1}{PQR} = 0.$$

Quant au cône supplémentaire (7), son équation est

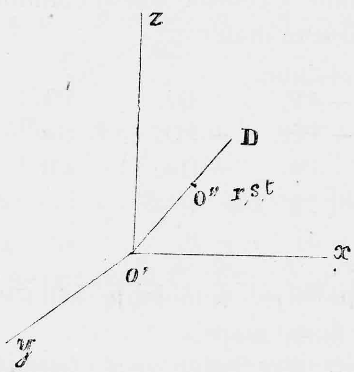
$$Pr^2 + Qs^2 + Rt^2 = 0.$$

Chaque génératrice de ce cône correspond à une génératrice Δ de l'hyperboloïde, et si le point O′ du solide décrit une génératrice du cône, le solide tourne sans glisser autour de Δ.

Axe instantané glissant relatif à un déplacement quelconque du solide.

50. Supposons que l'on fasse décrire au point O′, que nous désignerons sous le nom de *point central* du solide, un chemin OO′ infiniment petit dans une direction déterminée O′D. Le point O′ devant se mouvoir sur une droite donnée,

Fig. 30.



le solide se trouve assujetti à deux conditions nouvelles, ce qui fait en tout cinq conditions. Son déplacement se trouve alors déterminé au moins dans ses éléments du premier ordre.

Les coordonnées du point O′ étant r, s, t, les rotations autour de Ox, Oy et Oz auront pour valeurs Pr, Qs, Rt. L'axe instantané glissant, c'est-à-dire le lieu des points dont les déplacements ont des projections proportionnelles à ces rotations, aura pour équations

$$\frac{r + Qcs - Rbt}{Pr} = \frac{-Pcr + s + Rat}{Qs} = \frac{Pbr - Qas + t}{Rt},$$

et la vitesse de rotation autour de cet axe sera donnée par la formule

$$\omega = \sqrt{P^2r^2 + Q^2s^2 + R^2t^2}.$$

Cherchons en outre la valeur du glissement le long de cet axe. Ce glissement g n'est autre chose que la projection de O'O″ sur la direction de l'axe instantané dont les cosinus directeurs sont $\frac{Pr}{\omega}, \frac{Qs}{\omega}, \frac{Rt}{\omega}$; on a donc

$$g = \frac{Pr^2 + Qs^2 + Rt^2}{\omega},$$

et le paramètre du mouvement hélicoïdal correspondant sera

$$(2) \qquad k = \frac{g}{\omega} = \frac{Pr^2 + Qs^2 + Rt^2}{P^2r^2 + Q^2s^2 + R^2t^2},$$

d'où l'on voit que *le lieu des déplacements O'O″ du point central, pour lesquels le mouvement du solide a un paramètre hélicoïdal donné, est un cône du second ordre.*

Le lieu des axes instantanés qui correspondent à un même paramètre k s'obtiendra en éliminant r, s, t entre les équations (1) et (2). Or, si l'on multiplie haut et bas les rapports (1) par Pr, Qs, Rt respectivement et si l'on ajoute terme à terme, on obtient la quantité k comme valeur commune de ces mêmes rapports. Le résultat de l'élimination sera donc

$$\begin{vmatrix} 1 - kP, & Qc, & -Rb \\ -Pc, & 1 - kQ, & Ra \\ Pb, & -Qa, & 1 - kR \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\frac{a^2}{P} + \frac{b^2}{Q} + \frac{c^2}{R} + \frac{1}{PQR} - k^3 = 0.$$

D'où l'on voit que *le lieu des axes instantanés glissants relatifs des déplacements hélicoïdaux de même paramètre est un hyperboloïde concentrique et homothétique à l'hyperboloïde principal relatif à des mouvements de paramètre nul.*

En résumé, *le solide se trouve découpé par une série d'hyperboloïdes homothétiques et concentriques. Toutes les génératrices d'un même système de chacun d'eux sont des axes instantanés pour des déplacements convenablement choisis. Enfin celles de ces génératrices qui appartiennent à un même hyperboloïde correspondent à des mouvements hélicoïdaux de même paramètre.*

Quant au cône des déplacements du point O', son équation est

$$Pr^2 + Qs^2 + Rt^2 - k\,(P^2r^2 + Q^2s^2 + R^2t^2) = 0.$$

Si l'on fait varier k, on obtient une série de cônes qui ont pour axes les axes de coordonnées.

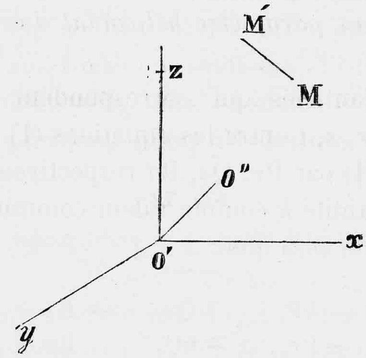
Déplacements simultanés des différents points du solide.

51. Les formules qui donnent le déplacement d'un point quelconque M (a, b, c) du corps

$$\begin{aligned} \delta x &= r + \mathrm{Q}cs - \mathrm{R}bt, \\ \delta y &= -\mathrm{P}cr + s + \mathrm{R}at, \\ \delta z &= \mathrm{P}br - \mathrm{Q}as + t, \end{aligned}$$

montrent qu'à toute figure infiniment petite décrite par le point O″ dont les coor-

Fig. 31.



données sont r, s, t, correspond une figure homographique décrite par M′ autour du point M.

Supposons par exemple que le point O″ décrive un plan infiniment voisin de O′

$$\mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t = \varepsilon,$$

le point M′ décrira un plan infiniment voisin de M et dont l'équation sera

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \delta x & 1 & \mathrm{Q}c & -\mathrm{R}b \\ \delta y & -\mathrm{P}c & 1 & \mathrm{R}a \\ \delta z & \mathrm{P}b & -\mathrm{Q}a & 1 \\ \varepsilon & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = 0,$$

en y regardant δx, δy, δz comme des coordonnées courantes.

La distance au point M du plan décrit par M′ est proportionnelle à la distance ε du point O′ du plan décrit par O″. Si ce dernier passe par O′, ou si l'on a $\varepsilon = 0$, le plan décrit par M′ passe par M, et tous les points du solide décriront des éléments de surface. Cela pouvait se prévoir, car le point O″ étant astreint à rester sur un plan, le solide se trouve dès lors assujetti à quatre conditions.

Supposons maintenant que le point M se trouve sur l'hyperboloïde central, ou que l'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & Qc & -Rb \\ -Pc & 1 & Ra \\ Pb & -Qa & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

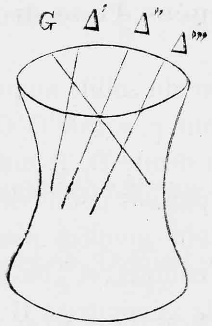
Le plan (2) décrit par M′ passera par M, quels que soient les infiniment petits r, s, t, c'est-à-dire quel que soit le mouvement du solide compatible avec ses liaisons. Donc :

Tandis que les différents points du solide peuvent se mouvoir en général dans toutes les directions, ceux qui se trouvent sur l'hyperboloïde $\Delta = 0$ *ne décrivent que des éléments de surface* (1).

On peut se rendre compte de cette propriété des points de l'hyperboloïde central par les considérations suivantes :

Un déplacement quelconque du solide peut en général être regardé comme résultant de trois déplacements possibles, eu égard aux liaisons. Choisissons pour ces trois déplacements trois rotations sans glissement autour des génératrices Δ', Δ'', Δ''' de l'hyperboloïde central. Un point quelconque M de cette surface fait

Fig. 32.



partie d'une certaine génératrice G d'un système opposé à Δ', Δ'', Δ''', et il est clair qu'une combinaison quelconque de rotations autour de ces dernières droites ne pourra faire éprouver au point M que des déplacements normaux à la droite GM, et que par suite ce point M ne décrira qu'un élément de surface normale GM.

Supposons actuellement que l'on fasse décrire au point O″ un ellipsoïde infiniment petit ayant O′ pour centre; il est évident qu'un point quelconque du solide M′ décrira un autre ellipsoïde ayant M point centre.

D'un autre côté, il est clair que, au milieu ω d'un segment $O''_1 O''_2$ qui joint le point O''_1 $(r_1\ s_1\ t_1)$ au point O''_2 $(r_2\ s_2\ t_2)$, correspond le milieu μ de la droite $M'_1 M'_2$. Donc, à un plan diamétral de l'ellipsoïde décrit par O″ correspond un plan diamétral de celui que décrit M′ l'homologue de O″.

(1) Mannheim, *Journal de l'École polytechnique*, 43e cahier, t. XXVI

Si en particulier le point O' se meut sur une sphère, on peut dire qu'à trois déplacements rectangulaires et égaux du point O' correspondent pour tous les points du solide des déplacements suivant trois diamètres conjugués de leurs ellipsoïdes respectifs.

A un cône du second ordre décrit par O'' avec O' comme sommet, correspond un cône du second ordre décrit par M'' avec le sommet M'. Considérons spécialement le cône des déplacements de O' auxquels correspondent les droites immobiles Δ' Δ'' ... de l'hyperboloïde central. A un déplacement O'O'' situé sur ce cône répond une rotation du solide autour de Δ' génératrice de l'hyperboloïde. Dans cette rotation, un point quelconque du solide subira un déplacement MV perpendiculaire au plan (M, Δ'); mais ce dernier plan est tangent à l'hyperboloïde central. Donc, le lieu des déplacements infiniment petits du point M est le cône supplémentaire du cône qui, ayant M pour sommet, est circonscrit à l'hyperboloïde central. Si le point M fait partie du lieu connu des sommets des cônes de révolution circonscrits à l'hyperboloïde, le cône des déplacements MV sera aussi de révolution.

Droites conjuguées d'une droite donnée.

52. Soit D une droite quelconque du solide auquel nous faisons subir un déplacement déterminé par les projections r, s, t de O'O'' sur les axes de coordonnées. Pour obtenir une conjuguée de la droite D, il suffit de prendre sur cette droite deux points M' et M'' et de mener par ces points des plans normaux à leurs déplacements respectifs. Or nous pouvons prendre pour ces deux points ceux où la droite D rencontre l'hyperboloïde central, et l'on sait que tous les déplacements possibles de M' sont normaux à la génératrice G' passant par M' et qui est du système opposé à celui des droites immobiles Δ' Δ'' ... Donc, les plans normaux à tous les déplacements possibles de M' passeront tous par G'.

On verrait de même que les plans normaux à toutes les trajectoires possibles de M'' passent tous par la génératrice G'' qui contient M'' et qui est du système de G'.

On peut donc dire que :

L'ensemble des conjuguées d'une droite donnée forme une congruence ayant pour directrices les deux génératrices de l'hyperboloïde central qui rencontrent la droite donnée et qui sont du système opposé à celui des droites susceptibles de devenir immobiles.

Si en particulier la droite D est tangente à l'hyperboloïde, l'ensemble de ses conjuguées n'est autre chose que la congruence des tangentes à l'hyperboloïde que l'on peut mener à cette surface en tous les points de la génératrice G qui passe par le point de contact.

Systèmes de complexes de droites perpendiculaires aux trajectoires possibles de leurs points.

53. Considérons un déplacement possible du solide déterminé par le système des valeurs r, s, t des projections de O'O'' sur les axes de coordonnées, à ce déplacement correspond un complexe linéaire de droites perpendiculaires aux trajectoires de tous leurs points. Pour en obtenir l'équation, considérons la droite

$$\begin{aligned} x &= mz + \mu, \\ y &= nz + \nu, \end{aligned}$$

cette droite fera partie du complexe s'il existe un point a, b, c tel que l'on ait

$$\begin{aligned} a &= mc + \mu, \\ b &= nc + \nu, \end{aligned}$$

et

$$m\delta x + n\delta y + \delta z = 0,$$

ou bien

$$m(r + Qcs - Rbt) + n(-Pcr + s + Rat) + Pbr - Qas + t = 0.$$

Remplaçant a et b par leurs valeurs $mc + \mu$ et $nc + \nu$, il vient

$$m[r + Qcs - Rt(nc + \nu)] + n[-Pcr + s + Rt(mc + \mu)] + Pr(nc + \nu) - Qs(mc + \mu) + t = 0,$$

puis réduisant, on a

$$r(m + P\nu) + s(n - Q\mu) + t(1 - R\omega) = 0,$$

en posant $m\nu - n\mu = \omega$.

Si l'on donne aux variables r, s, t toutes les valeurs possibles, on aura le système de tous les complexes de droites perpendiculaires aux trajectoires de leurs points.

Tous ces complexes possèdent en commun l'hyperboloïde

$$m + P\nu = 0, \quad n - Q\mu = 0, \quad 1 - R\omega = 0;$$

pour obtenir l'équation de cet hyperboloïde, il suffit d'éliminer m, n, μ, ν entre les équations précédentes et celles de la droite. On est conduit à l'équation

$$\frac{a^2}{P} + \frac{b^2}{Q} + \frac{c^2}{R} + \frac{1}{PQR} = 0$$

qui n'est autre que celle de l'hyperboloïde central. Cela devait être, car on a vu que les génératrices G de cette surface sont normales à toutes les trajectoires possibles de leurs différents points.

CHAPITRE IV

DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A DEUX CONDITIONS.

54. Lorsqu'un solide est assujetti à deux conditions, on peut considérer les six paramètres qui déterminent sa position comme des fonctions de quatre variables indépendantes r, s, t, θ. La variation de chacune de ces quantités produit un certain déplacement du corps et le déplacement total d'un point quelconque M (a, b, c) sera la somme géométrique des chemins dus isolément à la variation de r, de s, de t et de θ, de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
\delta x &= (u'_r + q_r c - r_r b)\, r + (u'_s + q_s c - r_s b)\, s + (u'_t + q_t c - r_t b)\, t + (u'_\theta + q_\theta c - r_\theta b)\, \theta,\\
\delta y &= (v'_r + r_r a - p_r c)\, r + (v'_s + r_s a - p_s c)\, s + (v'_t + r_t a - p_t c)\, t + (v'_\theta + r_\theta a - p_\theta c)\, \theta,\\
\delta z &= (w'_r + p_r b - q_r a)\, r + (w'_s + p_s b - q_s a)\, s + (w'_t + p_t b - q_t a)\, t + (w'_\theta + p_\theta b - q_\theta a)\, \theta.
\end{aligned}$$

Il est clair qu'en général les points du solide sont susceptibles de se mouvoir dans toutes les directions. Il existe cependant de certaines séries de points qui ne peuvent décrire que des éléments de surface et cela quel que soit le déplacement compatible avec les liaisons. Pour obtenir ces points, il suffit d'exprimer que la direction du déplacement δx, δy, δz est perpendiculaire à une autre direction α, β, γ quels que soient r, s, t, θ, ce qui donne la condition

$$\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma dz = 0.$$

On est ainsi conduit à quatre relations analogues à la suivante :

$$\alpha (u'_r + q_r c - r_r b) + \beta (v'_r + r_r a - p_r c) + \gamma (w'_r + p_r b - q_r a) = 0,$$

que l'on obtiendrait en remplaçant l'indice r par les indices s, t et θ. Faisant ensuite $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\beta}{\gamma} = n$, $c = 0$, $a = \mu$, $b = \nu$ et $\omega = m\nu - n\mu$, il vient

$$u'_r m + v'_r n + w'_r + p_r \nu - q_r \mu - r_r \omega = 0,$$

que nous écrirons plus simplement $\Omega_r = 0$, et les deux droites communes aux quatre complexes

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_s = 0, \quad \Omega_t = 0, \quad \Omega_\theta = 0,$$

seront le lieu des points qui ne décrivent que des éléments de surface. On peut donc dire que :

Dans un solide assujetti à deux conditions, il existe deux droites qui ont la propriété d'être normales à toutes les trajectoires possibles de leurs différents points. On voit aussi que ces points ne peuvent décrire que des éléments de surface.

Droites immobiles.

55. Cherchons actuellement si, parmi tous les déplacements possibles du solide, il en existe pour lesquels certaines droites restent immobiles et qui puissent par suite servir d'axes de rotation sans glissement pour ces mêmes déplacements.

Soient

$$(1)\qquad x = a + \alpha\rho, \quad y = b + \beta\rho, \quad z = c + \gamma\rho,$$

les équations de l'une de ces droites inconnues, les cosinus directeurs devant être invariables, on doit avoir les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta\alpha = (q_r\gamma - r_r\beta)\,r + (q_s\gamma - r_s\beta)\,s + (q_t\gamma - r_t\beta)\,t + (q_\theta\gamma - r_\theta\beta)\,\theta = 0,\\ \delta\beta = (r_r\alpha - p_r\gamma)\,r + (r_s\alpha - p_s\gamma)\,s + (r_t\alpha - p_t\gamma)\,t + (r_\theta\alpha - p_\theta\gamma)\,\theta = 0,\\ \delta\gamma = (p_r\beta - q_r\alpha)\,r + (p_s\beta - q_s\alpha)\,s + (p_t\beta - q_t\alpha)\,t + (p_\theta\beta - q_\theta\alpha)\,\theta = 0, \end{array}\right.$$

dont la 3e est une conséquence des deux autres, puisque l'on a

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0.$$

D'un autre côté, le point a, b, c de la droite devant être immobile, on aura

$$(3)\left\{\begin{array}{l} (u'_r + q_r c - r_r b)\,r + (u'_s + q_s c - r_s b)\,s + (u'_t + q_t c - r_t b)\,t + (u'_\theta + q_\theta c - r_\theta b)\theta = 0,\\ (v'_r + r_r a - p_r c)\,r + (v'_s + r_s a - p_s c)\,s + (v'_t + r_t a - p_t c)\,t + (v'_\theta + r_\theta a - p_\theta c)\theta = 0,\\ (w'_r + p_r b - q_r a)\,r + (w'_s + p_s b - q_s a)\,s + (w'_t + p_t b - q_t a)\,t + (w'_\theta + p_\theta b - q_\theta a)\theta = 0. \end{array}\right.$$

Éliminant ensuite r, s, t, θ entre les deux premières (2) et les deux premières (3), puis entre les deux premières (2) et les dernières (3), il vient les deux équations

$$\begin{vmatrix} q_r\gamma - r_r\beta, & r_r\alpha - p_r\gamma, & u'_r + q_r c - r_r b, & v'_r + r_r a - p_r c\\ q_s\gamma - r_s\beta, & r_s\alpha - p_s\gamma, & u'_s + q_s c - r_s b, & v'_s + r_s a - p_s c\\ q_t\gamma - r_t\beta, & r_t\alpha - p_t\gamma, & u'_t + q_t c - r_t b, & v'_t + r_t a - p_t c\\ q_\theta\gamma - r_\theta\beta, & r_\theta\alpha - p_\theta\gamma, & u'_\theta + q_\theta c - r_\theta b, & v'_\theta + r_\theta a - p_\theta c \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} & & & w'_r + p_r b - q_r a\\ \text{»} & \text{»} & \text{»} & w'_s + p_s b - q_s a\\ & & & w'_t + p_t b - q_t a\\ & & & w'_\theta + p_\theta b - q_\theta a \end{vmatrix} = 0.$$

Posant enfin $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\beta}{\gamma} = m$, $c = 0$, $a = \mu$, $b = \nu$, $\omega = m\nu - n\mu$, ces équations prennent la forme

$$\begin{aligned} Am + Bn + C + P\nu + Q\mu &= 0, \\ A'm + B'n + C' + P'\nu + Q'\mu + R'\omega &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc dire que *les droites susceptibles de rester immobiles pour des déplacements convenables du solide constituent une congruence qui a évidemment pour directrices les deux droites perpendiculaires aux trajectoires de leurs points qui ont été obtenues précédemment.*

Axes instantanés glissants.

56. Proposons-nous plus généralement la recherche des axes instantanés glissants relatifs à tous les déplacements possibles du système des valeurs r, s, t, θ attribuées aux variables indépendantes.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} P &= p_r r + p_s s + p_t t + p_\theta \theta, \\ Q &= q_r r + q_s s + q_t t + q_\theta \theta, \\ R &= r_r r + r_s s + r_t t + r_\theta \theta, \end{aligned}$$

les équations de l'axe instantané seront

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R},$$

les cosinus directeurs de cet axe seront

$$\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

et le glissement le long de l'axe aura pour valeur

$$g = \frac{P\delta x + Q\delta y + R\delta z}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

Quant à la vitesse de rotation ω, sa formule est

$$\omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

ce qui donne pour le paramètre du mouvement

$$k = \frac{g}{\omega} = \frac{P\delta x + Q\delta y + R\delta z}{P^2 + Q^2 + R^2}. \tag{2}$$

Cela posé, multiplions les deux termes des rapports (1) par P, Q, R et ajoutons terme à terme, il vient pour représenter l'axe instantané deux quelconques des équations

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R} = k.$$

La direction de l'axe ne devant pas changer, on doit avoir

$$\delta\alpha = 0, \quad \delta\beta = 0, \quad \delta\gamma = 0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer r, s, t, θ entre les quatre équations homogènes

$$\begin{aligned} \delta x - k\mathrm{P} = 0, &\quad \delta\alpha = 0, \\ \delta y - k\mathrm{Q} = 0, &\quad \delta\beta = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, en introduisant les éléments ordinaires de la droite,

$$\begin{vmatrix} q_r - r_r n, & r_r m - p_r, & u'_r - r_r \nu - k p_r, & v'_r + r_r \mu - k q_r \\ q_s - r_s n, & r_s m - p_s, & u'_s - r_s \nu - k p_s, & v'_s + r_s \mu - k q_s \\ q_t - r_t n, & r_t m - p_t, & u'_t - r_t \nu - k p_t, & v'_t + r_t \mu - k q_t \\ q_\theta - r_\theta n, & r_\theta m - p_\theta, & u'_\theta - r_\theta \nu - k p_\theta, & v'_\theta + r_\theta \mu - k q_\theta \end{vmatrix} = 0.$$

Il est facile de voir que le coefficient de k^2 est nul, que celui de k est de la forme $m\mathrm{A} + n\mathrm{B}$, A et B étant des constantes, donc le déterminant est de la forme

$$(m\mathrm{A} + n\mathrm{B})\,k + \Omega = 0.$$

Donc, *l'ensemble de tous les axes instantanés glissants dont le paramètre correspondant est donné forme un complexe linéaire. Si l'on fait varier k, on a un système de complexes contenant la congruence*

$$m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0, \quad \Omega = 0.$$

CHAPITRE V

DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A UNE SEULE CONDITION.

57. Lorsqu'un solide est assujetti à une condition unique, les paramètres qui fixent sa position peuvent être considérés comme des fonctions de 5 variables indépendantes r, s, t, θ, φ, et les déplacements infiniment petits d'un point quelconque M (a, b, c) ont pour projections des expressions de la forme

$$\begin{aligned}
\delta x &= a'_r r + a'_s s + a'_t t + a'_\theta \theta + a'_\varphi \varphi, \\
\delta y &= b'_r r + b'_s s + b'_t t + b'_\theta \theta + b'_\varphi \varphi, \\
\delta z &= c'_r r + c'_s s + c'_t t + c'_\theta \theta + c'_\varphi \varphi,
\end{aligned}$$

en posant $a'_r = u'_r + q_r c - r_r b$, etc...

On voit immédiatement qu'il n'existe pas de droites normales aux trajectoires de leurs différents points, quel que soit le déplacement possible du solide. Il faudrait égaler à zéro les 5 coefficients de r, s, t, θ, φ dans l'équation

$$\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z = 0,$$

ce qui donnerait 5 équations de la forme

$$\alpha a'_r + \beta b'_r + \gamma c'_r = 0,$$

c'est-à-dire 5 complexes linéaires qui n'ont pas en général de droites communes.

Quant aux droites du solide susceptibles d'être immobilisées pour des déplacements convenables du corps, nous les obtiendrons en éliminant r, s, t, φ, θ entre les équations

$$\begin{aligned}
\delta \alpha &= \alpha'_r r + \alpha'_s s + \alpha'_t t + \alpha'_\theta \theta + \alpha'_\varphi \varphi = 0, \\
\delta \beta &= \beta'_r r + \beta'_s s + \beta'_t t + \beta'_\theta \theta + \beta'_\varphi \varphi = 0, \\
\delta x &= a'_r r + a'_s s + a'_t t + a'_\theta \theta + a'_\varphi \varphi = 0, \\
\delta y &= b'_r r + b'_s s + b'_t t + b'_\theta \theta + b'_\varphi \varphi = 0, \\
\delta z &= c'_r r + c'_s s + c'_t t + c'_\theta \theta + c'_\varphi \varphi = 0,
\end{aligned}$$

où $\alpha'_r = q_r \gamma - r_r \beta$, etc...

On arrive ainsi à l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha'_r & \beta'_r & a'_r & b'_r & c'_r \\ \alpha'_s & \beta'_s & a'_s & b'_s & c'_s \\ \alpha'_t & \beta'_t & a'_t & b'_t & c'_t \\ \alpha'_\theta & \beta'_\theta & a'_\theta & b'_\theta & c'_\theta \\ \alpha'_\varphi & \beta'_\varphi & a'_\varphi & b'_\varphi & c'_\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Introduisant enfin les éléments ordinaires de la droite m, n, μ, ν et $\omega = m\nu - n\mu$, il vient

$$\begin{bmatrix} q_r - nr_r, & mr_r - p_r, & u'_r - r_r\nu, & v'_r + r_r\mu, & w'_r + p_r\nu - q_r\mu \\ » & » & » & » & » \end{bmatrix} = 0,$$

équation qui, développée, se réduit à la forme

$$\mathrm{A}m + \mathrm{B}n + \mathrm{C} + \mathrm{D}\mu + \mathrm{E}\nu + \mathrm{F}\omega = 0,$$

d'où l'on voit que *l'ensemble des droites qui sont susceptibles d'être immobilisées constitue un complexe linéaire qui dépend de la nature de la condition imposée au solide.*

Dans le cas où la condition imposée au solide consiste en ce qu'un point de celui-ci est astreint à se mouvoir sur une surface donnée fixe, la proposition précédente est presque évidente et le complexe des droites immobiles, c'est-à-dire des droites pouvant servir d'axes instantanés sans glissement, n'est autre que l'ensemble de toutes les droites qui rencontrent la normale à la surface donnée au point qui doit la décrire. On voit en effet que, si l'on fait tourner le corps autour d'une droite quelconque rencontrant cette normale, le pied de celle-ci ne quittera pas la surface. Mais la condition dont il s'agit n'est pas la plus générale que l'on puisse imposer à un solide ainsi que nous le verrons plus loin.

Droites immobiles qui correspondent à une condition donnée.

58. Une condition quelconque imposée à un corps solide se traduit par une relation entre les coordonnées variables de certains points $x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$ etc... liés au corps en mouvement, et certains cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots$

Soit

$$\mathrm{F}\,(x_1 y_1 z_1\, x_2 y_2 z_2 \ldots \alpha_1 \beta_1 \gamma_1\, \alpha_2 \ldots) = 0$$

cette relation. Si l'on donne au solide un déplacement compatible avec cette condition, on aura entre les variations des coordonnées des points considérés et celles des cosinus directeurs l'équation

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx_1}\,\delta x_1 + \frac{d\mathrm{F}}{dy_1}\,\delta y_1 + \frac{d\mathrm{F}}{dz_1}\,\delta z_1 \ldots \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}\,\delta\alpha_1 \ldots = 0.$$

D'un autre côté, soient

$$\frac{x-A}{\alpha}=\frac{y-B}{\beta}=\frac{z-C}{\gamma}$$

les équations d'une droite immobile, c'est-à-dire d'une droite autour de laquelle on peut faire tourner le solide sans que la relation (1) cesse d'être satisfaite. Le déplacement d'un point quelconque x, y, z sera donné par les formules

$$\begin{aligned} \delta x &= V\beta(z-C)-V\gamma(y-B), \\ \delta y &= V\gamma(x-A)-V\alpha(z-C), \\ \delta z &= V\alpha(y-B)-V\beta(x-A), \end{aligned}$$

V représentant la vitesse de rotation.

Ces formules, appliquées aux points $x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2 \ldots$ et aux cosinus $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \ldots$, donnent, après la substitution dans l'équation (1) et la suppression de V,

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\frac{dF}{dx_1}[\beta(z_1-C)-\gamma(y_1-B)]+\frac{dF}{dy_1}[\gamma(x_1-A)-\alpha(z_1-C)]+\frac{dF}{dz_1}[\alpha(y_1-B)-\beta(x_1-A)] \\ &+\frac{dF}{dx_2}[\beta(z_2-C)-\gamma(y_2-B)]+\ldots \\ &+\ldots \\ &+\frac{dF}{d\alpha_1}[\beta\gamma_1-\gamma\beta_1]+\frac{dF}{d\beta_1}[\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1]+\frac{dF}{d\gamma_1}[\alpha\beta_1-\beta\alpha_1] \\ &+\frac{dF}{d\alpha_2}[\beta\gamma_2-\gamma\beta_2]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0. \end{aligned}\right.$$

Si enfin dans cette équation on introduit les éléments ordinaires de la droite en faisant

$$A=\mu, \quad B=\nu, \quad C=0, \quad \frac{\alpha}{\gamma}=m, \quad \frac{\beta}{\gamma}=n, \quad m\nu-n\mu=\omega,$$

on obtient un résultat de la forme

$$Am+Bn+C+P\mu+Q\nu+R\omega=0,$$

qui représente un complexe linéaire. Donc :

Pour une liaison donnée, l'ensemble des droites immobiles ou susceptibles de servir d'axe de rotation sans glissement constitue un complexe linéaire.

Dans le cas particulier où un point du solide $x_1\, y_1\, z_1$ est assujetti à se mouvoir sur une surface donnée $F(x_1\, y_1\, z_1)=0$, la relation (4) se réduit à celle-ci :

$$\frac{dF}{dx_1}[\beta(z_1-C)-\gamma(y_1-B)]+\frac{dF}{dy_1}[\gamma(x_1-A)-\alpha(z_1-C)]+\frac{dF}{dz_1}[\alpha(y_1-B)-\gamma(x_1-A)]=0,$$

ou encore à

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_1} & \alpha & x_1-A \\ \frac{dF}{dy_1} & \beta & y_1-B \\ \frac{dF}{dz_1} & \gamma & z_1-C \end{vmatrix}=0,$$

qui exprime que la droite immobile Δ rencontre la normale à la surface. Il est évident d'ailleurs que toute rotation autour d'une droite Δ rencontrant la normale fait décrire au pied de celle-ci un élément de trajectoire situé sur la surface donnée.

Supposons maintenant que la condition imposée au solide se traduise par une relation entre les directions de certaines droites $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \ldots$ l'équation (2) devient alors

$$\frac{dF}{d\alpha_1}(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) + \frac{dF}{d\beta_1}(\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1) + \frac{dF}{d\gamma_1}(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)$$
$$+ \frac{dF}{d\alpha_2}(\beta\gamma_2 - \gamma\beta_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

ou encore, en posant toujours $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\beta}{\gamma} = n$,

$$Am + Bn + C = 0,$$

qui représente un complexe linéaire de droites parallèles à un plan fixe.

On peut se rendre compte de ce résultat de la manière suivante, en supposant que la condition imposée au solide ne contienne toutefois qu'une seule direction (α, β, γ). Si par un point fixe de l'espace on mène des parallèles à la direction mobile $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ dans ses positions successives, on obtient un certain cône directeur, et il est évident que toute rotation infiniment petite autour d'une droite située dans le plan normal à l'élément de ce cône, imprime à la direction un changement compatible avec la condition imposée. Il en sera de même de tout axe de rotation parallèle au plan normal précédent. Du reste, l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{d\alpha_1} & \alpha & \alpha_1 \\ \frac{dF}{d\beta_1} & \beta & \beta_1 \\ \frac{dF}{d\gamma_1} & \gamma & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

exprime visiblement que la direction $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ de l'axe cherché, celle de la direction entraînée α_1, β_1, γ_1 et celle de la normale au cône directeur sont parallèles à un même plan.

Il nous est maintenant facile de déterminer l'ensemble des droites immobiles Δ compatibles avec un système de liaisons données.

Supposons par exemple que trois points d'un solide M_1, M_2, M_3 soient assujettis à se mouvoir sur 3 surfaces données. L'ensemble des droites immobiles possibles est évidemment l'hyperboloïde des 3 normales aux surfaces données. Si de plus le solide est assujetti à une relation où figurent des directions $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \ldots$, les droites immobiles devant en outre être parallèles à un certain plan, ne peuvent être que les deux génératrices de l'hyperboloïde qui sont parallèles à ce plan et d'un système opposé à celui des 3 normales.

Si deux points d'un solide sont assujettis à se mouvoir sur deux surfaces fixes, l'ensemble des axes possibles forme une congruence qui a pour directrices les deux normales. Si en outre le solide est astreint à une condition de direction, les axes possibles devant être parallèles à un certain plan forment un paraboloïde.

Si enfin le solide est assujetti à deux conditions d'orientation, les axes possibles devant être parallèles à deux plans fixes sont parallèles à leur intersection, et si en outre un point du corps se meut sur une surface, les axes instantanés possibles forment un plan mené par la normale à cette surface.

En résumé, *les axes instantanés possibles forment un complexe, une congruence, un hyperboloïde ou un système de deux droites, selon que le solide est assujetti à une, à deux, à trois ou à quatre conditions. Si le nombre des conditions s'élève à cinq, il n'existe plus de droites immobiles d'une manière générale.*

Axes instantanés relatifs à une condition donnée.

59. Si l'on adjoint à la rotation V autour d'une droite immobile Δ un certain glissement g le long de cette droite, les formules du déplacement deviennent

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= V\beta(z_1 - C) - V\gamma(y_1 - B) + g\alpha, \\ \delta y_1 &= V\gamma(x_1 - A) - V\alpha(z_1 - C) + g\beta, \\ \delta z_1 &= V\alpha(y_1 - B) - V\beta(x_1 - A) + g\gamma, \end{aligned}$$

par suite, l'équation (2) se complique des termes

$$\left[\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{dx_2} + \dots\right] g\alpha + \left[\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} + \dots\right] g\beta + \left[\frac{dF}{dz_1} + \frac{dF}{dz_2} + \dots\right] g\alpha.$$

Divisant ensuite par $V\gamma$, on trouve, pour le complexe des axes instantanés glissants compatibles avec la condition (2), une équation de la forme

$$\Omega + k(Mm + Nn + P) = 0.$$

Si k varie, le complexe change en conservant celles de ses droites qui sont parallèles à un certain plan.

Quand un solide est assujetti à deux conditions, l'ensemble des axes instantanés glissants de même paramètre k constitue une congruence.

A trois conditions correspondent les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde trouvé précédemment, et qui varie avec k.

A quatre conditions correspondent deux axes instantanés glissants de même paramètre k et qui font partie d'un conoïde dont nous avons déjà parlé.

Enfin, si le solide est assujetti à cinq conditions, il n'existe plus d'axes instantanés glissants ayant un paramètre arbitraire k assigné d'avance.

Examinons ce cas en particulier. Aux cinq conditions données correspondent cinq complexes auxquels l'axe cherché doit appartenir et dont les équations sont de la forme

$$\begin{aligned}
&(A_1 + kM_1)\,m + (B_1 + kN_1)\,n + (C_1 + kL_1) + P_1\mu + Q_1\nu + R_1\omega = 0,\\
&(A_2 + kM_2)\,m + (B_2 + kN_2)\,n + (C_2 + kL_2) + P_2\mu + Q_2\nu + R_2\omega = 0,\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\vdots\\
&(A_5 + kM_5)\,m + (B_5 + kN_5)\,n + (C_5 + kL_5) + P_5\mu + Q_5\nu + R_5\omega = 0.
\end{aligned}$$

Éliminant $\omega = m\nu - n\mu$, nous obtenons 4 équations linéaires en m, n, μ, ν, d'où nous tirerons pour ces éléments des valeurs fonctions de k. Ces valeurs s'expriment par des fractions rationnelles dont les deux termes sont du second degré en k, et, substituées dans l'une des équations des complexes, elles donnent une équation du 5^e degré en k.

Donc, *quand un solide est assujetti à cinq conditions, il existe en général cinq axes instantanés glissants ayant chacun un paramètre unique et compatibles avec ces conditions.*

Droites perpendiculaires à toutes les trajectoires possibles de leurs différents points.

60. Considérons d'abord un solide assujetti à une condition. Nous avons vu que l'ensemble des axes instantanés Δ sans glissement constitue un complexe linéaire. Le solide peut donc tourner autour d'une infinité de droites Δ; or, pour qu'une droite D tournant autour d'une autre Δ soit normale à la trajectoire de tous ses points, il faut et il suffit que D rencontre Δ.

Cherchons donc à quelle condition une droite peut rencontrer toutes les droites d'un complexe

$$(\Delta)\qquad Am + Bn + C + P\nu - Q\mu - R\omega = 0,$$

Il suffit d'identifier cette équation avec celle du complexe des droites qui rencontrent une droite donnée

$$\begin{cases} x = m_1 z + \mu_1, \\ y = n_1 z + \nu_1, \end{cases}$$

et qui est

$$(m - m_1)(\nu - \nu_1) - (n - n_1)(\mu - \mu_1) = 0,$$

o bien

$$-\nu_1 m + \mu_1 n + (m_1\nu_1 - n_1\mu_1) - m_1\nu + n_1\mu + \omega = 0.$$

L'identification indiquée donne

$$\nu_1 = \frac{A}{R},\quad \mu_1 = -\frac{B}{R},\quad m_1\nu_1 - n_1\mu_1 = -\frac{C}{R},$$
$$m_1 = \frac{P}{R},\quad n_1 = \frac{Q}{R},$$

et l'élimination des indéterminés m_1, n_1, μ_1, ν_1, conduit à la condition

$$AP + BQ + CR = 0,$$

qui exprime que le paramètre du complexe doit être nul.

Or nous avons vu qu'à une condition

$$F(x_1 y_1 z_1\, x_2 y_2 z_2 \ldots \alpha_1 \beta_1 \gamma_1\, \alpha_2 \ldots) = 0$$

correspond le complexe des axes possibles

$$\begin{aligned} m&\left[\Sigma\left(\frac{dF}{dz_1} y_1 - \frac{dF}{dy_1} z_1\right) + \Sigma\left(\frac{dF}{d\gamma_1}\beta_1 - \frac{dF}{d\beta_1}\gamma_1\right)\right] \\ +\, n&\left[\Sigma\left(\frac{dF}{dx_1} z_1 - \frac{dF}{dz_1} x_1\right) + \Sigma\left(\frac{dF}{d\alpha_1}\gamma_1 - \frac{dF}{d\gamma_1}\alpha_1\right)\right] \\ +&\left[\Sigma\left(\frac{dF}{dy_1} x_1 - \frac{dF}{dx_1} y_1\right) + \Sigma\left(\frac{dF}{d\beta_1}\alpha_1 - \frac{dF}{d\alpha_1}\beta_1\right)\right] + \nu\Sigma\frac{dF}{dx_1} - \mu\Sigma\frac{dF}{dy_1} - \omega\Sigma\frac{dF}{dz_1} = 0. \end{aligned}$$

Donc, pour qu'il existe une droite normale à toutes les trajectoires possibles de ses points, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} &\Sigma\frac{dF}{dx_1}\left[\Sigma\left(\frac{dF}{dz_1} y_1 - \frac{dF}{dy_1} z_1\right) + \Sigma\left(\frac{dF}{d\gamma_1}\beta_1 - \frac{dF}{d\beta_1}\gamma_1\right)\right] \\ &+ \Sigma\frac{dF}{dy_1}\left[\Sigma\left(\frac{dF}{dx_1} z_1 - \frac{dF}{dz_1} x_1\right) + \Sigma\left(\frac{dF}{d\alpha_1}\gamma_1 - \frac{dF}{d\gamma_1}\alpha_1\right)\right] \\ &+ \Sigma\frac{dF}{dz_1}\left[\Sigma\left(\frac{dF}{dy_1} x_1 - \frac{dF}{dx_1} y_1\right) + \Sigma\left(\frac{dF}{d\beta_1}\alpha_1 - \frac{dF}{d\alpha_1}\beta_1\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant à tous les indices de x, y, z, α, β, γ.

Si la condition imposée au solide se réduit à

$$F(x_1 y_1 z_1) = 0,$$

qui exprime que l'un de ses points se meut sur une surface, le complexe des axes possibles se réduit à

$$m\left[\frac{dF}{dz_1} y_1 - \frac{dF}{dy_1} z_1\right] + n\left[\frac{dF}{dx_1} z_1 - \frac{dF}{dz_1} x_1\right] + \frac{dF}{dy_1} x_1 - \frac{dF}{dx_1} y_1 + \nu\frac{dF}{dx_1} - \mu\frac{dF}{dy_1} - \omega\frac{dF}{dz_1} = 0,$$

qui représente un complexe dont le paramètre est nul et qui n'est autre que celui de toutes les droites qui rencontrent la normale à la surface donnée.

Voici un exemple dans lequel le complexe des axes possibles a encore un paramètre nul.

Un solide se meut de manière à ce que la somme des z de trois de ses points M_1 $(x_1\ y_1\ z_1)$, M_2 $(x_2\ y_2\ z_2)$, M_3 $(x_3\ y_3\ z_3)$ reste constante. La condition $F = 0$ se réduit alors à

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

Le complexe des axes devient

$$(y_1 + y_2 + y_3)\,m + (x_1 + x_2 + x_3)\,n - 3\omega = 0,$$

et son axe

$$b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

résultat prévu, puisque d'après la condition donnée le centre de gravité du triangle $M_1\,M_2\,M_3$ conserve une hauteur constante et par suite se meut sur un élément de surface qui n'est autre qu'un plan horizontal, et il est clair que toute droite rencontrant la verticale du centre de gravité peut servir d'axe instantané sans glissement.

Voici un autre exemple pour lequel le paramètre du complexe n'est pas nul et dans lequel il n'existe aucune droite perpendiculaire à toutes les trajectoires possibles de ses points.

Considérons la condition

$$F = x_1 + y_2 = 0.$$

Le complexe des axes est alors

$$(-z_2)\,m + z_1 n + x_2 - y_1 + \nu - \mu = 0,$$

et son paramètre a pour numérateur $-z_2 + z_1$, expression qui n'est pas nulle. Pour que la droite cherchée existe, il faudrait que l'on eût

$$-z_2 + z_1 = 0,$$

ou que les points M_1 et M_2 fussent dans un même plan horizontal. On voit par suite que :

Les conditions que l'on peut imposer à un solide sont de deux espèces principales. Les premières sont celles pour lesquelles il existe une série de points en ligne droite ne décrivant que des éléments de surfaces trajectoires, quels que soient les déplacements possibles; les secondes sont celles pour lesquelles aucun point du solide ne peut décrire un élément de surface unique, quels que soient encore les déplacements possibles.

Lorsqu'un solide est assujetti à deux conditions, tous les axes possibles forment une congruence, ils rencontrent donc tous deux droites qui en sont les directrices et qui sont normales à toutes les trajectoires possibles de leurs points.

Si le nombre des conditions s'élève à trois, les axes possibles forment un hyperboloïde, et toutes les génératrices du système opposé à ces axes auront la propriété demandée.

Avec quatre conditions les axes possibles sont au nombre de deux, et toute droite rencontrant les deux premières sera normale à toutes les trajectoires possibles de ses points.

Enfin, avec cinq conditions, on sait que les droites normales aux trajectoires de leurs points forment un complexe linéaire.

Classement des conditions auxquelles un solide peut être assujetti.

61. Un solide étant donné dans une certaine position, on peut le déplacer infiniment peu d'une infinité de manières, et sa nouvelle situation dépend de six paramètres infiniment petits qui seront, si l'on veut, les trois coordonnées nouvelles u, v, w d'un point O' du solide qui primitivement occupait l'origine des axes fixes $O'x$, $O'y$, $O'z$, puis trois rotations infiniment petites p, q, r autour de ces mêmes axes.

Alors toute condition imposée à un solide revient à relation linéaire entre ces six paramètres de la forme

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{R}r = 0. \tag{1}$$

Cherchons les axes instantanés possibles sans glissement. Les équations de l'un d'eux seront

$$x = a + \alpha\rho, \qquad y = b + \beta\rho, \qquad z = c + \gamma\rho,$$

et, si l'on désigne par V la vitesse de rotation correspondante, un point quelconque M (x, y, z) éprouvera par le fait de cette rotation un déplacement

$$\begin{aligned} \delta x &= \mathrm{V}\beta(z - c) - \mathrm{V}\gamma(y - b), \\ \delta y &= \mathrm{V}\gamma(x - a) - \mathrm{V}\alpha(z - c), \\ \delta z &= \mathrm{V}\alpha(y - b) - \mathrm{V}\beta(x - a). \end{aligned}$$

D'un autre côté, le même point M (x, y, z) a éprouvé, par suite du déplacement u, v, w de l'origine O' et de la rotation (p, q, r), un déplacement

$$\begin{aligned} \delta x &= u + qz - ry, \\ \delta y &= u + rx - pz, \\ \delta z &= w + py - qx. \end{aligned}$$

Identifions ces deux séries de formules qui doivent donner les mêmes valeurs pour δx, δy, δz, quelles que soient x, y et z, il vient

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}\alpha = p, &&\mathrm{V}\beta = q, &&\mathrm{V}\gamma = r, \\ &\mathrm{V}\gamma b - \mathrm{V}\beta c = u, &&\mathrm{V}\alpha c - \mathrm{V}\gamma a = v, &&\mathrm{V}\beta a - \mathrm{V}\alpha b = w, \end{aligned}$$

et comme par hypothèse u, v, w, p, q, r satisfont à la condition (1), on aura, en divisant par V,

$$\mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\beta + \mathrm{R}\gamma + \mathrm{A}(\gamma b - \beta c) + \mathrm{B}(\alpha c - \gamma a) + \mathrm{C}(\beta a - \alpha b) = 0,$$

ce qui donne le complexe

$$\mathrm{P}m + \mathrm{Q}n + \mathrm{R} + \mathrm{A}\nu - \mathrm{B}\mu - \mathrm{C}\omega = 0.$$

Cela posé, nous distinguerons deux cas :

1° Le paramètre est nul et l'on a

$$AP + BQ + CR = 0.$$

On sait qu'alors toutes les droites du complexe rencontrent une même droite qui aura la propriété d'être normale à toutes les trajectoires possibles de ses points.

Demandons-nous alors quelle est la signification géométrique de la condition précédente.

Si nous donnons au solide un mouvement de *translation* quelconque compatible avec la condition (1) qui lui est imposée, il suffira de faire $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, et il vient

$$Au + Bv + Cw = 0.$$

Donc, dans toutes les translations possibles du solide, le point O′ ne sort pas d'un certain plan que nous nommerons le *plan des translations*.

Imprimons maintenant au solide toutes les rotations compatibles avec l'équation (1) sans déplacer l'origine O′, il vient

$$Pp + Qq + Rr = 0.$$

Donc, tous les axes de rotation possibles du solide (lorsque l'un de ses points est immobile) sont dans un même plan que nous appellerons le *plan des rotations*.

Or la condition (2) exprime que le plan des rotations est perpendiculaire au plan des translations

2° On a

$$AP + BQ + CR \gtrless 0.$$

Le plan des rotations est alors oblique au plan des translations, et il n'existe aucune droite normale à toutes les trajectoires possibles de ces différents points.

Étant donnée une condition géométrique quelconque, on pourra, pour la classer, procéder de la manière suivante :

On cherchera deux translations compatibles avec les liaisons données et, par les deux déplacements d'un même point arbitraire, on fera passer un plan T, puis on cherchera deux rotations compatibles avec la condition géométrique donnée et qui laissent immobile un point arbitrairement choisi. Par les deux axes correspondants on fera passer un plan R, il ne restera plus qu'à voir si les plans T et R sont perpendiculaires ou obliques entre eux.

Vu et approuvé :
Paris, le 13 mars 1886.
Le Doyen,
E. HÉBERT.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 14 mars 1886.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Équations différentielles de la dynamique. — Principe de d'Alembert. — Équations de Lagrange. — Théorèmes d'Hamilton et de Jacobi. — Application au mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton.

Vu et approuvé :
Paris, le 13 mars 1886.
Le Doyen,
E. HÉBERT.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 14 mars 1886.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.