N° D'ORDRE.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES.

PAR M. C.-ALPH. VALSON.

THÈSE D'ANALYSE. APPLICATION DE LA THÉORIE DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES A LA GÉOMÉTRIE DE L'ELLIPSOÏDE.

THÈSE D'ASTRONOMIE. QUESTIONS PROPOSÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Lundi 7 Août 1854 devant la Commission d'examen.

MM. CHASLES, *Président.*
LAMÉ,
DELAUNAY, } *Examinateurs.*

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes,

Rue du Jardinet, 12.

1854.

ACADÉMIE DÉP^LE DE LA SEINE.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Doyen	MILNE EDWARDS, Professeur	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
Professeurs honoraires.	Le baron THENARD.	
	BIOT.	
	MIRBEL.	
	PONCELET.	
Professeurs	CONSTANT PREVOST	Géologie.
	DUMAS	Chimie.
	DESPRETZ	Physique.
	STURM	Mécanique.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie physique.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	CAUCHY	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	PAYER	Botanique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
Agrégés	MASSON	Sciences physiques.
	PELIGOT	
	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	
	DUCHARTRE	Sciences naturelles.
Secrétaire	E. P. REYNIER.	

A

M. Joseph Bertrand,

Son Élève reconnaissant,

VALSON.

THÈSE D'ANALYSE.

APPLICATION DE LA THEORIE DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES A LA GÉOMÉTRIE DE L'ELLIPSOIDE.

1. Ce travail se compose de trois parties. La première se rapporte à la courbure des surfaces du second degré. La seconde renferme plusieurs propriétés de ces surfaces qui sont analogues à celles des foyers des sections coniques et que, pour cette raison, j'appelle *propriétés focales*. Enfin, dans la troisième, j'étudie une certaine classe de courbes rectifiables sur l'ellipsoïde, ce qui conduit en particulier aux lignes géodésiques et à leurs trajectoires obliques dont j'examine quelques propriétés.

Je supposerai connues les notations ordinaires de cette théorie.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Courbure de l'ellipsoïde.

2. Commençons par chercher la nature du lieu des centres de courbure. Soient

$$X - x + p(Z - z) = o,$$
$$Y - y + q(Z - z) = o$$

les équations de la normale en un point de la ligne de courbure $\nu = \text{const.}$, on aura, pour la normale infiniment voisine,

$$\frac{dx}{d\mu} + p\frac{dz}{d\mu} - (Z - z)\frac{dp}{d\mu} = o,$$
$$\frac{dy}{d\mu} + q\frac{dz}{d\mu} - (Z - z)\frac{dq}{d\mu} = o.$$

Ces deux normales appartenant à une même ligne de courbure, on sait déjà qu'elles se rencontrent; il suffit donc de chercher la valeur de $Z - z$ qui satisfait à l'une de ces deux équations, par exemple à la première. On trouve facilement

$$\frac{dx}{d\mu} = \frac{\rho\nu}{bc},$$

$$\frac{dz}{d\mu} = -\frac{\mu\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{c^2-\mu^2}} \times \frac{\sqrt{\rho^2-c^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$p = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b} \times \frac{\mu\nu\sqrt{\rho^2-c^2}}{\rho\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

$$\frac{dp}{d\mu} = -\frac{c^2\nu\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{b\rho\sqrt{c^2-\nu^2}(c^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs, on obtient, après quelques réductions,

$$Z - z = -\frac{\rho^2-\mu^2}{\rho^2-c^2}\, z.$$

Pour avoir l'équation de la nappe de courbure qui correspond au système des lignes $\nu =$ const., il resterait à éliminer x, y, z, μ, entre cette équation, celles de la normale et celles des deux surfaces homofocales ρ, μ. On trouve d'abord

$$(a) \qquad \frac{x}{X} = \frac{\rho^2}{\mu^2}, \quad \frac{y}{Y} = \frac{\rho^2-b^2}{\mu^2-b^2}, \quad \frac{z}{Z} = -\frac{\rho^2-c^2}{c^2-\mu^2}.$$

L'élimination de x, y, z se fait sans difficulté, et l'on trouve les équations

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\rho^2 X^2}{\mu^4} + \frac{(\rho^2-b^2)Y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{(\rho^2-c^2)Z^2}{(c^2-\mu^2)^2} = 1, \\ &\frac{\rho^4 X^2}{\mu^6} + \frac{(\rho^2-b^2)^2 Y^2}{(\mu^2-b^2)^3} - \frac{(\rho^2-c^2)^2 Z^2}{(c^2-\mu^2)^3} = 1. \end{aligned} \right.$$

Il resterait à éliminer μ entre ces deux dernières équations, mais le calcul serait long et du reste inutile pour arriver aux propriétés de la surface.

Un calcul tout à fait analogue déterminerait l'autre nappe de courbure; il suffira de considérer la précédente.

On remarquera d'abord que si l'on considère tous les centres de courbure qui répondent sur la nappe définie par les équations (A), à une même valeur de μ, le lieu de ces points sera l'intersection de deux surfaces du second degré, ses projections seront donc elles-mêmes du second degré.

De plus, les équations (a) font voir que les coordonnées rectangulaires des points qui se correspondent sur l'ellipsoïde et sur la nappe (A), pour une même valeur de μ, ont un rapport constant et égal au rapport des carrés des axes parallèles dans les surfaces homofocales ρ, μ. Ce qu'on peut encore énoncer en disant que les courbes correspondantes sont homographiques.

Ces propriétés se conservent dans les projections, et comme on sait d'ailleurs que les lignes de courbure se projettent sur les plans coordonnés suivant des courbes du second degré, on pourra énoncer le résultat suivant :

« Les projections sur les plans coordonnés du lieu des centres de cour-
» bure qui sur la nappe (A) correspondent à une même ligne de courbure
» $\mu =$ const., sont des courbes du second degré homographiques avec les
» projections de la ligne de courbure ; le rapport d'homographie étant celui
» des carrés des axes parallèles dans les surfaces homofocales ρ, μ. »

3. On a déjà ainsi un système remarquable de génératrices de la nappe (A), on en obtiendra un second en considérant sur la même nappe les courbes qui correspondent aux lignes de courbure $\nu =$ const.

On remarquera que la nappe (A) peut être considérée comme résultant de l'élimination de x, y, z, μ, ν, entre les équations (a) et les équations des trois surfaces homofocales ρ, μ, ν. Après l'élimination de x, y, z, on trouve

$$\mu^2 = \left(\frac{b\rho X}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\mu^2 - b^2 = \left(\frac{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-b^2}.Y}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$c^2 - \mu^2 = \left(\frac{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}\,Z}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

L'élimination de μ donne les deux équations

$$\left(\frac{c\rho X}{b^2\nu}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-b^2}.Y}{b^2\sqrt{b^2-\nu^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$\left(\frac{b\rho X}{c^2\nu}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}.Z}{c^2\sqrt{c^2-\nu^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Si l'on suppose $\nu =$ const., ces équations représentent des développées de courbes du second degré ; donc :

« Les projections du lieu des centres de courbure qui, sur la nappe (A)
» correspondent aux lignes $\nu =$ const., sont des développées de courbes
» du second degré. »

Ces courbes forment du reste, comme on sait, un système de lignes géodésiques sur la nappe (A).

Si l'on cherchait les traces de cette surface sur les plans coordonnés, on trouverait, ainsi qu'on peut le prévoir, les développées des sections principales dans les plans *xoz, yoz*, qui répondent à $\nu = b$, $\nu = 0$.

Si l'on veut avoir la trace sur le plan *xoy*, on fera $\mu = c$, et l'on trouvera l'équation

$$\frac{\rho^2 X^2}{c^4} + \frac{(\rho^2 - b^2)\,Y^2}{(c^2 - b^2)^2} = 1.$$

« Il en résulte que si l'on considère les normales à l'ellipsoïde suivant la » section principale *xoy*, si de plus on considère les normales du second » système infiniment voisines qui correspondent aux directions perpendi- » culaires au plan *xoy*, elles rencontreront les premières en des points dont » le lieu est une ellipse.

II.

Propriétés des rayons de courbure.

4. Après avoir examiné la courbure d'une manière générale, examinons les propriétés dont jouissent les rayons de courbure en commençant par ceux des sections principales.

Soient $R\mu$, $R\nu$ les rayons qui répondent aux directions $\mu =$ const., $\nu =$ const., on aura pour leur expression

$$(Z - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

On a en coordonnées elliptiques

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{z\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}};$$

de plus, pour la direction $\nu =$ const., on a trouvé

$$Z - z = -\frac{\rho^2 - c^2}{\rho^2 - \mu^2}\cdot z.$$

On en conclut

$$R\nu = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

On aurait de même

$$R\mu = \frac{(\rho^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Si l'on désigne par P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, et par $D\mu$, $D\nu$ les demi-diamètres de l'ellipsoïde parallèles aux directions $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const}$, on a les formules connues

$$P = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}.$$

$$D_\mu = \sqrt{\rho^2 - \nu^2}, \quad D_\nu = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}.$$

On en conclut d'abord

$$R_\nu = \frac{D_\nu^2}{P}, \quad R_\mu = \frac{D_\mu^2}{P}.$$

Ces dernières formules apprennent que : « Pour construire le rayon de » courbure d'une section principale, il suffira de construire une troisième » proportionnelle à la perpendiculaire au plan tangent, menée par le centre » et au demi-diamètre de l'ellipsoide, parallèle à la direction considérée. »

On peut remarquer en passant que cette construction est applicable à l'ellipse, en remplaçant le plan tangent par la tangente.

On déduit aussi de ce qui précède la relation

$$\sqrt{R_\mu R_\nu} = \frac{D_\mu D_\nu}{P};$$

et comme on sait que le parallélipipède circonscrit à l'ellipsoïde a un volume constant, on pourra écrire

$$PD_\mu D_\nu = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2} = \text{const.} = h^3;$$

on en conclura

$$\sqrt{R_\mu R_\nu} = \frac{h^3}{P^2}.$$

Il en résulte qu'en chaque point l'expression $\frac{1}{\sqrt{R_\mu R_\nu}}$ qu'on peut prendre pour mesure de la courbure de la surface, varie proportionnellement au carré de la perpendiculaire menée du centre sur le plan tangent.

On voit encore que le produit $P^2\sqrt{R_\mu R_\nu}$ est constant pour tous les points de l'ellipsoïde, et égal au produit des axes.

Enfin si P reste constant, il en sera de même du produit $R_\mu R_\nu$, donc :

« Le produit des rayons de courbure principaux est constant pour tous » les points de contact des plans tangents à l'ellipsoïde et à une sphère » concentrique. »

L'équation de cette courbe en coordonnées elliptiques est

$$(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2) = \text{const.}$$

En coordonnées rectangulaires, on aurait

$$\left(1-\frac{b^2 c^2}{\rho^4}\right) x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.},$$

de sorte qu'elle résulte de l'intersection de la surface avec un ellipsoïde de révolution autour de ox. Elle se projette sur les plans coordonnés suivant des courbes du second degré.

Cette courbe remarquable se rencontre dans le problème de la rotation des corps autour d'un point fixe; M. Poinsot lui a donné le nom de *polodie*.

La formule

$$R_\mu = \frac{D_\mu^2}{P} = \frac{\rho^2 - \nu^2}{P},$$

donne la conséquence suivante :

« Tout le long d'une même ligne de courbure $\nu =$ const., les rayons » de courbure des sections perpendiculaires varient en raison inverse de » la perpendiculaire au plan tangent. »

La valeur de R_ν donne un résultat analogue.

Si entre les valeurs de R_μ, R_ν, on élimine successivement μ, ν, on trouve

$$\frac{R_\nu^3}{R_\mu} = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^4}{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

$$\frac{R_\mu^3}{R_\nu} = \frac{(\rho^2 - \nu^2)^4}{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

On en conclut que :

« Pour tous les points d'une ligne de courbure $\mu =$ const., on a » $\frac{R_\nu^3}{R_\mu} =$ const. Suivant la ligne $\nu =$ const., on aurait $\frac{R_\mu^3}{R_\nu} =$ const. »

On peut déduire de là ce théorème bien connu :

« Pour tous les points d'une même ligne de courbure, on a » $PD_\mu =$ const. »

On a, en effet,

$$\frac{R_\nu^3}{R_\mu} = R_\nu R_\mu \times \frac{R_\nu^2}{R_\mu^2} = \frac{h^6 D_\nu^4}{P^4 D_\mu^4}.$$

Si l'on suppose $\mu =$ const., D_ν sera lui-même constant; donc, comme $\frac{R_\nu^3}{R_\mu}$ ne varie pas, PD_μ restera aussi constant.

5. Généralement, si l'on considère une direction quelconque formant

avec la ligne de courbure $\mu = $ const. un angle i, on a pour le rayon de courbure correspondant

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 i}{R_\mu} + \frac{\sin^2 i}{R_\nu}.$$

On peut aussi écrire

$$(1) \qquad \frac{1}{RP} = \frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\rho^2 - \mu^2}.$$

Si l'on désigne par D le demi-diamètre parallèle à la direction déterminée par l'angle i, on a

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{D_\mu^2} + \frac{\sin^2 i}{D_\nu^2},$$

ou bien

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\rho^2 - \mu^2};$$

en rapprochant ce résultat du précédent on obtient

$$RP = D^2.$$

Cette relation a donc lieu pour une direction quelconque sur l'ellipsoïde; elle permet d'étendre à toutes les sections normales la construction du rayon de courbure déjà expliquée pour les sections principales.

6. On déduit de l'équation (1) la relation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \rho^2 - \frac{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{RP^3},$$

ou bien, à cause de la relation $RP = D^2$,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \rho^2 - \frac{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{P^2 D^2};$$

on obtient ainsi une nouvelle démonstration de cette formule importante de la théorie des lignes géodésiques de l'ellipsoïde qui a été donnée par M. Chasles, dans le Journal de M. Liouville, t. XI, p. 105.

On en conclut en particulier ce théorème connu, que, pour tous les points d'une ligne géodésique, on a

$$PD = \text{const}.$$

En considérant l'équation sous sa première forme, on voit que tout le long d'une ligne géodésique on a

$$RP^3 = \text{const}.$$

Si l'on désigne par N la normale terminée au plan des xy on a

$$NP = \rho^2 - c^2\,;$$

la relation précédente devient

$$\frac{R}{N^3} = \text{const.}$$

Donc : « Pour toutes les directions d'une ligne géodésique, le rayon de » courbure de la section normale, qui n'est autre chose que le rayon de » courbure de la ligne géodésique, varie proportionnellement au cube de » la normale terminée à l'un des plans coordonnés. »

Ce théorème est remarquable en ce qu'il est analogue au théorème bien connu sur le rayon de courbure de l'ellipse.

On verrait facilement que la valeur de la constante $\frac{R}{N^3}$ est la même pour toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.

Voici une application du théorème précédent.

On sait que lorsqu'un mobile se meut librement sur une surface, la pression est donnée par la formule

$$\varphi = \frac{v^2}{R},$$

v désignant la vitesse et R le rayon de courbure de la trajectoire. Dans l'ellipsoïde on aura

$$\frac{\varphi}{P^3} = \text{const.}$$

Donc : « Si un mobile se meut librement sur un ellipsoïde, la pression » qu'il exerce sur la surface est à chaque instant proportionnelle au cube » de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent. »

Elle atteindra donc son maximum vers le sommet du grand axe et son minimum au sommet du petit axe.

Quant à la formule qui donne R, on trouve facilement

$$R = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}\,(\rho^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,(\rho^2 - \beta^2)}$$

Si l'on compare cette valeur de R à celles de R_μ, R_ν, on trouve

$$\frac{R}{R_\mu} = \frac{\rho^2 - \mu^2}{\rho^2 - \beta^2}, \quad \frac{R}{R_\nu} = \frac{\rho^2 - \nu^2}{\rho^2 - \beta^2},$$

on voit que le premier rapport ne dépend que de μ, et le second de ν seulement. Donc :

« Si l'on considère toutes les lignes géodésiques tangentes à une même
» ligne de courbure $\mu =$ const., et si l'on prend les points où ces lignes sont
» rencontrées par une même ligne de courbure $\mu =$ const., il y aura un
» rapport constant entre les rayons de courbure de la surface, suivant la
» ligne géodésique et suivant la ligne de courbure. »

De même pour $\nu =$ const.

DEUXIÈME PARTIE.

III.

Propriétés focales de l'ellipsoïde.

7. Cette deuxième partie renferme plusieurs propriétés de l'ellipsoïde analogues à celles de l'ellipse dans un plan. On sait que dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs à deux points fixes ou foyers est constante. Plus généralement, si l'on a deux cercles dans un même plan, et si l'on cherche le lieu des points pour lesquels la somme des tangentes qu'on peut mener aux deux cercles soit constante, on trouve une courbe de second degré. On arrive pour l'ellipsoïde à des résultats analogues.

On a d'abord les formules

$$\mu^2 + \nu^2 = r^2 + b^2 + c^2 - \rho^2,$$

$$\mu\nu = \frac{bcx}{\rho};$$

d'où l'on tire

$$\mu + \nu = \sqrt{r^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 + 2\frac{bcx}{\rho}} = t,$$

$$\mu - \nu = \sqrt{r^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 - 2\frac{bcx}{\rho}} = t';$$

r désigne la distance d'un point de la surface au centre.

On reconnaît facilement que t, t' représentent les tangentes menées par un point de la surface à deux sphères dont les centres sont situés sur ox à une distance de l'origine égale à

$$k = \pm \frac{bc}{\rho},$$

et dont le rayon est le même et égal à

$$h = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho}.$$

Si l'on mène la normale à la surface en un ombilic, on trouve qu'elle a pour longueur la valeur précédente de h quand on la termine à l'axe ox, et que la distance du point de rencontre au centre est égale à la valeur de k. Donc les deux sphères précédentes sont tangentes à l'ellipsoïde aux deux points ombilicaux symétriques par rapport à ox, ce qui les détermine complétement.

Ces deux sphères jouissent de propriétés analogues à celles de l'ellipse dans un plan par rapport aux foyers; convenons de les appeler *sphères focales*.

8. Cela posé, si l'on mène par un point de l'ellipsoïde des tangentes à ces deux sphères, on aura

$$\mu + \nu = t, \quad \mu - \nu = t';$$

d'où

$$\mu = \tfrac{1}{2}(t + t'), \quad \nu = \tfrac{1}{2}(t - t').$$

on voit que la demi-somme et la différence de ces deux tangentes donnent les demi-axes μ, ν des hyperboloïdes homofocaux.

Si l'on suppose $\mu =$ const., $t + t'$ le sera aussi ; donc :

« Si par les divers points d'une ligne de courbure, on mène des couples » de tangentes aux sphères focales, leur somme ou leur différence sera » constante suivant que l'on prendra les courbes $\mu =$ const., ou bien » $\nu =$ const. »

Il résulterait de là un procédé mécanique pour décrire les lignes de courbure en remplaçant les sphères focales par deux tiges égales à leur rayon et mobiles autour de leurs centres. A ces tiges on en adapterait normalement deux autres sur lesquelles s'appliquerait un fil de longueur constante. L'extrémité du fil décrirait, en se déplaçant sur la surface, une ligne de courbure.

Je laisse de côté les applications qu'on pourrait faire des formules précédentes aux lignes sphériques de l'ellipsoïde, pour arriver à d'autres propriétés plus intéressantes.

IV.

Propriétés projectives sur les plans des sections circulaires.

9. Je commencerai par rappeler un théorème de M. Michael Roberts (Journal de M. Liouville, t. XV, p. 289).

Si μ, ν sont les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde et si l'on projette ce point sur les plans des sections circulaires au moyen d'une parallèle à l'axe oz, on a

$$\mu = \alpha\mu_0, \quad \nu = \alpha\nu_0,$$

μ_0, ν_0, désignant les demi-axes de deux courbes homofocales qui passent par les projections du point μ, ν, et qui ont pour foyers les projections des ombilics. On a de plus

$$\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}.$$

Il en résulte que si une courbe sur l'ellipsoïde a une équation de la forme

$$F(\mu, \nu) = 0,$$

celle de sa projection sera

$$F(\alpha\mu_0, \alpha\nu_0) = 0.$$

Ce théorème ramène l'étude des courbes tracées sur l'ellipsoïde à celle de courbes planes dont l'équation est de même forme.

On en conclut immédiatement que les lignes de courbure se projettent dans ce système suivant des courbes du second degré homofocales.

On en déduit aussi que les lignes sphériques de l'ellipsoïde se projettent suivant des cercles quand la sphère est concentrique à la surface.

Ces théorèmes sont bien connus.

On peut remarquer que le dernier théorème continue d'être vrai lorsque la sphère sécante a son centre pris à volonté dans le plan xoy.

La considération de ces projections permet d'étendre à l'ellipsoïde certaines propriétés démontrées pour l'ellipse.

Si, par exemple, dans le plan d'une section circulaire on mène une tangente t_0 à un cercle de rayon h_0 et dont le centre serait le foyer d'une des courbes homofocales, on trouvera facilement

$$t_0^2 = \mu_0^2 + \nu_0^2 + 2\mu_0\nu_0 - h_0^2;$$

on prendra ensuite une sphère de rayon h dont le centre soit situé sur ox à une distance k de l'origine; par un point de l'ellipsoïde on lui mènera une tangente t; on aura

$$t^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\frac{k\rho}{bc}\cdot\mu\nu + \rho^2 - b^2 - c^2 + k^2 - h^2.$$

Si l'on suppose que les points se correspondent sur l'ellipsoïde et en projection, on aura

$$t^2 - \alpha^2 t_0^2 = 2\mu\nu\left(\frac{k\rho}{bc} - 1\right) + \rho^2 - b^2 - c^2 + k^2 - h^2 + \alpha^2 h_0^2.$$

On pourra se proposer de déterminer h et k de manière qu'on ait simplement

$$t = \alpha t_0\,;$$

il suffira, pour cela, de poser

$$k = \frac{bc}{\rho}, \quad h^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{\rho^2} + h_0^2 \cdot \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}.$$

La sphère dont il s'agit est donc concentrique aux sphères focales.

On peut, au moyen de ce qui précède, généraliser le théorème primitif.

Si l'équation d'une courbe sur l'ellipsoïde est de la forme

$$\mathrm{F}(\mu, \nu, t) = 0,$$

celle de la projection sur les plans des sections circulaires par des parallèles à oz sera

$$\mathrm{F}(\alpha\mu_0, \alpha\nu_0, \alpha t_0) = 0.$$

Si l'on suppose, en particulier,

$$t = \text{const.},$$

on a

$$t_0 = \text{const.}\,;$$

on en conclut que :

« Si l'on considère sur l'ellipsoïde lieu des points pour lesquels les tan-
» gentes à une sphère concentrique à une sphère focale soient constantes,
» la courbe correspondante dans les plans des sections circulaires sera une
» seconde ligne telle, que les tangentes menées de ces divers points à un
» cercle ayant son centre au foyer des courbes homofocales, soit aussi
» constante; elle sera donc un cercle concentrique au précédent.

» On peut remarquer qu'on décrirait cette courbe au moyen d'un cône
» circonscrit à une sphère concentrique aux sphères focales et dont le
» sommet se déplacerait sur la surface. »

Si la sphère précédente coïncide avec la sphère focale, le cercle correspondant dans les plans des sections circulaires se réduit à son centre. Réciproquement, si la sphère coïncide avec son centre, il correspondra un cercle de rayon déterminé; dans ce cas, la tangente t devient le rayon vecteur de l'ellipsoïde par rapport au centre des sphères focales.

Il en résulte que si ce rayon vecteur jouit d'une certaine propriété relativement à une courbe sur la surface, la tangente au cercle correspondant dans le plan des sections circulaires jouira d'un propriété analogue qui sera en quelque sorte conjuguée avec la première.

Comme il y a deux sphères focales, on pourra considérer deux sphères qui leur soient concentriques et leur mener des couples de tangentes t, t', par les divers points de l'ellipsoïde. A ces deux lignes correspondront dans les plans des sections circulaires deux tangentes t_0, t'_0, à deux cercles dont les centres seront les foyers des courbes homofocales. On aura

$$t = \alpha t_0, \quad t' = \alpha t'_0;$$

on voit que si l'on prend sur la surface une courbe définie par une équation de la forme

$$F(\mu, \nu, t, t') = 0,$$

la courbe correspondante dans les plans des sections circulaires aura pour équation

$$F(\alpha\mu_0, \alpha\nu_0, \alpha t_0, \alpha t'_0) = 0.$$

10. On peut tirer de nombreuses conséquences de cette propriété ; je me contenterai ici de supposer qu'on ait

$$t \pm t' = \text{const.},$$

il en résultera

$$t_0 \pm t'_0 = \text{const.}$$

Donc :

« Si l'on considère sur l'ellipsoïde les courbes pour lesquelles la somme » ou la différence des tangentes qu'on peut mener de leurs divers points » à deux sphères concentriques aux sphères focales soit constante, les » courbes correspondantes dans les plans des sections circulaires jouiront » de la même propriété par rapport à deux cercles ayant pour centres les » foyers des courbes homofocales. Ce seront donc des courbes du second » degré. »

Si l'on fait coïncider les sphères avec les deux sphères focales, on obtiendra sur la surface les lignes de courbure ; dans ce cas, les deux cercles se réduisent à leur centre, et l'on retrouve la propriété projective des lignes de courbure qui n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Généralement, si une propriété a lieu entre les tangentes qu'on peut mener par les points d'une courbe à deux cercles dans un plan, il y aura une propriété correspondante entre les tangentes qu'on peut mener des divers points d'un ellipsoïde aux deux sphères focales ou à deux sphères qui leur soient concentriques.

En voici encore un exemple : on sait que dans un plan le lieu des points tels que la somme des carrés des tangentes menées à deux cercles soit constante, est un cercle lui-même. Il correspondra, d'après ce qui précède, à une courbe tracée sur l'ellipsoïde telle, que la somme des carrés des tangentes menées de ses points à deux sphères concentriques aux sphères focales soit aussi constante.

On reconnaîtrait facilement, au moyen des valeurs de t, t', que ce sera sur la surface une ligne sphérique.

Si l'on suppose, comme on l'a déjà fait, que les sphères précédentes se réduisent à leur centre, on aura deux cercles correspondants dans les plans des sections circulaires. Et si une courbe est définie par une équation $F(t_0, t'_0) = 0$ entre les tangentes à ces cercles, il correspondra sur l'ellipsoïde une courbe dont l'équation sera de la forme

$$F(R, R') = 0,$$

R, R' désignant maintenant les rayons vecteurs de l'ellipsoïde par rapport aux centres des sphères focales.

Parmi les résultats qu'on pourrait déduire de là, je me contenterai d'indiquer le suivant :

« Si un fil de longueur constante est fixé aux centres des sphères focales, un style qui le maintiendra tendu et qui s'appuiera sur l'ellipsoïde, décrira sur la surface une courbe à laquelle correspondra dans les plans des sections circulaires une courbe du deuxième degré. »

Il est clair, en effet, que la courbe tracée sur la surface aura pour équation $R + R' = \text{const.}$, la courbe correspondante aura pour équation $t_0 + t'_0 = \text{const.}$, et sera par conséquent une ellipse.

11. Il existe aussi pour l'ellipsoïde des propriétés analogues à celles des directrices de l'ellipse. Je vais indiquer comment on peut y arriver.

On prendra deux points qui se correspondent sur la surface et sur les plans des sections circulaires, et l'on considérera en ces points deux fonctions linéaires des coordonnées x, y; soient

$$f = mx + ny + p,$$
$$f_0 = m_0 x_0 + n_0 y_0 + p_0;$$

on cherchera ensuite à déterminer les paramètres de manière qu'on ait

$$f - \lambda f_0 = 0,$$

λ désignant une constante. On a déjà

$$x = \frac{\alpha\rho}{c} x_0 = A x_0, \quad y = \frac{\alpha\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} y_0 = B y_0,$$

on en conclura

$$f - \lambda f_0 = (\mathrm{A}m - \lambda m_0)x + (\mathrm{B}n - \lambda n_0)y + p - \lambda p_0;$$

il faudra donc poser

$$\mathrm{A}m - \lambda m_0 = 0, \quad \mathrm{B}n - \lambda n_0 = 0, \quad p - \lambda p_0 = 0,$$

d'où l'on déduira

$$m_0, \quad n_0, \quad p_0.$$

L'équation

$$m_0 x_0 + n_0 y_0 + p_0 = 0$$

représente une droite D, et l'équation

$$mx + ny + p = 0$$

appartient à un plan P parallèle à oz; il serait facile de voir que la droite D est la trace du plan P sur les sections circulaires.

Soient d la perpendiculaire abaissée d'un point de l'ellipsoïde sur le plan P, et d_0 la droite correspondante dans le plan des sections circulaires; l'équation

$$f - \lambda f_0 = 0$$

revient à

$$d\sqrt{m^2 + n^2} - \lambda d_0 \sqrt{m_0^2 + n_0^2} = 0,$$

ou bien

$$d - \lambda_1 d_0 = 0,$$

λ_1 désignant une nouvelle constante.

Ce rapport λ_1 ne peut varier qu'entre de certaines limites. Sa valeur maximum est $\lambda = 1$ quand la droite D est parallèle à ox, sa valeur minimum est $\lambda_1 = \frac{\rho\sqrt{c^2 - b^2}}{c\sqrt{\rho^2 - b^2}}$, qui a lieu quand la droite D est parallèle à oy. On ne pourra pas prendre $\lambda = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \alpha$.

On peut déduire de ce qui précède quelques conséquences.

Si l'on considère sur l'ellipsoïde le lieu des points pour lesquels il y a un rapport constant entre les tangentes à une sphère concentrique aux sphères focales et les perpendiculaires à un plan fixe P parallèle à oz, ce lieu se projettera sur les plans des sections circulaires par des droites parallèles à oz, suivant une courbe qui jouira de la même propriété par rapport à un cercle ayant pour centre un ombilic et une droite fixe qui sera la trace du plan P. Ce sera donc une courbe du second degré.

Supposons que la sphère, au lieu d'être quelconque, coïncide avec une des sphères focales, le cercle correspondant se réduit à son centre qui est un ombilic; supposons, de plus, que la droite D soit une directrice des courbes homofocales

$$\mu_0 = \text{const.}, \quad \nu_0 = \text{const.},$$

alors la courbe correspondante dans le plan des sections circulaires sera précisément l'une de ces courbes homofocales, et, par conséquent, la courbe correspondante sur l'ellipsoïde sera une des lignes de courbure; donc :

« Pour tous les points d'une ligne de courbure il y a un rapport con-
» stant entre ces tangentes à une des sphères focales, et ces perpendicu-
» laires à un plan directeur parallèle à oz et passant par la directrice de
» celle des courbes homofocales qui répond à cette ligne de courbure. »

Cette propriété complète l'analogie des lignes de courbure avec les lignes du second degré.

TROISIÈME PARTIE.

V.

De certaines courbes rectifiables à la surface de l'ellipsoïde.

12. Je vais indiquer plusieurs résultats relatifs aux lignes tracées sur l'ellipsoïde dont la rectification peut être ramenée à de simples quadratures.

On a, d'après des notations connues,

$$ds^2 = \lambda(md\mu^2 + nd\nu^2).$$

Si cette expression pouvait se ramener à la forme

$$ds = \varphi(\mu)d\mu + \psi(\nu)d\nu,$$

il est clair que la rectification de la courbe se ferait par des quadratures. En identifiant les deux valeurs de ds qui précèdent, on a l'équation

$$(a) \qquad (\lambda m - \varphi^2)d\mu^2 - 2\varphi\psi\, d\mu d\nu + (\lambda n - \psi^2)d\nu^2 = 0.$$

Si l'on fait en particulier

$$\varphi(\mu) = \sqrt{m}\,\sqrt{\mu^2 - \beta^2}, \quad \psi(\nu) = \sqrt{n}\,\sqrt{\beta^2 - \nu^2},$$

on trouve l'équation des lignes géodésiques qui sont donc rectifiables par la formule

$$S = \int \sqrt{m}\,\sqrt{\mu^2 - \beta^2}\,.\,d\mu + \int \sqrt{n}\,\sqrt{\beta^2 - \nu^2}\,.\,d\nu.$$

Le premier membre de l'équation (a) se présente alors sous la forme d'un carré parfait. Si l'on exprime cette condition d'une manière générale, on trouve

$$(\lambda m - \varphi^2)(\lambda n - \psi^2) = \varphi^2\,\psi^2;$$

d'où

$$\frac{\varphi^2}{m} + \frac{\psi^2}{n} = \mu^2 - \nu^2,$$

ce qui exige, comme il est facile de s'en assurer en prenant les dérivées partielles, qu'on ait

$$\varphi^2 = m(\mu^2 - \beta^2), \quad \psi^2 = n(\beta^2 - \nu^2).$$

Cette hypothèse ne conduit donc qu'aux lignes géodésiques.

Quels que soient φ, ψ, on peut poser

$$\varphi^2 = mu, \quad \psi^2 = nv,$$

u, v désignant deux nouvelles fonctions de μ, ν, séparément. On aura

$$(\lambda - u)\,md\mu^2 - 2\sqrt{uv}\,\sqrt{mn}\,d\mu\,d\nu + (\lambda - v)\,nd\nu^2 = 0.$$

Soit i l'angle que forme cette courbe avec les lignes $\mu =$ const., on aura

$$(b) \qquad (\lambda - u)\sin^2 i - 2\sqrt{u}\,\sqrt{v}\sin i\cos i + (\lambda - v)\cos^2 i = 0.$$

Cette équation est de même forme que celle qui a été donnée par M. Liouville pour les lignes géodésiques; pour retrouver ces dernières, il suffira de poser

$$u = \mu^2 - \beta^2, \quad v = \beta^2 - \nu^2.$$

On peut encore remarquer que l'équation (b) peut se mettre sous la forme simple

$$\sqrt{u}\sin i + \sqrt{v}\cos i = \sqrt{\lambda}.$$

On en déduit que l'équation des lignes géodésiques revient à

$$\sqrt{\mu^2 - \beta^2}\,.\,\sin i + \sqrt{\beta^2 - \nu^2}\,.\,\cos i = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}.$$

VI.

Cas particuliers. — Trajectoires obliques des lignes géodésiques.

13. L'équation (b) donne

$$\operatorname{tang} i \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{m}\,d\mu}{\sqrt{n}\,d\nu} = \frac{\sqrt{u}\sqrt{v} \pm \sqrt{\lambda}\sqrt{u+v-\lambda}}{\lambda - u}.$$

On arrive à plusieurs résultats remarquables en supposant

$$u + v - \lambda = h^2\lambda = h^2(\mu^2 - \nu^2);$$

on en déduira

$$\frac{du}{d\mu} = 2(1 + h^2)\mu\, d\mu,$$

d'où

$$u = (1 + h^2)(\mu^2 - \beta^2).$$

On aura de même

$$\frac{dv}{d\nu} = 2(1 + h^2)\nu\, d\nu;$$

d'où

$$v = (1 + h^2)(\beta^2 - \nu^2).$$

On aura ensuite, en désignant $\sqrt{\mu^2 - \beta^2}$ par u et $\sqrt{\beta^2 - \nu^2}$ par v,

$$\operatorname{tang} i = \frac{(1 + h^2)\sqrt{u}\sqrt{v} \pm h(u + v)}{v - h^2 u}.$$

En supprimant le facteur commun

$$h\sqrt{u} + \sqrt{v},$$

on trouve

$$\operatorname{tang} i = \frac{h\sqrt{v} + \sqrt{u}}{\sqrt{v} - h\sqrt{u}}.$$

Cette équation est susceptible d'une interprétation géométrique. Soit θ l'angle que font avec les lignes de courbure $\mu = \text{const.}$, les lignes géodésiques qui répondent à la constante β, on aura

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\beta^2 - \nu^2}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}.$$

Si l'on pose ensuite

$$\operatorname{tang}(i - \theta) = \text{const.} = g,$$

il viendra

$$\operatorname{tang} i - \operatorname{tang} \theta = g(1 - \operatorname{tang} i \operatorname{tang} \theta);$$

d'où

$$\tang i = \frac{g\sqrt{v} + \sqrt{u}}{\sqrt{v} - g\sqrt{u}}.$$

Ce résultat coïncide avec le précédent en faisant $g = h$; donc l'équation précédente appartient aux trajectoires qui rencontrent sous un angle constant toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure $\mu = \text{const.}$

Si l'on fait $h = \theta$, on a

$$\tang i = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}},$$

ce qui reproduit les lignes géodésiques,

$$h = \infty \quad \text{donne} \quad \tang i = -\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}};$$

d'où

$$\sqrt{\mu^2 - \beta^2}\sqrt{m}\,d\mu + \sqrt{\beta^2 - \nu^2}\sqrt{n}\,d\nu = 0.$$

Cette équation appartient, comme on sait, aux trajectoires orthogonales des lignes géodésiques. (Journal de M. Liouville, t. XV, p. 292.)

Les trajectoires dont il vient d'être parlé sont rectifiables, on a

$$S = \sqrt{1 + h^2}\int\sqrt{m}\sqrt{\mu^2 - \beta^2}\,d\mu + \sqrt{1 + h^2}\int\sqrt{n}\sqrt{\beta^2 - \nu^2}\,d\nu;$$

cette formule cesse d'être applicable quand h est infini, c'est-à-dire pour les trajectoires orthogonales. L'équation de ces courbes étant

$$\sqrt{m}\sqrt{\mu^2 - \beta^2}\,d\mu + \sqrt{n}\sqrt{\beta^2 - \nu^2}\,d\nu = 0,$$

on voit que la valeur de ds se présente en effet sous la forme indéterminée $0 \times \infty$.

14. Voici une conséquence de la dernière formule. Soient Σ, Σ_1, deux arcs appartenant, le premier à une ligne géodésique, le second à une trajectoire; supposons de plus que ces arcs partent d'un même point pour revenir en un autre point commun, de manière que les limites des intégrales soient les mêmes; les formules qui donnent Σ, Σ_1 conduisent à la relation

$$\Sigma_1 = \Sigma . \sqrt{1 + h^2},$$

ou bien

$$\Sigma = \Sigma_1 \cos\omega,$$

ω désignant l'inclinaison des trajectoires sur les lignes géodésiques. Donc :

« L'arc Σ_1 de trajectoire oblique est l'hypoténuse d'un triangle rec-
» tangle dont l'arc géodésique Σ est un des côtés de l'angle droit, ω étant
» l'angle compris entre $\Sigma\ \Sigma_1$. »

Si l'on suppose en particulier $\omega = 90$, on aura $h = \infty$, d'où $\Sigma = 0$; on en conclut que les trajectoires des lignes géodésiques viennent les rejoindre au point de départ, tandis que les autres trajectoires déterminent sur la surface des lignes de la forme des spirales.

15. On peut généraliser la propriété précédente et l'étendre à des arcs de lignes géodésiques non terminés au même point; on pourra même l'étendre à des lignes géodésiques et à leurs trajectoires sur une surface quelconque.

Supposons qu'on ait tracé un système de lignes Σ géodésiques, une trajectoire Σ_1 inclinée de l'angle ω, et menons par les points de rencontre de Σ_1, avec les lignes Σ, les trajectoires orthogonales de ces lignes Σ; soient $d\Sigma$, $d\Sigma_1$, deux éléments correspondants des courbes Σ, Σ_1, compris entre deux trajectoires orthogonales, on aura

$$d\Sigma = d\Sigma_1 \cos \omega$$

et en intégrant,

$$\Sigma = \Sigma_1 \cos \omega.$$

A cause de la propriété connue des trajectoires orthogonales, elles interceptent sur toutes les lignes géodésiques des arcs élémentaires égaux; donc Σ représentera un arc d'une même ligne géodésique compris entre deux trajectoires orthogonales; donc :

« Si, sur une surface quelconque, on considère un système Σ de lignes
» géodésiques, deux de leurs trajectoires orthogonales A, B, et enfin une
» trajectoire oblique Σ_1, l'arc intercepté sur la courbe Σ_1 sera l'hypoté-
» nuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit sera un
» des arcs géodésiques compris entre A, B, ω désignant l'inclinaison de ces
» deux arcs. »

La même relation a lieu pour les éléments infiniment petits des lignes orthogonales, mais elle n'a pas lieu pour des arcs finis, parce que les arcs de trajectoires orthogonales compris entre deux lignes géodésiques ne sont pas égaux.

Voici quelques résultats qui se déduisent facilement de ce qui précède.

« Deux trajectoires étant également inclinées sur les lignes géodésiques,
» leurs arcs interceptés entre deux trajectoires orthogonales sont égaux. »

« Deux trajectoires également inclinées de part et d'autre d'une même

» ligne géodésique et terminées à une même trajectoire orthogonale, sont
» égales en longueur. »

« Si deux trajectoires partent d'un même point d'une ligne géodésique » sur laquelle leurs inclinaisons sont égales, elles viendront se rejoindre » en un même point de cette ligne. »

On pourrait considérer plus généralement une expression de la forme

$$d\rho = \varphi(\mu . \nu)\, d\mu + \psi(\mu . \nu)\, d\nu,$$

le second membre représentant une différentielle exacte ; on serait conduit à des résultats analogues.

Vu et approuvé,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 6 janvier 1854,

Le Recteur de l'Académie de la Seine,

CAYX.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Détermination géométrique des déplacements d'un système de figure invariable autour d'un point fixe.

Axe instantané de rotation.

Formules qui donnent les composantes de la vitesse et de la force accélératrice par rapport à trois axes fixes dans l'intérieur du corps.

Équations générales du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Examen du cas particulier où il n'y a pas de forces extérieures.

Propriétés de l'ellipsoïde central.

Représentations diverses du mouvement au moyen de considérations géométriques.

Analyse du Mémoire de M. Poinsot sur la rotation des corps (*Connaissance des Temps*, 1854).

Théorie des réfractions atmosphériques.

Du mouvement d'une molécule lumineuse en général.

Équation différentielle de la trajectoire.

Formule différentielle de la réfraction.

Intégration approchée de cette formule sans faire d'hypothèse particulière sur la loi des densités.

Formule des tangentes.

Formule de Bradley.

Calcul des réfractions dans diverses hypothèses sur les densités.

Calcul des réfractions voisines de l'horizon. — Méthode des distances zénithales réciproques.

Des principaux effets de la réfraction.

Vu et approuvé,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 6 janvier 1854,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE LA SEINE,

CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, nº 12.