APPLICATION

DE

L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE

Par MM. MONGE *et* HACHETTE.

TRAITÉ

DES SURFACES

DU SECOND DEGRÉ;

Par M. HACHETTE, *Professeur de l'École impériale Polytechnique, et Professeur-adjoint de l'École normale.*

PARIS,

KLOSTERMANN fils, libraire des Écoles impériales Polytechnique et des Ponts et Chaussées, rue du Jardinet, nº. 13.

1813.

A

Monsieur LOUIS MONGE,

Membre de la Légion d'honneur, Chevalier d'Empire, Examinateur de la Marine.

Hommage de l'amitié.

PRÉFACE.

CET Ouvrage traite de la ligne droite, du plan, et des surfaces du second degré. Dans l'Introduction à l'analyse, publiée en 1748, Euler avait discuté l'équation générale du second degré entre trois variables, et il avait divisé les surfaces représentées par cette équation, en six genres. En 1795, M. Monge a fait imprimer, pour l'usage de l'Ecole Polytechnique, des *feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie*, format in-folio. Les premières feuilles contenaient la solution des problêmes relatifs à la ligne droite et au plan. En 1801, nous avons publié, dans le Journal de l'Ecole, 11e. cahier, un Mémoire sur les surfaces du second degré, dans lequel on divise ces surfaces en deux classes ; les unes, au nombre de trois, qui ont un centre ; et les autres, au nombre de deux, dont le centre est à l'infini. On y fait voir dans quel cas ces surfaces peuvent être engendrées de deux manières par la ligne droite et par le cercle. Ce Traité des surfaces du second degré, est précédé de plusieurs théorèmes qui sont applicables à la discussion d'une surface courbe quelconque, et au moyen desquels on peut reconnaître si elle a un centre, des plans diamétraux simples ou conjugués. On y a démontré la réalité des racines de l'équation, au moyen de laquelle on détermine la direction des axes principaux de la surface du second degré. Cette démonstration a été simplifiée par M. Biot, dans le Traité des surfaces du second degré, qu'il a publié depuis, et qui fait suite au Traité des courbes du second degré (5e. édition, 1813). Le Mémoire publié en 1801, sur les surfaces du second degré, a servi jusqu'à présent de texte aux leçons d'algèbre appliquée à la géométrie, données à l'Ecole Polytechnique. Les additions faites à ce Mémoire depuis cette époque, ont été imprimées dans la *Correspondance*. J'ai extrait de cet ouvrage plusieurs articles relatifs aux surfaces du second degré; la plupart de ces articles ont été donnés par d'anciens Elèves de cette Ecole, MM. Binet jeune, Français, Petit, Bourdon, Bret, Berthot, etc. J'ai tiré de la Mécanique de M. Poisson, la théorie des projections des figures planes, dont il a fait une si belle application à la Statique. Mettant à profit les matériaux dont je viens d'indiquer la source, je me suis proposé d'écrire un Traité complet des surfaces du second degré, pour servir d'introduction au grand ouvrage de Monge, sur l'Analyse appliquée à la Géométrie. On publiera, dans un Supplément, la partie de cet ouvrage enseignée à l'Ecole Polytechnique, la seconde année du cours. Cette partie comprendra la théorie des surfaces courbes, et celle des courbes à double courbure. On exposera dans ce Supplément, les méthodes simples et générales que les célèbres géomètres Lagrange et Monge ont inventées, et qu'ils ont enseignées les premiers dans une Ecole, dont les Elèves se montrent dignes de ces illustres professeurs.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

§ Ier.

Des Equations de la ligne droite et du plan.

§ II.

Trigonométrie sphérique.

§ III.

De quelques propriétés dont jouissent les projections orthogonales des lignes droites sur trois axes rectangulaires, et des aires planes sur trois plans perpendiculaires entre eux.

§ IV.

De la transformation des coordonnées.

CHAPITRE II.

Des surfaces dont l'équation est algébrique, et principalement des surfaces du second degré.

§ 1er.

§ II.

*De la division des surfaces du second degré qui ont un centre en trois genres : l'*ellipsoïde, *l'*hyperboloïde à une nappe, *l'*hyperboloïde à deux nappes.

§ III.

Des surfaces du second degré dépourvues de centre, ou dont le centre est à l'infini.

§ IV.

De la génération des surfaces du second degré, et des sections principales de ces surfaces.

§ V.

De quelques propriétés des surfaces du second degré.

§ VI.

De la discussion des équations numériques du second degré à trois variables.

APPLICATION

DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Des Coordonnées d'un point, des Equations de la ligne droite, et du Plan.

§ Ier.

1. On sait comment on détermine la position d'un système de points situés dans un plan. Ce plan étant supposé fixe, on y trace deux lignes droites qu'on nomme *axes* des coordonnées, et on considère chaque point comme le sommet de l'angle d'un parallélogramme formé par les axes des coordonnées, et par

des parallèles à ces axes ; la longueur et la direction des côtés de ce parallélogramme, déterminent la position du point. C'est par une méthode semblable qu'on fixe la position d'un point dans l'espace. On conçoit trois plans invariables, qui se coupent suivant trois droites qu'on nomme *axes des coordonnées*, et on considère le point donné comme le sommet de l'angle d'un parallélipipède qui a pour diagonale la distance de ce point à l'origine des coordonnées, et pour arètes des droites parallèles aux axes des coordonnées. La direction et la longueur des arètes du parallélipipède, qui aboutissent au point donné, déterminent la position de ce point dans l'espace.

2. Les trois plans des axes des coordonnées qu'on nomme simplement *plans des coordonnées*, divisent l'espace en huit régions. Les mêmes valeurs absolues des trois coordonnées d'un point correspondent à l'une ou à l'autre de ces parties de l'espace. En effet, soient x, y, z, ces valeurs absolues, on aura d'abord les quatre combinaisons suivantes :

1°. $+x, +y, +z$; 2°. $+x+y-z$;
3°. $+x, -y, +z$; 4°. $-x+y+z$.

Et en changeant les signes de ces premières combinaisons, on aura les suivantes :

$5^o.\ -x, -y, -z;$ $6^o.\ -x, -y, +z;$
$7^o.\ -x, +y, -z;$ $8^o.\ +x, -y, -z.$

Les points symétriquement placés par rapport à l'origine des coordonnées, sont situés sur une droite passant par cette origine; ainsi la première et la cinquième combinaisons correspondent à deux points symétriquement placés : il en est de même des points des deuxième et sixième combinaisons, des troisième et septième, des quatrième et huitième.

3. Les plans fixes des coordonnées sont ou inclinés ou perpendiculaires entre eux. Lorsqu'ils sont rectangulaires, un point a pour coordonnées les perpendiculaires abaissées de ce point, sur les plans des coordonnées, ou les distances de ce point à ses projections orthogonales sur les trois plans fixes.

Quelle que soit la direction des axes des coordonnées, en nommant a, b, c les coordonnées d'un point parallèles à ces axes, les équations du point sont :

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Les plans menés par un point donné perpendiculairement aux axes rectangulaires, coupent ces axes en trois points dont les distances à l'origine des coordonnées, sont égales aux coordonnées du point donné. Chacun de ces trois points est la *projection* du point donné sur l'un des axes rectangulaires.

4. Si l'on n'a qu'une seule équation entre les trois coordonnées d'un point, la position de ce point est indéterminée, et le lieu de tous les points, dont les coordonnées y satisfont, est une surface dont cette équation exprime la nature.

Si l'on a deux équations entre les trois coordonnées d'un point, la position de ce point est encore indéterminée ; le lieu de tous les points qui satisfont à ces équations est à-la-fois sur les deux surfaces qu'elles représentent ; ce lieu est donc la ligne d'intersection des deux surfaces.

Il suit de là qu'une ligne donnée dans l'espace est représentée par deux équations entre les trois coordonnées d'un point de cette ligne, et une surface est représentée par une seule équation entre les trois coordonnées d'un point de cette surface.

5. En géométrie, la méthode la plus générale par laquelle on détermine la position d'un point,

consiste à regarder ce point comme l'intersection de trois surfaces courbes : dans l'analyse appliquée à la géométrie, on suppose toujours le point donné de manière que les trois surfaces dont il est l'intersection, se réduisent à des plans, ou à des sphères, ou à des cônes droits, comme on le verra à l'article relatif à la transformation des coordonnées.

Dans les paragraphe suivans, on suppòsera les trois axes des coordonnées x, y, z perpendiculaires entre eux ; par axe des x, des y ou des z, on entendra l'axe parallèle aux x, aux y, aux z ; on désignera chaque plan des coordonnées par les deux lettres qui expriment les valeurs des deux coordonnées auxquelles ce plan est parallèle. Pour désigner un point dont les coordonnées sont x', y', z', on écrira « le point x', y', z'. »

§ II.

Des équations de la ligne droite.

6. Les équations d'une ligne droite située dans l'espace, expriment la relation qui existe entre les coordonnées x, y, z d'un point quel-

conque de cette droite. L'ayant projetée sur les plans des xz et des yz, ses projections sont d'autres droites qui ont pour équations :

$$(1) \qquad x = az + \alpha,$$

$$(2) \qquad y = bz + \beta,$$

entre lesquelles éliminant z, l'équation résultante en x et y,

$$(3) \qquad bx - ay = b\alpha - a\beta,$$

appartient à la projection de la droite sur le plan des xy.

Des quatre constantes a, b, α, β, deux a et b sont les tangentes des angles que les droites des équations (1), (2) font avec l'axe des z; α et β sont les coordonnées du point où la droite donnée coupe le plan des xy; point pour lequel on a $z = 0$.

Deux quelconques des équations (1), (2), (3) entre les coordonnées x, y, z d'un point d'une droite donnée, sont les équations de cette droite.

Faisant successivement $x = 0$, $y = 0$, dans ces équations, on aura, pour les coordonnées du point où la droite rencontre les plans des yz et des xz,

$$1^{\circ}.\quad z = -\frac{\alpha}{a}, \qquad y = -\frac{b\alpha}{a} + \beta, \quad \text{pour l'un ;}$$

$$2^{\circ}.\quad z = -\frac{\beta}{b}, \qquad x = -\frac{a\beta}{b} + \alpha, \quad \text{pour l'autre.}$$

Lorsque la droite passe par l'origine des coordonnées, on a $\alpha = 0$, $\beta = 0$; et les équations (1), (2) se réduisent à celle-ci :

$$x = az, \quad y = bz.$$

Des équations de condition qui expriment, 1°. que deux droites se rencontrent ; 2°. qu'elles sont parallèles.

7. Nommant x', y', z' les coordonnées du point de rencontre des deux droites représentées par les équations (1), (2), (art. 6), et par celle-ci (3) et (4) :

$$(3) \qquad x = a'z + \alpha', \qquad (4)\quad y = b'z + \beta';$$

on a :

$x' = az' + \alpha$, $\quad y' = bz' + \beta$, pour la première droite,

et

$x' = a'z' + \alpha'$, $\quad y' = b'z' + \beta'$, pour la seconde,

il est évident que si ces deux droites se rencontrent, les quatre dernières équations auront lieu en même tems pour le point d'intersection ; donc, si l'on élimine les coordonnées de ce point, l'équation qui résultera de cette élimination, exprimera que les droites des équations (1), (2), (art. 6), (3), (4) se rencontrent. On a pour résultat de l'élimination :

$$(a-a')(\beta-\beta')-(b-b')(\alpha-\alpha')=0. \quad (A)$$

Lorsque les droites données sont parallèles, leurs projections le sont aussi ; donc, on a $a=a'$, $b=b'$. Le point de rencontre, est dans ce cas, situé à l'infini : on voit, en effet, que d'après ces conditions du parallélisme, l'équation (A) est satisfaite, quelles que soient les valeurs de α, α', β, β', qui peuvent varier, quoique les droites données conservent le parallélisme.

Solution de plusieurs problémes relatifs à la ligne droite.

Problème Ier.

8. Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une autre droite donnée ?

Solution. Soient x', y', z' les coordonnées du point donné, et supposons que la droite donnée ait pour équations :

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta;$$

les équations de la parallèle à cette droite seront de la forme :

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta'.$$

A cause du parallélisme, il est évident qu'on aura $a' = a$, $b' = b$; d'où il suit que, des quatre constantes a', b', α', β', les deux premières sont relatives à la direction de la droite demandée, et les deux autres α', β' seront déterminées par la condition que cette droite passe par le point x', y', z'. En effet, on a pour ce point :

$$x' = az' + \alpha', \quad y' = bz' + \beta',$$

d'où l'on tire :

$$\alpha' = x' - az', \quad \beta' = y' - bz';$$

et on a, pour les équations de la droite demandée :

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

d'où l'on déduit cette troisième équation en x et y :

$$b(x - x') - a(y - y') = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques déterminent la position de la droite menée par un point donné, parallèlement à une droite donnée.

Probl. II.

Trouver les équations d'une droite menée par deux points donnés dans l'espace, et la longueur de la droite comprise entre ces deux points ?

9. *Solution*. Soient x', y', z' les coordonnées du premier point donné, et x'', y'', z'' les coordonnées du second point. La droite demandée devant passer par le premier point, ses équations seront de la forme :

$$x - x' = A(z - z'); \qquad y - y' = B(z - z').$$

En supposant que, dans cette équation, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la droite deviennent x'', y'', z'', on aura, pour déterminer les valeurs de A et de B, les équations suivantes :

$$x'' - x' = A(z'' - z'); \qquad y'' - y' = B(z'' - z');$$

d'où il suit que la droite demandée a pour équations :

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - x'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z');$$

ou en réduisant :

$$\left.\begin{aligned} x\,(z'' - z') &= z\,(x'' - x') + x'z'' - x''z', \\ y\,(z'' - z') &= z\,(y'' - y') + y'z'' - y''z'. \end{aligned}\right\}\ (E)$$

Menant par chacun des deux points donnés, trois plans parallèles aux plans des coordonnées, on aura six plans parallèles, deux à deux, qui comprendront un parallélipipède rectangle, dont la droite qui joint les deux points donnés, est une diagonale. Nommant R la longueur de cette droite, on a :

$$R = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

Les plans menés par les extrémités de la droite R perpendiculairement à l'un des axes, interceptent une partie de cet axe, qui est la *projection* de la droite R sur ce même axe.

10. Si, dans cette expression de la longueur d'une droite, on regarde x'', y'', z'' comme les coordonnées variables d'un point d'une sphère du rayon R, dont le centre est au point x', y', z', il est évident qu'on aura, pour l'équation de la sphère (4) :

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2.$$

Lorsque le centre de la sphère est à l'origine des coordonnés, cette équation devient:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

11. En traduisant les équations (E) de l'art. 9, l'une ou l'autre renferme le théorême suivant:
« Une droite quelconque étant rapportée à deux
« axes rectangulaires dans le plan desquels elle
« est comprise, et une partie quelconque R
« de cette droite étant (9) projetée sur les
« deux axes; si l'on prend sur cette droite un
« point quelconque M, la somme ou la diffé-
« rence des aires des deux triangles qui ont
« leur sommet commun dans le point M,
« et qui ont pour bases les projections de la
« partie R de la droite, est égale à l'aire du
« triangle qui a pour base la partie elle-même
« R, et dont le sommet est à l'origine. C'est
« la somme où la différence, selon la position
« du point M par rapport aux axes rectan-
« gulaires. »

Pour démontrer ce théorême, mettons la seconde des équations (E) sous la forme suivante :

$$\frac{z(y'-y'')}{2}+\frac{y(z''-z')}{2}=\frac{y'z''-y''z'}{2}. \qquad (E')$$

Soit (Pl. Ire., fig. 1) AB une droite comprise entre les axes rectangulaires KY, KZ des y et des z. Si on nomme y', z' les coordonnées KA', $A'A$ du point A, et y'', z'' les coordonnées KB', $B'B$ du point B, le triangle KAB qui a son sommet à l'origine K des coordonnées, et dont la base est la droite AB, a pour expression de son aire : $\frac{y'z''-y''z'}{2}$. En effet, ce triangle est égal à la somme du triangle KBB' et du trapèze $AA'BB'$ diminué du triangle KAA' : or, l'aire du triangle KBB' est $\frac{y''z''}{2}$; celle du trapèze $AA'BB'$ est $\frac{(z''+z')(y'-y'')}{2}$; l'aire du triangle KAA' est $\frac{y'z'}{2}$: donc on a, pour l'aire du triangle KAB :

$$\frac{y''z''}{2}+\frac{(z''+z')(y'-y'')}{2}-\frac{y'z'}{2},$$

ou en réduisant : $\frac{y'z''-y''z'}{2}$, second membre de l'équation (E').

Soit M (fig. 2) un point quelconque de la droite AB, dont les coordonnées sont y et z. $A'B'$, $A''B''$ étant les projections (9) de la droite AB sur les axes des y et des z, il est évident qu'on aura :

$$A'B' = y' - y'', \qquad A''B'' = z'' - z';$$

donc les aires des triangles $MA'B'$, $MA''B''$, ont pour expressions les quantités $\frac{z(y' - y'')}{2}$, $\frac{y(z'' - z')}{2}$; or, par l'équation (E'), la somme de ces deux quantités est égale au triangle KAB; donc, chacune des équations (E) comprend le théorème énoncé au commencement de cet article. On peut encore démontrer ce théorême par la géométrie, de la manière suivante.

12. La droite AM (fig. 2) ne changeant pas de position par rapport aux axes KY, KZ, supposons que la partie AB de cette droite se meuve dans sa propre direction, jusqu'à ce que le point A se trouve sur l'axe KY, comme on le voit fig. 3. Il est évident que les triangles KAB, MAB', MKB'' de cette figure, sont égaux en surface aux triangles KAB, $MA'B'$, $MA''B''$ de la fig. 2. Or (fig 3), le triangle MKB'' est moitié du rectangle Km; le triangle $MB'B'$ est moitié du rectangle $B'm$; donc la somme de ces deux triangles est moitié

du rectangle total KB, ou égale au triangle KBB'; on a donc l'équation.

$$MKB'' + MBB' = KBB'.$$

Ajoutant dans chaque membre de cette équation le triangle ABB', on a :

$$MKB'' + MBB' + ABB' = KBB' + ABB',$$

à cause de

$$MBB' + ABB' = MAB',$$

et de

$$KBB' + ABB' = KABB',$$

l'équation précédente se change en celle-ci :

$$MAB' + MKB'' = KAB;$$

d'où il suit qu'on aura aussi (fig. 2) :

$$MA'B' + MA''B'' = KAB;$$

Ou, en traduisant cette équation, on aura l'énoncé du théorème de l'article précédent.

Probl. III.

13. Étant données les équations de deux droites, trouver le cosinus de l'angle formé par les parallèles à ces droites, menées par l'origine des coordonnées.

Solution. Soient $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ les équations de l'une des droites données, $x = a'z + \alpha'$, $y = b'z + \beta'$ les équations de la seconde droite; les parallèles à ces droites menées par l'origine des coordonnées, ont évidemment pour équations,

$$x = az\,,\quad y = bz\,,\qquad \text{1}^{\text{re}}.\ \text{Parallèle}$$
$$x = a'z\,,\quad y = b'z\,,\qquad \text{2}^{\text{e}}.\ \text{Parallèle.}$$

Ayant pris sur la seconde parallèle un point dont les coordonnées sont x', y', z', on abaisse de ce point une perpendiculaire sur la première parallèle; cette perpendiculaire et les deux parallèles comprennent entre elles un triangle rectangle dont l'hypothénuse est la distance $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ du point (x', y', z') à l'origine des coordonnées. Le côté adjacent à l'hypothénuse est la distance $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ du point (x, y, z) de la première parallèle, à l'origine des coordonnées. Cette origine, le point (x', y', z') et le point (x, y, z) sont situés sur une sphère du diamètre $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. On a (9), pour l'équation de cette sphère, dont le centre est au point $\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}, \frac{z'}{2}\right)$,

$$\left(x - \frac{x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z'}{2}\right)^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{4},$$

ou en réduisant,

$$x^2+y^2+z^2-xx'-yy'-zz'=0.$$

Cette équation exprime que le point (x, y, z), est le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle.

Mettant dans cette équation, pour x et y, leurs valeurs az et bz, et divisant par z, elle deviendra :

$$z(1+a^2+b^2)=ax'+by'+z';$$

ou en substituant pour x' et y' leurs valeurs $a'z'$, $b'z'$, on aura :

$$z(1+a^2+b^2)=z'(1+aa'+bb');$$

d'où l'on tire

$$\frac{z}{z'}=\frac{1+aa'+bb'}{1+a^2+b^2}.$$

Or, le cosinus de l'angle des deux parallèles est :

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \text{ ou } \frac{z\sqrt{1+a^2+b^2}}{z'\sqrt{1+a'^2+b'^2}};$$

donc, en nommant cet angle V, on a :

$$\cos V=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\ \sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

Lorsque les parallèles aux droites données, menées par l'origine des coordonnées, sont perpendiculaires entre elles, on a :

$$\cos V = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + aa' + bb' = 0.$$

14. La droite des équations $x = az$, $y = bz$ forme avec les axes des x, des y et des z, des angles qui ont pour cosinus

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

mettant pour x et y leurs valeurs az et bz, ces cosinus deviennent :

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Par la même raison, la droite des équations $x = a'z$, $y = b'z$ fait avec les mêmes axes des coordonnées, des angles dont les cosinus sont :

$$\frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad \frac{b'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}};$$

nommant ces cosinus v, v', v'' pour la première droite, et u, u', u'' pour la seconde, on aura $v^2 + v'^2 + v''^2 = 1$, $u^2 + u'^2 + u''^2 = 1$, et le cosinus de l'angle V des deux droites, sera :

$$\cos V = vu + v'u' + v''u''.$$

Lorsque l'angle V est droit, $\cos V = 0$, et on a l'équation

$$vu + v'u' + v''u'' = 0.$$

Si, pour abréger, on nomme k et k' les deux radicaux $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$ et $\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}$, on a :

$$a = kv, \quad b = kv', \quad 1 = kv'',$$
$$a' = k'u, \quad b' = k'u', \quad 1 = k'u'';$$

d'où l'on tire :

$$k = \frac{1}{v''}, \quad a = \frac{v}{v''}, \quad b = \frac{v'}{v''},$$
$$k' = \frac{1}{u''}, \quad a' = \frac{u}{u''}, \quad b' = \frac{u'}{u''}.$$

En substituant ces valeurs de a, b, a', b' dans les équations des deux droites (13), elles deviennent :

$$x = \frac{v}{v''}z + \alpha, \quad y = \frac{v'}{v''}z + \beta, \quad 1^{\text{re}}.\ \text{droite}.$$
$$x = \frac{u}{u''}z + \alpha', \quad y = \frac{u'}{u''}z + \beta'. \quad 2^{\text{e}}.\ \text{droite}.$$

De l'Équation du plan.

15. L'équation d'un plan exprime une relation entre les trois coordonnées d'un point

de ce plan. Lorsqu'une surface telle que le plan, est prolongée indéfiniment dans tous les sens, il n'y a aucun point de l'un des trois plans coordonnés, qu'on ne puisse considérer comme la projection d'un point de la surface; d'où il suit qu'aux deux coordonnées x, y d'un point d'un plan, correspond nécessairement une troisième coordonnée z, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de x et y.

On suppose qu'un plan soit connu, 1°. par l'ordonnée du point du plan, situé sur l'axe des z, et nommons cette ordonnée c; 2°. par les tangentes des angles, que ses traces sur les plans des xz et des yz, font avec le plan des xy; désignons ces tangentes par les lettres A et B; l'équation entre les trois coordonnées x, y, z d'un point du plan sera :

$$z = Ax + By + c.$$

En effet, ce plan aura pour traces sur les plans des xz et des yz, des droites dont les équations sont, pour la première :

$$y = 0, \qquad z = Ax + c,$$

et pour la seconde droite :

$$x = 0, \qquad z = By + c.$$

Ces deux droites passent par un point de l'axe des z, dont la distance à l'origine des coordonnées est égale à c.

Supposons que la première droite se meuve parallèlement à elle-même, étant dirigée dans son mouvement par la seconde droite; concevons, par un point quelconque du plan que la trace mobile parcourt, deux plans, l'un perpendiculaire à l'axe des x, et l'autre perpendiculaire à l'axe des y. Le premier de ces plans coupe la trace mobile en un point, pour lequel on a les équations :

$$y = 0, \qquad z = Ax + c,$$

et le second plan coupe la trace fixe en un autre point pour lequel on a :

$$x = 0, \qquad z = By + c.$$

Désignons ces deux points par les lettres p et p', et nommons P le point du plan par lequel on a mené les plans perpendiculaires aux axes des x et des y.

Le point p de la trace mobile s'élèvera au-dessus du plan des xy jusqu'à ce qu'il ait atteint le point P du plan; or, dans ce mouvement, il s'élèvera parallèlement à l'axe des z, de la quantité By, différence de l'ordonnée du point p' et de l'ordonnée c à l'origine; d'où il suit que l'ordonnée totale z sera formée de la quantité $Ax+c$ augmentée de By, on aura donc l'équation

$$(1) \qquad z = Ax + By + c.$$

16. Les points où le plan de l'équation (1), coupe les axes des x et des y étant connus, en nommant a, b les coordonnées de ces points, on aura évidemment (le rayon des tables, étant 1) :

$$A = \frac{c}{a}, \qquad B = \frac{c}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), (art. 15), on aura :

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\,;$$

et comme on peut supposer les valeurs de x et y positives ou négatives, on peut écrire cette équation de la manière suivante :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

ou

$$(2) \qquad bcx + acy + abz = abc,$$

Cette équation (2), plus symétrique que l'équation (1), sera d'un usage plus général que celle-ci. Désignons les quatre produits abc, bc, ac et ab par les quantités constantes K, L, M, N, dont trois seulement sont nécessaires ; substituant ces valeurs dans l'équation (2), elle devient :

$$Lx + My + Nz = K.$$

Dans chaque cas particulier, on détermine les constantes L, M, N, K du plan, d'après les conditions qui fixent la position de ce plan par rapport aux axes des coordonnées. Par exemple, demande-t-on l'équation d'un plan parallèle au plan des yz : pour tous les points de ce plan, on a $x =$ constante, quelles que soient les valeurs de y et de z ; faisant donc $M = 0$, $N = 0$, la valeur constante de x est $\frac{K}{L}$.

Lorsque le plan passe par l'origine des coordonnées, on a $K = 0$; et l'équation du plan se réduit à la forme :

$$Lx + My + Nz = 0.$$

17. De l'équation du plan $Lx + My + Nz = K$, on tirera les équations de ses traces sur les plans des xz et des yz, en faisant successivement $y = 0$, $x = 0$.

Soit, 1°. $y = 0$,

les équations de la trace sur le plan des xz

seront :

$$Lx + Nz = K, \qquad y = 0.$$

Soit, 2°. $x = 0$,
les équations de la trace sur le plan des yz seront :

$$My + Nz = K, \qquad x = 0.$$

Des équations de ces deux traces on pourra revenir à l'équation du plan ; en effet, les équations d'une parallèle à la première trace, seront (6) :

$$\frac{L}{N}x + z = \alpha, \qquad y = \beta.$$

L'équation de condition qui exprime que cette parallèle rencontre la seconde trace donnée sur le plan des yz, sera :

$$M\beta + N\alpha = K.$$

Regardant la parallèle à la première trace comme la génératrice du plan, les équations de cette génératrice, dans une position quelconque, dépendant de β, seront :

$$y = \beta, \qquad \frac{L}{N}x + z = \frac{K - M\beta}{N};$$

éliminant β entre ces deux équations, l'équation du plan, déduite des équations de ses traces sur les plans des xz et des yz, sera :

$$Lx + My + Nz = K.$$

18. L'équation du plan étant linéaire entre les trois coordonnées x, y, z d'un point de ce plan, la ligne commune à deux plans est nécessairement une droite ; d'où il suit qu'on peut définir le plan *une surface sur laquelle on peut tracer une ligne droite dans tous les sens*.

Soient les équations de deux plans :

$$Lx + My + Nz = K, \quad \text{pour le premier,}$$

et

$$L'x + M'y + N'z = K', \quad \text{pour le second.}$$

en éliminant successivement x, y, z, on déduit de ces deux équations, trois autres équations dont chacune ne contient que deux coordonnées, et qui appartiennent aux projections de la droite d'intersection des deux plans, sur les trois plans des coordonnées.

Deux plans parallèles ont des traces parallèles sur les plans des coordonnées ; les relations entre les constantes des équations des deux plans, qui résultent de ce parallélisme, sont (7) :

$$\frac{L}{N} = \frac{L'}{N'}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{M'}{N'}.$$

Problêmes relatifs au plan.

Probl. I.

19. On demande les équations d'un plan qui soit parallèle à un autre plan donné, et qui passe par un point connu ?

Solution. Soient x', y', z' les coordonnées du point dont la position est connue ; . . $Ax + By + Cz - D = 0$ l'équation du plan donné, $Lx + My + Nz - K = 0$ l'équation du plan demandé.

Des quatre constantes L, M, N, K, on détermine d'abord la quatrième K d'après la condition que le plan passe par le point donné. Pour ce point, les coordonnées x, y, z du plan demandé deviennent x', y', z'; donc on a :

$$Lx' + My' + Nz' - K = 0,$$

et en retranchant cette équation de la précédente :

$$L(x - x') + M(y - y') + N(z - z') = 0,$$

le plan donné et le plan demandé étant parallèles, on a (18) :

$$\frac{L}{N} = \frac{A}{C}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{B}{C}.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation, elle devient :

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

équation du plan qui passe par le point donné, et qui est parallèle au plan $Ax+By+Cz-D=0$.

Probl. II.

20. On demande l'équation d'un plan qui passe par trois points donnés dans l'espace ?

Solution. Soient les coordonnées des points donnés, x', y', z' pour le premier point,
x'', y'', z'' pour le second,
x''', y''', z''' pour le troisième ;
l'équation du plan demandé sera de la forme

$$Lx+My+Nz=K.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque du plan devenant successivement celles des points donnés, on aura évidemment les trois équations suivantes :

$$Lx'+My'+Nz'=K,$$
$$Lx''+My''+Nz''=K,$$
$$Lx'''+My'''+Nz'''=K;$$

d'où l'on tirera les valeurs de $\frac{L}{K}$, $\frac{M}{K}$, $\frac{N}{K}$;

ce qui donne :

$$L = z'(y''' - y'') + z''(y' - y''') + z'''(y'' - y'),$$
$$M = x'(z''' - z'') + y''(z' - z''') + x'''(z'' - z'),$$
$$N = y'(x''' - x'') + y''(x' - x''') + y'''(x'' - x'),$$
$$K = x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z').$$

(Pour effectuer ce calcul, on suppose $\frac{L}{K} = l$, $\frac{M}{K} = m$, $\frac{N}{K} = n$, et par les méthodes connues de l'élimination, on obtiendra les valeurs de l, m, n.)

21. Substituant ces valeurs dans l'équation du plan $Lx + My + Nz = K$, et mettant cette équation sous cette forme :

$$(1) \quad \frac{x}{3}\cdot\frac{L}{2} + \frac{y}{3}\cdot\frac{M}{2} + \frac{z}{3}\cdot\frac{N}{2} = \frac{1}{6}K,$$

on en déduit le théorème suivant, de M. Monge (*Journ. de l'École*, 14^e. cahier) :

« Un plan quelconque étant rapporté à trois plans rectangulaires, et étant donné sur ce plan un triangle quelconque rectiligne dont on ait les projections sur les trois plans rectangulaires; si l'on considère un point quelconque de ce plan, la somme ou la différence des solidités des trois pyramides qui ont ce point pour sommet commun, et dont les bases sont les trois projections du triangle, est égale à la pyramide unique qui a pour base le triangle lui-même, et dont le sommet est à l'origine. » (Les signes des coordonnées des sommets du triangle déterminent les signes des solidités des trois pyramides qui ont leur sommet en un point du plan du triangle.)

Soit T le triangle, et t, t', t'' ses trois projections sur les trois plans rectangulaires des yz, des xz, des xy, auxquels on a rapporté le plan du triangle. Nous allons d'abord démontrer, 1°. que les aires des triangles t, t', t'' ont pour expressions les quantités $\frac{L}{2}$; $\frac{M}{2}$, $\frac{N}{2}$; 2°. que la quantité $\frac{1}{6} K$ est le volume de la pyramide qui a pour sommet l'origine des coordonnées, et pour base le triangle T.

22. KX, KY, KZ étant (fig. 4) les trois axes rectangulaires auxquels on rapporte le triangle T, supposons 1°. que ce triangle soit projeté sur les plans des yz, des xz, des xy suivant les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, dont les aires sont respectivement t, t', t''; 2°. que les coordonnées des sommets α, β, γ, du triangle t

soient y', z' pour le premier, y'', z'' pour le second, y''', z''' pour le troisième.

La valeur de $\frac{L}{2}$ se compose des trois quantités suivantes :

$$\left(\frac{y'z''-y''z'}{2}\right)+\left(\frac{y''z'''-y'''z''}{2}\right)-\left(\frac{y'z'''-y'''z'}{2}\right);$$

or, on a vu (11) que $\frac{y'z''-y''z'}{2}$ est l'aire du triangle $K\alpha\beta$ qui a son sommet au point K origine des coordonnées, et pour base le côté $\alpha\beta$. De même $\frac{y''z'''-y'''z''}{2}$ est l'aire du triangle $K\beta\gamma$; $\frac{y'z'''-y'''z'}{2}$ est l'aire du triangle $K\alpha\gamma$; or, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est égal à la somme des deux triangles $K\alpha\beta$, $K\beta\gamma$ diminué du triangle $K\alpha\gamma$, c'est-à-dire à la quantité $\frac{1}{2}L$: donc on a $t=\frac{L}{2}$.

On démontre de la même manière que les aires t' et t'' sont égales aux quantités $\frac{1}{2}M$, $\frac{1}{2}N$; d'où il suit que le premier membre de l'équation (1) de l'art. précédent est la somme de trois pyramides, qui ont pour sommet commun, un point du plan du triangle T, et pour bases les triangles t, t', t'', projections du triangle T sur les trois plans rectangulaires.

La quantité $\frac{1}{6} K$ qui est le second membre de cette équation (1), (21), est le volume de la pyramide qui a son sommet au point K, et pour base le triangle T.

En effet, soient (fig. 4) $K\alpha\beta\gamma$, $K\alpha'\beta'\gamma'$, $K\alpha''\beta''\gamma''$ les trois projections de cette pyramide sur les trois plans rectangulaires des yz, des xz, des xy. De ces trois projections, une quelconque, par exemple, celle du plan des yz a pour limite le quadrilatère $K\alpha\beta\gamma$, qui correspond au quadrilatère formé dans l'espace par quatre arêtes de la pyramide. Ce dernier quadrilatère divise la pyramide en deux parties, dont chacune est terminée par deux systêmes de triangles; le contour des triangles du premier systême se projette suivant les cinq lignes pleines $K\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $K\gamma$, $\alpha\gamma$, et celui des triangles du second systême se projette suivant les quatre lignes pleines $K\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $K\gamma$, et la ligne ponctuée $K\beta$; or, si l'on considère les prismes tronqués qui ont pour bases les projections des faces de la pyramide, et pour arêtes les lignes par lesquelles on projette ces mêmes faces, on verra que les deux systêmes de prismes tronqués qui ont pour bases les unes les deux triangles $K\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$; les autres, les deux triangles $K\alpha\beta$, $K\beta\gamma$ ne diffèrent en volume que par la pyramide qui les sépare ; ensorte que la solidité de cette pyramide est égale à la différence des solidités des deux systêmes de prismes tronqués. Mais le volume d'un prisme est égal à la section faite perpendiculairement à ses arêtes, multipliée par le tiers de la somme de ses arêtes ; de plus, les arêtes des deux systêmes de prismes tronqués sont parallèles à l'axe des x, et ont pour longeurs les abscisses x', x'', x''' ; d'où il suit qu'on aura l'équation suivante.

Le volume de la pyramide est égal a :

$$\text{triangle } \alpha\beta\gamma \times \left(\frac{x'+x''+x'''}{3}\right)$$

$$+ \text{ triangle } K\alpha\gamma \left(\frac{x'+x'''}{3}\right)$$

$$- \text{ triangle } K\alpha\beta \left(\frac{x'+x''}{3}\right)$$

$$- \text{ triangle } K\beta\gamma \left(\frac{x''+x'''}{2}\right).$$

Mettant dans cette équation, les expressions des aires des triangles $\alpha\beta\gamma$, $K\alpha\gamma$, $K\alpha\beta$, $K\beta\gamma$, on a pour le volume V de la pyramide,

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(y'z'' - y''z') \\ + \frac{1}{2}(y''z''' - y'''z'') \\ - \frac{1}{2}(y'z''' - y'''z') \end{array} \right\} \left(\frac{x' + x'' + x'''}{3} \right) \\ + \frac{1}{2}(y'z''' - y'''z') \left(\frac{x' + x'''}{3} \right) \\ - \frac{1}{2}(y''z''' - y'''z'') \left(\frac{x'' + x'''}{3} \right) \\ - \frac{1}{2}(y'z'' - y''z') \left(\frac{x' + x''}{3} \right). \end{array} \right.$$

Réduisant, on a :

$$V = \frac{1}{2}(y''z''' - y'''z'')\frac{x'}{3} + \frac{1}{2}(y'''z' - y'z''')\frac{x''}{3} + \frac{1}{2}(y'z'' - y''z')\frac{x'''}{3}.$$

Comparant cette valeur à celle de $\frac{1}{6}K$ (art. 20), on reconnaîtra qu'elles sont identiques ; d'où il suit qu'on a : $V = \frac{1}{6}K$. Ce qui démontre le théorème de l'art. 21, renfermé dans cette équation (1) du même article,

$$(1)\qquad \frac{x}{3}\cdot\frac{L}{2}+\frac{y}{3}\cdot\frac{M}{2}+\frac{z}{3}\cdot\frac{N}{2}=\frac{1}{6}K.$$

Problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.

PROBL. I.

23. Étant données les coordonnées d'un point, et les équations d'une droite, trouver l'équation du plan qui passe par la droite et le point?

Solution. Soient x', y', z' les coordonnées du point,

$$\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha, \\ y=bz+\beta, \\ b(x-\alpha)=a(y-\beta), \end{array}\right\}\text{ les équations de la droite ;}$$

le plan dont on demande l'équation passe par le point donné, et de plus par le point où la droite donnée coupe le plan des xy, point dont les coordonnées sont :

$$z=0,\qquad x=\alpha,\qquad y=\beta.$$

Si on suppose que ce plan ait pour équation :

$$z=Lx+My+N,$$

on aura :

$$(1) \qquad z' = Lx' + My' + N,$$
$$(2) \qquad 0 = L\alpha + M\beta + N.$$

Ramenant la droite et le plan parallèlement à eux-mêmes jusqu'à l'origine des coordonnées, leurs équations deviendront, pour la droite :

$$x = az, \qquad y = bz, \qquad bx = ay,$$

et pour le plan :

$$z = Lx + My;$$

or, dans cette nouvelle position, la droite est encore contenue dans le plan ; donc on aura :

$$(3) \qquad 1 = La + Mb.$$

Les équations (1), (2), (3) donneront les valeurs de L, M, N, et l'équation . . . . . $z = Lx + My + N$ deviendra :

$$(4) \quad (x - x')(y' - bz' - \beta) - (y - y')(x' - az' - \alpha) + (z - z')\{b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)\} = 0.$$

Probl. II.

24. Étant données les coordonnées d'un point et les équations de deux droites, trouver l'équation du plan mené par le point, parallèlement aux deux droites ?

Solution. Soient x', y', z' les coordonnées du point donné ; $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ les équations de la première droite donnée ; $x = a'z + \alpha'$, $y = b'z + \beta$ les équations de la seconde droite; $z = Lx + My + N$ l'équation du plan demandé; on détermine la constante N par la condition que le plan passe par le point donné x', y', z', et l'équation de ce plan devient :

$$(1) \qquad z - z' = L(x - x') + M(y - y').$$

Pour que ce plan soit parallèle à la première droite, on a (23) l'équation de condition :

$$1 = La + Mb.$$

La condition d'être parallèle à la seconde droite est exprimée par l'équation

$$1 = La' + Mb'.$$

Tirant de ces deux dernières équations les valeurs de L et de M, et les substituant dans l'équation (1), on aura pour l'équation du plan demandé :

$$(2) \quad (z-z')(ab'-a'b) = (b'-b)(x-x') + (a-a')(y-y').$$

PROBL. III.

25. Étant données les équations d'une droite et celle d'un plan, trouver les conditions qui

expriment que la droite est perpendiculaire au plan ?

Solution. Soient $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ les équations d'une droite, et $z = Ax + By + C$, l'équation d'un plan.

Lorsqu'un plan est perpendiculaire à une droite, les traces du plan sur les plans des coordonnées et les projections de la droite sur ces mêmes plans, sont (*Géom. descript.*, art. 16, *Supplément*, art. 21) perpendiculaires entre elles. Le plan donné a pour trace, sur le plan des xz, la droite représentée par l'équation $z = Ax + C$: elle est par hypothèse perpendiculaire à la droite $x = az + \alpha$; pour que ces deux droites soient à angle droit, on a l'équation de condition $A = -a$. En raisonnant de la même manière par rapport à la trace $z = By + C$, et à la droite $y = bz + \beta$, l'équation $B = -b$, exprime que ces deux droites sont perpendiculaires entre elles ; d'où il suit que les deux équations $A = -a$, $B = -b$, ont lieu en même tems, lorsque la droite et le plan sont perpendiculaires entre eux. Mettant ces valeurs de A et B dans l'équation du plan $z = Ax + By + C$, on a pour l'équation d'un plan perpendiculaire à la droite $(x = az + \alpha,\ \ y = bz + \alpha)$:

$$ax + by + z = C;$$

tous les plans dont l'équation ne différera de celle-ci que par la constante C, seront perpendiculaires à la même droite.

Probl. IV.

26. Étant données l'équation d'un plan et les coordonnées d'un point, on demande, 1°. les équations de la perpendiculaire abaissées du point sur le plan; 2°. les coordonnées du pied de la perpendiculaire; 3°. la longueur de la perpendiculaire?

Solution. Soient $z = Ax + By + C$ l'équation du plan donné, et x', y', z' les coordonnées du point d'où l'on abaisse une perpendiculaire sur ce plan. Soient de plus . . $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ les équations de la perpendiculaire. Puisque cette perpendiculaire doit être menée par le point x', y', z', on doit avoir :

$$x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z');$$

de plus, les constantes a et b sont (art. précédent) égales aux constantes du plan $-A$ et $-B$; d'où il suit que les équations de la perpendiculaire au plan mené par le point donné, sont :

$$(1) \qquad x - x' + A(z - z') = 0,$$

$$(2) \qquad y - y' + B(z - z') = 0.$$

Combinant cette équation avec celle du plan

$$(3) \qquad z = Ax + By + C,$$

on obtiendra les valeurs des coordonnées x, y, z du pied de la perpendiculaire.

Ayant mis l'équation (3) sous cette forme :

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y') + (C + Ax' + By' - z'),$$

on y substituera pour $x - x'$ et $y - y'$ leurs valeurs tirées des équations (1) et (2), et on aura :

$$(z - z')(1 + A^2 + B^2) = C + Ax' + By' - z'.$$

Pour distinguer les coordonnées du pied de la perpendiculaire, désignons-les par les lettres X, Y, Z, cette dernière équation donne pour z qui se change en Z, la valeur suivante :

$$Z = z' + \frac{C + Ax' + By' - z'}{1 + A^2 + B^2}.$$

Les valeurs de x et y qui se changent dans les équations (1) et (2) en X et Y, deviennent :

$$X = x' - \frac{A(C + Ax' + By' - z')}{1 + A^2 + B^2},$$

$$Y = y' - \frac{B(C + Ax' + By' - z')}{1 + A^2 + B^2}.$$

La longueur de la perpendiculaire comprise entre le point X, Y, Z et le point x', y', z' est (8) :

$$\sqrt{(X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2},$$

ou

$$\frac{C+Ax'+By'-z'}{\sqrt{1+A^2+B^2}}.$$

Lorsque le point d'où l'on abaisse la perpendiculaire est à l'origine des coordonnées, on a $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; et la longueur de la perpendiculaire a pour expression :

$$\frac{C}{\sqrt{1+A^2+B^2}}.$$

PROBL. V.

27. Ayant les équations d'une droite et les coordonnées d'un point, trouver, 1°. l'équation du plan mené par le point perpendiculairement à la droite, 2°. les équations de la perpendiculaire à la droite menée par le point donné; 3°. les coordonnées du pied de la perpendiculaire ?

Solution. Soient x', y', z' les coordonnées du point $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, les équations de la droite donnée. On a démontré (25) qu'un plan perpendiculaire à cette droite avait pour équation $ax + by + z = C$. Déterminant la constante C d'après la condition que le plan passe par le point x', y', z'; l'équation de ce plan sera :

$$(1) \qquad a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

On a trouvé (23) pour l'équation du plan qui passe par ce point et par la droite :

$$(2) \qquad (x - x')(y' - bz' - \beta) + (y - y')(x' - az - \alpha)$$
$$+ (z - z')\{b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)\} = 0.$$

La perpendiculaire abaissée du point x', y', z' sur la droite donnée est l'intersection des plans menés par ce point perpendiculairement à la droite, et par la droite même; donc les équations (1) et (2) sont celles de la perpendiculaire.

Pour trouver les coordonnées du pied de la perpendiculaire ($x = az + \alpha$, $yz = bz + \beta$), mettons les équations de cette droite sous la forme :

$$x - x' = a(z - z') + \alpha - x' + az',$$
$$y - y' = b(z - z') + \beta - y' + bz'.$$

Substituant dans l'équation (1) ces valeurs de $x - x'$ et $y - y'$, on aura :

$$(z - z')(1 + a^2 + b^2) = a(x' - az' - \alpha) + b(y' - bz' - \beta).$$

Désignons par X', Y', Z' les coordonnées du pied de la perpendiculaire, z se change, dans cette dernière équation, en Z', et on a, après avoir réduit :

$$Z' = \frac{a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'}{1+a^2+b^2}.$$

Les équations de la perpendiculaire donnent :

$$Y' = bZ' + \beta, \qquad X' = aZ' + \alpha.$$

Quant à la longueur de la perpendiculaire comprise entre le point X', Y', Z' et le point donné x', y', z', elle a pour expression :

$$\sqrt{(X'-x')^2+(Y'-y')^2+(Z'-z')^2},$$

ou

$$\sqrt{\frac{(x'-\alpha-az')^2+(y'-\beta-bz')^2+(a(y'-\beta)-b(x'-\alpha))^2}{1+a^2+b^2}}.$$

Lorsque la droite passe par l'origine des coordonnées, on a $\alpha=0$, $\beta=0$, et la longueur de la perpendiculaire devient :

$$\sqrt{\frac{(x'-az')^2+(y-bz')^2+(ay'-bx')^2}{1+a^2+b^2}}.$$

Dans la même hypothèse où la droite passe par l'origine des coordonnées, la partie de cette droite comprise entre l'origine et le pied de la perpendiculaire, a pour expression :

$$\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2} = Z'\sqrt{1+a^2+b^2} = \frac{ax'+by'+z'}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Probl. VI.

28. Étant données les équations de deux plans, trouver l'angle que ces deux plans font entre eux?

Solution. Soient les équations données :

$$Lx + My + Nz = K, \qquad \text{pour le premier plan,}$$
$$L'x + M'y + N'z = K', \qquad \text{pour le second plan.}$$

Si, par l'origine des coordonnées, on conçoit deux droites perpendiculaires aux plans donnés, l'angle de ces deux droites sera évidemment égal à l'angle des deux plans; les équations de la première perpendiculaire sont (25) :

$$Nx - Lz = 0, \qquad Ny - Mz = 0.$$

La seconde perpendiculaire a pour équations :

$$N'x - L'z = 0, \qquad N'y - M'z = 0;$$

mais le cosinus de l'angle formé par ces droites, est (13) :

$$\frac{LL' + MM' + NN'}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\,\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}};$$

donc, cette quantité est aussi l'expression du cosinus de l'angle formé par ces deux plans.

Lorsque, des deux plans donnés, le second se confond avec l'un des trois plans des coordonnées, deux des trois constantes L', M', N' deviennent nulles ; d'où il suit que les cosinus des angles qu'un plan fait avec les trois plans des yz, des xz, des xy, sont :

$$\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\quad \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\quad \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}};$$

désignant ces trois cosinus par les lettres u, u', u'', la somme $u^2+u'^2+u''^2$ des carrés de ces trois cosinus, est évidemment égal à l'unité. Cette équation est une conséquence d'une proposition déja démontrée (14); car la perpendiculaire au plan menée par l'origine, fait, avec les axes des coordonnées, des angles égaux à ceux que le plan déterminé par les constantes L, M, N, fait avec les plans des coordonnées; et on a vu (14) qu'en ajoutant les carrés des cosinus des angles qu'une droite fait avec les trois axes rectangulaires, la somme était égale à l'unité.

Nommant v, v', v'' les cosinus des angles que le second plan forme avec les plans des yz, des xz, des xy, on aura de même . . $v^2+v'^2+v''^2=1$, et le cosinus de l'angle des deux plans sera :

$$\text{cosinus de l'angle des deux plans} = uv + u'v' + u''v''.$$

Probl. VII.

29. Étant données les équations d'une droite et d'un plan, trouver l'angle de la droite et du plan ?

Solution. Soient les équations de la droite :

$$nx - lz = i, \qquad ny - mz = k,$$

et prenons pour l'équation du plan donné :

$$Lx + My + Nz = K ;$$

l'équation du plan mené par l'origine des coordonnées perpendiculairement à la droite donnée, est (25) :

$$lx + my + nz = 0.$$

Or, ces deux plans font entre eux un angle qui est le complément de l'angle formé par la droite et le plan donnés ; donc, le cosinus de l'angle des deux plans, ou le sinus de l'angle demandé, est (28) égal à

$$\frac{Ll + Mm + Nn}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Nommant u, u', u'' les cosinus des angles que la droite donnée fait avec les axes des x, des y, des z, et v, v', v'' les cosinus des angles que le plan donné fait avec les plans des yz, des xz, des xy, le sinus de l'angle que la droite et le plan font entre eux, sera (14) et (28) :

$$uv = + u'v' + u''v''.$$

Probl. VIII.

30. Deux droites étant données, trouver, 1°. les équations de la perpendiculaire sur laquelle on mesure leur plus courte distance; 2°. la longueur de cette perpendiculaire?

Solution. On démontre (*Géom. descrip.*, art. 31, *Supplément*, art. 23) que, quelle que soit la position des deux droites données, on peut, par un point quelconque de l'espace, mener un plan parallèle à ces droites. Supposons ce plan connu, et par chacune des deux droites données, menons un plan qui lui soit perpendiculaire. On aura deux plans dont chacun contiendra la perpendiculaire aux deux droites données; d'où il suit que les équations de ces plans seront celles de la perpendiculaire.

Pour avoir la longueur de la perpendiculaire, qu'on imagine par les deux droites, deux plans parallèles à-la-fois à ces droites et parallèles entre eux; ayant abaissé d'un point quelconque de l'espace, par exemple de l'origine des coordonnées, une perpendiculaire sur les plans parallèles, la portion de cette perpendiculaire comprise entre les plans, sera la plus courte distance des deux droites données.

31. Soient les équations des deux droites données :

$x = az + \alpha$, $\quad y = bz + \beta$, $\qquad$ pour la première,
$x = a'z + \alpha'$, $\quad y = b'z + \beta'$, $\qquad$ pour la seconde.

Ces deux droites rencontrent le plan des xy en deux points qui ont pour coordonnées l'un $z = 0$, $x = \alpha$, $y = \beta$, l'autre $z = 0$, $x = \alpha'$, $y = \beta'$. Désignons ces points par les lettres P et P'.

Les plans menés par les points P et P' parallèlement aux deux droites données sont (24) :

$$z(ab' - a'b) = (b' - b)(x - \alpha) + (a - a')(y - \beta), \quad (e)$$
$$z(ab' - a'b) = (b' - b)(x - \alpha') + (a - a')(y - \beta'). \quad (e')$$

Les perpendiculaires à ces plans parallèles, menées par les points P et P', ont pour équations :

l'une $\qquad x = Az + \alpha$, $\quad y = Bz + \beta$,
l'autre $\qquad x = Az + \alpha'$, $\quad y = Bz + \beta'$.

en faisant, pour abréger :

$$A = \frac{b - b'}{ab' - a'b}, \qquad B = \frac{a' - a}{ab' - a'b}.$$

La première de ces perpendiculaires, et la première droite donnée, qui ont un point commun P, déterminent le plan qui contient la perpendiculaire aux deux droites; l'équation de ce plan est (23) :

$$z(aB - Ab) = (B - b)(x - \alpha) + (a - A)(y - \beta).$$

Pour obtenir cette équation, il faut, dans l'équation (2) de l'art. 24, substituer aux coordonnées x', y', z', celles du point $P(\alpha, \beta, 0)$, et mettre A et B à la place de a' et b'.

La seconde perpendiculaire et la seconde droite donnée, qui ont un point commun P', déterminent un plan dont l'équation est (23) :

$$z(a'B - Ab') = (B - b')(x - \alpha') + (a' - A)(y - \beta').$$

Substituant les valeurs de A et de B dans ces deux dernières équations, on aura, pour les équations de la droite perpendiculaire aux deux droites données :

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)\left\{a-a'+b\,(ab'-a'b)\right\}\\ +(y-\beta)\left\{b-b'-a(ab'-a'b)\right\}-z\left\{a(a-a')+b(b-b')\right\}\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha')\left\{a-a'+b'(ab'-a'b)\right\}\\ +(y-\beta')\left\{b-b'-a'(ab'-a'b)\right\}-z\left\{a'(a-a')+b'(b-b')\right\}\end{array}\right\}=0.$$

La seconde de ces équations aurait pu se déduire de la première, en y changeant :

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta \text{ en } a',\ b',\ \alpha',\ \beta', \quad \text{et } a',\ b' \text{ en } a \text{ et } b.$$

32. Si, de l'origine des coordonnées, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des plans (e)(e') (art. 31) parallèles aux deux droites données, ces perpendiculaires ayant même direction, se confondront, et leur différence, qui sera la distance des deux plans, sera égale à la plus courte distance des droites données, mesurée sur la perpendiculaire à ces droites. Les perpendiculaires aux plans des équations (e) (e') (art. 31), ont (26) pour expressions, l'une :

$$\alpha(b-b')-\beta(a-a') : \sqrt{1+\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{(ab'-a'b)^2}},$$

l'autre :

$$\alpha'(b-b')-\beta'(a-a') : \sqrt{1+\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{(ab'-a'b)^2}},$$

dont la différence est :

$$(b-b')(\alpha-\alpha')-(a-a')(\beta-\beta') : \sqrt{1+\frac{(a-a')^2+(b-b')^2}{(ab'-a'b)^2}}.$$

Lorsque les droites se rencontrent, cette différence est nulle, et on a l'équation déja trouvée (7), qui exprime que deux droites se coupent :

$$(a-a')(\beta-\beta')-(b-b')(\alpha-\alpha')=0.$$

33. Lorsqu'on suppose que la direction des deux lignes droites dont on demande la plus courte distance, est donnée par les sinus des angles que ces droites font avec les axes des coordonnées, alors les équations de ces deux droites deviennent (14) :

$$x = \frac{v}{v''} z + \alpha, \quad y = \frac{v'}{v''} z + \beta, \quad \text{pour la } 1^{re}. \text{ droite},$$

et

$$x = \frac{u}{u''} z + \alpha', \quad y = \frac{u'}{u''} z + \beta'. \quad \text{pour la } 2^{e}. \text{ droite},$$

De ces trois cosinus v, v', v'', et u, u', u'' des angles que les droites données font avec les axes des x, des y, des z, deux seulement sont nécessaires, à cause des équations (14) de condition :

$$v^2 + v'^2 + v''^2 = 1, \qquad u^2 + u'^2 + u''^2 = 1.$$

Substituant, dans l'expression de la plus courte distance, pour a, b, a', b', leurs valeurs $\frac{v}{v''}$, $\frac{v'}{v''}$, $\frac{u}{u'}$, $\frac{u'}{u''}$, elle se change en celle-ci :

$$\frac{(\alpha - \alpha')(v'u'' - v''u') - (\beta - \beta')(vu'' - v''u)}{v''u''\sqrt{(vu' - v'u)^2 + (vu'' - v''u)^2 + (v'u'' - v''u')^2}}.$$

Nommant V l'angle des deux droites données, ou plutôt des parallèles à ces droites menées par un point quelconque de l'espace, on a (14) :

$$\cos V = vu + v'u' + v''u'';$$

substituant cette valeur de cos V, et ayant égard aux équations de condition, la plus courte distance des deux droites devient :

$$\frac{(\alpha-\alpha')(v'u''-v''u')-(\beta-\beta')(vu''-v''u)}{v''u''\sin V},$$

expression dans laquelle V est la mesure de l'angle que les deux plans menés par les droites données et leur plus courte distance, font entr'eux.

§. II.

De la Trigonométrie sphérique.

34. Un triangle sphérique est une partie de la surface d'une sphère comprise entre trois arcs de grands cercles tracés sur cette sphère. Les plans de ces grands cercles forment une pyramide triangulaire, dont le sommet est au centre de la sphère, et qui a pour base le triangle sphérique. On nomme les angles que ces plans font entre eux *angles* du triangle sphérique, et on prend pour côtés de ce triangle, les arcs de grands cercles qui mesurent les angles formés par les arêtes de la pyramide.

Des six angles formés ou par les plans des grands cercles ou par les rayons de la sphère, intersections de ces plans, trois étant donnés, la trigonométrie sphérique a pour objet de déterminer les trois autres.

La perpendiculaire abaissée du sommet d'un triangle sphérique sur le côté opposé à ce sommet, est un arc de grand cercle dont le plan est perpendiculaire à celui de ce grand cercle. Dans la pyramide triangulaire qui a pour base le triangle sphérique, cet arc mesure l'angle qu'un rayon arête de la pyramide fait avec la face de la pyramide opposée à cette arête, ou autrement, l'angle d'une arête de la pyramide et de la projection de cette arête sur la face qui lui est opposée. Ainsi, dans un triangle sphérique ou dans la pyramide qui a pour base ce triangle, il y a neuf angles à considérer, savoir : les trois angles des faces, les trois angles des arêtes, et les trois angles des faces et des arêtes.

35. Les plans qui forment le triangle sphérique ou la pyramide triangulaire étant prolongés indéfiniment, il est évident que les angles de la pyramide ne changent pas. Ainsi les relations entre les lignes trigonométriques de ces angles sont indépendantes du rayon de la sphère sur laquelle on considère le triangle

sphérique. Mais l'aire de ce triangle dépend évidemment de la grandeur du rayon de la sphère à laquelle il appartient. Nous allons d'abord résoudre cette question : « Connaissant les *angles* d'un triangle sphérique, et la grandeur du rayon de la sphère sur laquelle il est tracé, trouver l'expression de l'aire du triangle ? » (Par *angles*, on entend ceux que les plans des trois côtés du triangle font entre eux.)

De l'Aire d'un triangle sphérique.

36. La surface entière de la sphère est équivalente à l'aire de quatre grands cercles de cette sphère. Prenant le rayon de la sphère pour unité, et π pour la circonférence de l'un de ses grands cercles, 2π (ou huit angles droits) sera l'aire totale de la sphère. Qu'on imagine cette sphère découpée en fuseaux par des plans passant par un diamètre de cette sphère : deux quelconques de ces plans comprennent entre eux un fuseau, dont l'aire dépend évidemment de l'angle compris entre ces deux plans. Supposons cet angle mesuré par un arc A du grand cercle π. Les aires de la sphère entière et du fuseau, sont dans le rapport de π à A.

On a donc la proportion :

$\pi : A :: 2\pi$ surface entière de la sphère : aire du fuseau ;

d'où il suit que $2A$ est l'expression de l'aire de ce fuseau. Cela posé, considérons le triangle sphérique ABC (Pl. 1, fig. 5), dont un côté AB, est un arc du grand cercle ABB' qui partage la sphère en deux parties égales, l'une au-dessus, et l'autre au-dessous du plan de ce cercle. Soient ACA', BCB', les deux autres grands cercles. Les plans de ces trois grands cercles comprennent entre eux trois fuseaux. En comparant les aires de ces fuseaux à l'aire de l'hémisphère supérieure, on voit que cette hémisphère est composée 1°. du fuseau $AA'BC$, 2°. du fuseau $BB'AC$ diminué du triangle sphérique ABC, 3°. du fuseau $CC'A'B'$ diminué du triangle sphérique $A'B'C'$, dont l'aire est égale et opposée à celle du triangle ABC : or, A, B, C étant les angles donnés du triangle sphérique, les aires des trois fuseaux $AA'BC$, $BB'AC$, $CC'A'B'$ sont respectivement $2A$, $2B$, $2C$. Donc nommant T l'aire du triangle sphérique donné, et se rappelant que π est l'aire de l'hémisphère, on a l'équation suivante :

$$\pi = 2A + (2B - T) + (2C - T);$$

d'où l'on tire :

$$T = A + B + C - \frac{\pi}{2};$$

c'est-à-dire que l'aire d'un triangle sphérique tracé sur une sphère dont le rayon est l'unité, est l'excès de ses trois angles, sur deux angles droits, la surface de la sphère étant huit angles droits.

De l'Aire d'un polygone sphérique qui n'a point d'angles rentrans.

37. On suppose qu'un polygone sphérique a pour côtés des arcs de grands cercles de la sphère sur laquelle il est tracé. Ayant pris un point à volonté dans l'intérieur du polygone, menons, par ce point, le centre de la sphère, et les sommets des angles du polygone, une suite de plans qui divisent le polygone en autant de triangles sphériques qu'il y a de côtés. La somme des aires de ces triangles est (art. précédent) égale à l'excès de la somme de tous les angles intérieurs de ces triangles sur deux fois autant d'angles droits qu'il y a de triangles ou de côtés dans le polygone ; mais la somme de ces angles intérieurs se compose des angles qui ont pour sommet commun le point pris dans l'intérieur du polygone, et

dont la somme est de quatre angles droits, et de tous les angles intérieurs du polygone; donc, *si, de la somme des angles intérieurs d'un polygone sphérique, augmentée de quatre angles droits, on soustrait deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés dans le polygone*, la différence est l'expression de l'aire du polygone sphérique.

38. Problème. Déterminer en combien de manières on peut couvrir la surface d'une sphère avec des polygones égaux et réguliers?

Solution (*). Soit x le nombre des côtés de l'un des polygones réguliers qui recouvrent la sphère, y le nombre des angles qui s'assemblent autour d'un même point, et z le nombre des polygones. Désignant l'angle droit par A, la surface de la sphère dont le rayon est l'unité est (36) $8A$, et celle du polygone régulier $\frac{8A}{z}$. Or, l'aire du polygone est (37), en appelant S la somme de ses angles intérieurs :

$$S + 4A - 2Ax \quad \text{ou} \quad S - 2A(x - 2);$$

(*) Cette solution de M. Laplace est l'objet d'une leçon donnée en 1795, à l'ancienne École normale. (Voyez le *Journal de l'École Polytechn.*, cahiers 7 et 8).

donc on a :

$$S = \frac{8A}{z} + 2A(x-2);$$

mais le nombre des angles intérieurs du polygone est égal au nombre des côtés de ce polygone; donc chaque angle intérieur est :

$$\frac{8A}{xz} + \frac{2A(x-2)}{x}.$$

y étant le nombre d'angles qui s'assemblent autour d'un même sommet du polygone sphérique, chaque angle intérieur est encore égal à quatre angles droits divisés par y; on aura donc l'équation :

$$\frac{8A}{xz} + \frac{2A(x-2)}{x} = \frac{4A}{y},$$

ou

$$yz(x-2) + 4y = 2xz,$$

équation indéterminée dans laquelle x, y, z sont des nombres entiers positifs qui ne peuvent pas être plus petits que trois.

39. Quoique cette équation renferme trois variables, elle ne peut être satisfaite que de huit manières. Elle donne pour z la valeur suivante :

$$z = \frac{4y}{2y - x(y-2)}. \qquad (E)$$

Cette expression fractionnaire étant nécessairement positive, il faut que le dénominateur soit positif, ce qui donne : $x(y-2)<2y$, ou $x<\frac{2y}{y-2}$, ou enfin $x<2+\frac{4}{y-2}$. Mais la plus petite valeur de y est 3; d'où il suit que la plus grande valeur de $2+\frac{4}{y-2}$, ou de x, est $2+4$ ou 6. Cherchons maintenant les valeurs de z et de y qui correspondent aux nombres 3, 4, 5, 6, qui sont les seules valeurs possibles de x.

1°. $x=3$, auquel cas le polygone sphérique est un triangle sphérique équilatéral.

L'équation (E) donne :

$$z=\frac{4y}{6-y}.$$

On voit par cette équation qu'on ne peut prendre, pour la valeur de y, que l'un des nombres 3, 4, 5, 6, et que les valeurs de z correspondantes à ces nombres, sont : 4, 8, 20, et l'infini ; d'où il suit qu'on peut recouvrir la sphère avec quatre, ou huit ou vingt, ou une infinité de triangles équilatéraux.

2°. Supposons le polygone sphérique de quatre côtés, ou $x=4$.

La valeur de z, donnée par l'équation (E), est :

$$z = \frac{2y}{4-y}.$$

On ne peut prendre, pour la valeur de y, que l'un des deux nombres 3 et 4, auxquels correspondent, pour les valeurs de z, le nombre 6, et l'infini. On ne peut donc recouvrir la sphère qu'avec quatre quadrilatères sphériques finis, ou avec une infinité de ces quadrilatères dont chacun est un infiniment petit.

3°. On suppose le polygone sphérique de cinq côtés, ou $x = 5$

On tire de l'équation (E):

$$z = \frac{4y}{10-3y}.$$

On ne peut prendre, pour la valeur de y, que le nombre 3, auquel correspond le nombre 12 pour la valeur de z; d'où il suit qu'on ne peut partager la surface de la sphère en pentagones sphériques réguliers que d'une seule manière.

4°. On suppose le polygone sphérique de six côtés, ou $x = 6$.

Prenant dans l'équation (E) la valeur de z correspondant, on a :

$$z = \frac{y}{3 - y}.$$

Au nombre 3, qui est la seule valeur admissible de y, correspond pour z, un nombre infini ; ce qui signifie qu'on peut couvrir la surface de la sphère avec une infinité d'exagones réguliers à côtés infiniment petits.

40. Si l'on ne considère que des polygones finis, on voit que la surface de la sphère ne peut être divisée que de cinq manières, en polygones égaux et réguliers, qui sont le triangle, le quadrilatère, et le pentagone, savoir : d'une manière par le quadrilatère ou par le pentagone, et de trois manières par le triangle. Lorsque les polygones sphériques sont infiniment petits, on peut les considérer comme des polygones rectilignes, et on a encore trois manières de recouvrir la sphère, savoir : avec des triangles, des carrés, et des exagones. En effet, dans ce cas, le polygone doit être considéré comme une très-petite surface plane, et on sait qu'on ne peut recouvrir une surface plane que par ces mêmes polygones réguliers.

La sphère étant supposée recouverte de polygones réguliers, tous les sommets des angles d'un même polygone sont situés sur un petit cercle de la sphère, et les droites qui joignent, deux à deux, les sommets de ces angles, forment un polygone rectiligne inscrit au petit arc de la sphère. Considérant ce polygone comme la face d'un polyèdre, il est évident qu'on aura autant de polyèdres réguliers à faces planes qu'il y a de polygones sphériques qui peuvent couvrir entièrement la surface d'une sphère; d'où il suit qu'on peut former cinq polyèdres réguliers à faces planes : pour trois d'entre eux, les faces sont des triangles et pour les deux autres, elles sont des carrés ou des pentagones.

41. Un polygone régulier sphérique a un centre. On détermine ce centre en divisant chaque angle intérieur du polygone en deux parties égales par un plan. Deux de ces plans se coupent suivant une droite qui rencontre la sphère au centre du polygone. Les arcs de grands cercles menés du centre du polygone aux sommets des angles intérieurs, divisent l'aire du polygone en triangles sphériques isocèles. Des trois angles de l'un de ces triangles, deux sont égaux à un demi-angle intérieur du polygone, et le troisième est égal à quatre angles droits divisés par le nombre de côtés du polygone. On a vu (38) que chaque angle

intérieur du polygone est $\frac{4A}{y}$; d'où il suit que deux des angles intérieurs du triangle sont égaux chacun à $\frac{2A}{y}$. Le nombre des côtés du polygone étant x, $\frac{4A}{x}$ est le troisième angle du triangle. Connaissant, dans un triangle sphérique trois angles, on peut (*Géométrie descriptive*, *Supplément*, art. 114) construire le triangle. Ce triangle étant construit, l'arc qui est opposé à l'angle $\frac{4A}{x}$, est le côté du polygone sphérique déterminé par les trois nombres x, y, z. On peut aussi calculer ce côté, au moyen des formules relatives aux triangles sphériques rectangles, que nous allons faire connaître.

Des principales Formules de trigonométrie sphérique.

42. Les relations entre les arcs qui mesurent les angles et les côtés d'un triangle sphérique, sont exprimées par des équations transcendantes très-compliquées. En substituant à ces arcs leurs lignes trigonométriques, et recherchant

la propriété dont ces lignes jouissent entre elles, on parvient à des équations algébriques, d'où l'on déduit directement ou par transformations, la solution numérique d'un triangle sphérique, en faisant usage des tables de logarithmes. On nomme *Formules* les équations auxquelles on peut appliquer le calcul des logarithmes. La méthode que nous allons suivre pour obtenir ces formules, suppose qu'on ait résolu géométriquement la pyramide triangulaire. (Voyez *Géométr. descript.*, *Suppl.*, art. 106 — 119.)

Du rapport entre les sinus des angles d'un triangle sphérique et des côtés opposés à ces angles.

43. Théorème. Les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés à ces angles.

Démonstration. Soit (Pl. 1, fig. 5) *ABC* un triangle sphérique. Joignant les trois points *A*, *B*, *C*, et le centre *O* de la sphère par des droites, on forme une pyramide triangulaire *OACB* qui a les mêmes angles que le triangle sphérique *ABC*, et dont les faces *BOC*, *COA*, *AOB* ont pour mesures les arcs de grands cercles BC, CA, AB, côtés du triangle sphérique.

Supposons cette pyramide développée sur le plan de la face AOB, et soit (fig. 6) ce développement, dans lequel les faces BOC', AOC, qui ont pour mesures les deux côtés a et b, sont séparées par la face AOB de la pyramide ou par le troisième côté c du triangle sphérique. Nommons A, B, C les angles de la pyramide opposés aux faces a, b, c : on construit les angles A et B comme il a été dit (*Géométr. descr.*, *Supplém.*, art. 109). Soient DEG et $D'FG$ ces deux angles, dont les plans CG, $C'G$, perpendiculaires aux droites OA, OB, passent par le même point C ou C' de l'arête OC ou OC'. Les côtés DG, $D'G$ des deux triangles rectangles DEG, $D'FG$ sont égaux par construction. Or, en prenant $OC = OC'$ pour le rayon des tables :

$$DG = \sin A \sin b\,; \quad D'G = \sin a \sin B :$$

donc

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B\,,$$

ou

$$\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b\,,$$

ou, suivant l'énoncé du théorême, les sinus des angles d'un triangle sphérique sont proportionnels aux sinus des côtés opposés à ces angles.

Ces proportions résultent des trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \sin A \sin b = \sin a \sin B \\ (2) & \sin B \sin c = \sin b \sin C \\ (3) & \sin C \sin a = \sin c \sin A\end{array}\right\} \quad (A).$$

De l'Équation fondamentale entre les lignes trigonométriques des côtés d'un triangle sphérique et d'un angle de ce même triangle.

44. a, b, c étant les trois côtés d'un triangle sphérique, A l'angle opposé à l'un quelconque a de ces côtés, on a l'équation :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Soit (fig. 6, Pl. 1) OC ou OC' le rayon des tables ; OF le cosinus de l'angle $BOC' = a$, et on a : $EG = \cos A \sin b$. Ayant mené EK perpendiculaire à OB, et GH parallèle à cette même droite OB, le cosinus OF est la somme des deux droites OK et KF, ou OK et GH ;

$$OK = \cos b \cos c,$$
$$GH = EG \sin GEH = EG \sin c = \cos A \sin b \sin c;$$

donc :

$$\left.\begin{array}{l}(1) \quad OF = \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \text{On trouve, de la même manière, les} \\ \text{deux équations suivantes :} \\ (2) \quad \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ (3) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{array}\right\} \quad (B)$$

Du Triangle sphérique supplémentaire.

45. Au triangle sphérique dont les côtés sont a, b, c, correspond un triangle *supplémentaire* (voy. *Géom. descr.*, *Suppl.*, art. 107), dont les angles et les côtés sont supplémens des côtés et des angles du premier. Nommant A', B', C' les angles de ce triangle supplémentaire, a', b', c' les côtés opposés aux angles, on a, en supposant la circonférence divisée en 400 degrés :

$$A' = 200^\circ - a, \quad B' = 200^\circ - b, \quad C' = 200^\circ - c,$$
$$a' = 200^\circ - A, \quad b' = 200^\circ - B, \quad c' = 200^\circ - C.$$

Le triangle supplémentaire étant ce qu'on a nommé pyramide *supplémentaire* (*Suppl.*, art. cité 107), l'angle A' de cette pyramide se mesure dans le plan de la face a de la pyramide primitive ; par la même raison, c'est dans le plan de la face a' de la pyramide supplémentaire qu'on mesure l'angle A, car le plan de cette face a' est perpendiculaire à l'arête de la pyramide primitive, qui est opposée à la face a de cette pyramide, et les deux droites qui forment la face a', sont perpendiculaires aux plans qui comprennent l'angle A. D'où il suit que l'angle A' étant de $200^\circ - a$, le côté a' opposé à cet angle A', est $200° - A$. On démontre de la même manière, que les angles B', C' du triangle supplémentaire étant les supplémens des côtés b et c du triangle primitif, les côtés b', c' opposés aux angles B', C', sont les supplémens des angles B et C de ce dernier triangle.

46. Les équations (B) (art. 44) ayant également lieu pour un triangle sphérique quelconque, et pour le triangle supplémentaire qui en dérive, on peut substituer, dans ces équations, aux angles a, b, c, A, B, C du triangle proposé, les angles a', b', c', A', B', C' du triangle supplémentaire, et elles deviendront :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & -\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a, \\ (2) & -\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b, \\ (3) & -\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c.\end{array}\right\} (C)$$

47. La valeur de $\cos c$ donnée par l'équation (3) (B) (art. 44) étant substituée dans l'équation (1) (B) (même article), on a :

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

Remplaçant $\cos^2 b$ par $1 - \sin^2 b$, et supprimant le facteur commun $\sin b$, on obtiendra :

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A;$$

substituant dans cette équation, pour $\sin c$, sa valeur $\frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, donnée par la troisième des équations (A) (art. 43), elle devient :

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C, \\
\text{et par analogie :} & \\
(2) & \cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C, \\
(3) & \cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B, \\
(4) & \cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B, \\
(5) & \cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A, \\
(6) & \cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A,
\end{array}\right\} (D)$$

Les quatre systêmes d'équations (A), (B), (C), (D)(art. 43—47), expriment les relations simples qui existent entre les lignes trigonométriques des trois côtés et des trois angles d'un triangle sphérique, et comprennent la solution de toutes les questions relatives à ces six élémens. De ces quatre systêmes d'équations, trois seulement sont nécessaires; un quelconque se déduit des trois autres. Chaque équation de l'un ou l'autre systême renferme quatre élémens du triangle sphérique, en sorte que trois de ces élémens étant donnés, le quatrième sera déterminé.

On a deux systêmes d'équations (B) et (D) entre deux côtés et deux angles, parce que les côtés peuvent être respectivement opposés aux deux angles, ou comprendre entre eux l'un de ces angles.

Des Triangles sphériques rectangles.

48. Un triangle sphérique est *rectangle*, lorsque deux des trois plans qui le comprennent, sont perpendiculaires entre eux. Désignant, comme dans les articles précédens, les trois angles et les trois côtés d'un triangle rectangle, par les lettres A, B, C, a, b, c, et supposant que l'angle A soit droit, les équations (1) des systêmes (A), (B), (C), (D) (art. 43 — 47), donnent :

$$(1)\ (E) \qquad \sin a = \frac{\sin b}{\sin B},$$

$$(2)\ (E) \qquad \cos a = \cos b \cos c,$$

$$(3)\ (E) \qquad \cos a = \cot B \cot C, \text{ ou } \cos a \operatorname{tang} B = \cot C,$$

$$(4)\ (E) \qquad \cot a = \cot b \cos C.$$

L'équation (2) du systême (C) (art. 46), et l'équation (5) du systême (D) (art. 47), donnent :

$$(5)\ (E) \qquad \cos B = \sin C \cos b,$$

$$(6)\ (E) \qquad \cot B = \cot b \sin c.$$

Les six équations (E) sont sous la forme convenable pour l'usage des logarithmes. Elles ne donnent pas seulement la solution des triangles rectangles, elles peuvent encore servir à résoudre les autres triangles, qui sont toujours décomposables en triangles rectangles, comme on le verra dans les articles suivans.

Des Polyèdres réguliers. (Pl. 1, fig. 7).

49. Pour faire une application de ces formules (E), relatives aux triangles rectangles, proposons-nous de déterminer le côté de l'un des polygones réguliers dont on peut recouvrir la surface d'une sphère. On a vu (art. 41) que chacun de ces polygones a un centre, qu'il est décomposable en autant de triangles isocèles égaux entre eux, qu'il y a de côtés dans le polygone. Considérons (fig. 7) un de ces triangles ACB, et décomposons-le en deux triangles rectangles sphériques ACD, CDB, en menant par le centre C du polygone un plan perpendiculaire au côté de ce polygone qui sert de base au triangle. On connaîtra, dans l'un ou l'autre des deux triangles rectangles, le demi-angle intérieur DAC du polygone, qui est égal (41) à $\frac{2A}{y}$, et l'angle $\frac{2A}{x}$ opposé au demi-côté AD du polygone, A étant l'angle droit, ou de 100°, x le nombre de côtés du polygone, y le nombre d'angles ou de polygones qui s'assemblent autour d'un même point de la sphère.

L'équation (5) (E) (art. 48) donne :

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}.$$

Supposons que b soit le demi-côté AD du polygone sphérique, on aura :

$$\cos AD = \frac{\cos \frac{2A}{x}}{\sin \frac{2A}{y}}.$$

Considérant ce demi-côté AD comme appartenant à deux des polygones sphériques qui couvrent la surface de la sphère, l'angle des droites qui joignent les centres de ces deux polygones est égal à l'angle des deux faces planes du polyèdre régulier, qui correspondent aux deux polygones, et il a pour mesure le double du côté CD du triangle sphérique rectangle ACD, opposé à l'angle $\frac{2A}{y}$.

Le plan AOC du côté AC du même triangle sphérique, contient le triangle rectangle AOE, qui a pour hypothénuse le rayon $AO = R$ de la sphère circonscrite au polyèdre, et pour côté adjacent à l'angle droit, le rayon $OE = r$ de la sphère inscrite au même polyèdre. Or, le cosinus de l'angle AOE formé par ces deux rayons est, d'après l'équation (3) (E) (art. 48) :

$$\cot \frac{2A}{y} . \cot . \frac{2A}{x},$$

donc on a :

$$r = R \cos AOE = R.\cot.\frac{2A}{y} \cot \frac{2A}{x},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{2A}{y}.\operatorname{tang} \frac{2A}{x}.$$

R étant l'hypothénuse du triangle rectiligne AOE, et r le premier côté adjacent à l'angle droit, concevons par le second côté AE, un plan perpendiculaire au rayon OE de la sphère inscrite. Ce plan contient une face du polyèdre régulier, et par conséquent la corde AB du côté du polygone sphérique. La moitié AF de cette corde, le côté AE du premier triangle rectiligne AOE, et la perpendiculaire EF sur le milieu de la corde AB, forment un second triangle rectiligne AEF dont l'angle AEF a pour mesure $\frac{2A}{x}$, car les droites EF, EA, sont dans un plan AEF, perpendiculaire à la droite OE, et mesurent l'angle AEF des deux plans AOC, COD. Nommant $2s$ la corde AB, qui est le côté du polyèdre régulier,

$$AE = \frac{AF}{\sin AEF} = \frac{s}{\sin \frac{2A}{x}}.$$

Dans le triangle AOE rectangle en E, on a, pour la seconde équation entre les trois quantités R, r et s :

$$(2) \qquad R^2 = r^2 + \overline{AE}^2 = r^2 + \frac{4s^2}{4\sin^2\left(\frac{2A}{x}\right)}.$$

Connaissant une de ces trois quantités, on déterminera au moyen des équations (1) et (2), les deux autres, et on pourra construire les cinq polyèdres réguliers à angles saillans, et à faces planes qu'on a définis (art. 40), et qui correspondent aux cinq polyèdres réguliers sphériques pour lesquels on a déterminé (art. 38) les valeurs de x et y.

De la résolution des Triangles sphériques obliquangles.

50. PROBLÊME. De ces quatre angles d'un triangle sphérique, deux côtés a et b, et deux angles respectivement opposés A et B, trois étant donnés, déterminer le quatrième?

Solution. Ce problême en comprend deux; où l'on donne deux côtés a, b et un angle B, ou deux angles A et B, et un des côtés a ou b.

On tire de l'équation (1) (A) (art. 43) :

$$\sin A = \frac{\sin a \sin B}{\sin b}, \qquad (a)$$

$$\sin a = \frac{\sin b \sin A}{\sin B}. \qquad (b)$$

Dans le premier cas, la première (a) de ces équations donnera la valeur de $\sin A$, et dans le second, on aura, par l'équation (b), la valeur de $\sin a$.

51. Problême. De ces quatre angles d'un triangle sphérique, trois côtés a, b, c et un angle A, trois étant donnés, déterminer le quatrième?

Solution. Cette question en comprend trois:

1°. Déterminer A par a, b, c;
2°. a par b, c, A;
3°. b par a, c, A. } (*voyez* art. 53)

1°. L'équation (1) (B) (art. 44) donne:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

d'où l'on tire:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c}.$$

On sait que

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1,$$

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1,$$

$$\cos(b+c) = 2\cos^2\left(\frac{b+c}{2}\right) - 1.$$

Substituant ces valeurs :

$$1+\cos A = \frac{2\left(\cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\left(\frac{b+c}{2}\right)\right)}{\sin b.\sin c}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\sin b.\sin c},$$

$$1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b.\sin c}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-(b-c)}{2}\right)}{\sin b.\sin c}$$

$$\tang\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{\left\{\frac{\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-(b-c)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}\right\}}$$

Cette formule détermine l'angle A, au moyen des trois côtés a, b, c du triangle sphérique.

52. On parvient encore à cette formule par les considérations géométriques suivantes.

Ayant construit la fig. 6, Pl. 1, on prolongera les droites CG, $C'G$ en L et en I, de manière qu'on ait $C'F = FI$, $CE = EL$; ensuite on menera les cordes $C'L$, LD, DC. On connait les arcs a, b, c, A qui mesurent les faces de la pyramide $C'OB$, COA, AOB, et l'angle DEG opposé à la face a; il s'agit de trouver la valeur de $\operatorname{tang} \frac{DEG}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2}$.

Prenant OC ou OC' pour le rayon des tables de sinus, EC ou $EL = \sin b$; . . $DL = 2 \sin b \sin \frac{A}{2}$. Le triangle CDL étant rectangle en D, on a pour seconde valeur de DL :

$$DL = \sqrt{CL \times GL} = \sqrt{2 \sin b . GL}.$$

Dans le triangle $GC'L$, l'angle G est égal à l'angle AOB, et a pour mesure l'arc c. On a donc la proportion :

$$\sin c : C'L :: \sin GC'L : GL = \frac{C'L . \sin GC'L}{\sin c},$$

et

$$\overline{DL}^2 = \frac{2 \sin b . C'L . \sin GC'L}{\sin c} = 4 \sin^2 b \sin^2 \frac{A}{2};$$

d'où l'on tire :

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{C'L . \sin GC'L}{2 \sin b . \sin c};$$

mais

$$C'L = 2 \sin \frac{C'lL}{2} = 2 \sin \left(\frac{a + b + c - 2b}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\frac{a - (b - c)}{2} \right),$$

$$\sin GC'L = \sin \frac{IL}{2} = \sin \left(\frac{ILC' - C'IL}{2}\right)$$

$$= \sin \left(\frac{2a - a + (b - c)}{2}\right) = \sin \left(\frac{a + b - c}{2}\right).$$

Substituant ces valeurs de $C'L$ et de $\sin GC'L$, on a :

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{\left(\frac{a - (b - c)}{2}\right) \sin \left(\frac{a + b - c}{2}\right)}{\sin b . \sin c}.$$

On trouvera, de la même manière, la valeur de $\cos^2 \frac{A}{2}$, en calculant les trois triangles CED, CDL, et CGC'. Dans le premier de ces triangles, on a :

$$CD = 2 \cos \frac{A}{2} . EC = 2 \cos \frac{A}{2} . \sin b ;$$

dans le second, on a :

$$\overline{CD}^2 = CL \times CG = 2 \sin b . CG.$$

L'angle CGC' du troisième triangle étant le supplément de l'angle c, $\sin CGC' = \sin c$; or, $\sin CGC'$ est à CC', comme le sinus de $CC'G$ est au côté CG; donc $CG = \frac{CC' . \sin CC'G}{\sin c}$.

Substituant cette valeur de CG dans celle de $\overline{CD}^2$, on a :

$$\overline{CD}^2 = \frac{2 \sin b . CC' . \sin CC'G}{\sin c} = 4 \cos^2 \frac{A}{2} . \sin^2 b ;$$

d'où l'on tire :

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{CC' . \sin CC'G}{2 \sin b . \sin c} = \frac{CC' . \sin \left(\frac{IiC}{2} \right)}{2 \sin b . \sin c}$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{b+c+a}{2} \right) \sin \left(\frac{b+c-a}{2} \right)}{\sin b . \sin c}.$$

Ayant les valeurs de $\sin \frac{A}{2}$ et $\cos \frac{A}{2}$, le quotient de la première, divisée par la seconde, donne la formule (51), au moyen de laquelle on détermine un angle d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés. On se sert de cette formule pour la *réduction* d'un angle à l'horison.

53. 2°. On connaît dans un triangle sphérique, les deux côtés b et c de ce triangle, et l'angle A ; on demande le côté a opposé à cet angle ?

La première des équations (B) (art. 44) donne :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Si on suppose $\tang c \cos A = \tang \varphi$, on aura :

$$\sin c \cos A = \cos c \tang \varphi ,$$

et

$$\cos a = \cos c \, (\cos b + \sin b \tang \varphi) ,$$

ou

$$\cos a = \frac{\cos c\,(\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{\cos c \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

3°. On demande le côté b, au moyen des deux autres côtés a et c, et d'un angle A opposé à l'un des deux côtés?

L'angle φ étant donné par l'équation . . . $\tang \varphi = \tang c \cos A$, on tire de la dernière équation (53) :

$$\cos (b - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos c}.$$

Pour ces deux derniers cas, on décompose le triangle sphérique en deux autres triangles rectangles, par un arc mené du sommet de l'angle B de ce triangle perpendiculairement au côté b opposé à cet angle; cet arc divise ce côté en deux segmens φ et φ', adjacens l'un à l'angle A, et l'autre à l'angle C. En effet, mettant l'équation . . . . $\tang \varphi = \tang c \cos A$, sous la forme de l'équation (4) (E) (art. 48), $\frac{1}{\tang \varphi} \cos A = \frac{1}{\tang c}$, ou $\cot \varphi \cos A = \cot c$, on voit que les côtés c et φ comprennent entre eux l'angle A d'un premier triangle sphérique rectangle, dont l'angle droit est opposé au côté c. Le second triangle rectangle est formé par l'hypothénuse

a et par le côté φ'; en sorte qu'on a dans ce second triangle rectangle :

$$\cot a = \cot \varphi' \cos C.$$

54. PROBLÊME. De ces quatre angles, deux côtés a et b, et deux angles A et C dont un seul est opposé à l'un des côtés donnés, trois étant connus, déterminer le quatrième?

Solution. Ce problême en renferme quatre :

1°. Déterminer A par a, b, C;
2°. b par a, A, C;
3°. a par b, A, C;
4°. C par a, b, A.

1°. La première des équations (D) (art. 47) donne :

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b}{\sin C} - \cot C . \cos b.$$

Pour réduire le second membre de cette équation en facteurs, on fera :

$$\cot a = \cot \varphi' \cos C,$$

ce qui revient (53) à diviser le triangle proposé en deux triangles rectangles, par un arc qui partage le côté b en deux segmens φ et φ', comme dans l'article précédent. Substituant cette valeur de $\cot a$, on aura :

$$\cot A = \frac{\cot \varphi' \cos C \sin b}{\sin C} - \cot C \cos b;$$

ou

$$\cot A = \frac{\cot C . \sin (b - \varphi')}{\sin \varphi'},$$

φ' étant le segment de b adjacent à l'angle C.

2°. Déterminer b par a, A, C?

La dernière équation donne :

$$\sin (b - \varphi') = \frac{\cot A \sin \varphi'}{\cot C},$$

et l'arc φ' est connu, puisqu'on a par hypothèse, $\cot \varphi' \cos C = \cot a$.

3°. Déterminer a par b, A, C?

Pour réduire en facteurs l'équation (1) (D) (art. 47),

$$\cot a = \frac{\cot A \sin C}{\sin b} + \cot b \cos C,$$

soit $\cot A = \cos b \operatorname{tang} \psi$. En comparant cette équation à la troisième (E) (art. 48), on voit que les deux angles A et ψ appartiennent à un triangle sphérique rectangle, dans lequel le côté b est opposé à l'angle droit. On obtient ce triangle en abaissant du sommet de l'angle C du triangle à résoudre, un arc perpendiculaire au côté c. L'angle ψ, que les plans de cet arc et du côté b font entre eux, est adjacent au côté b.

Substituant la valeur de $\cot A$, on a :

$$\cot a = \cot b\,(\sin C \tang \psi + \cos C)$$
$$= \frac{\cot b}{\cos \psi}\,(\sin C \sin \psi + \cos C \cos \psi),$$

ou

$$\cot a = \frac{\cot b \cos (C - \psi)}{\cos \psi}.$$

4°. Déterminer C par a, b, A ?

La dernière équation donne :

$$\cos (C - \psi) = \frac{\cos \psi . \cot a}{\cot b},$$

et l'angle ψ est connu, puisqu'on a, par hypothèse, $\cot A = \cos b \tang \psi$.

55. Problême. De ces quatre angles d'un triangle sphérique, trois angles A, B, C, et un côté a, trois étant donnés, trouver le quatrième ?

Solution. Cette question en comprend trois :

1°. Déterminer le côté a au moyen des trois angles A, B, C ?

2°. Déterminer A par le côté a qui lui est opposé, et par les deux angles B et C adjacens à ce côté a ?

3°. Déterminer B par le côté a, et les deux angles A, C ?

On résout ces trois cas par les formules suivantes :

$$1^{\circ}.\ \cot\frac{a}{2}=\sqrt{\left\{\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{-\cos\frac{B+C+A}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}\right\}};$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{\circ}.\ \cos A=\dfrac{\cos C\sin(B-\pi)}{\sin\pi} \\ 3^{\circ}.\ \sin(B-\pi)=\dfrac{\cos A\sin\pi}{\cos C} \end{array}\right\}\ \text{tang}\ C\cos a=\cot\pi.$$

56. On obtient ces formules par la considération du triangle supplémentaire dont on a désigné les angles et les côtés (art. 45) par les lettres a', b', c', A', B', C'. En appliquant à ce triangle la formule de l'art. 51, on aura :

$$\text{tang}\frac{A'}{2}=\sqrt{\left\{\frac{\sin\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)\sin\left(\frac{a'-(b'-c')}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b'+c'+a'}{2}\right)\sin\left(\frac{b'+c'-a'}{2}\right)}\right\}}.$$

Substituant à ces angles leurs supplémens, cette équation donnera la valeur précédente de $\cot\frac{a}{2}$.

L'équation (1) (B) (art. 44) devient, pour le triangle supplémentaire :

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A'.$$

Pour réduire cette équation en facteurs, on suppose :

$$\tang c' \cos A' = \cot . \pi, \quad \text{ou} \quad \tang C \cos a = \cot \pi.$$

Substituant cette valeur :

$$\cos a' = \cos c' \left(\cos b' + \frac{\sin b' \cos \pi}{\sin \pi} \right) = \frac{\cos c' \sin (b' + \pi)}{\sin \pi},$$

Mettant, au lieu de a', b', c', leurs supplémens, cette équation devient :

$$\cos A = \frac{\cos C \sin (B - \pi)}{\sin \pi};$$

d'où l'on tire :

$$\sin (B - \pi) = \frac{\cos A \sin \pi}{\cos C};$$

et l'angle π est donné par l'équation

$$\tang C \cos a = \cot . \pi.$$

De la Résolution d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés, en supposant ces côtés très-petits par rapport au rayon de la sphère sur laquelle on les a mesurés.

57. Lorsque les longueurs des côtés des triangles sphériques sont très-petites par rapport au rayon de la sphère, les tables trigonométriques n'offrent plus une précision suffisante pour le calcul des angles et des côtés ;

il est nécessaire, dans ce cas, d'avoir recours à une solution telle qu'on puisse estimer les différentes parties du triangle à une quantité de l'ordre $\frac{1}{r^n}$, r étant le rayon de la sphère, et n un nombre entier d'autant plus grand, que l'approximation est plus exacte. Pour arriver à cette solution, qu'on reprenne l'équation (1) (B) (art. 44)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Soient α, β, γ les longueurs des côtés mesurés sur la sphère du rayon r, les côtés a, b, c deviendront :

$$\frac{\alpha}{r}, \quad \frac{\beta}{r}, \quad \frac{\gamma}{r},$$

et l'équation précédente se changera en celle-ci,

$$\cos A = \frac{\cos\frac{\alpha}{r} - \cos\frac{\beta}{r}\cos\frac{\gamma}{r}}{\sin\frac{\beta}{r}.\sin\frac{\gamma}{r}}.$$

Les développemens connus pour sin x et cos x donnent :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Faisant successivement $x=\frac{\alpha}{r}$, $x=\frac{\beta}{r}$, $x=\frac{\gamma}{r}$, et négligeant les quantités au-dessous de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, on aura :

$$\cos\frac{\alpha}{r}=1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{2.3.4.r^4};\quad \sin\frac{\alpha}{r}=\frac{\alpha}{r}-\frac{\alpha^2}{2.3r^3},$$

$$\cos\frac{\beta}{r}=1-\frac{\beta^2}{2r^2}+\frac{\beta^4}{2.3.4.r^4};\quad \sin\frac{\beta}{r}=\frac{\beta}{r}-\frac{\beta^3}{2.3r^3}$$

$$\cos\frac{\gamma}{r}=1-\frac{\gamma^2}{2r^2}+\frac{\gamma^4}{2.3.4.r^4};\quad \sin\frac{\gamma}{r}=\frac{\gamma}{r}-\frac{\gamma^3}{2.3r^3}.$$

Substituant ces valeurs, effectuant les produits en négligeant les termes au-dessous de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, on a :

$$\cos A=\frac{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{2.3.4r^2}-\frac{\beta^2\gamma^2}{4r^2}}{\beta\gamma\left(1-\frac{(\beta^2+\gamma^2)}{2.3r^2}\right)};$$

or, $\dfrac{1}{1-\frac{(\beta^2+\gamma^2)}{2.3r^2}}$ donne (en effectuant la division) pour quotient approché jusqu'aux quantités de l'ordre de $\frac{1}{r^4}$:

$$1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3r^2}+\frac{(\beta^2+\gamma^2)^2}{4.9r^4}.$$

Substituant, au lieu du facteur, ce quotient, on a :

$$A=\frac{\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2}+\dfrac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{2.3.4.r^2}-\dfrac{\beta^2\gamma^2}{4r^2}+\dfrac{(\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{4.3.r^2}+\dfrac{(\beta^2+\gamma^2)^2(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{2.4.9.r^4}}{\beta\gamma};$$

négligeant le terme divisé par r^4,

$$A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{2.3.4\beta\gamma r^2}.$$

Si on suppose le rayon r infini, ou $\frac{1}{r}=0$, la surface sphérique se transforme en un plan, et le triangle sphérique en un triangle rectiligne qui a les mêmes côtés α, β, γ ; la valeur de $\cos A$ se réduit à $\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$. Nommant A' l'angle du triangle rectiligne opposé au côté α, on a :

$$\cos A'=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

De cette formule de trigonométrie rectiligne, on tire :

$$\sin A'^2=\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\beta^2\gamma^2};$$

donc

$$\cos A=\cos A'-\frac{\beta\gamma\sin A'^2}{2.3r^2}.$$

or, $\frac{\beta\gamma \sin A'}{2}$ est l'aire du triangle rectiligne ; en la nommant θ, on aura :

$$\cos A = \cos A' - \frac{\theta \sin A'}{3r^2},$$

$$\cos\left(A' + \frac{\theta}{3r^2}\right) = \cos A' \cos \frac{\theta}{3r^2} - \sin A' \sin \frac{\theta}{3r^2};$$

en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, on a :

$$\cos\frac{\theta}{3r^2} = 1, \quad \sin\frac{\theta}{3r^2} = \frac{\theta}{3r^2};$$

donc

$$\cos\left(A' + \frac{\theta}{3r^2}\right) = \cos A' - \frac{\theta \sin A'}{3r^2} = \cos A;$$

d'où il suit qu'on a :

$$A = A' + \frac{\theta}{3r^2};$$

on a, par la même raison :

$$B = B' + \frac{\theta}{3r^2}, \quad C = C' + \frac{\theta}{3r^2},$$

puisque la quantité θ est une fonction symétrique des trois côtés α, β, γ.

Ajoutant ces trois dernières équations, elles donnent :

$$A + B + C = A' + B' + C' + \frac{\theta}{r^2};$$

mais

$$A' + B' + C' = \text{deux droits} = 2D;$$

donc

$$\theta = r^2 (A + B + C - 2D);$$

or, le second membre de cette équation, est l'expression de la surface du triangle sphérique (art. 36); donc, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, l'aire du triangle rectiligne est égale à celle du triangle sphérique; et l'une peut être prise pour l'autre, sans qu'on ait à craindre une erreur sensible, lorsque r est très-grand par rapport aux côtés du triangle.

58. Théorème. Étant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si, de chacun de ses angles, on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués pourront être pris pour les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique; *ou en d'autres termes*, le triangle sphérique très-peu courbe, dont les angles sont A, B, C, et les côtés opposés a, b, c, répond toujours à un triangle rectiligne équivalent en surface, et qui a les côtés de même longueur a, b, c, et dont les angles opposés à ces côtés, sont :

$$A - \frac{1}{3}\varepsilon, \quad B - \frac{1}{3}\varepsilon, \quad C - \frac{1}{3}\varepsilon,$$

étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits (1) ?

Démonstration. Les angles du triangle rectiligne ayant été désignés par les lettres A', B', C', on a les équations

$$A' = A - \frac{\theta}{3r^2}, \quad B' = B - \frac{\theta}{3r^2}, \quad C' = C - \frac{\theta}{3r^2}.$$

Or, $\frac{\theta}{r^2} = A + B + C - 2D$, etc.

De la solidité d'un parallélipipède oblique dont on connaît les arêtes, et les angles que ces arêtes font entre elles.

59. La recherche de l'expression du volume de ce parallélipipède est une application très-

(1) Ce théorême a été donné par M. Legendre, en 1787. (Voy. sa Géométrie, 9e. édition, pag. 426). Ce géomètre en a fait l'application la plus heureuse à la mesure du méridien terrestre. (Voy. la *Correspondance*, tom. Ier., pag. 287).

On peut encore se proposer de résoudre un triangle sphérique dont un côté seulement est très-petit par rapport au rayon de la sphère. C'est de là que dépend la détermination des longitudes et latitudes. (Voy. la *Correspondance*, tom. II, pag. 236, article de M. Puissant).

simple de la formule (1) (art. 44). Nommons f, g, h les trois droites AB, AC, AD (Pl. 1, fig. 8), arêtes d'un parallélipipède qui concourent au même point A. Le parallélogramme construit sur les côtés f, g a pour expression $fg \sin(f, g)$. Menant, par le point D, extrémité de l'arête $AD = h$, un plan DKO perpendiculaire à l'arête $AB = f$, et dans ce plan les droites DK, DO perpendiculaires, l'une à la droite AB, l'autre au plan $ACBD'$, on aura :

$$DO = DK \sin DKO;$$

mais

$$DK = h \sin(f, h);$$

donc, le volume du parallélipipède est :

$$fgh \sin(f, g) \sin(f, h) \sin DKO.$$

Considérant la pyramide formée par les trois arêtes f, g, h du parallélipipède, on a (formule (1) art. 44) :

$$\cos DKO = \frac{\cos(g, h) - \cos(f, g)\cos(f, h)}{\sin(f, g)\sin(f, h)};$$

d'où l'on tire

$$\sin DKO = \frac{\sqrt{\sin^2(f, g)\sin^2(f, h) - \{\cos(g, h) - \cos(f, g)\cos(f, h)\}^2}}{\sin(f, g)\sin(f, h)};$$

donc le volume du parallélipipède est :

$$fgh\sqrt{\sin^2(f, g)\sin^2(f, h) - \{\cos(g, h) - \cos(f, g)\cos(f, h)\}^2},$$

ou

$$fgh\sqrt{1-\cos^2(f,g)-\cos^2(f,h)-\cos^2(g,h)+2\cos(f,g)\cos(f,h)\cos(g,h)}.$$

Remarquant que la quantité sous le radical est une différence de deux carrés, décomposable en deux facteurs, et nommant α, β, γ les angles des arêtes du parallélipipède, prises deux à deux dans l'ordre suivant : (f, g), (f, h), (g, h), l'expression du volume devient :

$$2fgh\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)}}.$$

§ III.

De quelques propriétés dont jouissent les projections orthogonales des lignes droites sur trois axes rectangulaires, et des aires planes sur trois plans perpendiculaires entre eux.

60. On projette (art. 9) une droite sur une autre droite, en menant par les deux extrémités de la première, des plans perpendiculaires à la seconde. La partie de cette seconde droite, comprise entre les deux plans, est la projection

linéaire de la première droite. La projection orthogonale du contour d'une aire plane sur un plan fixe dont la position est donnée, comprend une portion de ce plan qui est la *projection superficielle* de l'aire plane.

Il suit de ces définitions que lorsqu'une droite, ou une aire plane, se meut dans l'espace parallèlement à elle-même, la projection linéaire de l'une, ou la projection superficielle de l'autre, en changeant de position, ne varie pas de grandeur.

La projection linéaire d'un polygone se compose des projections linéaires de ses côtés, soit que ses côtés soient situés ou non dans un même plan. La projection linéaire d'un côté quelconque d'un polygone fermé, est égale à la somme des projections linéaires de tous les autres côtés, en prenant les unes positivement, et les autres négativement. D'où il suit que lorsque deux polygones fermés ont un côté commun, la somme des projections linéaires de tous les autres côtés est la même pour l'un et l'autre polygone.

61. Théorème. Le carré d'une ligne droite est égal à la somme des carrés de ses trois projections linéaires sur trois axes rectangulaires ?

Démonstration. Soit a la longeur d'une droite dont la direction est déterminée par les angles α, β, γ, que cette droite ou sa parallèle fait avec les trois axes rectangulaires. Nommant p, p', p'' ses projections sur les trois axes, on aura évidemment :

$$p = a \cos\alpha, \quad p' = a \cos\beta, \quad p'' = a \cos\gamma.$$

Carrant ces équations, et les ajoutant, on aura :

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = a^2 (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2);$$

or (art. 14)

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1;$$

donc, on a, suivant l'énoncé du théorême :

$$a^2 = p^2 + p'^2 + p''^2.$$

Multipliant les valeurs p, p', p'' séparément par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et les ajoutant, on aura :

$$a = p \cos\alpha + p' \cos\beta + p'' \cos\gamma.$$

Ce qui signifie qu'en projettant les trois droites p, p', p'' sur la droite dont la longueur est a, la somme de ces projections de projections ne diffère pas en longueur de la droite a. Considérant, dans un parallélipipède rectangle, la diagonale comme la droite dont la longueur est a, et les trois arêtes partant d'une extrémité de cette diagonale, comme les projections linéaires p, p', p'' de la diagonale sur ces arêtes, on verra facilement la vérité des deux dernières équations :

$$a^2 = p^2 + p'^2 + p''^2, \quad a = p\cos\alpha + p'\cos\beta + p''\cos\gamma.$$

Problème Ier.

62. Connaissant, dans un parallélipipède, les trois arêtes AB, AC, AD (Pl. 1, fig. 8), qui concourent au sommet A de l'un des angles solides de ce parallélipipède, et les angles que ces arêtes font entre elles, déterminer la longueur de la diagonale AA' ?

Solution. Soient f, g, h, A les longueurs des arêtes AB, AC, AD, et de la diagonale AA', on aura :

$$A^2 = \overline{AD'}^2 + h^2 + 2h.AD'.\cos DAD';$$

or

$$\overline{AD'}^2 = f^2 + g^2 + 2fg\cos(f, g);$$

donc

$$A^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos(f, g) + 2h.AD'.\cos DAD'.$$

Projettant les trois côtés du triangle ABD' sur l'arête $AD = h$, on a (art. 61) :

$$AD'\cos(DAD') = f\cos(f, h) + g\cos(g, h).$$

Substituant dans l'équation précédente,

$$A^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos(f, g) + 2fh\cos(f, h) + 2gh\cos(g, h).$$

Nommant B, C, D, les trois autres diagonales BB', CC', DD', on aura,

$$B^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos(f, g) - 2fh\cos(f, h) + 2gh\cos(g, h);$$

$$C^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos(f, g) + 2fh\cos(f, h) - 2gh\cos(g, h);$$

$$D^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos(f, g) - 2fh\cos(f, h) - 2gh\cos(g, h);$$

d'où il suit que la somme $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ est égale à la somme des carrés $4f^2 + 4g^2 + 4h^2$; c'est-à-dire que, dans un parallélipipède oblique, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.

Probl. II.

63. Connaissant les projections d'une droite D sur trois axes rectangulaires, on demande la projection de cette droite D sur une autre droite D' dont la position est donnée par rapport aux axes rectangulaires ?

Solution Soient α, β, γ les angles que la droite D fait avec les trois axes rectangulaires ; ϕ, ψ, π les angles que la droite D', sur laquelle on la projette, fait avec les mêmes axes; nommons a la longueur de la droite D, b la longueur de sa projection qu'il s'agit de trouver, c l'angle des droites D et D', on a (art. 14):

$$\cos c = \cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \pi.$$

Multipliant cette équation par a, elle devient:

$$a \cos c = a \cos \alpha \cos \varphi + a \cos \beta \cos \psi + a \cos \gamma \cos \pi;$$

mais

$$a \cos c = b,$$

et (art. 61),

$$a \cos \alpha = p, \quad a \cos \beta = p', \quad a \cos \gamma = p'';$$

donc

$$(1) \qquad b = p \cos \varphi + p' \cos \psi + p'' \cos \pi.$$

Soient q, q', q'', les projections d'une autre droite a' sur les trois axes rectangulaires, et b' sa projection sur la droite dont la position, par rapport à ces axes, est déterminée par les angles φ, ψ, π, on aura:

$$(2) \qquad b' = q \cos \varphi + q' \cos \psi + q'' \cos \pi;$$

de même pour une troisième droite a'':

$$(3) \qquad b'' = r \cos \varphi + r' \cos \psi + r'' \cos \pi.$$

Ajoutant les équations (1), (2), (3), et nommant B la somme $b + b' + b''\ldots$, P la somme $p + q + r\ldots$, P' la somme $p' + q' + r'\ldots$,

P'' la somme $p''+q''+r''\ldots$, on aura l'équation :

$$B = P\cos\varphi + P'\cos\psi + P''\cos\pi. \qquad (e)$$

Considérant les droites a, a', $a''\ldots$ comme les côtés d'un polygone situés ou non dans un même plan, les sommes P, P', P'' sont les projections de ce polygone sur les trois axes rectangulaires, et B est la projection de ce même polygone sur une droite qui fait, avec les trois axes rectangulaires, les angles φ, ψ, π.

64. Problême. Connaissant les projections P, P', P'' d'un polygone sur trois axes rectangulaires, on demande les projections B, B', B'' de ce même polygone sur trois autres axes rectangulaires, ayant même origine que les premières ? (Pour distinguer le premier systême d'axes du second systême, on nommera les premiers, axes des x, des y, des z, et les axes du second systême, axes des x', des y', des z'.)

Solution. Soient φ, ψ, π les angles de l'axe des x', et des trois axes du premier systême; φ', ψ', π' et φ'', ψ'', π'' les angles que ces trois axes font avec les axes des y' et des z' du second systême.

L'équation (e) de l'article précédent donne, pour la valeur B de la projection du polygone sur l'axe des x' :

$$B = P\cos\varphi + P'\cos\psi + P''\cos\pi. \qquad (e)$$

On a de même, par rapport aux deux projections B' et B'' sur les axes des y' et des z' :

$$B' = P\cos\varphi' + P'\cos\psi' + P''\cos\pi', \qquad (e')$$
$$B'' = P\cos\varphi'' + P'\cos\psi'' + P''\cos\pi'', \qquad (e'')$$

Carrant les membres des équations (e), (e'), (e''), les ajoutant, et observant qu'on a (art. 14) :

$$\cos^2\varphi + \cos^2\varphi' + \cos^2\varphi'' = 1,$$
$$\cos^2\psi + \cos^2\psi' + \cos^2\psi'' = 1,$$
$$\cos^2\pi + \cos^2\pi' + \cos^2\pi'' = 1,$$
$$\cos\varphi\cos\psi + \cos\varphi'\cos\psi' + \cos\varphi''\cos\psi'' = 0,$$
$$\cos\psi\cos\pi + \cos\psi'\cos\pi' + \cos\psi''\cos\pi'' = 0,$$
$$\cos\pi\cos\varphi + \cos\pi'\cos\varphi' + \cos\pi''\cos\varphi'' = 0,$$

la somme des carrés des seconds membres se réduira à $P^2 + P'^2 + P''^2$, et on aura l'équation réduite :

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = P^2 + P'^2 + P''^2;$$

résultat très-remarquable, en ce qu'il est indépendant de la position respective des deux systêmes d'axes rectangulaires.

65. Multipliant les équations (e), (e'), (e'') respectivement par les quantités $\cos\varphi$, $\cos\varphi'$, $\cos\varphi''$, et les ajoutant, on aura :

$$B \cos \varphi + B' \cos \varphi' + B'' \cos \varphi'' = P,$$
$$B \cos \psi + B' \cos \psi' + B'' \cos \psi'' = P',$$
$$B \cos \pi + B' \cos \pi' + B'' \cos \pi'' = P''.$$

Ces dernières équations feront connaître les projections P, P', P'' sur les axes des x, des y, des z, lorsque les projections B, B', B'' sur les axes des x', des y', des z', seront données.

Les équations d'où l'on a déduit les propositions relatives aux projections linéaires des polygones, servent encore à démontrer que les projections superficielles des aires planes jouissent de propriétés analogues (*).

Des Projections superficielles des aires planes.

66. Théorème. Une figure plane quelconque étant projetée sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire de cette figure est égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections orthogonales ?

Démonstration. Supposons d'abord la figure terminée par un polygone, et concevons,

(*) C'est sur ces propriétés qu'est fondée la nouvelle théorie des momens, que M. Poisson a donnée dans sa Mécanique, tom. 1er, pag. 111.

par les sommets des angles de ce polygone, des plans perpendiculaires à la droite d'intersection du plan du polygone et du plan sur lequel on le projette. On formera, dans le plan du polygone, autant de trapèzes que le polygone a de côtés; chaque trapèze sera formé d'un côté du polygone, des deux perpendiculaires abaissées des extrémités de ce côté sur la droite d'intersection du plan du polygone et du plan sur lequel on le projette, et de la portion de cette droite comprise entre les deux perpendiculaires. Cette portion de droite étant la base du trapèze, on a la surface de ce trapèze, en multipliant la demi-somme des deux côtés perpendiculaires à la base par la base même : or, la projection de ce trapèze est un autre trapèze qui a même base, et dont les côtés parallèles sont aux côtés parallèles du premier, dans le rapport inverse du rayon au cosinus de l'angle formé par le plan du premier trapèze et du plan sur lequel on le projette; d'où il suit que les aires de ces deux trapèzes, dont l'un est la projection de l'autre, et qui ont une base commune, sont dans le rapport inverse du rayon au cosinus de l'angle formé par les plans de ces deux trapèzes.

Les trapèzes qui correspondent aux côtés du polygone embrassent l'aire de ce polygone ; d'où il suit qu'on peut regarder cette aire comme la somme de trapèzes, les uns pris, s'il est nécessaire, positivement, et les autres négativement. Mais la somme des trapèzes est à la somme de leurs projections dans le rapport du rayon au cosinus de l'angle formé par le plan du polygone, et par le plan sur lequel on le projette ; donc, *quel que soit le polygone, les aires de ce polygone et de sa projection superficielle*, sont dans le même rapport

Soient p, q, r, les cosinus des angles que le plan du polygone fait avec les trois plans rectangulaires sur lesquels on le projette ; soient de plus T l'aire du polygone, et t, t', t'' les aires de ses trois projections, on a (art. précédent) :

$$t = pT, \quad t' = qT, \quad t'' = rT.$$

Carrant ces trois équations, et les ajoutant, on a :

$$t^2 + t'^2 + t''^2 = T^2 (p^2 + q^2 + r^2).$$

Or, la somme $p^2 + q^2 + r^2$ des carrés des trois cosinus p, q, r, est égale (art. 28) à l'unité ; donc, on a :

$$T^2 = t^2 + t'^2 + t''^2 ;$$

67. Au lieu de considérer le polygone comme une somme de trapèzes, les uns positifs, les autres négatifs, on pourrait le décomposer en triangles, et en nommant T un de ces triangles, et t, t', t'' ses trois projections, on déduirait l'équation $T^2 = t^2 + t'^2 + t''^2$, de ce qui a été démontré (art. 22). En effet, on a prouvé :

1°. Que l'équation du plan du triangle étant $Lx + My + Nz = K$, on avait :

$$t = \frac{1}{2} L, \quad t' = \frac{1}{2} M, \quad t'' = \frac{1}{2} N;$$

2°. Que la pyramide qui a son sommet à l'origine des coordonnées, et pour base le triangle T, était égale en volume à $\frac{1}{6} K$. Or, la hauteur de cette pyramide est la perpendiculaire (art. 26) $\frac{K}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$, abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan du triangle; donc, on a :

$$\frac{1}{6} K = \frac{1}{3} T \times \frac{K}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

ou

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

ou enfin

$$T^2 = \frac{1}{4} L^2 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{1}{4} N^2 = t^2 + t'^2 + t''^2.$$

Soit S un autre triangle contenu dans le plan du triangle T, et s, s', s'' ses trois projections, on aura de même :

$$S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2,$$

ou

$$S = \frac{s}{S} s + \frac{s'}{S} s' + \frac{s''}{S''} s'';$$

mais on a

$$\frac{s}{S} = \frac{t}{T}, \quad \frac{s'}{S} = \frac{t'}{T}, \quad \frac{s''}{S} = \frac{t''}{T},$$

donc

$$ST = st + s't' + s''t''.$$

Effectuant le carré de $S + T$:

$$\begin{aligned}(S+T)^2 &= S^2 + 2ST + T^2 \\ &= s^2 + s'^2 + s''^2 + 2st + 2s't' + 2s''t'' + t^2 + t'^2 + t''^2 \\ &= (s+t)^2 + (s'+t')^2 + (s''+t'')^2.\end{aligned}$$

En prenant dans le plan des deux premiers triangles T et S, un troisième R, dont les trois projections sont r, r', r'', on arrive de la même manière à l'équation suivante :

$$(S+T+R)^2 = (s+t+r)^2 + (s'+t'+r')^2 + (s''+t''+r'')^2;$$

d'où il suit qu'un polygone dont les côtés sont situés dans un même plan, étant projeté sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire du polygone est égal à la somme des carrés de ses trois projections superficielles.

68. La figure plane, au lieu d'être un polygone, pourrait être terminée par une courbe fermée. Dans ce cas, on considérerait la courbe comme la limite de deux polygones semblables, l'un inscrit, et l'autre cironscrit à cette courbe, et le théorême précédent, démontré par rapport à chacun de ces polygones, quelque petite que soit leur différence, s'applique par le principe des limites à l'aire de la courbe.

69. Dans une pyramide triangulaire dont les trois arêtes qui partent d'un même sommet, sont perpendiculaires entre elles, les trois faces formées par ces arêtes sont les projections superficielles de la quatrième face sur les plans rectangulaires des trois premières. D'où il suit qu'en nommant M, N, P les trois faces formées par les arêtes perpendiculaires entre elles, et Q la quatrième face, on a l'équation :

$$Q^2 = M^2 + N^2 + P^2.$$

Si les arêtes ne sont pas perpendiculaires entre elles, on démontre que la valeur de Q^2 est donnée par l'équation suivante :

$$Q^2 = M^2 + N^2 + P^2 - 2NP\cos m - 2PM\cos n - 2MN\cos p, \quad (A),$$

m, n, p étant les angles dièdres opposés aux faces M, N, P.

Pour obtenir cette équation, on remarque (*Géométrie de position*, par M. Carnot, p. 310) que dans un polyèdre quelconque, et par conséquent dans une pyramide triangulaire, une face quelconque est la somme des projections superficielles des trois autres faces ; ce qui donne les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned}
M &= N\cos p + P\cos n + Q\cos\alpha,\\
N &= M\cos p + P\cos m + Q\cos\beta,\\
P &= M\cos n + N\cos m + Q\cos\gamma,\\
Q &= M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma,
\end{aligned}$$

α, β, γ étant les angles dièdres de la face Q et des trois autres faces M, N, P.

Substituant dans la dernière équation, pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les valeurs de ces quantités données par les trois premières, on parvient, par une réduction très-simple, à l'équation (A).

70. Problème. Connaissant les projections p, p', p'' d'une aire plane a sur trois plans rectangulaires, on demande la projection superficielle b de cette aire sur un plan dont la position est donnée par rapport aux trois plans rectangulaires ?

Solution. Concevons le plan de l'aire donnée, et le plan sur lequel on la projette, transportés parallèlement à eux-mêmes, jusqu'au point d'intersection des trois plans rectangulaires, et menons par ce point des droites perpendiculaires aux deux premiers plans. La position de ces droites déterminera celle des plans. Nommons α, β, γ les angles que la perpendiculaire au plan de l'aire qu'on projette, fait avec les axes rectangulaires, et φ, ψ, π les angles que la perpendiculaire au plan sur lequel on projette l'aire, fait avec les mêmes axes. L'angle des deux perpendiculaires est évidemment égal à l'angle des deux plans; donc, si on nomme c cet angle, on aura (art. 14):

$$\cos c = \cos\alpha \cos\varphi + \cos\beta \cos\psi + \cos\gamma \cos\pi.$$

Multipliant cette équation par a, grandeur de l'aire plane donnée, on a:

$$a\cos c = a\cos\alpha \cos\varphi + a\cos\beta \cos\psi + a\cos\gamma \cos\pi;$$

mais, d'après l'art. 66,

$$a\cos c = b, \quad a\cos\alpha = p, \quad a\cos\beta = p', \quad a\cos\gamma = p''.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra:

$$(1) \qquad b = p\cos\varphi + p'\cos\psi + p''\cos\pi.$$

En comparant cette équation à l'équation (1) (art. 63), on voit que la proposition relative aux projections linéaires d'une droite, s'étend aux projections superficielles d'une aire plane, et se déduit de la même équation.

Soient q, q', q'', les projections superficielles d'une autre aire a' sur trois plans rectangulaires, et b' sa projection sur le plan dont la position est déterminée par les angles φ, ψ, π, on aura :

(2) $$b' = q \cos \varphi + q' \cos \psi + q'' \cos \pi,$$

de même pour une troisième aire a'':

(3) $$b'' = r \cos \varphi + r' \cos \psi + r'' \cos \pi.$$

Ajoutant les équations (1), (2), (3), et nommant B la somme $b + b' + b''\ldots$, P la somme $p + q + r\ldots$, P' la somme $p' + q' + r'\ldots$, P'' la somme $p'' + q'' + r''\ldots$, la valeur de B en P, P', P'' sera donnée par l'équation suivante :

$$B = P \cos \varphi + P' \cos \psi + P'' \cos \pi. \qquad (e)$$

Considérant les aires a, a', $a''\ldots$ comme les faces d'un polyèdre, P, P', P'' sont les projections de ce polyèdre sur les trois plans rectangulaires, et B est la projection superficielle de ce même polyèdre sur un plan qui fait, avec les trois plans rectangulaires, les angles φ, ψ, π.

71. PROBLÊME. Connaissant les projections P, P', P'' d'un polyèdre continu ou discontinu sur trois plans rectangulaires, on demande les projections B, B', B'' de ce même polyèdre sur trois autres plans rectangulaires qui se coupent au même point que les premiers? (Pour distinguer les deux systêmes de plans, on nommera les droites suivant lesquelles les plans du premier systême se coupent, axes primitifs des x, des y, des z, et les droites d'intersection des plans du second systême, axes secondaires des x', des y', des z'.)

Solution. Ayant adopté les dénominations de l'article 63, pour déterminer les axes des x', des y', des z', l'équation (e) de l'article précédent donne, pour la valeur B de la projection superficielle du polyèdre sur le plan perpendiculaire à l'axe des x':

$$B = P\cos\varphi + P'\cos\psi + P''\cos\pi. \qquad (e)$$

On a de même par rapport aux deux projections B', B'' sur les plans perpendiculaires aux axes des y' et des z':

$$B' = P\cos\varphi' + P'\cos\psi' + P''\cos\pi', \qquad (e')$$
$$B'' = P\cos\varphi'' + P'\cos\psi'' + P''\cos\pi''. \qquad (e'')$$

Par un calcul semblable à celui de l'article 64, on déduit de ces trois équations (e), (e'), (e''), la suivante :

$$B^2+B'^2+B''^2=P^2+P'^2+P''^2, \qquad (E)$$

équation qui est indépendante de la position respective des deux systêmes de plans rectangulaires.

72. Multipliant les équations (e), (e'), (e'') de l'article précédent, par les quantités cos ϕ, cos ϕ', cos ϕ'', et les ajoutant, on aura :

$$B\cos\varphi+B'\cos\varphi'+B''\cos\varphi''=P,$$
$$B\cos\psi+B'\cos\psi'+B''\cos\psi''=P',$$
$$B\cos\pi+B'\cos\pi'+B''\cos\pi''=P''.$$

Ces dernières équations feront connaître les projections superficielles P, P', P'' sur les plans perpendiculaires aux axes des x, des y, des z, lorsque les projections superficielles B, B', B'' sur les plans perpendiculaires aux axes des x', des y', des z' seront données.

73. Examinons ce que devient l'équation (E) de l'article 71, lorsque les aires a, a', a''.... sont situées dans un même plan, qui fait, avec les trois plans rectangulaires, les angles α, β, γ. Dans ce cas, les aires et leurs projections sont dans le même rapport, et on a (art. 66) :

$$\frac{a}{p}=\frac{a'}{q}=\frac{a''}{r}\ldots,\quad \frac{a}{p'}=\frac{a'}{q'}=\frac{a''}{r'}\ldots,\quad \frac{a}{p''}=\frac{a'}{q''}=\frac{a''}{r''}\ldots,$$

.....; d'où l'on tire :

$$p=\frac{p}{a}a,\quad q=\frac{p}{a}.a',\quad r=\frac{p}{a}.a'',\ \ldots;$$

$$p'=\frac{p'}{a}a,\quad q'=\frac{p'}{a}\,a',\quad r'=\frac{p'}{a}.a'',\ \ldots.$$

$$p''=\frac{p''}{a}a,\quad q''=\frac{p''}{a}.a',\quad r''=\frac{p''}{a}.a'',\ \ldots.$$

formant les valeurs de P, P', P'', on a :

$$P=p+q+r\ \ldots=\frac{p}{a}\,(a+a'+a''\ldots),$$

$$P'=p'+q'+r'\ \ldots=\frac{p'}{a}\,(a+a'+a''\ldots),$$

$$P''=p''+q''+r''\ldots=\frac{p''}{a}\,(a+a'+a''\ldots).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (E) de l'art. 71, $B^2+B'^2+B''^2=P^2+P'^2+P''^2$, elle devient :

$$B^2+B'^2+B''^2=(a+a'+a''\ldots)^2\left(\frac{p^2+p'^2+p''^2}{a^2}\right).\quad (E')$$

Mais (art. 66),

$$p=a\cos\alpha,\quad p'=a\cos\beta,\quad p''=a\cos\gamma,$$

et (art. 14)

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1;$$

donc

$$\frac{p^2+p'^2+p''^2}{a^2}=1.$$

L'équation (E') devient :

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = (a + a' + a'' \ldots)^2 : \qquad (E')$$

Or, les aires $a + a' + a'' \ldots$ peuvent être considérées comme appartenant à une même figure plane : d'où il suit que le carré de cette figure est égal à la somme des carrés de ses trois projections ; proposition déja démontrée (art. 66 et 67).

74. PROBLÊME. Connaissant la grandeur et la position d'un nombre quelconque d'aires situées dans des plans donnés, on demande la position du plan sur lequel on doit les projeter, pour que la somme des projections superficielles des aires soit la plus grande possible ?

Solution. Des trois quantités B, B', B'' qui expriment (71) les sommes des projections des aires planes sur trois plans rectangulaires, l'une quelconque, par exemple B, dépend des deux autres, et, en résolvant l'équation (E) (art. 72) on a :

$$B = \sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2 - B'^2 - B''^2},$$

équation dans laquelle la somme des carrés $P^2 + P'^2 + P''^2$ est une quantité constante et donnée. Il est évident que la valeur de B sera la plus grande possible, lorsqu'on aura :

$$B' = 0, \qquad B'' = 0;$$

ce qui réduit les trois équations de l'article 72 aux suivantes :

$$B \cos \phi = P, \qquad B \cos \psi = P', \qquad B \cos \pi = P'';$$

d'où l'on tire :

$$\cos \varphi = \frac{P}{B} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{P'}{B} = \frac{P'}{\sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2}},$$

$$\cos \pi = \frac{P''}{B} = \frac{P''}{\sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2}}.$$

Les valeurs des angles ϕ, ψ, π déterminent, par rapport aux axes primitifs, la position de la droite perpendiculaire au plan qui contient les projections superficielles, dont la somme B est un *maximum*; d'où il suit que la position de ce plan, qu'on peut appeler *plan de plus grande projection superficielle*, est aussi déterminée par ces mêmes angles.

75. Théorème. La somme des projections des aires a, a', a''... est la même sur tous les plans également inclinés à celui de la plus grande projection ?

Démonstration. Soient μ, ν, ρ les angles que la droite perpendiculaire à un plan dont l'inclinaison par rapport au plan de la plus grande projection, est connue, forme avec les trois axes rectangulaires primitifs. Nommons C la somme des projections superficielles sur ce plan; on a (art. 70):

$$C = P\cos\mu + P'\cos\nu + P''\cos\rho.$$

Substituant, pour P, P', P'', leurs valeurs (art. 74):

$$C = B(\cos\varphi\cos\mu + \cos\psi\cos\nu + \cos\pi\cos\rho).$$

Soit c l'angle des deux plans qui contiennent les projections superficielles B et C, il est égal à l'angle des deux perpendiculaires aux plans; d'où il suit qu'on a (art. 14):

$$\cos c = \cos\varphi\cos\mu + \cos\psi\cos\nu + \cos\pi\cos\rho;$$

ce qui réduit l'équation précédente à:

$$C = B\cos c,$$

ou, mettant pour B sa valeur *maximum*:

$$C = \cos c\sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2};$$

d'où il suit que la valeur de C est la même pour tous les plans qui font le même angle c avec le plan de plus grande projection superficielle.

§. IV.

De la Transformation des coordonnées.

76. La transformation de coordonnées la plus simple consiste à ne changer que l'origine des coordonnées, en donnant aux nouveaux axes la même direction qu'aux axes primitifs. Nommant α, β, γ les coordonnées de la nouvelle origine, x, y, z les coordonnées primitives, et x', y', z' les nouvelles coordonnées, on aura les équations suivantes :

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

Ces équations auront lieu dans le cas où les axes primitifs des coordonnées seront rectangulaires, ou comprendront entre eux des angles donnés.

77. Un point étant rapporté à trois axes rectangulaires par les coordonnées x, y, z, si on imagine une droite menée de ce point à l'origine des coordonnées, la longueur de cette droite, et les angles qu'elle forme avec les trois axes rectangulaires, déterminent la position du point dans l'espace.

On appelle cette droite *rayon vecteur*. Soient r ce rayon, et α, β, γ les angles qu'il forme avec les axes rectangulaires des x, des y, des z, on a les équations suivantes (art. 61) ;

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma.$$

On sait d'ailleurs (art. 14) qu'on a l'équation de condition :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Lorsqu'on substitue ces valeurs de x, y, z, l'origine des coordonnées devient un *pole* d'où partent les rayons vecteurs qui correspondent aux différens points de l'espace.

78. Si, au lieu de donner les trois angles que le rayon vecteur fait avec les axes des coordonnées, on suppose ce rayon projetté sur l'un des trois plans rectangulaires, par exemple sur le plan des xy, ce rayon fera, avec sa projection, un angle ϕ, et cette projection formant avec l'axe des x un second angle ψ, les trois quantités r, ϕ, ψ détermineront la position du point dans l'espace. En effet, on aura :

$$z = r \sin \varphi, \quad y = r \sin \varphi \sin \psi, \quad x = r \sin \varphi \cos \psi.$$

79. Parmi les transformations de coordonnées, il en est une dont on fait souvent usage, et

qui sert à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques. On a vu (art. 1) qu'ayant mené par un point fixe de l'espace, trois droites faisant entre elles tels angles qu'on voudra, on rapportait à ces trois droites un autre point quelconque, en regardant la droite qui joint ce dernier point et le premier comme la diagonale d'un parallélipipède dont les arêtes sont parallèles aux trois droites passant par le point fixe. Ce parallélipipède est rectangle, lorsque les droites menées par le point fixe, et qu'on nomme *axes des coordonnées*, sont perpendiculaires entre elles. Par le même point de l'espace, pris pour origine des coordonnées, on conçoit deux systèmes d'axes, les uns rectangulaires, les autres inclinés sous des angles donnés : en rapportant un point pris à volonté dans l'espace, à l'un ou à l'autre système, la droite menée de ce point, à l'origine des coordonnées, est une diagonale commune à deux parallélipipèdes, l'un rectangle, et l'autre oblique; les arêtes du parallélipipède oblique sont les coordonnées du point dont il s'agit de déterminer la position. Connaissant les angles que les axes des coordonnées obliques font avec les axes des coordonnées rectangulaires, nous allons établir les relations qui existent entre les cosinus de ces angles, et les arêtes des deux parallélipipèdes.

De la Transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées obliques.

80. Nous ferons observer que si les axes des coordonnées rectangulaires et obliques n'avaient pas même origine, on les ramènerait d'abord à une origine commune par les équations de l'article 76.

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point pris dans l'espace, soient x', y', z' les coordonnées de ce même point par rapport aux trois axes obliques des x', des y', des z'. Supposons de plus que les axes obliques forment avec les axes rectangulaires, des angles dont les cosinus soient a, a', a'' pour l'axe des x'; b, b', b'' pour l'axe des y'; c, c', c'' pour l'axe des z'. Ces axes obliques ont pour équations (art. 14) :

$$\text{axe des } x' \left\{ x = \frac{a}{a''} z, \quad y = \frac{a'}{a''} z \right\},$$

$$\text{axe des } y' \left\{ x = \frac{b}{b''} z, \quad y = \frac{b'}{b''} z \right\},$$

$$\text{axe des } z' \left\{ x = \frac{c}{c''} z, \quad y = \frac{c'}{c''} z \right\}.$$

Qu'on imagine les deux parallélipipèdes qui ont pour diagonale commune, la droite menée de l'origine des coordonnées au point x, y, z. Cette diagonale étant le quatrième côté de deux quadrilatères dont les trois autres côtés sont, pour l'un, les arêtes consécutives x, y, z du parallélipipède rectangle, et, pour l'autre, les arêtes x', y', z' du parallélipipède oblique; les projections linéaires de ces deux quadrilatères sur une droite quelconque, sont égales (art. 60). Or, la projection du premier quadrilatère (xyz) sur l'axe des x, se réduit à l'abcisse x; les projections linéaires des côtés du second quadrilatère ($x'y'z'$), sur le même axe des x, ont (art. 61) pour expressions ax', by', cz'; donc on a l'équation :

$$x = ax' + by' + cz'.$$

En considérant les projections linéaires des deux quadrilatères sur les axes des y et des z, on a de même :

$$y = a'x' + b'y' + c'z', \quad z = a''x' + b''y' + c''z'.$$

Les cosinus des angles que l'axe des x' fait avec les axes rectangulaires des x, des y, des z, étant a, a', a'', on a (art. 14) :

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$

on a, par la même raison, les deux autres quations de condition :

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

ce qui réduit à six le nombre de constantes nécessaire pour déterminer la position des axes obliques.

Désignons, par une seule lettre, chacun des coefficiens de x, de y, de z dans les équations de ces axes, et supposons :

$$\frac{a}{a''} = \lambda, \quad \frac{a'}{a''} = \mu, \quad \frac{b}{b''} = \lambda', \quad \frac{b'}{b''} = \mu', \quad \frac{c}{c''} = \lambda'', \quad \frac{c'}{c''} = \mu'',$$

on aura :

$$a'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 + \mu^2}},$$

$$b'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda'^2 + \mu'^2}},$$

$$c'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda''^2 + \mu''^2}};$$

les équations des axes deviennent :

axe des x' $\{x = \lambda z, \quad y = \mu z\}$, $\quad a = a''\lambda, \quad a' = a''\mu,$
axe des y' $\{x = \lambda' z, \quad y = \mu' z\}$, $\quad b = b''\lambda', \quad b' = b''\mu',$
axe des z' $\{x = \lambda'' z, \quad y = \mu'' z\}$, $\quad c = c''\lambda'', \quad c' = c''\mu'',$

et les valeurs de x, y, z se changent en celles-ci :

$$x = a''\lambda x' + b''\lambda' y' + c''\lambda'' z',$$
$$y = a''\mu x' + b''\mu' y' + c''\mu'' z',$$
$$z = a'' x' + b'' y' + c'' z'.$$

Examinons le cas où les nouveaux axes des x', des y', des z' sont, comme les primitifs, perpendiculaires entre eux.

De la Transformation des coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires.

81. Pour rappeler les dénominations précédentes, formons le tableau suivant :

Axes des	x	y	z
x'	a	a'	a''
y'	b	b'	b''
z'	c	c'	c''

Ce tableau indique 1°. que les angles de l'axe des x', avec les axes des x, des y, des z, ont pour cosinus a, a', a''; 2°. que les angles de l'axe des x, avec les axes des x', des y', des z', ont pour cosinus a, b, c, etc.; d'où il suit qu'en projettant successivement les deux quadrilatères qui ont pour côtés les droites x', y', z', et les droites x, y, z, sur les axes des x', des y', et des z', et comparant les deux projections linéaires, on aura :

$$x' = ax + a'y + a''z,$$
$$y' = bx + b'y + b''z,$$
$$z' = cx + c'y + c''z.$$

Aux trois équations de l'article précédent :

$$a^2+a'^2+a''^2=1, \quad b^2+b'^2+b''^2=1, \quad c^2+c'^2+c''^2=1,$$

il faudra (art. 14) joindre celles-ci :

$$ab+a'b'+a''b''=0, \quad bc+b'c'+b''c''=0, \quad ac+a'c'+a''c''=0,$$
$$a^2+b^2+c^2=1, \quad a'^2+b'^2+c'^2=1, \quad a''^2+b''^2+c''^2=1,$$
$$aa'+bb'+cc'=0, \quad a'a''+b'b''+c'c''=0, \quad aa''+bb''+cc''=0.$$

82. De ces douze équations de condition, six seulement sont nécessaires, et elles sont équivalentes aux six autres. Pour le démontrer, il suffit d'observer que les coordonnées x, y, z, et x', y', z' appartenant au même point, et ayant même origine, la distance de ce point à l'origine est indifféremment ou $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ou $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$. Carrant les valeurs de x, y, z, et les ajoutant, on devra égaler à l'unité les coefficiens de x'^2, y'^2, z'^2, et à zéro les coefficiens des produits $x'y'$, $y'z'$, $x'z'$; ce qui donnera les six équations :

$$\left.\begin{array}{l} a^2+a'^2+a''^2=1,\ b^2+b'^2+b''^2=1,\ c^2+c'^2+c''^2=1, \\ ab+a'b'+a''b''=0,\ bc+b'c'+b''c''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0. \end{array}\right\} (e)$$

Les trois dernières expriment que les trois axes des x', des y', des z' sont perpendiculaires entre eux.

Carrant les valeurs de x', y', z', et les ajoutant, on égalera à l'unité les coefficiens de x^2, y^2, z^2, et à zéro les coefficiens des produits xy, yz, xz; ce qui donnera les six équations suivantes, dont les trois dernières expriment que les trois axes des x, des y, des z, sont perpendiculaires entre eux :

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1,\ a'^2+b'^2+c'^2=1,\ a''^2+b''^2+c''^2=1, \\ aa'+bb'+cc'=0,\ a'a''+b'b''+c'c''=0,\ aa''+bb''+cc''=0. \end{array}\right\} (e')$$

Elles sont équivalentes aux six premières, parce qu'elles expriment ainsi qu'elles l'identité des deux expressions $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$. On peut encore démontrer synthétiquement que ces deux systèmes d'équations sont équivalens.

83. Une sphère du rayon 1 étant rapportée à trois plans rectangulaires, qu'on regarde le centre de cette sphère comme le sommet d'une pyramide triangulaire formée par trois plans perpendiculaires entre eux. Supposons que les

points où les trois arêtes de cette pyramide coupent la surface de la sphère, aient pour coordonnées les neuf quantités a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''. Nommons ces points A, B, C.

Soient a, a', a'' les coordonnées du point A,
b, b', b' les coordonnées du point B,
c, c', c'' les coordonnées du point C,
on aura évidemment les trois équations :

$$a^2+a'^2+a''^2=1, \quad b^2+b'^2+b''^2=1, \quad c^2+c'^2+c''^2=1;$$

de plus, il est facile de voir que les rayons de la sphère menés par les points A, B, C font, avec les trois axes rectangulaires auxquels la surface de la sphère est rapportée, des angles dont les cosinus sont les coordonnées de ces mêmes points ; d'où il suit (art. 14) qu'on a les équations de condition qui expriment que ces rayons, pris deux à deux, sont perpendiculaires entre eux :

$$ab+a'b'+a''b''=0, \quad bc+b'c'+b''c''=0, \quad ac+a'c'+a''c''=0.$$

84. Considérons maintenant les trois rayons passant par les points A, B, C comme les intersections de trois nouveaux plans rectangulaires auxquels on rapporte la surface de la sphère.

Les trois plans rectangulaires primitifs comprennent entre eux une pyramide triangulaire dont les arêtes coupent la surface de la sphère en trois points. Désignons ces points par les lettres L, M, N, et supposons que leurs coordonnées soient,

Pour le point L, ... l, l', l'',
Pour le point M, ... m, m', m'',
Pour le point N, ... n, n', n''.

De ces neuf coordonnées parallèles aux rayons passant par les points A, B, C, une quelconque a son égal parmi les neuf coordonnées des points A, B, C parallèles aux rayons passant par les points L, M, N. Désignant par O le centre de la sphère, formons le tableau suivant, dans lequel une lettre quelconque représente le cosinus de l'angle formé par les deux rayons que l'on a écrits sur les premières colonnes horisontale et verticale, et qui répondent à la case ou la lettre est placée.

Rayons.	OL	OM	ON	OL	OM	ON
OA	a	a'	a''	l	m	n
OB	b	b'	b''	l'	m'	n'
OC	c	c'	c''	l''	m''	n''

A la seule inspection de ce tableau, on voit qu'on a :

$$a = l, \quad a' = m, \quad a'' = n,$$
$$b = l', \quad b' = m', \quad b'' = n',$$
$$c = l'', \quad c' = m'', \quad c'' = n''.$$

Mais on a entre les coordonnées des points L, M, N des équations semblables à celles qu'on a trouvées (art. précédent) entre les coordonnées des points A, B, C; on aura donc les six équations suivantes :

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = 1, \quad m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, \quad n^2 + n'^2 + n''^2 = 1,$$
$$lm + l'm' + l''m'' = 0, \quad mn + m'n' + m''n'' = 0, \quad ln + l'n' + l''n'' = 0.$$

Substituant dans ces équations les identités données par le tableau, elles deviennent :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$
$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0.$$

Les identités données par le tableau résultent de ce que les deux côtés d'un angle étant égaux, les perpendiculaires abaissées de l'extrémité du premier côté sur le second, ou de l'extrémité du second côté sur le premier, sont égales entre elles; ce qui est évident, puisque les côtés de l'angle et les perpendiculaires à ces côtés, forment deux triangles rectangles égaux.

85. Les six équations de condition (e) ou (e') (art. 82) réduisent à trois le nombre de

constantes nécessaires pour passer d'un systême de coordonnées rectangulaires à un systême d'autres coordonnées rectangulaires. x, y, z, étant les coordonnées d'un point dans le premier systême, x', y', z' les coordonnées de ce point dans le second systême, on a (art. 80 et 81) entre ces coordonnées les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz', \\ y &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}\right.$$

Les neuf constantes qui entrent dans ces équations étant liées entre elles par six équations de condition, ces formules deviendront d'un usage plus commode, lorsque les coefficiens de x', y', z' dans les valeurs de x, y, z, ou les coefficiens de x, y, z dans les valeurs de x', y', z', seront exprimés au moyen de sinus et cosinus de trois angles indépendans.

Autres Formules pour le changement des coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires.

86. Les axes des x' et des y' sont dans un plan qui coupe le plan des xy suivant une

droite : supposons que les angles de cette droite avec les axes des x et des x' soient donnés, et qu'on ait de plus l'angle des deux plans des xy et des $x'y'$; il est évident que ces trois angles déterminent la position respective des axes des deux systêmes. Les relations entre les lignes trigonométriques de ces trois angles et des neuf angles que les axes des deux systêmes font entre eux, dépendent de la résolution des triangles sphériques.

Soient (fig. 9, Pl. 1)
OX, OY, OZ les trois axes des x, des y, des z ;
OX', OY', OZ' les axes des x', des y', des z' ;
ON l'intersection des plans des xy et des $x'y'$.

On suppose 1°. que ces deux plans font entre eux un angle θ égal à l'angle ZOZ' compris entre les axes OZ, OZ' perpendiculaires aux plans des xy et des $x'y'$; 2°. que la droite ON fasse, avec les axes OX, OX' les angles ψ, ϕ, et on a les équations suivantes (*).

(*) Cette notation a été proposée par M. Français, professeur aux écoles du génie et de l'artillerie. L'expression $\cos(x, x')$ signifie le cosinus de l'angle formé par les axes des x et des x'.

$$\cos(x, x') = a = \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi$$
$$\cos(x, y') = b = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi$$
$$\cos(x, z') = c = \sin\theta \sin\psi,$$
$$\cos(y, x') = a' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,$$
$$\cos(y, y') = b' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,$$
$$\cos(y, z') = c' = \sin\theta \cos\psi,$$
$$\cos(z, x') = a'' = -\sin\theta \sin\varphi,$$
$$\cos(z, y') = b'' = -\sin\theta \cos\varphi,$$
$$\cos(z, z') = c'' = \cos\theta.$$

On substituera ces valeurs dans les équations de l'article précédent, et on aura celles de x, y, z, ou de x', y', z' exprimées en sinus et cosinus de trois angles indépendans ψ, φ, θ.

87. Pour trouver les valeurs de a, b, c, considérons d'abord le triangle sphérique NXX' qu'on obtient en décrivant du point O (fig. 9, Pl. 1re.) comme centre, et du rayon pris pour unité, trois arcs, dont deux mesurent les angles ψ, φ que la droite ON fait avec les axes OX, OX', et le troisième est compris entre les axes OX, OX'. Ce dernier côté du triangle sphérique est opposé à l'angle θ ; d'où il suit que, d'après la formule (1) (art. 44), on aura :

$$\cos(OX, OX'), \quad \text{ou } a = \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi.$$

Regardant toujours le point O comme le centre d'une sphère, on a un second triangle sphérique compris entre les droites ON, OX, OY', qui ne diffère du premier NXX' que par le côté φ, qui devient $\varphi + 100^\circ$; or

$$\sin(\varphi + 100^\circ) = \cos\varphi, \quad \cos(\varphi + 100^\circ) = -\sin\varphi:$$

donc, on aura :

$$\cos(OX, OY'), \quad \text{ou} \quad b = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi.$$

Un troisième triangle sphérique, correspondant aux trois droites ON, OX, OZ', a pour côtés l'angle $NOX = \psi$, l'angle $NOZ' = 100^\circ$, et l'angle $Z'OX$ formé par les axes des x et des z'. Or, ce dernier côté $Z'OX$ est opposé à l'angle $100^\circ - \theta$ du triangle sphérique. En comparant ce triangle au premier NXX', on a $\varphi = 100^\circ$, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, et $\cos\theta$ devient $\sin\theta$; ce qui donne :

$$\cos(OX, OZ') = c = \sin\theta \sin\psi.$$

88. On trouvera, de la même manière, les valeurs de a', b', c', en considérant les trois triangles sphériques formés par les arcs qui sont interceptées 1°. par les droites ON, OY, OX'; 2°. par les droites ON, OY, OY'; 3°. par les droites ON, OY, OZ'.

En comparant le premier de ces trois triangles au triangle NXX', on voit que le côté ϕ et l'angle θ sont communs, que le côté ψ devient $\psi + 100°$; on déduira la valeur de a de celle de a', en y mettant cos ψ pour sin ψ, et sin ψ pour cos ψ; on aura donc :

$$\cos(OY, OX') = a' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\varphi.$$

Les valeurs de b et de c deviendront celles de b' et de c', en y mettant de même cos ψ pour sin ψ, et $-$ sin ψ pour cos ψ; ce qui donne :

$$\cos(OY, OY') = b' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,$$
$$\cos(OY, OZ') = c' = \sin\theta \cos\psi.$$

Enfin, des valeurs de a, b, c, on déduira celles de a'', b'', c'', en observant que dans les trois triangles sphériques formés par les axes qui sont interceptés par les droites ON, OZ combinés successivement avec les axes OX', OY', OZ', l'angle NOZ est de 100°. En les comparant au triangle sphérique NXX', le côté ψ de ce triangle devient 100°; d'où il suit que $\cos\psi = 0$, $\sin\psi = 1$. De plus, l'angle des deux plans NOZ, NOX', ou NOZ et NOY' est de $100° + \theta$; donc, si dans les valeurs de a et de b, on suppose que cos θ devienne $-$ sin θ, on tirera les valeurs suivantes de a'', b'' :

$$\cos(OZ, OX') = a'' = -\sin\theta \sin\varphi ;$$
$$\cos(OZ, OY') = b'' = -\sin\theta \cos\varphi ;$$

quant à la valeur de c'', il est évident qu'on a :

$$\cos(OZ, OZ') = c'' = \cos\theta.$$

Il résulte de cette application de la trigonométrie sphérique à la transformation des coordonnées rectangulaires, que les neuf cosinus a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' ont pour valeurs des quantités exprimées en sinus et cosinus de trois angles indépendans. Les formules qui résultent de ces expressions, servent à démontrer plusieurs théorêmes importans de mécanique.

De la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques.

89. Le problême le plus général de la transformation des coordonnées consiste à passer d'un systême de coordonnées obliques à d'autres coordonnées obliques (*).

(*) *Voyez* une solution analytique de ce problême par M. Français, Correspondance sur l'École polytechnique, tom. II, pag. 6.

Nommons x, y, z les coordonnées obliques d'un point de l'espace; x', y', z' les nouvelles coordonnées obliques qui ont même origine que les premières, et supposons que chaque axe des nouvelles coordonnées soit donné par les trois angles qu'il forme avec les plans des coordonnées primitives, en remarquant que de ces trois angles, deux seulement sont nécessaires. Ayant mené par l'origine des coordonnées, trois axes auxiliaires perpendiculaires aux plans primitifs des xy, des xz, des yz, désignons ces axes par les trois lettres Z, Y, X. Les angles que les axes auxiliaires et les axes des nouvelles coordonnées font entre eux, sont connus, puisqu'ils sont les complémens de ceux que ces derniers axes font avec les plans des coordonnées primitives.

Supposons que les cosinus de ces angles soient représentés par les neuf lettres a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', de sorte qu'on ait :

$$\begin{array}{lll} a = \cos(x', X), & a' = \cos(x', Y), & a'' = \cos(x', Z), \\ b = \cos(y', X), & b' = \cos(y', Y), & b'' = \cos(y', Z), \\ c = \cos(z', X), & c' = \cos(z', Y), & c'' = \cos(z', Z). \end{array}$$

La droite menée par l'origine des coordonnées a un point déterminé de l'espace, et les trois coordonnées primitives x, y, z de ce point forment un quadrilatère (xyz) (art. 79) : cette même droite et les trois nouvelles coordonnées x', y', z' forment un second quadrilatère $(x'y'z')$. Ces deux quadrilatères (xyz), $(x'y'z')$, qui ont un côté commun, étant projettés (art. 60) sur l'un quelconque des trois axes auxiliaires Z, Y, X, leurs projections seront égales. Or, la projection des trois coordonnées x, y, z sur l'un de ces axes se réduit toujours à la projection de l'ordonnée qui n'est pas dans le plan perpendiculaire à cet axe ; d'où il suit que les projections du quadrilatère (xyz), sur les axes auxiliaires Z, Y, X, se réduisent aux projections des côtés z, y, x de ce quadrilatère. Les projections de ces côtés ont (art. 61) pour expressions :

$$z \cos(z, Z), \quad y \cos(y, Y), \quad x \cos(x, X);$$

donc, en égalant les projections des deux quadrilatères (xyz), $(x'y'z')$ sur chacun des axes Z, Y, X, on aura les trois équations suivantes :

$$x \cos(x, X) = ax' + by' + cz',$$
$$y \cos(y, Y) = a'x' + b'y' + c'z',$$
$$z \cos(z, Z) = a''x' + b''y' + c''z'.$$

Lorsque les axes primitifs des x, des y, des z sont perpendiculaires entre eux, ils se confondent avec les axes auxiliaires X, Y, Z, de sorte qu'on a :

$$\cos(x, X) = 1, \quad \cos(x, Y) = 1, \quad \cos(z, Z) = 1;$$

et les trois équations précédentes ne diffèrent pas des équations de l'art. 79.

90. Dans le cas général, les axes primitifs sont déterminés par les trois constantes $\cos(x, X)$, $\cos(y, Y)$, $\cos(z, Z)$, qui sont égales aux trois sinus : $\sin(x, yz)$, $\sin(y, xz)$, $\sin(z, xy)$. Des neuf constantes a, b, c, a', etc., relatives au second systême de coordonnées obliques, six seulement sont nécessaires, et, par les formules de la trigonométrie sphérique, on établirait des relations entre les lignes trigonométriques des angles qui déterminent le premier systême des coordonnées obliques et les neuf cosinus relatifs au second systême; au moyen de ces relations, les valeurs des lignes trigonométriques relatives aux deux systêmes d'axes, se déduiraient les unes des autres. Il suffira d'ajouter aux équations (A), (B), (C), (D) (art. 43 — 47), celles qui déterminent les trois arcs de grands cercles, menés des trois sommets d'un triangle sphérique, perpendiculairement aux côtés opposés à ces sommets. Nommant α, β, γ les trois arcs respectivement

perpendiculaires aux côtés a, b, c du triangle sphérique ABC (fig. 5, Pl. 1re.) (art. 43), on a les trois équations :

$$\sin\alpha = \sin b \sin C = \sin B \sin c,$$
$$\sin\beta = \sin c \sin A = \sin C \sin a,$$
$$\sin\gamma = \sin a \sin B = \sin A \sin b.$$

Ces arcs (*) α, β, γ mesurent les angles que les rayons de la sphère, menés par les points A, B, C (fig. 5, Pl. 1re.), font avec les plans des côtés a, b, c du triangle sphérique A, B, C.

(*) Nommant f, g, h, k les arêtes et les diagonales d'un parallélipipède, qui concourent vers un même point, on a l'équation suivante :

$$1 = \frac{\sin^2(k, gh)}{\sin^2(f, gh)} + \frac{\sin^2(k, fh)}{\sin^2(g, fh)} + \frac{\sin^2(k, fg)}{\sin^2(h, fg)}$$
$$+ 2\cos(f, g)\cdot\frac{\sin(k, gh)\sin(k, fh)}{\sin(f, gf)\cdot\sin(g, fh)}$$
$$+ 2\cos(f, h)\cdot\frac{\sin(k, gh)\cdot\sin(k, fg)}{\sin(f, gh)\cdot\sin(h, fg)}$$
$$+ 2\cos(g, k)\cdot\frac{\sin(k, fh)\cdot\sin(k, fg)}{\sin(g, fh)\cdot\sin(h, fg)}.$$

Cette expression (f, g) ou (k, fg), conforme à la notation de M. Français, signifie : *angle* des arêtes f et g ; *angle* de la diagonale k et du plan qui passe par les arêtes f et g.

On obtiendrait d'autres relations, en considérant les parallélipipèdes formés sur des droites perpendiculaires aux plans qu'on menerait par les droites f, g, h, k prises deux à deux.

CHAPITRE II.

Des Surfaces dont l'équation est algébrique, et principalement des Surfaces du second degré.

§ Ier.

91. On a vu (art. 4) qu'une surface est représentée par une seule équation entre les trois coordonnées variables d'un point de cette surface. Réciproquement, toute équation entre trois variables représente, en général, une surface dont chaque point a ces variables pour coordonnées. Si cette équation peut être ramenée par des transformations, à ne contenir que des termes de la forme $Ax^l y^m z^n$, dans lesquels les exposans l, m, n des coordonnées x, y, z soient des nombres donnés entiers et positifs, et A un coefficient déterminé ; on dit alors qu'elle est *algébrique*.

92. *Etant donnée l'équation algébrique d'une surface, on propose de reconnaître si elle a un centre ? si elle a des plans diamétraux ?*

On appelle *centre* d'une surface, un point tel que toutes les *cordes* de la surface, qui passent par ce point, sont divisées en deux parties égales. Lorsqu'une droite coupe une surface en deux points, la partie de cette droite comprise entre les deux points d'intersection, est une *corde* de la surface.

Si la surface proposée a un centre, concevons qu'elle soit rapportée à trois axes passant par ce centre. Une droite quelconque menée par l'origine des coordonnées, sera un *diamètre*, et coupera la surface en deux points. Les coordonnées du premier point étant x, y, z, celles du second seront $-x$, $-y$, $-z$, c'est-à-dire que l'équation en x, y, z de la surface aura lieu, soit qu'on prenne les variables positivement ou négativement. Pour qu'elle satisfasse à cette condition, il faut que la dimension de chaque terme, c'est-à-dire la somme des exposans des trois variables dans ces termes, soit de même rang (*pair* ou *impair*) que le degré de l'équation, de manière que dans une équation de degré pair, la dimension de chaque terme soit paire, et que dans une équation de degré impair, tous les termes soient de dimension impaire. Ainsi $f(r, s, t) = 0$ étant l'équation algébrique d'une surface rapportée à trois plans quelconques, on fera, dans cette équation :

$$r = x + a, \quad s = y + b, \quad t = z + c.$$

Substituant ces nouvelles valeurs de r, s, t, on aura (art. 76) en x, y, z, l'équation de la surface rapportée à trois nouveaux plans parallèles aux premiers, et passant par le point qu'on suppose être le centre de la surface. Tous les termes de cette équation seront, par hypothèse, de la forme $Ax^l y^m z^n$. Si, par des valeurs particulières et réelles assignées aux trois constantes a, b, c, on peut faire disparaître tous les termes dans lesquelles la somme $l+m+n$ des exposans des trois coordonnées x, y, z sera d'un autre rang (*pair* ou *impair*) que le degré de l'équation $f(r, s, t) = 0$, la surface proposée aura un centre, et un nombre infini de diamètres.

93. *Des Plans diamétraux.* On appelle *plan diamétral* d'une surface, celui qui divise en parties égales un système de cordes parallèles entre elles. On dit que trois plans diamétraux sont *conjugués entre eux*, lorsque l'un de ces plans coupe en parties égales les cordes de la surface parallèles à la droite d'intersection des deux autres plans.

Lorsqu'une surface a un centre et des plans diamétraux, on distingue le diamètre parallèle aux cordes que ce plan divise en parties égales, en le nommant *diamètre conjugué au plan.* Réciproquement le plan diamétral *conjugué* à un diamètre, divise en parties égales les cordes de la surface parallèles à ce diamètre (*).

Lorsque la surface dont l'équation algébrique est donnée, a un plan diamétral, on peut supposer 1°. qu'elle soit rapportée à ce plan comme l'un des trois plans des coordonnées, ou autrement, que ce plan diamétral contienne deux des trois axes auxquels la surface est rapportée, par exemple, les axes des x et des y; 2°. que le troisième axe, ou l'axe des z soit conjugué au plan diamétral. Cette hypothèse admise, l'exposant de z dans chaque terme doit être un nombre pair, puisque le plan des xy divise en parties égales toutes les cordes de la surface parallèles à l'axe des z.

94. Soit $f(r, s, t)$ l'équation algébrique de la surface rapportée à trois axes quelconques obliques ou rectangulaires. On rapportera la surface à trois nouveaux axes. Les constantes qui déterminent les nouveaux axes sont au

(*) *Voyez* la Correspondance sur l'École polytechnique, tom. 2, pag. 5. (Article de M. Binet.)

nombre de neuf; de ces neuf constantes, sept donnent la position de la nouvelle origine des coordonnées, de l'un des nouveaux axes, par exemple de l'axe des x, et du plan qui contient les deux autres axes des y et des z.

Lorsque, par des valeurs particulières et réelles assignées aux sept constantes, on peut faire disparaître les termes où les exposans de la coordonnée parallèle à l'axe des x, sont des nombres impairs, la surface proposée a pour plan diamétral, le plan des xy. Les équations qu'on obtient en égalant à zéro les coefficiens de ces termes, contiennent les sept constantes, et servent à les déterminer. Par l'élimination, on obtiendra d'autres équations telles que chacune d'elles ne contiendra plus qu'une seule constante qui sera l'indéterminée. Résolvant cette équation, en considérant la constante comme l'inconnue, le nombre des racines réelles de cette équation déterminera le nombre des plans diamétraux de la surface.

Si, par des valeurs particulières des neuf constantes qui déterminent les trois nouveaux axes, on parvient à une équation entre les nouvelles coordonnées x, y, z, telle que les exposans de ces coordonnées soient dans tous les termes de l'équation, des nombres pairs, la surface a au moins trois plans diamétraux *conjugués* (art. 93).

En prenant pour exemple la surface dont l'équation algébrique est du second degré, on y appliquera la méthode précédente, pour déterminer le centre et les plans diamétraux de cette surface.

§ II.

Des surfaces du second degré.

DÉFINITION.

95. Toutes les surfaces du second degré sont représentées par l'équation générale du second degré entre trois variables :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} At^2+A'u^2+A''v^2 \\ +2Buv+2B'vt+2B''tu+2Ct+2C'u+2C''v=K; \end{array}\right.$$

t, u, v étant les coordonnées d'un point de la surface, rapporté à trois plans rectangulaires.

La propriété caractéristique de ces surfaces consiste en ce que *chacune d'elles ne peut être coupée par une droite qu'en deux points*. Pour le démontrer, menons par un point (t', u', v') de la surface du second degré, une droite qui, prolongée indéfiniment, coupe la surface en un autre point, et cherchons les coordonnées de ce point. Soient :

$$(2)\quad t - t' = l(v - v'), \qquad (3)\quad u - u' = m(v - v'),$$

les équations de la sécante.

Mettant dans l'équation (1), à la place de t, u, v, les coordonnées t', u', v' du point par lequel on mène la sécante, elle deviendra :

$$\begin{aligned}&At'^2 + A'u'^2 + A''v'^2\\ &+ 2Bu'v' + 2B'v't' + 2B''t'u' + 2Ct' + 2C'u' + 2C''v' = K,\end{aligned}$$

et en la retranchant de l'équation (1), on a :

$$(3)\left\{\begin{aligned}&A(t^2 - t'^2) + A'(u^2 - u'^2) + A''(v^2 - v'^2)\\ &+ 2B(uv - u'v') + 2B'(vt - v't') + 2B''(tu - t'u')\\ &+ 2C(t - t') + 2C'(u - u') + 2C''(v - v')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Désignant par les lettres t, u, v les coordonnées du second point où la sécante coupe la surface, les équations (2) et (3) de cette sécante donnent :

$$\begin{aligned}
t^2 - t'^2 &= (t + t')(t - t') = l(t + t')(v - v'),\\
u^2 - u'^2 &= (u + u')(u - u') = m(u + u')(v - v'),\\
uv - u'v' &= (u' + mv)(z - z'),\\
vt - v't' &= (t' + lv)(v - v'),\\
tu - t'u' &= (lu' + mt)(v - v') + lm(v - v')^2.\\
t - t' &= l(v - v'),\\
u - u' &= m(v - v').
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), et divisant tous les termes par $v - v'$, on a:

$$(5)\left\{\begin{array}{l} Al(t+t')+A'm\,(u+u')+A''(v+v') \\ +2B\,(u'+mv)+2B'\,(t'+lv)+2B''(\,lu'+mt-lmv'+lmv) \\ +2\,Cl+2\,C'm+2\,C'' \end{array}\right\}=$$

Les équations (2), (3), (5), qui contiennent les coordonnées t, u, v, étant linéaires, la droite menée par le premier point (t', u', v') ne peut couper la surface qu'en un second point; *d'où il suit qu'en général une droite ne peut rencontrer une surface du second degré qu'en deux points.*

De la Tangente et du Plan tangent d'une surface du second degré.

96. Une droite sécante devient tangente, lorsque les deux points où elle coupe la surface se réunissent en un seul. Les équations (2), (3), (5) de la sécante deviennent donc celles d'une tangente, lorsqu'on suppose dans l'équation (5) (art. 95) :

$$t=t', \qquad u=u', \qquad v=v',$$

et on a pour les équations de la tangente en un point (t', u', v') :

$$(2)\quad t-t'=l\,(v-v'), \qquad (3)\quad u-u'=m\,(v-v'),$$

les constantes l et m étant liées entre elles par l'équation :

$$
(6)\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} Alt' + A'mu' + A''v' \\ + B(u'+mv') + B'(t'+lv') + B''(lu'+mt') \\ + Cl + C'm + C'' \end{array}\right\} = 0, \\
\text{ou en ordonnant par rapport a } l \text{ et a } m : \\
\left.\begin{array}{l} l\,(At' + B''u' + B'v' + C) \\ + m\,(B''t' + A'u' + Bv' + C') \\ + \quad B't' + Bu' + A''v' + C'' \end{array}\right\} = 0.
\end{array}\right.
$$

Le plan qui touche la surface au point (t', u', v') contient (*Géométrie descriptive*, *Suppl.*, art. 24) toutes les tangentes à la surface, qu'on peut mener par ce point; d'où il suit que l'équation du plan tangent doit être indépendante des constantes l et m qui déterminent l'une de ces tangentes; donc, si l'on substitue dans l'équation (6), pour l et m, les valeurs $\frac{t-t'}{v-v'}$, $\frac{u-u'}{v-v'}$, tirées des équations (2) et (3), on a :

$$
\left.\begin{array}{l} (t-t')\,(At' + B''u' + B'v' + C) \\ + (u-u')\,(B''t' + A'u' + Bv' + C') \\ + (v-v')\,(B't' + Bu' + A''v' + C'') \end{array}\right\} = 0.
$$

Réduisant au moyen de l'équation (1) (art. 95), l'équation du plan tangent devient :

$$
(7)\quad \left\{\begin{array}{l} t\,(At' + B''u' + B'v' + C) \\ + u\,(B''t' + A'u' + Bv' + C') \\ + v\,(B't' + Bu' + A''v' + C'') \\ + Ct' + C'u' + C''v' - K \end{array}\right\} = 0;
$$

et on a de plus entre les coordonnées t', u', v' du point de contact, l'équation :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} At'^2 + A'u'^2 + A''v'^2 \\ +2Bu'v' + 2B'v't' + 2B''t'u' \\ +2Ct' + 2C'u' + 2C''v' - K \end{array}\right\} = 0.$$

De la Division des surfaces du second degré en deux classes.

97. Les surfaces du second degré se divisent en deux classes, les unes qui ont un centre, les autres qui en sont dépourvues, ou plutôt dont le centre est à l'infini. Pour le démontrer, supposons qu'elles aient un centre, et que les coordonnées de ce centre soient α, β, γ. En transportant l'origine des coordonnées au point α, β, γ, et rapportant la surface à trois nouveaux plans parallèles aux premiers, on a (art. 76) :

$$t = x + \alpha, \quad u = y + \beta, \quad v = z + \gamma.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1) (art. 95), elle devient :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2x\,(A\alpha + B''\beta + B'\gamma + C) \\ + 2y\,(B''\alpha + A'\beta + B\gamma + C') \\ + 2z\,(B'\alpha + B\beta + A''\gamma + C'') \\ + A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 \\ + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta \\ + 2C\alpha + 2B'\beta + 2C''\gamma - K \end{array}\right\} = 0.$$

On remarquera 1°. que les coefficiens des termes à deux dimensions sont les mêmes dans cette équation (2) et dans l'équation (1) (art. 95); 2°. que le terme constant de l'équation (2) est composé des termes de l'équation (1) (art. 95), dans lesquels on changerait t, u, v, en α, β, γ.

Pour que l'équation (2) ne contienne que des termes dont la somme des exposans soit paire, il faut que les coefficiens de x, y, z soient nuls, ou qu'on ait :

$$(3) \qquad A\alpha + B''\beta + B'\gamma + C = 0,$$
$$(4) \qquad B''\alpha + A'\beta + B\gamma + C' = 0,$$
$$(5) \qquad B'\alpha + B\beta + A''\gamma + C'' = 0 \text{ (*)}.$$

Nommant $-H$ le terme constant de l'équation (2), elle se réduit à :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H. \quad (E)$$

Cette équation (E) sera satisfaite en prenant x, y, z positivement ou négativement; ce qui prouve (art. 92) que la surface à laquelle cette équation appartient, a un centre dont les coordonnées α, β, γ sont déterminées par les équations (3), (4), (5). Si la constante H est nulle,

---

(*) En différentiant l'équation (1) (art. 95) successivement par rapport a t, u, et v, on a trois équations, dans lesquelles mettant pour t, u, v, les coordonnées α, β, γ, on obtient les trois équations (3), (4), (5) (art. 97).

l'origine des coordonnées est un point de la surface, et ce point en est le centre.

Les équations (3), (4), (5) linéaires en α, β, γ, donnent, pour ces quantités, les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{C(A'A''-B^2)+C'(BB'-A''B'')+C''(BB''-A'B')}{AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''},$$

$$\beta = \frac{C(BB'-A''B'')+C'(AA''-B'^2)+C''(B'B''-AB)}{AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''},$$

$$\gamma = \frac{C(BB''-A'B')+C'(B'B''-AB)+C''(AA'-B''^2)}{AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''}.$$

Supposons maintenant que les numérateurs de ces trois fractions soient des quantités finies, et que le dénominateur commun soit nul, ou qu'on ait :

$$AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''=0;$$

les coordonnées α, β, γ du centre de la surface seront infinies; d'où il suit qu'il y a deux classes de surfaces du second degré, les unes qui ont un centre, les autres qui en sont dépourvues. Lorsque des trois fractions, valeurs de α, β, γ, une ou deux seulement se réduisent à $\frac{0}{0}$, l'équation proposée appartient à une surface du second degré, qui a pour centres, tous les points d'un plan ou d'une ligne droite. Nous examinerons ce cas particulier.

Des Surfaces du second degré qui ont un centre.

98. Toutes les surfaces du second degré qui ont un centre, sont comprises dans l'équation (E) (art. 97) :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=H; \quad (E)$$

le centre étant l'origine des coordonnées rectangulaires x, y, z.

Concevons par un point (x', y', z') de cette surface un plan tangent ; on aura l'équation de ce plan, en mettant dans l'équation (7) (art. 96), au lieu de t, u, v, les lettres x, y, z, et à la place de t', u', v', les lettres x', y', z'. Changeant K en H, et en supposant nulles les constantes C, C', C'', l'équation (7) (art. 96) se réduit à celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l} x\,(Ax'+B''y'+B'z') \\ +y\,(B''x'+A'y'+Bz') \\ +z\,(B'x'+By'+A''z') \end{array}\right\}=H. \quad (F)$$

Les trois coordonnées x', y', z' du point de contact sont liées entre elles par l'équation :

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2By'z'+2B'x'z'+2B''x'y'=H. \quad (E')$$

La perpendiculaire au plan tangent, menée par le point de contact, est la droite qu'on appelle la *normale*. Faisant, pour abréger :

$$\begin{aligned} Ax' + B''y' + B'z' &= L, \\ B''x' + A'y' + Bz' &= M, \\ B'x' + By' + A''z' &= N, \end{aligned}$$

les équations de la normale sont (art. 26) :

$$N(x-x') = L(z-z'), \quad N(y-y') = M(z-z').$$

La parallèle à cette normale, menée par le centre de la surface, a pour équations :

$$Nx = Lz, \qquad Ny = Mz.$$

Des Sommets de la surface du second degré.

99. Le plan tangent à la surface du second degré détermine la direction de chacun de ses élémens. La normale élevée par le point de contact, contient les centres d'une infinité de sphères, et parmi ces sphères, il y en a deux dont le centre est déterminé par les rencontres de deux normales consécutives, et qu'on nomme les sphères *osculatrices* de la surface. Les rayons de ces sphères déterminent la courbure de la surface du second degré ; la recherche de ces rayons est une application du calcul différentiel. En n'employant que les méthodes algébriques, on peut traiter une

autre question plus simple, et qui néanmoins jette un grand jour sur la théorie des surfaces du second degré. Toutes les normales à la surface d'une sphère passent par le centre de cette sphère; la surface du second degré ayant un centre, on demande s'il existe une ou plusieurs normales qui passent par ce centre? En supposant que cette normale existe, le point de la surface d'où part la normale, est un *sommet* de cette surface.

Les sommets d'une surface du second degré qui a un centre, sont des points pour lesquels les plans tangens à la surface, menés par ces points, sont perpendiculaires aux diamètres qui passent par ces mêmes points. Pour les déterminer, concevons une sphère concentrique à la surface du second degré, et tangente à cette surface en un point (x', y', z'). Nommant R le rayon de la sphère, l'équation du plan qui la touche au point (x', y', z') est:

$$(1) \qquad xx' + yy' + zz' = R^2;$$

et les trois coordonnées x', y', z' du point de contact, sont liés entre elles par l'équation:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2:$$

or, ce plan tangent, d'après la définition des sommets, ne diffère pas du plan qui touche la surface du second degré au même point (x', y', z'); donc l'équation (1), et l'équation (F) (art. 98) sont identiques ; les comparant terme à terme, on a les trois équations suivantes :

$$\frac{x'}{R^2} = \frac{Ax' + B''y' + B'z'}{H},$$
$$\frac{y'}{R^2} = \frac{B''x' + A'y' + Bz'}{H},$$
$$\frac{z'}{R^2} = \frac{B'x' + By' + A''z'}{H}.$$

Le diamètre qui passe par le sommet a pour équations :

$$x = \frac{x'}{z'}z, \qquad y = \frac{y'}{z'}z.$$

ou en nommant λ et μ les tangentes $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$,

$$x = \lambda z, \qquad y = \mu z,$$

ces tangentes λ et μ déterminent la direction de la normale qui passe par un sommet, et les trois équations précédentes deviennent :

$$\left.\begin{array}{l} R^2(A\lambda + B''\mu + B') - H\lambda = 0, \\ R^2(B''\lambda + A'\mu + B) - H\mu = 0, \\ R^2(B'\lambda + B\mu + A'') - H = 0. \end{array}\right\} \qquad (G)$$

Eliminant successivement de ces trois équations deux des trois quantités λ, μ, $\frac{R^2}{H}$, on aura les équations dont les racines sont les valeurs de ces trois quantités.

Eliminant d'abord $\frac{R^2}{H}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} A\lambda + B''\mu + B' = B'\lambda^2 + B\lambda\mu + A''\lambda, \\ B''\lambda + A'\mu + B = B'\lambda\mu + B\mu^2 + A''\mu\,; \end{array}\right\} \quad (g)$$

d'où l'on tire les équations (H) et (K) :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^3\{BB'(A'-A)+B''(B'^2-B^2)\} \\ +\lambda^2\{B(A-A')(A-A'')-B'B''(A+A'-2A'')+B(2B''^2-B^2-B'^2)\} \\ +\lambda\,\{B''(A''-A')(A''-A)-BB'(A'+A''-2A)+B''(2B^2-B'^2-B''^2) \\ -B'B''(A''-A')-B(B''^2-B'^2)\}\,, \end{array}\right\} = 0 \quad (H)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu^3\{BB'(A-A')+B''(B^2-B'^2)\} \\ +\mu^2\{B'(A'-A)(A'-A'')-BB''(A+A'-2A'')+B'(2B''^2-B^2-B'^2)\} \\ +\mu\,\{B''(A''-A)(A''-A')-BB'(A+A''-2A')+B''(2B'^2-B^2-B''^2) \\ -BB''(A''-A)-B'(B''^2-B^2)\}. \end{array}\right\} = 0 \quad (K)$$

100. Pour obtenir l'équation finale en $\frac{R^2}{H} = s$, supposo..s qu'on élimine, dans les équations (G) (art. 99), l'une des deux quantités λ, μ, par exemple λ, on aura les deux équations :

$$(1)\ \mu\{s^2(B'B''-AB)+Bs\}+s^2(B'^2-AA'')+s(A+A'')-1=0,$$
$$(2)\ \mu\{s\,(A'B'-BB'')-B'\}+s\,(BB'-A''B'')+B''=0;$$

d'où, éliminant μ, on a :

$$\left.\begin{array}{l} s^3(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'') \\ +s^2(AA'+A'A''+AA''-B^2-B'^2-B''^2) \\ -s\,(A+A'+A'') \\ +1 \end{array}\right\} = 0. \quad (I)$$

Lorsque les trois racines de cette équation (I) seront réelles (*), en les multipliant par H, on aura trois valeurs réelles de R^2, et six valeurs de $\pm\sqrt{R^2}$. Les quantités λ, μ, qui déterminent la direction des normales qui passent par les six sommets, étant données par une équation du troisième degré, il suit que les six sommets sont placés sur trois normales, et que chacune de ces normales contient les deux sommets correspondans à la distance $\pm\sqrt{R^2}$ de ces sommets au centre de la surface.

L'existence des sommets d'une surface du second degré dépend donc du signe des racines réelles de l'équation (I). Nous démontrerons, dans les articles suivans, que les trois valeurs de λ et μ, données par les équations (H) et (K) de l'article précédent, sont réelles. A ces valeurs réelles correspondent, en général, trois valeurs réelles et finies de s ou $\frac{R^2}{H}$, qui sont données par les équations (G) de cet article, linéaires par rapport a s; mais lorsque l'une des

(*) On obtient encore cette équation (I) par d'autres considérations; *voyez* les Annales des mathématiques, t. II, pag. 33; la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tom. II, pag. 324, article de M. Petit.

valeurs de s sera négative, la distance de deux sommets au centre de la surface sera imaginaire.

Des Plans diamétraux de la surface du second degré.

101. Quels que soient les trois plans rectangulaires auxquels on rapporte la surface du second degré, cette surface a trois plans diamétraux parallèles aux plans des coordonnées. En effet, reprenons l'équation générale (1) de l'article 95, et résolvons-la successivement par rapport à t, à u, et à v, on aura :

$$t = -\frac{(B'v + B''u + C)}{A} \pm \sqrt{T},$$

$$u = -\frac{(Bv + B''t + C')}{A'} \pm \sqrt{U},$$

$$v = -\frac{(Bu + B't + C'')}{A''} \pm \sqrt{V},$$

T, U, V, représentant, pour abréger, les quantités sous le radical.

La valeur de t est composée de deux parties : la première est l'ordonnée t' d'un plan qui a pour équation :

(1) $$At + B''u + B'v + C = 0;$$

or, il faut augmenter et diminuer l'ordonnée t' de ce plan, de la même quantité $\sqrt{T}$, pour avoir les deux coordonnées t de la surface qui correspondent à u et v ; ce plan divise donc en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'ordonnée t : donc il est (art. 93) un plan diamétral. Par la même raison, les plans diamétraux qui divisent en parties égales les cordes parallèles à u et à v, sont :

(2) $$B''t + A'u + Bv + C' = 0,$$
(3) $$B't + Bu + A''v + C'' = 0.$$

Lorsqu'une surface a un centre, un plan diamétral passe nécessairement par ce centre. D'où il suit que le point d'intersection des trois plans diamétraux représentés par les équations (1), (2), (3) de cet article, est le centre de la surface du second degré ; on voit, en effet, que ces trois équations ne diffèrent pas des équations (3), (4), (5) de l'article 97, dans lesquelles, au lieu de α, β, γ, coordonnées du centre, on mettrait t, u, v, coordonnées du point d'intersection des trois plans diamétraux.

102. Le système de plans rectangulaires auxquels on a rapporté la surface du second degré, détermine les trois plans diamétraux auxquels ils sont parallèles ; d'où il suit que la surface du second degré a une infinité de plans diamétraux, et que tout plan qui passe par son centre, est un plan diamétral. En sup-

posant cette surface rapportée par des coordonnées obliques à trois plans diamétraux, on demande *si ces trois plans peuvent être conjugués entre eux* (art. 93) ?

Pour résoudre cette question, on se servira des formules (art. 80) qui servent à passer d'un systême de coordonnées rectangulaires à un systême de coordonnées obliques.

Reprenons l'équation (E) (art. 97).

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=H, \quad (E)$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface. Nommant x', y', z' les coordonnées obliques de ce point, on a :

$$x=ax'+by'+cz',$$
$$y=a'x'+b'y'+c'z',$$
$$z=a''x'+b''y'+c''z'.$$

Et des neuf constantes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', six seulement sont nécessaires, puisqu'on a (art. 14) les trois équations de condition :

$$a^2+a'^2+a''^2=1, \quad b^2+b'^2+b''^2=1, \quad c^2+c'^2+c''^2=1.$$

Substituant les valeurs de x, y, z dans l'équation (E), elle se transforme en celle-ci :

$$Lx'^2+L'y'^2+L''z'^2+2My'z'+2M'x'z'+2M''x'y'=H'.$$

Or, pour que la surface soit rapportée à trois plans diamétraux conjugués entre eux, il faut qu'on ait (art. 94) :

$$M = 0, \qquad M' = 0, \qquad M'' = 0.$$

Ces trois équations ne déterminent que trois des six constantes qui sont nécessaires pour passer au système de coordonnées obliques ; donc, la surface du second degré a une infinité de plans diamétraux conjugués entre eux.

103. A chaque plan diamétral correspond un diamètre *conjugué* parallèle aux cordes que ce plan divise en parties égales. *Le plan tangent à la surface du second degré mené par l'extrémité de ce diamètre, est parallèle au plan diamétral.* Pour le démontrer, soient :

$$(1) \quad x = \alpha z, \qquad (2) \quad y = \beta z,$$

les équations d'un diamètre ;

$$(3) \quad x = \alpha z + \alpha', \quad (4) \quad y = \beta z + \beta',$$

les équations d'une corde parallèle à ce diamètre. On aura les coordonnées du point d'intersection de cette corde et de la surface du second degré représentée par l'équation (E) (art. 102), en substituant dans cette équation, pour x et y, les valeurs données par les équations (3), (4). Après la substitution, on a :

$$\left.\begin{array}{l} z^2(A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta) \\ + 2z(A\alpha\alpha' + A'\beta\beta' + B\beta' + B'\alpha + B''(\alpha'\beta + \alpha\beta')) \\ + A\alpha'^2 + A'\beta'^2 + 2B''\alpha'\beta' - H \end{array}\right\} = 0,$$

ou, pour abréger,

$$Fz^2 + 2Gz + K = 0.$$

Cette équation donne les valeurs Z et Z' de l'ordonnée z qui correspond aux deux points d'intersection de la corde et de la surface. En la résolvant, on a :

$$Z = -\frac{G}{F} + \sqrt{\frac{G^2}{F^2} - K}, \quad Z' = -\frac{G}{F} - \sqrt{\frac{G^2}{F^2} - K}.$$

Désignant par x, y, z les coordonnées du point milieu de la corde, on a pour ce point :

$$(3) \qquad x = \alpha z + \alpha',$$

$$(4) \qquad y = \beta z + \beta', \qquad z = \frac{Z + Z'}{2} = -\frac{G}{F},$$

ou mettant pour F et G les quantités qu'elles représentent :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} z\,(A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta) \\ + A\alpha\alpha' + A'\beta\beta' + B\beta' + B'\alpha' + B''(\alpha'\beta + \alpha\beta') \end{array} \right\} = 0.$$

Le milieu de la corde qui correspond aux constantes α', β' est dans le plan diamétral qui divise en parties égales les parallèles à cette corde ; d'où il suit qu'en éliminant, des équations (3), (4), (5), les constantes α', β', on aura, pour l'équation du plan diamétral :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x\,(A\alpha + B''\beta + B') \\ + y\,(B''\alpha + A'\beta + B) \\ + z\,(B'\alpha + B\beta + A'') \end{array} \right\} = 0.$$

Le diamètre parallèle aux cordes que ce plan divise en parties égales, coupe la surface en un point x', y', z', ou $-x'$, $-y'$, $-z'$, pour lequel on a :

$$x' = \alpha z', \qquad y' = \beta z';$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \frac{x'}{z'}, \qquad \beta = \frac{y'}{z'}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (6), elle devient :

$$(7) \qquad \left.\begin{array}{r} x\,(Ax' + B''y' + B'z') \\ +\,y\,(B''x' + A'y' + Bz') \\ +\,z\,(B'x' + By' + A''z') \end{array}\right\} = 0.$$

Le plan représenté par cette équation (7) est évidemment parallèle au plan qui touche la surface au point x', y', z', et qui a pour équation (art. 98) :

$$\left.\begin{array}{r} x\,(Ax' + B''y' + B'z') \\ +\,y\,(B''x' + A'y' + Bz') \\ +\,z\,(B'x' + By' + A''z') \end{array}\right\} = H. \qquad (F)$$

Le plan diamétral représenté par l'équation (6) coupe la surface du second degré suivant une courbe : supposons que, par un point x', y', z' de cette courbe, on ait mené le plan tangent représenté par l'équation (F), on aura, pour ce point :

$$(6') \qquad \left.\begin{array}{r} x'(A\alpha + B''\beta + B') \\ +\,y'(B''\alpha + A'\beta + B) \\ +\,z'(B'\alpha + B\beta + A'') \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation (6′) exprime que, pour tous les points de la section diamétrale, le plan tangent est parallèle à la droite $x = \alpha z$, $y = \beta z$; car, pour satisfaire à cette condition, il faut transporter le plan tangent, parallèlement à lui-même, jusqu'à l'origine des coordonnées, et écrire qu'étant dans cette position, il contient la droite qui a pour équations :

$$x = \alpha z, \qquad y = \beta z.$$

Mettant dans l'équation (7) αz pour x, et βz pour y, elle devient :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\,(Ax' + B''y' + B'z') \\ +\,\beta\,(B''x' + A'y' + Bz') \\ +\,B'x' + By' + A''z' \end{array}\right\} = 0,$$

qui est identique avec l'équation (6′).

104. Il suit, de l'article précédent, que trois plans diamétraux conjugués d'une surface du second degré, sont parallèles aux trois plans tangens menés par les extrémités des diamètres, intersections des plans diamétraux conjugués. On a vu (art. 102) que des six constantes relatives à un système de plans diamétraux conjugués, trois sont arbitraires : on peut déterminer ces constantes, en se donnant à volonté un plan diamétral et un diamètre contenu dans ce plan diamétral. En effet, des deux plans

diamétraux conjugués à celui qui est donné, l'un est parallèle au plan qui touche la surface à l'extrémité du diamètre donné ; l'autre passe par ce diamètre, et par le diamètre parallèle aux cordes que le plan diamétral donné divise en parties égales.

105. De tous les systêmes en nombre infini de plans diamétraux conjugués, *il n'y en a qu'un seul pour lequel ces plans soient perpendiculaires entre eux.* On nomme les droites intersections de ces plans *axes principaux de la surface.* Ces axes sont dirigés suivant les normales qui passent par les sommets de la surface. En effet, on a démontré (art. 98 et 99) que le plan tangent a l'extrémité de la normale représentée par les équations $x = \lambda z$, $y = \mu z$, avait pour équation :

$$\left.\begin{array}{r} x(A\lambda + B''\mu + B') \\ + y(B''\lambda + A'\mu + B) \\ + z(B'\lambda + B\mu + A'') \end{array}\right\} = H. \qquad (F)$$

Il résulte de l'article 103 que ce plan tangent est parallèle au plan diamétral qui divise en parties égales les cordes parallèles à la normale ; donc les équations de condition (g) (art. 99) qui expriment que le diamètre représenté par les équations $x = \lambda z$, $y = \mu z$, est perpendiculaire au plan tangent, expriment en même tems que ce diamètre est perpendiculaire au plan diamétral qui lui est conjugué. Or, les valeurs de λ et μ qui déterminent les directions de ce diamètre, sont données par les équations du troisième degré (H) et (K) (art. 99), dont chacune a au moins une racine réelle; donc la surface du second degré a au moins un diamètre perpendiculaire au plan diamétral qui lui est conjugué. Prenant ce diamètre pour l'axe des x', rapportons la surface à trois axes rectangulaires des x', des y', des z', ces deux derniers axes étant pris arbitrairement dans le plan des $y'z'$ perpendiculaire à l'axe des x'.

L'équation de la surface, dans cette hypothèse, sera nécessairement de la forme :

$$x'^2 + Ny'^2 + N'z'^2 + N''y'z' = n.$$

Transformant les coordonnées rectangulaires y', z', en d'autres coordonnées rectangulaires $y_,$, $z_,$ au moyen des formules connues (*Géom. analyt.* de Biot, 5e. édit., pag. 92) :

$$y' = y_, \cos\alpha - z_, \sin\alpha,$$
$$z' = y_, \sin\alpha + z_, \cos\alpha,$$

on a, pour le coefficient de $y'z'$:

$$2(N'\sin\alpha\cos\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha) + N''(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

α étant l'angle (y', y) des axes des y' et des y.

Égalant ce coefficient à zéro, on a, pour déterminer l'angle α, l'équation suivante :

$$2 \sin\alpha \cos\alpha\,(N' - N) + N''\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

ou

$$(N' - N) \sin 2\alpha + N'' \cos 2\alpha = 0;$$

ou

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{N''}{N - N'},$$

valeur qui est toujours réelle, puisqu'elle est donnée par une équation du premier degré. D'où il suit que les trois axes des x', des $y_{,}$, des $z_{,}$ sont réels, et l'équation de la surface du second degré, rapportée à ces trois axes, est nécessairement de la forme :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1.$$

Ayant démontré que les trois axes principaux de la surface du second degré sont réels, et les quantités λ, μ qui déterminent la direction de ces axes, étant données par les équations (H), (K) de l'article 103, on doit conclure que les trois racines de chacune de ces équations sont réelles.

106. Les trois axes principaux coupent la surface en six points, qui sont les sommets

de cette surface. Les parties de ces axes, comprises entre les sommets opposés sont les *diamètres principaux de la surface.* L'une quelconque des trois équations (G) (art. 99) donne les valeurs des carrés des demi-diamètres principaux qui correspondent aux valeurs réelles de λ et μ. Nommant a, b, c ces demi-diamètres, les coefficiens P, P', P'' de l'équation $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1$ (art. 103) sont respectivement égaux aux quantités $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ $\frac{1}{c^2}$.

De la Relation entre les trois diamètres principaux rectangulaires d'une surface du second degré, et les trois diamètres conjugués de cette surface, déterminés par les angles que ces diamètres font entre eux.

107. On a vu (art. 102) que la surface du second degré étant rapportée à trois diamètres conjugués, son équation était de la forme :

$$Lx^2 + L'y^2 + L''z^2 = H'.$$

Nommant $2f$, $2g$, $2h$ les longueurs des diamètres conjugués, parallèles aux axes obliques des x, des y, des z, cette équation devient :

$$g^2h^2x^2 + h^2f^2y^2 + f^2g^2z^2 = f^2g^2h^2. \qquad (1)$$

Concevons une sphère du rayon R, concentrique à la surface du second degré, et tangente à cette surface en un point (x', y', z'). La distance du centre de la sphère au point de contact, est (art. 62) :

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(f,g)+2y'z'\cos(g,h)+2z'x'\cos(h,f)};$$

d'où il suit que l'équation de la sphère rapportée aux axes obliques, est :

$$(2)\quad x^2+y^2+z^2+2xy\cos(f,g)+2yz\cos(g,h)+2zx\cos(h,f)=R^2.$$

Par le point (x', y', z') commun à la sphère et à la surface du second degré, menons des plans tangens à ces surfaces, et les équations de ces plans seront (art. 98) :

$$(3)\left\{\begin{aligned} &x\,\{x'+y'\cos(f,g)+z'\cos(h,f)\}\\ &+y\,\{y'+x'\cos(f,g)+z'\cos(g,h)\}\\ &+z\,\{z'+y'\cos(g,h)+x'\cos(h,f)\}\end{aligned}\right\}=R^2,$$

$$(4)\qquad g^2h^2xx'+h^2f^2yy'+f^2g^2zz'=f^2g^2h^2.$$

Supposons maintenant que le point (x', y', z') soit l'extrémité de l'un des trois diamètres principaux rectangulaires ; les plans tangens menés par ce point coincideront, et les équations (3), (4) seront identiques. Egalant les coefficiens de x, y, z dans ces deux équations, on aura :

$$\frac{x' + y' \cos(f, g) + z' \cos(h, f)}{R^2} = \frac{x'}{f^2},$$

$$\frac{y' + x' \cos(f, g) + z' \cos(g, h)}{R^2} = \frac{y'}{g^2},$$

$$\frac{z' + y' \cos(g, h) + x' \cos(h, f)}{R^2} = \frac{z'}{h^2}.$$

Les équations du diamètre principal qui passe par le point (x', y', z') étant :

$$\frac{x}{z} = \frac{x'}{z'}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{y'}{z'},$$

soient $\frac{x'}{z'} = \varphi$, $\frac{y'}{z'} = \psi$, et les trois équations précédentes deviendront :

$$(5)\quad f^2 \{ \varphi + \psi \cos(f, g) + \cos(h, f) \} = R^2 \varphi,$$
$$(6)\quad g^2 \{ \psi + \varphi \cos(f, g) + \cos(g, h) \} = R^2 \psi,$$
$$(7)\quad h^2 \{ 1 + \psi \cos(g, h) + \varphi \cos(h, f) \} = R^2 ;$$

d'où l'on tirera les valeurs de R^2, φ et ψ ; quantités qui déterminent la longueur des trois diamètres principaux rectangulaires, et la direction de ces diamètres par rapport aux trois diamètres conjugués f, g, h.

Éliminant φ et ψ, on obtient l'équation :

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} R^6 - R^4 (f^2 + g^2 + h^2) \\ + R^2 \{ f^2 g^2 \sin^2(f, g) + g^2 h^2 \sin^2(g, h) + h^2 f^2 \sin^2(h, f) \} \\ - f^2 g^2 h^2 \{ 1 - \cos^2(f, g) - \cos^2(g, h) - \cos^2(h, f) - 2\cos(f, g)\cos(g, h)\cos(h, f) \} \end{array} \right\} = 0.$$

Cette équation a pour racines les carrés des demi-diamètres principaux rectangulaires ; en nommant a, b, c ces demi-diamètres, elle sera équivalente à celle-ci :

$$(9)\quad R^6 - R^4(a^2+b^2+c^2)+R^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2=0.$$

Concevons maintenant deux parallélipipèdes construits l'un sur les trois demi-diamètres principaux a, b, c, l'autre sur les trois demi-diamètres conjugués f, g, h ; l'identité des équations (8), (9) établit les relations suivantes (*) entre ces diamètres :

1°. La somme des carrés des trois diamètres principaux est égale à la somme des carrés des trois autres diamètres quelconques conjugués entre eux ;

2°. La somme des carrés des faces des deux parallélipipèdes est constante ;

3°. Les volumes des deux parallélipipèdes sont égaux (art. 59).

Éliminant R^2 et ϕ, ou R^2 et ψ, au moyen des équations (5), (6), (7) on parviendrait à une équation du troisième degré, dont les racines seraient les valeurs de ψ ou de ϕ.

(*) *Voyez* le Journal de l'Ecole polytechnique, 13e. cahier, pag. 281 et 282 ; 16e. cahier, pag. 321 ; Bulletin de la Société philomatique, mai 1813.

§ II.

De la Division des Surfaces du second degré qui ont un centre, en trois genres : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe, l'hyperboloïde à deux nappes.

108. Les plans menés par les trois axes principaux de la surface du second degré, coupent cette surface suivant des courbes du second degré, qu'on nomme les *sections principales* de la surface. Il est évident que ces courbes et la surface ont mêmes diamètres principaux.

L'équation de la surface (art. 97)

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'yz + 2B''xy = H, \quad (E)$$

étant ramenée à la forme :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1, \quad (e)$$

les trois sections principales ont pour équations :

$$\begin{aligned} Px^2 + P'y^2 &= 1, \\ P'y^2 + P''z^2 &= 1, \\ P''z^2 + Px^2 &= 1. \end{aligned}$$

Ayant déja nommé (art. 106) a, b, c les *demi-diamètres principaux* de ces trois sections, l'équation (c) de la surface peut s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{b^2}z^2 = 1. \quad (e')$$

En supposant dans l'équation générale (E), $H=1$, les trois valeurs a^2, b^2, c^2 du carré R^2, sont donnés par l'équation (I) (art. 99), et si, dans cette équation (I), on substitue $\frac{1}{t}$ à la place de l'inconnue s, elle deviendra :

$$\left.\begin{array}{l} t^3 - t^2(A+A'+A'') \\ \quad + t\,(AA'+A'A''+AA''-B^2-B'^2-B''^2) \\ \quad + AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'' \end{array}\right\} = 0, \quad (I')$$

dont les racines sont les valeurs de P, P', P'', coefficiens de x^2, y^2, z^2 dans l'équation (e) ou (e').

109. Les signes des valeurs de $\frac{R^2}{H}$ données par l'équation (I) (art. 99), déterminent le genre de la surface du second degré. Ou ces trois valeurs sont positives ; ou deux sont positives et la troisième négative ; ou l'une est positive et les deux autres négatives ; ou enfin les trois valeurs sont négatives, mais il est évident qu'alors la surface est imaginaire. L'équation (e') devient, pour les trois premiers cas :

$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}z^2=1$, Ellipsoïde, $(e',1)$

$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2-\frac{1}{c^2}z^2=1$, Hyperboloïde à une nappe, $(e',2)$

$\frac{1}{a^2}x^2-\frac{1}{b^2}y^2-\frac{1}{c^2}z^2=1$, Hyperboloïde à deux nappes. $(e',3)$

On déduit les deux dernières équations de la première $(e', 1)$, en supposant d'abord que c devient $c\sqrt{-1}$, et ensuite que b et c deviennent $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$.

En examinant chacune de ces équations séparément, on connaîtra la forme des trois surfaces qu'elles représentent.

Nous avons déja remarqué (art. 100) que lorsque l'une des racines de l'équation (I) (art. 99) serait négative, deux valeurs d'un demi-diamètre principal, deviendraient imaginaires, quoique la droite (art. 105), suivant laquelle se dirigerait le demi-diamêtre, fût toujours réelle; d'où il suit :

1°. Que dans les équations (e') les signes négatifs affectent les carrés des coordonnées parallèles aux diamètres principaux imaginaires;

2°. Dans l'ellipsoïde, les six sommets (art. 100) sont réels; l'hyperboloïde à une nappe a quatre sommets réels, et il n'y en a que deux réels sur l'hyperboloïde à deux nappes.

Toutes les surfaces du second degré qui ont un centre, étant représentées par l'équation (e') :

$$\frac{1}{a^2}x^2 \pm \frac{1}{b^2}y^2 \pm \frac{1}{c^2}z^2 = 1, \qquad (e')$$

la surface du premier degré, ou le plan qui a pour équation :

$$\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z=1\,,$$

passe par les extrémités des trois demi-diamètres principaux a, b, c.

§ III.

Des Surfaces du second degré dépourvues de centre, ou dont le centre est à l'infini.

110. On a vu (art. 97) que l'équation la plus générale des surfaces du second degré, étant :

$$(1)\left\{\begin{array}{c} At^2+A'u^2+A''^2v^2 \\ +2Buv+2B'vt+2B''tu+2Ct+2C'u+2C''v \end{array}\right\}=K,$$

les coordonnées α, β, γ du centre de ces surfaces devenaient infinies, lorsque les constantes des termes à deux dimensions de cette équation générale étaient liées entre elles par l'équation de condition :

$$AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''=0,$$

ou, pour abréger :

$$D=0.$$

Dans ce cas, les diamètres principaux de la surface, qui étaient réels, deviennent infinis; et en effet, le coefficient de s^3, dans l'équation

(I) (art. 99), est égal à D; or, tous les termes de cette équation étant divisés par D, le dernier terme $\frac{1}{D}$, qui est le produit de toutes les racines de l'équation, doit devenir infini; donc, ce coefficient D doit être nul.

111. En transformant (art. 86) les coordonnées rectangulaires t, u, v, en d'autres coordonnées rectangulaires x', y', z' parallèles aux axes principaux (art. 105), on ramenerait l'équation (1) de l'article précédent à la forme :

$$Qx'^2 + Q'y'^2 + Q''z'^2 + 2qx' + 2q'y' + 2q''z' = k.$$

Elle comprend toutes les surfaces du second degré, celles qui ont un centre, et celles dont le centre est à l'infini; mais lorsqu'elles ont un centre, les coordonnées de ce point sont (art. 101) $-\frac{q}{Q}$, $-\frac{q'}{Q'}$, $-\frac{q''}{Q''}$; d'où il suit que, pour les surfaces dont le centre est à l'infini, l'un au moins des trois coefficiens Q, Q', Q'' est nécessairement nul, et cette condition est équivalente à celle qu'on exprime au moyen de l'équation de l'article 110 :

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.$$

Supposons qu'on ait $Q = 0$, c'est-à-dire que la coordonnée du centre parallèle à l'axe des x', soit infinie, l'équation de la surface deviendra :

$$Q'y'^2 + Q''z'^2 + 2qx' + 2q'y' + 2q''z' = k,$$

et en transportant l'origine des coordonnées en un point déterminé de la surface, on pourra la réduire à celle-ci :

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0.$$

En effet, soient l, m, n les coordonnées de ce point respectivement parallèles aux x', y', z': on aura pour ce point :

$$(1) \quad Q'm^2 + Q''n^2 + 2ql + 2q'm + 2q''n = k.$$

Transformant les coordonnées x', y', z' en $x+l$, $y+m$, $z+n$, on obtiendra par la substitution :

$$Q'y^2 + Q''z^2 + 2qx + 2y(Q'm + q') + 2z(Q''n + q'') = 0.$$

Le coefficient de x qui ne renferme ni l, ni m, ne peut pas devenir nul par des valeurs particulières de ces quantités; d'où il suit que les deux termes qui contiennent le carré et la première puissance de l'une des coordonnées, telles que x, ne peuvent disparaître en même tems, à moins qu'on ne suppose la surface du second degré réduite à un cylindre dont les arêtes seraient perpendiculaires au plan des yz, et qui auraient pour base une courbe du second degré située dans ce plan.

En égalant à zéro les coefficiens de y et de z, on aura :

$$(2) \qquad m = -\frac{q'}{Q'}, \qquad\qquad (3) \qquad n = -\frac{q''}{Q''}.$$

Des trois équations (1), (2), (3), on tirera les valeurs des coordonnées l, m, n du point de la surface que l'on doit prendre pour origine des coordonnées, afin que l'équation générale des surfaces du second degré qui n'ont pas de centre, soit réduite à la forme la plus simple :

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0. \qquad (f)$$

De la Division des Surfaces du second degré dont le centre est à l'infini, en deux genres : le paraboloïde elliptique, *et le* paraboloïde hyperbolique.

112. La combinaison des signes de l'équation (f), $pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0$, ne présente que deux cas : ou le coefficient p' de y^2 est positif, ou il est négatif : s'il est positif, l'équation

$$(f', 1) \qquad pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0,$$

représente un *paraboloïde elliptique*; si ce coefficient est négatif, l'équation

$$(f', 2) \qquad pz^2 - p'y^2 - 4pp'x = 0,$$

appartient au *paraboloïde hyperbolique*. Nous déduirons de ces deux équations $(f', 1)$, $(f', 2)$, tout ce qui est relatif à la forme de ces deux surfaces, et nous ferons connaître les propriétés qui les distinguent.

Des Plans tangens, et des Plans diamétraux des surfaces du second degré qui n'ont pas de centre.

113. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point de la surface représentée par l'équation (f) (art. 111) :

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0. \qquad (f)$$

On a pour ce point :

$$pz'^2 + p'y'^2 - 4pp'x' = 0.$$

Une sécante qui passe par le même point x', y', z', a pour équations :

$$x - x' = l(z - z'), \qquad y - y' = m(z - z').$$

Elle coupe la surface en un autre point x'', y'', z'' pour lequel on a les quatre équations suivantes :

$$pz''^2 + p'y''^2 - 4pp'x'' = 0,$$
$$pz'^2 + p'y'^2 - 4pp'x' = 0,$$
$$x'' - x' = l(z'' - z'), \quad y'' - y' = m(z'' - z').$$

Retranchant la seconde de la première, on a :

$$p(z''^2 - z'^2) + p'(y''^2 - y'^2) - 4pp'(x'' - x') = 0.$$

Celle-ci devient, au moyen des troisième et quatrième équations :

$$(1) \qquad p(z'' + z') + mp'(y'' + y') - 4lpp' = 0.$$

lorsque la sécante devient tangente :

$$z'' = z', \qquad y'' = y', \qquad x'' = x',$$

et les deux constantes l et m sont liées entre elles par l'équation :

$$pz' + mp'y' - 2lpp' = 0.$$

Substituant dans cette équation, pour l et m, leurs valeurs $\dfrac{x - x'}{z - z'}$ et $\dfrac{y - y'}{z - z'}$, on obtient l'équation du plan tangent :

$$pz'(z - z') + p'y'(y - y') - 2pp'(x - x') = 0;$$

et en réduisant au moyen de l'équation (f) :

$$pzz' + p'yy' - 2pp'(x + x') = 0. \qquad (g)$$

La corde qui coupe la surface du second degré aux points x', y', z' et x'', y'', z'', étant divisée en deux parties égales, le point milieu appartient au plan diamétral qui divise en deux parties égales toutes les cordes de la surface parallèles à la droite $x = lz$, $y = mz$; soient x, y, z les coordonnées de ce point milieu, on a évidemment :

$$\frac{z' + z''}{2} = z, \quad \frac{y' + y''}{2} = y, \quad \frac{x' + x''}{2} = x.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient :

$$pz + mp'y - 2\,lpp' = 0. \qquad (h)$$

Cette équation ne contenant pas la variable x, on doit conclure que tous les plans diamétraux de la surface du second degré qui n'a pas de centre, sont perpendiculaires au plan des yz; un second plan diamétral qui diviserait en deux parties égales les cordes parallèles à une droite des équations $x = l'z$, $y = m'z$, aurait pour équation :

$$pz + m'p'y - 2\,l'pp' = 0. \qquad (h')$$

Supposons que le second plan diamétral soit parallèle aux cordes que le premier divise en parties égales; et réciproquement, que le premier soit parallèle aux cordes que le second divise en parties égales, on aura l'équation de condition :

$$p + mm'p' = 0. \qquad (h'')$$

Cette équation étant satisfaite, les deux plans diamétraux qui ont pour équations (h) et (h'), se coupent suivant une droite parallèle à l'axe des x, qui rencontre la surface en un point ; ayant pris ce point pour origine des coordonnées, et menant par cette origine, des parallèles aux cordes que les plans diamétraux divisent en parties égales, ces deux parallèles et la parallèle à l'axe des x, sont les axes d'un système de coordonnées obliques, tel qu'en y rapportant la surface, l'équation sera de la même forme que l'équation (f). Nommant t la coordonnée parallèle à l'axe primitif des x; u et v les coordonnées parallèles aux cordes que les plans diamétraux divisent en parties égales, on aura :

$$\pi v^2 + \pi' u^2 - 4\pi\pi' t = 0,$$

équation de la surface, dans laquelle π et π' sont les coefficiens constans de u^2 et v^2.

Le plan tangent à la surface, mené par l'origine des coordonnées obliques coupe les plans diamétraux représentés par les équations (h) et (h'), suivant des droites qui sont les axes des coordonnées u et v. Lorsque ces plans sont perpendiculaires entre eux, on a (art. 28), pour équation de condition :

$$p^2 + mm'p'^2 = 0 ;$$

ou à cause de l'équation (h'') :

$$mm'(p - p') = 0.$$

Cette équation est satisfaite de trois manières, en faisant, 1°. $m = 0$, 2°. $m' = 0$, 3°. $p - p' = 0$. On a $m = 0$, ou $m' = 0$, selon que l'axe des u, ou l'axe des v se confond avec l'axe des z.

Dans le cas particulier où l'on aurait $p = p'$, l'équation $mm'(p - p') = 0$ serait satisfaite, quelle que fût la valeur de m ou m'. Ce qui signifie que la surface du second degré est de révolution, et que tous les plans passant par l'axe de révolution divisent en deux parties égales les cordes de la surface, perpendiculaires à ces plans. En général, les surfaces du second degré, dont le centre est à l'infini, n'ont que deux plans diamétraux perpendiculaires aux cordes que ces plans divisent en parties égales ; elles n'ont qu'un seul sommet réel qui est sur la normale intersection de ces plans diamétraux.

Des Caractères auxquels on peut reconnaître qu'une Equation du second degré à trois variables représente une surface de révolution.

114. On pourrait s'assurer *à priori* qu'une courbe du second degré, en tournant autour de l'un de ses axes principaux, engendrerait une surface du second degré. L'équation de cette surface serait nécessairement comprise dans l'équation générale (art. 95) :

$$(1)\left\{\begin{array}{c} At^2+A'u^2+A''v^2 \\ +2Buv+2B'vt+2B''tu+2Ct+2C't+2C''v \end{array}\right\}=K.$$

On propose de trouver les relations qui existent entre les coefficiens constans de cette équation, pour qu'elle représente une surface de révolution ?

Pour résoudre cette question, nous remarquerons que l'axe de révolution d'une surface du second degré ne diffère pas de l'un des trois axes principaux de cette surface, dont on a déterminé (art. 99) la direction au moyen des deux équations suivantes (g) :

$$A\lambda + B''\mu + B' = \lambda(B'\lambda + B\mu + A''), \quad (g,1)$$
$$B''\lambda + A'\mu + B = \mu(B'\lambda + B\mu + A''), \quad (g,2)$$

$t = \lambda v$, $u = \mu v$ étant les équations de l'axe principal, ou d'une parallèle à cet axe.

En effet, supposons que la surface du second degré ait un axe de révolution ; deux plans quelconques perpendiculaires entre eux, qui passent par cet axe, sont conjugués au plan diamétral perpendiculaire à cet axe ; or, des trois droites intersections de trois plans diamétraux perpendiculaires et conjugués entre eux, l'une d'elles est un *axe principal* de la surface ; donc, cet axe, et l'axe de révolution s'il existe, doivent coïncider.

Prenant cet axe de révolution pour l'un des trois axes principaux, les deux autres axes sont indéterminés, puisqu'ils peuvent tourner dans le plan diamétral perpendiculaire à l'axe de révolution.

Les valeurs de λ et μ, données par les équations (g) ne peuvent être indéterminées que dans le cas où ces équations ont un facteur commun ; or, chacune d'elles a un facteur linéaire qui donne la valeur de λ ou de μ correspondant à l'axe de révolution ; donc le facteur commun aux deux équations, est linéaire. Ce facteur commun doit exprimer que les deux autres axes principaux sont dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

Soient l et m les constantes qui déterminent la direction de l'axe de révolution, ensorte que cet axe, ou sa parallèle, ait pour équations : $t=lv$, $u=mv$. Soient, de plus, $t=\lambda v$, $u=\mu v$, les équations de l'un des trois axes principaux, perpendiculaire à l'axe de révolution ; ces deux axes étant perpendiculaires entre eux, on a pour condition (art. 13) :

$$1+l\lambda+m\mu=0.$$

Les équations (g), d'où l'on doit tirer la valeur l de λ, et la valeur m de μ, doivent donc être identiques avec les équations suivantes :

$$(\lambda-l)(1+l\lambda+m\mu)=0, \qquad (g',1)$$

$$(\mu-m)(1+l\lambda+m\mu)=0. \qquad (g',2)$$

En identifiant ces équations, on détermine les valeurs des constantes l et m, et on obtient les équations de condition qui expriment que l'équation (1) appartient à une surface de révolution.

Pour comparer les équations (g) et (g'), écrivons-les ainsi :

$$\lambda^2+\frac{B}{B'}\lambda\mu+\frac{\lambda(A''-A')}{B'}-\frac{B''}{B'}\mu-1=0, \qquad (g,1)$$

$$\lambda^2+\frac{m}{l}\lambda\mu+\frac{\lambda(1-l^2)}{l}-\quad m\mu-1=0, \qquad (g',1)$$

$$\mu^2+\frac{B'}{B}\lambda\mu+\frac{\mu(A''-A')}{B}-\frac{B''}{B}\lambda-1=0, \qquad (g,2)$$

$$\mu^2+\frac{l}{m}\lambda\mu+\frac{\mu(1-m^2)}{m}-\quad l\lambda-1=0, \qquad (g',2)$$

Identifiant, terme à terme, les équations $(g, 1)$ et $(g', 1)$, $(g, 2)$ et $(g', 2)$, on a six équations de condition qui se réduisent aux quatre suivantes :

$$l=\frac{B''}{B},\ m=\frac{B''}{B'},\ \frac{1-l^2}{l}=\frac{A''-A}{B'},\ \frac{1-m^2}{m}=\frac{A''-A'}{B};$$

d'où il suit que l'axe de révolution, s'il existe, ou sa parallèle, a pour équations :

$$t=\frac{B''}{B}v,\qquad u=\frac{B''}{B'}v,\qquad \frac{t}{u}=\frac{B'}{B};$$

et cet axe existera, lorsque les équations de condition suivantes seront satisfaites :

$$BB''(A''-A)-B'(B''^2-B^2)=0, \qquad (a)$$
$$B'B''(A''-A')-B(B''^2-B'^2)=0. \qquad (b).$$

La direction de l'axe de révolution ne dépend que des trois coefficiens B, B', B''. Il est facile de voir que si l'équation (1) est privée d'un seul des rectangles uv, vt, tu, la surface ne peut être de révolution ; car, en supposant $B=0$, par exemple, on aurait $B'B''^2=0$, qui donne ou $B'=0$, ou $B''=0$; c'est-à-dire que deux rectangles disparaîtraient, ce qui est contre l'hypothèse.

Supposons maintenant deux des trois coefficiens B, B', B'' nuls ; soient, par exemple, $B=0$, $B'=0$, on tirerait des équations (a) et (b)

$$\frac{B'}{B}=\frac{(A''-A)}{B''},\qquad \frac{B'}{B}=\frac{B''}{A''-A'}.$$

Dans ce cas, l'axe de révolution serait parallèle au plan des (tu), et les deux équations (a) et (b) se réduiraient à celle-ci :

$$B''^2=(A''-A)(A''-A').$$

Si on suppose de plus $B''=0$, cette dernière équation fait voir qu'on a nécessairement ou $A''=A$, ou $A''=A'$; c'est-à-dire que lorsque les trois rectangles uv, vt, tu manquent dans l'équation générale, la surface ne peut être de révolution, à moins que deux des trois coefficiens A, A', A'' ne soient égaux et de même signe. Cette condition étant satisfaite, l'axe de révolution se confondra avec l'un des axes des coordonnées t, u, v, ou avec une parallèle à cet axe, qui, dans ce cas, (art. 111) est elle-même parallèle à l'un des axes principaux (*).

L'axe de révolution doit passer par le centre de la surface, dont les coordonnées α, β, γ (art. 97) sont connues; d'où il suit que cet axe a pour équations :

$$t-\alpha=\frac{B''}{B}(v-\gamma),\qquad u-\beta=\frac{B''}{B}(v-\gamma).$$

(*) Voyez la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, article de M. Bourdon, tom. II, pag. 196.

§ IV.

De la Génération des Surfaces du second degré, et des Sections principales de ces Surfaces.

De l'Ellipsoïde.

115. L'ellipsoïde ayant (art. 109) pour équation :

$$b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

on aura, en faisant successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, les équations suivantes des trois sections principales :

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$(2) \qquad c^2x^2 + a^2z^2 = a^2c^2,$$
$$(3) \qquad c^2y^2 + b^2z^2 = b^2c^2,$$

Ayant mené trois droites perpendiculaires entre elles (fig. 1, Pl. 2) SS', $S''S'''$, $S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ qui se coupent en un point (O, O'), on prendra sur ces droites, à partir du point (O, O') des parties égales aux demi-diamètres principaux de la surface a, b, c, et on construira des ellipses qui aient pour demi-diamètres principaux, deux des trois quantités a, b, c. La première ellipse $SS'S''S'''$ située dans le plan des xy a pour équation (1) :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Les équations (2) et (3) appartiennent aux ellipses $SS'S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ et $S''S'''S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ situées dans les plans des xz et des yz.

Lorsque deux des trois diamètres principaux $2a$, $2b$, $2c$ sont égaux entre eux, l'ellipsoïde est de revolution autour du troisième diamètre. Enfin, lorsque ces trois diamètres sont égaux entre eux, l'ellipsoïde devient une sphère.

De l'Hyperboloïde à une nappe.

116. Soient (fig. 2, Pl. 2) les trois droites rectangulaires SS', $S''S'''$, $S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ qui ont pour longueurs, les diamètres principaux réels $2a$, $2b$, $2c$ d'un ellipsoïde. L'ellipse $SS'S''S'''$ construite sur les droites $2a$, $2b$, comme diamètres principaux, et les hyperboles qui ont pour axes principaux l'une les droites SS', $S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ égales à $2a$ et $2c$, et l'autre les droites $S''S'''$, $S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ égales à $2b$ et $2c$, sont les trois sections principales de l'hyperboloïde à une nappe. Cette surface ayant (art. 109) pour équation :

$$b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

ou

$$\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 - \frac{1}{c^2}z^2 = 1,$$

les équations des trois sections principales situées dans les plans des xy, des xz et des yz, sont :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$c^2x^2 - a^2z^2 = a^2c^2,$$
$$c^2y^2 - b^2z^2 = b^2c^2.$$

Tous les plans parallèles au plan des xy coupent cet hyperboloïde suivant des ellipses semblables à la section principale du plan des xy : en dessus et en dessous de cette section, les ellipses augmentent en grandeur ; d'où il suit que l'hyperboloïde ne comprend qu'une seule nappe qui s'étend indéfiniment en dessus et en dessous de la section principale du plan des xy, et qui est divisée par ce plan en deux parties égales et symétriques. Lorsque les deux diamètres réels $2a$, $2b$ sont égaux, la surface est de révolution autour du diamètre ; on la nomme *hyperboloïde de révolution à une nappe*, et elle a pour équation :

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c^2}z^2 = a^2.$$

Si l'une quelconque des trois quantités a^2, b^2, c^2 devient infinie, l'équation de l'hyperboloïde à une nappe se réduit à celle d'un cylindre qui a pour base l'une des trois sections principales, et dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de cette section.

De l'Hyperboloïde à deux nappes.

117. Soient (fig. 3, Pl. 2) SS', $S''S'''$, $S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ les droites rectangulaires $2a$, $2b$, $2c$; les hyperboles construites sur les deux droites SS', $S''S'''$, et sur les deux droites SS', $S^{\text{IV}}S^{\text{V}}$ comme diamètres principaux, sont les sections principales de l'hyperboloïde à une nappe, dont l'équation est (art. 109) :

$$b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

La première hyperbole est la section faite dans cette surface par le plan des xy; la seconde est la section faite par le plan des xz; la troisième section principale qui serait dans le plan des xz, est imaginaire.

Lorsque les deux diamètres imaginaires . . $2b\sqrt{-1}$, $2c\sqrt{-1}$ sont égaux, la surface est un hyperboloïde de révolution à deux nappes, qui a pour axe de révolution le diamètre principal réel $2a$.

Du Paraboloïde elliptique (fig. 4, Pl. 2).

118. Cette surface ayant (art. 112) pour équation :

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0, \qquad (f)$$

les équations de ses trois sections principales, qu'on obtient en faisant successivement $z=0$, $y=0$, $x=0$, devienNent :

$$y^2=4px,\quad z^2=4p'x,\quad z=y\sqrt{-\frac{p'}{p}}.$$

Les deux premières sections sont des paraboles dont les branches divergent du même côté de l'espace ; elles ont respectivement pour paramètres p et p'. La troisième section principale qui n'est qu'un point, qui est l'origine des coordonnées, la surface ne diverge que d'un seul côté, au-delà du plan des yz.

Toute section faite dans la surface parallèlement au plan des yz est un ellipse; c'est par cette raison que nous l'avons nommée *paraboloïde elliptique*, et cette dénomination est d'autant plus exacte, que le second paraboloïde ne peut pas être coupé suivant une ellipse (art. 121).

Lorsque les paramètres p et p' sont égaux, l'équation (f) appartient au paraboloïde de révolution, dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe des x.

Si la parabole $z^2=4p'x$ se meut parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole $y^2=4px$, elle engendre le paraboloïde elliptique, car l'équation (f) est le résultat de l'élimination ω entre les deux équations :

$$z^2 = 4p'x - \frac{p'}{p}\omega^2, \qquad y = \omega.$$

L'axe de la parabole mobile prend successivement les positions st, $s't'$, $s''t''$, etc. (fig. 4).

Du Paraboloïde hyperbolique (fig. 5, Pl. 2).

119. Cette surface ayant (art. 112) pour équation :

$$pz^2 - p'y^2 \mp 4pp'x = 0; \qquad (f')$$

les équations de ses trois sections principales qu'on obtient en faisant successivement . . . $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, deviennent :

$$y^2 = \pm 4px, \quad z^2 = \pm 4p'x, \quad z = \pm y\sqrt{\frac{p'}{p}}.$$

Les deux premières sections sont des paraboles, et la troisième est le système de deux lignes droites faisant entre elles un angle qui est divisé en deux parties égales par les axes des y et des z.

Prenant les abscisses x positivement pour la première parabole, les points réels de la section principale $z^2 = \pm 4p'x$ correspondent aux valeurs négatives de x, qui rendent le produit $4p'x$ positif. D'où il suit que les deux paraboles

$y^2 = 4px$, $z^2 = 4p'x$ s'étendent vers deux régions différentes de l'espace, et dans le paraboloïde elliptique, les deux sections divergent dans le même sens.

120. Si la parabole $z^2 = 4p'x$ (l'abscisse x de cette courbe étant négative) se meut parallèlement à elle-même, tandis que son sommet parcourt la parabole $y^2 = 4px$ (x étant positive), la parabole mobile engendre le paraboloïde hyperbolique, car l'équation (f) est le résultat de l'élimination de ω entre ces deux équations :

$$z^2 = \frac{p'}{p}\omega^2 \pm 4p'x, \qquad y = \omega.$$

L'abscisse x d'un point de la surface étant négative, on peut donner à y ou ω telle valeur qu'on voudra, et on aura pour l'ordonnée z une valeur réelle; mais l'abscisse x étant positive, la valeur de z ne sera réelle que dans le cas où l'on aura :

$$\frac{p'}{p}\omega^2 > 4p'x, \qquad \text{ou} \qquad \omega > \sqrt{4px};$$

D'où il suit que le cylindre qui a pour base la parabole $y^2 = 4px$, et dont les arêtes sont perpendiculaires au plan des xy, est circonscrit au paraboloïde hyperbolique, et le touche suivant la parabole $y^2 = 4px$. Les arêtes de ce cylindre sont tangentes à la parabole mobile$\left(z^2 = \frac{p'}{p}\,\omega^2 + 4p'x,\ y = \omega\right)$ qui engendre le paraboloïde.

L'axe de la parabole mobile prend successivement les positions st, $s't'$, etc. (fig. 5), parallèles à la droite SS' prolongement de l'axe SG de la parabole fixe $Ss's''$....

121. Le paraboloïde hyperbolique ne peut pas être coupé par un plan suivant une ellipse, car, quelle que soit l'équation de ce plan, la valeur de x, tirée de cette équation, étant substituée dans l'équation

$$pz^2 - p'y^2 \mp 4pp'x = 0,$$

l'équation en z et y qu'on obtiendra, et qui appartiendra à la projection de la section plane sur le plan des zy, ne contiendra pas de terme en zy; or, le produit de quatre fois le coefficiens de z^2 par le coefficient de y^2 sera nécessairement négatif ou zéro : donc, d'après la théorie des courbes du second degré, une section plane quelconque du paraboloïde hyperbolique et sa projection sur le plan des zy sont des courbes qui ne peuvent pas être fermées. Dans le paraboloïde elliptique, le produit de quatre fois le coefficient de z^2 par le coefficient de y^2 est positif ou nul ; donc ce paraboloïde ne peut pas être coupé par un plan suivant une hyperbole.

122. Théorème. Les surfaces du second dégré étant coupées par des plans parallèles, deux sections quelconques sont des courbes semblables et semblablement placées, c'est-à-dire qu'elles peuvent être considérées comme les sections parallèles d'une surface conique ?

Démonstration. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe rapportée aux axes rectangulaires des x et des y. Nommant α, β les coordonnées d'un point situé par rapport à une seconde courbe, comme l'origine des coordonnées par rapport à la première, l'équation de cette seconde courbe sera :

$$f\left(\frac{x-\alpha}{m}, \frac{y-\beta}{m}\right) = 0,$$

m étant un nombre qui exprime le rapport des lignes homologues des deux courbes. Soient les équations de deux courbes semblables du second degré :

$$(1) \quad Dx^2 + Ey^2 + 2Fxy + 2Gx + 2Hy - 1 = 0,$$
$$(2) \quad D'x^2 + E'y^2 + 2F'xy + 2G'x + 2H'y - 1 = 0,$$

l'équation (2) sera nécessairement de la forme :

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} D\left(\frac{x-\alpha}{m}\right)^2+E\left(\frac{y-\beta}{m}\right)^2 \\ +2F\left(\frac{x-\alpha}{m}\right)\left(\frac{y-\beta}{m}\right) \\ +2G\left(\frac{x-\alpha}{m}\right)+2H\left(\frac{y-\beta}{m}\right)-1 \end{array}\right\}=0.$$

La comparaison, terme à terme, des équations (2) et (3) donne cinq équations, dont trois déterminent les quantités m, α, β ; les deux autres qui expriment que les courbes représentées par les équations (2) et (3), sont semblables et semblablement placées, ne contiennent que les coefficiens des termes de deux dimensions, et se réduisent aux suivantes :

$$(4)\quad \left\{\frac{D}{F}=\frac{D'}{F'},\quad \frac{E}{F}=\frac{E'}{F'},\quad \text{ou}\ \frac{D}{E}=\frac{D'}{E'}.\right\}$$

De ces trois équations (4), l'une quelconque résulte nécessairement des deux autres.

Soit l'équation de la surface du second degré, rapportée à trois plans rectangulaires :

$$(5)\quad \left.\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2 \\ +2Byz+2B'xz+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z-K \end{array}\right\}=0;$$

En coupant cette surface par un plan dont l'équation est :

$$(6) \qquad z = Lx + My + N,$$

la projection de la ligne d'intersection sur le plan des xy a pour équation :

$$(7) \qquad \left.\begin{array}{l} \quad x^2(A + A''L^2 + 2B'L) \\ + \; y^2(A' + A''M^2 + 2BM) \\ + 2xy(B'' + BL + B'M + A''LM) \\ + 2x(C + C''L + N(B' + A''L)) \\ + 2y(C' + C''M + N(B + A''M)) \\ + A''N^2 + 2C''N - K \end{array}\right\} = 0.$$

Or, quelle que soit N, les coefficiens de x^2, y^2 et xy ne varient pas ; donc les équations (7) qui correspondent aux diverses valeurs de N, appartiennent à des courbes pour lesquelles les équations de condition (4) sont satisfaites ; d'où il suit que toutes ces courbes sont semblables et semblablement placées.

Nommant X, Y, Z les coordonnées du centre de la courbe représentées par les équations (6) et (7), on a, pour ce point (art. 101), les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{r} X(A + A''L^2 + 2B'L) + Y(B'' + BL + B'M + A''LM) \\ + C + C''L + N(B' + A''L) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} Y(A' + A''M^2 + 2BM) + X(B'' + BL + B'M + A''LM) \\ + C' + C''M + N(B + A''M) \end{array}\right\} = 0;$$

et à cause de l'équation (6) :

$$N = Z - LX - MY.$$

Éliminant N, on a en X, Y, Z, deux équations linéaires, qui représentent deux plans diamétraux dont l'intersection est un diamètre qui passe par les centres de toutes les sections parallèles au plan dont l'équation (6) est :

$$z = Lx + My + Nz.$$

Il suit de là, 1°. que les courbes d'une surface du second degré situées dans des plans parallèles, sont semblables et semblablement placées ; 2°. que le lieu des centres de ces courbes est un diamètre de la surface, quelle que soit la direction du plan auquel elles sont parallèles.

123. Théorême. Les surfaces du second dégré peuvent être engendrées de deux manières différentes, par un cercle variable de rayon, dont le centre décrit un diamètre de la surface, et dont le plan reste constamment parallèle à lui-même ?

Démonstration. Soit (art. 108) :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1,$$

l'équation des surfaces du second degré qui ont un centre. Concevons une sphère concentrique à la surface du second degré, et rapportée aux mêmes axes. L'équation de cette sphère d'un rayon r, sera :

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

En coupant ces deux surfaces par un plan quelconque, passant par l'origine des coordonnées, l'une des sections est un cercle; l'autre est, en général, une courbe du second degré; le plan qui coupe les deux surfaces peut être dirigé de manière que les deux sections soient circulaires. En effet, soit $z=Lx+My$, l'équation du plan coupant : les projections des deux sections sur le plan des xy auront pour équations :

$$(1)\quad x^2(1+L^2)+y^2(1+M^2)+2LMxy-r^2=0,$$
$$(2)\quad x^2(P+L^2P'')+y^2(P'+M^2P'')+2LMP''xy-1=0,$$

Identifiant ces équations, terme à terme, on a :

$$(3)\qquad \frac{1+M^2}{1+L^2}=\frac{P'+M^2P''}{P+L^2P''},$$

$$(4)\qquad \frac{LM}{1+L^2}=\frac{LMP''}{P+L^2P''},$$

$$(5)\qquad \frac{r^2}{1+L^2}=\frac{1}{P+L^2P''}.$$

Il est évident que les valeurs de L, M

et r, tirées de ces équations, déterminent la position d'un plan qui coupe la sphère et la surface du second degré suivant le même cercle.

L'équation (4) donne $LM=0$; autrement on aurait $P''=P=P'$, c'est-à-dire que la surface du second degré se confondrait avec la sphère. De l'équation $LM=0$, on tire $L=0$, ou $M=0$. Supposons d'abord $M=0$, les équations (3) et (5) donnent :

$$L=\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}, \qquad r=\sqrt{\frac{1}{P'}}.$$

Égalant à zéro le second facteur L, on trouve :

$$M=\sqrt{\frac{P'-P}{P-P''}}, \qquad r=\sqrt{\frac{1}{P}}.$$

Dans l'une ou l'autre hypothèse, la quantité L ou M a deux valeurs; ce qui prouve que la surface du second degré peut être coupée suivant un cercle, par les deux plans $z=\pm Lx$, ou par les deux plans $z=\pm My$, les uns perpendiculaires au plan des xz, et les autres perpendiculaires au plan des yz. Le choix de l'un ou l'autre système de plans dépend de l'hypothèse qu'on a faite sur les grandeurs relatives de quantités P, P', P''. Nommant a, b, c les demi-diamètres principaux, supposons $a > b$, $b > c$; on a (art. 106):

$$P = \frac{1}{a^2} < P' = \frac{1}{b^2} < P'' = \frac{1}{c^2}.$$

124. Les quantités P, P', P'' étant positives pour l'ellipsoïde, les valeurs de L et de r qu'on obtient en faisant $M = 0$, sont réelles. La valeur de M qui résulte de l'hypothèse $L = 0$, est imaginaire; d'où il suit que, pour l'ellipsoïde, on doit prendre le système des deux plans représentés par les équations $z = \pm Lx$.

Les quantités P et P' sont positives pour l'hyperboloïde à une nappe, et la quantité P'' est négative. Les valeurs de L et M deviennent:

$$\sqrt{-\frac{(P' - P)}{P' + P''}} \text{ et } \sqrt{\frac{P' - P}{P + P''}};$$

la valeur de L étant imaginaire, et celle de M étant réelle, il suit que, des deux facteurs de l'équation $LM = 0$, on doit supposer le premier $L = 0$, et prendre pour M et r les valeurs suivantes: $M = \sqrt{\dfrac{P' - P}{P + P''}}$, $r = \sqrt{\dfrac{1}{P}}$.

Ce qui distingue (art. 109) l'hyperboloïde à une nappe de l'hyperboloïde à deux nappes, c'est que pour ce dernier, P étant positif, P' et P''

sont négatifs. Les valeurs de L et M deviennent :

$$\sqrt{\frac{P+P'}{P''-P'}} \text{ et } \sqrt{-\frac{(P+P')}{P+P''}}.$$

Cette dernière quantité étant imaginaire, elle doit être exclue, et en supposant $M=0$, on a :

$$L=\sqrt{\frac{P+P'}{P''-P'}}.$$

A cette valeur réelle de L, correspond pour r, la valeur imaginaire $\sqrt{\frac{-1}{P}}$, ce qui indique que les plans $z=\mp Lx$, sont dans l'espace qui sépare les deux nappes de l'hyperboloïde. Il faut donc prouver qu'un plan parallèle $z=Lx+N$ pourra couper cet hyperboloïde suivant un cercle.

125. Quel que soit ce cercle, on peut le regarder comme l'intersection du plan $z=Lx+N$, et de la sphère $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$. Substituant dans les équations de la sphère et de la surface du second degré, pour z sa valeur $Lx+N$, l'équation de la sphère devient :

$$x^2(1+L^2)+y^2+2x(LN-\alpha)-2\beta y+N^2+\alpha^2+\beta^2-r^2=0. \quad (a)$$

L'équation de l'hyperboloïde à deux nappes étant :

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 1,$$

on aura, par la substitution de la valeur de z :

$$x^2(P - P''L^2) - P'y^2 - 2LNP''x - N^2P'' - 1 = 0. \quad (b)$$

Identifiant, terme à terme, les équations (a) et (b), on a, pour déterminer les quantités L, N, r :

$$\frac{1}{1+L^2} = -\frac{P'}{P - P''L^2}, \quad \text{ou} \quad L = \sqrt{\frac{P+P'}{P''-P'}};$$

$$\beta = 0, \quad \frac{LN - \alpha}{1+L^2} = -\frac{LNP''}{P - P''L^2},$$

$$\frac{N^2 + \alpha^2 - r^2}{1+L^2} = -\frac{(N^2P'' + 1)}{P - P''L^2},$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = -\frac{N\sqrt{(P+P')(P''-P')}}{P'}, \quad r = \frac{\sqrt{N^2P(P''-P')-P'}}{P'}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, elle devient :

$$\left(x + \frac{N\sqrt{(P+P')(P''-P')}}{P'}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{N^2P(P''-P')-P'}{P'^2}. \quad (c)$$

Mettant dans l'équation du plan $z = Lx + N$, pour L sa valeur $\sqrt{\frac{P+P'}{P''-P'}}$, on a :

$$z = x\sqrt{\left(\frac{P+P'}{P''-P'}\right)} + N. \quad (d)$$

Substituant dans l'équation (c), pour N sa valeur tirée de l'équation (d), le résultat de cette élimination sera l'équation de l'hyperboloïde à deux nappes :

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = 1.$$

Si l'on demande le cercle correspondant à un point (x', y', z') de cette surface, on aura par l'équation (d') :

$$N = z' - x'\sqrt{\frac{P + P'}{P'' - P'}}; \qquad (d')$$

et l'équation du plan du cercle demandé sera:

$$z - z' = (x - x')\sqrt{\frac{P + P'}{P'' - P'}}.$$

La seconde équation du cercle sera l'équation (c), dans laquelle on aura mis pour N sa valeur $z' - x'\sqrt{\dfrac{P + P'}{P'' - P'}}$.

126. *Conclusions.* 1°. L'ellipsoïde est coupé suivant un cercle par un plan qui passe par l'axe moyen $2b$, et qui fait, avec le plan des xy, un angle dont la tangente est :

$$\pm\sqrt{\frac{P' - P}{P'' - P'}}, \text{ ou } \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}};$$

2°. L'hyperboloïde à une nappe est coupé suivant un cercle par le plan qui passe par le grand axe $2a$, et qui fait, avec le plan des xy, un angle dont la tangente est :

$$\pm\sqrt{\frac{P'-P}{P+P''}}, \text{ ou } \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}};$$

3°. Le plan diamétral parallèle aux sections circulaires de l'hyperboloïde à deux nappes, passe par l'axe moyen $2b$, et fait, avec le plan des xy, un angle dont la tangente est :

$$\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}};$$

4°. Les cercles d'une surface du second degré sont (art. 122) dans des plans parallèles, et la ligne qui passe par les centres de ces cercles, est un diamètre de la surface.

127. Examinons maintenant les surfaces du second degré qui n'ont pas de centre, et qui sont comprises (art. 111), dans l'équation $pz^2+py^2-4pp'x=0$. Un calcul semblable à celui de l'art. 125, fait voir que cette équation est équivalente à deux systêmes d'équations (e) et (f), ou (e') et (f') :

$$\left\{\begin{array}{ll} (x-N)^2+y^2+z^2=4px, & (e) \\ x-N=z\sqrt{\frac{p-p'}{p'}}, & (f) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-2\sqrt{p(p'-p)})^2+z^2=4p'(\alpha+p-p'), & (e')\\ x-\alpha=y\sqrt{\dfrac{p'-p}{p}}-2(p'-p). & (f')\end{cases}$$

Dans le premier système, l'équation (e) appartient à une sphère qui a son centre sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à $N+2p$, et d'un rayon $r=2\sqrt{p(N+p)}$, ensorte que l'équation de cette sphère, avant la réduction, serait :

$$(x-N-2p)^2+y^2+z^2=4p(N+p).$$

Par l'élimination de N entre les équations (e) et (f), ou de α entre les équations (e'), (f'), on obtient l'équation des deux paraboloïdes du second degré :

$$pz^2 \pm p'y^2 - 4pp'x = 0.$$

Il est à remarquer que lorsque p' change de signe, le coefficient de z dans l'équation (f), et le coefficient de y dans l'équation (f'), sont imaginaires. D'où il suit que des deux paraboloïdes, l'elliptique est le seul qui puisse être engendré par un cercle. Ce qui s'accorde avec la proposition déja démontrée (art. 121).

En supposant que p' ne change pas de signe, et que néanmoins il soit plus grand que p, le coefficient de z dans l'équation (f), est encore imaginaire ; mais le coefficient de y dans l'équation (f'), est réel. Réciproquement, lorsque ce dernier coefficient est imaginaire à cause de $p' < p$, le coefficient de z dans l'équation (f) est réel. D'où il suit que dans le paraboloïde elliptique, représenté par l'équation :

$$px^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0,$$

selon que p' sera plus petit ou plus grand que p, les plans des cercles de cette surface, seront parallèles dans le premier cas au plan dont l'équation est :

$$x = \pm z\sqrt{\frac{p-p'}{p'}};$$

et dans le second, au plan dont l'équation est :

$$x = \pm y\sqrt{\frac{p'-p}{p}}.$$

Les cercles de l'un ou l'autre système étant situés dans des plans parallèles, les centres de ces cercles sont (art. 122) sur un diamètre du paraboloïde ; ce diamètre coupe la surface en un point pour lequel on a :

$$x = \pm(p - p'),$$

Lorsque $p = p'$, ou lorsque le paraboloïde elliptique est de révolution autour de l'ax des x, ces deux systêmes de plans se confondent en un seul, et ils sont tous perpendiculaires à l'axe de révolution.

128. THÉORÊME. Des trois surfaces du second degré, qui ont un centre, l'hyperboloïde à une nappe est la seule qui puisse être engendrée par une droite mobile, et cette droite peut se mouvoir de deux manières pour engendrer le même hyperboloïde?

Démonstration. Soit

$$(1) \qquad y = \alpha x + \beta,$$

l'équation d'un plan perpendiculaire au plan des xy, qui coupe l'hyperboloïde à une nappe suivant une courbe. L'équation de cet hyperboloïde étant (art. 109) :

$$(2) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 1,$$

on élimine y entre ces deux équations, et on obtient l'équation en x et z d'une courbe du second degré :

$$(3) \quad x^2(P + P\alpha^2) + 2P'\alpha\beta x + P'\beta^2 - 1 - P''z^2 = 0,$$

Cette courbe, qui est la projection sur le plan des xz, de l'intersection de l'hyperboloïde à une nappe par le plan qui a pour équation : $y = \alpha x + \beta$, se réduira à deux lignes droites, lorsque ce plan coupera la surface suivant des lignes droites. Donc, dans ce cas, le premier membre de l'équation (3) sera le produit de deux facteurs linéaires, ou la différence de deux carrés, ensorte que l'équation (3) ne différera pas de celle-ci :

$$(4)\quad \left(x\sqrt{P+P'\alpha^2}+\sqrt{P'\beta^2-1}\right)^2-\left(z\sqrt{P''}\right)^2=0.$$

Identifiant les équations (3) et (4), on aura :

$$P'\alpha\beta=\sqrt{(P+P'\alpha^2)(P'\beta^2-1)};$$

d'où l'on tire :

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{1}{P}\alpha^2+\frac{1}{P'}\right)};\quad \sqrt{P'\beta^2-1}=\alpha\sqrt{\frac{P'}{P}}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1) et (4), on obtient le système des deux équations (5) et (6) :

$$\left.\begin{array}{ll}(5) & \left(x\sqrt{P+P'\alpha^2}+\alpha\sqrt{\dfrac{P'}{P}}\right)^2-\left(z\sqrt{P''}\right)^2=0,\\ (6) & y=\alpha x+\sqrt{\dfrac{1}{P}\alpha^2+\dfrac{1}{P'}}.\end{array}\right\}$$

L'équation (5) se décomposant en deux facteurs linéaires :

$$x\sqrt{P+P'\alpha^2}+\alpha\sqrt{\frac{P'}{P}}+z\sqrt{P''}=0,$$

$$x\sqrt{P+P'\alpha^2}+\alpha\sqrt{\frac{P'}{P}}-z\sqrt{P''}=0,$$

l'équation (2) est équivalente à l'un ou l'autre des deux systêmes d'équations :

1er. systême,
$$\left\{\begin{aligned} & x\sqrt{P+P'\alpha^2}+\alpha\sqrt{\frac{P'}{P}}+z\sqrt{P''}=0, \\ & y=\alpha x+\sqrt{\frac{1}{P}\alpha^2+\frac{1}{P'}}; \end{aligned}\right.$$

2e. systême,
$$\left\{\begin{aligned} & x\sqrt{P+P'\alpha^2}+\alpha\sqrt{\frac{P'}{P}}-z\sqrt{P''}=0, \\ & y=\alpha x+\sqrt{\frac{1}{P}\alpha^2+\frac{1}{P'}}. \end{aligned}\right.$$

D'où il suit que l'hyperboloïde à une nappe peut être engendrée par une droite de deux manières différentes. Les équations du premier ou du second systême, appartiennent à la génératrice qui correspond à une valeur déterminée de α. Éliminant α de l'un ou l'autre systême, le résultat de l'élimination est l'équation (2) de l'hyperboloïde à une nappe. Si les quantités P' et P'', ensemble ou séparément, changeaient de signe, la première des équations de ces deux systêmes contiendrait ou un ou deux termes imaginaires ; ce qui prouve que, des trois surfaces du second degré qui ont un centre, l'hyperboloïde à une nappe est la seule qui puisse être engendrée par la ligne droite.

129. Mettant dans les équations (5) et (6), pour P, P', P'', leurs valeurs $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, les équations de la génératrice de l'hyperboloïde sont :

$$(5') \qquad cx\sqrt{a^2\alpha^2+b^2}+a^2c\alpha \pm abz=0,$$

$$(6') \qquad y=\alpha x+\sqrt{a^2\alpha^2+b^2}.$$

Pour éliminer α, on substituera dans l'équation (5'), pour $\sqrt{a^2\alpha^2+b^2}$, sa valeur $y-\alpha x$, et on aura une équation linéaire en α, d'où l'on tirera :

$$\alpha=-\frac{(cxy+abz)}{c(a^2-x^2)}, \qquad \alpha^2=\frac{(cxy+abz)^2}{c^2(a^2-x^2)^2};$$

l'équation (5') donne :

$$c^2x^2(a^2\alpha^2+b^2)=(\mp abz-a^2c\alpha)^2.$$

Substituant dans cette équation, pour α et α^2, leurs valeurs en x, y, z, on obtiendra l'équation de l'hyperboloïde à une nappe :

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2.$$

130. La section principale de cette surface, construite sur les axes $2a$, $2b$ étant (art. 116) :

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;$$

l'équation (6') appartient à la droite qui touche cette section en un point qui dépend de la variable α ; d'où il suit que toutes les droites de l'hyperboloïde, se projettent sur le plan des xy suivant les tangentes fg, hk.... (fig. 2, Pl. 2) de l'ellipse $SS'S''S'''$. La section principale construite sur les diamètres principaux $2a$, $2c$, est (art. 116) :

$$c^2x^2 - a^2z^2 = a^2c^2.$$

En mettant dans l'équation (5'), au lieu de la variable α, la quantité $\frac{b\beta}{\alpha}$, on pourra l'écrire ainsi :

$$cx\sqrt{1+\beta^2} + ac\beta \pm az = 0\,;$$

équation d'une droite qui touche la section principale du plan des xz en un point qui dépend de la variable β : ainsi les droites de l'hyperboloïde se projettent sur le plan des xz, suivant des tangentes à l'hyperbole $SS'S^{\text{iv}}S^{\text{v}}$ (fig. 2, Pl. 2). On démontrerait de la même manière qu'elles se projettent sur le plan des yz, suivant des droites tangentes à l'hyperbole . . $S''S'''S^{\text{iv}}S^{\text{v}}$; ce qui est d'ailleurs évident, en considérant (art. 116) les trois sections principales comme les bases de trois cylindres circonscrits à l'hyperboloïde.

151. Lorsque l'hyperboloïde à une nappe

est de révolution, on a $b=a$, et les équations (5′), (6′) de la droite génératrice de cette surface, deviennent.

$$cx\sqrt{1+\alpha^2}+ac\alpha\pm az=0,$$
$$y=\alpha x+a\sqrt{1+\alpha^2}.$$

L'axe de révolution étant l'axe des z, tout plan perpendiculaire à cet axe coupera la surface suivant un cercle; et en effet, si l'on suppose $z=\zeta$, on aura, en éliminant α des deux équations de la droite génératrice :

$$z=\zeta, \qquad x^2+y^2=\frac{a^2(c^2+\zeta^2)}{c^2};$$

équations du cercle générateur de l'hyperboloïde à une nappe. Mettant dans cette dernière équation, pour ζ, sa valeur z, elle devient :

$$c^2(x^2+y^2)=a^2(c^2+z^2),$$

équation qui ne diffère pas de celle qu'on obtient en supposant dans l'équation de l'hyperboloïde à une nappe $a=b$ (art. 116).

Dans cette même hypothèse de $a=b$, la tangente $\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}$ de l'angle que le plan d'un cercle de cet hyperboloïde, fait avec le plan des xy est nul; ce qui prouve qu'il n'y a qu'une seule manière d'engendrer l'hyperboloïde de révolution par un cercle mobile, et que le plan de ce cercle est constamment perpendiculaire à l'axe de révolution. La double génération par la ligne droite a également lieu pour l'hyperboloïde à une nappe, soit que les deux diamètres principaux réels soient égaux ou inégaux.

132. Supposons qu'on ait mené par l'origine des coordonnées, qui est le centre de l'hyperboloïde à une nappe, une parallèle à la droite génératrice de cette surface, droite qui est représentée par les équations (5′), (6′), les équations de cette parallèle seront :

$$cx\sqrt{a^2\alpha^2+b^2} \pm abz = 0, \qquad y = \alpha x;$$

éliminant α, on a :

$$c\sqrt{a^2y^2+b^2x^2} \pm abz = 0,$$

ou

$$(1) \qquad b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0;$$

équation d'une surface conique, dont le sommet est au centre de l'hyperboloïde à une nappe, et dont la base est une ellipse qui a pour équations :

$$z = c, \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Ce cône est droit par rapport à cette base elliptique, c'est-à-dire que la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de l'ellipse, passe par le centre de cette courbe; il est encore droit, en prenant pour sa base, ou

l'hyperbole, $y = b$, $a^2z^2 - c^2x^2 = a^2c^2$,

ou

l'hyperbole, $x = a$, $b^2z^2 - c^2y^2 = b^2c^2$.

Enfin si l'on coupe ce cône par un plan parallèle à l'un de ses plans tangens, la section est (*) une parabole. Doù il suit,

1°. Que l'équation de l'hyperboloïde à une nappe comprend les équations des cônes qui ont pour base des courbes du second degré;

2°. Que ces cônes peuvent, ainsi que l'hyperboloïde, être coupés suivant des cercles par des plans parallèles à deux plans dont la position est déterminée.

133. Un plan quelconque passant par l'axe des z coupe l'hyperboloïde à une nappe suivant un hyperbole, et le cône, représenté par l'équation (1) (art. 132), suivant le système de deux droites, asymptotes de l'hyperbole. En effet, soit $y = \alpha x$ l'équation de ce plan; substi-

(*) Voyez Supplément de la Géométrie descriptive, art. 72 et 84.

tuant, pour y, sa valeur αx dans l'équation de l'hyperboloïde, on aura :

$$c^2x^2(b^2+a^2\alpha^2)-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2\,;$$

équation d'une hyperbole qui a pour asymptote les droites représentées par l'équation :

$$\pm cx\sqrt{a^2\alpha^2+b^2}+abz=0.$$

C'est par cette raison qu'on regarde le cône représenté par l'équation (1) (art. 132), comme une surface asymptotique de l'hyperboloïde à une nappe.

L'équation (1) du cône asymptotique est ce que devient l'équation de l'hyperboloïde à une nappe, lorsqu'on suppose, dans cette dernière équation, le terme constant nul.

134. *Conclusions.* 1°. L'équation de l'hyperboloïde à une nappe comprend les équations de la surface engendrée par une droite mobile qui tourne autour d'une droite fixe, et de la surface conique du second degré qui a pour base une courbe du second degré ;

2°. Les droites de l'hyperboloïde à une nappe se projettent sur les plans des trois sections principales, suivant des tangentes à ces sections ;

3°. Une quelconque de ces tangentes est la projection de deux droites de la surface;

4°. Il y a sur la surface deux systêmes de lignes droites, et une droite quelconque du premier systême coupe toutes les droites du second systême;

5°. En prenant dans l'un ou l'autre systême, trois droites quelconques, pour servir de directrices à une quatrième droite mobile, cette dernière engendre l'hyperboloïde à une nappe.

135. Pour démontrer directement ces deux dernières propositions, nommons (F), (G), (H) les trois droites fixes qui dirigent la droite mobile, et rapportons la surface que cette droite parcourt à trois axes obliques parallèles aux directrices (F), (G), (H).

Les équations de ces directrices seront:

pour la première (F), $\quad x=f, \quad y=f'$,
pour la seconde (G), $\quad z=g, \quad x=g'$,
pour la troisième (H), $\quad y=h, \quad z=h'$.

Soient les équations de la droite mobile (M):

$$y=Mx+N, \qquad z=M'x+N'.$$

Les quatre quantités M, N, M', N' sont liées entre elles par les trois équations:

$$f'=Mf+N, \qquad g=M'g'+N', \qquad \frac{h-N}{M}=\frac{h'-N'}{M'},$$

qui expriment que la droite mobile (M) rencontre les droites fixes (F), (G), (H).

L'hyperboloïde à une nappe est la seule surface du second degré (en y comprenant les cônes et les cylindres) qui puisse être engendrée de deux manières, ou par la ligne droite, ou par le cercle. Connaissant deux cercles de cette surface, situés dans des plans parallèles, et une droite qui coupe les deux cercles en des points donnés, toutes les positions de la droite génératrice de l'hyperboloïde sont déterminés. En effet, considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe qui est de révolution, et supposons qu'après avoir divisé le plus petit cercle de cet hyperboloïde en parties égales, on ait mené, par les points de division, les droites de la surface; il est évident que ces droites diviseront tous les cercles en parties égales. Concevons maintenant que de tous les points de l'hyperboloïde de révolution, on ait abaissé des perpendiculaires sur le plan du plus petit cercle, et que, par les pieds de ces perpendiculaires, on ait mené des droites parallèles entre elles, et proportionnelles aux perpendiculaires, l'hyperboloïde de révolution deviendra l'hyperboloïde à une nappe; et après ce changement, les droites diviseront encore les cercles de la surface en parties égales. Donc, si l'on donne deux cercles de cette surface, et si l'on divise leurs circonférences en arcs égaux, à partir des points où elles sont rencontrées par la droite donnée, les droites qui joindront les points de division, correspondront aux diverses positions de la droite génératrice de l'hyperboloïde à une nappe.

Ce mode de génération fait voir que la droite qui passe par les centres des cercles d'un hyperboloïde à une nappe, est un diamètre qui ne coupe pas cette surface.

Éliminant, au moyen des cinq dernières équations, les quantités L, M, L', M', et ordonnant par rapport à x, y, z, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} xy(h'-g)+yz(g'-f)+zx(f'-h) \\ +x\,(gh-f'h')+y\,(fg-g'h')+z\,(fh-f'g') \\ +f'g'h'-fgh \end{array}\right\}=0. \quad (a)$$

En substituant aux trois directrices (F), (G), (H) trois autres droites (F'), (G'), (H'), telle que l'une quelconque, (F') par exemple, soit parallèle à la directrice (F), et rencontre les deux autres directrices (G) et (H), les équations de ces droites seront :

pour la première (F'), $\quad x=g'$, $\quad y=h$,
pour la seconde (G'), $\quad z=h'$, $\quad x=f$,
pour la troisième (H'), $\quad y=f'$, $\quad z=g$.

En exprimant que la droite mobile est dirigée par ces trois droites, on parvient à la même équation (a), qui est du second degré entre les trois coordonnées obliques x, y, z, et qui serait encore du second degré, après les avoir transformées en coordonnées rectangulaires, au moyen des formules (art. 80).

136. Théorème. Des deux surfaces du second degré qui n'ont pas de centre, le *Paraboloïde Hyperbolique*, et le *Paraboloïde Elliptique*, le premier peut être engendré de deux manières par une droite mobile assujettie à s'appuyer sur trois droites fixes parallèles à un même plan?

Démonstration. Le paraboloïde hyperbolique ayant (art. 112) pour équation:

$$pz^2 - p'y^2 = 4pp'x, \qquad (f')$$

on le suppose engendré par une droite dont la projection sur le plan des xy a pour équation:

$$x = \alpha y + \beta. \qquad (g)$$

Substituant cette valeur de x dans l'équation (f'), celle-ci devient:

$$z^2 = \frac{p'}{p}(y^2 + 4p\alpha y + 4p\beta).$$

Si cette équation appartient à la projection de la génératrice sur le plan des yz, il faut que le second membre soit un carré parfait, ou qu'on ait :

$$4p^2\alpha^2 = 4p\beta, \qquad \text{ou} \qquad \beta = p\alpha^2,$$

ce qui donne :

$$x = \alpha y + p\alpha^2,$$

$$z = (y + 2p\alpha)\sqrt{\frac{p'}{p}},$$

ou

$$z = -(y + 2p\alpha)\sqrt{\frac{p'}{p}};$$

d'où il suit que le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite de deux manières. La génératrice a pour équations :

$$x = \alpha y + p\alpha^2, \qquad z = (y + 2p\alpha)\sqrt{\frac{p'}{p}};$$

ou (la projection de cette génératrice, sur le plan des xy, ne variant pas) :

$$x = \alpha y + p\alpha^2, \qquad z = -(y + 2p\alpha)\sqrt{\frac{p'}{p}}.$$

Le coefficient de y, dans l'équation :

$$z = \pm(y + 2p\alpha)\sqrt{\frac{p'}{p}},$$

ne contenant pas la variable α, toutes les droites du premier mode de génération, sont parallèles au plan $z = y\sqrt{\frac{p'}{p}}$, et les droites du second système sont parallèles au plan $z = -y\sqrt{\frac{p'}{p}}$ (*). Cette propriété du paraboloïde le distingue de l'hyperboloïde à une nappe, sur lequel on peut aussi tracer deux systèmes de lignes droites ; mais pour cette dernière surface, il n'y a que deux droites qu'on puisse mener parallèlement à un plan donné, et on déterminerait la direction de ces droites, en menant par le sommet du cône asymptotique (art. 132 et 133) un plan parallèle au plan donné.

137. Pour s'assurer que les équations

$$x = \alpha y + p\alpha^2, \qquad z = \pm(y + 2p\alpha)\sqrt{\frac{p'}{p}},$$

(*) Si on divise deux côtés opposés (fig. *a*, Pl. 3), *AB*, *CD* d'un quadrilatère gauche *ABCD* en des points *I* et *K*, tels qu'on ait : $\frac{AI}{BI} = a \cdot \frac{DK}{CK}$, *a* étant un nombre donné, la droite *IK* engendre l'hyperboloïde à une nappe, et lorsque $a = 1$, elle engendre le paraboloïde hyperbolique. (Voyez la Correspondance sur l'Ecole polytechnique, tom. 2, pag. 446. Article de M. Chasles.)

appartiennent à la droite génératrice du paraboloïde, on éliminera la variable α, qui correspond à une position déterminée de la génératrice. Le résultat de l'élimination sera léquation du paraboloïde :

$$pz^2 - p'y^2 = 4pp'x.$$

Changeant le signe de p', le coefficient $\sqrt{\frac{p'}{p}}$ de y est imaginaire ; ce qui prouve que le paraboloïde elliptique ne peut pas être engendré par la ligne droite ; et en effet, on a prouvé (art. 121) que la ligne d'intersection de cette surface et d'un plan ne peut être ni une hyperbole, ni le système de deux lignes droites, qui est un cas particulier de l'hyperbole.

138. On remarquera que l'équation. . . . $x = \alpha y + p\alpha^2$ appartient à la tangente de la parabole $y^2 = 4pp'x$. D'où il suit que les droites du paraboloïde hyperbolique se projettent 1°. sur le plan des xy, suivant les tangentes ST, fg, hk, lm..... de la parabole Ss'... (fig. 5, Pl. 2) ; 2°. sur le plan des yz, suivant les parallèles $O''t$, $f''g''$, $h''k''$..., ou suivant les parallèles à la droite $O''t'$, qui fait

avec l'axe des z un angle $t'O''h''$ égal à l'angle $h''O''t$, dont la cotangente est $\sqrt{\frac{p'}{p}}$; 3°. sur le plan des xz, suivant les tangentes $f'g'$, $h'k'$, $l'm'$..... de la parabole $Sf'h'l'$.

§ V.

De quelques propriétés des Surfaces du second degré.

139. Théorème. Étant donnés un cercle d'une surface du second degré, et un point d'un second cercle de la même surface, ce second cercle est tout entier sur la sphère qui passe par le cercle et le point donné ?

Démonstration. L'intersection de deux surfaces du second degré est en général une ligne dont les projections sont des courbes du quatrième degré ; mais dans le cas particulier où les deux surfaces du second degré passent par la même courbe plane, leur ligne d'intersection est le systême de deux courbes planes ; d'où il suit qu'une sphère et une surface du second degré qui passent par le même cercle, se coupent suivant une autre courbe plane, et le plan de cette courbe coupe la sphère suivant un second cercle. Donc, deux des cercles d'une surface du second degré appartiennent à une sphère dont le centre et le rayon sont déterminés. Lorsque les deux cercles ne sont pas situés dans des plans parallèles, on les nomme *sections sous-contraires* de la surface du second degré. On n'avait considéré jusqu'à présent que les *sections sous-contraires* du cône oblique. Soient (fig. 1, Pl. 3) ABC le cercle base d'un cône oblique; AsB le diamètre de ce cercle qui passe par la projection s du sommet S du cône sur le plan de la base. La sphère du diamètre AB coupe le cône suivant les cercles des diamètres AB, ab, dont les plans sont perpendiculaires au plan du triangle $ASsB$. Il est de plus évident que les côtés SA, SB de ce triangle (qu'on nomme *section principale du cône oblique*), font avec les plans de l'une des sections circulaires, des angles inégaux entre eux, et égaux aux angles que ces mêmes côtés font avec le plan de l'autre section circulaire. Ainsi on a :

$$\text{angle } SAB = \text{angle } Sab, \quad \text{angle } SBA = \text{angle } Sba.$$

Soit (fig. 2, Pl. 3) Sab la section principale d'un cône oblique, qui a son sommet au point S de la sphère, et dont la base est un cercle quelconque de cette sphère, qui a pour diamètre, la droite ab. Ayant mené par le sommet de ce cône, le rayon SO de la sphère, le plan diamétral AB perpendiculaire à ce rayon fait avec les côtés Sa, Sb de la section principale du cône, des angles $Sa'b'$, $Sb'a'$ égaux aux angles Sab, Sba ; d'où il suit que ce plan diamétral coupe le cône oblique suivant un cercle du diamètre $a'b'$.

140. Théorême. La surface conique qui a pour base une section plane d'un ellipsoïde, et pour sommet l'extrémité de l'un des deux diamètres qui passent par les centres des sections circulaires de cet ellipsoïde, est coupée suivant un cercle, par tous les plans menés parallèlement à la section, circulaire dont le centre est sur le diamètre à l'extrémité duquel on a placé le sommet de la surface conique?

Démonstration. Soient (fig. 3, Pl. 3) OS le rayon d'une sphère dont le centre est au point O, et AA' un plan diamétral perpendiculaire à ce rayon. Concevons que de tous les points de la sphère, on ait abaissé des perpendiculaires sur le plan diamétral AA', et que par les pieds de ces perpendiculaires, on ait mené des droites parallèles entre elles, et proportionnelles à ces perpendiculaires ; on transformera, par cette projection oblique, la sphère en un ellipsoïde, dont les trois diamètres principaux rectangulaires dépendront 1°. du rayon de la sphère; 2°. de l'angle des perpendiculaires au plan diametral AA' et des obliques sur lesquelles on les projette; 3°. du rapport de l'une quelconque des perpendiculaires et de l'oblique sur laquelle on la projette. Soit OT la droite sur laquelle on a porté le rayon OS, après l'avoir augmenté d'une quantité Tt, qui détermine le rapport du rayon OS et de sa projection oblique OT. Le plan SOT qui rencontre le plan diamétral AA' suivant un diamètre AA' de la sphère, coupe cette sphère suivant le cercle $SAA'R$; ce cercle projetté obliquement se transforme en une ellipse qui a pour diamètres conjugués AOA', TOP ou les droites égales aOa', $T'OP'$. La droite BC qui divise en parties égales les angles POP', $A'Oa'$, est dirigée suivant le grand axe de l'ellipse; d'où il suit que l'ellipsoïde qui résulte de la projection oblique de la sphère, a pour diamètres principaux rectangulaires les droites BOC, DOE et SOR.

La première de ces droites est le plus grand diamètre ; la seconde DOE est le plus petit ; et la troisième ROS, égale au diamètre de la sphère, est le diamètre moyen de l'ellipsoïde. La sphère du rayon OA' coupe cet ellipsoïde suivant des grands cercles dont les plans OA', Oa' passent (art. 126) par l'axe moyen ROS. Ayant déja mené la droite $P'OT'$, telle que l'angle aOT' soit égal à l'angle AOT, on peut concevoir que de tous les points de la sphère du diamètre $aa' = AA'$, on ait abaissé des perpendiculaires sur le plan diamétral aa' ; que par les pieds des perpendiculaires, on ait mené des parallèles à la droite OT', proportionnelles à ces perpendiculaires ; l'extrémité s du rayon Os, perpendiculaire au diamètre de la sphère aOa', se projettera en un point T' de la droite OT', et si l'on suppose le rapport de Os à OT' égal au rapport de OS à OT, la sphère deviendra, par la seconde projection comme par la première, l'ellipsoïde qui a pour diamètres principaux les droites BC, DE, RS.

Cela posé, considérons le point S de la sphère comme le sommet d'un cône oblique qui a pour base un cercle quelconque C de cette sphère. Projettant obliquement tous les points de ce cône, comme on a projetté tous les points de la sphère pour former l'ellipsoïde, le sommet du cône est transporté au point T, et la base C de ce cône devient une section plane de l'ellipsoïde. Le premier cône dont le sommet est en S, et le second cône qui est la projection du premier, sont coupés par le plan diamétral AA' perpendiculaire au rayon OS suivant la même ligne : or, ce plan (art. 159) coupe le premier cône suivant un cercle ; donc le second est aussi coupé par le même plan suivant un cercle. Cette proposition étant vraie, quelle que soit la base circulaire C du cône oblique, il suit qu'un cône qui a un sommet au point T de l'ellipsoïde, et pour base une section plane quelconque de cet ellipsoïde, est coupé par le plan diamétral AA' conjugué au diamètre OT, suivant un cercle. On peut substituer au point T les trois autres points P, P', T' de l'ellipsoïde. Tous les cônes qui auront pour sommets les points P et T, et pour bases des courbes planes de l'ellipsoïde, seront coupés par le plan diamétral AA' suivant des cercles. Lorsque les sommets des cônes seront situés aux points P', T', les bases étant toujours des sections planes de l'ellipsoïde, c'est par le plan diamétral aa', ou ses parallèles, que les cônes seront coupés suivant des cercles.

141. Lorsque l'angle donné du rayon OS de la sphère, et du diamètre TOP de l'ellipse est nul, l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe; les sommets B et C de cet ellipsoïde sont situés sur le diamètre RS de la sphère; les points P et P', et le sommet B, se confondent; les points T, T', et le sommet C, se réunissent en un seul point de la droite RS. Il suit, du théorême précédent, que les surfaces coniques qui ont pour sommet commun, l'extrémité de l'axe de révolution d'un ellipsoïde, et pour bases des sections planes quelconques de cet ellipsoïde, sont coupées par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, suivant des cercles; propriété connue de l'ellipsoïde de révolution, et qui résulte de la proposition plus générale que nous venons de démontrer.

142. On a vu (art. 126) que l'équation du plan diamétral qui coupe l'ellipsoïde suivant un cercle, est :

$$z = x\sqrt{\frac{P' - P}{P'' - P'}},$$

l'équation de cet ellipsoïde étant :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1.$$

Pour obtenir les coordonnées de l'extrémité du diamètre qui passe par les centres des cercles, on remarque que ce diamètre est dans le plan de la section principale qui a pour équation :

$$Px^2 + P''z^2 = 1,$$

et qu'il est conjugué au diamètre dont l'équation est :

$$z = x\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}.$$

Menant une tangente à la section principale, parallèle à ce dernier diamètre, les coordonnées x', y', z' du point de contact sont :

$$x' = \pm P''\sqrt{\frac{P'-P}{PP'P''(P''-P)}},$$
$$y' = 0,$$
$$z' = \pm P\sqrt{\frac{P''-P'}{PP'P''(P''-P)}}.$$

Ces trois valeurs prises avec les signes convenables, déterminent la position des quatre points, sommets des surfaces coniques qui jouissent de la propriété énoncée (art. 140).

Ces trois valeurs deviennent pour l'hyperboloïde à deux nappes, à cause de P' et P'', négatifs :

$$x' = \pm P''\sqrt{\frac{P+P'}{PP'P''(P+P'')}},$$
$$y' = 0,$$
$$z' = \pm P\sqrt{\frac{P'+P''}{PP'P''(P+P'')}}.$$

Lorsque l'hyperboloïde est à une nappe, les coordonnées des sommets sont imaginaires ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque (art. 135) le diamètre qui passe par les centres des cercles de cette surface, ne la rencontre pas.

Des deux paraboloïdes, elliptique et hyperbolique, le premier seulement peut être coupé suivant un cercle, et le diamètre qui passe par les centres de ces cercles coupe la surface en un seul point, dont l'abscisse x' est (art. 127) égale $\pm(p-p')$, l'équation du paraboloïde étant :

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0,$$

C'est ce point qui est le sommet des surfaces coniques, que les plans des sections circulaires du paraboloïde elliptique, coupent suivant des cercles.

143. Théorème. Lorsqu'un cône est circonscrit à une surface du second degré, la courbe de contact est plane, quelle que soit la position du sommet du cône par rapport à la surface ?

Démonstration. Soit l'équation générale de la surface du second degré :

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 \\ + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' \\ + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' \end{array}\right\} = K.$$

Le plan qui touche cette surface au point (x', y', z'), a pour équation (art. 196) :

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} & x\,(Ax' + B''y' + B'z' + C\ ) \\ + & y\,(B''x' + A'y' + Bz' + C'\ ) \\ + & z\,(B'x' + By' + A''z' + C'') \\ + & \quad Cx' + C'y' + C''z' - K \end{aligned}\right\} = 0.$$

Soient f, g, h les coordonnées du sommet du cône, et supposons que le plan tangent passe par ce sommet ; l'équation (2) devient pour ce point :

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} & f\,(Ax' + B''y' + B'z' + C\ ) \\ + & g\,(B''x' + A'y' + Bz' + C'\ ) \\ + & h\,(B'x' + By' + A''z' + C'') \\ + & \quad Cx' + C'y' + C''z' - K \end{aligned}\right\} = 0.$$

Cette équation (3) établit une relation entre les coordonnées x', y', z' des points de contact de la surface et des plans tangens à cette surface, qu'on peut mener par le sommet du cône (f, g, h) ; or, elle est linéaire en x', y', z' ; d'où il suit qu'un cône quelconque, circonscrit à une surface du second degré, touche cette surface suivant une courbe plane. On aura l'équation du plan de cette courbe en mettant dans l'équation (3), au lieu de x', y', z', les coordonnées x, y, z du plan ; ce qui donne :

$$\left.\begin{array}{l} x\,(Af + B''g + B'h + C\ ) \\ +y\,(B''f + A'g + Bh + C') \\ +z\,(B'f + Bg + A''h + C'') \\ + \quad Cf + C'g + C''h - K \end{array}\right\} = 0.$$

144. Au lieu d'assujettir le plan tangent à passer par un point (f, g, h), on pourait exprimer qu'il est constamment parallèle à une droite. Soient $x = \alpha z$, $y = \beta z$ les équations de cette droite. L'équation de condition qui exprime que le plan tangent représenté par l'équation (2), passe par cette droite, est (art. 123) :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\,(Ax' + B''y' + B'z' + C\ ) \\ +\beta\,(B''x' + A'y' + Bz' + C') \\ + \quad B'x' + By' + A''z' + C'' \end{array}\right\} = 0,$$

Or, un plan constamment parallèle à une droite, et qui se meut en touchant une surface du second degré, engendre une surface cylindrique qui lui est circonscrite ; donc, la courbe de contact de ces deux surfaces est plane, et l'équation du plan qui la contient est :

$$\left.\begin{array}{l} x\,(A\alpha + B''\beta + B') + y\,(B''\alpha + A'\beta + B) \\ +z\,(B'\alpha + B\beta + A'') + C\alpha + C'\beta + C'' \end{array}\right\} = 0.$$

145. La propriété d'une surface du second degré, d'être touchée par un cône ou par un cylindre, suivant une courbe plane, est une

conséquence de la proposition démontrée (art. 122), que toutes les sections parallèles d'une surface du second degré, sont des courbes semblables et semblablement placées. En effet, par deux quelconques de ces courbes, on peut concevoir une surface conique, puisque le cône, ainsi que la pyramide, jouit de la propriété d'être coupé par des plans parallèles suivant des courbes semblables et semblablement placées; or, l'une de ces courbes restant fixe, l'autre peut s'en approcher indéfiniment; donc, lorsque les deux courbes seront réunies, le cône sera circonscrit à la surface du second degré.

146. Théorème (*). On suppose que trois plans rectangulaires se meuvent en touchant constamment une surface du second dégré qui a un centre; le point d'intersection de ces trois plans engendre une sphère concentrique à la surface du second degré, dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des trois demi-axes?

(*) Ce théorême, dû à M. Monge, a été démontré par M. Poisson, Ier. vol. de la Correspondance, pag. 240. C'est cette démonstration que nous rapportons ici.

Démonstration. Soit $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1$, l'équation de la surface du second degré. Les trois plans rectangulaires touchent cette surface en trois points dont les coordonnées sont :

pour le premier point,	x',	y',	z',
pour le second,	x'',	y'',	z'',
pour le troisième,	x''',	y''',	z''',

et on a entre les neuf coordonnées des points de contact :

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 \\ Px''^2 + P'y''^2 + P''z''^2 \\ Px'''^2 + P'y'''^2 + P''z'''^2 \end{array}\right\} = 1.$$

Ces plans tangens ont pour équations (art. 143) :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{le premier,} & Pxx' + P'yy' + P''zz' \\ \text{le second,} & Pxx'' + P'yy'' + P''zz'' \\ \text{le troisième,} & Pxx''' + P'yy''' + P''zz''' \end{array}\right\} = 1.$$

On exprime (art. 128) que ces plans sont perpendiculaires entre eux, par les équations de condition :

$$(3)\qquad \left.\begin{array}{l} P^2x'x'' + P'^2y'y'' + P''^2z'z'' \\ P^2x'x''' + P'^2y'y''' + P''^2z'z''' \\ P^2x''x''' + P'^2y''y''' + P''^2z''z''' \end{array}\right\} = 0.$$

Supposons maintenant qu'on ait :

$$\begin{array}{lll} Px' = a, & Px'' = a', & Px''' = a'', \\ P'y' = b, & P'y'' = b', & P'y''' = b'', \\ P''z' = c, & P''z'' = c', & P''z''' = c''; \end{array}$$

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = R'^2, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = R''^2. \end{cases}$$

Les systèmes d'équations (1), (2) et (3) deviennent :

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{a^2}{P} + \frac{b^2}{P'} + \frac{c^2}{P''} = 1, \\ \frac{a'^2}{P} + \frac{b'^2}{P'} + \frac{c'^2}{P''} = 1, \\ \frac{a''^2}{P} + \frac{b''^2}{P'} + \frac{c''^2}{P''} = 1. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} ax + by + cz = 1, \\ a'x + b'y + c'z = 1, \\ a''x + b''y + c''z = 1. \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{cases}$$

Les deux systêmes d'équations (4) et (7) sont (art. 82) équivalens à ces deux-ci :

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} = 1, \\ \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} = 1, \\ \frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2} = 1, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} + \frac{a''b''}{R''^2} = 0, \\ \frac{ac}{R^2} + \frac{a'c'}{R'^2} + \frac{a''c''}{R''^2} = 0, \\ \frac{bc}{R^2} + \frac{b'c'}{R'^2} + \frac{b''c''}{R''^2} = 0. \end{cases}$$

Cela posé, la question consiste à éliminer des équations (6) des plans tangens, les coordonnées des trois points de contact. Pour effectuer cette élimination, élevons au carré les équations (6), après avoir divisé la première par R, la seconde par R', et la troisième par R''; ajoutons ensuite ces carrés, et nous aurons, à cause des équations (8) et (9) :

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}.$$

Ajoutons les équations (5), après avoir divisé la première par R^2, la seconde par R'^2, et la troisième par R''^2; on aura, à cause des équations (8) :

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}+\frac{1}{P''};$$

donc

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}+\frac{1}{P''},$$

équation d'une sphère du rayon . . . . . . $\sqrt{\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}+\frac{1}{P''}}$. Dans le cas de l'hyperboloïde, une ou deux des quantités P, P', P'' sont négatives, et la réalité du rayon de la sphère dépend du signe et du rapport arithmétique de ces quantités. Si l'on avait :

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}+\frac{1}{P''}=0,$$

il n'y aurait qu'un seul point par lequel on pût mener trois plans tangens rectangulaires, et ce point serait le centre de la surface, puisqu'on aurait :

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

ou

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

147. Lorsque la surface du second degré n'a pas de centre, ou plutôt lorsque le centre est à l'infini, la sphère engendrée par le point d'intersection des trois plans rectangulaires tangens, devient d'un rayon infini, c'est-à-dire qu'elle se réduit à un plan.

Pour déterminer la position de ce plan, substituons dans l'équation de la surface. . . $Px^2+P'y^2+P''z^2=1$, pour P, P' et P'' leurs valeurs $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ ($2a$, $2b$, $2c$ étant les diamètres principaux de la surface). Prenant pour origine des coordonnées, l'extrémité de l'un de ces trois diamètres, par exemple du diamètre $2a$, rapportons la surface à trois nouveaux axes parallèles aux diamètres principaux. Les nouvelles coordonnées x', y', z' d'un point quelconque de la surface, seront :

$$x' = x + a, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

L'équation de la surface deviendra :

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

ou, supprimant les accens des lettres x', y', z' :

$$b^2c^2x^2 - 2ab^2c^2x + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 = 0.$$

Nommant p et p' les distances de l'origine des coordonnées aux foyers des sections principales, mesurées sur le grand axe $2a$, on a :

$$b^2 = 2ap - p^2, \qquad c^2 = 2ap' - p'^2.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation, elle devient :

$$\left.\begin{array}{l} (2ap - p^2)(2ap' - p'^2)\left\{x^2 - 2ax\right\} \\ + a^2y^2(2ap' - p'^2) + a^2z^2(2ap - p^2) \end{array}\right\} = 0.$$

Divisant tous les termes par $2a^3$;

$$\left.\begin{array}{l} \left\{2pp' - \dfrac{(p^2p' + pp'^2)}{a} + \dfrac{p^2p'^2}{2a^2}\right\}\left\{\dfrac{x^2}{a} - 2x\right\} \\ + p'y^2 - \dfrac{p'^2y^2}{a} + pz^2 - \dfrac{p^2z^2}{a} \end{array}\right\} = 0.$$

Lorsque le centre de la surface est situé à une distance infinie de l'extrémité du diamètre principal $2a$, ce diamètre principal devient infini, et l'équation de la surface se réduit à celle-ci, qui comprend (art. 111) les deux paraboloïdes :

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0.$$

En rapportant la sphère décrite par le point d'intersection des trois plans rectangulaires, aux nouveaux axes, l'équation de la sphère devient:

$$x^2 - 2ax + y^2 + z^2 = b^2 + c^2 = 2ap - p^2 + 2ap' - p'^2.$$

Lorsque le diamètre $2a$ est infini, cette équation se réduit à celle d'un plan perpendiculaire à ce diamètre :

$$x = p \mp p'.$$

Le signe — pour le paraboloïde elliptique, et le signe + pour le paraboloïde hyperbolique.

148. Théorême. *Le volume du parallélipipède circonscrit à une surface du second degré*, est constant, quelle que soit la direction des arêtes de ce parallélipipède?

Démonstration. Soient trois diamètres conjugués $2f$, $2g$, $2h$. Les six plans tangens à la surface du second degré, menés par les extrémités de ces trois diamètres, sont parallèles deux à deux, et comprennent le parallélipipède circonscrit. Or, on a démontré (art. 107) que le volume du parallélipipède oblique construit sur les trois demi-diamètres f, g, h, est égal au parallélipipède rectangle construit sur les trois demi-diamètres principaux a, b, c; donc tous les parallélipipèdes circonscrits sont égaux en volume, et l'expression de ce volume est $8abc$.

§. VI.

De la Discussion des Équations numériques du second degré à trois variables (1).

149. L'objet de cette discussion est de reconnaître la forme et la position d'une surface du second degré, représentée par une équation dont tous les termes ont pour coefficiens des nombres donnés. Quelle que soit cette équation, elle sera comprise dans l'équation générale (art. 95) :

$$(1)\qquad \left.\begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z \end{cases}\right\} = K.$$

Les surfaces du second degré, représentées

(1) Ce mode de discussion est l'objet d'un article de M. Petit, inséré dans la Correspondance, tom. 2, p. 324.

par cette équation générale, se divisent d'abord en deux classes; la première comprend les trois surfaces qui ont un centre : *l'Ellipsoïde*, *l'Hyperboloïde à une nappe*, *l'Hyperboloïde à deux nappes*; la seconde, les deux surfaces qui n'ont pas de centre : le *paraboloide elliptique*, et le *paraboloïde hyperbolique*. De ces cinq surfaces, les quatre premières peuvent être de révolution. Elles comprennent comme cas particulier, la sphère, le cône, les cylindres qui ont pour bases les courbes du second degré, le système de deux plans qui se coupent ou qui sont parallèles, et le point. Nous allons exposer une méthode générale pour reconnaître à quelle espèce ou à quel cas particulier des surfaces du second degré, on doit rapporter la surface dont l'équation est donnée.

150. Comparant l'équation proposée à l'équation (1) (art. 149), on formera les équations (art. 97) qui déterminent les coordonnées α, β, γ du centre de la surface :

$$\begin{aligned} A\alpha + B''\beta + B'\gamma + C &= 0, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma + C' &= 0, \\ B'\alpha + R\beta + A''\gamma + C'' &= 0, \end{aligned}$$

Chacune de ces équations étant linéaire, elle représente un plan, et un point quelconque de ce plan a pour coordonnées α, β, γ. On trouvera, pour ces trois coordonnées, ou des valeurs finies, ou des valeurs indéterminées, ou des valeurs infinies. Examinons successivement ces trois cas.

1°. *Les valeurs des trois coordonnées du centre de la surface sont finies.*

Soient α, β, γ les coordonnées du centre de la surface, pris pour origine des coordonnées. En supposant (art. 97) :

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 \\ + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta \\ + 2C\alpha + 2C'\beta + 2C''\gamma - K \end{array}\right\} = -H;$$

l'équation générale (1) (art. 149) devient :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H. \quad (E)$$

Ayant nommé a, b, c les demi-diamètres principaux de la surface, et rapportant la surface à ces diamètres, on a pour équation de la surface (art. 105 et 106) :

$$\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{c^2}z^2 = 1,$$

ou

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1.$$

Désignant par R^2 (art. 99 et 100) l'un quelconque des carrés a^2, b^2, c^2, et supposant $\frac{R^2}{H} = s$, les trois quantités $\frac{a^2}{H}$, $\frac{b^2}{H}$, $\frac{c^2}{H}$ sont données par l'équation (1) (art. 100). Si dans cette équation (1) on met $\frac{1}{t}$ à la place de s, elle devient :

$$\left.\begin{array}{l} t^3 - t^2 (A + A' + A'') \\ \quad + t\,(AA' + A'A'' + AA'' - B^2 - B'^2 - B''^2) \\ \quad + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' \end{array}\right\} = 0\,; \quad (I')$$

Nommant t, t', t'' les trois racines de cette équation (I'), on a :

$$a^2 = \frac{H}{t}, \quad b^2 = \frac{H}{t'}, \quad c^2 = \frac{H}{t''},$$

ou

$$\frac{1}{a^2} = P = \frac{t}{H}, \quad \frac{1}{b^2} = P' = \frac{t'}{H}, \quad \frac{1}{c^2} = P'' = \frac{t''}{H}.$$

Les trois quantités P, P', P'' étant (art. 106) toujours réelles, les racines t, t', t'' le sont aussi ; d'où il suit qu'on pourra faire usage de la règle de Descartes pour connaître le nombre de racines positives et négatives de l'équation (I') (voyez *Complément des Élémens d'Algèbre*, de M. Lacroix, 3e. édit., pag. 67).

Suivant cette règle, le nombre des racines positives sera le même que celui des variations de signe des termes successifs, et le nombre des racines négatives sera égal à celui des permanences dans les signes de ces termes. Les signes des racines de l'équation (I') détermineront ceux des quantités P, P', P''. Ou ces trois quantités seront positives, ou deux seront positives et une négative, ou deux seront négatives et une positive, ou enfin elles seront toutes trois négatives.

Dans le premier cas, la surface est un ellipsoïde (art. 115); dans le second (art. 116), un hyperboloïde à une nappe; dans le troisième (art. 117), un hyperboloïde à deux nappes; dans le quatrième cas, la surface est imaginaire; car il est évident que toutes les valeurs réelles de x, y, z rendant la quantité $Px^2 + P'y^2 + P''z^2$ négative, il sera impossible de satisfaire à l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1.$$

151. Ayant substitué dans le terme $-H$ (art. 150) les valeurs α, β, γ (art. 97) des coordonnées du centre de la surface, il peut arriver que ce terme soit nul. Alors l'équation

(E) (art. 150) devient :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0. \quad (E')$$

Cette équation appartient évidemment à un cône, dont le sommet ou le centre est à l'origine des coordonnées. En effet, supposant le rapport $\frac{x}{z}$ égal à une constante, l'équation (E') fait voir que le rapport $\frac{y}{z}$ sera aussi constant. Ces deux rapports ne varient pas pour les points du cône situés sur une même droite, passant par le sommet.

Si l'équation (E') ne contient que les trois premiers termes Ax^2, $A'y^2$, $A''z^2$, et si les coefficiens de ces termes sont de même signe, l'équation proposée appartient à un point.

2°. *Les valeurs des trois coordonnées du centre sont indéterminées.*

152. Dans ce cas, les trois équations linéaires (art. 150), entre α, β, γ, se réduisent à deux ou à une seule. Supposons qu'elles se réduisent à une seule, cette équation unique représente le plan des centres, et l'équation proposée est le produit de deux facteurs li-

néaires en x, y, z qui appartiennent à deux plans parallèles au plan des centres, et situés à égales distances de ce dernier plan.

Lorsque, des trois équations linéaires en α, β, γ, l'une quelconque est une suite nécessaire des deux autres, elles appartiennent à deux plans, et tous les points de la droite intersection de ces deux plans, peuvent être pris pour le centre de la surface. Dans ce cas, la surface proposée est un cylindre ou le système de deux plans, c'est-à-dire un cylindre qui a pour base le système de deux droites. Coupant la surface proposée par l'un quelconque des trois plans coordonnés, on détermine la ligne qui sert de base à la surface cylindrique, par la règle connue (voyez *Traité des Courbes*, de Biot, pag. 250, 5e. édition).

Il est d'ailleurs évident que les trois équations qui donnent les coordonnées du centre, ne peuvent jamais être satisfaites indépendamment de toute valeur de α, β, γ; car il faudrait alors que tous les coefficiens du premier membre de l'équation proposée fussent nuls ce qui est absurde.

3°. *On suppose les coordonnées du centre infinies.*

153. On coupera la surface proposée par un plan. Si, quelle que soit la position du plan sécant, la section ne peut pas être une hyperbole, l'équation donnée représente (art. 120) un paraboloïde elliptique ; si la section ne peut pas être une ellipse, l'équation donnée représente un paraboloïde hyperbolique. Si la section est toujours une parabole, la surface proposée est un cylindre parabolique.

154. Les calculs préparatoires nécessaires pour la discussion des surfaces du second degré se réduisent donc à former les trois équations linéaires (art. 150) qui donnent les coordonnées α, β, γ du centre de la surface, et l'équation I' (art. 150), dont les racines déterminent les signes des coefficiens P, P', P'' de l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1.$$

On complettera cette discussion en formant les équations de condition (art. 114) qui expriment qu'une surface est de révolution, et les équations qui représentent l'axe de révolution. Cependant il sera inutile de former ces équations, lorsqu'on aura reconnu que la surface proposée est un paraboloïde hyperbolique, un cylindre à base hyperbolique ou parabolique; car il est évident (art. 120) que ces surfaces ne peuvent pas être coupées suivant des cercles, et leurs équations privées des trois rectangles ne satisfont pas à la condition trouvée (art. 114).

FIN.

NOTES.

Ire.

Sur la transformation des coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires, pag. 126, *art.* 85.

Des neuf constantes a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', trois étant données, on calcule les six autres. La symétrie du calcul dépend du choix des trois premières constantes. M. Monge a effectué ce calcul, en prenant pour données les trois cosinus a, b', c'', qu'on a désignés (art. 86) par $\cos(x, x')$, $\cos(y, y')$, $\cos(z, z')$. Nommant r le rayon des tables, et faisant pour abréger :

$$r + a + b' + c'' = M,$$
$$r + a + b' - c'' = N,$$
$$r - a + b' - c'' = P,$$
$$r - a - b' + c'' = Q,$$

on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} a' &= \frac{1}{2}\quad \overline{NP} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ}, \\ b &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\sqrt{QN} + \frac{1}{2}\sqrt{MP}, \\ a'' &= \frac{1}{2}\sqrt{QN} - \frac{1}{2}\sqrt{MP}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} b'' &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MN}, \\ c' &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MN}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules ont été publiées dans un Mémoire de M. Monge, qui a pour titre : « Expression analytique de la génération des surfaces courbes. » (Mémoires de l'Académie de Turin, années 1784 et 1785).

M. Carnot a donné, depuis longtems, une solution de ce problême :

La position d'un point étant déterminée dans l'espace par trois coordonnées quelconques, faisant entre elles des angles donnés, on propose de changer les directions de ces coordonnées, en supposant que l'on connaisse l'angle que fait chacune de ces nouvelles coordonnées par chacune des anciennes.

(*Voyez* le Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace. In-4°. Paris, 1806.)

Les propositions (art. 60 et 69) que M. Carnot a publiées, en 1803, dans sa Géométrie de position, pag. 304, et qui ont été, selon ce savant, découvertes dans le même tems par M. L'huilier de Genève, servent de base à cette solution.

II.

Trigonométrie sphérique, pag. 136, *art.* 90.

Pour trouver la relation entre les lignes trigonométriques des angles formés par quatre droites données, qui concourent vers un même point, concevons un parallélipipède dont les arêtes et la diagonale soient dirigées suivant les droites données. Nommons f, g, h, k les longueurs des trois arêtes et de la diagonale, on a (art. 62) l'équation :

$$k^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos(f,g) + 2fh\cos(f,h) + 2gh\cos(g,h),$$

ou, en divisant les deux membres par k^2 :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &1 = \frac{f^2}{k^2} + \frac{g^2}{k^2} + \frac{h^2}{k^2} \\ &+ \frac{2fg}{k^2}\cos(f,g) + \frac{2fh}{k^2}\cos(f,h) + \frac{2gh}{k^2}\cos(g,h). \end{aligned}\right.$$

Remarquons que deux faces parallèles du parallélipipède, comprennent entre elles l'une des trois arêtes f, g, h, et la diagonale k ; d'où il suit qu'on a pour l'expression de la distance de ces faces parallèles, deux valeurs : d'où résultent les équations suivantes.

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f\sin(f, gh) &= k\sin(k, gh), \\ g\sin(g, fh) &= k\sin(k, fh), \\ h\sin(h, fg) &= k\sin(k, fg). \end{aligned}\right.$$

Tirant de ces équations (2) les valeurs de $\frac{f}{k}$, $\frac{g}{k}$, $\frac{h}{k}$, et les substituant dans l'équation (1), on a :

$$\left.\begin{aligned}1 = {} & \frac{\sin^2(k, gh)}{\sin^2(f, gh)} + \frac{\sin^2(k, fh)}{\sin^2(g, fh)} + \frac{\sin^2(k, fg)}{\sin^2(h, fg)} \\ & + 2\cos(f, g) \cdot \frac{\sin(k, gh)\sin(k, fh)}{\sin(f, gh)\sin(g, fh)} \\ & + 2\cos(f, h) \cdot \frac{\sin(k, gh)\sin(k, fg)}{\sin(f, gh)\sin(h, fg)} \\ & + 2\cos(g, h) \cdot \frac{\sin(k, fh)\sin(k, fg)}{\sin(g, fh)\sin(h, fg)}\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Des quatre droites f, g, h, k dont la direction est connue, une seule étant donnée, les trois autres sont déterminées par les équations (2).

Par le point de concours des quatre droites données, élevons des perpendiculaires aux plans des trois faces du parallélipipède, qui passent par ce point. Considérons ces perpendiculaires, comme les arêtes d'un second parallélipipède, qui a même diagonale que le premier. k étant cette diagonale commune, soient F, G, H, les arêtes du second parallélipipède, perpendiculaires aux faces du premier (gh), (fh), (fg). On a les équations :

$$(1') \left\{\begin{aligned}1 = {} & \frac{F^2}{k^2} + \frac{G^2}{k^2} + \frac{H^2}{k^2} \\ & + \frac{2FG\cos(F, G)}{k^2} + \frac{2FH\cos(F, H)}{k^2} + \frac{2\,GH\cos(G, H)}{k^2}.\end{aligned}\right.$$

$$(2') \left\{\begin{aligned}F\sin(F, GH) &= k\sin(k, GH), \\ G\sin(G, FH) &= k\sin(k, FH), \\ H\sin(H, FG) &= k\sin(k, FG).\end{aligned}\right.$$

Les angles (F, G), (F, H), (G, H), sont évidemment égaux à ceux-ci : (gh, fh), (gh, fg), (fh, fg), Les plans (GH), (FH), (FG) sont respectivement perpendiculaires aux arêtes f, g, h du premier parallélipipède ; d'où il suit que les angles (F, GH), (G, FH), (H, FG) sont égaux aux angles (gh, f), (fh, g); (fg, h). Les trois angles (k, GH), (k, FH), (k, FG) sont les complémens des angles (k, f), (k, g), (k, h). Ces égalités d'angles changent les équations $(2')$ en celles-ci :

$$\frac{F}{k}=\frac{\cos(k,f)}{\cos(gh,f)},\quad \frac{G}{k}=\frac{\cos(k,g)}{\sin(fh,g)},\quad \frac{H}{k}=\frac{\cos(k,h)}{\sin(fg,h)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(1')$, elle devient :

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \frac{\cos^2(k,f)}{\sin^2(gh,f)}+\frac{\cos^2(k,g)}{\sin^2(fh,g)}+\frac{\cos^3(k,h)}{\sin^2(fg,h)}\\
&+\frac{2\cos(k,f)\cos(k,g)}{\sin(gh,f)\sin(fh,g)}\cos(gh,fh)\\
&+\frac{2\cos(k,f)\cos(k,h)}{\sin(gh,f)\sin(fg,h)}\cos(gh,fg)\\
&+\frac{2\cos(k,g)\cos(k,h)}{\sin(fh,g)\sin(fg,h)}\cos(fh,fg).
\end{aligned}\right\}\quad (a')$$

Une quelconque des quatre droites données peut être considérée comme la diagonale que nous avons désignée par la lettre k; d'où il suit que les lignes trigonométriques des angles qu'une droite forme avec trois autres droites, sont liées entre elles par huit équations, dont quatre sont semblables à l'équation (a), et les quatre autres sont semblables à l'équation (a'). Les deux équations (a) et (a') ont été données par M. Français, et imprimées dans la Correspondance, tome 1er., page 343. Je me suis seulement proposé de faire voir comment on pouvait déduire de la même considération de géométrie les quatre systêmes d'équations analogues aux équations connues (a) et (a').
(Note lue à la Société philomatique. Mai 1813.)

III.

Des relations entre les différens systêmes de diamètres conjugués d'une surface du second degré. (1).

L'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués $2f$ et $2g$, est, comme on sait :

$$g^2x'^2 + f^2y'^2 = f^2g^2.$$

En transformant les coordonnées obliques x', y' en coordonnées rectangulaires x, y, et exprimant que l'équation transformée est identique avec l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux, on obtient les relations suivantes :

$$(1) \qquad a^2 = f^2\cos^2\alpha + g^2\cos^2\beta,$$

$$(2) \qquad b^2 = f^2\sin^2\alpha + g^2\sin^2\beta,$$

$$(3) \qquad ab = fg\sin(\alpha - \beta),$$

$$(4) \qquad f^2\sin\alpha\cos\alpha + g^2\sin\beta\cos\beta = 0,$$

$2a$ et $2b$ représentant les axes principaux de l'ellipse, α et β les angles que les diamètres conjugués $2f$ et $2g$ font avec l'axe $2a$.

L'équation (3) démontre la proposition connue, que le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués, est constant et égal au rectangle construit sur les axes. Ajoutant les équations (1) et (2), on trouve :

$$(5) \qquad a^2 + b^2 = f^2 + g^2;$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des diamètres conjugués est constante.

---

(1) Les démonstrations contenues dans cette Note sont de M. Petit.

Menons par l'origine des coordonnées un troisième axe des z perpendiculaire au plan de l'ellipse, et nommons φ, ψ, π les angles qu'une droite quelconque D fait avec les axes des x, des y, et des z, les projections du demi-diamètre f sur ces axes seront $f \cos \alpha$, $f \sin \alpha$, o; celles du demi-diamètre g sur les mêmes axes seront $g \cos \beta$, $g \sin \beta$, o. Donc en représentant par f' et g', les projections de f et de g sur la droite D, on aura (art. 63) :

$$f' = f \cos \alpha . \cos \varphi + f \sin \alpha . \cos \psi,$$
$$g' = g \cos \beta . \cos \varphi + g \sin \beta . \cos \psi.$$

Carrant ces deux équations, les ajoutant, et réduisant au moyen des équations (1), (2), (4), on a :

$$(6) \qquad f'^2 + g'^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \psi;$$

ce qui démontre la proposition suivante :

La somme du carré des projections de deux diamètres conjugués d'une ellipse sur une droite prise a volonté, est constante, quelle que soit la direction des diamètres conjugués projetés.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour l'ellipse, s'appliqueront à l'hyperbole, en changeant dans les équations précédentes b en $b\sqrt{-1}$.

Il est facile maintenant d'étendre ces propositions aux surfaces du second degré. Pour cela considérons un premier systême de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde, et représentons-les par les trois lettres f, g, h. Désignons par f'', g'', h'' un second systême de diamètres conjugués de la même surface, entièrement indépendant du premier. Nous allons prouver que les deux systêmes (f, g, h) (f'', g'', h'') sont compris dans une série de systêmes de diamètres conjugués, tels que deux successifs auront un diamètre commun. Observons d'abord que le diamètre f, par exemple, restant le même, les deux autres diamètres g et h peuvent varier d'une infinité de manière, en les assujétissant seulement à être conjugués l'un à l'autre dans la section dont le plan est conjugué à ce diamètre f. Cela posé, concevons par le diamètre f du premier systême, et par le diamètre g'' du second systême, un plan qui coupe le plan de g et de h suivant un diamètre g'; appellons h' le conjugué de g' dans le plan de g et de h.

On aura aussi un systême f, g', h' qui aura le diamètre f commun avec le systême f, g, h.

Le plan des trois demi-diamètres f, g', g'' étant évidamment conjugué au diamètre h', on pourra substituer aux diamètres f, g', le diamètre g'' et son conjugué dans le même plan, que nous désignerons par f'. Nous obtiendrons par là un troisième systême de diamètres conjugués h', g'', f', qui aura avec le précédent le diamètre h' commun, et ce dernier aura aussi un diamètre commun g'' avec le second systême donné (f'', g'', h''). D'après cela il est facile de voir que les propositions que nous allons démontrer pour deux systêmes de diamètres conjugués qui auront un axe commun, s'appliqueront à deux systêmes indépendans l'un de l'autre.

1re. Proposition. *Le parallélipipède construit sur les diamètres conjugués d'un ellipsoïde, est constant.* En effet, ces deux systêmes ayant un axe commun, les deux parallélipipèdes correspondans auront une arête commune, et les parallélogrammes formés par les deux autres, seront équivalens comme construits sur les diamètres conjugués d'une même ellipse.

2e. *La somme des carrés des diamètres conjugués d'un* *ellipsoïde, est constante.* Cette proposition est évidente, puisque ces deux systêmes ont un axe commun, et que les deux autres diamètres de chaque systême sont conjugués à une même ellipse.

3e. *La somme des carrés des projections des diamètres conjugués d'un ellipsoïde sur une droite quelconque donnée de position, est constante.* Cette proposition n'est pas moins évidente que la précédente.

4e. *La somme des carrés des faces du parallélipipède, construit sur les diamètres conjugués d'un ellipsoïde, est constante.* Représentons par f, g, h le premier systême, et par f, g', h' le second systême, auquel nous supposons un diamètre f commun avec le premier. Les diamètres (g et h), (g' et h') sont conjugués à une même ellipse. En les projettant sur le diamètre f, on aura d'après ce qui a été démontré :

$$g^2\cos^2(f,g) + h^2\cos^2(f,h) = g'^2\cos^2(f,g') + h'^2\cos^2(f,h').$$

Retranchant cette équation de $g^2 + h^2 = g'^2 + h'^2$, on aura :

$$g^2\sin^2(f,g) + h^2\sin^2(f,h) = g'^2\sin^2(f,g') + h'^2\sin^2(f,h').$$

Multipliant cette dernière par f^2, et ajoutant l'équation démontrée :

$$g^2h^2\sin^2(g,h) = g'^2h'^2\sin^2(g',h'^2),$$

on obtiendra l'équation qui renferme la proposition énoncée.

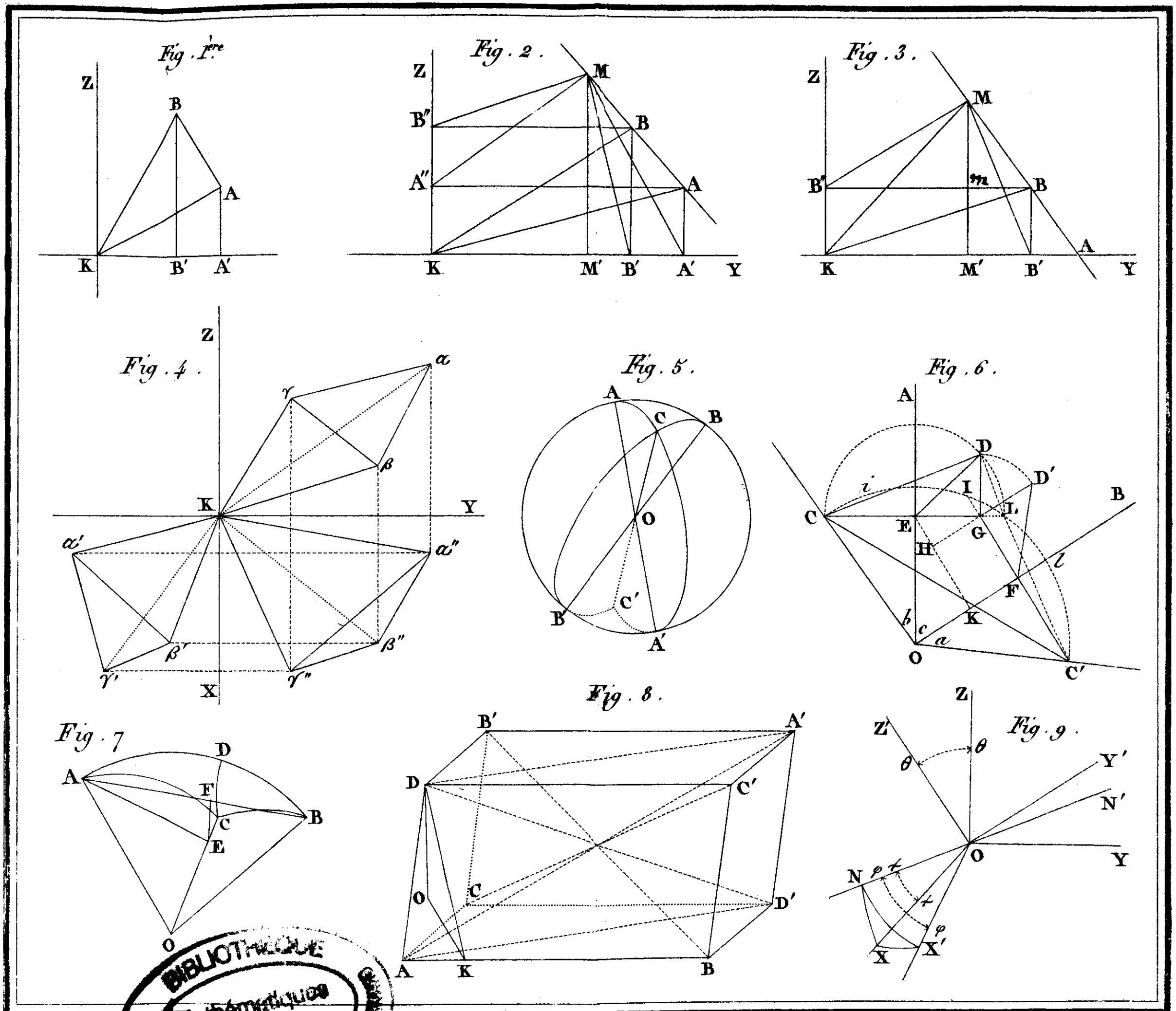
Les quatre propositions démontrées ci-dessus, ainsi que les conclusions tirées de la comparaison des équations (8), (9), (art. 107), sont applicables aux autres surfaces du second degré qui ont un centre, en observant de prendre négativement les carrés des diamètres conjugués imaginaires.

IV.

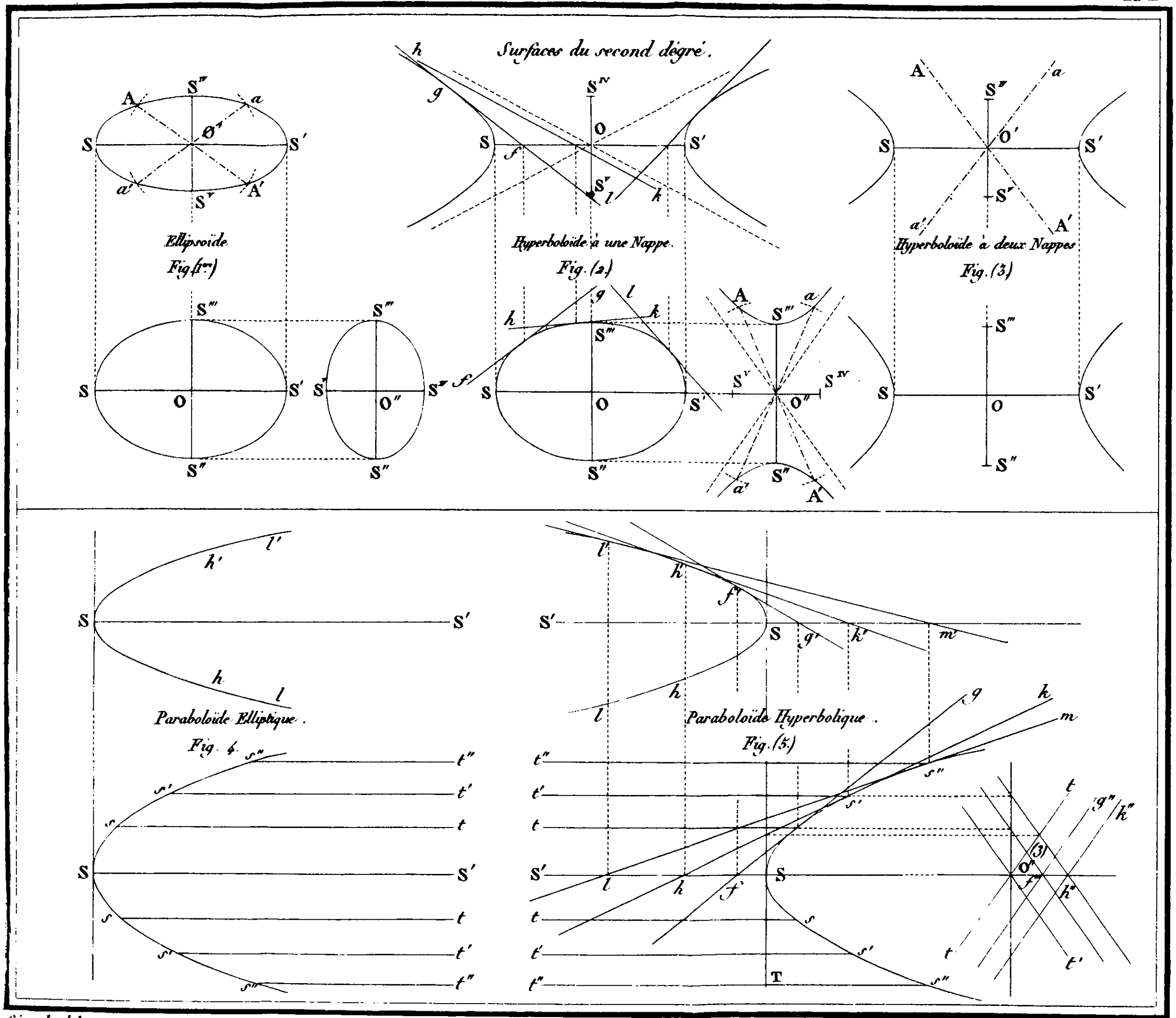
(*Surfaces du second degré; Théorème de M.* Monge, *pag.* 233, *art.* 146.)

Ce théorême est une conséquence de la proposition suivante : *Le sommet d'un angle droit, dont les côtés touchent constamment une courbe du second degré, décrit une circonférence de cercle.* En effet, supposons que la surface du second degré soit enveloppée par une infinité de cylindres. Chacun de ces cylindres (art. 144) la touche suivant une courbe plane. Concevons que deux plans perpendiculaires entre eux se meuvent, en touchant constamment l'un des cylindres circonscrits à la surface du second degré ; la droite intersection de ces plans engendre évidemment un autre cylindre; or, quel que soit ce dernier cylindre, un plan perpendiculaire à ses arètes qui touche la surface du second degré, le coupe suivant une circonférence de cercle, et tous les points de cette circonférence appartiennent à la surface qui est engendrée par le point d'intersection des trois plans rectangulaires tangens ; donc il y a une infinité de plans diversement inclinés, dont chacun contient un cercle de cette surface; d'où il suit que tous ces cercles appartiennent à une sphère.

Fin des Notes.



Girard del. L. Stévigny S.



Girard del.

L. Stévigny Sc.

Application de l'Algèbre à la Géométrie.

Fig. 1.re

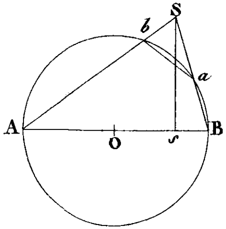


Fig. 2.

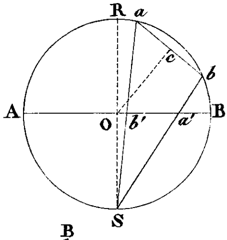


Fig. a.

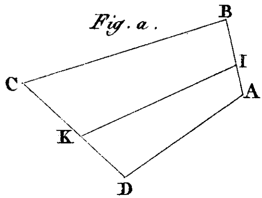
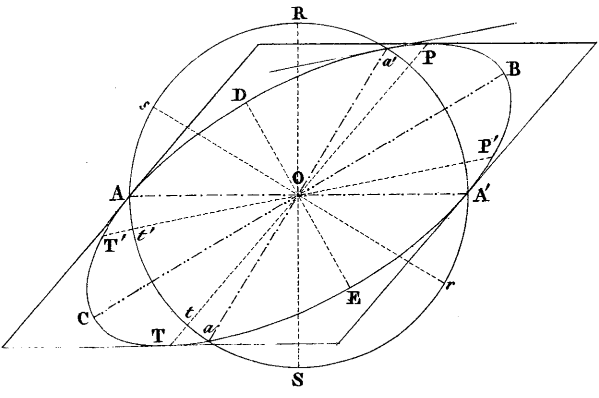


Fig. 3



Girard del. L. Stévigny Sc.