ÉTUDE SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE LA

FONCTION PERTURBATRICE

D'APRÈS CAUCHY

DANS LA THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANÉTAIRES

PAR

CH.

M. BERGER

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE IMPÉRIAL DE MONTPELLIER

MONTPELLIER

BOEHM ET FILS, IMPRIMEURS DE L'ACADÉMIE, PLACE DE L'OBSERVATOIRE

1863

ÉTUDE

SUR LE

Développement de la Fonction perturbatrice

D'APRÈS CAUCHY

DANS LA THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANÉTAIRES

Le calcul des perturbations des mouvements des planètes dépend d'une certaine fonction R qu'on appelle fonction perturbatrice, et dont l'expression est, quand on considère l'action de m' sur m, c'est-à-dire le mouvement troublé de m

$$R = \frac{1}{\mathrm{r}} - \frac{r \cos \delta}{r'^2}$$

r distance mutuelle des deux planètes $m\, m'$.
rr' leurs distances au Soleil.
δ leur distance apparente vue du Soleil.

Si, au contraire, on considère l'action de m sur m', c'est-à-dire le mouvement troublé de m',

$$R = \frac{1}{\mathrm{r}} - \frac{r' \cos \delta}{r^2}$$

Ces deux fonctions ont une partie commune $\frac{1}{r}$.

Cauchy a donné pour le développement de la fonction perturbatrice une méthode fort remarquable, principalement en ce qui concerne le calcul des perturbations d'un ordre élevé. Cette méthode fait l'objet de plusieurs notes disséminées dans les Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences (années 1844, 1845). Mais dans ces notes plusieurs points sont à démontrer, d'autres restent obscurs malgré les démonstrations ; on ne voit pas comment les formules peuvent être adaptées au calcul numérique ; enfin, Cauchy se borne au développement de la partie principale $\frac{1}{r}$ de la fonction R.

Nous nous proposons d'exposer la méthode de Cauchy avec les éclaircissements et les développements convenables, et de l'appliquer au calcul de l'inégalité à longue période du moyen mouvement de Vénus sous l'action perturbatrice de la Terre. Cette inégalité a été remarquée pour la première fois par l'astronome Airy.

PREMIÈRE PARTIE

§ 1er.

Soient ψ, ψ' les anomalies excentriques des deux planètes, T, T' les anomalies moyennes, on aura les relations :

$$T = \psi - \varepsilon \sin \psi, \qquad T' = \psi' - \varepsilon' \sin \psi'$$

ε, ε' désignant les excentricités.

Posons : $$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad y = e^{\psi'\sqrt{-1}}$$

Nous allons supposer R développé pour chaque valeur de ψ' suivant les puissances de x, ou pour chaque valeur de ψ suivant les puissances de y, et nous appellerons :

A_n le coefficient [1] de x^n, $A_{n'}$ celui de $y^{n'}$.

Appelons A_n le coefficient de $e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}}$ dans le développement de R suivant les puissances de $e^{\mathrm{T}\sqrt{-1}}$, $\mathrm{A}_{n'}$ le coefficient de $e^{n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}$ dans le développement de R suivant les puissances de $e^{\mathrm{T}'\sqrt{-1}}$, $\mathrm{A}_{n',-n}$ le coefficient de $e^{(n'\mathrm{T}'-n\mathrm{T})\sqrt{-1}}$ dans le développement de R en série double ordonnée suivant les puissances de $e^{\mathrm{T}\sqrt{-1}}$, $e^{\mathrm{T}'\sqrt{-1}}$.

Le calcul des perturbations dépendra de la connaissance des coefficients $\mathrm{A}_{n',-n}$.

Nous allons voir que les coefficients A_n ou $\mathrm{A}_{n'}$ pourront être connus au moyen des coefficients A_n ou $A_{n'}$, et que les coefficients $\mathrm{A}_{n',-n}$ pourront ensuite être connus au moyen des coefficients A_n ou $\mathrm{A}_{n'}$.

Cherchons, par exemple, $\mathrm{A}_{n'}$.

On a :

$$(1) \qquad \mathrm{R} = \Sigma\, A_{n'-l'}\, y^{n'-l'}$$

Nous supposons n' fixe, quelle que soit sa valeur entière, positive ou négative ; le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières, positives ou négatives de l'.

Posons :

$$(2) \qquad \mathrm{R} = \ldots\ldots \mathrm{A}_{n'}\, e^{n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} \ldots\ldots$$

On en déduit :

$$(3) \qquad \mathrm{A}_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}\, d\mathrm{T}'\ldots.$$

et à cause de l'équation (1)

[1] Les coefficients du développement suivant les puissances de x et y seront représentés par des lettres italiques.

$$(4) \qquad A_{n'} = \ldots \frac{1}{2\pi} A_{n'-l'} \int_0^{2\pi} y^{n'-l'} e^{-n'T'\sqrt{-1}} dT' \ldots$$

$A_{n'-l'}$ qui dépend de ψ a pu passer en dehors du signe $\int$. On voit que $A_{n'}$ est fourni par une série qu'on obtient en donnant à l' les diverses valeurs entières.

Mais :

$$\int_0^{2\pi} y^{n'-l'} e^{-n'T'\sqrt{-1}} dT' = \frac{n'-l'}{n'\sqrt{-1}} \int_0^{2\pi} y^{n'-l'-1} e^{-n'T'\sqrt{-1}} dy$$

$$dy = y\sqrt{-1}\, d\psi'$$

On peut prendre la variable ψ' au lieu de T' et conserver les mêmes limites d'intégration.

L'équation (4) devient alors :

$$(5) \qquad A_{n'} = \ldots \frac{1}{2\pi} \frac{n'-l'}{n'} A_{n'-l'} \int_0^{2\pi} y^{n'-l'} e^{-n'T'\sqrt{-1}} d\psi' \ldots$$

Remplaçons maintenant $e^{-n'T'\sqrt{-1}}$ par sa valeur

$$e^{-n'T'\sqrt{-1}} = y^{-n'} e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)}$$

On aura :

$$(6) \qquad A_{n'} = \ldots \frac{1}{2\pi} \frac{n'-l'}{n'} A_{n'-l'} \int_0^{2\pi} y^{-l'} e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)} d\psi' \ldots$$

Posons :

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^{-l'} e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)} d\psi' = E_{l'}$$

On aura :

$$(8) \qquad A_{n'} = \ldots \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) A_{n'-l'} E_{l'} \ldots .$$

Chacun des coefficients $A_{n'-l'}$ est connu pour une valeur de ψ, on peut donc aussi connaître $A_{n'}$.

Si, au contraire, on voulait A_n, le calcul serait identiquement le même, on aurait :

(9) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-l} e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} d\psi = E_l$$

(10) $$A_n = \ldots \left(1-\frac{l}{n}\right) A_{n-l}\, E_l \ldots .$$

Chacun des coefficients A_{n-l} est connu pour une valeur de ψ', on peut donc aussi connaître A_n.

Il reste à trouver ces quantités $E_{l'}$ ou E_l ; il suffit de trouver l'une d'elles. Cette quantité est ce qu'on appelle la transcendante de Bessel.

Cherchons, par exemple, $E_{l'}$.

Si on développait $e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)}$ suivant les puissances de y, le coefficient de $y^{l'}$ serait $E^{l'}$. Posons :

$$\frac{n'\varepsilon'}{2} = c'$$

En développant $e^{c'\left(y-\frac{1}{y}\right)}$, on aura :

$$e^{c'\left(y-\frac{1}{y}\right)} = 1 + \frac{c'}{1}\left(y-\frac{y}{1}\right) + \frac{c'^2}{1.2}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2 \ldots .$$

D'où on déduit facilement en supposant l' positif le coefficient de $y^{l'}$

(11) $$E_{l'} = \frac{c'^{l'}}{1..l'}\left(1 - \frac{c'}{1}\cdot\frac{c'}{l'+1} + \frac{c'^2}{1.2}\,\frac{c'^2}{(l'+1)(l'+2)}\ldots\right)$$

le terme général de la parenthèse serait :

$$\frac{c'^p}{1\,..\,p}\cdot\frac{c'^p}{(l'+1)(l'+2)\ldots(l'+p)}$$

Ce terme sera positif si p est pair, négatif si p est impair. Telle est la valeur de la transcendante de Bessel.

On peut l'écrire :

$$E_{l'} = \frac{c'^{l'}}{1 \ldots l'} J_{l'} \tag{12}$$

$$J_{l'} = 1 - \frac{c'}{1}\frac{c'}{(l'+1)} + \frac{c'^2}{1.2}\frac{c'^2}{(l'+1)(l'+2)} \cdots \tag{13}$$

Il est à remarquer que si dans l'expression $e^{c'\left(y - \frac{1}{y}\right)}$ on change y en $\frac{1}{y}$ et le signe de c', il n'y aura rien de changé ; de sorte qu'on peut faire ce changement dans le développement de $e^{c'\left(y - \frac{1}{y}\right)}$. Alors $y^{l'}$ devient $y^{-l'}$ et son coefficient, en changeant le signe de c', ne change pas si l' est pair, mais change de signe si l' est impair ; d'où :

$$E_{l'} = (-1)^{l'} E_{l'} \tag{14}$$

Ainsi, une fois qu'on a calculé la transcendante de Bessel pour l' positif, on a sa valeur pour l' négatif. Si on considère maintenant trois valeurs consécutives de $J_{l'}$, $J_{l'-1}$, $J_{l'}$, $J_{l'+1}$, il est facile de voir qu'en multipliant $J_{l'+1}$ par une constante et ajoutant le produit à $J_{l'-1}$, on reproduit $J_{l'}$; la valeur de la constante est : $\frac{c'^2}{l'(l'+1)}$

On aura donc :

$$J_{l'} = J_{l'-1} + \frac{c'^2}{l'(l'+1)} J_{l'+1} \tag{15}$$

Au reste, on peut vérifier comme il suit cette équation :

$$E_{l'-1} + E_{l'+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y^{-l'} e^{c'\left(y - \frac{1}{y}\right)}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) y d\psi'$$

Remplaçant $yd\psi'$ par $\frac{dy}{\sqrt{-1}}$ et intégrant par partie, on trouve :

$$= \frac{l'}{2\pi c'\sqrt{-1}} \int_0^{2\pi} y^{-l'-1} e^{c'\left(y-\frac{1}{y}\right)} dy$$

$$= \frac{l'}{2\pi c'} \int_0^{2\pi} y^{-l'} e^{c'\left(y-\frac{1}{y}\right)} d\psi'$$

C'est-à-dire :

$$(16) \qquad E_{l'-1} + E_{l'+1} = \frac{l'}{c'} E_{l'}$$

En remplaçant $E_{l'-1}$, $E_{l'}$, $E_{l'+1}$ par leur valeur (12), on a la relation (15).

Il suffit donc d'avoir deux valeurs consécutives de la transcendante de Bessel pour les avoir toutes ; on peut alors admettre qu'on connaît cette transcendante. Reprenons maintenant la formule (8), et supposons qu'on néglige $E_{l'}$ pour l' supérieur ou valeur absolue à 1, on aura pour une valeur de ψ

$$(17) \quad A_{n'} = A_{n'} E_0 + \left(1 - \frac{1}{n'}\right) A_{n'-1} E_1 + \left(1 + \frac{1}{n'}\right) A_{n'+1} E_{-1}$$

d'ailleurs la formule (11) donne approximativement

$$E_0 = 1, \; E_1 = - E_{-1} = \frac{n'\varepsilon'}{2}$$

On a donc :

$$(18) \; A_{n'} = A_{n'} + \left(1 - \frac{1}{n'}\right) A_{n'-1} \frac{n'\varepsilon'}{2} - \left(1 + \frac{1}{n'}\right) A_{n'+1} \frac{n'\varepsilon'}{2}$$

La quantité négligée est à peu près de l'ordre du carré de l'excentricité.

En posant : $\dfrac{n\varepsilon}{2} = c$

et développant $e^{c\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ on aurait une formule analogue à (11) pour obtenir E_l, puis des formules analogues à (12), (13), (14), (15), (16) ; enfin, pour obtenir A_n des formules analogues à (17), (18), en remplaçant $A_{n'}$ par A_n.

La formule (18) peut se trouver directement.

On a :

$$A_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}\, d\mathrm{T}'$$

Mais $\mathrm{T}' = \psi' - \varepsilon' \sin \psi'$

D'où on tire :

$$(19)\quad A_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}y^{-n'} e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)} \left\{1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\} d\psi'$$

On conclut de la formule (19) que $A_{n'}$ est le coefficient de $y^{n'}$ dans le développement de

$$(20)\qquad \mathrm{R}\left\{1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\} e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

suivant les puissances de y. Remplaçons dans (20) $e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)}$ par sa valeur approchée

$$1 + \frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)$$

on aura :

$$(21)\qquad \mathrm{R}\left\{1 + \frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right) - \frac{\varepsilon'}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\}$$

Supposons maintenant R développé suivant les puissances de y, le coefficient de $y_{n'}$ dans l'expression (21) sera fourni par les termes $A_{n'}$, $A_{n'+1}$, $A_{n'-1}$, on aura donc :

$$(22)\qquad A_{n'} = A_{n'} + A_{n'-1}\left(\frac{n'\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon'}{2}\right) - A_{n'+1}\left(\frac{n'\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2}\right)$$

C'est précisément la formule (18).

On trouverait de même A_n.

La formule (8) donne tous les coefficients $A_{n'}$, sauf pour $n' = 0$, à cause de l'intégration qui a été faite pour obtenir la formule (5). Cherchons donc directement A_0.

L'équation (2) donne :

$$(23) \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R dT'$$

Remplaçons R par sa valeur

$$(24) \qquad R = \Sigma A_{l'} y^{l'}$$

Σ s'étend à toutes les valeurs entières de l', on aura :

$$(25) \qquad A_0 = \ldots \frac{1}{2\pi} A_{l'} \int_0^{2\pi} y^{l'} dT' \ldots .$$

A_0 est formé par une série qu'on obtient en donnant à l' les diverses valeurs entières.

Considérons l'expression :

$$\int_0^{2\pi} y^{l'} dT' = \int_0^{2\pi} e^{l'\psi'\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon' \cos \psi') d\psi'$$

$$= \int_0^{2\pi} (e^{l'\psi'\sqrt{-1}} - \frac{\varepsilon'}{2} e^{(l'+1)\psi'\sqrt{-1}} - \frac{\varepsilon'}{2} e^{(l'-1)\psi'\sqrt{-1}} d\psi')$$

l'intégration donne identiquement zéro, sauf pour

$$l' = 0 , \ l' = 1, \ l' = -1$$

Pour $l' = 0$ on trouve 2π

Pour $l' = 1$ . ... $- 2\pi \frac{\varepsilon'}{2}$

Pour $l' = -1$ .... $- 2\pi \frac{\varepsilon'}{2}$

alors l'équation (25) devient :

$$(26) \qquad A_0 = A_0 - \frac{\varepsilon'}{2}(A_1 + A_{-1})$$

On peut donc supposer connus tous les coefficients de R développé suivant les puissances de $e^{T'\sqrt{-1}}$ pour chaque valeur de ψ, et de même tous les coefficients de R développé suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$ pour chaque valeur de ψ', pourvu qu'on connaisse le développement suivant les puissances de y ou suivant les puissances de x.

§ 2.

Nous allons voir maintenant comment, connaissant A_n pour chaque valeur de ψ' ou $A_{n'}$ pour chaque valeur de ψ, on peut trouver $A_{n',-n}$ coefficient de $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ dans le développement de R en série double ordonnée suivant les puissances entières de $e^{T\sqrt{-1}}$, $e^{T'\sqrt{-1}}$.

Cherchons, par exemple, $A_{n',-n}$ au moyen de $A_{n'}$.

Si on développe R suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$, on aura :

$$R = \ldots\ldots A_{-n}\, e^{-nT\sqrt{-1}} \ldots\ldots \tag{27}$$

A_{-n} peut se développer suivant les puissances de $e^{T'\sqrt{-1}}$

$$A_{-n} = \ldots\ldots A_{n',-n}\, e^{n'T'\sqrt{-1}} \ldots\ldots \tag{28}$$

car le coefficient de $e^{n'T'\sqrt{-1}}$ sera évidemment $A_{n',-n}$, d'où :

$$A_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_{-n}\, e^{-n'T'\sqrt{-1}}\, dT' \tag{29}$$

Mais d'après le paragraphe précédent :

$$A_{-n} = \ldots\ldots \left(1 + \frac{l}{n}\right) A_{-n-l}\, E_l \ldots \tag{30}$$

Cet E_l est la transcendante déjà désignée par la formule (9), seulement n est changé en $-n$. On a :

$$E_l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-l}\, e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\, d\psi \tag{31}$$

et en posant $$-\frac{n\varepsilon}{2} = c$$

(32) $$E_l = \frac{c^l}{1..l}\left(1 - \frac{c}{1}\frac{c}{l+1} + \frac{c^2}{1.2}\cdot\frac{c^2}{(l+1)(l+2)}\cdots\right)$$

La formule (29) devient, d'après la formule (30) :

(33) $$A_{n',-n} = \ldots\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{l}{n}\right) A_{-n-l}\, E_l\, e^{-n'T'\sqrt{-1}}\, dT'\ldots$$

On voit que $A_{n',-n}$ est fourni par une série provenant des diverses valeurs entières de l.

Rappelons maintenant la formule :

(34) $$R = \ldots\ldots A_{-n-l}\, x^{-n-l}\ldots\ldots$$

et cherchons les diverses valeurs de ψ propres à vérifier l'équation :

(35) $$x^k = 1$$

La somme des puissances semblables des racines de cette équation donne zéro ou k, selon que l'exposant de la puissance n'est pas multiple de k ou est multiple de k. Multiplions les deux membres de l'équation (34) par x^{n+l} et mettons à la place de x dans l'équation obtenue les diverses racines de l'équation (35), puis faisons la somme des divers résultats. Considérons une valeur particulière de l, l'équation (34) contiendra les termes dont les coefficients seront :

$$A_{-n-l-k}\,,\ A_{-n-l-2k}\ \ldots\ldots\ A_{-n-l+k}\,,\ A_{-n-l+2k}\ldots\ldots$$

Ce seront précisément ces termes qui, après la multiplication par x^{n+l}, auront des exposants multiples de k.

On aura donc :

(36) $$\Sigma R x^{n+l} = k\,(A_{-n-l} + A_{-n-l-k}\ldots)$$

d'où on tire :

(37) $$A_{-n-l} = \frac{1}{k}\,\Sigma R x^{n+l} - s$$

$$(38)\qquad s = A_{-n-l-k} + A_{-n-l-2k} \ldots + A_{-n-l+k} \ldots$$

Il faut remarquer que s est fonction de ψ', et que le signe Σ s'étend à toutes les racines de $x^k = 1$.

Mettons dans l'équation (33) pour A_{-n-l} sa valeur (37).

On aura :

$$(39)\qquad \mathrm{A}_{n',-n} = \ldots \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l\, e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} d\mathrm{T}' \left(\frac{1}{k}\,\Sigma \mathrm{R}x^{n+l} - s\right)$$

Mais on a :

$$\mathrm{A}_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} d\mathrm{T}' \ldots.$$

Alors l'équation (39) devient :

$$(40)\qquad \mathrm{A}_{n',-n} = \ldots \frac{1}{k}\left\{\left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l \Sigma\, \mathrm{A}_{n'} x^{n+l}\right\}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l\, e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} s\, d\mathrm{T}' \ldots$$

Pour chaque valeur de l, le signe Σ se rapporte aux diverses racines de $x^k = 1$, et $\mathrm{A}_{n',-n}$ est fourni par une série provenant des diverses valeurs entières de l.

Remarquons maintenant que si on développait $e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ suivant les puissances de x, on aurait :

$$(41)\qquad e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \ldots\ldots \mathrm{E}_l x^l \ldots\ldots$$

d'où, en prenant les dérivées des deux nombres, multipliant par $\frac{x}{n}$ et ajoutant le résultat à l'équation (41), on aura :

$$(42)\qquad e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} \left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\} = \ldots \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l x^l \ldots$$

Mais :

$$e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \left(\frac{e}{x}^{\mathrm{T}\sqrt{-1}}\right)^{n}$$

L'équation (42) devient alors :

(43) $$\left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\} e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}} = \ldots\ldots \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l x^{l+n} \ldots$$

Par suite (40) devient :

(44) $$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k} \Sigma \mathrm{A}_{n'} e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}} \left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\} - i$$

(45) $$i = \ldots \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} s d\mathrm{T}' \ldots\ldots$$

(46) $$s = A_{-n-l-k} \ldots\ldots + A_{-n-l+k} \ldots\ldots$$

On pourra négliger i pour une valeur convenable de k.

Alors l'équation (44) deviendra, en remplaçant $1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ par sa valeur :

(47) $$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k} \Sigma \mathrm{A}_{n'} e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}} (1-\varepsilon\cos\psi)$$

Il ne faut pas oublier que dans cette formule Σ s'étend à toutes les racines de $x^k = 1$.

Si, au contraire, on veut trouver $\mathrm{A}_{n',-n}$ au moyen de A_{-n}, on posera :

(48) $$\mathrm{R} = \ldots \mathrm{A}_{n'} e^{n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} \ldots\ldots$$

(49) $$\mathrm{A}_{n'} = \ldots \mathrm{A}_{n',-n} e^{-n\mathrm{T}\sqrt{-1}} \ldots\ldots$$

(50) $$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{A}_{n'} e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}} d\mathrm{T}$$

Une marche analogue à celle qui a été suivie précédemment donnera, en négligeant une quantité i':

(51) $$A_{n',-n} = \frac{1}{k'} \Sigma A_{-n} e^{-n'T'\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon' \cos \psi')$$

(52) $$i' = \ldots \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) E_{l'} e^{nT\sqrt{-1}} s' dT \ldots.$$

$E_{l'}$ est la transcendante de la formule (7).

(53) $$s' = A_{n'-l'-k'} + \ldots + A_{n'-l'+k'} \ldots.$$

s' est fonction de ψ et Σ s'étend dans la formule (51) à toutes les racines de

(54) $$y^{k'} = 1$$

La formule (51) pouvait d'ailleurs se déduire de (47) par un simple changement de lettres.

La formule (47) peut être trouvée très-simplement.

Prenons la formule (50) et remplaçons dT par sa valeur $dT = (1 - \varepsilon \cos \psi) d\psi$; remarquons qu'on a avec une approximation d'autant plus grande que k est plus considérable, $d\psi = \frac{2\pi}{k}$; la formule (50) donne immédiatement la formule (47).

On aurait de même la formule (51) en partant de la formule (29), remplaçant dT' par sa valeur $dT' = (1 - \varepsilon' \cos \psi') d\psi'$, et approximativement $d\psi'$ par $\frac{2\pi}{k'}$.

Le problème du développement de R en série double ordonnée suivant les puissances entières de $e^{T\sqrt{-1}}$, $e^{T'\sqrt{-1}}$, est donc résolu, pourvu qu'on connaisse le développement de R suivant les puissances de $x = e^{\psi\sqrt{-1}}$ ou de $y = e^{\psi'\sqrt{-1}}$.

§ 3.

Nous allons développer maintenant R suivant les puissances de x ou de y

$$R = \frac{1}{\mathrm{r}} - \frac{r \cos \delta}{r'^2}$$

On peut développer séparément $\frac{1}{\mathrm{r}}$ et $\frac{-r \cos \delta}{r'^2}$ et appeler A_n, $A_{n'}$ les coefficients de x^n, $y^{n'}$ dans chaque développement partiel; il n'y aura plus qu'à faire la somme des coefficients pour avoir les coefficients de R que nous avons aussi désignés par A_n, $A_{n'}$.

Occupons-nous d'abord de la partie principale $\frac{1}{\mathrm{r}}$.

On va voir qu'on pourra exprimer $\frac{1}{\mathrm{r}}$ en fonction des anomalies excentriques, à l'aide des exponentielles x et y, et décomposer $\frac{1}{\mathrm{r}}$ en facteurs; il sera facile ensuite d'effectuer le développement.

Nous prendrons les notations suivantes :

$$(55) \left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{r} & \text{distance mutuelle des deux planètes.} \\ rr' & \text{leurs distances au Soleil.} \\ \delta & \text{leur distance apparente vue du Soleil.} \\ vv' & \text{les anomalies vraies.} \\ \mathrm{TT}' & \text{les anomalies moyennes.} \\ \psi\psi' & \text{les anomalies excentriques.} \\ pp' & \text{les distances des périhélies à l'intersection des orbites.} \\ \mathrm{I} & \text{l'inclinaison mutuelle des orbites.} \\ aa' & \text{les demi-grands axes des orbites elliptiques.} \\ \varepsilon\varepsilon' & \text{les excentricités.} \end{array} \right.$$

Posons en outre pour abréger :

$$(56) \left\{ \begin{array}{ll} f = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, & f' = \sqrt{1 - \varepsilon'^2} \\ \mu = \cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{I}, & \mu' = \sin^2 \frac{1}{2} \mathrm{I} \\ d = p' - p, & d' = p' + p \end{array} \right.$$

On aura les équations :

$$(57)\qquad \mathrm{r}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\delta$$

$$(58)\qquad \cos\delta = \cos(v+p)\cos(v'+p') + \sin(v+p)\sin(v'+p')\cos \mathrm{I}$$

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} r &= a(1-\varepsilon\cos\psi), & r' &= a'(1-\varepsilon'\cos\psi') \\ r\cos v &= a(\cos\psi-\varepsilon), & r'\cos v' &= a'(\cos\psi'-\varepsilon') \\ r\sin v &= af\sin\psi, & r'\sin v' &= a'f'\sin\psi' \\ \mathrm{T} &= \psi-\varepsilon\sin\psi, & \mathrm{T}' &= \psi'-\varepsilon'\sin\psi' \end{aligned}\right.$$

En transformant l'équation (58) et tenant compte des relations (56), posant en outre :

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mu\cos d + \mu'\cos d' & \mathrm{N} &= \mu\sin d + \mu'\sin d' \\ \mathrm{M}' &= \mu\cos d - \mu'\cos d' & \mathrm{N}' &= \mu\sin d - \mu'\sin d' \end{aligned}\right.$$

on aura :

$$(61)\qquad \begin{aligned} \cos\delta = \mathrm{M}\cos v'\cos v + \mathrm{M}'\sin v'\sin v - \mathrm{N}\sin v'\cos v \\ + \mathrm{N}'\sin v\cos v' \end{aligned}$$

On obtient maintenant facilement, à l'aide des équations (59), les valeurs de $rr'\cos\delta$, r^2, r'^2. On trouve ainsi :

$$(62)\quad \mathrm{r}^2 = \left\{\begin{aligned} & a^2(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) + a'^2(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon'^2) - 2a'\varepsilon\cos\psi - 2a'^2\varepsilon'\cos\psi' \\ & \qquad + \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon^2\cos 2\psi + \tfrac{1}{2}a'^2\varepsilon'^2\cos 2\psi' \\ & - aa'(\mathrm{M}+\mathrm{M}'ff')\cos(\psi-\psi') - aa'(\mathrm{N}'f+\mathrm{N}f')\sin(\psi-\psi') \\ & - aa'(\mathrm{M}-\mathrm{M}'ff')\cos(\psi+\psi') - aa'(\mathrm{N}'f-\mathrm{N}f')\sin(\psi+\psi') \\ & + 2\mathrm{M}aa'\varepsilon\cos\psi' + 2\mathrm{M}aa'\varepsilon'\cos\psi - 2\mathrm{M}aa'\varepsilon\varepsilon' - 2\mathrm{N}aa'f'\varepsilon\sin\psi' \\ & \qquad + 2\mathrm{N}'aa'f\varepsilon'\sin\psi \end{aligned}\right.$$

Donc, enfin, en posant :

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} h &= a^2(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) + a'^2(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon'^2) - 2\mathrm{M}aa'\varepsilon\varepsilon' \\ k\cos\alpha &= -aa'(\mathrm{M}+\mathrm{M}'ff'), & k\sin\alpha &= -aa'(\mathrm{N}'f+\mathrm{N}f') \\ c\cos\gamma &= -aa'(\mathrm{M}-\mathrm{M}'ff'), & c\sin\gamma &= -aa'(\mathrm{N}'f-\mathrm{N}f') \\ b\cos\beta &= 2(a^2\varepsilon-\mathrm{M}aa'\varepsilon'), & b\sin\beta &= -2\mathrm{N}'aa'f\varepsilon' \\ b'\cos\beta' &= 2(a'^2\varepsilon'-\mathrm{M}aa'\varepsilon), & b'\sin\beta' &= 2\mathrm{N}aa'f'\varepsilon \\ i &= \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon^2, & i' &= \tfrac{1}{2}a'^2\varepsilon'^2 \end{aligned}\right.$$

On obtient :

$$(64)\ \mathrm{r}^2 = \begin{cases} h + k\cos(\psi - \psi' - \alpha) - b\cos(\psi - \beta) - b'\cos(\psi' - \beta') \\ + c\cos(\psi + \psi' - \gamma) + i\cos 2\psi + i'\cos 2\psi' \end{cases}$$

On a donc r^2 en fonction de constantes et des anomalies excentriques.

La valeur de r^2 ne doit pas changer en changeant ψ' en ψ, et réciproquement. Alors il faut changer :

$$\begin{array}{lll} f' \text{ en } f, & \varepsilon' \text{ en } \varepsilon, & a' \text{ en } a \\ d \text{ en } -d, & \mathrm{N} \text{ en } -\mathrm{N}' & \\ \alpha \text{ en } -\alpha, & b \text{ en } +b' & \\ \beta \text{ en } \beta', & i \text{ en } i' & \end{array}$$

et réciproquement, les autres constantes ne changent pas.

Cette remarque permettra de vérifier les formules qui suivent.

Il peut être utile de savoir ce que deviennent les constantes (56), (60), (63), quand on néglige les quantités du second ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle des orbites.

On obtient ainsi :

$$(65) \begin{cases} f = f' = 1, \quad \mu = 1, \quad \mu' = 0\,. \\ \mathrm{M} = \mathrm{M}' = \cos d, \quad \mathrm{N} = \mathrm{N}' = \sin d, \quad \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 = 1 \\ h = a^2 + a'^2 \\ k\cos\alpha = -2aa'\mathrm{M}, \quad k\sin\alpha = -2aa'\mathrm{N}, \quad k = 2aa' \\ c\cos\gamma = 0\,, \quad c\sin\gamma = 0 \\ b\cos\beta = 2(a^2\varepsilon - \mathrm{M}aa'\varepsilon'), \quad b\sin\beta = -2\mathrm{N}'aa'\varepsilon' \\ b'\cos\beta' = 2(a'^2\varepsilon' - \mathrm{M}aa'\varepsilon), \quad b'\sin\beta' = 2\mathrm{N}aa'\varepsilon \\ i = 0 \quad i' = 0 \end{cases}$$

Les constantes h, k, c, b, b', i, i' sont positives, et c est du second ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle des orbites, ainsi que μ', i, i'.

Des formules (65) on déduit :

$$(66)\quad \begin{cases} kb' \cos(\alpha + \beta') = 2a'^2 b \cos\beta, & ab' \cos(\alpha+\beta') = a'b \cos\beta \\ kb' \sin(\alpha + \beta') = 2a'^2 b \sin\beta, & ab' \sin(\alpha+\beta') = a'b \sin\beta \\ \multicolumn{2}{c}{ab' = ba'} \\ \cos(\alpha+\beta') = \cos\beta, & \sin(\alpha+\beta') = \sin\beta \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha + \beta' = \beta} \end{cases}$$

Les angles sont variables de 0 à 360.

Rappelons maintenant les expressions :

$$(67)\qquad x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad y = e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

Posons :

$$(68)\quad \begin{cases} \mathrm{H} = h - b\cos(\psi - \beta) + i\cos 2\psi \\ \mathrm{K}\cos\omega = k\cos(\psi - \alpha) + c\cos(\psi - \gamma) - b'\cos\beta' \\ \mathrm{K}\sin\omega = k\sin(\psi - \alpha) - c\sin(\psi - \gamma) - b'\sin\beta' \end{cases}$$

H, K, ω sont, comme on voit, fonction de ψ.

L'équation (64) deviendra :

$$(69)\qquad \mathrm{r}^2 = \mathrm{H} + \mathrm{K}\cos(\psi' - \omega) + i'\cos 2\psi'$$

Ou bien :

$$\mathrm{r}^2 = \frac{i'}{2y^2}\left(y^4 + \frac{\mathrm{K}}{i'}e^{-\omega\sqrt{-1}}y^3 + \frac{2\mathrm{H}}{i'}y^2 + \frac{\mathrm{K}}{i'}e^{\omega\sqrt{-1}}y + 1\right)$$

Et si on pose :

$$(70)\qquad \frac{\mathrm{K}}{i'} = 2p, \qquad \frac{\mathrm{H}}{i'} = 3q$$

on aura :

$$(71)\qquad \mathrm{r}^2 = \frac{i'}{2y^2}\left(y^4 + 2pe^{-\omega\sqrt{-1}}y^3 + 6qy^2 + 2pe^{\omega\sqrt{-1}}y + 1\right)$$

Si on avait voulu mettre en évidence dans l'expression de r^2, non pas l'exponentielle y mais l'exponentielle x, on aurait posé :

$$(72)\quad \begin{cases} H' = h - b'\cos(\psi' - \beta') + i'\cos 2\psi' \\ K'\cos\omega' = k\cos(\psi' + \alpha) + c\cos(\psi' - \gamma) - b\cos\beta \\ K'\sin\omega' = k\sin(\psi' + \alpha) - c\sin(\psi' - \gamma) - b\sin\beta \end{cases}$$

H', K', ω' sont, comme on voit, fonction de ψ'.

L'équation (64) devient alors :

$$(73)\qquad r^2 = \frac{i}{2x^2}\left(x^4 + 2p'e^{-\omega'\sqrt{-1}}x^3 + 6q'x^2 + 2p'e^{\omega'\sqrt{-1}}x + 1\right)$$

En posant :

$$(74)\qquad \frac{K'}{i} = 2p', \qquad \frac{H'}{i} = 3q'$$

En négligeant les quantités du second ordre, les équations (68) donnent :

$$(75)\quad \begin{cases} H = h - b\cos(\psi - \beta) \\ K = \sqrt{k^2 + b'^2 - 2kb'\cos(\psi - \alpha - \beta')} \\ \text{tang}\ \omega = \dfrac{k\sin(\psi - \alpha) - b'\sin\beta'}{k\cos(\psi - \alpha) - b'\cos\beta'} \end{cases}$$

De même :

$$(76)\quad \begin{cases} H' = h - b'\cos(\psi' - \beta') \\ K' = \sqrt{k^2 + b^2 - 2bk\cos(\psi' + \alpha - \beta)} \\ \text{tang}\ \omega' = \dfrac{k\sin(\psi' + \alpha) - b\sin\beta}{k\cos(\psi' + \alpha) - b\cos\beta} \end{cases}$$

On pourrait réduire ces expressions à l'aide des équations (65), (66).

En comparant l'équation (71) à l'équation (73), on voit qu'on passe de l'une à l'autre par de simples changements de lettres. Il suffira donc de considérer l'une d'elles. Considérons, par exemple, l'équation (71).

Pour décomposer r^2 en facteurs, il faudra résoudre l'équation :

$$(77)\qquad y^4 + 2pe^{-\omega\sqrt{-1}}y^3 + 6qy^2 + 2pe^{\omega\sqrt{-1}}y + 1 = 0$$

Les coefficients sont fonction de ψ.

Soit : $\qquad y = \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}$

une racine de cette équation ; on aura identiquement :

$$(78)\quad \rho^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \rho^{-2} e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + 2p\left\{\rho e^{(\varphi-\omega)\sqrt{-1}} + \rho^{-1} e^{-(\varphi-\omega)\sqrt{-1}}\right\} + 6q = 0$$

et comme cette équation se partage en deux à cause des imaginaires, on voit que l'équation (77) est aussi vérifiée par :

$$y = \frac{1}{\rho}\, e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

Les racines de l'équation (77) sont donc :

$$(79)\qquad \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}, \ \frac{1}{\rho}\, e^{\varphi\sqrt{-1}}, \ \rho' e^{\varphi'\sqrt{-1}}, \ \frac{1}{\rho'}\, e^{\varphi'\sqrt{-1}}$$

Par suite l'équation (71) devient :

$$(80)\qquad \mathrm{r}^2 = \frac{i'}{2\rho\rho'}\left(1 - \rho y^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \rho y e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \rho' y^{-1} e^{\varphi'\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \rho' y e^{-\varphi'\sqrt{-1}}\right) e^{(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}}$$

Le produit des deux facteurs

$$\left(1 - \rho y^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \rho y\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right) = 1 - 2\rho \cos(\varphi' - \varphi) + \rho^2$$

est positif ainsi que le produit des deux autres facteurs analogues ; et comme r^2 est positif, on en conclut :

$$e^{(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}} > 0$$

Mais le produit des quatre racines de l'équation (77) étant égal à 1

$$e^{2(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}} = 1$$

d'où $$e^{(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}} = 1, \qquad e^{\varphi'\sqrt{-1}} = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$

Les quatre racines de l'équation (77) sont donc :

$$(81) \qquad y_1 = \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad y_2 = \frac{1}{\rho} e^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad y_3 = \rho' e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$

$$y_4 = \frac{1}{\rho'} e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$

On voit que :

1° Les modules sont réciproques deux à deux ;

2° Les quatre arguments sont égaux au signe près.

Alors, en posant :

$$(82) \qquad \frac{2\rho\rho'}{i'} = S^2$$

l'équation (80) donne :

$$(83) \qquad \frac{1}{r} = S\left(1 - \rho y^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \rho y e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(1 - \rho' y^{-1} e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \rho' y e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Si on était parti de l'équation (75) en désignant par ρ_1, ρ'_1, φ_1, les quantités analogues à ρ, ρ', φ, et posant :

$$(84) \qquad \frac{2\rho_1\rho'_1}{i} = S'^2$$

on aurait une valeur (85) de $\frac{1}{r}$ analogue à (83).

Ainsi, on a décomposé $\frac{1}{r}$ en facteurs.

Il reste à calculer ρ, ρ', φ, et par suite S pour chaque valeur de ψ ou ρ_1, ρ'_1, φ_1, et par suite S' pour chaque valeur de ψ'.

§ 4.

On peut obtenir ρ, ρ', φ par la méthode des approximations successives.

L'équation (69) donne, en négligeant i' :

$$(86) \qquad r^2 = H + K\cos(\psi' - \omega)$$

Ou bien :

$$(87) \qquad r^2 = \frac{1}{y}\left(\frac{K}{2}e^{-\omega\sqrt{-1}}y^2 + Hy + \frac{K}{2}e^{\omega\sqrt{-1}}\right)$$

En égalant à zéro la valeur de r^2 fournie par (87), on aura deux racines approchées de (77). Ces racines auront le même argument avec des modules réciproques ; et, comme pour i' infiniment petit, l'équation (77) est vérifiée par une valeur très-petite de y et une valeur très-grande, on voit qu'en négligeant i' on néglige une racine dont le module est très-petit et une racine dont le module est très-grand.

Appelons ρ' le plus petit module, on aura pour valeur approchée de ρ' : $\rho' = 0$, et les deux racines approchées de (77) seront :

$$(88) \qquad \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}, \qquad \frac{1}{\rho} e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

qu'on obtiendra en résolvant l'équation :

$$(89) \qquad \frac{K}{2}e^{-\omega\sqrt{-1}}y^2 + Hy + \frac{K}{2}e^{\omega\sqrt{-1}} = 0$$

D'où on tire :

$$(90) \qquad y = e^{\omega\sqrt{-1}}\left(\frac{-H \pm \sqrt{H^2 - K^2}}{K}\right)$$

On a (75) :

$$(91) \qquad \frac{K}{H} = \frac{\sqrt{k^2 + b'^2 - 2kb'\cos(\psi - \alpha - \beta')}}{h - b\cos(\psi - \beta)}$$

D'après les valeurs des constantes (65), (66), il est facile de voir que K et H sont positifs, et que le rapport $\frac{K}{H}$ est plus petit que 1.

Considérons en effet le maximum de $\frac{K}{H}$, ce maximum a lieu sensiblement pour le maximum du numérateur, c'est-à-dire :

$$\psi - \alpha - \beta' = \pi$$

d'où, en tenant compte de la relation $\alpha + \beta' = \beta$,

$$(92) \qquad \frac{K}{H} = \frac{k + b'}{h + b}$$

Cette valeur maximum de $\frac{K}{H}$ est plus petite que 1.

On peut donc poser :

$$\sin \zeta = \frac{K}{H}$$

d'où la formule (90) donne :

$$(93) \qquad y = -e^{-\omega\sqrt{-1}} \left(\frac{1 \pm \cos \zeta}{\sin \zeta} \right)$$

et en posant : $\theta = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta$

θ sera plus petit que 1, et les valeurs de y seront :

$$(94) \qquad -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}, \quad -\frac{1}{\theta} e^{\omega\sqrt{-1}}$$

Par suite l'équation (87) deviendra :

$$(95) \qquad r^2 = \frac{K}{2\theta} \left(1 + \theta y^{-1} e^{\omega\sqrt{-1}}\right) \left(1 + \theta y e^{-\omega\sqrt{-1}}\right)$$

Les expressions (94) donnent pour valeurs approchées de ρ et φ

$$\rho = \theta, \qquad \varphi = \pi + \omega$$

On trouve donc pour première valeur :

$$(96) \qquad \rho = \theta, \qquad \rho' = 0, \qquad \varphi = \pi + \omega$$

Quant à la valeur de S (81) $\quad S = \sqrt{\frac{2\rho\rho'}{i'}}$

Comme $\rho' = 0$, en négligeant i', ρ' doit être de l'ordre de i'; $\frac{\rho'}{i'}$ sera fini, et les formules (82), (95) montrent que $S = \sqrt{\frac{2\theta}{K}}$ · Donc, en négligeant i', on a :

$$S = \sqrt{\frac{2\theta}{K}} \tag{97}$$

Voici maintenant comment on peut trouver des valeurs plus approchées des quantités ρ, ρ', φ, S.

L'équation :

$$r^2 = H + K\cos(\psi' - \omega) + i'\cos 2\psi'$$

devient, à cause de l'équation (95)

$$r^2 = \frac{K}{2\theta}\left(1 + \theta y^{-1} e^{\omega\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \theta y e^{-\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{i'}{2}\left(y^2 + y^{-2}\right) \tag{98}$$

En égalant à zéro le second membre, l'équation qu'il faut résoudre pour avoir ρ, ρ', φ devient :

$$y + \theta e^{\omega\sqrt{-1}} = \frac{-\theta i'}{K}\,\frac{y^2 + y^{-2}}{y^{-1} + \theta e^{-\omega\sqrt{-1}}} \tag{99}$$

En négligeant i', on retrouve la racine

$$y = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}$$

qui a donné une valeur approchée de ρ et φ ; de sorte qu'en remplaçant dans le second membre y par $-\theta e^{\omega\sqrt{-1}}$, on aura une seconde approximation pour ρ et φ. On trouve ainsi :

$$y = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{i'}{K}\,\frac{\theta^2 e^{2\omega\sqrt{-1}} + \theta^{-2} e^{-2\omega\sqrt{-1}}}{\theta^{-1} - \theta}\right) \tag{100}$$

Si on pose :

$$A = \frac{i'}{K}\,\frac{\theta^{-2}}{\theta^{-1} - \theta}, \qquad B = \frac{i'}{K}\,\frac{\theta^2}{\theta^{-1} - \theta} = A\theta^4 \tag{101}$$

on aura :

$$y = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}\left(1 - A e^{-2\omega\sqrt{-1}} - B e^{2\omega\sqrt{-1}}\right) \tag{102}$$

Posons maintenant :

$$1 - A\,e^{-2\omega\sqrt{-1}} - B\,e^{2\omega\sqrt{-1}} = r\,e^{\lambda\sqrt{-1}}$$

C'est-à-dire :

$$1 - (A + B)\cos 2\omega = r\cos\lambda\,, \qquad (A - B)\sin 2\omega = r\sin\lambda$$

D'où :

$$(103) \qquad \operatorname{tang}\lambda = \frac{(A - B)\sin 2\omega}{1 - (A + B)\cos 2\omega}\,, \qquad r = \frac{1 - (A + B)\cos 2\omega}{\cos\lambda}$$

L'équation (102) deviendra :

$$(104) \qquad y = \theta r\,e^{(\omega+\pi+\lambda)\sqrt{-1}}$$

d'où, pour une seconde approximation :

$$(105) \qquad \rho = \theta r\,, \qquad \varphi = \pi + \omega + \lambda$$

Pour avoir une troisième approximation, on remplacerait dans le second membre de l'équation (99) y par sa valeur

$$y = -\,\theta r\,e^{(\omega+\lambda)\sqrt{-1}} = -\,\theta_1\,e^{\omega_1\sqrt{-1}}$$

et il serait facile de calculer des quantités r_1, λ_1 qui donneraient :

$$\rho = \theta r_1\,, \qquad \varphi = \pi + \omega + \lambda_1$$

On obtiendrait des formules qui serviraient pour toutes les approximations. Mais les deux premières approximations suffiront ordinairement pour les valeurs de ρ et φ.

Pour calculer ρ', on met l'équation (98) sous la forme

$$(106) \qquad r^2 = \frac{K}{2\theta y^2}\left\{ y\left(y + \theta\,e^{\omega\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \theta y\,e^{-\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{\theta i'}{K}\left(y^4 + 1\right)\right\}$$

En égalant à zéro le second membre, on trouve :

$$(107)\quad y = \frac{-i'}{K} e^{-\omega\sqrt{-1}} - \left(\theta + \theta^{-1}\right) y^2 e^{-\omega\sqrt{-1}} - y^3 e^{-2\omega\sqrt{-1}} - \frac{i'}{K} y^4 e^{-\omega\sqrt{-1}}$$

Cette équation est satisfaite pour des valeurs infiniment petites de i' et un module infiniment petit de y, de sorte qu'en remplaçant y par

$$y = \rho' e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$

on aura les valeurs approchées de ρ'.

La première valeur est :

$$\rho' = \frac{i'}{K}$$

Les autres valeurs s'obtiendraient en négligeant les puissances successives de ρ' et remplaçant φ par ses valeurs successives approchées.

La première approximation suffira ordinairement pour ρ'.

En résumé, si on pose :

$$(108)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \arc\sin \frac{K}{H}\right) \quad \text{on aura pour première approximation :} \\ \rho = \theta, \quad \rho' = 0, \quad \varphi = \pi + \omega, \quad S = \sqrt{\frac{2\theta}{K}} \end{array} \right.$$

K, H, ω se calculeront par les formules (68) réduites au premier ordre.

On peut remarquer que $\rho = \theta$ ne peut être nul, car il faudrait que $\frac{K}{H}$ formule (91) fût nul ; mais d'après le tableau des constantes (65) $\frac{K}{H}$ ne peut être nul.

Pour avoir l'approximation suivante,

Les formules (101) détermineront A et B ;

Les formules (103) λ et r ;

Les formules (105) donneront une seconde approximation.

Quant aux valeurs de S, on a : $S^2 = \frac{2\rho\rho'}{i'}$

Il faudra remplacer ρ et $\frac{\rho'}{i'}$ par leurs valeurs successives, mais la première approximation $\rho' = \frac{i'}{K}$ suffira, c'est-à-dire qu'on aura :

$$S = \sqrt{\frac{2\theta}{K}} \quad \text{et } \rho' = 0 \text{ en négligeant } i'.$$

Si on décomposait r en facteurs et mettant en évidence l'exponentielle x, il faudrait calculer les quantités analogues à ρ, ρ', φ ; on aurait :

$$(109) \begin{cases} \theta' = \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{K'}{H'}\right) \\ \rho_1 = \theta', \qquad \rho'_1 = 0, \qquad \varphi_1 = \pi + \omega' \end{cases}$$

K', H', ω' se calculeraient par les formules (72) réduites au premier ordre.

Des formules analogues à (101), en changeant i' en i, K en K', θ en θ' détermineraient des quantités analogues à A, B ; puis on aurait une formule analogue à (103), puis une seconde approximation par des formules analogues à (105).

On aurait S' par la formule : $S' = \sqrt{\frac{2\theta'}{K'}}$.

Il peut être utile de savoir pour quelle valeur de ψ la quantité θ est maximum, ou pour quelle valeur de ψ' la quantité θ' est maximum, et de calculer les quantités correspondantes ρ, φ, ρ_1, φ_1. Ce maximum aura lieu pour le maximum de $\frac{K}{H}$ ou de $\frac{K'}{H'}$, mais le maximum $\frac{K}{H}$ formule (91) a déjà été trouvé pour : $\psi - \alpha - \beta' = \pi$.

Le maximum de θ ou de ρ s'en déduit ainsi que la valeur correspondante de φ. On a en effet, en négligeant le second ordre (68) :

$$(110) \begin{cases} H = h - b \cos(\psi - \beta) \\ K \cos \omega = k \cos(\psi - \alpha) - b' \cos \beta' \\ K \sin \omega = k \sin(\psi - \alpha) - b' \sin \beta' \end{cases}$$

d'où, en tenant compte des deux relations :

$$\psi - \alpha - \beta' = \pi, \qquad \alpha + \beta' = \beta$$

$$(111)\left\{\begin{array}{l} K = k + b', \qquad H = h + b \\ K\cos\omega = -k\cos\beta' - b'\cos\beta',\ K\sin\omega = -k\sin\beta' - b'\sin\beta' \\ \omega = \beta' + \pi, \qquad \varphi = \pi + \omega = \beta' \end{array}\right.$$

Ainsi, quand on a mis y en évidence dans la décomposition de $\frac{1}{r}$ en facteurs, si l'on veut calculer ρ et φ pour la valeur de ψ qui rend θ maximum, on aura :

$$(112)\left\{\begin{array}{l} \rho = \theta, \qquad \varphi = \pi + \omega = \beta' \\ \theta = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\text{ arc sin }\frac{K}{H}\right) \quad \frac{K}{H} = \frac{k+b'}{h+b} \end{array}\right.$$

De même, si on avait mis x en évidence, et si on voulait calculer ρ_1 et φ_1 pour la valeur de ψ' qui rend θ' maximum, on aurait :

$$(113)\left\{\begin{array}{l} \psi' + \alpha - \beta = \pi, \qquad \alpha + \beta' = \beta \\ \rho_1 = \theta', \qquad \varphi_1 = \pi + \omega' = \beta \\ \theta' = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\text{ arc sin }\frac{K'}{H'}\right), \quad \frac{K'}{H'} = \frac{k+b}{h+b'} \end{array}\right.$$

On vient de voir que, par la méthode des approximations successives, on peut calculer ρ, ρ', φ ou ρ_1, ρ'_1 φ_1, et par suite décomposer $\frac{1}{r}$ en facteurs. La méthode des approximations successives est la méthode qu'il convient de suivre dans les applications numériques; les calculs sont très-rapides avec les logarithmes d'addition ou de soustraction, ou logarithmes de Gauss; mais on peut aussi calculer ρ, ρ', φ ou ρ_1, ρ'_1, φ_1 directement comme il suit.

Il faut résoudre l'équation (77), dont les quatre racines sont (80).

En remplaçant dans l'équation (77) y par sa valeur $\rho e^{\varphi\sqrt{-1}}$, on a pour déterminer ρ et φ les deux équations :

$$(114)\qquad \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi + 2p\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos(\varphi - \omega) + 6q = 0$$

$$(115)\qquad \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin 2\varphi + 2p\sin(\varphi - \omega) = 0$$

L'élimination de ρ entre ces deux équations donne :

$$(116)\qquad p^2 \{\sin 2\varphi \sin(2\varphi - 2\omega) - 2\cos 2\varphi \sin^2(\varphi - \omega)\} + \sin^2 2\varphi(\cos 2\varphi - 3q) = 0$$

Si on avait remplacé y par $\rho' e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, on aurait eu un calcul analogue. L'équation résultant de l'élimination de ρ' s'obtiendra en changeant φ en $-\varphi$ dans (116); on trouve ainsi :

$$(117)\qquad p^2 \{\sin 2\varphi \sin(2\varphi + 2\omega) - 2\cos 2\varphi \sin^2(\varphi + \omega)\} + \sin^2 2\varphi(\cos 2\varphi - 3q) = 0$$

Les équations (116), (117) ne sont pas distinctes, en les retranchant l'une de l'autre on trouve une identité ; on peut prendre l'une des deux pour déterminer φ, mais leur combinaison fournit une équation plus simple. En les ajoutant, l'inconnue $\cos 2\varphi$ s'introduit naturellement, et on trouve :

$$(118)\quad \cos^3 2\varphi - 3q\cos^2 2\varphi + (p^2 - 1)\cos 2\varphi + 3q - p^2\cos 2\omega = 0$$

Telle est l'équation qui peut servir à déterminer φ.

Il faut voir maintenant quelle est des trois racines de l'équation (118) celle qui convient à la question.

Or, on a identiquement :

$$\tfrac{1}{2}(y_1 y_2 + y_3 y_4) = \tfrac{1}{2}\left(e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right) = \cos 2\varphi$$

donc, cette combinaison est une racine de l'équation (118).

On peut en conclure que, si on forme les combinaisons suivantes des racines de l'équation (77)

$$(119)\quad z_1 = \tfrac{1}{2}(y_1y_2 + y_3y_4),\ z_2 = \tfrac{1}{2}(y_1y_3 + y_2y_4),\ z_3 = \tfrac{1}{2}(y_1y_4 + y_2y_3)$$

ces combinaisons seront les racines de l'équation (118).

D'ailleurs, on peut vérifier par la composition des coefficients que z_1, z_2, z_3 sont bien les trois racines de (118).

Si on désigne par z l'inconnue de cette équation, on aura :

$$(120)\qquad z^3 - 3qz^2 + (p^2 - 1)z + 3q - p^2\cos 2\omega = 0$$

et les racines de cette équation, en remplaçant y_1, y_2, y_3, y_4, par leur valeur (80) sont :

$$(121) \begin{cases} z_1 = \cos 2\varphi \\ z_2 = \frac{1}{2}\left(\rho\rho' + \frac{1}{\rho\rho'}\right) \\ z_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho'} + \frac{\rho'}{\rho}\right) \end{cases}$$

Des deux modules ρ $\frac{1}{\rho}$, l'un est plus petit que 1, de même pour ρ' $\frac{1}{\rho'}$. Pour nous conformer au calcul précédent de ρ, ρ', φ, appelons ρ le plus petit des modules ρ $\frac{1}{\rho}$ et ρ' le plus petit des modules ρ' $\frac{1}{\rho'}$. Enfin, soit ρ' le plus petit des modules ρ, ρ'.

Les racines de l'équation (120), représentées par (121) seront réelles, et on aura les inégalités :

$$\begin{aligned} \rho' &< \rho < 1 \\ z_2 &> 1 \\ z_3 &> 1 \\ z_2 &> z_3 \end{aligned}$$

Ainsi, la plus petite des racines de l'équation (120) donnera $\cos 2\varphi$, et la plus grande $\frac{1}{2}\left(\rho\rho' + \frac{1}{\rho\rho'}\right)$.

On peut résoudre l'équation (120) comme on résout ordinairement les équations du troisième degré, en posant :

$$z = z' + q$$

On trouve ainsi :

$$(122) \qquad z'^3 - Pz' - Q = 0$$

$$(123) \qquad P = 1 - p^2 + 3q^2, \; Q = 2q\,(q^2 - 1) - p^2\,(q - \cos 2\omega)$$

Et en posant :

$$(124) \begin{cases} l = 2\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \cos \tau = \frac{3Q}{Pl} \end{cases}$$

τ étant compris entre 0 et π,
les racines de l'équation (122) seront :

$$l \cos\frac{\tau}{3},\quad l \cos\frac{\tau+2\pi}{3},\quad l \cos\frac{\tau-2\pi}{3}$$

Par suite les racines de l'équation (120) seront :

$$(125)\qquad q + l\cos\frac{\tau}{3},\quad q + l\cos\frac{\tau+2\pi}{3},\quad q + l\cos\frac{\tau-2\pi}{3}$$

D'après ce qui précède, la plus petite de ces valeurs donnera $\cos 2\varphi$ et la plus grande $\frac{1}{2}\left(\rho\rho' + \frac{1}{\rho\rho'}\right)$.

Quand on aura z_2, z_3, d'après les valeurs

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\rho\rho' + \frac{1}{\rho\rho'}\right),\quad z_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho'} + \frac{\rho'}{\rho}\right)$$

il sera aisé d'obtenir $\rho\rho'$ et $\frac{\rho'}{\rho}$; et en extrayant les racines carrées du rapport et du produit de ces deux quantités, on aura ρ et ρ'. La valeur de $\rho\rho'$ est :

$$\rho\rho' = z_2 - \sqrt{z_2^2 - 1} = \frac{1}{z_2 + \sqrt{z_2 - 1}}$$

et posant :

$$\frac{1}{z_2} = \sin\eta$$

on aura

$$(126)\qquad \rho\rho' = \frac{\sin\eta}{1+\cos\eta} = \operatorname{tang}\frac{\eta}{2}$$

On prendra le plus petit arc η répondant au sinus.

En posant de même :

$$\frac{1}{z_3} = \sin\eta'$$

on aura :

$$(127)\qquad \frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tang}\frac{\eta'}{2}$$

De sorte qu'il est très-facile d'avoir ρ et ρ'.

Mais l'angle φ n'est pas complètement déterminé, puisqu'on connaît seulement $\cos 2\varphi$. Voici comment on peut le déterminer :

L'équation (115) donne :

$$(128) \qquad \rho + \frac{1}{\rho} = -\frac{2p \sin(\varphi - \omega)}{\sin 2\varphi}$$

et en changeant φ en $-\varphi$:

$$(129) \qquad \rho' + \frac{1}{\rho'} = -2p\frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin 2\varphi}$$

De ces deux équations on tire :

$$\rho + \frac{1}{\rho} + \rho' + \frac{1}{\rho'} = -\frac{2p\cos\omega}{\cos\varphi}$$

$$\rho + \frac{1}{\rho} - \rho' - \frac{1}{\rho'} = \frac{2p\sin\omega}{\sin\varphi}$$

D'où :

$$(130) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{2p\sin\omega}{\rho + \frac{1}{\rho} - \rho' - \frac{1}{\rho'}} \\ \cos\varphi &= \frac{-2p\cos\omega}{\rho + \frac{1}{\rho} + \rho' + \frac{1}{\rho'}} \end{aligned} \right.$$

Telles sont les équations qui serviront à déterminer φ, une fois qu'on connaîtra ρ et ρ'.

Si on veut savoir ce que deviennent les quantités ρ, ρ', φ quand on néglige les quantités du second ordre, on remarque que l'équation du troisième degré (120), en remplaçant p et q par leur valeur

$$2p = \frac{K}{i'}, \quad 3q = \frac{H}{i'}$$

a deux racines infiniment grandes dans cette hypothèse, et donne pour la troisième racine :

$$(131) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \cos 2\omega \\ \cos 2\varphi &= \cos 2\omega \end{aligned} \right. \qquad \text{d'où :}$$

d'ailleurs z_2, z_3 (121) sont infiniment grands pour ρ' infiniment petit, et en rapprochant (130), (131), on a :

$$\varphi = \pi + \omega$$

Pour déterminer ρ, il n'y a qu'à prendre (114) qui donne

$$-\mathrm{K}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + 2\mathrm{H} = 0$$

d'où on tire :

$$\rho = \frac{\mathrm{H} - \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K}^2}}{\mathrm{K}} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\zeta = \theta$$

en posant $$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}} = \sin \zeta$$

Ainsi, dans cette hypothèse, on a :

$$\rho' = 0, \qquad \rho = \theta, \qquad \varphi = \pi + \omega$$

On retrouve les valeurs données par une première approximation.

On calculerait de même les quantités analogues à ρ, ρ' et φ.

On peut donc supposer $\frac{1}{\mathrm{r}}$ décomposé en facteurs.

§ 5.

Supposons qu'on ait mis en évidence l'exponentielle y, on aura l'équation (83).

Il sera aisé d'effectuer le développement de $\frac{1}{\mathrm{r}}$ en série ordonnée suivant les puissances de la variable y, en développant chaque facteur de la valeur de $\frac{1}{\mathrm{r}}$. Posons :

(132) $$\left(1 - \rho y\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\rho}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma \mathrm{C}_{n'}\, y^{n'}$$

(133) $$\left(1 - \rho' y\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\rho'}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma \mathrm{D}_{n'}\, y^{n'}$$

on aura :

(134) $$\frac{1}{\mathrm{r}} = \mathrm{S}\, \Sigma\, \mathrm{C}_{n'}\, y^{n'} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}} \,.\, \Sigma\, \mathrm{D}_{n'}\, y^{n'} e^{n'\varphi\sqrt{-1}}$$

C'est-à-dire :

$$(135)\qquad \frac{1}{\mathrm{r}} = \mathrm{S}\begin{pmatrix} C_0 + C_1 y e^{-\varphi\sqrt{-1}} \ldots \\ + C_{-1} y^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}} \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_0 + D_1 y e^{\varphi\sqrt{-1}} \ldots\ldots \\ + D_{-1} y^{-1} e^{-\varphi\sqrt{-1}} \ldots \end{pmatrix}$$

Le coefficient de $y^{n'}$ s'obtiendra en multipliant un terme de la forme $C_{n'-p}\, e^{-(n'-p)\varphi\sqrt{-1}}$ par un terme de la forme $D_p e^{p\varphi\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire :

$$D_p e^{p\varphi\sqrt{-1}} \,.\, C_{n'-p} e^{-(n'-p)\varphi\sqrt{-1}} = D_p C_{n'-p} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}} \,.\, e^{2p\varphi\sqrt{-1}}$$

p a toutes les valeurs entières, nulle, positives, négatives. D'où :

$$(136)\qquad A_{n'} = \mathrm{S} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}}\begin{pmatrix} D_0 C_{n'} + D_1 C_{n'-1} e^{2\varphi\sqrt{-1}} \ldots\ldots \\ + D_{-1} C_{n'+1} e^{-2\varphi\sqrt{-1}} \ldots \end{pmatrix}$$

Il reste à trouver les coefficients C et D.

On pourrait développer, d'après la formule du binome, les facteurs des équations (132), (133), et faire le produit. On aurait ainsi les coefficients C et D, mais on peut obtenir ces coefficients sous la forme d'une série alternée de la manière suivante :

Reprenons l'équation (132). En changeant y en $\frac{y}{\rho}$, on aura :

$$(137)\qquad \left(1 - y\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\rho^2}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma\, C_{n'} y^{n'} \rho^{-n'}$$

Alors, en cherchant dans ce développement le coefficient de $y^{n'}$, on le multipliera par $\rho^{n'}$ pour avoir $C_{n'}$

Mais on a :

$$1 - \frac{\rho^2}{y} = \left(1 - \rho^2\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,\frac{1-y}{y}\right)$$

D'où, en général :

$$(138) \qquad \left(1-y\right)^{-s}\left(1-\frac{\rho^2}{y}\right)^{-s} = \left(1-y\right)^{-s}\left(1-\rho^2\right)^{-s} \left(1-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,\frac{1-y}{y}\right)^{-s}$$

Or, on a :

$$(139) \qquad \left(1-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,\frac{1-y}{y}\right)^{-s} = 1 + (s)_1\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,\frac{1-y}{y}\ldots$$

en posant :

$$(140) \qquad (s)_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1 \quad \ldots \quad n}$$

On en déduit le développement de (138) en multipliant les deux membres par $(1-y)^{-s}(1-\rho^2)^{-s}$.

Alors on trouve facilement le coefficient de $y^{n'}$

$$\left(1-\rho^2\right)^{-s}(s)_{n'}\left\{1+\frac{s}{1}\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,\frac{s-1}{n'+1}\ldots\right\}$$

d'où, en remplaçant s par $\frac{1}{2}$, et multipliant par $\rho^{n'}$, on aura :

$$(141) \qquad C_{n'} = \rho^{n'}\left(1-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n'+2}\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\ldots\right\}$$

Le terme général de ce développement serait :

$$\frac{1.3.5\ \ldots\ (2p-1)\quad 1.3.5\ \ldots\ (2p-1)}{2.4\ \ldots\ 2p\quad (2n'+2)\ \ldots\ (2n'+2p)}\left(\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right)^p$$

Ce terme aura le signe — quand p sera impair, et + quand p sera pair.

Pour trouver $D_{n'}$, il n'y a qu'à remplacer dans l'expression de $C_{n'}$ ρ par ρ', on aura :

$$(142) \qquad D_{n'} = \rho'^{n'}\left(1-\rho'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n'+2}\,\frac{\rho'^2}{1-\rho'^2}+\ldots\right\}$$

Les équations (132), (133), dont les premiers membres ne changent pas quand on change y en $\frac{1}{y}$, prouvent que

$$(143) \qquad C_{n'} = C_{-n'}, \qquad D_{n'} = D_{-n'}$$

Il suffit donc d'avoir trouvé les valeurs (141), (142) dans le cas de n' positif. Il faudra, quand on supposera $n' = 0$, dans $C_{n'}$, $D_{n'}$, supposer $\left(\frac{1}{2}\right)_0 = 1$.

Dans le cas de ρ' très-petit, on aura :

$$(144) \quad \begin{cases} D_0 = 1 \\ D_1 = D_{-1} = 0, \qquad D_{n'} = D_{-n'} = 0 \end{cases}$$

On aura aussi sensiblement :

$$(145) \qquad C_{n'} = \frac{\rho^{n'}}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{1}{2}\right)_{n'} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2n'+2} \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \right\}$$

Par suite la formule (136) deviendra :

$$(146) \quad A_{n'} = \mathrm{S} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}} \frac{\rho^{n'}}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{1}{2}\right)_{n'} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2n'+2} \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right)$$

Pour n' suffisamment grand, cette formule peut être sensiblement réduite à :

$$(147) \qquad A_{n'} = \mathrm{S} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{2}\right)_{n'} \frac{\rho^{n'}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Enfin, rappelons la formule

$$(148) \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4 \ldots 2n'. \quad 2n'}{1.1.3.3 \ldots (2n'-1)(2n'-1)(2n'+1)}$$

On en tire approximativement :

$$(149) \qquad \pi n' = \left(\frac{2.4 \ldots 2n'}{1.3 \ldots 2n'-1}\right)^2$$

D'où :

$$(150) \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_{n'} = \frac{1.3 \ldots (2n'-1)}{2.4 \ldots 2n'} = \frac{1}{\sqrt{\pi n'}}$$

On en déduit :

$$(151) \qquad A_{n'} = \frac{\mathrm{S} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}} \rho^{n'}}{\sqrt{\pi n'(1-\rho^2)}}$$

Si on se reporte à la valeur de $\frac{1}{\mathrm{r}}$ (83), comme $y = e^{\psi' \sqrt{-1}}$, on voit que $\frac{1}{\mathrm{r}}$ ne change pas en changeant le signe de $\sqrt{-1}$. Mais alors $y^{n'}$ devient $y^{-n'}$, donc il faut que, par ce changement, $A_{n'}$ se change en $A_{-n'}$; d'où :

$$(152) \qquad A_{-n'} = \frac{\mathrm{S}\, e^{n'\varphi\sqrt{-1}}\, \rho^{n'}}{\sqrt{\pi n'\,(1-\rho^2)}}$$

Si, au contraire, on appelle A_n le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{1}{\mathrm{r}}$ suivant les puissances de x, toutes les formules précédentes subsistent en remplaçant S par S', n' par n, et les quantités ρ et φ par leurs analogues.

On peut donc supposer connu le coefficient $A_{n'}$ de $y^{n'}$ ou A_n de x^n dans le développement de $\frac{1}{\mathrm{r}}$.

§ 6.

Rappelons la valeur de R

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{r}} - \frac{r \cos \delta}{r'^2}$$

Nous avons pu développer la partie principale $\frac{1}{\mathrm{r}}$ suivant les puissances de x ou de y, nous allons maintenant développer la seconde partie

$$\frac{-r \cos \delta}{r'^2}$$

des formules (59), (61), en posant :

$$(153) \quad \begin{cases} g = \mathrm{M}aa'(\cos\psi - \varepsilon) + \mathrm{N}'aa'f \sin\psi \\ h = \mathrm{M}'aa'ff' \sin\psi - \mathrm{N}aa'f'(\cos\psi - \varepsilon) \end{cases}$$

On tire :

$$(154) \qquad rr' \cos\delta = -g\varepsilon' + g\cos\psi' + h\sin\psi'$$

Posons maintenant :

(155) $$g = k \cos \chi, \qquad h = k \sin \chi$$

on aura :

(156) $$rr' \cos \delta = -g\varepsilon' + \frac{k}{2}\left(e^{-\chi\sqrt{-1}}\, y + e^{\chi\sqrt{-1}}\, y^{-1}\right)$$

Mais on a :

$$r' = a'\,(1 - \varepsilon' \cos \psi'), \qquad \cos \psi' = \frac{y}{2} + \frac{y^{-1}}{2}$$

d'où :

$$r' = \frac{a'}{2y}\,(2y - \varepsilon' y^2 - \varepsilon')$$

Il sera aisé de décomposer r' en facteurs à l'aide des racines de l'équation

(157) $$y^2 - \frac{2y}{\varepsilon'} + 1 = 0$$

En désignant par α la plus petite racine de cette équation, on aura :

(158) $$\begin{cases} r' = \dfrac{a'\varepsilon'}{2\alpha}\,(1 - \alpha y)\,(1 - \alpha y^{-1}) \\ \alpha = \dfrac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon'^2}}{\varepsilon'} \end{cases}$$

Il est facile maintenant de développer $\dfrac{r \cos \delta}{r'^2}$

(159) $$\frac{r \cos \delta}{r'^2} = \frac{rr' \cos \delta}{r'^3}$$

On a l'expression (156) de $rr' \cos \delta$, il faut calculer r'^{-3}.
En développant successivement les deux facteurs de r' (158), il vient :

(160) $$r'^{-3} = E_0 + E_1\,(y + y^{-1}) + E_2\,(y^2 + y^{-2}) \ldots$$

Posons $\left(\dfrac{2\alpha}{a'\varepsilon'}\right)^3 = c$, on aura :

(161) $$\begin{cases} E_0 = c\,(1 + 9\alpha^2 + 36\alpha^4 \ldots) \\ E_1 = 3\alpha c\,(1 + 6\alpha^2 + 20\alpha^4 \ldots) \\ E_2 = 6\alpha^2 c\,(1 + 5\alpha^2 + 15\alpha^4 \ldots) \\ E_3 = 10\alpha^3 c\,(1 + 4{,}5\alpha^2 \ldots) \end{cases}$$

. . . .

En remplaçant $e^{\chi\sqrt{-1}}$ par q, on aura :

$$(162) \qquad \frac{rr'\cos\delta}{r'^3} = \frac{r\cos\delta}{r'^2} = \left\{-g\varepsilon' + \frac{k}{2}(yq^{-1} + qy^{-1})\right\} \left\{E_0 + E_1(y + y^{-1})\ldots\right\}$$

Cette expression ne change pas quand on change y en y^{-1} et q en q^{-1}, c'est-à-dire quand on change $\sqrt{-1}$ de signe; alors le coefficient de $y^{-n'}$ sera celui de $y^{n'}$, ou $\sqrt{-1}$ changera de signe. Cherchons donc les coefficients de $y^{n'}$ ou $A_{n'}$.

Comme on a :

$$g = k\cos\chi, \qquad h = k\sin\chi, \qquad q = e^{\chi\sqrt{-1}}$$

on trouve aisément :

$$(163) \begin{cases} A_0 = g\,(E_1 - \varepsilon' E_0) \\ A_{n'} = g\left(\dfrac{E_{n'-1} + E_{n'+1}}{2} - \varepsilon' E_{n'}\right) - h\sqrt{-1}\left(\dfrac{E_{n'-1} - E_{n'+1}}{2}\right) \end{cases}$$

On aura donc :

$$(164) \qquad \frac{r\cos\delta}{r'^2} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 \ldots$$

Et pour avoir les coefficients de $y^{-n'}$, il faudra changer le signe $\sqrt{-1}$ dans celui de $y^{n'}$.

On a donc développé $\frac{r\cos\delta}{r'^2}$ suivant les puissances de y.

Les coefficients A_0, A_1 (163) sont fonction de ψ par les quantités g et h (153) qui entrent dans tous les termes, et les quantités E_0, E_1 sont les constantes du tableau (161).

On développerait d'une manière analogue $\frac{r\cos\delta}{r'^2}$ suivant les puissances de x.

Il faut remarquer que α est de l'ordre de ε', de sorte que c est un nombre ordinaire, et $E_{n'}$ (161) est de l'ordre ε'^n; $A_{n'}$ est donc négligeable dès que n' est un peu considérable.

Maintenant qu'on a $A_{n'}$, on peut avoir $A_{n'}$ par la formule (18) et à l'aide d'un certain nombre de valeurs de $A_{n'}$, on aura $A_{n',-n}$ (47).

D'après les formules (62), (68), (69), (153), on trouve :

$$(165)\quad \begin{cases} K\cos\omega = -\,2a'^2\varepsilon' - 2g \\ K\sin\omega = -\,2h \end{cases}$$

de sorte que les calculs faits pour développer $\frac{1}{r}$ serviront pour trouver les quantités g et h qui entrent dans tous les termes du développement de $\frac{r\cos\delta}{r'^2}$.

Reprenons le développement de $\frac{r\cos\delta}{r'^2} = \frac{rr'\cos\delta}{r'^3}$

$$r' = \frac{a'\varepsilon'}{2\alpha}(1-\alpha y)(1-\alpha y^{-1})$$

On peut développer r'^{-3} de la manière suivante :

Posons :

$$(166)\qquad (1-\alpha y)^{-s}(1-\alpha y^{-1})^{-s} = \Sigma\, C_{n'}\, y^{n'}$$

On en déduit :

$$(167)\qquad (1-y)^{-s}\left(1-\frac{\alpha^2}{y}\right)^{-s} = \Sigma\, C_{n'}\, y^{n'}\,\alpha^{-n'}$$

Mais on a :

$$(168)\quad (1-y)^{-s}\left(1-\frac{\alpha^2}{y}\right)^{-s} = (1-y)^{-s}(1-\alpha^2)^{-s}\left(1-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\,\frac{1-y}{y}\right)^{-s}$$

En développant $\left(1-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\,\frac{1-y}{y}\right)^{-s}$, faisant $s=3$, on trouve :

$$(169)\qquad (1-y)^{-3}\left(1-\frac{\alpha^2}{y}\right)^{-3} = (1-\alpha^2)^{-3}$$

$$\left\{(1-y)^{-3} + \frac{3\alpha^2}{1-\alpha^2}(1-y)^{-2}y^{-1} + \dots\right\}$$

Le coefficient de $y^{n'}$, n' positif dans ce développement sera :

$$(1-\alpha^2)^{-3}\,\frac{3(3+1)\ldots(3+n'-1)}{1.2\quad\ldots\quad n'}\,.$$

$$\left\{1+\frac{3}{1}\,\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\,\frac{2}{n'+1}+\frac{3(3+1)}{1.2}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2\frac{2.1}{(n'+1)(n'+2)}\right\}$$

c'est-à-dire que ce coefficient est donné sous forme finie.

En le représentant par F, on aura :

$$C_{n'} = \alpha^{n'}\,F \tag{170}$$

Par suite :

$$r'^{-3} = \left(\frac{2\alpha}{a'\varepsilon'}\right)^3\left\{C_0 + C_1(y^1+y^{-1})\ldots\right\} \tag{171}$$

En posant $\left(\frac{2\alpha}{a'\varepsilon'}\right)^3 = c$, on aura :

$$E_{n'} = c\,C_{n'} \tag{172}$$

et la formule (160).

Par suite on aura les mêmes formules (162), (163), (164).

Seulement, les constantes du tableau (161) se présenteront sous forme finie.

On peut donc supposer développé $\frac{r\cos\delta}{r'^2}$; les coefficients des puissances de y se présenteront sous forme finie ou sous la forme de séries très-convergentes, et d'ailleurs contiendront ψ explicitement au moyen des quantités g et h.

Les coefficients A_0, $A_1\ldots$ du développement de $\frac{r\cos\delta}{r'^2}$ permettront, comme on sait, de trouver $A_{n'}$ coefficient de $e^{n'T'\sqrt{-1}}$ dans le même développement. En négligeant certains termes, $A_{n'}$, formule (18), se présentera sous forme finie et contiendra à cause des quantités g et h

$$\cos\psi = \frac{x+x^{-1}}{2}\,,\quad \sin\psi = \frac{x-x^{-1}}{2\sqrt{-1}}$$

de sorte que $A_{n'}$ sera de la forme

$$A_{n'} = A + Bx + Cx^{-1} \tag{173}$$

A, B, C étant des constantes.

Supposons $A_{n'}$ développé suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$, on aura :

(174) $$A_{n'} = \ldots A_{n',-n} e^{-nT\sqrt{-1}}$$

On en conclut :

(175) $$A_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_{n'} e^{nT\sqrt{-1}} dT$$

En remplaçant $A_{n'}$ par sa valeur, on aura :

(176) $$A_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (A + Bx + Cx^{-1}) e^{nT\sqrt{-1}} dT$$

La partie répondant à A est nulle, on trouve ensuite facilement :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Bx e^{nT\sqrt{-1}} dT = -\frac{B}{n} E_{-n-1}$$

le symbole E se rapportant à la transcendante de Bessel.

De même :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Cx^{-1} e^{nT\sqrt{-1}} dT = \frac{C}{n} E_{-n+1}$$

alors la formule (176) devient :

(177) $$A_{n',-n} = -\frac{B}{n} E_{-n-1} + \frac{C}{n} E_{-n+1}$$

Voilà un moyen simple de trouver $A_{n'-n}$, mais ce moyen ne peut être employé pour le développement de $\frac{1}{r}$.

On voit que $A_{n',-n}$, de même que $A_{n'}$, de même que $A_{n'}$, est négligeable pour un indice n' élevé.

On peut donc supposer connu le développement de la fonction perturbatrice.

§ 7.

Nous allons voir maintenant quelle est l'erreur commise quand on prend une des formules qui donnent la valeur approchée de $A_{n',-n}$ dans le développement de $\frac{1}{\mathrm{r}}$, partie principale de R.

Supposons qu'on prenne (47). La partie négligée est (45)

$$i = \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2\pi} \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l \, e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} s d\mathrm{T}' \ldots$$

$$s = \ldots A_{n-l-k} \ldots \quad + A_{-n-l+k} \ldots .$$

Comme le module de $e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}$ est l'unité et que le module d'une somme est plus petit que la somme des modules, si on conçoit qu'on prenne le module maximum de s pour chaque valeur de l, le module de i sera inférieur au module de

$$(178) \qquad \ldots \left(1+\frac{l}{n}\right) \mathrm{E}_l \, s \ldots .$$

Rappelons maintenant que E_l est le coefficient de x^l dans le développement de $e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$, que E_l est de l'ordre de ε^l, et que de l'équation

$$\mathrm{E}^{-l} = (-1)^l \mathrm{E}_l$$

on déduit que E_{-l}, E_l sont infiniment petits en même temps.

On négligera donc E_l pour l assez grand en valeur absolue ; ainsi on ne prendra dans la formule (178) que les valeurs assez petites de l.

Chaque terme de la valeur de s dépend de ψ'. On a, en mettant le signe de n en évidence, d'après (151), (152)

$$(179) \qquad A_n = \frac{\mathrm{S}'}{\sqrt{\pi n\,(1-\rho_1^2)}}\, \rho_1^{\,n}\, e^{-n\varphi_1\sqrt{-1}}$$

$$(180)\qquad A_{-n} = \frac{S'}{\sqrt{\pi n\,(1-\rho_1^2)}}\,\rho_1^{\,n}\,e^{n\varphi_1\sqrt{-1}}$$

ρ_1, φ_1, dépendent de ψ', et ρ_1 est une fraction. La formule (180) fait voir que la première série des termes de s, $A_{-n-l-k}\ldots$ ne donne rien. Quant à la seconde série, k l'emporte sur $n+l$, et d'après la formule (179), le seul terme qu'on ne doive pas négliger est A_{-n-l+k}, d'où :

$$(181)\quad s = A_{-n-l+k} = \frac{S'}{\sqrt{\pi\,(k-n)}}\,(1-\rho_1)^{-\frac{1}{2}}\,\rho_1^{\,k-n-l}\,e^{-(k-n-l)\varphi_1\sqrt{-1}}$$

en négligeant l au dénominateur.

Telle est la valeur de s pour chaque valeur de l.

Mais on a (42) :

$$\ldots\left(1+\frac{l}{n}\right)E_l x^l \ldots = e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}$$

On peut remplacer dans cette équation x par telle valeur qu'on voudra. Multiplions les deux membres par un facteur convenable, et remplaçons x par $\frac{1}{\rho_1}e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, on trouve précisément la valeur de $\ldots\left(1+\frac{l}{n}\right)E_l\,s\ldots$ et la formule (178) qui donne l'erreur commise sur $A_{n',-n}$ devient

$$(182)\quad \ldots\left(1+\frac{l}{n}\right)E_l\,s\ldots = L\,(k-n)^{-\frac{1}{2}}\,\rho_1^{\,k-n}\,e^{-(k-n)\varphi_1\sqrt{-1}}$$

$$(183)\qquad L = \frac{S'}{\sqrt{\pi(1-\rho_1^2)}}\left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}e^{-n\frac{\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

$$(184)\qquad x = \frac{1}{\rho_1}\,e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$$

Remarquons qu'on a approximativement :

$$1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

Remplaçons x par sa valeur (184) et désignons par Λ le module de L, on aura :

$$(185) \qquad \Lambda = \frac{S'}{\sqrt{\pi(1-\rho_1^2)}}\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{1+n}{\rho_1} + (1-n)\rho_1\right\}\cos\varphi_1}$$

Si maintenant on appelle Υ le module de l'erreur (182), on trouve :

$$(186) \qquad \Upsilon = \Lambda\,(k-n)^{-\frac{1}{2}}\,\rho_1^{k-n}$$

Si on se donne le module Υ, c'est-à-dire l'erreur que l'on veut commettre, on aura pour déterminer k l'équation

$$(187) \qquad k - n = \frac{\log(\Upsilon^{-1}\Lambda)}{\log(\rho_1^{-1})} - \frac{1}{2}\,\frac{\log(k-n)}{\log(\rho_1^{-1})}$$

Mais le second membre de la valeur de Υ dépend de ψ', et il faut prendre la valeur de ψ' qui rend le second membre maximum, c'est-à-dire prendre la valeur de ψ' satisfaisant à l'équation :

$$\frac{d\Lambda}{d\psi'} + (k-n)\frac{d\rho_1}{d\psi'} = 0$$

Cette équation pour $k-n$ assez grand se réduit sensiblement à

$$(188) \qquad \frac{d\rho_1}{d\psi'} = 0$$

Il faut donc chercher la valeur de ψ' qui rend ρ_1 maximum ; mais pour cette valeur on a (113)

$$(189) \qquad \rho_1 = \theta' = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\arcsin\frac{K'}{H'}\right), \quad \frac{K'}{H'} = \frac{k+b}{h+b'}, \quad \varphi_1 = \beta,$$
$$S' = \sqrt{\frac{2\theta'}{K'}}.$$

On a donc tous les éléments du calcul de Λ. Quand on voudra calculer $A_{n',-n}$ avec une erreur Υ, à l'aide de la formule

$$A_{n',-n} = \frac{1}{k}\,\Sigma\,A_{n'}\,e^{nT\sqrt{-1}}\,(1-\varepsilon\cos\psi)$$

le nombre k des valeurs de ψ qu'il faudra employer sera fourni par la formule (187).

Supposons, au contraire, qu'on prenne la formule (51)

$$A_{n',-n} = \frac{1}{k'} \Sigma A_{-n} e^{-n'T'\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon' \cos \psi')$$

Σ s'étend à toutes les racines de $y^{k'} = 1$.

L'erreur commise est inférieure au module maximum de

$$(190) \qquad \ldots\ldots \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) E_{l'} s' \ldots\ldots$$

On ne prendra dans cette formule que les petites valeurs de l'. En vertu des formules (151), (152), on trouve qu'on a sensiblement :

$$(191) \qquad s' = A_{n'-l'-k'} = \frac{S e^{(k'+l'-n')\varphi\sqrt{-1}} \rho^{k'+l'-n'}}{\sqrt{\pi (k'-n')(1-\rho^2)}}$$

en négligeant l' au dénominateur.

Mais on a la formule analogue à (42)

$$(192) \qquad \ldots\left(1 - \frac{l'}{n'}\right) E_{l'} y^{l'} \ldots = e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)} \left\{1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right\}$$

On peut remplacer dans cette équation y par toute valeur qu'on voudra. En multipliant les deux membres par un facteur convenable, remplaçant y par $\rho e^{\varphi\sqrt{-1}}$, on trouve comme précédemment :

$$(193) \qquad A = \frac{S}{\sqrt{\pi(1-\rho^2)}} e^{\frac{\varepsilon'}{2}\left\{\rho(n'-1) - \frac{1+n'}{\rho}\right\} \cos \varphi}$$

et si on appelle Υ l'erreur commise sur $A_{n',-n}$, on aura :

$$(194) \qquad \Upsilon = A (k' - n')^{-\frac{1}{2}} \rho^{k'-u'}$$

D'où :

$$(195) \qquad k' - n' = \frac{\log(\Upsilon^{-1}\Lambda)}{\log(\rho^{-1})} - \frac{1}{2}\frac{\log(k'-n')}{\log(\rho^{-1})}.$$

Il faut prendre la valeur de ψ qui rend Υ maximum, c'est-à-dire sensiblement la valeur de ψ qui rend ρ maximum.

Mais pour cette valeur, on a (112) :

$$(196) \quad \rho = \theta = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{K}{H}, \quad \frac{K}{H} = \frac{k+b'}{h+b}, \quad \varphi = \beta', \quad S = \sqrt{\frac{2\theta}{K}}$$

On a donc tous les éléments du calcul de Λ. Quand on voudra calculer $A_{n',-n}$ avec une erreur Υ à l'aide de la formule (51), le nombre k' des valeurs de ψ' qu'il faudra employer sera fourni par (195).

On pourrait aussi calculer l'erreur commise sur $A_{n',-n}$ quand on considère la seconde partie de R, $\frac{r \cos \delta}{r'^2}$, mais le plus souvent on négligera la partie de $A_{n',-n}$ provenant de $\frac{r \cos \delta}{r'^2}$; et d'ailleurs on peut calculer directement avec autant d'approximation qu'on voudra $A_{n',-n}$ pour le développement de $\frac{r \cos \delta}{r'^2}$ par la formule (177).

On peut donc supposer connu tel coefficient qu'on voudra dans le développement de la fonction perturbatrice, avec toute l'approximation désirable.

§ 8.

Supposons qu'on considère seulement la partie principale $\frac{1}{\mathrm{r}}$ de la fonction perturbatrice, et qu'on calcule $A_{n',-n}$ par la formule (47)

$$A_{n',-n} = \frac{1}{k} \Sigma A_{n'} e^{nT\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon \cos \psi)$$

Σ s'étendant aux racines de $x^k = 1$.

Nous allons calculer $A_{n'}$ au moyen des quantités S, ρ, ρ', φ qui ont servi à décomposer $\frac{1}{\mathrm{r}}$ en facteurs.

La formule (18) donne

$$(197) \qquad \mathrm{A}_{n'} = A_{n'} + \frac{n'\varepsilon'}{2}\left(A_{n'-1} - A_{n'+1}\right) - \frac{\varepsilon'}{2}\left(A_{n'-1} + A_{n'+1}\right)$$

Posons :

$$(198) \qquad \xi = \rho^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

la formule (146) donnera approximativement

$$(199) \qquad A_{n'} = \mathrm{S}\,\xi^{-n'}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}\left(1-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{4n'}\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right)$$

Remarquons que la dernière parenthèse ne varie pas sensiblement en remplaçant n' par $n' - 1$, $n' + 1$. En outre

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n'} = \frac{1.3.5\ \ldots\ (2n'-1)}{2.4.6\ \ldots\ \ \ 2n'}$$

d'où on tire :

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n'+1} = \frac{2n'+1}{2n'+2}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n'-1} = \frac{2n'}{2n'-1}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}$$

Par suite on a approximativement :

$$(200) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)_{n'+1} &= \left(1 - \frac{1}{2n'}\right)\left(\frac{1}{2}\right)_{n'} \\ \left(\frac{1}{2}\right)_{n'-1} &= \left(1 + \frac{1}{2n'}\right)\left(\frac{1}{2}\right)_{n'} \end{aligned}\right.$$

La formule (199) donne alors

$$(201) \qquad \left\{\begin{aligned} A_{n'+1} &= \xi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2n'}\right) A_{n'} \\ A_{n'-1} &= \xi\ \left(1 + \frac{1}{2n'}\right) A_{n'} \end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans la formule (197), on aura, en négligeant les termes multipliés par $\frac{1}{n'}$,

$$(202)\qquad \mathrm{A}_{n'} = A_{n'}\left\{1 + \frac{n'\varepsilon'}{2}(\xi - \xi^{-1}) - \frac{\varepsilon'}{4}(\xi + \xi^{-1})\right\}$$

ou à très-peu près :

$$(203)\qquad \mathrm{A}_{n'} = A_{n'}\, e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}(\xi - \xi^{-1}) - \frac{\varepsilon'}{4}(\xi + \xi^{-1})}$$

Remplaçons maintenant $A_{n'}$ par sa valeur (199) ou approximativement par :

$$(204)\qquad A_{n'} = \mathrm{S}\,\xi^{-n'}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}(1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{4n'}\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}$$

l'équation (203) deviendra :

$$(205)\ \mathrm{A}_{n'} = \mathrm{S}\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}\xi^{-n'}(1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{4n'}\frac{\rho^2}{1-\rho^2} + \frac{n'\varepsilon'}{2}(\xi - \xi^{-1}) - \frac{\varepsilon'}{4}(\xi + \xi^{-1})}$$

Telle est l'expression de $\mathrm{A}_{n'}$ au moyen des quantités S, ρ, φ, fonction de ψ, qui ont servi à décomposer $\frac{1}{\mathrm{r}}$ en facteurs. Une fois qu'on connaîtra $\mathrm{A}_{n'}$, la formule (47) donnera aisément $\mathrm{A}_{n',-n}$.

Supposons maintenant qu'on ait fait le développement de $\frac{1}{\mathrm{r}}$ suivant les puissances de x et qu'on veuille calculer $\mathrm{A}_{n',-n}$ par la formule (51)

$$A_{n',-n} = \frac{1}{k'}\Sigma\, \mathrm{A}_{-n}\, e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}(1 - \varepsilon'\cos\psi')$$

le second membre est une fonction de ψ', et il faut prendre les diverses valeurs de ψ' propres à satisfaire l'équation

$$y^{k'} = 1$$

Il s'agit de calculer A_{-n} au moyen des quantités S′, ρ_1, ρ'_1, φ_1 qui ont servi à décomposer $\frac{1}{\mathrm{r}}$ en facteurs. Ces quantités sont fonction de ψ'.

La formule analogue à (18) donne :

$$(206)\qquad \mathrm{A}_{-n} = A_{-n} - \frac{n\varepsilon}{2}\left(A_{-n-1} - A_{-n+1}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(A_{-n-1} + A_{-n+1}\right)$$

D'un autre côté, A_{-n} se déduit de (146) en changeant le signe de $\sqrt{-1}$, n' en n, etc.

$$(207) \qquad A_{-n} = \frac{S' e^{n\varphi_1\sqrt{-1}} \rho_1^n}{\sqrt{1-\rho_1^2}} \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(1 - \frac{1}{2(2n+2)} \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2}\right)$$

En posant :

$$(208) \qquad \xi' = \rho_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$$

un calcul analogue au précédent donne :

$$(209) \quad A_{-n} = S' \xi'^n \left(\frac{1}{2}\right)_n (1-\rho_1^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4n}\frac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2} - \frac{n\varepsilon}{2}(\xi'-\xi'^{-1}) - \frac{\varepsilon}{4}(\xi'+\xi'^{-1})}$$

Une fois qu'on connaîtra A_{-n}, la formule (51) donnera $A_{n',-n}$.

En résumé, on pourra calculer $A_{n',-n}$ par les formules (47), (205) ou par les formules (51), (209), et le problème du développement de $\frac{1}{r}$ en série double ordonnée suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$, $e^{T'\sqrt{-1}}$ est résolu.

DEUXIÈME PARTIE

Calcul de l'inégalité à longue période du moyen mouvement de Vénus sous l'action perturbatrice de la Terre.

---

§ 1er.

Nous réduirons dans ce calcul la fonction perturbatrice R à la partie principale $\frac{1}{r}$.

En employant les notations de la première partie et représentant par t le temps, par n la vitesse angulaire du moyen mouvement par unité de temps, la variation $\delta\zeta$ de l'angle nt du moyen mouvement d'une planète de masse m est donnée par la formule

$$(1) \qquad \delta\zeta = -\frac{3an^2m'}{\mu}\int\int\frac{dR}{dT}\,dt^2$$

m' masse de la planète perturbatrice
$\mu = 1 + m$
a demi-grand axe de l'orbite de m
T anomalie moyenne $= nt +$ constante.

On remarque que 13 fois le moyen mouvement de la Terre moins 8 fois celui de Vénus donnent une différence très-petite. Si on représente par n' le moyen mouvement de la Terre, par n celui de Vénus, la double intégration de la formule (1) amènera au dénominateur l'expression $13n' - 8n$, lorsqu'on considérera les termes du développement de R correspondant à l'argument $13T' - 8T$, ou $-13T' + 8T$; les autres termes de R à indices élevés ne donneront rien de sensible, de sorte que la valeur de $\delta\zeta$ sera appréciable pour les termes de R dont l'argument sera $\pm 13T' \mp 8T$. C'est cette valeur de $\delta\zeta$ qu'on appelle l'inégalité à longue période du moyen mouvement de Vénus sous l'action perturbatrice de la Terre, et que nous nous proposons de calculer.

Dans la formule (1) a est le demi-grand axe de l'orbite de Vénus, n le moyen mouvement de Vénus, m' la masse de la Terre, $T = nt +$ constante est l'anomalie moyenne de Vénus.

En développant $R = \frac{1}{r}$ suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$, $e^{T'\sqrt{-1}}$ et en appelant $A_{13',-8}$ le coefficient de $e^{(13T'-8T)\sqrt{-1}}$ on aura :

$$A_{13',-8} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$
$$A_{-13',+8} = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

d'où, en représentant $13T' - 8T$ par θ,

$$A_{13',-8}\, e^{\theta\sqrt{-1}} + A_{-13',+8}\, e^{-\theta\sqrt{-1}} = 2\alpha\cos\theta - 2\beta\sin\theta.$$

Posons

$$A = 2\alpha, \qquad B = -2\beta$$

R pour le calcul de $\delta\zeta$ se réduira à

$$(2) \qquad R = A\cos\theta + B\sin\theta$$

On voit donc que pour avoir $\delta\zeta$, il suffit de calculer

$$A_{13',-8} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

En remplaçant dans (1) R par sa valeur (2), et remarquant que le facteur de t dans $13T' - 8T$ est $13n' - 8n$, on aura :

$$(3) \qquad \delta\zeta = \frac{24an^2m'}{\mu(13n' - 8n)^2}\left\{ A\sin\theta - B\cos\theta \right\}$$

on voit comment le dénominateur $(13n' - 8n)^2$ rend cette inégalité sensible.

C'est cette formule (3) que nous allons appliquer. Il faut remarquer que dans cette formule $\delta\zeta$ est une longueur ; pour avoir $\delta\zeta$ en secondes, il faudra diviser le second membre par sin $1''$. Une fois la division effectuée, on aura :

$$\delta\zeta = \text{M} \sin \theta = \text{N} \cos \theta$$

d'où, en posant

$$\gamma \sin \lambda = \text{N}, \qquad \gamma \cos \lambda = \text{M}$$

$$\delta\zeta = \gamma \sin(\lambda + \theta) \tag{4}$$

λ est un angle fixe et θ dépend de t ; le facteur de t dans θ est $13n' - 8n$; de sorte que

$$\sin(\lambda + \theta) = \sin[h + (13n' - 8n)t]$$

$\delta\zeta$ est donc périodique, et le temps de la période est $\frac{2\pi}{13n' - 8n}$, temps très-long. Voilà pourquoi cette inégalité est dite à longue période.

Une fois qu'on aura la formule (4), c'est-à-dire quand on aura calculé l'inégalité du moyen mouvement de Vénus sous l'action de la Terre, on pourra aisément calculer l'inégalité du moyen mouvement de la Terre sous l'action de Vénus. En conservant les mêmes notations, il faudra appliquer la formule (1) qui deviendra :

$$\delta\zeta' = \frac{-3a'n'^2m}{\mu'} \int\int \frac{d\text{R}}{d\text{T}'} dt^2 \tag{5}$$

En remplaçant R par sa valeur (2), on aura :

$$\delta\zeta' = \frac{39a'n'^2m}{\mu'(13n' - 8n)^2} (-\text{A} \sin \theta + \text{B} \cos \theta \tag{6}$$

$$\delta\zeta' = \text{M}' \sin \theta + \text{N}' \cos \theta$$

d'où, en posant

$$\gamma' \sin \lambda' = \text{N}', \qquad \gamma' \cos \lambda' = \text{M}'$$

$$\delta\zeta' = \gamma' \sin(\lambda' + \theta). \tag{7}$$

Ainsi, pour avoir les deux inégalités de Vénus et de la Terre, il suffit de développer $\frac{1}{\text{r}}$ suivant les puissances de $e^{\text{T}\sqrt{-1}}$, $e^{\text{T}'\sqrt{-1}}$ et de calculer le coefficient de $e^{(13\text{T}' - 8\text{T})\sqrt{-1}}$

Si on applique la formule (47) de la première partie, on aura les formules (185), (186), (187), (189) pour calculer le nombre k des valeurs de ψ qu'il faut employer, correspondant à une erreur Υ.

D'après les nombres qui seront donnés plus loin :

$$\rho_1 = \bar{1},85275, \qquad S' = 1,99417, \qquad \cos\varphi_1 = -\bar{1},8842$$
$$\text{d'ailleurs} \qquad n' = 13, \qquad n = 8$$

l'exposant de e est $\bar{2},3013$, et on aura :

$$\Lambda = \bar{1},9081.$$

Si l'on veut calculer $\delta\zeta$ à $0'',1$ près, comme le facteur de $\delta\zeta$, form. (3), divisé par sin $1''$ vaut $6,1821$, on aura :

$$(6,1821)\ (0,3011)\ \Upsilon < 0,1.$$

0,3010 désigne le log de 2, d'où :

$$\Upsilon^{-1} > 7,4831, \qquad \Upsilon^{-1}\Lambda = 7,3912$$

On a substitué aux nombres leurs logarithmes; on a alors sensiblement l'équation

$$k - n = 50 - \frac{\log(k-n)}{0,2946}$$

d'où approximativement

$$k - n = 45, \qquad k = 53$$

Il faudrait donc résoudre l'équation

$$x^{53} = 1$$

Si, au contraire, on applique la formule (51) de la première partie, on aura les formules (193), (194), (195), (196) pour calculer le nombre k' des valeurs de ψ' qu'il faut employer, correspondant à une erreur Υ.

D'après les nombres qui seront donnés plus loin :

$$\rho = \bar{1},8656; \ \frac{S}{\sqrt{\pi(1-\rho^2)}} = \bar{1},9190; \ \cos\varphi = \bar{1},9921.$$

L'exposant de e est $-\bar{2},9271$, et on aura :

$$\Lambda = \bar{1},8823, \qquad \Upsilon^{-1}\Lambda = 7,5653$$

$$k' - n' = 54 - \frac{\log(k'-n')}{0,2688}$$

d'où

$$k' - n' = 48, \qquad k' = 61$$

Il faudrait donc résoudre l'équation

$$y^{61} = 1$$

Il sera plus avantageux de résoudre l'équation $x^{53} = 1$; et comme le sous-multiple de 360 voisin de 53 est 45, on résoudra l'équation $x^{45} = 1$.

Il faudra donc, dans le calcul de $A_{n',-n}$, prendre 45 valeurs de ψ répondant à $x^{45} = 1$, ce qui donnera :

$$\psi = 0, \qquad \psi = 8, \qquad \psi = 16, \text{ etc.}$$

§ 2.

Nous allons donc appliquer la formule (47) de la première partie.

$$k = 45, \qquad n' = 13, \qquad n = 8, \qquad T = \psi - \varepsilon \sin\psi$$

En employant les notations (55), (56), on trouve dans le tome II des *Annales de l'Observatoire :*

$$\varepsilon = \bar{3},8346368 \qquad \varepsilon' = \bar{2},2245450$$
$$a = \bar{1},8593378 \qquad a' = 0,0000000$$
$$I = 3^\circ\, 23'\, 30'',75$$

$$p = 54^\circ\, 4'\, 51'',85 \qquad p' = 25^\circ\, 2'\, 55'',85$$

d'où

$$d = 330^\circ\, 57'\, 44'' \qquad d' = 79^\circ\, 7'\, 27'',7$$

On déduit de ces nombres :

$$f = \bar{1},9999899 \qquad f' = \bar{1},9999389$$
$$\mu = \bar{1},9996195 \qquad \mu' = \bar{4},9424477$$
$$\cos d = \bar{1},9416604 \qquad \sin d = -\bar{1},6860874$$
$$\cos d' = \bar{1},2757211 \qquad \sin d' = \bar{1},9921288$$

On a en outre :

$$m' = \bar{6},4498500 \qquad m = \bar{6},3959592$$
$$n = 6,3235906 \qquad n' = 6,1125974$$
$$8n - 13n' = 3,7344742$$

On peut maintenant calculer le nombre des formules (60), (63). Nous calculerons ces nombres et tous ceux qui s'obtiendront par voie d'addition et de soustraction à l'aide des tables d'addition et de soustraction de Zech.

Voici un type de calcul. On a :

$$M = \mu \cos d + \mu' \cos d', \qquad M' = \mu \cos d - \mu' \cos d'$$

$$\begin{aligned}
\text{Diff.} &= 3,7231111 \\
\log \mu' \cos d' &= \bar{4},2181688 \\
\log \mu \cos d &= \bar{1},9412799 \\
\log \text{add} &= 0,0000822 \\
\log \text{sous} &= 0,0000822 \\
\log \mathrm{M} &= \bar{1},9413621 \\
\log \mathrm{M}' &= \bar{1},9411977
\end{aligned}$$

On trouve ainsi :

$$h = 0,1827620$$

$$\begin{aligned}
k &= 0,1599519 & c &= \bar{3},12397 \\
\alpha &= 150^\circ\, 57'\, 44'' & \gamma &= 104^\circ\, 55'\, 46'' \\
b &= \bar{2},2633115 & b' &= \bar{2},4041381 \\
\beta &= 139^\circ\, 59'\, 59'',9 & \beta' &= 349^\circ\, 7'\, 25'',85 \\
i &= \bar{5},0869192 & i' &= \bar{4},1480600
\end{aligned}$$

Maintenant qu'on a les nombres fondamentaux, on peut calculer pour les 45 valeurs de ψ les nombres H, K, ω, des formules (68). Nous désignerons les valeurs de ψ 0°, 8°, etc., par les numéros 0, 1, 2, etc.

Toutes les valeurs de H sont renfermées dans le Tableau ci-après :

Tableau des valeurs de H des Formules (68).

N°	H	N°	H	N°	H
0	0,1867519	15	0,1778194	30	0,1836670
1	0,1862495	16	0,1776171	31	0,1843721
2	0,1856785	17	0,1775152	32	0,1850446
3	0,1850500	18	0,1775162	33	0,1856722
4	0,1843761	19	0,1776199	34	0,1862426
5	0,1836694	20	0,1778239	35	0,1867451
6	0,1829440	21	0,1781244	36	0,1871702
7	0,1822138	22	0,1785145	37	0,1875096
8	0,1814931	23	0,1789883	38	0,1877572
9	0,1807962	24	0,1795345	39	0,1879081
10	0,1801367	25	0,1801427	40	0,1879594
11	0,1795278	26	0,1808010	41	0,1879100
12	0,1789815	27	0,1814964	42	0,1877608
13	0,1785080	28	0,1822152	43	0,1875147
14	0,1781188	29	0,1829435	44	0,1871763

Les valeurs de K et ω sont renfermées dans les Tableaux ci-après; ω a été calculé en grades à l'aide des tables de Borda, à cause des multiplications auxquelles cet angle doit être soumis.

Tableau des valeurs de K et ω des Formules (68).

N°	K	N°	K	N°	K
0	0,1656925	15	0,1531334	30	0,1610450
1	0,1648722	16	0,1528453	31	0,1621568
2	0,1639654	17	0,1526748	32	0,1632334
3	0,1629950	18	0,1526264	33	0,1642484
4	0,1619830	19	0,1527042	34	0,1651765
5	0,1609506	20	0,1529107	35	0,1659949
6	0,1599179	21	0,1532470	36	0,1666833
7	0,1589045	22	0,1537123	37	0,1672250
8	0,1579269	23	0,1543031	38	0,1676071
9	0,1570007	24	0,1550143	39	0,1678215
10	0,1561385	25	0,1558358	40	0,1678645
11	0,1553519	26	0,1567543	41	0,1677373
12	0,1546501	27	0,1577556	42	0,1674439
13	0,1540420	28	0,1588191	43	0,1669967
14	0,1535343	29	0,1599238	44	0,1664074

N°	ω	N°	ω	N°	ω
0	$231^{g},500772$	15	$365^{g},224123$	30	$100^{g},069197$
1	240,283326	16	374,248562	31	108,927856
2	249,085084	17	383,277842	32	117,762307
3	257,907380	18	392,310061	33	126,573408
4	266,750811	19	1,343215	34	135,362768
5	275,615534	20	10,375089	35	144,132540
6	284,501233	21	19,403306	36	152,885453
7	293,407212	22	28,425342	37	161,624753
8	302,332397	23	37,438555	38	170,354000
9	311,275511	24	46,440160	39	179,077054
10	320,235100	25	55,427462	40	187,797900
11	329,209610	26	64,397980	41	196,520498
12	338,197394	27	73,349185	42	205,248680
13	347,196854	28	82,279109	43	213,986019
14	356,206353	29	91,186132	44	222,735768

Nous pouvons maintenant calculer les nombres θ et S des formules (108).

Pour calculer les nombres ρ et φ des formules (105), on calculera A et B des formules (101) ; et en posant :

$$A_1 = -(A + B), \qquad A_2 = A - B$$

on aura :

$$A_2 \sin 2\omega = r \sin \lambda, \qquad 1 + A_1 \cos 2\omega = r \cos \lambda$$

ces quantités se calculeront à l'aide des logarithmes d'addition et de soustraction. Comme jusqu'à $\lambda = 3'$ on ne peut prendre $\cos \lambda = 1$, on aura $1 + A_1 \cos 2\omega = r$. Alors, si $A_1 \cos 2\omega$ est positif, le logarithme additif de $(A_1 \cos 2\omega)^{-1}$ est le logarithme de r; si $A_1 \cos 2\omega$ est négatif, le logarithme soustractif de $(A_1 \cos 2\omega)^{-1}$ est le logarithme de $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire que ce logarithme changé de signe est le logarithme de r. En retranchant le logarithme r de celui de $A_2 \sin 2\omega$, on a le logarithme de $\sin \lambda$; en divisant $\sin \lambda$ par la longueur du grade, c'est-à-dire en ajoutant à $\log \sin \lambda$ le nombre 1,80388, on a le logarithme de λ traduit en grades ; par suite, en retournant aux nombres, on a λ exprimé en grades.

En voici un exemple :

N° 44.

$$\begin{array}{lrl}
\omega & = & 222^g,735768 \\
A_1 \cos 2\omega & = & -\bar{4},43858 \\
 & & 3,56142 \\
\text{log sous} & & 0,0001192 = \frac{1}{r} \\
\theta & & \bar{1},8646155 \\
\hline
\rho & = & \bar{1},8644965
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
A_2 \sin 2\omega = & \bar{4},11973 \\
 & 1,80388 \\
\hline
 & \bar{3},92361 \\
 & 12 \\
\hline
 & \bar{3},92373 \\
\lambda = & 0^g,008389 \\
\varphi = & 22^g,744157
\end{array}$$

Tous ces nombres sont renfermés dans les Tableaux ci-après.

Les logarithmes négatifs des Tableaux ont été augmentés de 10.

Tableau des valeurs de θ et S des Formules (108).

N°	θ	N°	θ	N°	θ
0	9,8636566	15	9,8521785	30	9,8586038
1	9,8626148	16	9,8519165	31	9,8599026
2	9,8615215	17	9,8517077	32	9,8612045
3	9,8604173	18	9,8515576	33	9,8624622
4	9,8593337	19	9,8514792	34	9,8636348
5	9,8582968	20	9,8514865	35	9,8646769
6	9,8573253	21	9,8515956	36	9,8655522
7	9,8564350	22	9,8518241	37	9,8662285
8	9,8556320	23	9,8521815	38	9,8666791
9	9,8549183	24	9,8526846	39	9,8668925
10	9,8542901	25	9,8533388	40	9,8668642
11	9,8537417	26	9,8541408	41	9,8666032
12	9,8532637	27	9,8550875	42	9,8661195
13	9,8528506	28	9,8561629	43	9,8654488
14	9,8524881	29	9,8573451	44	9,8646155

N°	S	N°	S	N°	S
0	9,9994971	15	0,0000375	30	9,9992944
1	9,9993863	16	0,0000506	31	9,9993879
2	9,9992930	17	0,0000314	32	9,9995005
3	9,9992261	18	9,9999806	33	9,9996219
4	9,9991903	19	9,9999025	34	9,9997441
5	9,9991881	20	9,9998029	35	9,9998560
6	9,9992187	21	9,9996893	36	9,9999494
7	9,9992802	22	9,9995709	37	0,0000167
8	9,9993675	23	9,9994542	38	0,0000510
9	9,9994738	24	9,9993501	39	0,0000505
10	9,9995908	25	9,9992665	40	0,0000148
11	9,9997099	26	9,9992082	41	9,9999479
12	9,9998218	27	9,9991809	42	9,9998528
13	9,9999193	28	9,9991869	43	9,9997410
14	9,9999919	29	9,9992256	44	9,9996190

Tableau des valeurs de ρ et φ des Formules (105).

N°	ρ	N°	ρ	N°	ρ
0	9,8635702	15	9,8521078	30	9,8587589
1	9,8625677	16	9,8518106	31	9,8600522
2	9,8615170	17	9,8515750	32	9,8613371
3	9,8604556	18	9,8514088	33	9,8625675
4	9,8594117	19	9,8513261	34	9,8637047
5	9,8584084	20	9,8513414	35	9,8647059
6	9,8574619	21	9,8514701	36	9,8655379
7	9,8565860	22	9,8517281	37	9,8661718
8	9,8557857	23	9,8521226	38	9,8665841
9	9,8550626	24	9,8526675	39	9,8667665
10	9,8544139	25	9,8533648	40	9,8667166
11	9,8538351	26	9,8542079	41	9,8664452
12	9,8533194	27	9,8551905	42	9,8659630
13	9,8528641	28	9,8562938	43	9,8653056
14	9,8524583	29	9,8574938	44	9,8644963

N°	φ	N°	φ	N°	φ
0	$31^g,511501$	15	$165^g,212295$	30	$300^g,069169$
1	40,295600	16	174,238913	31	308,924266
2	49,097982	17	183,271150	32	317,755463
3	57,919899	18	192,306868	33	326,563859
4	66,762035	19	201,343778	34	335,351256
5	75,624561	20	210,379360	35	344,119943
6	84,507344	21	219,410936	36	352,872718
7	93,409906	22	228,435709	37	361,612828
8	102,331435	23	237,450820	38	370,343766
9	111,270942	24	246,453336	39	379,069267
10	120,227260	25	255,440496	40	387,793133
11	129,199100	26	264,409842	41	396,519107
12	138,185034	27	273,358951	42	5,250775
13	147,183620	28	282,286033	43	13,991457
14	156,193299	29	291,189702	44	22,744157

Nous pouvons maintenant calculer les valeurs de $A_{n'}$ form. (205), $n'=13$. On a :

$$\xi - \xi^{-1} = \cos\varphi\,(\rho^{-1} - \rho) + \sqrt{-1}\,\sin\varphi\,(\rho^{-1} + \rho)$$
$$\xi + \xi^{-1} = \cos\varphi\,(\rho^{-1} + \rho) + \sqrt{-1}\,\sin\varphi\,(\rho^{-1} - \rho)$$

Posons

$$\rho^{-1} - \rho = \delta, \qquad \rho^{-1} + \rho = \sigma$$
$$26\delta - \sigma = \Delta, \qquad 26\sigma - \delta = \Sigma$$

L'exposant de e dans $A_{n'}$ sera :

$$-\frac{1}{52}\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2} + \frac{\varepsilon'}{4}\,\Delta\cos\varphi + \frac{\varepsilon'}{4}\sqrt{-1}\,\Sigma\sin\varphi$$

Posons :

$$\frac{\varepsilon'}{4}\,\Delta\cos\varphi - \frac{1}{52}\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2} = p$$

on aura :

$$A_{n'} = S\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}\rho^{13}(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\,e^p\,e^{\left(-13\varphi + \frac{\varepsilon'}{4}\Sigma\sin\varphi\right)\sqrt{-1}}$$

$\frac{\varepsilon'}{4}\,\Sigma\sin\varphi$ est une longueur ; en ajoutant à son logarithme le logarithme de $\frac{200}{\pi}$ qui est 1,8038801, on transformera cette longueur en grades. Posons donc :

$$\frac{200}{\pi}\,\Sigma\,\frac{\varepsilon'}{4}\sin\varphi = q$$

on aura :

$$(205\ bis) \qquad A_{n'} = S\left(\frac{1}{2}\right)_{n'}\rho^{13}(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\,e^p\,e^{(-13\varphi + q)\sqrt{-1}}$$

A l'aide des tables d'addition et de soustraction, il est facile de former les éléments de $A_{n'}$. Pour avoir le logarithme de e^p, on prend le logarithme du logarithme, et on retourne aux nombres ; $\log\log e = \bar{1},6377843$.

Nous allons donner les Tableaux des valeurs de e^p et de q.

Tableau des valeurs de e^p et de q de la Formule (205 bis).

N°	e^p	N°	e^p	N°	e_p
0	0,0136909	15	9,9666531	30	9,9909160
1	0,0120211	16	9,9647326	31	9,9945733
2	0,0099115	17	9,9633490	32	9,9980660
3	0,0073829	18	9,9625368	33	0,0013382
4	0,0044702	19	9,9623183	34	0,0043443
5	0,0012215	20	9,9627011	35	0,0070507
6	9,9976969	21	9,9636782	36	0,0094317
7	9,9939667	22	9,9652267	37	0,0114686
8	9,9901098	23	9,9673070	38	0,0131474
9	9,9862104	24	9,9698658	39	0,0144539
10	9,9823552	25	9,9728355	40	0,0153752
11	9,9786312	26	9,9761374	41	0,0158957
12	9,9751226	27	9,9796858	42	0,0160025
13	9,9719092	28	9,9833907	43	0,0156771
14	9,9690641	29	9,9871625	44	0,0149092

N°	q	N°	q	N°	q
0	6^{g},839911	15	7^{g},538370	30	—14^{g},443116
1	8,523038	16	5,712395	31	—14,289620
2	10,049461	17	3,769620	32	—13,862254
3	11,388810	18	1,749588	33	—13,172112
4	12,513690	19	—0,306344	34	—12,234756
5	13,400310	20	—2,355888	35	—11,069822
6	14,029300	21	—4,356805	36	—9,700490
7	14,386060	22	—6,267891	37	—8,152910
8	14,461363	23	—8,050017	38	—6,455880
9	14,251652	24	—9,666956	39	—4,640300
10	13,759210	25	—11,086434	40	—2,738842
11	12,992210	26	—12,280796	41	—0,785548
12	11,964606	27	—13,227530	42	1,184552
13	10,695857	28	—13,909832	43	3,135886
14	9,210672	29	—14,316733	44	5,032758

On peut maintenant calculer la valeur de $A_{n',-n}$ formule (47).

$$k = 45, \qquad n' = 13, \qquad n = 8, \qquad T = \psi - \varepsilon \sin \psi.$$

En remplaçant $A_{n'}$ par sa valeur (205 *bis*), on a :

$$A_{n',-n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{13}}{45} \Sigma S \rho^{13} (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} e^p (1 - \varepsilon \cos \psi) e^{(-13\varphi + q + 8T)\sqrt{-1}}$$

47 *bis*. $$\left\{ \begin{aligned} A_{n',-n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{13}}{45} \Sigma . M [\cos(-13\varphi + q + 8T) \\ &\qquad + \sqrt{-1} \sin(-13\varphi + q + 8T)] \\ M &= S\rho^{13} (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} e^p (1 - \varepsilon \cos \psi) \end{aligned} \right.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{13} = \frac{1.3.5\ldots.25}{2.4.6\ldots.26},$$ dont le logarithme vaut $\bar{1},1902785$.

On calculera les 45 valeurs de $Me^{(-13\varphi + q + 8T)\sqrt{-1}}$, on en fera la somme, et en la multipliant par $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{13}}{45}$, on aura $A_{n',-n}$.

Comme $\psi = 0, 8^o, 16^o$, etc., les numéros 1,44; 2,43, etc., pour $1 - \varepsilon \cos \varphi$, ont les mêmes valeurs.

Quant à $T = \psi - \varepsilon \sin \psi$, il doit être estimé en grades.

$(8^o = \frac{80^g}{9} = 8^g,888888)$. $\varepsilon \sin \varphi$ étant une longueur, on la multipliera par $\frac{200}{\pi}$ pour avoir le nombre de grades correspondant, alors $T = \psi - \frac{200}{\pi} \varepsilon \sin \psi$. Il faut remarquer que les numéros 1,44 ; 2,43, etc., des valeurs de T sont égaux et de signe contraire.

Nous allons donner les logarithmes des valeurs de $Me^{(-13\varphi+q+8T)\sqrt{-1}}$ et au-dessous les nombres multipliés par 10^7.

Tableau des valeurs de M cos de la Formule (47 bis).

N°	M cos	N°	M cos	N°	M cos
0	8,401777	15	—7,754808	30	—8,291678
	252218		— 56860		— 195739
1	8,269101	16	7,765125	31	—8,309326
	185823		58227		— 203857
2	7,677627	17	8,146082	32	—8,068330
	47602		139985		— 117038
3	—8,004238	18	8,163251	33	7,496907
	— 100980		145630		31398
4	—8,293474	19	7,863547	34	8,251050
	— 196550		73037		178258
5	—8,302686	20	—7,587503	35	8,411277
	— 200764		— 38681		257796
6	—8,065346	21	—8,114787	36	8,364238
	— 116237		— 130252		231333
7	7,184028	22	—8,185579	37	8,023809
	15276		— 153313		105635
8	8,120466	23	—7,977924	38	—7,836982
	131967		— 95043		— 68704
9	8,255772	24	7,196262	39	—8,340021
	180207		15713		— 218787
10	8,144646	25	8,091139	40	—8,449288
	139523		123350		— 281376
11	7,511034	26	8,237958	41	—8,362945
	32436		172964		— 230645
12	—7,936071	27	8,137040	42	—7,949659
	— 86312		137100		— 89036
13	—8,195376	28	7,464092	43	7,919426
	— 156811		29114		83066
14	—8,159031	29	—8,010516	44	8,330784
	— 144222		— 102451		214182

Tableau des valeurs de M sin de la Formule (47 bis).

N°	M sin	N°	M sin	N°	M sin
0	—7,046824	15	8,168637	30	—7,826293
	— 11138		147447		— 67034
1	—8,196356	16	8,160413	31	7,879063
	— 157165		144681		75694
2	—8,360143	17	7,813656	32	8,292581
	— 229162		65110		196146
3	—8,302963	18	—7,681609	33	8,375316
	— 200892		— 48040		237310
4	—7,951911	19	—8,128211	34	8,243611
	— 89518		— 134342		175230
5	7,723421	20	—8,170794	35	7,495282
	52895		— 148181		31281
6	8,211072	21	—7,915953	36	—8,131999
	162582		— 82405		— 135518
7	8,283690	22	7,455968	37	—8,404284
	192172		28573		— 253678
8	8,119287	23	8,103983	38	—8,432661
	131609		127052		— 270807
9	7,097965	24	8,208488	39	—8,249025
	12530		161617		— 177429
10	—8,027433	25	8,052273	40	—7,065927
	— 106520		112790		— 11639
11	—8,225092	26	6,395060	41	8,197164
	— 167916		2483		157457
12	—8,155380	27	—8,066441	42	8,414917
	— 143014		— 116530		259966
13	—7,668059	28	—8,268798	43	8,407279
	— 46565		— 185693		255434
14	7,848676	29	—8,225984	44	8,173731
	70579		— 168261		149186

On tire des Tableaux qui précèdent :

$$\Sigma \mathrm{M} \cos = - 0,0001820 = - (\bar{4},260071)$$
$$\Sigma \mathrm{M} \sin = - 0,0001620 = - (\bar{4},209515)$$

et comme le facteur $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{13}}{45}$ vaut $\bar{3},537066$, la formule (47 *bis*) devient :

$$A_{13'-8} = - \frac{6268}{10^{10}} - \frac{5579}{10^{10}} \sqrt{-1} = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

On a posé $\qquad A = 2\alpha, \qquad B = - 2\beta$

comme le facteur $\frac{24an^2m'}{\mu(13n' - 8n)^2}$, dans lequel μ peut être supposé égal à 1, donne après la division par sin 1″, (6,182057), la formule (3) devient

$$\delta\zeta = -(0,28022) \sin(13T' - 8T) - (0,22967) \cos(13T' - 8T)$$
$$= M \sin + N \cos$$

D'après les notations de la formule (4) :

$$\gamma \sin \lambda = N, \qquad \gamma \cos \lambda = M$$

d'où :

$$\gamma = (0,40698) = 2'',552 \qquad \lambda = 221^\circ 40'$$

Alors la formule (3) devient :

$$\delta\zeta = 2''55 \sin [13T' - 8T + 221^\circ 40']$$

Telle est l'inégalité à longue période du moyen mouvement de Vénus.

Pour calculer l'inégalité correspondante de la Terre, en se reportant aux formules (6) et (7), comme le facteur $\frac{39a'n'^2m}{\mu'(13n' - 8n)^2}$ vaut (6,057675), on a :

$$\delta\zeta' = (0{,}15584)\sin(13T' - 8T) + (0{,}10523)\cos(13T' - 8T)$$
$$\gamma' = (0{,}28254) = 1'',916\,, \qquad \lambda' = 41^\circ 40'$$
$$\delta\zeta' = 1'',92 \sin(13T' - 8T + 41^\circ 40')$$

Telle est l'inégalité à longue période du moyen mouvement de la Terre.

Pour calculer les inégalités $\delta\zeta$, $\delta\zeta'$ à $0'',1$ près, on aurait dû prendre 53 valeurs de ψ, tandis qu'on en a pris 45 ; mais on peut s'assurer qu'on a déjà une grande approximation avec 15 valeurs seulement. La formule de l'erreur donnerait donc en général un nombre de valeurs de ψ trop considérable, de sorte qu'on peut considérer le résultat précédent comme exact à $0'',1$ près. Au reste, ce résultat s'accorde sensiblement avec celui qui est indiqué, soit dans les *Annales de l'Observatoire*, soit dans la *Théorie analytique du système du monde*, de M. de Pontécoulant, pourvu qu'on remplace T et T′ par leurs valeurs en fonction des longitudes moyennes.

FIN.