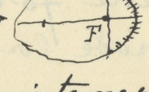
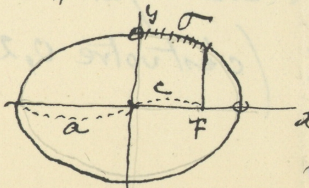
6 Novembre 1914. „Meadville" Pixmore Avenue.
Letchworth (Herts). Angleterre

Monsieur,

J'ai bien reçu votre lettre du 29 octobre. Vous vous demandez peut-être en quoi les fonctions elliptiques peuvent être utiles à un Directeur de Laboratoire de Chimie. En réalité, je fais actuellement de la Métallographie et de la Chimie, mais je suis Professeur de Cristallographie et Minéralogie à l'Université de Liège: je me suis occupé toute ma vie de Mathématiques réelles, je veux dire des Mathématiques donnant lieu à des applications numériques.



Un colonel Belge de mes amis m'avait posé la question suivante: „Déterminer le rapport des axes d'une ellipse dans laquelle l'arc intercepté par la corde menée par un foyer perpendiculairement au grand axe, est „le tiers du périmètre de la courbe totale." — Cela revient à déterminer une ellipse telle que σ soit le $\frac{1}{3}$ du quadrant elliptique.—



Or, la longueur du quadrant elliptique $(a=1)$ est votre E de la page 44; quant à σ il est donné par la valeur de votre $E(\varphi)$ correspondante à $\varphi=\theta$; votre $k=\sin\theta$ est l'excentr: $\frac{c}{a}=e$ (et $\frac{b}{a}=\cos\theta$); il suffit donc, pour l'obtenir, de chercher dans votre tableau l'intersection d'une colonne et d'une ligne se rapportant au même arc: ainsi, pour $\theta=30°$, c'est à dire $e=\frac{1}{2}$, on lit dans votre tableau $\begin{cases}\sigma=0{,}518\\ E=1{,}467\end{cases}$, d'où $\frac{\sigma}{E}=0{,}353$. Si la table était plus complète, on pourrait rapidement trouver la valeur de θ donnant $\frac{\sigma}{E}=0{,}333\ldots$ — Mais j'ai pu tout de même obtenir une valeur approchée à cause de la manière dont σ et E varient avec $\cos\theta$. La figure ci-jointe montre la solution graphique du problème: en prenant comme abscisses les valeurs de $\frac{b}{a}=\cos\theta$, j'ai tracé les courbes en $\frac{E}{3}$ et en σ; leur point d'intersection correspond à $\frac{b}{a}=0{,}88$.

D'ailleurs, la forme des courbes montre qu'entre les limites considérées (25°–30°) on peut les considérer comme rectilignes et agir par interpolation.—

Il ne faut pas songer à résoudre le problème directement, car mon inconnue est K et, dans tous les problèmes que vous traitez, K figure toujours parmi les données.—

⁂

Je profite de ce que je suis forcé actuellement à garder la chambre pour essayer d'avoir une solution plus approchée: je calcule E par la formule

$$E=\frac{\pi}{2}(1-H),\ \text{dans laquelle}$$

$$H=\frac{1}{2^2}e^2+\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 6^2}e^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8}e^8+\ldots\ldots$$

bien convergente lorsque $e<\frac{1}{2}$, comme dans mon cas;

quant à σ, en me servant de $\int_0^z \frac{z^m dz}{\sqrt{1-z^2}} = y_m \cdots \quad (z = \frac{x}{a})$

qui, intégrée par parties, donne: $y_m = \frac{m-1}{m} y_{m-2} - \frac{1}{m} z^{m-1} \sqrt{1-z^2}$, formule qui donne successivement $y_2, y_4, y_6, \ldots$, j'arrive à

$$\sigma = \arcsin e \cdot (1-H) + \sqrt{1-e^2}\left(\frac{1}{4}e^3 + \frac{3}{64}e^5 + \frac{13}{2^8}e^7 + \frac{1165}{3.2^{14}}e^9 + \frac{4771}{3.2^{16}}e^{11} + \cdots\right)$$

ou bien, j'arrive à

$$\sigma = e + \frac{e^3}{6} - \frac{11}{120}e^5 - \frac{3}{560}e^7 - \frac{13043}{630 \cdot 16^3}e^9 - \frac{695}{693 \cdot 16^2}e^{11} \cdots ;$$

cette formule, qui donne direct. σ en fonction de l'excentricité, est très commode lorsque e est petite; ainsi, pour $\theta = 15^\circ$,

$$e = \sin 15^\circ = 0{,}258819,$$

on trouve, en prenant 1, 2, 3... termes:

0,258819
0,26170860
0,26160214
0,26160172
0,26160169
0,26160169

en tenant compte de l'erreur possible

$$\sigma_{15^\circ} = 0{,}2616017 \quad \text{(c'est votre 0,262)}$$

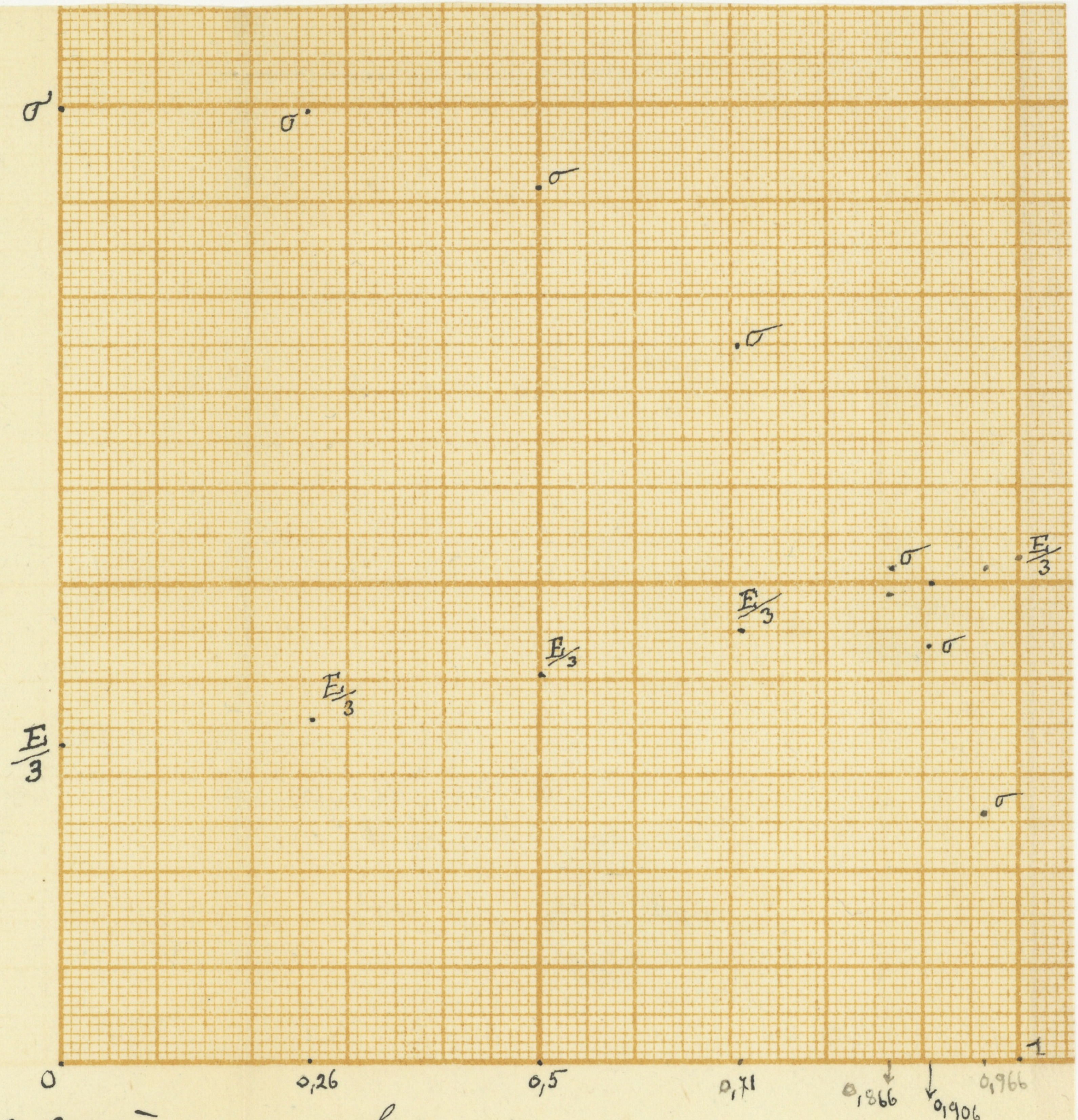
*
* *

Je ne suis pas en correspondance avec de purs mathématiciens, mais, par mon ami R. Panebianco, professeur de Minéralogie à Padoue (il m'écrit qu'il vient d'y rentrer) je compte pouvoir vous fournir des indications sur les mathématiciens italiens auxquels vous pourriez utilement adresser vos travaux.

Agréez, je vous prie, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

G. Cesàro;

P. S. Je vous envoie un de mes derniers travaux, pour vous montrer de quel genre de questions je m'occupe.



G. Cesàro

$\frac{b}{a} = \cos\theta$