

N° D'ORDRE

437.

H. F. u. f. 166. 6 14
THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. ASTOR,

Professeur au Lycée de Nice.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE SUR QUELQUES SURFACES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

**Soutenues, le 22 avril 1880, devant la Commission
d'Examen.**

MM. BOUQUET, *Président.*

**O. BONNET, }
DARBOUX, } *Examineurs.***

PARIS,

**GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.**

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1880

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

DOYEN..... MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.

PROFESSEURS HONORAIRES { DUMAS.
PASTEUR.

CHASLES Géométrie supérieure.

P. DESAINS..... Physique.

LIOUVILLE.... Mécanique rationnelle.

PUISEUX Astronomie.

HÉBERT..... Géologie.

DUCHARTRE..... Botanique.

JAMIN..... Physique.

SERRET..... Calcul différentiel et intégral.

H. S^{te}-CLAIRE DEVILLE... Chimie.

PROFESSEURS..... DE LACAZE-DUTHIERS... Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.

BERT..... Physiologie.

HERMITE..... Algèbre supérieure.

BRIOT..... Calcul des probabilités, Physique mathématique.

BOUQUET..... Mécanique physique et expérimentale.

TROOST Chimie.

WURTZ..... Chimie organique.

FRIEDEL..... Minéralogie.

O. BONNET..... Astronomie.

AGRÉGÉS..... { BERTRAND..... } Sciences mathématiques.
J. VIEILLE..... }
PELIGOT..... Sciences physiques.

SECRÉTAIRE PHILIPPON.

A MON PÈRE.

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE SUR QUELQUES SURFACES.

INTRODUCTION.

Je me propose d'étudier les surfaces engendrées par un cercle dont le plan se déplace parallèlement à un plan fixe. Je prends un plan parallèle au plan mobile pour plan des XY , et, dans ce plan, deux axes rectangulaires. L'axe des Z pourra être quelconque, à moins que les formules employées ne supposent les trois axes rectangulaires. Les coordonnées d'un point de la surface seront fonctions de deux variables indépendantes. L'une, qui sera la coordonnée Z elle-même, déterminera la position du centre et le rayon du cercle auquel appartient le point; l'autre sera un angle θ qui fixera la position du point sur le cercle.

Je divise mon travail en deux Parties. Dans la première, je me borne le plus souvent, pour avoir les éléments qui interviennent dans l'étude des surfaces, à faire de simples changements de variables. Une propriété des lignes asymptotiques, propriété mise en relief par leur équation même, m'amène à dire quelques mots de la surface plus générale engendrée par une série de courbes homothétiques situées dans des plans parallèles.

Quand le lieu des centres des cercles qui engendrent la surface est connu, une directrice suffit à la déterminer; j'étudie à un point de vue spécial la surface que l'on obtient quand cette directrice est une ligne droite. J'examine également la surface engendrée quand le cercle s'appuie sur trois lignes droites, et je l'envisage spécialement dans ses rapports avec l'hyperboloïde déterminé par les trois directrices.

Dans la seconde Partie, je ne m'occupe que des surfaces engendrées par le cercle. Je les étudie surtout au point de vue de la courbure. Je trouve un groupe de ces surfaces pour lesquelles il existe un rapport constant entre la somme des rayons de courbure principaux en chaque point et la longueur de la normale prise de ce point jusqu'à sa rencontre avec l'axe du cercle sur lequel il est situé. Je ramène leur recherche à des quadratures et j'examine quelques cas particuliers. Je termine enfin, après une remarque relative aux ombilics, en donnant les équations qui permettent de les déterminer sur chaque surface.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Soient

$$x = f(Z), \quad y = \varphi(Z)$$

les équations de la courbe décrite par le centre du cercle générateur, et

$$u = \psi(Z)$$

le rayon correspondant à la valeur Z de l'ordonnée; l'équation du cercle dans son plan sera

$$(1) \quad (X - x)^2 + (Y - y)^2 = u^2.$$

En y remplaçant x , y et u par leurs valeurs en fonction de Z , on aurait l'équation de la surface

$$[X - f(Z)]^2 + [Y - \varphi(Z)]^2 = [\psi(Z)]^2;$$

mais il est préférable de la définir par les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} X = x + u \cos \theta, \\ Y = y + u \sin \theta. \end{cases}$$

L'étude se borne aux questions dans lesquelles interviennent les dérivées partielles du premier et du second ordre, dérivées que l'on représente par p, q, r, s, t . Nous allons nous proposer d'en avoir l'expression en fonction de Z et θ .

Nous désignerons par $x', y', u', x'', y'', u''$ les dérivées premières et secondes de x, y et u par rapport à Z .

Pour avoir p et q , différencions l'équation (1) :

$$(X - x)(dX - x' dZ) + (Y - y)(dY - y' dZ) = uu' dZ$$

ou

$$u \cos \theta dX + u \sin \theta dY = u(x' \cos \theta + y' \sin \theta + u') dZ.$$

On a donc, en posant $x' \cos \theta + y' \sin \theta + u' = A$,

$$(3) \quad p = \frac{\cos \theta}{A}, \quad q = \frac{\sin \theta}{A}.$$

II.

Plan tangent, normale, lignes de courbure, rayons de courbure principaux.

L'équation du plan tangent au point (XYZ) est, en désignant par ξ , η , ζ les coordonnées courantes,

$$(1) \quad A(\zeta - Z) = \cos \theta (\xi - X) + \sin \theta (\eta - Y).$$

Les équations de la normale sont

$$(2) \quad \frac{\xi - X}{\cos \theta} = \frac{\eta - Y}{\sin \theta} = \frac{\zeta - Z}{-A}.$$

Proposons-nous de former l'équation différentielle des lignes de courbure. Les équations de la normale en un point infiniment voisin $(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ sont

$$(3) \quad \frac{\xi - (X + dX)}{\cos \theta + d \cos \theta} = \frac{\eta - (Y + dY)}{\sin \theta + d \sin \theta} = \frac{\zeta - (Z + dZ)}{-(A + dA)}.$$

Ces quatre équations devront avoir une solution commune en ξ , η , ζ . Égalons les trois premiers rapports à une indéterminée ρ , les trois derniers à ρ' ; nous aurons à éliminer ξ , η , ζ , ρ et ρ' entre les six équations

$$(4) \quad \begin{cases} \xi - X = \rho \cos \theta, \\ \eta - Y = \rho \sin \theta, \\ \zeta - Z = -\rho A, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \xi - X - dX = \rho'(\cos \theta - \sin \theta d\theta), \\ \eta - Y - dY = \rho'(\sin \theta + \cos \theta d\theta), \\ \zeta - Z - dZ = -(\rho + d\rho)\rho', \end{cases}$$

ce qui revient à éliminer ρ et ρ' entre les trois suivantes :

$$\begin{aligned} -dX &= (\rho' - \rho) \cos \theta - \rho' \sin \theta d\theta, \\ -dY &= (\rho' - \rho) \sin \theta + \rho' \cos \theta d\theta, \\ -dZ &= -(\rho' - \rho) A - \rho' dA. \end{aligned}$$

Des deux premières nous déduisons

$$\begin{aligned} \rho' - \rho &= -\cos \theta dX - \sin \theta dY, \\ \rho' d\theta &= \sin \theta dX - \cos \theta dY, \end{aligned}$$

$\rho' - \rho$ est donc un infiniment petit du même ordre que dZ et $d\theta$; nous pouvons le représenter par $d\rho$ et remplacer ρ' par ρ dans la seconde équation, de sorte que nos équations reviennent aux suivantes,

$$(6) \quad \begin{cases} d\rho = -\cos \theta dX - \sin \theta dY, \\ \rho d\theta = \sin \theta dX - \cos \theta dY, \\ dZ = A d\rho + \rho dA, \end{cases}$$

entre lesquelles il suffit d'éliminer ρ et $d\rho$.

Nous pouvons remarquer qu'on arriverait au même résultat en différentiant les équations (4) et y considérant ρ comme une fonction de Z et θ . Ces équations nous seront utiles pour former celle qui donne les rayons de courbure principaux.

On tire du groupe (2), § I,

$$\begin{aligned} dX &= (x' + u' \cos \theta) dZ - u \sin \theta d\theta, \\ dY &= (y' + u' \sin \theta) dZ + u \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

done

$$(7) \quad \begin{cases} d\rho = -A dZ, \\ \rho d\theta = (x' \sin \theta - y' \cos \theta) dZ - u d\theta. \end{cases}$$

Remplaçant $d\rho$ et $\rho d\theta$ par ces valeurs dans l'équation

$$dZ d\theta = A d\rho d\theta + \rho dA d\theta,$$

on a l'équation différentielle des lignes de courbure

$$dZ d\theta = -A^2 dZ d\theta + [(x' \sin \theta - y' \cos \theta) dZ - u d\theta] dA.$$

D'autre part,

$$dA = (x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'') dZ + (y' \cos \theta - x' \sin \theta) d\theta.$$

Posant

$$x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'' = B,$$

l'équation devient

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ^2 \\ + [(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 + uB] dZ d\theta + u(y' \cos \theta - x' \sin \theta) d\theta^2 = 0. \end{array} \right.$$

On peut en déduire aisément l'équation qui donne les rayons de courbure principaux. On a en effet, en désignant par R l'un de ces rayons,

$$R = \rho \sqrt{A^2 + 1}.$$

Formons l'équation qui donne les valeurs de ρ correspondant à celles que (8) détermine pour $\frac{dZ}{d\theta}$; on tire de (7)

$$\frac{dZ}{\rho + u} = \frac{d\theta}{-(y' \cos \theta - x' \sin \theta)}.$$

Remplaçons dans (8) dZ et $d\theta$ par les quantités qui leur sont proportionnelles; nous trouvons l'équation en ρ

$$B\rho^2 - [(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu]\rho - (A^2 + 1)u = 0.$$

Posant

$$(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu = U,$$

nous aurons, pour déterminer les rayons de courbure principaux, l'équation

$$(9) \quad BR^2 - \sqrt{A^2 + 1} UR - (A^2 + 1)^2 u = 0.$$

III.

De l'équation (8) des lignes de courbure on peut déduire quelques résultats simples.

Si nous voulons que les cercles générateurs de la surface soient des

lignes de courbure, il faut écrire que le terme en $d\theta^2$ s'annule quels que soient Z et θ , de manière que l'équation admette la solution $dZ = 0$. On devra donc avoir

$$u(y' \cos \theta - x' \sin \theta) = 0;$$

u ne pouvant être nul quel que soit Z , il faut que

$$y' \cos \theta - x' \sin \theta = 0,$$

ce qui exige que y' et x' soient nuls séparément, c'est-à-dire

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.},$$

et la surface est de révolution. Mais alors l'équation se réduit à $dZ d\theta = 0$, et les deux séries de lignes de courbure sont données par $Z = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$; ce sont les parallèles et les méridiens. Il n'y a donc que les surfaces de révolution qui admettent pour lignes de courbure une série de cercles situés dans des plans parallèles.

Si le coefficient de dZ^2 était nul, un système de lignes de courbure serait donné par $d\theta = 0$ ou $\theta = \text{const.}$ Or ce coefficient est

$$(y' \cos \theta - x' \sin \theta)(x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'').$$

On retrouve le cas de $x' = 0$, $y' = 0$, ce qui fait retomber sur les surfaces de révolution. On peut aussi poser

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad u'' = 0,$$

ce qui donne, en désignant par a, b, c, d, e, f des constantes arbitraires,

$$x = aZ + b, \quad y = cZ + d, \quad u = eZ + f.$$

L'équation de la surface est alors

$$(X - aZ - b)^2 + (Y - cZ - d)^2 = (eZ + f)^2;$$

elle représente un cône du second degré. $\theta = \text{const.}$ correspond aux génératrices le long desquelles les normales à la surface sont parallèles, et l'équation restante est celle de leurs trajectoires orthogonales.

Nous pouvons supposer l'origine des coordonnées transportée au sommet du cône et la droite lieu des centres située dans le plan des ZX .

Alors $c = b = d = f = 0$, et l'équation se réduit à

$$(1 + a^2 + e^2 + 2ae \cos \theta) dZ = aeZ \sin \theta d\theta,$$

ou

$$\frac{2 dZ}{Z} = \frac{2ae \sin \theta d\theta}{1 + a^2 + e^2 + 2ae \cos \theta},$$

les deux membres sont des différentielles exactes, et l'on a, en intégrant,

$$Z^2 = \frac{K}{1 + a^2 + e^2 + 2ae \cos \theta},$$

K étant une constante arbitraire.

Les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque du cône étant liées par les relations

$$X = aZ + eZ \cos \theta,$$

$$Y = eZ \sin \theta,$$

les trajectoires orthogonales des génératrices sont données par

$$Z^2 = \frac{K}{1 + a^2 + e^2 + 2ae \cos \theta}.$$

Ces trajectoires orthogonales sont évidemment les coniques sphériques du cône, et on a là une forme particulière d'équations pour ces coniques sphériques.

Il est facile de vérifier du reste que ce sont bien des coniques sphériques, car, si l'on fait le carré de la distance à l'origine du point (XYZ), on trouve

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = Z^2(1 + a^2 + e^2 + 2ae \cos \theta) = K,$$

d'après la relation qui lie Z et θ .

IV.

Calcul de r, s, t.

Proposons-nous maintenant d'avoir en fonction de Z et θ les éléments du second ordre (r, s, t) de la surface. Il nous suffira d'effectuer un changement très simple de variables.

Nous connaissons déjà p et q en fonction de Z et θ . D'une façon générale, posons

$$X = f_1(Z, \theta), \quad Y = f_2(Z, \theta),$$

$$p = f_3(Z, \theta), \quad q = F_3(Z, \theta);$$

nous aurons

$$dp = \frac{\partial f_3}{\partial Z} dZ + \frac{\partial f_3}{\partial \theta} d\theta.$$

Mais Z et θ sont des fonctions de X et Y dont les différentielles sont données par les équations

$$dX = \frac{\partial f_1}{\partial Z} dZ + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta,$$

$$dY = \frac{\partial f_2}{\partial Z} dZ + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta;$$

par suite, on a, pour déterminer dp en fonction de dX et de dY , l'équation

$$\begin{vmatrix} dp & dX & dY \\ \frac{\partial f_3}{\partial Z} & \frac{\partial f_1}{\partial Z} & \frac{\partial f_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0,$$

et de même, pour dq ,

$$\begin{vmatrix} dq & dX & dY \\ \frac{\partial F_3}{\partial Z} & \frac{\partial f_1}{\partial Z} & \frac{\partial f_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial X}$, $\frac{\partial p}{\partial Y}$, $\frac{\partial q}{\partial X}$, $\frac{\partial q}{\partial Y}$, c'est-à-dire r , s , t , en fonction de Z et θ . On trouve ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial X} = r = \frac{-u B \cos^2 \theta + (x' + u' \sin \theta)^2}{u \Lambda^3}, \\ \frac{\partial p}{\partial Y} = \frac{\partial q}{\partial X} = s = \frac{-(x' + u' \cos \theta)(x' + u' \sin \theta) - u B \sin \theta \cos \theta}{u \Lambda^3}, \\ \frac{\partial q}{\partial Y} = t = \frac{-u B \sin^2 \theta + (x' + u' \cos \theta)^2}{u \Lambda^3}. \end{cases}$$

Au moyen de ces valeurs de r, s, t , jointes à celles déjà connues de p, q, dX, dY , nous pourrions transformer les équations qui donnent en coordonnées ordinaires les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux de la surface; cela nous fournirait des vérifications des résultats trouvés directement. Sans insister sur ces vérifications, nous allons nous servir de ces valeurs pour calculer l'équation des lignes asymptotiques. Cette équation est, comme on sait,

$$r dX^2 + 2s dX dY + t dY^2 = 0.$$

Substituant à r, s, t, dX et dY leurs valeurs en fonction de Z, θ, dZ et $d\theta$, nous obtiendrons, par des réductions faciles, l'équation

$$(2) \quad B dZ^2 - u d\theta^2 = 0.$$

Cette équation a une forme extrêmement simple; mais, malgré cela, elle n'en est pas plus commode pour l'intégration dans le cas général, B dépendant à la fois de Z et de θ . Elle nous montre toutefois que, si B ne dépend que de la variable Z seule ou de la variable θ seule, la recherche des lignes asymptotiques sera ramenée à une quadrature.

Pour que $B = x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u''$ dépende uniquement de Z , il faut et il suffit que $x'' = 0, y'' = 0$, c'est-à-dire que le lieu des centres soit une droite.

Cela ne nous apprend rien de nouveau, le problème dans ce cas étant le même que pour les surfaces de révolution. Pour que B dépende seulement de θ , il faut que x'', y'' et u'' soient des constantes, c'est-à-dire que x, y et u soient des trinômes du second degré en Z . Il est aisé de voir comment la surface est engendrée dans ce cas, et nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous bornerons à indiquer que le lieu des centres est une parabole dont l'axe est parallèle au plan des cercles générateurs.

Enfin il est un autre cas d'intégration différant notablement de ceux que nous venons de trouver. Supposons que

$$x'' = Ku'', \quad y'' = K'u'',$$

K et K' étant des constantes; l'équation devient

$$(K \cos \theta + K' \sin \theta + 1) u'' dZ^2 - u d\theta^2 = 0,$$

et les variables sont encore séparées. Nous aurons alors

$$x = Ku + aZ + b,$$

$$y = K'u + a'Z + b',$$

a, b, a', b' étant des constantes arbitraires. Nous voyons que la courbe lieu des centres est plane et située dans le plan

$$K'x - Ky = (K'a - Ka')Z + K'b - Kb'.$$

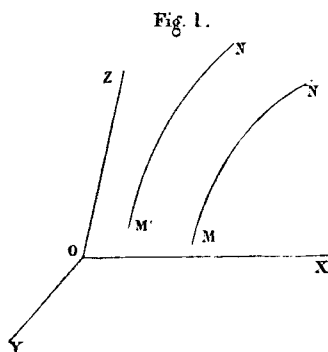
Il est clair que la forme des relations

$$x'' = Ku'', \quad y'' = K'u''$$

est indépendante de la direction de l'axe des Z , les formules de transformation des coordonnées étant linéaires. Nous pouvons donc prendre le plan de la courbe lieu des centres pour plan des ZX ; alors nous aurons $y = 0$ et

$$u'' = K_1 x''.$$

Traçons dans le plan ZX une courbe quelconque MN (*fig. 1*), qui



sera le lieu des centres; en appelant x et Z les coordonnées d'un de ses points, le rayon correspondant u est de la forme

$$u = K_1 x + aZ + b.$$

Traçons dans le même plan la courbe $M'N'$, dont les abscisses sont à celles de la courbe MN dans le rapport de K_1 à 1; ajoutant à ces abscisses

celles d'une droite quelconque du plan correspondant à la même ordonnée, nous aurons le rayon. C'est là une classe de surfaces assez variées dont on peut avoir les lignes asymptotiques par de simples quadratures. Avec les notations adoptées, l'équation des lignes asymptotiques est

$$\frac{d\theta^2}{\cos\theta + K_1} = \frac{x'' dZ^2}{K_1 x + aZ + b}.$$

Si nous supposons $K_1 = \pm 1$ et x choisi de telle sorte que l'intégrale

$$\int \sqrt{\frac{x''}{\pm x + aZ + b}} dZ$$

puisse s'obtenir par les fonctions élémentaires, nous aurons, sous forme finie, l'équation des lignes asymptotiques.

On pourrait déduire de là nombre d'exemples intéressants.

V.

Conséquences géométriques de l'équation (2) du § IV.

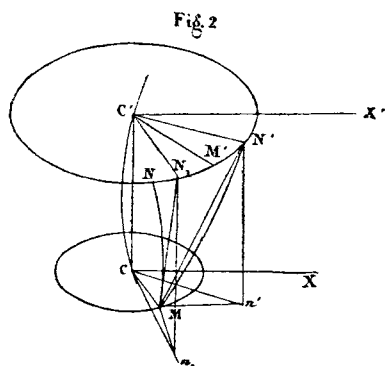
Le terme en $dZ d\theta$ manque dans l'équation (2). Cette circonstance peut s'interpréter géométriquement. Considérons deux sections circulaires voisines correspondant aux valeurs Z et $Z + \Delta Z$ et dont les centres soient C et C' .

Soient M (*fig. 2*) un point de la première, MN, MN' les deux lignes asymptotiques et N, N' les points où elles rencontrent la section voisine. L'angle θ est l'angle formé par CM avec une direction fixe CX de son plan. Menons $C'X'$ parallèle à CX , et $C'M'$ parallèle à CM . Les limites des deux valeurs de $\frac{\Delta\theta}{\Delta Z}$ correspondant aux points N et N' sont égales et de signes contraires, c'est-à-dire que, si nous prenons le point N , tel que l'angle $M'C'N$, soit égal à l'angle $M'C'N'$, la distance des points N et N' sera un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, et la limite de direction de MN sera la même que celle de MN' . Projétons N et N' en n et n' , parallèlement à la droite CC' , sur le plan du cercle C ; nous aurons $Cn = Cn'$, et, comme les angles n_1CM, n'_1CM sont égaux, le

point M est situé sur la bissectrice de l'angle $n_1 C n'$, et l'on a $M n_1 = M n'$. Joignons $M n_1$, $M n'$, dans les triangles $M N_1 n_1$, $M N' n'$, nous aurons

$$\frac{\sin M N' n'}{\sin N' M n'} = \frac{\sin M N_1 n_1}{\sin N_1 M n_1}.$$

En passant à la limite, nous voyons que, si parallèlement à la tangente au lieu des centres en C on projette les tangentes aux lignes asymptotiques en un point quelconque M du cercle correspondant, ou en



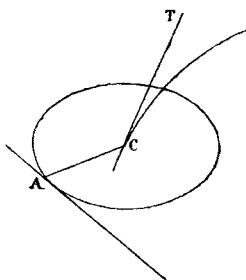
d'autres termes les asymptotes de l'indicatrice du point M , les projections sont également inclinées sur le rayon CM , et, en appelant α l'angle formé par l'une des asymptotes avec la tangente et β son angle avec sa projection, le rapport $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ est le même pour les deux.

La proposition se démontre aisément pour l'hyperboloïde, et l'on peut même voir que le rapport $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ est constant pour tous les points de sa surface.

Considérons un point C (fig. 3) de la courbe lieu des centres, la tangente CT à cette courbe et un point A du cercle de centre C . Si nous projetons les deux tangentes aux lignes asymptotiques du point A parallèlement à CT , nous obtenons deux droites également inclinées sur AC . Si nous menons la tangente At au cercle, comme elle est perpendiculaire à AC , les quatre droites forment un faisceau harmonique. Par suite, les tangentes elles-mêmes dans l'espace, la droite At et la droite suivant laquelle le plan tangent en A est coupé par le plan TCA forment aussi un faisceau harmonique, puisqu'il se projette suivant un faisceau harmonique.

Il ne suffit pas, comme va nous le montrer un exemple simple, que dans une section horizontale quelconque d'une surface il existe un point

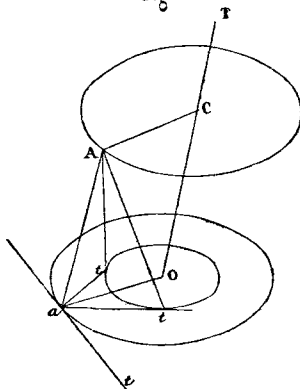
Fig. 3.



fixe C tel que AC, la tangente At à la section et les projections des tangentes aux lignes asymptotiques parallèlement à une certaine direction forment un faisceau harmonique, pour que la section considérée soit un cercle.

Imaginons un hyperboloïde dont nous prendrons une section plane quelconque et le diamètre conjugué CT (fig. 4). Considérons la section

Fig. 4.



centrale parallèle O. Pour avoir les lignes asymptotiques (génératrices) du point A, il n'y a qu'à projeter A en a parallèlement à CT, et de a mener les tangentes at , at' à la conique O. At et $A't'$ sont les deux génératrices. Projétons la conique C sur le plan de la conique O; la tangente en A se projette suivant la tangente en a à la projection et AC suivant

αO . Or on sait que, les deux coniques étant homothétiques et concentriques, la tangente en α à l'une d'elles, la droite αO et les tangentes at , at' à la seconde forment un faisceau harmonique. La propriété des quatre droites considérées de former un faisceau harmonique correspond donc à un mode de génération dont celui qui nous a occupé jusqu'ici n'est qu'un cas particulier. Mais, si nous supposons que, dans la projection du faisceau harmonique, le rayon AC soit constamment la bissectrice de l'angle formé par les projections des tangentes aux lignes asymptotiques, le lieu des points A sera un cercle, puisque sa tangente est perpendiculaire au rayon dirigé vers un point fixe. La propriété relative à la bissectrice est donc caractéristique du mode de génération par le cercle.

VI.

Proposons-nous maintenant le problème général suivant :

On coupe une surface par des plans horizontaux : chercher si dans le plan de chaque ligne de niveau on peut trouver un point fixe C tel que le plan passant par la tangente CT au lieu des points C et un point quelconque A de la ligne de niveau coupe le plan tangent en A suivant une droite $A\gamma$ qui, combinée avec la tangente At à la ligne de niveau et les tangentes aux deux lignes asymptotiques du point A , forme un faisceau harmonique.

Les tangentes aux lignes asymptotiques sont les asymptotes de l'indicatrice du point A ; par suite, si $A\gamma$ et At forment avec ces asymptotes un faisceau harmonique, ce sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice, et réciproquement.

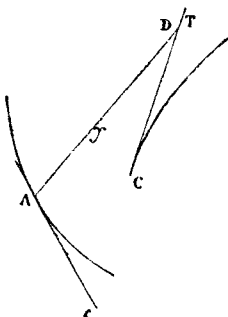
Nous pouvons toujours représenter la surface par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} X = x + u \cos \theta, \\ Y = y + u \sin \theta, \end{cases}$$

à condition de ne plus considérer u comme une fonction de Z seul, mais comme une fonction de Z et θ . On voit ce que c'est que u relatif à une valeur donnée de Z quand θ varie : c'est, en coordonnées polaires, le rayon vecteur, correspondant à l'angle polaire θ , de la courbe de niveau située dans le plan Z , le pôle étant le point (x, y, Z) .

Considérons un point A (*fig. 5*) de la courbe de niveau et un point A' infiniment voisin; la tangente conjuguée de At est, comme on sait, la

Fig. 5



limite de l'intersection des plans tangents en A et A'. Pour que cette tangente conjuguée soit A_7 , il faut et il suffit que les deux plans tangents correspondant aux valeurs

$(Z, \theta), (Z, \theta + d\theta)$

coupent la tangente CT en un même point D .

Les équations de la droite CT sont

$$(2) \quad \frac{\xi - x}{x'} = \frac{r_i - r'}{r'} = \zeta - \mathbf{Z}.$$

Soit

$$a(\xi - \mathbf{X}) + b(\eta - \mathbf{Y}) + c(\zeta - \mathbf{Z}) = 0$$

l'équation du plan tangent en A; les équations de la droite $A\gamma$ seront

$$(3) \quad \begin{cases} a(\xi - \mathbf{X}) + b(\eta - \mathbf{Y}) + c(\zeta - \mathbf{Z}) = 0, \\ (\xi - \mathbf{X}) \frac{\partial a}{\partial \theta} + (\eta - \mathbf{Y}) \frac{\partial b}{\partial \theta} + (\zeta - \mathbf{Z}) \frac{\partial c}{\partial \theta} = 0. \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) doivent avoir une solution commune en ξ , η , ζ , ce qui donne, en éliminant ξ , η , ζ , la condition suivante :

$$(4) \quad \begin{cases} (y' \cos \theta - x' \sin \theta) \left(b \frac{\partial a}{\partial \eta} - a \frac{\partial b}{\partial \eta} \right) + c \left(\cos \theta \frac{\partial a}{\partial \eta} + \sin \theta \frac{\partial b}{\partial \eta} \right) \\ = (a \cos \theta + b \sin \theta) \frac{\partial c}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Pour avoir a, b, c , il suffit de former p et q . Nous désignerons toujours par u' la dérivée, qui ici sera une dérivée partielle, de u par rapport à Z .

Les différentielles totales de X et Y sont

$$\begin{aligned} dX &= (x' + u' \cos \theta) dZ + \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \sin \theta \right) d\theta, \\ dY &= (y' + u' \sin \theta) dZ + \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \cos \theta \right) d\theta; \end{aligned}$$

l'élimination de $d\theta$ conduit à

$$\begin{aligned} &\left(u \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) dX + \left(u \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) dY \\ &= \left[\Lambda u - (y' \cos \theta - x' \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] dZ. \end{aligned}$$

Les quantités a, b, c sont donc

$$(5) \quad \begin{cases} a = u \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ b = u \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ c = -u\Lambda + (y' \cos \theta - x' \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial \theta} = \left(-u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta + 2 \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial b}{\partial \theta} = \left(u - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \cos \theta + 2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial c}{\partial \theta} = -u(y' \cos \theta - x' \sin \theta) - u \frac{\partial u'}{\partial \theta} \\ \quad + (y' \cos \theta - x' \sin \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - (x' \cos \theta + y' \sin \theta + \Lambda) \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

On trouve aisément, au moyen de ces valeurs,

$$\begin{aligned} b \frac{\partial a}{\partial \theta} - a \frac{\partial b}{\partial \theta} &= -u^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2, \\ \cos \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial b}{\partial \theta} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ a \cos \theta + b \sin \theta &= u, \end{aligned}$$

et l'équation (4), simplifiée, se réduit à

$$(7) \quad u' \frac{\partial u}{\partial \theta} = u \frac{\partial u'}{\partial \theta}.$$

Elle est indépendante de x et y , et, par conséquent, une courbe quelconque étant donnée comme lieu des points C, il y aura une infinité de surfaces pour lesquelles cette courbe jouera le rôle indiqué dans la question. L'équation (7) peut s'intégrer et donne u en fonction de Z et θ , ce qui résout complètement le problème. Elle se met sous la forme

$$\frac{\frac{\partial u'}{\partial \theta}}{u'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta}}{u},$$

d'où

$$u' = u f(Z),$$

f étant une fonction arbitraire. Ayant

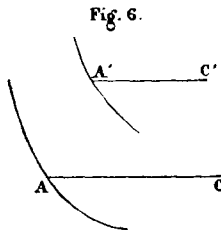
$$\frac{\frac{\partial u}{\partial Z}}{u} = f(Z),$$

on en déduit

$$(8) \quad u = \varphi(Z) \psi(\theta),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires. C'est là l'intégrale générale.

La signification géométrique de l'équation (8) est évidente. Si nous considérons deux courbes de niveau et les points C et C' (fig. 6)



correspondants, en appelant Z et Z' les ordonnées de C et C', nous aurons pour deux valeurs égales de θ , c'est-à-dire pour deux rayons

parallèles CA et C'A',

$$CA = u = \varphi(Z) \psi(\theta),$$

$$C'A' = u' = \varphi(Z') \psi(\theta),$$

d'où

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{\varphi(Z)}{\varphi(Z')},$$

ce qui montre que les deux courbes A et A' sont homothétiques et que les points C et C' en sont deux points homologues.

Cherchons maintenant les coordonnées du point D. Elles sont données par les trois équations

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \zeta - Z,$$

$$a(\xi - X) + b(\eta - Y) + c(\zeta - Z) = 0,$$

où a , b , c ont les valeurs trouvées (5).

On en déduit

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta - Z = -\frac{u}{u'} = -\frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}, \\ \xi - x = -x' \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}, \\ \eta - y = -y' \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}. \end{array} \right.$$

Ces coordonnées sont indépendantes de θ , ce qui nous montre que les plans tangents en tous les points d'une ligne de niveau rencontrent la tangente CT au même point.

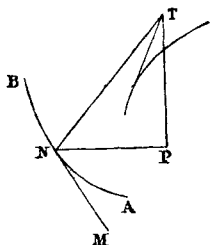
La Géométrie permet d'établir directement les résultats auxquels l'Analyse vient de nous conduire et qui peuvent se résumer en la propriété suivante : *Si une surface est engendrée par une courbe plane, dont le plan reste parallèle à un plan fixe que nous pouvons supposer horizontal, et qui demeure homothétique à elle-même, les plans tangents le long d'une section horizontale coupent la tangente correspondante à une ligne de points homologues quelconque en un même point. Mais la méthode que nous avons suivie nous montre que la réciproque est vraie.*

VII.

Nous venons de voir que, si une surface admet une série de sections horizontales homothétiques, les plans tangents tout le long d'une de ces sections passent par un même point. Nous nous proposons de démontrer la réciproque.

Considérons une surface telle que les plans tangents le long d'une section horizontale quelconque se coupent en un même point. Soient AB une de ces sections, T le point par lequel passent les plans tangents le long de AB. D'après ce que nous avons vu, il suffit de prouver que l'on peut trouver une courbe CD (*fig. 7*) telle que sa tangente en son intersection C avec le plan AB passe en T.

Fig. 7.



Soient Z l'ordonnée de la section AB et

$$\begin{aligned} Z_1 &= f(Z), \\ x_1 &= \Phi(Z_1) = f_1(Z), \\ y_1 &= \Phi_1(Z_1) = f_2(Z) \end{aligned}$$

les coordonnées de T. Écrivons les équations

$$\begin{aligned} Z_1 - Z &= -\frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}, \\ x_1 - x &= -\frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)} x', \\ y_1 - y &= -\frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)} y'. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\int \frac{dZ}{Z_1 - Z} = \log F(Z),$$

la première donne

$$\varphi(Z) = K F(Z),$$

K étant une constante arbitraire.

Alors les deux dernières équations, qui sont linéaires et du premier ordre respectivement en x et y , serviront à les déterminer en fonction de Z ; les deux constantes qu'introduira l'intégration permettront de poser $x = x_0$, $y = y_0$ pour $Z = Z_0$, c'est-à-dire de faire passer la courbe par un point pris à volonté.

Du point T menons une perpendiculaire TP au plan de la section AB , et de P une normale PN à cette section. Si nous joignons NT , cette droite est également normale à la courbe; les tangentes NM et NT sont deux diamètres conjugués rectangulaires de l'indicatrice du point N , c'est-à-dire les traces des sections principales sur le plan tangent. Cela nous donne le moyen de construire sur la surface les courbes le long desquelles un des axes de l'indicatrice est horizontal, ou, en d'autres termes, le lieu des points pour lesquels une section principale passe par la tangente à la génératrice. Si cette génératrice est un cercle dont le centre parcourt une ligne plane dont le plan soit perpendiculaire au plan horizontal, il y aura une courbe unique intersection de la surface par le plan du lieu des centres. Si ce lieu des centres est une droite, la courbe en question sera l'intersection de la surface par le plan vertical mené par cette droite.

VIII.

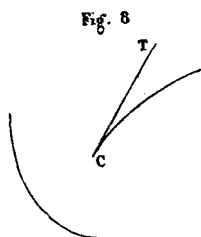
Les formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta - Z = - \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}, \\ \xi - x = - \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)} x', \\ \eta - y = - \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)} y', \end{array} \right.$$

qui donnent les coordonnées ξ, η, ζ du point T (fig. 8) lorsque u est de la forme

$$u = \varphi(Z) \psi(\theta),$$

nous montrent que, la courbe C restant la même, le point T est indépendant de la fonction ψ . Or, dans ces conditions, la fonction φ peut



être considérée comme définissant la variation du rapport d'homothétie des diverses sections. Nous verrons plus tard quelques conséquences de ce fait relativement aux lignes asymptotiques de certaines de ces surfaces, quand une série de points homologues forment une ligne droite. Pour le moment, nous nous bornerons à remarquer que, au point de vue de la construction du plan tangent, on peut toujours remplacer une surface engendrée par une courbe quelconque par une surface engendrée par un cercle. Cette remarque, sur laquelle nous n'insisterons pas, peut être utilisée en Géométrie descriptive.

Considérons le lieu du point T, qui s'obtiendrait en éliminant Z entre les équations (1), et menons-lui la tangente en T; cette tangente coupe le plan de la section horizontale correspondante en un point t . Cherchons le lieu de t .

Désignons pour cela par x_1, y_1, Z les coordonnées de t , et par ξ', η', ζ' les dérivées de ξ, η, ζ par rapport à Z. Les coordonnées de t satisfont aux deux équations

$$\frac{x_1 - \xi}{\xi'} = \frac{y_1 - \eta}{\eta'} = \frac{Z - \zeta}{\zeta'} = \frac{\nu}{\zeta'},$$

en posant

$$\nu = \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}.$$

En remplaçant $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ par leurs valeurs, on trouve aisément

ment

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - x = -\frac{\nu^2 x''}{1 - \nu'}, \\ y_1 - y = -\frac{\nu^2 y''}{1 - \nu'}. \end{cases}$$

On voit que si $x'' = 0, y'' = 0$, c'est-à-dire s'il y a une série de points homologues en ligne droite et que l'on considère précisément ceux-là, $x_1 - x = 0, y_1 - y = 0$, c'est-à-dire que le lieu de t coïncide avec le lieu de C ; quant au lieu de T , il est évident qu'il doit aussi coïncider avec cette même droite, et il est facile de le vérifier.

Dès lors, étant données les équations

$$\begin{aligned} X &= x + \varphi(Z) \psi(\theta) \cos \theta, \\ Y &= y + \varphi(Z) \psi(\theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

pour reconnaître si la surface engendrée admet une série de points homologues en ligne droite, il suffira de voir si $x - \frac{\nu^2 x''}{1 - \nu'}, y - \frac{\nu^2 y''}{1 - \nu'}$, où $\nu = \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(Z)}$ sont des fonctions linéaires de Z . Cela nous amène à une conséquence intéressante au point de vue du Calcul intégral.

Considérons l'équation linéaire du second ordre

$$(3) \quad x - \frac{\nu^2 x''}{1 - \nu'} = aZ + p,$$

où ν est une fonction arbitraire de Z .

En posant $x = aZ + p + x_1$, elle est ramenée à

$$(4) \quad x_1 - \frac{\nu^2 x_1''}{1 - \nu'} = 0.$$

Or $x_1 - \nu x_1' = 0$ donne une intégrale première sans constante arbitraire de cette équation; on en déduit

$$(5) \quad x_1 = Ce^{\int \frac{dZ}{\nu}},$$

C étant une constante arbitraire. Nous allons chercher à satisfaire à

l'équation (4) par la fonction (5), en y considérant C, non plus comme une constante, mais comme une fonction de Z. Nous aurons, C' et C'' étant les dérivées de C,

$$x_1' = \frac{C}{\nu} e^{\int \frac{dZ}{\nu}} + C' e^{\int \frac{dZ}{\nu}},$$

$$x_1'' = C \frac{1-\nu'}{\nu^2} e^{\int \frac{dZ}{\nu}} + 2 \frac{C'}{\nu} e^{\int \frac{dZ}{\nu}} + C'' e^{\int \frac{dZ}{\nu}},$$

d'où

$$x_1 - \frac{\nu^2}{1-\nu'} x_1'' = - \frac{\nu^2}{1-\nu'} \left(\frac{2C'}{\nu} + C'' \right) e^{\int \frac{dZ}{\nu}}.$$

Il suffit donc que C satisfasse à l'équation différentielle

$$(6) \quad \frac{2}{\nu} + \frac{C''}{C'} = 0.$$

On en déduit

$$C' = D e^{-2 \int \frac{dZ}{\nu}},$$

$$C = D \int e^{-2 \int \frac{dZ}{\nu}} dZ + E,$$

D et E étant deux constantes arbitraires, de sorte que l'intégrale générale de l'équation (4) est

$$(7) \quad x_1 = \left(D \int e^{-2 \int \frac{dZ}{\nu}} dZ + E \right) e^{\int \frac{dZ}{\nu}}.$$

Si nous considérons l'équation

$$x - \frac{\nu^2 x''}{1-\nu'} = F(Z),$$

où F est une fonction quelconque, nous pouvons dire que, si x_1 est une intégrale particulière de cette équation, l'intégrale générale sera

$$x = x_1 + \left(D \int e^{-2 \int \frac{dZ}{\nu}} dZ + E \right) e^{\int \frac{dZ}{\nu}}.$$

IX.

Si, dans les équations

$$(1) \quad \begin{cases} X = x + u \cos \theta, \\ Y = y + u \sin \theta, \end{cases}$$

nous regardons Z et θ comme liés par une relation donnée, elles définiront une ligne tracée sur la surface. Les coefficients angulaires de la tangente sont

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dZ} = x' + u' \cos \theta + \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \sin \theta \right) \frac{d\theta}{dZ}, \\ \frac{dY}{dZ} = y' + u' \sin \theta + \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \cos \theta \right) \frac{d\theta}{dZ}. \end{cases}$$

Si l'on a en même temps $\frac{d^2 X}{dZ^2} = 0$, $\frac{d^2 Y}{dZ^2} = 0$, quel que soit Z , cette ligne sera une droite. Ces deux dernières équations se ramènent, par des combinaisons simples, aux deux suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'' + 2 \frac{\partial u'}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dZ} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) \left(\frac{d\theta}{dZ} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d^2 \theta}{dZ^2} = 0, \\ y'' \cos \theta - x'' \sin \theta + 2 u' \frac{d\theta}{dZ} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{dZ} \right)^2 + u \frac{d^2 \theta}{dZ^2} = 0. \end{cases}$$

Si nous supposons que le lieu des points (x, y, Z) est l'axe des Z , $x'' = 0$, $y'' = 0$, et elles se réduisent à

$$(4) \quad \begin{cases} u'' + 2 \frac{\partial u'}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dZ} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) \left(\frac{d\theta}{dZ} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d^2 \theta}{dZ^2} = 0, \\ 2 u' \frac{d\theta}{dZ} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{dZ} \right)^2 + u \frac{d^2 \theta}{dZ^2} = 0. \end{cases}$$

Multipliant la seconde par u , on reconnaît immédiatement la dérivée de $u^2 \frac{d\theta}{dZ}$ par rapport à Z . Si donc la surface contient une droite, tout le long de cette droite on aura

$$(5) \quad u^2 \frac{d\theta}{dZ} = C,$$

C étant une constante. Si la surface est réglée, C variera d'une génératrice à une autre.

Si nous éliminons $\frac{d^2\theta}{dZ^2}$ entre les équations (4) et si dans le résultat nous remplaçons $\frac{d\theta}{dZ}$ par $\frac{C}{u^2}$, nous aurons l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + 2 \frac{C}{u^3} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial Z \partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{C^2}{u^5} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u^2 - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0.$$

Nous avons dit que, si la surface est réglée, C varie d'une génératrice à une autre, de sorte que cette équation (6) n'est pas une équation aux différences partielles de surfaces réglées, sauf dans un cas que nous examinerons. Seulement, si la surface représentée par les équations

$$X = u \cos \theta,$$

$$Y = u \sin \theta$$

est réglée, on pourra avoir ses génératrices de la manière suivante.

En un point (Z, θ) de la surface, la valeur de la constante C sera donnée par l'équation (6); intégrant l'équation (5), on introduira une constante C', qui sera déterminée par la condition que Z et θ satisfassent à l'équation intégrale. Il est à remarquer que (6) donne deux valeurs pour C; on aura donc deux relations entre Z et θ ; pour trouver celle qui donne la génératrice, on calculera $\frac{d^2 X}{dZ^2}$ par exemple et l'on verra s'il est identiquement nul.

Il est facile d'avoir la signification géométrique des équations (5) et (6). Posons

$$u \cos \theta = aZ + p, \quad u \sin \theta = bZ + q,$$

a, b, p et q étant fonctions d'un même paramètre α ; les équations

$$X = u \cos \theta, \quad Y = u \sin \theta$$

représenteront une surface réglée. Or

$$u^2 = (aZ + p)^2 + (bZ + q)^2,$$

$$\tan \theta = \frac{bZ + q}{aZ + p};$$

par suite,

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{b(aZ + p) - a(bZ + q)}{(aZ + p)^2} dZ$$

ou

$$u^2 \frac{d\theta}{dZ} = bp - aq,$$

ce qui montre bien que, le long d'une génératrice, $u^2 \frac{d\theta}{dZ}$ demeure constant, et l'on voit en même temps quelle est la valeur de la constante.

Formons maintenant l'équation des lignes asymptotiques; mais nous allons la chercher dans le cas général où le lieu du point (x, y, Z) est quelconque, cette équation devant nous servir plus tard.

Les coefficients de l'équation du plan tangent sont [(5), § VI]

$$a = u \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$b = u \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$c = -u\Lambda + (y' \cos \theta - x' \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Soient $a + da$, $b + db$, $c + dc$ ce qu'ils deviennent en un point infiniment voisin; les coefficients de l'intersection des plans tangents infiniment voisins sont

$$b\,dc - c\,db, \quad c\,da - a\,dc, \quad a\,db - b\,da.$$

On devra donc avoir les deux égalités

$$\frac{b\,dc - c\,db}{dX} = \frac{c\,da - a\,dc}{dY} = \frac{a\,db - b\,da}{dZ},$$

qu'on peut remplacer par l'égalité unique

$$\frac{a\,db - b\,da}{dZ} = \frac{\cos \theta (c\,da - a\,dc) - \sin \theta (b\,dc - c\,db)}{\cos \theta\,dY - \sin \theta\,dX}$$

ou

$$\frac{a\,db - b\,da}{dZ} = \frac{c(\cos \theta\,da + \sin \theta\,db) - (a\cos \theta + b\sin \theta)\,dc}{(y'\cos \theta - x'\sin \theta)\,dZ + u\,d\theta}.$$

Nous avons déjà calculé [(6), § VI]

$$a db - b da, \quad \cos \theta da + \sin \theta db \quad \text{et} \quad dc$$

en supposant θ seul variable; il suffira d'ajouter à ces expressions ce qui provient de la variation de Z , et nous trouverons ainsi, après réduction, l'équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[-uB + (y'' \cos \theta - x'' \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] dZ^2 \\ & + 2 \left(u' \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) dZ d\theta + \left[u^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si le lieu des points (x, y) est une droite, l'équation se simplifie et devient

$$-uu'' dZ^2 + 2 \left(u' \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) dZ d\theta + \left[u^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 = 0.$$

Si nous supposons la surface réglée en un point (Z, θ) , une des lignes asymptotiques sera donnée par la formule

$$u^2 \frac{d\theta}{dZ} = C,$$

C ayant une valeur convenable, celle qui répond à la génératrice du point; on aura donc

$$-u^3 \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + 2Cu^2 \left(u' \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) + C^2 \left[u^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0$$

pour tous les points de la génératrice : c'est, comme on le voit, l'équation (6) trouvée autrement.

Si l'on veut que les génératrices de la surface réglée appartiennent à un même complexe linéaire, en supposant pris pour axe des Z l'axe du complexe, ce qui est toujours possible, la constante C restera la même non seulement le long d'une génératrice, mais encore pour toutes les génératrices de la surface; l'équation (6) aura donc lieu en chaque point de la surface. Réciproquement, si la fonction u satisfait à cette équation (6), les différentes lignes déterminées sur la surface

$$(X = u \cos \theta, Y = u \sin \theta)$$

par l'équation différentielle

$$u^2 \frac{d\theta}{dZ} = C$$

seront des droites appartenant au même complexe linéaire.

L'équation (6) est donc l'équation aux différences partielles du second ordre des surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un même complexe linéaire ayant pour axe l'axe des Z.

Parmi ces surfaces, proposons-nous de chercher celles qui sont engendrées par une courbe plane dont le plan se meut parallèlement à un plan fixe et qui reste toujours homothétique à elle-même, une série de points homologues décrivant l'axe même du complexe.

Nous devons, pour cela, satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{C^2}{u^3} \left[u - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

par une valeur de u de la forme $u = \varphi(Z) \psi(\theta)$.

Nous voyons d'abord que, si l'on suppose $C = 0$, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0,$$

qui donne

$$u = (aZ + b) \psi(\theta).$$

C'est le cas, évident *a priori*, des cônes et des cylindres.

Supposons maintenant C différent de 0, et écrivons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{C^2}{u^2} \left(\frac{1}{u} + \frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \theta^2} \right).$$

De $u = \varphi(Z) \psi(\theta)$ nous tirons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \varphi''(Z) \psi(\theta),$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varphi(Z)} \frac{d^2 \frac{1}{\psi(\theta)}}{d\theta^2}.$$

Nous aurons donc l'équation

$$\varphi^3(Z) \varphi''(Z) = \frac{C^2}{\psi^3(\theta)} \left[\frac{1}{\psi(\theta)} + \frac{d^2 \frac{1}{\psi(\theta)}}{d\theta^2} \right].$$

Sous cette forme, on voit que le premier membre est une fonction de Z seul, le second une fonction de θ seul; Z et θ étant deux variables indépendantes, il ne saurait y avoir égalité que si les deux membres sont égaux à une même constante. Nous aurons donc, pour déterminer les deux fonctions $\varphi(Z)$ et $\psi(\theta)$, les deux équations différentielles du second ordre,

$$\begin{aligned} \varphi^3(Z) \varphi''(Z) &= K, \\ \frac{C^2}{\psi^3(\theta)} \left[\frac{1}{\psi(\theta)} + \frac{d^2 \frac{1}{\psi(\theta)}}{d\theta^2} \right] &= K. \end{aligned}$$

La première s'écrit

$$\varphi''(Z) = \frac{K}{\varphi^3(Z)}.$$

Multipliant par $2\varphi'(Z)$ et intégrant, on a

$$\varphi'^2(Z) = -\frac{K}{\varphi^2(Z)} + K',$$

d'où

$$\frac{K' \varphi(Z) \varphi'(Z)}{\sqrt{K' \varphi^2(Z) - K}} = K';$$

par suite, en intégrant une seconde fois,

$$\sqrt{K' \varphi^2(Z) - K} = K'Z + K'',$$

d'où

$$\varphi^2(Z) = \frac{(K'Z + K'')^2 + K}{K'}.$$

Il reste à déterminer la fonction ψ .

Posons $\frac{1}{\psi(\theta)} = v$ et désignons par v'' la dérivée seconde de v par rapport à θ ; v satisfera à l'équation

$$v + v'' = \frac{K}{C^2 v^3}.$$

Multipliant par $2v'$ et intégrant, on a

$$v^2 + v'^2 = -\frac{K}{C^2 v^2} + K_1,$$

d'où

$$vv' = \sqrt{-v^4 + K_1 v^2 - \frac{K}{C^2}}.$$

Si nous faisons $v^2 = w$, cette équation devient

$$w' = 2 \sqrt{-w^2 + K_1 w - \frac{K}{C^2}} = 2 \sqrt{-\left(w - \frac{K_1}{2}\right)^2 + \frac{K_1^2}{4} - \frac{K}{C^2}}.$$

Pour que le radical soit réel, il faut que $\frac{K_1^2}{4} - \frac{K}{C^2}$ soit positif. Représentons-le par a^2 ; il vient

$$\frac{\frac{w'}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{w - \frac{K_1}{2}}{a}\right)^2}} = 2,$$

et, par suite,

$$w = \frac{K_1}{2} + a \cos 2(\theta - \theta_0),$$

θ_0 étant une constante, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\psi(\theta)} = \sqrt{\frac{K_1}{2} + a \cos 2(\theta - \theta_0)}.$$

Donc enfin

$$u = \sqrt{\frac{\frac{(K'Z + K'')^2 + K}{K'}}{\frac{K_1}{2} + a \cos 2(\theta - \theta_0)}},$$

et l'on voit que, à l'exception des cônes et des cylindres, les seules surfaces réglées répondant à la question sont les surfaces du second degré.

X.

Conséquences de l'équation (7), § IX, des lignes asymptotiques.

Chaque système de coordonnées met en évidence des surfaces pour lesquelles certaines propriétés se trouvent facilement. Si nous reprenons l'équation des lignes asymptotiques pour une surface quelconque dans notre système, à savoir

$$\left[-uB + (y'' \cos \theta - x'' \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] dZ^2 \\ + 2 \left(u' \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) dZ d\theta + \left[u^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 = 0,$$

nous avons vu que le terme en $dZ d\theta$ s'annule quand les sections horizontales de la surface sont homothétiques, de sorte que l'équation est de même forme que pour les surfaces engendrées par un cercle. Nous savons que c'est la traduction de ce fait géométrique que les plans tangents le long d'une section horizontale passent par un même point. Si de plus la surface est telle que $x'' = 0$, $y'' = 0$, ce qui exige qu'une série de points homologues soit en ligne droite, l'intégration de cette équation pourra être ramenée à des quadratures. Elle devient en effet, dans ce cas,

$$(1) \quad -uu'' dZ^2 + \left[u^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 = 0,$$

u étant de la forme $u = \varphi(Z) \psi(\theta)$.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \quad u'' dZ^2 - u^2 \left(\frac{1}{u} + \frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \theta^2} \right) d\theta^2 = 0;$$

ou

$$u'' = \psi(\theta) \varphi''(Z),$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varphi(Z)} \frac{d^2 \frac{1}{\psi(\theta)}}{d\theta^2} = \frac{\psi''(\theta)}{\varphi(Z)},$$

en posant

$$v(\theta) = \frac{1}{\psi(\theta)}.$$

L'équation revient, par conséquent, à

$$(3) \quad \frac{\varphi''(Z)}{\varphi(Z)} dZ^2 = \left[1 + \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} \right] d\theta^2,$$

et les variables sont séparées.

On peut donc trouver, par des quadratures, les lignes asymptotiques de toutes les surfaces dont une série de sections parallèles sont homothétiques, lorsqu'elles admettent une suite de points homologues en ligne droite. La forme de l'équation (3) montre, de plus, que les lignes asymptotiques de toutes les surfaces représentées par

$$\begin{aligned} X &= aZ + p + K \varphi(Z) \psi(\theta) \cos \theta, \\ Y &= bZ + q + K \varphi(Z) \psi(\theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

où a , b , p , q et K sont des constantes quelconques, sont données par une même quadrature.

En égalant à zéro le coefficient de $d\theta^2$, nous trouverions, sous une forme particulière, l'équation des surfaces réglées à plan directeur, ce plan étant parallèle au plan XY . Nous pourrions déduire de l'équation la deuxième série de lignes asymptotiques de ces surfaces; mais le calcul est moins simple que celui que l'on fait en partant de l'équation ordinaire

$$r dX^2 + 2s dX dY + t dY^2 = 0,$$

où l'on suppose par exemple $t = 0$, c'est-à-dire le plan directeur pris pour plan des YZ .

Si l'on veut que $d\theta = 0$ soit l'équation d'un système de lignes asymptotiques, il faut que l'on ait, quels que soient Z et θ ,

$$(4) \quad -uB + (y'' \cos \theta - x'' \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Cette équation est l'équation aux différences partielles du second ordre d'une classe de surfaces. Si nous y considérons x et y comme connus en fonction de Z , nous avons l'équation générale des surfaces

pour lesquelles une série de lignes asymptotiques est donnée par des cylindres passant par la courbe (xy) et dont les génératrices sont horizontales. L'intégration, dans ce cas, semble inabordable, à moins que la courbe donnée ne soit une droite. L'équation se réduit alors à

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$u = Z\varphi(\theta) + \psi(\theta),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

C'est l'équation générale des surfaces réglées dont les génératrices rencontrent une droite donnée, c'est-à-dire de toutes les surfaces réglées dont une directrice est droite.

Considérons une pareille surface donnée par

$$X = aZ + p + [Z\varphi(\theta) + \psi(\theta)] \cos \theta,$$

$$Y = bZ + q + [Z\varphi(\theta) + \psi(\theta)] \sin \theta.$$

L'équation du second système de lignes asymptotiques est

$$2 \left(u' \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) dZ + \left[u^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta = 0,$$

et elle devient, en remplaçant u par sa valeur et supprimant θ sous les signes fonctionnels,

$$(5) \quad 2(\varphi\psi' - \psi\varphi') dZ + [(Z\varphi + \psi)^2 - (Z\varphi + \psi)(Z\varphi'' + \psi'') + 2(Z\varphi' + \psi')^2] d\theta = 0.$$

On connaît *a priori* une intégrale particulière de cette équation de Riccati : c'est $u = 0$, c'est-à-dire

$$Z = -\frac{\psi}{\varphi}.$$

On pourra, par conséquent, intégrer complètement l'équation et trouver les deux systèmes de lignes asymptotiques de ces surfaces réglées; c'est, du reste, un fait connu, mais on voit combien on a ici aisément les équations du problème. Nous pouvons remarquer également que l'intégrale demeure la même, quand φ et ψ sont des fonc-

tions données, quelle que soit la droite que rencontrent les génératrices de la surface.

Nous pouvons encore considérer l'équation (4) à un autre point de vue et chercher s'il n'est pas possible d'y satisfaire en prenant une forme particulière pour la fonction u , à condition de déterminer convenablement x et y . Posons, par exemple,

$$u = \varphi \cos \theta + \psi \sin \theta + \chi,$$

φ , ψ et χ étant trois fonctions de Z ; la surface alors sera engendrée par un limaçon. L'équation (4) devient, par cette hypothèse,

$$-(\varphi \cos \theta + \psi \cos \theta + \chi)[(x'' + \varphi'') \cos \theta + (y'' + \psi'') \sin \theta + \chi''] \\ + (y'' \cos \theta - x'' \sin \theta)(-\varphi \sin \theta + \psi \cos \theta) = 0$$

ou

$$(6) \quad A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta + D \cos \theta + E \sin \theta + F = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= -\varphi(x'' + \varphi'') + \psi y'', \\ B &= -\varphi(y'' + \psi'') - \psi(x'' + \varphi'') - \varphi y'' - \psi x'', \\ C &= -\psi(y'' + \psi'') + \varphi x'', \\ D &= -[\varphi \chi'' + \chi(x'' + \varphi'')], \\ E &= -[\psi \chi'' + \chi(y'' + \psi'')], \\ F &= \chi \chi''. \end{aligned}$$

Pour que l'équation (6) soit satisfaite quels que soient Z et θ , il est facile de voir qu'il faut que l'on ait en même temps les cinq équations

$$B = D = E = 0,$$

$$A = C = -F.$$

On a là cinq équations différentielles pour déterminer x , y , φ , ψ et χ , et le problème est déterminé.

Considérons, en particulier, le cas où $\chi = 0$, c'est-à-dire où le limaçon devient un cercle dont le lieu des points (x, y) est une directrice. Les équations se réduisent alors à trois, et l'on a quatre fonctions

inconnues x, y, φ et ψ . Ces trois équations sont

$$\begin{aligned} -\varphi(x'' + \varphi'') + \psi y'' &= 0, \\ -\psi(y'' + \psi'') + \varphi x'' &= 0, \\ -\varphi(y'' + \psi'') - \psi(x'' + \varphi'') - \varphi y'' - \psi x'' &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières donnent

$$\varphi x'' - \psi y'' = \psi \psi'' = -\varphi \varphi'',$$

de sorte que les fonctions φ et ψ doivent être liées par la relation

$$(7) \quad \varphi \varphi'' + \psi \psi'' = 0.$$

Alors on aura, pour déterminer x'' et y'' ,

$$\begin{aligned} 2\varphi x'' - 2\psi y'' &= \psi \psi'' - \varphi \varphi'', \\ 2\psi x'' + 2\varphi y'' &= -(\varphi \psi'' + \psi \varphi''), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(8) \quad \begin{cases} 2x'' = -\varphi'', \\ 2y'' = -\psi''. \end{cases}$$

En se donnant, par exemple, la fonction ψ , on aurait, pour trouver φ , à intégrer une équation de la forme

$$\varphi \varphi'' = f(Z).$$

Mais on peut se donner une relation arbitraire entre φ et ψ , relation qui, jointe à l'équation (7), servirait à les déterminer. Posons, en particulier,

$$\varphi = \nu \psi,$$

ν étant une fonction quelconque de Z . On en déduit

$$\begin{aligned} \varphi' &= \nu \psi' + \psi \nu', \\ \varphi'' &= \nu \psi'' + 2\psi' \nu' + \psi \nu'', \end{aligned}$$

et l'on a alors, pour déterminer ψ ,

$$\nu \psi (\nu \psi'' + 2\psi' \nu' + \psi \nu'') + \psi \psi'' = 0$$

ou

$$(9) \quad (\nu^2 + 1) \psi'' + 2\nu\nu' \psi' + \nu\nu'' \psi = 0,$$

équation linéaire du second ordre.

Considérons le cas où $\nu = aZ + b$; alors $\nu'' = 0$ et l'équation devient

$$\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{2\nu\nu'}{\nu^2 + 1} = 0$$

ou

$$\psi' = \frac{K}{1 + (aZ + b)^2}$$

et

$$\psi = \frac{K}{a} \arctang(aZ + b) + K',$$

K et K' étant des constantes.

Alors

$$\varphi = (aZ + b) \left[\frac{K}{a} \arctang(aZ + b) + K' \right].$$

φ'' et ψ'' , et par suite x'' et y'' , sont des fonctions rationnelles de Z ; on pourra exprimer x' et y' par les fonctions élémentaires et trouver x et y par des quadratures.

XI.

Revenons aux surfaces engendrées par un cercle.

Quand on suppose le lieu des centres connu, la surface est déterminée si l'on donne au cercle une directrice. La directrice la plus simple qu'on puisse choisir est une droite. Dans ce cas, si nous prenons la droite pour axe des Z , en conservant les mêmes notations, la relation entre x , y et u sera

$$x^2 + y^2 = u^2,$$

et l'équation de la surface

$$X^2 + Y^2 - 2Xx - 2Yy = 0,$$

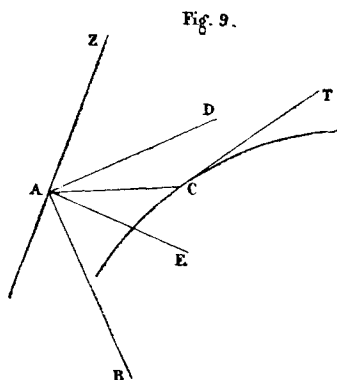
où x et y doivent être remplacés par leurs valeurs en fonction de Z .

Les coordonnées, à la vérité, ne sont pas rectangulaires, mais cela n'est nullement un obstacle dans toutes les questions qui ne touchent qu'aux lignes asymptotiques.

Proposons-nous le problème suivant.

En chaque point de la droite OZ, la surface a deux lignes asymptotiques, dont l'une est OZ elle-même ; cherchons l'équation de la surface réglée qu'engendre la tangente à la seconde quand le point se déplace sur OZ. En nous servant d'une propriété démontrée (§ V) sur les lignes asymptotiques, nous pouvons transformer l'énoncé et lui substituer celui qui suit :

Étant données une droite AZ (*fig. 9*) et une courbe C, un plan qui



se ment parallèlement au plan horizontal coupe la droite en A, la courbe en C; dans ce plan, on mène AB perpendiculaire à AC; cette droite et AZ déterminent un plan P; on projette AZ en AD sur le plan CAB parallèlement à la tangente CT à la courbe, et l'on construit dans ce plan la droite AE telle que AC soit la bissectrice de l'angle DAE; le plan passant par AE et parallèle à CT coupe le plan P suivant une droite dont nous chercherons le lieu.

Dans cet énoncé, comme on le voit, toute considération de lignes asymptotiques a disparu.

Soient, comme toujours, x, y, Z les coordonnées de C, x' et y' les dérivées de x et y par rapport à Z ; désignons par ξ, η, ζ les coordonnées courantes. Le plan ZAB a pour équation

$$\xi x + \eta y = 0;$$

les équations de la tangente CT sont

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \zeta - Z;$$

le coefficient angulaire de sa projection sur le plan XY, c'est-à-dire de AD, est $\frac{y'}{x'}$; celui de AC est $\frac{y}{x}$. Appelons γ , δ , ε les angles formés par AC, AD, AE avec l'axe des X; nous devons avoir

$$2\gamma = \delta + \varepsilon$$

ou

$$\frac{2 \operatorname{tang} \gamma}{1 - \operatorname{tang}^2 \gamma} = \frac{\operatorname{tang} \delta + \operatorname{tang} \varepsilon}{1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varepsilon}.$$

Comme

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{y'}{x'}, \quad \operatorname{tang} \delta = \frac{y}{x},$$

on déduit de là

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2xyx' - (x^2 - y^2)y'}{2xyy' + (x^2 - y^2)x'},$$

et les équations de AE sont

$$\begin{aligned} [2xyx' - (x^2 - y^2)y']\xi - [2xyy' + (x^2 - y^2)x']\eta &= 0, \\ \xi - Z &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut aisément l'équation du plan passant par AE et parallèle à CT, et par suite la seconde équation de la droite dont nous cherchons le lieu, qui est représentée par le système

$$(1) \quad \begin{cases} \xi x + \eta y = 0, \\ [2xyx' - (x^2 - y^2)y']\xi - [2xyy' + (x^2 - y^2)x']\eta \\ \quad = \{ [2xyx' - (x^2 - y^2)y']x' - [2xyy' + (x^2 - y^2)y'] \} (\xi - Z). \end{cases}$$

La seconde équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} -(\xi x + \eta y)(xy' - yx') + (xx' + yy')(\xi y - \eta x) \\ = -2(xx' + yy')(xy' - yx')(\xi - Z), \end{aligned}$$

de sorte que la droite a pour équations

$$(2) \quad \begin{cases} \xi x + \eta y = 0, \\ \eta x - \xi y = 2(xy' - yx')(\xi - Z), \end{cases}$$

et l'on aura l'équation de la surface en éliminant Z entre ces deux équations.

Si l'on considère le système (1) non ramené à la forme (2), on voit que, lorsque $xx' + yy' = 0$, les deux équations se réduisent à une seule, et, en effet, cette équation signifie que la tangente à la courbe C est parallèle au plan P , de sorte que la construction géométrique ne s'applique pas; mais les équations (2) représentent la limite vers laquelle tend la droite que donne la construction géométrique pour des points voisins, en exceptant toutefois le cas où $xx' + yy'$ serait toujours nul, c'est-à-dire où u demeurerait constant, cas qui nous occupera plus tard.

Nous pouvons reprendre le calcul en partant du premier énoncé.

Soient

$$X = x + u \cos \theta,$$

$$Y = y + u \sin \theta$$

les équations qui définissent la surface.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$(x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'') dZ^2 - u d\theta^2 = 0.$$

Pour les points de l'axe des Z , $X = 0$, $Y = 0$, ou

$$\cos \theta = -\frac{x}{u}, \quad \sin \theta = -\frac{y}{u},$$

et l'équation devient, pour ces points,

$$(uu'' - xx'' - yy'') dZ^2 - u^2 d\theta^2 = 0.$$

Mais

$$x^2 + y^2 = u^2;$$

par suite,

$$xx' + yy' = uu',$$

$$xx'' + yy'' + x'^2 + y'^2 = uu'' + u'^2,$$

d'où

$$uu'' - xx'' - yy'' = x'^2 + y'^2 - u'^2 = \frac{u^2(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2}{u^2},$$

et l'équation s'écrit enfin

$$(xy' - yx')^2 dZ^2 - (x^2 + y^2)^2 d\theta^2 = 0.$$

Elle se décompose en deux, dont l'une correspond à l'axe des Z, l'autre à la seconde ligne asymptotique; or, pour l'axe des Z, on a

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}, \\ \frac{d\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{xy' - yx'}{x^2} dZ,\end{aligned}$$

d'où

$$d\theta = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dZ.$$

Par suite, l'équation qui donne $\frac{d\theta}{dZ}$ pour la seconde ligne asymptotique est

$$(xy' - yx') dZ + (x^2 + y^2) d\theta = 0.$$

Les équations de la tangente à une ligne quelconque de la surface sont

$$\frac{\xi - X}{(x' + u' \cos \theta) dZ - u \sin \theta d\theta} = \frac{\eta - Y}{(y' + u' \sin \theta) dZ + u \cos \theta d\theta} = \frac{\zeta - Z}{dZ}.$$

En y faisant $X = 0$, $Y = 0$, et remplaçant dZ par $x^2 + y^2$ et $d\theta$ par $yx' - xy'$, nous trouvons, pour les équations de la tangente à la ligne asymptotique,

$$\begin{aligned}\xi &= - \frac{2y(xy' - yx')}{x^2 + y^2} (\zeta - Z), \\ \eta &= \frac{2x(xy' - yx')}{x^2 + y^2} (\zeta - Z).\end{aligned}$$

En les divisant membre à membre, puis multipliant la première par $-y$, la seconde par x , et ajoutant, nous les remplacerons par le système (2) trouvé précédemment :

$$\begin{aligned}\xi x + \eta y &= 0, \\ \eta x - \xi y &= 2(xy' - yx') (\zeta - Z).\end{aligned}$$

XII.

On peut avoir *a priori* le degré de la surface cherchée quand x et y sont des fonctions rationnelles de Z , ou, plus généralement, quand

x, y et Z sont des fonctions rationnelles d'une même variable t . Un cas intéressant est celui où les dénominateurs sont les mêmes, c'est-à-dire où la courbe lieu des centres est unicursale.

1° Supposons d'abord

$$x = \frac{f(t)}{F(t)}, \quad y = \frac{\varphi(t)}{F(t)}, \quad Z = \frac{\psi(t)}{F(t)},$$

f, φ, ψ et F étant des fonctions entières de degré m .

Nous devons éliminer t entre les deux équations (2), § XI; la première contient t au degré m . Pour avoir le degré de la seconde, calculons $xy' - yx'$; on a

$$\frac{xy' - yx'}{x^2} = D_z \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{D_t \left(\frac{y}{x} \right)}{D_t(Z)},$$

le signe D indiquant une dérivée et l'indice la variable par rapport à laquelle on la prend; donc, en indiquant par un accent les dérivées prises par rapport à t ,

$$xy' - yx' = \frac{f^2}{F^2} \frac{\frac{f\varphi' - \varphi f'}{f^2}}{\frac{F\psi' - \psi F'}{F^2}} = \frac{f\varphi' - \varphi f'}{F\psi' - \psi F'},$$

et la seconde équation revient à

$$(F\psi' - \psi F')(\eta f - \xi \varphi) = 2(f\varphi' - \varphi f')(\zeta F - \psi).$$

Elle est du degré $3m - 2$ en t , de sorte que, en définitive, d'après le théorème de Bezout sur l'élimination, l'équation cherchée est, en ξ, η, ζ , du degré $4m - 2$.

2° Supposons que x et y soient des fonctions entières de degré n de Z ; la seconde équation (2) est du degré $2n - 1$ en Z , et le résultat de l'élimination du degré $3n - 1$.

3° Soient

$$x = \frac{f(Z)}{\psi(Z)}, \quad y = \frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)},$$

f, φ et ψ étant de degré p ; la seconde équation (2) est de degré $2p$ en Z , et le résultat de degré $3p$ en ξ, η, ζ .

Il est enfin un cas que nous rencontrerons dans notre étude : celui où le degré des numérateurs est plus élevé d'une unité que celui du dénominateur commun, c'est-à-dire où, f et φ étant de degré q , ψ est de degré $q - 1$. Alors la seconde équation est en Z de degré $2q - 1$, et le résultat de l'élimination du degré $3q - 1$. La surface est du même degré que si x et y étaient des fonctions entières de degré q . En résumé, nous voyons que nous obtenons, dans le cas où le lieu des centres est donné par des équations de la forme indiquée, des surfaces dont les degrés sont marqués par les nombres

$$4m - 2, 3n - 1, 3p.$$

Tous les nombres entiers ne sont point contenus dans ces formules ; mais, si nous supposons, en dernier lieu,

$$x = \frac{f}{\psi}, \quad y = \frac{\varphi}{\psi},$$

ψ étant de degré q et f et φ de degré $q + 1$, nous trouverons, pour le degré de la surface, $3q + 4 = 3(q + 1) + 1$ (il est à remarquer que nous supposons q au moins égal à 1).

Nous aurons donc, pour exprimer les degrés des surfaces obtenues, les formules

$$4m - 2, 3n - 1, 3p, 3\{q + 1\} + 1.$$

Les trois dernières donnent tous les nombres entiers, excepté 1 et 4, de sorte que nous aurons des surfaces réglées de tous les degrés, excepté du quatrième, le plan étant mis à part.

En faisant dans les deux premières $m = 1$ ou $n = 1$, on trouve le même nombre 2. Et, en effet, le lieu des centres est alors une droite : on doit donc trouver l'hyperboloïde ayant une série de sections circulaires parallèle au plan $\xi\eta$, la droite donnée pour diamètre conjugué de ces sections, et contenant l'axe des ξ . C'est ce que le calcul montre aisément. Posons, par exemple,

$$x = aZ + p, \quad y = bZ + q;$$

alors

$$xy' - yx' = bp - aq,$$

et l'on a à éliminer Z entre les deux équations

$$\begin{aligned}\xi(aZ + p) + \eta(bZ + q) &= 0, \\ \eta(aZ + p) - \xi(bZ + q) &= 2(bp - aq)(\xi - Z);\end{aligned}$$

le résultat de l'élimination est

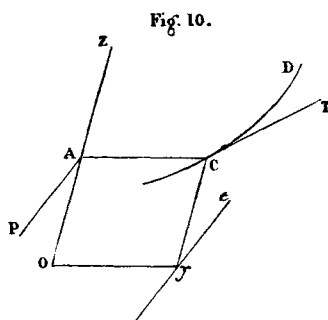
$$\xi^2 + \eta^2 = 2[(a\xi + p)\xi + (b\xi + q)\eta],$$

équation qui représente bien l'hyperboloïde indiqué.

XIII.

La construction géométrique si simple, § XI, qui donne la tangente à la seconde ligne asymptotique d'un point A de la surface ne s'applique plus quand la tangente à la courbe lieu des centres en C est parallèle au plan tangent en A . S'il en était toujours ainsi, la construction serait donc illusoire. Cela arrivera évidemment si le lieu des centres est situé sur un cylindre à base circulaire et si la directrice du cercle qui engendre la surface est l'axe de ce cylindre. C'est de plus le seul cas d'exception.

Soient, en effet, $O\xi$ (*fig. 10*) la directrice, CD le lieu des centres,



C un point de cette courbe, AC le rayon du cercle; le plan tangent en A à la surface engendrée sera déterminé par $A\xi$ et la perpendiculaire AP à AC dans le plan horizontal du point C . Nous supposons que, quel que soit C , la tangente CT est parallèle au plan ξAP . Projetons la courbe C sur le plan horizontal parallèlement à $O\xi$;

la trace du plan tangent au cylindre projetant en C sera γt perpendiculaire à $O\gamma$ projection de AC, car, CT étant parallèle au plan ζAP , le plan tangent au cylindre est également parallèle à ce plan. La trace du cylindre projetant est donc un cercle de centre O et de rayon $O\gamma$, et, par suite, la courbe CD est tracée sur un cylindre à base circulaire, du reste droit ou oblique, dont $O\zeta$ est l'axe. En dehors de ce cas, la méthode géométrique ne souffre d'exception que pour quelques points particuliers, ceux pour lesquels on a $xx' + yy' = 0$.

On aura toujours l'équation de la surface réglée engendrée par les tangentes aux lignes asymptotiques le long de $O\zeta$ en éliminant Z entre les deux équations

$$\begin{aligned}\xi x + \eta y &= 0, \\ \eta x - \xi y &= 2(xy' - yx')(\zeta - Z).\end{aligned}$$

En tenant compte de la relation $x^2 + y^2 = R^2$, on peut les écrire autrement. En les résolvant par rapport à ξ et η , on trouve

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{2(xy' - yx')y(\zeta - Z)}{R^2}, \\ \eta &= \frac{2(xy' - yx')x(\zeta - Z)}{R^2}.\end{aligned}$$

Remplaçant dans la première yy' par $-xx'$, dans la seconde xx' par $-yy'$, on en déduit immédiatement pour ξ et η ces valeurs simples :

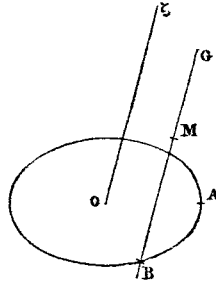
$$\begin{aligned}\xi &= 2x'(\zeta - Z), \\ \eta &= 2y'(\zeta - Z).\end{aligned}$$

Dans ce cas, où la courbe CD est sur un cylindre à base circulaire, la construction géométrique de la tangente à la ligne asymptotique du point A est illusoire; mais si, au lieu de projeter parallèlement à la tangente CT, nous projetons parallèlement à une droite joignant le point C à un point voisin D, la construction nous donnera une droite déterminée pour chaque position de CD, et la limite vers laquelle tend cette droite quand le point D vient se confondre avec le point C est la tangente à la ligne asymptotique du point A.

Appliquons les résultats trouvés à un exemple.

Considérons un cylindre, son axe $O\zeta$, une section circulaire OA , et, sur chaque génératrice BC , prenons une longueur BM proportionnelle

Fig. II.



à l'arc AB de la base compté à partir du point fixe A ; le lieu des points M , qui est une hélice si le cylindre est droit, sera pris pour lieu des centres.

Nous aurons

$$x = R \cos \alpha Z,$$

$$y = R \sin \alpha Z,$$

α étant une constante égale à $\frac{2\pi}{h}$ et h ce que nous pouvons appeler le pas de la courbe. Il faut donc éliminer Z entre les deux équations

$$\xi = -2\alpha R \sin \alpha Z (\zeta - Z),$$

$$\eta = 2\alpha R \cos \alpha Z (\zeta - Z).$$

Divisant membre à membre, on en déduit

$$\tan \alpha Z = -\frac{\xi}{\eta}, \quad Z = -\frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\xi}{\eta},$$

et, faisant la somme des carrés, on a alors l'équation de la surface

$$\xi^2 + \eta^2 = 4\alpha^2 R^2 \left(\zeta + \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\xi}{\eta} \right)^2.$$

Pour construire la surface, il vaudrait mieux conserver les deux premières équations et, regardant Z comme une variable arbitraire, construire les diverses droites répondant à chaque valeur de Z . Il est bon

de remarquer que, dans le cas où nous nous plaçons, on peut avoir les lignes asymptotiques de la surface par des quadratures. En effet,

$$x'' = -\alpha^2 R \cos \alpha Z, \quad y'' = -\alpha^2 R \sin \alpha Z$$

et

$$B = x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'' = -\alpha^2 R \cos(\theta - \alpha Z).$$

L'équation des lignes asymptotiques est donc

$$-\alpha^2 \cos(\theta - \alpha Z) dZ^2 + d\theta^2 = 0.$$

Posons

$$\theta - \alpha Z = \theta_1,$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{d\theta_1}{dZ} + \alpha;$$

il vient

$$\left(\frac{d\theta_1}{dZ} + \alpha\right)^2 + \alpha^2 \cos \theta_1 = 0$$

et

$$\frac{d\theta_1}{dZ} = -\alpha \pm \alpha \sqrt{-\cos \theta_1}.$$

On voit que la question dépend de quadratures elliptiques.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici suppose essentiellement que la projection de $O\zeta$ parallèlement à la tangente au lieu des centres ne conserve pas une direction invariable, à moins que ce lieu ne soit une droite. Cela ne peut évidemment arriver que si la courbe est située dans un plan contenant $O\zeta$. Mais, dans ce cas, il est clair que le plan tangent à la surface tout le long de la droite $O\zeta$ reste le même, et il n'y a pas lieu de se poser la question que nous avons traitée. Il est aisé de voir, du reste, que les deux lignes asymptotiques se confondent avec $O\zeta$ tout le long de cette droite, car, si l'on prend le plan de la courbe pour plan des XZ , on aura

$$x = u, \quad y = 0,$$

$$X = u(1 + \cos \theta),$$

$$Y = u \sin \theta,$$

$$B = u''(1 + \cos \theta),$$

et l'équation qui donne les lignes asymptotiques est

$$u''(1 + \cos \theta) dZ^2 - u d\theta^2 = 0.$$

Or, tout le long de l'axe des Z , on doit avoir $1 + \cos \theta = 0$, d'où l'on voit que les deux valeurs de $\frac{d\theta}{dZ}$ en chacun de ces points sont nulles. On voit de plus, et dès le principe nous avons indiqué un cas plus général qui contient celui-ci, que les lignes asymptotiques pour un point quelconque se trouvent par une simple quadrature

$$\frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2u}{u'}} dZ.$$

XIV.

Un cercle dont le plan se déplace parallèlement à lui-même est déterminé dans chacune des positions de son plan si on lui donne trois directrices. Les trois directrices les plus simples qu'on puisse lui attribuer sont trois droites. Nous allons étudier la surface engendrée dans ce cas.

Prenons l'une des droites pour axe des Z , un plan parallèle au plan du cercle mobile pour plan des XY , et dans ce plan deux axes rectangulaires. Les équations des deux autres droites seront

$$(1) \quad \begin{cases} X = aZ + p, \\ Y = bZ + q, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} Y = a'Z + p', \\ X = b'Z + q'. \end{cases}$$

Dans le plan dont l'ordonnée est Z , le cercle mobile sera représenté par

$$(3) \quad X^2 + Y^2 - 2Xx - 2Yy = 0,$$

et l'on aura, en exprimant que les deux droites le rencontrent, les relations

$$\begin{aligned} (aZ + p)^2 + (bZ + q)^2 - 2(aZ + p)x - 2(bZ + q)y &= 0, \\ (a'Z + p')^2 + (b'Z + q')^2 - 2(a'Z + p')x - 2(b'Z + q')y &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux équations déterminent le lieu des centres. On en tire

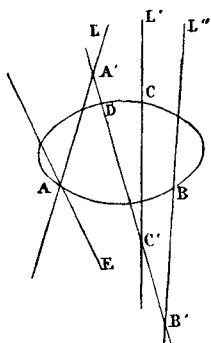
$$(4) \begin{cases} 2x = \frac{(b'Z + q')[(aZ + p)^2 + (bZ + q)^2] - (bZ + q)[(a'Z + p')^2 + (b'Z + q')^2]}{(aZ + p)(b'Z + q') - (a'Z + p')(bZ + q)}, \\ 2y = \frac{(aZ + p)[(a'Z + p')^2 + (b'Z + q')^2] - (a'Z + p')[aZ + p)^2 + (bZ + q)^2]}{(aZ + p)(b'Z + q') - (a'Z + p')(bZ + q)}. \end{cases}$$

Nous sommes, comme nous le voyons, dans un des cas précédemment indiqués (§ XII). La courbe lieu des centres est unicursale et du troisième ordre. La surface est du quatrième degré, ainsi que le montre la substitution à x et y de leurs valeurs en Z dans l'équation (3); les tangentes aux lignes asymptotiques tout le long de OZ forment une surface réglée du huitième degré, et pour chacune des trois directrices données il existe une pareille surface.

Outre les trois droites données, la surface contient deux autres droites réelles ou imaginaires dont on découvre aisément l'existence en remarquant que, le dénominateur commun des formules (4) qui donnent x et y étant du second degré en Z , il y a deux valeurs de Z pour lesquelles le centre se transporte à l'infini et le cercle devient une droite. Il est facile de définir géométriquement ces deux droites. Considérons, en effet, l'hyperboloïde déterminé par les trois directrices. On peut mener à cet hyperboloïde deux plans tangents réels ou imaginaires parallèles aux plans des cercles; chacun de ces plans tangents coupe l'hyperboloïde suivant deux génératrices, dont l'une, étant de même système que les trois directrices, ne les rencontre pas, mais dont l'autre, étant du système différent, les rencontre et peut par suite être considérée comme l'un des cercles générateurs. On constate donc l'existence de cinq droites situées sur la surface et à distance finie. En excluant le cas où la surface engendrée coïnciderait avec l'hyperboloïde, nous allons voir qu'elle ne contient pas d'autre droite, à moins que les deux horizontales dont nous venons de parler ne soient rectangulaires, auquel cas la surface contient une sixième droite rencontrant ces deux horizontales, mais ne rencontrant aucune des directrices. Cherchons d'abord comment se coupent la surface et l'hyperboloïde. Leur intersection étant une courbe du huitième ordre, en supprimant les cinq droites qui leur sont communes, on a une courbe du troisième ordre. Il est facile d'obtenir cette courbe par points.

Soient L, L', L'' (*fig. 12*) les trois directrices. Menons un plan quelconque contenant un des cercles qui engendrent la surface; ce cercle est déterminé par les trois points A, B, C , où le plan coupe L, L', L'' .

Fig. 12.



L'hyperboloïde est coupé suivant une conique passant aux points A, B, C ; elle coupe le cercle en un quatrième point réel D et un seul. Dans chaque plan horizontal la courbe a donc un point et un seul à distance finie. Nous verrons que c'est une courbe unicursale dont les équations sont de même forme que celles du lieu des centres. La construction géométrique que nous venons d'indiquer est peu commode dans la pratique; on peut lui substituer la suivante, qui s'effectue aisément au moyen de la Géométrie descriptive.

Le cercle ABC et les deux droites L' et L'' déterminent un hyperboloïde qui coupe le premier suivant quatre droites, dont deux sont L' et L'' ; une troisième est la droite qui, partant du point A , rencontre L' et L'' ; enfin la quatrième coupe L en un point A' inconnu et le cercle au point cherché D . C'est cette quatrième droite que nous allons déterminer. Construisons la génératrice AE du même système que L' et L'' pour l'hyperboloïde auxiliaire; il suffit pour cela d'avoir deux génératrices de l'autre système dans cet hyperboloïde, ce qui se fait en prenant deux points arbitraires du cercle et en menant par ces points les droites rencontrant L' et L'' . Le plan LAE coupe L' et L'' en deux points qui appartiennent à la quatrième génératrice commune aux deux hyperboloïdes; cette dernière, par son intersection avec L , donne le point A' , et, par son intersection avec le cercle, le point cherché D de

la courbe. Remarquons que les deux surfaces ne sauraient avoir en commun une génératrice de système différent de L, L', L'' autre que l'une des deux horizontales déjà trouvées. Soit, en effet, $A'D$ une pareille génératrice rencontrant L' et L'' en B' et C' . Elle appartiendra à l'hyperboloïde auxiliaire. Or, dans ce dernier, les trois droites $L'L''$ et $A'D$ suffisent pour déterminer le cercle dans chaque position de son plan; la surface coïnciderait donc avec cet hyperboloïde auxiliaire. Cela arriverait dans le cas, que nous écartons, où le plan donné serait un plan de section circulaire pour l'hyperboloïde des trois directrices. Nous pouvons déduire de la remarque précédente que la surface ne contient pas de droite rencontrant une des directrices (en mettant toujours à part les deux horizontales). Une pareille droite, en effet, rencontrerait ces deux dernières et, ayant trois points communs avec l'hyperboloïde, en serait une génératrice, ce qui est impossible, comme nous l'avons vu.

Il reste à voir si la surface peut contenir des droites ne rencontrant aucune des directrices. Une pareille droite, si elle existe, rencontre les deux horizontales de la surface. Ces dernières peuvent être réelles ou imaginaires; mais, dans ce dernier cas, elles sont imaginaires conjuguées. Prenons pour axe des Z l'une des directrices L , pour origine sur cette droite le milieu O , toujours réel, de la distance des points de rencontre de L avec les deux horizontales, et pour axes des X et des Y les deux bissectrices, réelles également, de l'angle formé par les projections de ces horizontales. Les équations de ces dernières seront

$$(5) \quad \begin{cases} Z = \gamma, & Z = -\gamma, \\ Y = \alpha X, & Y = -\alpha X. \end{cases}$$

Soient

$$\begin{aligned} X &= aZ + p, \\ Y &= bZ + q \end{aligned}$$

les équations de L' ; L' devant rencontrer les deux droites (5), on aura les relations

$$\begin{aligned} b\gamma + q &= \alpha(-a\gamma + p), \\ -b\gamma + q &= -\alpha(a\gamma + p), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$q = a\alpha\gamma, \quad p = b\frac{\gamma}{\alpha},$$

et les équations de L' seront

$$(6) \quad \begin{cases} X = aZ + b\frac{\gamma}{\alpha}, \\ Y = bZ + a\alpha\gamma; \end{cases}$$

de même, les équations de L'' seront

$$(7) \quad \begin{cases} X = a'Z + b'\frac{\gamma}{\alpha}, \\ Y = b'Z + a'\alpha\gamma. \end{cases}$$

L'équation de la surface est, dans ce système de coordonnées,

$$(8) \quad \begin{vmatrix} X^2 + Y^2 & X & Y \\ \left(aZ + b\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (bZ + a\alpha\gamma)^2 & aZ + b\frac{\gamma}{\alpha} & bZ + a\alpha\gamma \\ \left(a'Z + b'\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (b'Z + a'\alpha\gamma)^2 & a'Z + b'\frac{\gamma}{\alpha} & b'Z + a'\alpha\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons les points de rencontre de cette surface avec une droite rencontrant les deux droites (1) et dont les équations sont

$$(9) \quad \begin{cases} X = mZ + n\frac{\gamma}{\alpha}, \\ Y = nZ + m\alpha\gamma. \end{cases}$$

Nous aurons les coordonnées Z des points de rencontre en résolvant l'équation

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \left(mZ + n\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (nZ + m\alpha\gamma)^2 & mZ + n\frac{\gamma}{\alpha} & nZ + m\alpha\gamma \\ \left(aZ + b\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (bZ + a\alpha\gamma)^2 & aZ + b\frac{\gamma}{\alpha} & bZ + a\alpha\gamma \\ \left(a'Z + b'\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (b'Z + a'\alpha\gamma)^2 & a'Z + b'\frac{\gamma}{\alpha} & b'Z + a'\alpha\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la pre-

mière colonne; les mineurs qui leur correspondent sont

$$\begin{aligned}(ab' - ba')(Z^2 - \gamma^2), \\ (a'b - b'm)(Z^2 - \gamma^2), \\ (mb - na)(Z^2 - \gamma^2),\end{aligned}$$

de sorte que, en supprimant le facteur $Z^2 - \gamma^2$, l'équation (10) revient à

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \left(mZ + n \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (nZ + m\alpha\gamma)^2 & m & n \\ \left(a'Z + b \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (bZ + a\alpha\gamma)^2 & a & b \\ \left(a'Z + b' \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + (b'Z + a'\alpha\gamma)^2 & a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Écrivons que cette équation du second degré est identique; nous aurons, pour l'exprimer, les trois équations

$$(12) \quad \begin{vmatrix} m^2 + n^2 & m & n \\ a^2 + b^2 & a & b \\ a'^2 + b'^2 & a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

$$(13) \quad (1 + \alpha^2) \begin{vmatrix} mn & m & n \\ ab & a & b \\ a'b' & a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \alpha^4 m^2 + n^2 & m & n \\ \alpha^4 a^2 + b^2 & a & b \\ \alpha^4 a'^2 + b'^2 & a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Posons

$$\begin{vmatrix} m^2 & m & n \\ a^2 & a & b \\ a'^2 & a' & b' \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} n^2 & m & n \\ b^2 & a & b \\ b'^2 & a' & b' \end{vmatrix} = \Delta_2, \quad \begin{vmatrix} mn & m & n \\ ab & a & b \\ a'b' & a' & b' \end{vmatrix} = \Delta_3;$$

les équations (12) et (14) reviennent à

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 &= 0, \\ \alpha^4 \Delta_1 + \Delta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Supposons $1 - \alpha^4 \geq 0$; alors ces deux dernières équations exigent que $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$; m et n doivent donc satisfaire aux trois équations

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Si nous considérons m et n comme des coordonnées dans un plan, les deux premières équations représentent deux paraboles ayant chacune son axe parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole représentée par la troisième, et par suite ne la coupant qu'en trois points à distance finie; mais, *a priori*,

$$(m = 0, n = 0), \quad (m = a, n = b), \quad (m = a', n = b')$$

sont trois solutions du système des trois équations, et nous voyons que ce sont les seules communes. Si donc $1 - \alpha^4$ est différent de zéro, la surface ne contient pas d'autre droite que les cinq trouvées.

Supposons maintenant $1 - \alpha^4 = 0$. Cela peut arriver de deux manières, soit que l'on ait $\alpha = \pm i$ ou $\alpha = \pm 1$.

Dans le premier cas, l'équation (13) est identiquement satisfaite, (14) se réduit à (12), et il reste une seule relation entre m et n . Il y a une infinité de droites situées sur la surface, et cette dernière est un hyperboloïde, car le plan horizontal est un plan de section circulaire de l'hyperboloïde que déterminent les trois directrices.

Enfin, soit $\alpha = \pm 1$. Pour cela, il suffit que les deux horizontales de la surface soient rectangulaires. Alors les trois équations (12), (13) et (14) se réduisent à deux :

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Elles ont trois solutions connues d'avance, et qui sont, comme nous l'avons dit, $(m = 0, n = 0)$, $(m = a, n = b)$, $(m = a', n = b')$. Il y a une quatrième solution finie et toujours réelle si, comme nous le supposons implicitement, a, b, a', b' sont réels. Il y a donc, dans ce cas, une quatrième droite située sur la surface et rencontrant les deux horizontales, et la surface contient en tout six droites (1). Nous pouvons, de plus, énoncer le résultat suivant :

(1) Cette quatrième droite s'obtient aisément de la manière suivante :

Soient H et H' les deux horizontales rectangulaires; A et A', B et B', C et C' les points où elles sont rencontrées par L, L', L'', et soit DD' la quatrième droite. Considérons, à partir

Étant donnés trois génératrices de même système d'un hyperboloïde et un plan non parallèle aux sections circulaires de la surface, si les génératrices du second système parallèles au plan donné sont rectangulaires, il existe une quatrième droite et une seule telle que tout plan parallèle à ce plan coupe les quatre droites en quatre points situés sur un cercle; si les génératrices susdites ne sont pas rectangulaires, il n'existe point de droite jouissant de la propriété énoncée.

Notre calcul suppose essentiellement que la surface réglée que déterminent les trois directrices soit un hyperboloïde. Si elles sont parallèles à un même plan, il n'y a qu'une horizontale qui les rencontre toutes les trois, à moins que le plan horizontal ne soit le second plan directeur du paraboloidé qu'elles déterminent, et dans ce cas la surface engendrée par le cercle serait le paraboloidé lui-même, tous les cercles se réduisant à des droites. En écartant cette hypothèse, nous allons voir que la surface ne contient pas d'autres droites que les trois directrices et l'horizontale qui les rencontre. Prenons pour axe des X cette horizontale et la directrice L pour axe des Z ; L' et L'' auront pour équations

$$\begin{array}{ll} X = aZ + \alpha, & X = a'Z + \alpha', \\ Y = bZ, & Y = b'Z, \end{array}$$

a, b, a' et b' étant liés par la relation

$$ab' - ba' = 0,$$

et l'équation de la surface sera

$$(15) \quad \begin{vmatrix} X^2 + Y^2 & X & Y \\ (aZ + \alpha)^2 + b^2 Z^2 & aZ + \alpha & bZ \\ (a'Z + \alpha')^2 + b'^2 Z^2 & a'Z + \alpha' & b'Z \end{vmatrix} = 0.$$

de A et A' , sur H et H' , les distances comme positives dans un sens, comme négatives dans l'autre, et représentons les droites AA' , BB' , CC' par des points a, b, c dont les coordonnées rectangulaires dans un plan seront ces distances avec leurs signes (a sera l'origine). Décrivons le cercle circonscrit au triangle abc , et, par le point c , menons une droite cd telle que ab et cd soient également inclinées sur les axes. Le point D où cette droite rencontre le cercle représentera la droite cherchée; connaissant les distances AD , $A'D'$ et leurs signes, on pourra placer DD' .

Une droite située sur la surface, devant rencontrer l'axe des X, aura pour équations

$$X = mZ + p,$$

$$Y = nZ;$$

les coordonnées Z de ses points de rencontre avec la surface seront données par l'équation

$$\begin{vmatrix} (mZ + p)^2 + n^2 Z^2 & mZ + p & nZ \\ (aZ + \alpha)^2 + b^2 Z^2 & aZ + \alpha & bZ \\ (a'Z + \alpha')^2 + b'^2 Z^2 & a'Z + \alpha' & b'Z \end{vmatrix} = 0.$$

Supprimons la solution $Z = 0$, et posons

$$\begin{vmatrix} m^2 + n^2 & m & n \\ a^2 + b^2 & a & b \\ a'^2 + b'^2 & a' & b' \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} m^2 + n^2 & p & n \\ a^2 + b^2 & \alpha & b \\ a'^2 + b'^2 & \alpha' & b' \end{vmatrix} = \Delta_2, \quad \begin{vmatrix} mp & m & n \\ ab & a & b \\ a'b' & a' & b' \end{vmatrix} = \Delta_3,$$

$$\begin{vmatrix} mp & p & n \\ ab & \alpha & b \\ a'b' & \alpha' & b' \end{vmatrix} = \Delta_4, \quad \begin{vmatrix} p^2 & m & n \\ \alpha^2 & a & b \\ \alpha'^2 & a' & b' \end{vmatrix} = \Delta_5, \quad \begin{vmatrix} p^2 & p & n \\ \alpha^2 & \alpha & b \\ \alpha'^2 & \alpha' & b' \end{vmatrix} = \Delta_6;$$

nous aurons, pour exprimer que la droite est située tout entière sur la surface, les quatre équations

$$\Delta_1 = 0,$$

$$\Delta_2 + 2\Delta_3 = 0,$$

$$2\Delta_4 + \Delta_5 = 0,$$

$$\Delta_6 = 0.$$

Considérons, dans ces équations, m, n, p comme les trois coordonnées d'un point dans l'espace; la première représente un plan, les deux dernières un paraboloïde hyperbolique et un cylindre parabolique qui se coupent suivant une courbe du troisième ordre. Le système de ces trois équations n'a donc que trois solutions, qui sont les solutions, connues *a priori* ($m = n = p = 0$), ($m = a, n = b, p = \alpha$), ($m = a', n = b', p = \alpha'$), et, par suite, le système des quatre équations n'admet pas d'autre solution commune que ces trois.

La surface contient en général six coniques, huit si les deux horizontales qui rencontrent les trois directrices sont rectangulaires. Si les

trois directrices déterminent un hyperboloïde, les plans passant par une directrice et une de ces horizontales couperont la surface suivant une conique. Ces plans, et par conséquent les coniques elles-mêmes, seront réels ou imaginaires en même temps que les horizontales. Supposons ces dernières réelles, et cherchons la nature des coniques. Pour cela, prenons l'une des horizontales pour axe des X ; dans les formules (4) faisons $q = 0$, $q' = 0$, et cherchons la section de la surface (3) par le plan $Y = 0$. L'équation de cette section est

$$[b'(aZ + p) - b(a'Z + p')]X - b'[(aZ + p)^2 + b^2Z^2] + b[(a'Z + p')^2 + b'^2Z^2] = 0.$$

C'est une hyperbole dont une asymptote est horizontale.

Cela suppose que l'on n'a pas $ab' - ba' = 0$; si $ab' - ba' = 0$, la surface déterminée par L, L', L'' est un paraboloides; une des horizontales s'éloigne à l'infini; une seule reste à distance finie, et les plans qui la contiennent coupent la surface suivant trois paraboles. Les trois autres plans deviennent parallèles au plan directeur de L, L', L'' . Cherchons comment ces plans coupent la surface. Nous pouvons supposer le plan directeur pris pour plan des YZ , et, comme nous couperons par ce plan, l'équation à former est

$$Y^2 - 2Y\gamma = 0 \quad \text{ou} \quad Y - 2\gamma = 0.$$

Or on a ici $a = 0$, $a' = 0$, de manière que le numérateur de γ est du second degré seulement et le dénominateur du premier degré. L'équation est donc de la forme

$$(mZ + n)Y + pZ^2 + qZ + r = 0,$$

et elle représente une hyperbole. Les six coniques considérées sont des hyperboles si la surface réglée déterminée par les trois directrices est un hyperboloïde; si c'est un paraboloides, trois hyperboles et trois paraboles. Il y a huit hyperboles réelles si les deux horizontales qui rencontrent les trois directrices sont rectangulaires.

Nous allons terminer l'étude de cette surface en cherchant les équations de son intersection avec l'hyperboloïde des trois directrices. Calculons les coordonnées X et Y du point situé dans le plan Z . Pour cela, transportons l'origine au point $(0, 0, Z)$; pour avoir l'équation du cercle suivant lequel le nouveau plan XY coupe la surface, après avoir

remplacé dans l'équation de cette dernière Z par $Z + Z_1$, il faudrait y faire $Z_1 = 0$, ce qui revient à la laisser telle qu'elle est.

Les équations des deux droites L' , L'' sont devenues

$$\begin{aligned} X &= aZ_1 + P, & X &= a'Z_1 + P', \\ Y &= bZ_1 + Q, & Y &= b'Z_1 + Q', \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} aZ + p &= P, & a'Z + p' &= P', \\ bZ + q &= Q, & b'Z + q' &= Q'. \end{aligned}$$

Avec ces notations, l'équation du cercle est

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} (PQ' - QP')(X^2 + Y^2) - [Q'(P^2 + Q^2) - Q(P'^2 + Q'^2)]X \\ - [P(P'^2 + Q'^2) - P'(P^2 + Q^2)]Y = 0. \end{aligned} \right.$$

En formant l'équation de l'hyperboloïde des trois directrices et y faisant $Z_1 = 0$, on a l'équation de la conique suivant laquelle il est coupé par le plan XY :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} (aY - bX)(P'Y - Q'X) - (a'Y - b'X)(PY - QX) \\ + (bP - aQ)(P'Y - Q'X) - (b'P' - a'Q')(PY - QX) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si entre ces deux équations (16) et (17) on élimine successivement Y et X , on aura deux équations du quatrième degré donnant respectivement les coordonnées X et Y des points d'intersection; mais la première, par exemple, devra admettre les racines $X = 0$, $X = P$, $X = P'$; supprimant la racine $X = 0$, l'équation restante du troisième degré devra avoir son premier membre divisible par $X^2 - (P + P')X + PP'$, et l'on aura immédiatement le quotient en divisant les termes extrêmes par X^2 et PP' . On trouve ainsi, par des réductions faciles,

$$X = \frac{[(b - b')(PQ' - QP') + a(P'^2 + Q'^2 - PP' - QQ') + a'(P^2 + Q^2 - PP' - QQ')][(bP - aQ)(P'^2 + Q'^2) - (b'P' - a'Q')(P^2 + Q^2)]}{(PQ' - QP')[(bQ' - Qb' + Pa' - aP')^2 + (Qa' - aQ' + Pb' - bP')^2]}.$$

La valeur de Y se déduit de celle de X en changeant a en b , etc., P en Q , etc., et réciproquement.

Comme P , Q , P' , Q' sont du premier degré en Z , il semble que le numérateur soit du cinquième degré et le dénominateur du quatrième; il n'en est rien pourtant. D'abord le second facteur du dénominateur est indépendant de Z ; on a, en effet,

$$bQ' - Qb' = b(b'Z + q') - b'(bZ + q) = bq' - qb',$$

et de même des autres différences, de sorte que dans ce facteur nous pouvons remplacer les grandes lettres par les petites. De même, le second facteur du numérateur est du second degré et le premier linéaire, car il peut s'écrire

$$\begin{aligned} Q'(bP - aQ) + Q'(aQ' - b'P) + Q(a'Q - bP') \\ + Q(b'P' - a'Q') + P'(aP' - a'P) + P(a'P - aP'), \end{aligned}$$

et dans chaque parenthèse les grandes lettres peuvent être remplacées par les petites. Appelons M ce premier facteur linéaire et m le facteur numérique du dénominateur, qui ne change pas par la permutation qui donne Y . Soit N ce que devient A par cette permutation; les coordonnées XY d'un point de l'intersection sont données par les formules

$$\begin{aligned} X &= \frac{M[(bp - aq)(P'^2 + Q'^2) - (b'p' - a'q')(P^2 + Q^2)]}{m(PQ' - QP')}, \\ Y &= \frac{N[(aq - bp)(P'^2 + Q'^2) - (a'q' - b'p')(P^2 + Q^2)]}{m(QP' - P'Q')}. \end{aligned}$$

Si l'on divise ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{Y}{X} = \frac{N}{M},$$

équation d'un parabolôïde qui contient l'axe des Z et dont le plan XY est un plan directeur. Nous pouvons donc énoncer cette propriété de l'hyperboloïde :

Si l'on considère trois génératrices de même système de cette surface, L, L', L'' , et un plan non parallèle aux sections circulaires, le cercle dont le plan reste parallèle à ce plan et qui s'appuie sur L, L', L'' engendre une surface du quatrième degré. Cette surface coupe l'hyperboloïde suivant une cubique gauche du troisième ordre, et les trois conoïdes ayant pour plan directeur le plan donné, pour axe une des génératrices L, L', L'' et pour directrice cette cubique gauche sont des parabolôïdes.

DEUXIÈME PARTIE.

I.

Dans cette deuxième Partie, où je m'occuperai exclusivement des surfaces engendrées par le cercle, je me propose d'établir directement les formules qui m'ont servi jusqu'ici et d'en déduire des résultats relatifs à la courbure de ces surfaces. Dans tout ce qui suivra, sauf dans le calcul de l'équation des lignes asymptotiques, les axes seront supposés rectangulaires. Cherchons d'abord les lignes asymptotiques.

Reprenons les équations

$$X = x + u \cos \theta,$$

$$Y = y + u \sin \theta,$$

qui définissent la surface, et

$$dX = (x' + u' \cos \theta) dZ - u \sin \theta d\theta,$$

$$dY = (y' + u' \sin \theta) dZ + u \cos \theta d\theta,$$

qui déterminent une tangente quelconque à la surface au point (Z, θ) ; si nous exprimons qu'elle se confond avec sa tangente conjuguée, ce sera la tangente à une des lignes asymptotiques.

Soient M le point choisi, M' un point infiniment voisin; on sait que, pour avoir la tangente conjuguée de la tangente MM' , il suffit de prendre la limite de l'intersection des deux plans tangents en M et M' , en d'autres termes la caractéristique du plan tangent. L'équation de ce dernier au point M est [(1), § II, 1^{re} Partie]

$$(\xi - X) \cos \theta + (\eta - Y) \sin \theta - \Lambda(\zeta - Z) = 0.$$

Au point infiniment voisin $(Z + dZ, \theta + d\theta)$, les coefficients seront

$$\cos \theta - \sin \theta d\theta, \quad \sin \theta + \cos \theta d\theta, \quad -\Lambda - d\Lambda.$$

A est égal à $x' \cos \theta + y' \sin \theta + u'$, et nous avons vu, au paragraphe déjà cité, que, en posant $B = x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u''$,

$$dA = B dZ + (y' \cos \theta - x' \sin \theta) d\theta.$$

La direction de l'intersection des deux plans tangents est définie par les coefficients

$$-\sin \theta dA + A \cos \theta d\theta, \cos \theta dA + A \sin \theta d\theta, d\theta;$$

pour que cette direction se confonde avec celle de la tangente, il faudra qu'on ait

$$\frac{(x' + u' \cos \theta) dZ - u \sin \theta d\theta}{-\sin \theta dA + A \cos \theta d\theta} = \frac{(y' + u' \sin \theta) dZ + u \cos \theta d\theta}{\cos \theta dA + A \sin \theta d\theta} = \frac{dZ}{d\theta}.$$

A priori, il existe deux valeurs du rapport $\frac{dZ}{d\theta}$ pour lesquelles ces deux équations sont satisfaites en même temps. Au surplus, il est facile de s'assurer que les deux équations reviennent à une seule. Égalant le premier rapport au troisième, il vient, en développant,

$$\frac{(x' + u' \cos \theta) dZ - u \sin \theta d\theta}{-B \sin \theta dZ + [\cos \theta (x' \cos \theta + y' \sin \theta + u') - \sin \theta (y' \cos \theta - x' \sin \theta)] d\theta} = \frac{dZ}{d\theta}$$

ou

$$\frac{(x' + u' \cos \theta) dZ - u \sin \theta d\theta}{-B \sin \theta dZ + (x' + u' \cos \theta) d\theta} = \frac{dZ}{d\theta}.$$

Chassons les dénominateurs et divisons par $\sin \theta$; nous avons l'équation

$$B dZ^2 - u d\theta^2 = 0,$$

et il est bien clair que, en égalant le deuxième rapport au troisième, on retomberait sur la même équation, à cause de sa symétrie.

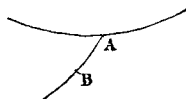
II.

Nous aurons besoin, par la suite, de l'angle des lignes asymptotiques. Nous sommes donc amenés à cette question : *Trouver l'angle formé par*

deux courbes tracées sur la surface en un point donné. Nous allons, pour cela, commencer par exprimer l'angle formé par une courbe quelconque avec le cercle horizontal passant par un de ses points.

Soient A (*fig. 13*) un point (Z, θ) , B un point infiniment voisin

Fig. 13.



$(Z + dZ, \theta + d\theta)$. Si AB est un élément d'une courbe déterminée, on connaîtra la relation qui donne $d\theta$ en fonction de dZ , et réciproquement.

Soit ds l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2;$$

en supposant dZ nul dans les formules qui donnent dX et dY , on a, pour les cosinus des angles formés avec les axes par la tangente au cercle,

$$-\sin\theta, \cos\theta, 0;$$

d'autre part, les cosinus des mêmes angles pour la tangente à la courbe AB sont

$$\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds};$$

donc, en appelant h l'angle cherché,

$$\cos h = \frac{-\sin\theta dX + \cos\theta dY}{ds},$$

ou

$$ds \cos h = -\sin\theta [(x' + u' \cos\theta) dZ - u \sin\theta d\theta] \\ + \cos\theta [(y' + u' \sin\theta) dZ + u \cos\theta d\theta],$$

ou enfin

$$(1) \quad ds \cos h = (y' \cos\theta - x' \sin\theta) dZ + u d\theta.$$

Cette formule, si nous y faisons $h = \frac{\pi}{2}$, nous donne l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des cercles qui engendrent la sur-

face ou, en d'autres termes, des lignes de plus grande pente :

$$u d\theta = (x' \sin \theta - y' \cos \theta) dZ.$$

En général, les variables ne sont pas séparées; mais, si l'on suppose que le lieu des centres soit une courbe plane dont le plan soit perpendiculaire au plan horizontal, on pourra, en prenant ce plan pour plan des ZX, faire $y = 0$, $y' = 0$, et l'équation devient

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{x'}{u} dZ.$$

On n'a qu'à effectuer une quadrature, et l'équation générale des lignes de plus grande pente est

$$\log \tan \frac{\theta}{2} = \int \frac{x'}{u} dZ.$$

Dans ce cas est contenu celui où le lieu des centres est une droite. Comme application, nous allons nous borner à chercher les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'une surface du second degré.

Faisant passer le plan XY par le centre de la surface et le plan ZX par le diamètre conjugué des sections circulaires considérées, nous aurons

$$x = aZ, \quad y = 0, \quad u = \sqrt{b^2 Z^2 + R^2}.$$

Si b^2 et R^2 sont > 0 , la surface est l'hyperboloïde à une nappe.

Si $b^2 > 0$ et $R^2 < 0$, la surface est l'hyperboloïde à deux nappes.

Si $b^2 < 0$ et $R^2 > 0$, la surface est l'ellipsoïde.

Bornons-nous au premier cas, par exemple.

L'équation à intégrer est

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{a dZ}{\sqrt{R^2 + b^2 Z^2}} = \frac{a}{b} \frac{\frac{b}{R} dZ}{\sqrt{1 + \left(\frac{bZ}{R}\right)^2}},$$

dont l'intégrale est, α étant une constante arbitraire,

$$\tan \frac{\theta}{2} = \alpha \left[\frac{bZ}{R} + \sqrt{1 + \left(\frac{bZ}{R}\right)^2} \right]^{\frac{\alpha}{b}}.$$

On aurait de même les intégrales sous forme réelle pour les deux autres surfaces. Pour le paraboloïde elliptique, il n'y aurait qu'à supposer $u = \sqrt{cZ}$.

Revenons à la formule (1)

$$ds \cosh = (y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta.$$

Pour avoir $\cosh$, il suffirait d'y remplacer ds par sa valeur en fonction de dZ et $d\theta$; mais nous allons opérer autrement.

Supposons d'abord $h = 0$; nous aurons pour l'élément linéaire du cercle, que nous appellerons ds_1 ,

$$ds_1 = u d\theta,$$

ce qui était évident *a priori*.

Calculons l'élément linéaire de la trajectoire orthogonale. Soit ds_2 cet élément; pour l'avoir, il n'y a qu'à remplacer, dans dX et dY , $u d\theta$ par sa valeur

$$(x' \sin \theta - y' \cos \theta) dZ;$$

les expressions de dX et dY deviennent alors

$$A \cos \theta dZ, \quad A \sin \theta dZ,$$

et, par suite,

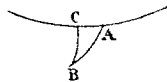
$$ds_2 = \sqrt{A^2 + 1} dZ.$$

Cela étant, menons au point B la trajectoire orthogonale BC; nous aurons

$$BC = \sqrt{A^2 + 1} dZ.$$

Pour déterminer AC (fig. 14), remarquons que, dans le triangle rec-

Fig. 14.



tangle ABC,

$$AC = AB \cosh = ds \cosh = (y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta;$$

done

$$ds^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = [(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta]^2 + (A^2 + 1) dZ^2.$$

On aurait pu, au moyen de la formule

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

arriver à cette expression simple de ds^2 ; mais le calcul serait plus compliqué.

Ayant

$$BC = ds \sinh = \sqrt{A^2 + 1} dZ$$

et

$$ds \cosh = (y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta,$$

on déterminera h par la formule commode

$$(2) \quad \tanh h = \frac{\sqrt{A^2 + 1} dZ}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta}.$$

Si l'on veut l'angle des deux courbes que l'on peut appeler les coordonnées de la surface, on n'a qu'à faire $d\theta = 0$, et l'on trouve, pour la tangente de cet angle,

$$\frac{\sqrt{A^2 + 1}}{y' \cos \theta - x' \sin \theta}.$$

En donnant à h , dans la formule générale (2), une valeur arbitraire, on a l'équation différentielle des trajectoires des cercles horizontaux, c'est-à-dire des courbes qui les coupent sous un angle constant.

Nous pouvons maintenant calculer l'angle de deux courbes quelconques tracées sur la surface et se coupant au point (Z, θ) .

Soient

$$m dZ - n d\theta = 0, \quad m' dZ - n' d\theta = 0$$

les équations qui les définissent, h et h' les angles qu'elles font avec le cercle horizontal du point (Z, θ) , et ν leur angle;

$$\nu = h' - h,$$

$$\tanh h = \frac{\sqrt{A^2 + 1} n}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta) n + u m},$$

$$\tanh h' = \frac{\sqrt{A^2 + 1} n'}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta) n' + u m'},$$

$$(3) \quad \tanh \nu = \frac{u \sqrt{A^2 + 1} (m n' - m' n)}{[(y' \cos \theta - x' \sin \theta) n + u m][(y' \cos \theta - x' \sin \theta) n' + u m'] + \sqrt{A^2 + 1} n n'}$$

Cette expression se simplifie quand on suppose que les deux lignes données ont leurs équations de la forme

$$M dZ \pm N d\theta = 0,$$

ce qui est le cas pour les lignes asymptotiques. Si l'on y fait $m' = m$, $n' = -n$, elle devient

$$\operatorname{tang} \nu = - \frac{2 \sqrt{A^2 + 1} mn}{m^2 u^2 - n^2 (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 - (A^2 + 1) n^2}.$$

Pour les lignes asymptotiques, $m = \sqrt{B}$, $n = \sqrt{u}$, et, en appelant α leur angle,

$$(4) \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{2 \sqrt{A^2 + 1} \sqrt{B} u}{A^2 + 1 + (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 - B u}.$$

Nous tirerons plus tard quelques conséquences de cette équation. Nous allons nous servir de l'équation des lignes asymptotiques pour former celle des lignes de courbure, en remarquant que les tangentes à ces dernières sont les bissectrices des angles des deux premières. En appelant h_1 et h_2 les angles des lignes asymptotiques avec le cercle horizontal, et h l'angle avec le même cercle d'une ligne de courbure, nous aurons

$$2h = h_1 + h_2,$$

$$\frac{2 \operatorname{tang} h}{1 - \operatorname{tang}^2 h} = \frac{\operatorname{tang} h_1 + \operatorname{tang} h_2}{1 - \operatorname{tang} h_1 \operatorname{tang} h_2}.$$

Or

$$\operatorname{tang} h_1 = \frac{\sqrt{A^2 + 1}}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta) + \sqrt{B} u},$$

$$\operatorname{tang} h_2 = \frac{\sqrt{A^2 + 1}}{y' \cos \theta - x' \sin \theta - \sqrt{B} u};$$

remplaçant $\operatorname{tang} h_1$ et $\operatorname{tang} h_2$ par ces valeurs et $\operatorname{tang} h$ par

$$\frac{\sqrt{A^2 + 1} dZ}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta},$$

nous obtenons, pour l'équation des lignes de courbure,

$$B(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ^2 + [(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 + B u] dZ d\theta + u(y' \cos \theta - x' \sin \theta) d\theta^2 = 0.$$

Pour avoir l'équation qui donne les rayons de courbure principaux, il suffit de remarquer que, si Z et θ satisfont à cette équation différentielle, la normale en ce point et la normale au point infiniment voisin $(Z + dZ, \theta + d\theta)$ se rencontrent en un point qui est justement le centre de courbure de la section principale, et cela nous amènerait simplement à refaire le calcul qui nous a servi (I^{re} Partie, § II) pour trouver cette équation.

III.

La formule (3) du précédent paragraphe, qui donne l'angle de deux courbes, permet d'avoir l'équation différentielle des trajectoires d'un système de lignes tracées sur la surface. Dans le cas des trajectoires orthogonales, le dénominateur de la tangente devra être nul, et l'on aura

$$[(y' \cos \theta - x' \sin \theta)n + um][(y' \cos \theta - x' \sin \theta)n' + um'] + (A^2 + 1)nn' = 0.$$

Si l'équation différentielle des lignes données est

$$m dZ - n d\theta = 0,$$

l'équation

$$[(y' \cos \theta - x' \sin \theta)n + um][(y' \cos \theta - x' \sin \theta)dZ + u d\theta] + (A^2 + 1)n dZ = 0$$

est celle de leurs trajectoires orthogonales.

Pour un système de lignes asymptotiques, par exemple celui qui répond à

$$\sqrt{B}dZ - \sqrt{u}d\theta = 0,$$

l'équation est

$$(y' \cos \theta - x' \sin \theta + \sqrt{Bu})[(y' \cos \theta - x' \sin \theta)dZ + u d\theta] + (A^2 + 1)dZ = 0,$$

équation très compliquée quand la surface est quelconque; mais, si elle est de révolution, on peut supposer $x = 0, y = 0$; l'équation relative au système de courbes

$$m dZ - n d\theta = 0$$

devient, par cette hypothèse,

$$mu^2 d\theta + n(u'^2 + 1)dZ = 0,$$

et elle peut être intégrée par une simple quadrature toutes les fois que m et n sont chacune fonction d'une seule variable Z ou θ . C'est ce qui arrive pour les lignes asymptotiques dont l'équation est

$$u''dZ^2 - u d\theta^2 = 0.$$

IV.

Nous avons trouvé (§ II), pour l'angle α des lignes asymptotiques en un point (Z, θ) de la surface,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2\sqrt{A^2 + 1} \sqrt{Bu}}{A^2 + 1 + (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 - Bu}.$$

Cette expression se déduit de celle qui donne l'angle h d'une ligne quelconque avec le cercle horizontal d'un de ses points :

$$\operatorname{tang} h = \frac{\sqrt{A^2 + 1} dZ}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ + u d\theta}.$$

Le radical du numérateur a un double signe qui correspond aux deux angles formés avec la tangente horizontale par les deux directions de la courbe. Si nous convenons de prendre toujours ce radical avec le même signe, cela reviendra à considérer l'angle que fait avec le cercle la portion de la ligne qui est située d'un côté déterminé du plan horizontal, et l'angle α sera l'angle des tangentes aux lignes asymptotiques menées de ce côté du plan; du reste, elles pourront indifféremment être au-dessus ou au-dessous. Cela est important pour la construction des lignes asymptotiques.

Si nous supposons donnée à α une valeur constante quelconque, nous aurons la relation qui doit exister entre Z et θ pour que, le long de la courbe que détermine cette relation, l'angle des lignes asymptotiques soit constant. Pour avoir l'équation débarrassée de radicaux, il faut élever les deux membres au carré, et alors elle représente les deux courbes pour lesquelles l'angle a la valeur donnée et la valeur supplémentaire.

Si l'on voulait que sur toute la surface l'angle des lignes asymptotiques

tiques restât constant, il faudrait que l'équation

$$(1) \quad 4(A^2 + 1)Bu - [A^2 + 1 + (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 - Bu]^2 \tan^2 \alpha = 0$$

fût toujours vérifiée quels que fussent Z et θ .

Si l'on suppose $x' = 0$, $y' = 0$, c'est-à-dire la surface de révolution, l'équation (1) devient

$$4(u'^2 + 1)uu'' - (u'^2 + 1 - uu'')^2 \tan^2 \alpha = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction u de Z , et l'on peut trouver des surfaces de révolution répondant à la question, quel que soit α .

Si $\alpha = 0$, l'équation (1) devient

$$\dot{B} = 0,$$

et l'on trouve les cônes et les cylindres du second degré.

Si α est égal à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $\tan \alpha$ est infinie, l'équation (1) se réduit à

$$A^2 + 1 + (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 - Bu = 0,$$

et nous verrons qu'il y a, en dehors des surfaces de révolution, une surface en chaque point de laquelle les lignes asymptotiques sont rectangulaires.

Nous allons voir maintenant que les surfaces de révolution sont les seules pour lesquelles $\tan \alpha$ puisse conserver une valeur finie et différente de zéro.

L'équation (1) est entière et du troisième degré en $\cos \theta$ et $\sin \theta$; si nous posons $\tan \frac{\theta}{2} = v$, elle devient entière et du sixième degré en v , et nous devons évaluer à zéro les coefficients des diverses puissances de v , ce qui nous donnera sept équations auxquelles devront satisfaire les fonctions x , y et u de Z . Nous aurons plus tard à traiter, au même point de vue, des équations du quatrième degré en $\cos \theta$ et $\sin \theta$. L'équation en v est alors du huitième degré, et il y a neuf équations de condition. On peut les établir, sans faire le changement de variable

indiqué, de la manière suivante. Soit

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos^4 \theta + A_2 \cos^3 \theta \sin \theta + A_3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + A_4 \cos \theta \sin^3 \theta + A_5 \sin^4 \theta \\ + B_1 \cos^3 \theta + B_2 \cos^2 \theta \sin \theta + B_3 \cos \theta \sin^2 \theta + B_4 \sin^3 \theta + C_1 \cos^2 \theta \\ + C_2 \cos \theta \sin \theta + C_3 \sin^2 \theta + D_1 \cos \theta + D_2 \sin \theta + E = 0 \end{array} \right.$$

l'équation; si nous y remplaçons θ par $\pi + \theta$ et par $2\pi - \theta$, nous aurons de nouvelles équations qui devront avoir lieu identiquement, ainsi que leurs combinaisons par addition et soustraction. En procédant de même pour ces combinaisons, nous écrirons successivement les équations suivantes, qui devront être identiques :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos^4 \theta + A_2 \cos^3 \theta \sin \theta + A_3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + A_4 \cos \theta \sin^3 \theta \\ + A_5 \sin^4 \theta + C_1 \cos^2 \theta + C_2 \cos \theta \sin \theta + C_3 \sin^2 \theta + E = 0, \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} B_1 \cos^3 \theta + B_2 \cos^2 \theta \sin \theta + B_3 \cos \theta \sin^2 \theta + B_4 \sin^3 \theta \\ + D_1 \cos \theta + D_2 \sin \theta = 0, \end{array} \right.$$

$$(5) \quad A_1 \cos^4 \theta + A_3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + A_5 \sin^4 \theta + C_1 \cos^2 \theta + C_3 \sin^2 \theta + E = 0,$$

$$(6) \quad A_2 \cos^3 \theta \sin \theta + A_4 \cos \theta \sin^3 \theta + C_2 \cos \theta \sin \theta = 0,$$

$$(7) \quad B_1 \cos^3 \theta + B_3 \cos \theta \sin^2 \theta + D_1 \cos \theta = 0,$$

$$(8) \quad B_2 \cos^2 \theta \sin \theta + B_4 \sin^3 \theta + D_2 \sin \theta = 0.$$

En exprimant que les équations (5), (6), (7), (8) sont identiques, on obtient les neuf équations de condition cherchées

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 - A_3 + A_5 = 0, \\ A_3 - 2A_5 + C_1 - C_3 = 0, \\ A_5 + C_3 + E = 0, \\ A_2 = A_4 = -C_2, \\ B_1 = B_3 = -D_1, \\ B_2 = B_4 = -D_2. \end{array} \right.$$

Si l'équation n'est que du troisième degré en $\cos \theta$ et $\sin \theta$, nous n'avons qu'à faire les A égaux à zéro, et nous avons les sept équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = C_3 = -E, \\ C_2 = 0, \\ B_1 = B_3 = -D_1, \\ B_2 = B_4 = -D_2. \end{array} \right.$$

Dans le cas présent,

$$B_1 = 4ux'^2x'',$$

$$B_2 = 8ux'y'x'' + 4ux'^2y'',$$

$$B_3 = 8ux'y'y'' + 4uy'^2x'',$$

$$B_4 = 4uy'^2y'';$$

u ne pouvant être nul quel que soit Z , on devrait donc avoir

$$x''(y'^2 - x'^2) = -2x'y'y'',$$

$$y''(y'^2 - x'^2) = 2x'y'x'',$$

d'où

$$x''y''(x'^2 + y'^2)^2 = 0.$$

x' et y' n'étant pas nuls en même temps, on voit que x'' et y'' doivent être nuls. Alors le groupe (10) se réduit à

$$C_2 = 0, \quad C_1 = C_3 = -E, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0.$$

On tire des deux premières

$$(uu'' - u'^2 \tan^2 \alpha)(x'^2 - y'^2) = 0,$$

$$(uu'' - u'^2 \tan^2 \alpha)x'y' = 0,$$

par suite

$$(11) \quad uu'' - u'^2 \tan^2 \alpha = 0.$$

En posant

$$x'^2 + y'^2 + u'^2 + 1 - uu'' = M,$$

il reste

$$2uu'' - M \tan^2 \alpha = 0,$$

$$(u'^2 + 1)uu'' - M^2 \tan^2 \alpha = 0,$$

ou, en tenant compte de (11),

$$2u'^2 - M = 0,$$

$$u'^2(u'^2 + 1) - M^2 = 0.$$

Éliminant M , on trouve

$$u'^2(u'^2 - 3) = 0.$$

$u'^2 - 3 = 0$ ne saurait convenir, à cause de l'équation (11), et, si l'on

prend $u' = 0$, c'est-à-dire $u = \text{const.}$, on devrait avoir

$$M = x'^2 + y'^2 + 1 = 0,$$

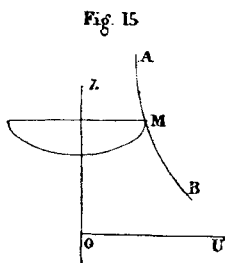
et x et y ne seraient point réels.

Cette discussion nous montre que les surfaces de révolution sont, parmi celles que nous étudions, les seules sur lesquelles l'angle des lignes asymptotiques puisse conserver une valeur constante, différente de zéro ou de $\frac{\pi}{2}$.

Quand la surface est de révolution, l'équation (1) devient

$$(12) \quad \tan^2 \alpha (u'^2 + 1 - uu'')^2 - 4(u'^2 + 1)uu'' = 0.$$

Il est à remarquer que nous tombons ici sur un problème connu. Soient, en effet, OZ (*fig. 15*) l'axe d'une surface de révolution, AB son



méridien, et M un point quelconque de AB. Si nous appelons R_1 le rayon de courbure du méridien, R_2 celui de l'autre section principale, α l'angle des lignes asymptotiques situées au-dessus du parallèle, nous aurons

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{R_2}{R_1},$$

pourvu que nous prenions dans R_1 et R_2 le radical $\sqrt{1 + u'^2}$ avec le signe +, car

$$R_1 = \frac{(1 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u''}$$

et

$$R_2 = u\sqrt{1 + u'^2}.$$

Le radical étant pris avec le signe +, R_2 sera toujours positif, et, quant à R_1 , il sera positif si le méridien est convexe vers l'axe des Z , négatif dans le cas contraire; on aura donc, dans tous les cas,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{R_2}{R_1},$$

et par suite

$$\frac{uu''}{1+u'^2} = \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Or

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2 \alpha \operatorname{tang}^4 \frac{\alpha}{2} - 2(\operatorname{tang}^2 \alpha + 2) \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}^2 \alpha = 0.$$

L'équation (12), qui se met sous la forme

$$\operatorname{tang}^2 \alpha (uu'')^2 - 2(\operatorname{tang}^2 \alpha + 2) uu''(u'^2 + 1) + \operatorname{tang}^2 \alpha (u'^2 + 1)^2 = 0,$$

résolue par rapport à $\frac{uu''}{u'^2 + 1}$, donne par conséquent, pour ce rapport,

les deux valeurs de $\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}$ que l'on trouve quand on suppose connue $\operatorname{tang} \alpha$, et le problème que nous traitons revient à ce problème bien connu du plan : *Trouver les courbes pour lesquelles le rayon de courbure est dans un rapport constant avec la normale.* Mais nos formules résolvent directement la question en partant de l'angle des lignes asymptotiques.

V.

L'équation

$$(1) \quad A^2 + 1 + (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 - Bu = 0$$

détermine, pour une surface quelconque, le lieu des points le long desquels les deux lignes asymptotiques sont rectangulaires. Il est intéressant de faire le calcul pour l'hyperboloïde.

Par un choix convenable d'axes, nous pouvons, comme nous l'avons déjà fait (§ II), poser

$$x = aZ, \quad y = 0, \quad u = \sqrt{b^2 Z^2 + R^2};$$

alors (1) devient

$$(2) \quad 2au' \cos \theta + a^2 + 1 + u'^2 - uu'' = 0.$$

Cette équation, jointe à

$$X = aZ + u \cos \theta,$$

$$Y = u \sin \theta,$$

détermine le lieu cherché.

Si dans l'équation

$$X^2 + Y^2 = a^2 Z^2 + u^2 + 2aZu \cos \theta$$

nous remplaçons $\cos \theta$ par sa valeur tirée de (2), nous aurons l'équation d'une seconde surface sur laquelle est située la courbe.

Cette équation est la suivante :

$$b^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = (2b^2 - a^2 - 1)R^2.$$

Elle représente une sphère. C'est la sphère de Monge.

VI.

L'équation qui donne les rayons de courbure principaux de la surface en un point (Z, θ) est (1^{re} Partie, § II)

$$(1) \quad BR^2 - \sqrt{A^2 + 1} [(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu]R - (A^2 + 1)^2 u = 0.$$

Nous allons terminer cette étude en cherchant certaines surfaces pour lesquelles il existe entre ces rayons de courbure des relations particulières.

Nous avons déjà trouvé (§ IV) que les surfaces de révolution sont les seules pour lesquelles le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ puisse demeurer constant.

L'expression du carré de la courbure totale est

$$\frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{B}{(A^2 + 1)^2 u};$$

pour que cette courbure totale reste constante, il faut que l'équation du quatrième degré en $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$(2) \quad (A^2 + 1)^2 u + BK^2 = 0$$

soit satisfaite identiquement, en posant

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{K^2}.$$

Si la surface est de révolution, c'est-à-dire si $x' = y' = 0$, l'équation (2) est une équation différentielle du second ordre pour déterminer u . Si x' et y' n'étaient pas nuls en même temps, nous devrions avoir, en nous reportant aux équations (9) du § IV,

$$(3) \quad \begin{cases} A_2 = A_1, \\ A_1 - A_3 + A_5 = 0. \end{cases}$$

Mais, dans le cas présent,

$$A_1 = ux'^4, \quad A_2 = 4ux'^3y', \quad A_3 = 6ux'^2y'^2, \quad A_4 = 4ux'y'^3, \quad A_5 = uy'^4,$$

et les équations (3) sont

$$\begin{aligned} x'y'(x'^2 - y'^2) &= 0, \\ x'^4 - 6x'^2y'^2 + y'^4 &= 0, \end{aligned}$$

qui n'ont d'autre solution que $x' = 0, y' = 0$; et la surface doit être de révolution. Alors l'équation à intégrer est

$$u = - \frac{K^2 u''}{(u'^2 + 1)^2}.$$

Multipliant les deux membres par $2u'$ et intégrant, il vient, en désignant par K' une nouvelle constante,

$$u^2 + K'^2 = \frac{K^2}{u'^2 + 1},$$

d'où l'on tire

$$dZ = du \sqrt{\frac{u^2 + K'^2}{K^2 - K'^2 - u^2}}.$$

Cette équation, qui peut être considérée comme l'équation différentielle du méridien de la surface cherchée, fait apercevoir immédiatement deux cas où l'on peut trouver l'intégrale par les fonctions élémentaires.

1° $K' = 0$; alors

$$dZ = \frac{u du}{\sqrt{K^2 - u^2}},$$

et

$$Z + C = -\sqrt{K^2 - u^2}.$$

Le méridien est un cercle et la surface est une sphère.

2° $K'^2 = K^2$; l'équation devient

$$dZ = du \sqrt{\frac{u^2 + K^2}{-u^2}}.$$

Pour que la surface soit réelle, il faut que K^2 soit négatif. Représentons-le par $-a^2$; alors

$$dZ = du \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}.$$

Posant $u = a \sin \alpha$, $du = a \cos \alpha d\alpha$,

$$\pm dZ = \frac{a \cos^2 \alpha d\alpha}{\sin \alpha} = a \frac{d\alpha}{\sin \alpha} - a \sin \alpha d\alpha.$$

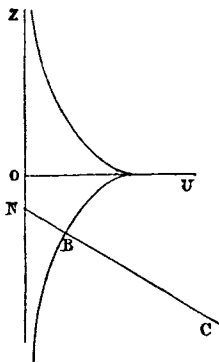
En intégrant, nous pouvons supposer nulle la constante arbitraire qui s'introduirait, car cela revient à changer l'origine sur l'axe des Z , et nous aurons

$$\pm Z = a \log \tan \frac{\alpha}{2} + a \cos \alpha = a \log \tan \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{u}{a} \right) + \sqrt{a^2 - u^2}.$$

Il suffit de donner à u des valeurs positives. Nous voyons qu'il doit rester $< a$. Nous prendrons pour $\arcsin \frac{u}{a}$ le plus petit des arcs positifs qui ont ce sinus, de sorte que cet arc variera de 0 à $\frac{\pi}{2}$; s'il variait

de 2π à $\frac{5\pi}{2}$, de 4π à $\frac{9\pi}{2}$, etc., la tangente reprendrait les mêmes valeurs. La courbe se construit aisément. Elle est symétrique par rapport à l'axe Ou (fig. 16). Si l'on prend sur cet axe une longueur $OA = a$, le

Fig. 16.



point A est un point de rebroussement; la courbe tourne sa convexité vers OZ et est asymptote à cette droite. Si en un point quelconque B on mène la normale BN et le rayon de courbure BC, on a

$$BN \times BC = a^2.$$

De sorte que, si la courbe est tracée, on peut déduire les divers points de sa développée par une construction simple des points correspondants de la courbe.

VII.

La somme des rayons de courbure principaux est donnée par la formule

$$(1) \quad R_1 + R_2 = \frac{\sqrt{A^2 + 1} [(r' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu]}{B}.$$

Si nous supposons que $x' = 0$, $y' = 0$, la somme est une simple fonction de u et de ses deux premières dérivées par rapport à Z ; on peut donc trouver des surfaces de révolution pour lesquelles cette somme demeure constante. Je dis de plus que ce sont les seules du

groupe que nous étudions, en dehors du cas, que nous examinerons plus tard, où la somme serait nulle.

En effet, en désignant par K la somme donnée, l'équation du quatrième degré en $\cos \theta$ et $\sin \theta$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & [(x' \cos \theta + y' \sin \theta)^2 + 2u'(x' \cos \theta + y' \sin \theta) + u'^2 + 1] \\ & \times [(2u'x' - ux'') \cos \theta + (2u'y' - uy'') \sin \theta + x'^2 + y'^2 + u'^2 + 1 - uu'']^2 \\ & - K^2 (x'' \cos \theta + y'' \sin \theta + u'')^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

doit être identique.

Reprenons les équations (9) du § IV :

$$A_1 - A_3 + A_5 = 0,$$

$$A_2 = A_4 = -C_2,$$

$$A_3 - 2A_5 + C_1 - C_3 = 0,$$

$$A_5 + C_3 + E = 0,$$

$$B_1 = B_3 = -D_1,$$

$$B_2 = B_4 = -D_2.$$

On a ici

$$A_1 = x'^2 (2u'x' - ux'')^2,$$

$$A_2 = 2x'y' (2u'x' - ux'')^2 + 2x'^2 (2u'y' - uy''),$$

$$A_3 = x'^2 (2u'y' - uy'')^2 + y'^2 (2u'x' - ux'')^2 + 4x'y' (2u'x' - ux'') (2u'y' - uy''),$$

$$A_4 = 2x'y' (2u'y' - uy'')^2 + 2y'^2 (2u'x' - ux'') (2u'y' - uy''),$$

$$A_5 = y'^2 (2u'y' - uy'')^2.$$

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$x'y' [(2u'x' - ux'')^2 - (2u'y' - uy'')^2] = (y'^2 - x'^2) (2u'x' - ux'') (2u'y' - uy''),$$

$$4x'y' (2u'x' - ux'') (2u'y' - uy'') = (x'^2 - y'^2) [(2u'x' - ux'')^2 - (2u'y' - uy'')^2].$$

Si nous les multiplions membre à membre, nous obtenons

$$(2u'x' - ux'') (2u'y' - uy'') [(2u'x' - ux'')^2 - (2u'y' - uy'')^2] (x'^2 + y'^2)^2 = 0.$$

x' et y' ne pouvant être nuls en même temps, on doit avoir

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & 2u'x' - ux'' = 0, \\ & 2u'y' - uy'' = 0. \end{aligned} \right.$$

Alors l'équation (2) s'abaisse au second degré en $\cos\theta$ et $\sin\theta$; u ne pouvant être nul, quel que soit Z , les équations (3) nous montrent que

$$x'y'' - y'x'' = 0,$$

c'est-à-dire que la courbe (xy) est dans un plan parallèle à l'axe des Z . Nous pouvons supposer ce plan pris pour plan des ZX , et alors $y' = 0$, $y'' = 0$, de sorte que l'équation (2) devient, en posant $x'^2 + u'^2 + 1 - uu'' = M$,

$$(4) \quad M^2(x'^2 \cos^2 \theta + 2u'x' \cos \theta + u'^2 + 1) - K^2(x''^2 \cos^2 \theta + 2x''u'' \cos \theta + u''^2) = 0,$$

et les conditions pour qu'elle soit identique sont

$$(5) \quad \begin{cases} M^2 x'^2 &= K^2 x''^2, \\ M^2 u' x' &= 2K^2 x'' u'', \\ M^2 (u'^2 + 1) &= K^2 u''^2, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre

$$2u'x' = ux''.$$

Supposons d'abord M et K différents de 0; en divisant membre à membre les deux premières équations (5), on obtient

$$\frac{x'}{u'} = \frac{x''}{2u''},$$

et par suite

$$uu'' - u'^2 = 0,$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$u = Ce^{az},$$

C et a étant deux constantes arbitraires. Alors

$$u' = aCe^{az},$$

$$u'' = a^2 Ce^{az},$$

$$\frac{x''}{x'} = 2a,$$

d'où

$$x' = C'e^{2az},$$

C' étant une nouvelle constante. Posons $e^{aZ} = t$; on devrait avoir, quel que fût t ,

$$(C'^2 t^4 + a^2 C^2 t^2 + 1)^2 (a^2 C^2 t^2 + 1) = K^2 a^4 C^2 t^2,$$

ce qui est impossible, et nous voyons que, pour que la somme des rayons de courbure puisse conserver une valeur constante et différente de 0, il faut que la surface soit de révolution.

Si $M = 0$, $K = 0$, les équations (5) sont satisfaites, et l'on a, pour déterminer les deux fonctions x et u de Z , les deux équations

$$\begin{aligned} x'^2 + u'^2 + 1 - uu'' &= 0, \\ 2u'x' - ux'' &= 0. \end{aligned}$$

De cette dernière on déduit, en intégrant,

$$x' = Cu^2,$$

C étant une constante arbitraire, et la première devient

$$uu'' - u'^2 = C^2 u^4 + 1.$$

En remplaçant u'' par $u' \frac{du'}{du}$ et posant $u'^2 = v$, cette équation se transforme en la suivante,

$$u \frac{dv}{du} - 2v = 2C^2 u^4 + 2,$$

équation linéaire du premier ordre dont l'intégrale se trouve immédiatement et est, en nommant C' une nouvelle constante,

$$v = C^2 u^4 + C' u^2 - 1,$$

et l'on a, par conséquent,

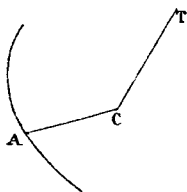
$$(6) \quad \begin{cases} dZ = \frac{du}{\sqrt{C^2 u^4 + C' u^2 - 1}}, \\ dx = \frac{Cu^2 du}{\sqrt{C^2 u^4 + C' u^2 - 1}}. \end{cases}$$

Ces deux équations, qui donnent Z et x en fonction de u par des intégrales elliptiques, définissent une surface minima. C'est la surface minima indiquée par Riemann.

A l'égard de cette surface, nous nous bornerons à montrer comment

on peut construire géométriquement les asymptotes et les axes de l'indicatrice d'un point donné, pourvu que l'on connaisse le plan tangent. D'une façon plus générale, proposons-nous de construire les asymptotes de l'indicatrice en un point d'une quelconque des surfaces considérées, connaissant leur angle. Cet angle sera celui dont la formule (4) du § II donne la tangente, c'est-à-dire l'angle des portions des lignes asymptotiques situées d'un même côté du plan horizontal. Rappelons-nous que, A (*fig. 17*) étant un point de la surface, C le centre du cercle cor-

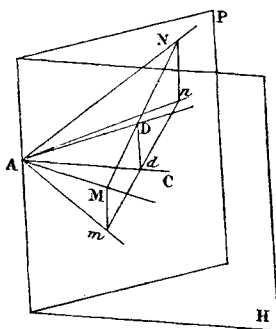
Fig. 17.



respondant et CT la tangente au lieu des centres, les tangentes aux lignes asymptotiques se projettent sur le plan du cercle, parallèlement à CT, suivant deux droites également inclinées sur AC. Le problème à résoudre est alors le suivant :

Considérant un plan quelconque P (*fig. 18*), un plan horizontal H et

Fig. 18.



dans ce dernier une droite quelconque AC, mener par le point A, dans la portion du plan P située au-dessus du plan horizontal, deux droites faisant un angle donné et qui se projettent sur H, parallèlement à une direction donnée, suivant un angle dont AC soit la bissectrice.

Soient AM et AN les deux droites cherchées, et AD la droite de P qui se projette suivant AC; par le point D menons la droite DMN conjuguée de AC par rapport à l'angle MAN, on aura $DM = DN$, et par suite aussi en projection $dm = dn$, ce qui montre que mdn est perpendiculaire à AC; on connaît donc la direction de la droite MDN, et tout revient à construire dans le plan P un triangle AMN, connaissant l'angle A, la direction MN de la base et la médiane AD. Dans le cas présent, D sera le point par lequel passent tous les plans tangents le long du cercle A; en le joignant au point C, centre du cercle, on aura la direction des projetantes; mn sera la direction de la tangente au cercle en A. Si l'on connaît l'angle des lignes asymptotiques, il sera facile d'appliquer la construction précédente. Les bissectrices de l'angle MAN seront les traces des sections principales ou les axes de l'indicatrice. Pour la surface minima, l'angle des asymptotes est droit, et, par suite, du point D comme centre avec DA comme rayon il suffit de décrire une circonférence qui coupe MN aux points cherchés. On pourra donc, pour cette surface, construire les axes et les asymptotes de l'indicatrice en se servant seulement des éléments du premier ordre, tandis que, en général, ces constructions dépendent des éléments du second ordre.

VIII.

La normale à la surface fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{-\cos\theta}{\sqrt{A^2+1}}, \quad \frac{-\sin\theta}{\sqrt{A^2+1}}, \quad \frac{A}{\sqrt{A^2+1}},$$

et par suite, avec le plan horizontal, un angle dont la tangente est A. Appelons v cet angle et ρ le rayon de courbure de la section normale tangente au cercle qui passe par le point considéré sur la surface. En vertu du théorème de Meusnier,

$$u = \rho \cos v = \frac{\rho}{\sqrt{A^2+1}}$$

et

$$\rho = u \sqrt{A^2+1}.$$

Comparant cette expression de ρ à celle de $R_1 + R_2$ que donne la formule (1) du § VII, nous obtenons

$$\frac{R_1 + R_2}{\rho} = \frac{(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu}{Bu}.$$

Ce rapport ne contient $\sin \theta$ et $\cos \theta$ qu'au premier degré, de sorte que nous pourrions disposer des trois fonctions x , y et u de Z de manière qu'il ait une valeur constante quelconque. Nous sommes ainsi amenés à la question suivante :

Chercher, parmi les surfaces engendrées par un cercle dont le plan se déplace parallèlement à lui-même, celles pour lesquelles la somme algébrique des rayons de courbure principaux en chaque point est dans un rapport donné avec le rayon de courbure de la section normale tangente au cercle en ce point.

Représentons le rapport par $-1 - K$; l'équation du problème sera

$$(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 + KBu = 0$$

ou

$$(1) \quad (2u'x' + Kux'') \cos \theta + (2u'y' + Kuy'') \sin \theta + x'^2 + y'^2 + u'^2 + 1 + Kuu'' = 0,$$

et nous aurons, pour déterminer les trois fonctions x , y et u de Z , les trois équations différentielles du second ordre

$$(2) \quad \begin{cases} 2u'x' + Kux'' = 0, \\ 2u'y' + Kuy'' = 0, \\ x'^2 + y'^2 + u'^2 + 1 + Kuu'' = 0. \end{cases}$$

Les deux premières donnent

$$\frac{x''}{x'} - \frac{y''}{y'} = 0,$$

qui s'intègre immédiatement et montre que la courbe lieu des centres doit être située dans un plan perpendiculaire aux plans des cercles générateurs. En supposant, ce que l'on peut toujours faire, ce plan pris pour plan des ZX , les équations (2) se réduisent aux deux suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} 2u'x' + Kux'' = 0, \\ x'^2 + u'^2 + 1 + Kuu'' = 0. \end{cases}$$

La première s'écrit

$$\frac{x''}{x'} + \frac{2}{K} \frac{u'}{u} = 0,$$

d'où, en désignant par C une constante arbitraire,

$$(4) \quad x' = C u^{-\frac{2}{K}},$$

et, par suite, u est donné par l'équation différentielle

$$(5) \quad K u u'' + u'^2 + 1 + C^2 u^{-\frac{4}{K}} = 0.$$

Si nous remplaçons u'' par $u' \frac{du'}{du}$ et si nous posons $u^2 = t$, cette équation devient

$$(6) \quad K u \frac{dt}{du} + 2t = -2C^2 u^{-\frac{4}{K}} - 1,$$

équation linéaire dont l'intégrale est

$$t = C^2 u^{-\frac{4}{K}} + C' u^{-\frac{2}{K}} - 1,$$

en désignant par C' une nouvelle constante arbitraire. Par suite, Z et x sont donnés en fonction de u par les intégrales suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} dZ = \frac{du}{\sqrt{C^2 u^{-\frac{4}{K}} + C' u^{-\frac{2}{K}} - 1}}, \\ dx = \frac{C u^{-\frac{2}{K}} du}{\sqrt{C^2 u^{-\frac{4}{K}} + C' u^{-\frac{2}{K}} - 1}}. \end{cases}$$

L'équation qui a servi de point de départ à notre calcul,

$$(\gamma' \cos \vartheta - x' \sin \vartheta)^2 + A^2 + 1 + K B u = 0,$$

nous montre que, si K est positif, Bu sera négatif pour tous les points de la surface, de sorte que l'équation

$$B dZ^2 - u d\vartheta^2 = 0$$

des lignes asymptotiques aura ses racines imaginaires. Les deux cour-

bures principales de la surface seront de même sens, et par suite de même sens que la courbure de la section normale tangente au cercle. Or, le rayon de courbure de cette dernière est évidemment la distance du point de la surface au point où la normale rencontre l'axe du cercle. Dans ce cas, nous pouvons dire que les deux rayons de courbure principaux sont dirigés vers l'axe du cercle et que leur somme est à la distance normale du point pris sur la surface à l'axe du cercle comme $1 + K$ est à 1 .

Si, au contraire, K est négatif, Bu est positif pour tous les points de la surface, qui, dès lors, est à courbures opposées. Cherchons quelle interprétation géométrique il faut donner à l'équation dans ce cas.

Reprenons pour cela l'équation qui donne les rayons de courbure principaux :

$$BR^2 - \sqrt{A^2 + 1} [(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu] R - (A^2 + 1)^2 u = 0.$$

En y tenant compte de

$$(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 + KBu = 0,$$

elle peut s'écrire

$$R^2 + (1 + K)u \sqrt{A^2 + 1} R + \frac{(A^2 + 1)^2 K u^2}{(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1} = 0.$$

Nous savons que, lorsque K est positif, les deux rayons de courbure principaux sont dirigés vers l'axe du cercle. Nous pouvons convenir de prendre le radical avec le signe $+$, et la forme des intégrales (7) nous montre qu'on peut se borner à donner à u des valeurs positives, de sorte que nous pouvons considérer $u \sqrt{A^2 + 1}$ comme représentant toujours la valeur absolue du rayon de courbure de la section normale tangente au cercle. Alors nous voyons que le sens positif sur la normale est celui qui est opposé à la direction de la normale qui rencontre l'axe du cercle, car, K étant > 0 , les deux valeurs de R sont négatives. Tant que K restera compris entre 0 et -1 , ce sera le rayon de courbure qui rencontre l'axe qui sera le plus grand; il sera le plus petit au contraire quand K sera < -1 .

Lorsque $K = -1$, les intégrales (7) se réduisent, comme nous devions nous y attendre, aux intégrales (6) du § VII, qui définissent la surface minima.

IX.

Si nous faisons $K = 1$, les formules (7) du § VIII deviennent

$$dZ = \frac{u^2 du}{\sqrt{-u^4 + C'u^2 + C^2}},$$

$$dx = \frac{C du}{\sqrt{-u^4 + C'u^2 + C^2}};$$

elles donnent, comme pour la surface minima, Z et x en fonction de u par des intégrales elliptiques. Si nous remarquons que l'équation des lignes de courbure est

$$B(y' \cos \theta - x' \sin \theta) dZ^2 + [(y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 + Bu] dZ d\theta + u(y' \cos \theta - x' \sin \theta) d\theta^2 = 0,$$

nous voyons que, pour la surface particulière obtenue, cette équation se présentera sous la même forme que celle des lignes asymptotiques et sera

$$B dZ^2 + u d\theta^2 = 0.$$

Celle des lignes asymptotiques est

$$B dZ^2 - u d\theta^2 = 0,$$

de sorte que, les lignes de courbure étant réelles, les lignes asymptotiques seront imaginaires, c'est-à-dire que la surface sera convexe en tous ses points. C'est, du reste, ce que nous pourrions déduire du seul fait que K est positif. Cette surface jouit de la propriété que le point de rencontre de la normale avec l'axe du cercle correspondant est le milieu de la distance des deux centres de courbure principaux. Nous pouvons ajouter que les axes de l'indicatrice se construisent comme les asymptotes dans la surface minima.

Les formules générales (7), § VIII, sont intégrables lorsque $K = \pm 2$.

Si $K = 2$, elles définissent une surface convexe en tous ses points et telle que la somme des deux rayons de courbure principaux est le triple de la normale jusqu'à son point de rencontre avec l'axe du cercle.

Si $K = -2$, elles définissent une surface à courbures opposées dans laquelle la différence entre le rayon de courbure principal qui ne rencontre pas l'axe et celui qui le rencontre est égale à la normale.

Nous prendrons en particulier $C' = 0$, et nous allons chercher les surfaces correspondantes.

1° $K = 2$. Alors

$$dZ = \frac{u du}{\sqrt{C^2 - u^2}} \quad \text{et} \quad Z = \pm \sqrt{C^2 - u^2},$$

en supposant, ce qu'on peut toujours faire, que la constante qu'on devrait ajouter à Z est nulle.

Par suite,

$$u = \sqrt{C^2 - Z^2},$$

et, comme $x' = \frac{C}{u}$,

$$dx = \frac{C dZ}{\sqrt{C^2 - Z^2}},$$

d'où

$$x = C \arcsin \frac{Z}{C},$$

en supposant l'origine déplacée sur l'axe des X d'une façon convenable.

Donc enfin, en faisant $C = 1$,

$$Z = \sin x,$$

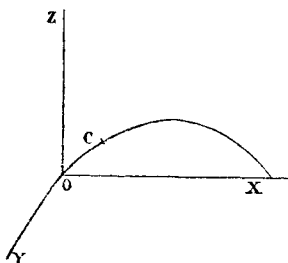
$$u = \cos x,$$

et l'on a le résultat suivant :

Si dans le plan ZX (*fig. 19*) on construit la sinusoïde $OAZ = \sin x$, si en un de ses points C on mène le plan parallèle au plan XY , et que dans ce plan on décrive un cercle ayant pour centre C et pour rayon la

valeur absolue de $\cos x$, ce cercle engendre une surface convexe en chacun de ses points et la somme des rayons de courbure principaux

Fig. 19.



est constamment égale à trois fois le rayon de courbure de la section normale dont la tangente est horizontale.

2° $K = -2$. En faisant encore $C' = 0$ et remplaçant C par $\frac{1}{a^2}$, il vient

$$dZ = \frac{a du}{\sqrt{u^2 - a^2}},$$

d'où l'on déduit, par un calcul connu, et en supposant, comme c'est permis, certaines constantes nulles,

$$u = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right),$$

et, comme $x' = \frac{u}{a}$,

$$x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}} \right).$$

Si nous considérons une même valeur de Z , nous voyons que la valeur de u qui lui correspond est l'abscisse d'une chaînette dont l'équation serait

$$X = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right),$$

et la valeur de x est

$$x = a \frac{dX}{dZ}.$$

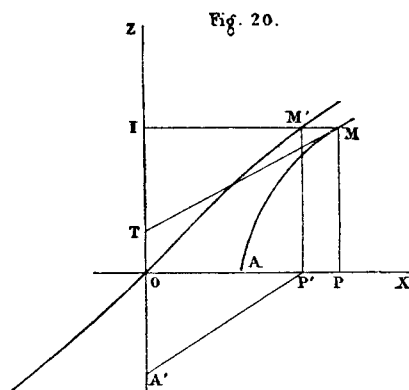
Représentons les fonctions x et u de Z par deux courbes. Construisons la chaînette AM (*fig. 20*) :

$$X = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{Z}{a}} + e^{-\frac{Z}{a}} \right).$$

Son abscisse IM sera la valeur de u correspondant à $Z = MP$. Cherchons le centre M' correspondant. Pour cela, menons la tangente MT :

$$\frac{dX}{dZ} = \tanh MTZ.$$

Si nous prenons $OA' = OA = a$, la parallèle $A'P'$ à MT coupera OX en un point P' dont l'abscisse est celle du point M' cherché. Le lieu



des centres M' est une courbe symétrique par rapport à l'origine O , qui est un point d'inflexion, la tangente d'inflexion étant la bissectrice de l'angle XOZ ; la courbe est asymptote à la chaînette AM du côté des Z positives.

La différence $u^2 - x^2$ est égale à a^2 ; la courbe qui représenterait la relation qui existe entre u et x serait une hyperbole équilatère. Cela pourrait servir à construire géométriquement le point M' , connaissant le point M ; il n'y a qu'à décrire du point M comme centre le cercle de rayon a ; la tangente menée de I à ce cercle est égale à IM' ; connaissant le point M' , on aurait le point P' , et, en menant de M une parallèle à $P'A'$, cette droite MT serait la tangente à la chaînette. Si donc on

connaît le sommet et l'axe de la chaînette et la longueur a , et si l'on détermine un point M de la courbe, on pourra construire géométriquement la tangente en ce point M.

Enfin, si dans les formules générales (7) du § VIII nous supposons donnée à la constante arbitraire C' la valeur u , les deux intégrales deviennent des intégrales binômes,

$$dZ = \left(C^2 u^{-\frac{4}{K}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} du,$$

$$dx = C u^{-\frac{2}{K}} \left(C^2 u^{-\frac{4}{K}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} du,$$

et elles pourront s'intégrer par les fonctions élémentaires dans des cas différents de ceux que nous avons examinés. On voit aisément qu'elles seront intégrables toutes les fois que K sera un nombre pair, positif ou négatif, différent de zéro. L'hypothèse $C = 0$ ferait tomber sur les surfaces de révolution, et, en faisant $K = -1$, on trouverait la surface minima de révolution bien connue.

X.

Nous terminerons par une remarque relative aux ombilics.

Nous avons trouvé, pour l'angle des lignes asymptotiques,

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{A^2 + 1}\sqrt{Bu}}{(\gamma' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu},$$

et nous avons dit qu'il y a en général sur la surface des courbes le long desquelles les lignes asymptotiques font un angle donné. Il est facile de voir qu'il n'en est point ainsi si l'on veut que $\tan \alpha = \sqrt{-1}$, c'est-à-dire que le point soit un ombilic.

On aurait en effet alors

$$4(A^2 + 1)Bu + [(\gamma' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 + A^2 + 1 - Bu]^2 = 0$$

ou

$$[A^2 + 1 + Bu + (\gamma' \cos \theta - x' \sin \theta)^2]^2 - 4Bu(\gamma' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 = 0.$$

Mais, si le point considéré est un ombilic, Bu est négatif, de sorte que cette équation équivaut à deux, et le nombre des ombilics est limité. B ne peut être nul, puisque c'est le coefficient de R^2 dans l'équation aux rayons de courbure principaux; $u = 0$ correspond aux plans tangents horizontaux pour lesquels l'indicatrice est un cercle. En dehors de ce cas, on doit donc avoir

$$y' \cos \theta - x' \sin \theta = 0,$$

$$A^2 + 1 + Bu = 0.$$

Ces deux équations déterminent les ombilics.

Si la surface est de révolution, la première est satisfaite identiquement; il suffit alors que la seconde le soit, c'est-à-dire que

$$u'^2 + 1 + uu'' = 0,$$

ce qui montre que, sur les surfaces de révolution, il y a des lignes d'ombilics qui sont des parallèles. Pour la sphère, et la sphère seule, cette équation est une identité.

Parmi les surfaces que nous avons étudiées, il en est une autre pour laquelle il existe une ligne d'ombilics : c'est celle dont l'équation est

$$A^2 + 1 + Bu + (y' \cos \theta - x' \sin \theta)^2 = 0,$$

pour laquelle les sections principales peuvent être obtenues géométriquement. Le lieu des centres est une courbe plane, et la ligne d'ombilics est la section de la surface par le plan de cette courbe.

Nous pouvons ajouter que, de toutes les surfaces pour lesquelles le rapport

$$\frac{R_1 + R_2}{u \sqrt{A^2 + 1}}$$

est constant, c'est la seule qui ait des ombilics, car, pour ces surfaces, l'équation

$$A^2 + 1 + Bu = 0,$$

combinée avec $y' \cos \theta - x' \sin \theta = 0$, donne

$$(A^2 + 1) \left(1 - \frac{1}{K} \right) = 0,$$

et, par suite, on ne trouve aucun point réel satisfaisant à ces conditions.

Vu et approuvé :

Paris, le 12 décembre 1879.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 13 décembre 1879.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Formule de Lagrange pour le développement en série d'une racine de l'équation

$$z = x + \alpha \varphi(z).$$

Applications de la formule.

Vu et approuvé :

Paris, le 12 décembre 1879.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 13 décembre 1879.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.