N° D'ORDRE
415

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

LE DOCTORAT ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR M. GEORGES QUESNEVILLE

Licencié ès sciences mathématiques,

Ancien élève des laboratoires de la Sorbonne.

1re THÈSE. — DE L'INFLUENCE DU MOUVEMENT SUR LA HAUTEUR DU SON.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 mars 1879, devant la Commission d'examen.

MM. DESAINS, *Président.*

JAMIN,
H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE, } *Examinateurs.*

PARIS

TYPOGRAPHIE DE Vves RENOU, MAULDE ET COCK

144, RUE DE RIVOLI, 144

1879

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
DOYEN	MILNE-EDWARDS, professeur.	Zoologie. Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. S^{te}-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

AVANT-PROPOS

L'étude de l'influence du mouvement sur la hauteur du son a déjà donné naissance à de nombreux Mémoires. D'après l'analyse des travaux faits antérieurement sur ce sujet, la question était loin d'être résolue, à notre avis. Aussi, avons-nous pensé qu'il était indispensable d'en faire une étude approfondie, en montrant d'abord ce que les travaux des physiciens qui nous avaient précédé dans la même voie laissaient d'incomplet; en cherchant ensuite à ajouter quelque chose aux recherches de ces savants.

Notre travail se divise en trois parties.

Dans la première partie, qui forme la partie historique, nous ferons connaître rapidement les auteurs qui se sont occupés de ce sujet. Mais, comme presque tous ont simultanément traité la question au point de vue du son et de la lumière; comme nous n'avons eu en vue que la partie purement acoustique, nous avons volontairement passé sous silence un certain nombre d'auteurs comme Balsamo, Mædler, Petzval et Angstrom.

Des recherches et des discussions des autres physiciens, nous n'avons retenu que la partie qui se rattachait au son, et nous avons montré que deux méthodes bien distinctes avaient été employées pour déterminer la variation de la tonalité d'une source sonore en mouvement par rapport à un observateur : la première, imaginée par Buys-Ballot; la seconde, indiquée par Kœnig.

Buys-Ballot produisait un son musical sur une locomotive animée d'un mouvement de translation déterminé; et des musiciens très-exercés, placés sur la voie, appréciaient à l'oreille le changement de la tonalité produit, quand la locomotive s'approchait ou s'éloignait d'une station.

Dans la méthode de Kœnig, l'observateur faisait vibrer simultanément deux diapasons. Il y avait variation dans le nombre des battements entendus en 1ˢ lorsque l'un des diapasons venait à s'approcher ou à s'éloigner de l'expérimentateur. De sorte que pour celui-ci il semblait qu'il y eût changement dans la tonalité du diapason qui se déplaçait.

Dans la seconde partie de notre travail, nous avons pris comme base de l'appréciation des travaux antérieurs faits par l'une ou l'autre méthode, le Mémoire de Vogel et celui de Schüngel : Mémoires les plus récents en même temps qu'ils étaient les plus complets.

Enfin, la troisième partie contient nos propres recherches faites par la méthode des battements. Ce qu'il y a de nouveau dans celles-ci c'est le procédé graphique que nous avons introduit pour apprécier les battements.

M. Schüngel les déterminait à l'oreille, lorsqu'il croyait entendre leur maximum d'intensité. Il lui était impossible, comme nous l'avons montré, de ne pas se tromper dans ces conditions. Il ne pouvait, en outre, apprécier les fractions de battement. Or, c'est précisément dans les fractions de battement que les nombres calculés, selon la théorie de Doppler, pourraient peut être différer de ceux que l'on trouve expérimentalement. Aussi ce que la méthode des battements pouvait présenter de rigoureux disparaissait entre les mains de M. Schüngel, qui l'avait appliquée le premier.

Nous pensons avoir réussi dans nos recherches ; et nous croyons pouvoir affirmer que la détermination de la vitesse de propagation du son par la méthode des battements, proposée par M. Schüngel, ne pourra jamais donner que des résultats inexacts.

DE

L'INFLUENCE DU MOUVEMENT

SUR L

HAUTEUR DU SON

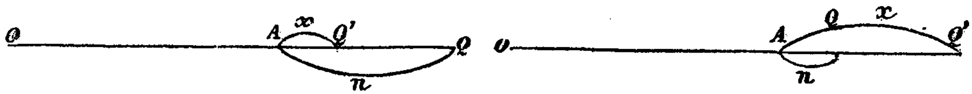
PREMIÈRE PARTIE

HISTORIQUE

Doppler eut le premier le mérite d'appeler l'attention des physiciens sur les modifications qui devaient se produire, pour un observateur, dans les ondes sonores ou lumineuses, lorsque la distance de l'origine des ondes à l'observateur devenait une fonction du temps. Il exposa ses idées dans un Mémoire sur les *couleurs des étoiles doubles*, publié à Prague, en 1842 (1).

Doppler, dans son Mémoire, examine ce qu'il advient lorsque, l'observateur étant immobile, la source sonore vient à se déplacer dans sa direction; et lorsqu'au contraire, l'origine des ondes restant fixe, l'observateur s'approche ou s'éloigne de celle-ci.

PREMIER CAS. — OBSERVATEUR IMMOBILE



Soit Q l'origine éloignée des ondes, O l'observateur : supposons que la source sonore se meuve avec une vitesse V′, en s'approchant ou s'éloignant de celui-ci, pendant que la première onde va de Q en A dans un nombre de secondes *n* ; et que la source sonore elle-même soit venue de Q en Q′ dans le même temps. Soit encore V la vitesse du son.

Pendant que la première onde sonore ira de Q en A et aura parcouru un

(1) Résumé dans Moigno, *Répertoire d'optique moderne*, t. III, p. 1165 à 1181.

espace Vn, celui parcouru par la source sonore sera $V'n$; et la seconde onde sera séparée de la première par l'intervalle de temps x, nécessaire au parcours de l'espace Q'A. On aura donc la formule générale :

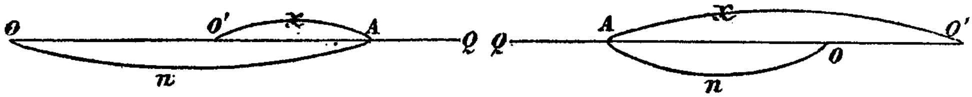
$$Vn \pm V'n = Vx$$

d'où :

$$x = n\left(\frac{V \pm V'}{V}\right). \tag{1}$$

Le signe — doit être pris quand la source sonore s'approche et le signe + quand elle s'éloigne.

DEUXIÈME CAS. — SOURCE SONORE FIXE ET OBSERVATEUR MOBILE



Les lettres ayant toujours le même sens que précédemment, et x étant le temps que la seconde onde emploie à aller de A en O' pendant que l'observateur va de O en O', on voit, d'après la figure, que l'on a la formule générale :

$$Vx \pm V'x = Vn.$$

On en déduit :

$$x = n\,\frac{V}{V \pm V'}. \tag{2}$$

On prendra le signe + quand l'observateur s'approchera de la source sonore, et le signe — quand il s'en éloignera.

Voilà les formules de Doppler, telles qu'il les a présentées. Il fait remarquer que la différence entre les formules (1) et (2) prouve qu'en supposant les circonstances les mêmes, il n'est pas indifférent que ce soit l'observateur qui se meuve, la source restant immobile, ou celle-ci qui se déplace, l'observateur restant en repos.

On peut remplacer les formules (1) et (2), dans lesquelles entrent les durées des vibrations, par d'autres formules dans lesquelles on introduira la tonalité de la source sonore, c'est-à-dire les nombres de vibrations N, N' entendues en 1^s; si N est le nombre correspondant à n et N' à x, on a évidemment :

$$\frac{n}{x} = \frac{N'}{N}$$

de sorte que les formules (1) et (2) s'écriront en substituant les valeurs de n et de x.

(1 *bis*) $$N' = N \frac{V}{V \mp V'}$$

(2 *bis*) $$N' = N \frac{V \pm V'}{V}$$

On verra dans la troisième partie de notre travail qu'il est avantageux de présenter les formules de Doppler sous une autre forme, dans le cas où les vitesses d'entraînement de la source sonore ou de l'observateur sont trop faibles par rapport à celle du son pour que les formules précédentes soient assez sensibles.

Quelques années après que le Mémoire de Doppler eut paru, M. Buys-Ballot fit, les 3 et 5 juin 1845, sur le chemin de fer d'Utrecht à Maarsen, une série d'expériences pour vérifier les formules de Doppler. Il arriva à cette conclusion que les nombres obtenus par lui vérifiaient assez généralement la théorie. Son Mémoire a paru dans les *Annales de Poggendorff* (1).

Pour l'appréciation de ce Mémoire, nous renvoyons à la critique présentée par nous, dans notre seconde partie, des expériences de Vogel. Citons aussi Scott Russel qui fit, à peu près à la même époque, quelques expériences analogues à celles de Buys-Ballot, et arrivons aux expériences de M. Fizeau.

M. Fizeau lut, en 1848, devant la Société philomatique, une note dans laquelle il exposait des expériences que l'on pouvait faire à l'aide d'une machine qu'il avait inventée, pour vérifier les *effets du mouvement sur le ton des vibrations sonores*. Il imprimait à une roue, portant une carte à sa circonférence, un mouvement de rotation; la carte rencontrait une série de dents fixées sur un support immobile. C'était, pour ainsi dire, l'inverse de l'expérience de Savart, l'arc denté étant supposé situé horizontalement. Pour une certaine vitesse de rotation, l'observateur placé à quelques mètres en *avant* de l'appareil entendait, par exemple, un *ut*, et en *arrière* un *mi*. Nous ne savons si M. Fizeau a fait des expériences pour vérifier les formules de Doppler, car la Notice que l'on trouve dans les *Annales de chimie et de physique* (2) ne renferme que la description de l'appareil de M. Fizeau. Les nombres publiés sont simplement les vitesses de rotation (calculées *a priori*) qu'il faudrait imprimer à la roue pour entendre l'octave, la quinte, etc., d'un son fondamental.

Nous arrivons maintenant aux expériences de Mach, qui en 1860, 1861, 1862, employa une méthode analogue à celle de M. Fizeau. On en trouve le détail dans les *Annales de Poggendorff* (3). L'appareil auquel cet

---

(1) *Poggendorff's, Annalen* 1845, t. LXVI, n° 11.
(2) *Annales de chimie et de physique*, 1870. 4e série, t. XIX.
(3) *Poggendorff's Annalen*, t. CXII et CXVI.

auteur s'est finalement arrêté est celui aujourd'hui bien connu sous le nom d'*appareil de Mach*.

Il consiste en une longue tige creuse, terminée à une de ses extrémités par un sifflet, et susceptible de prendre, au moyen d'une manivelle, un mouvement de rotation rapide. La tige communique par son milieu avec un soufflet qui amène un courant continu d'air. A l'aide d'un compteur, on peut déterminer le nombre de tours en une seconde. On peut ainsi constater, en se plaçant dans le voisinage de cet appareil, que le son monte ou descend. Il y a périodiquement changement de ton. Partout où l'on se met, à l'approche, on entend un son plus haut, et au départ un son plus grave. Lorsqu'on se place dans l'axe de rotation, le son reste constant. — Il résulte des expériences de l'auteur, que la hauteur de la tonalité est changée par le mouvement, dans le sens de la théorie de Doppler. On ne devra évidemment regarder cet appareil que comme susceptible de montrer la variation de la tonalité dans le cas du mouvement de la source sonore. Mais on ne saurait s'en servir pour vérifier exactement les formules de Doppler. On peut remarquer que, dans son genre, il est moins parfait que l'appareil de Fizeau; car le sifflet fait entendre un son pendant toute la durée d'une rotation, et ce n'est que pour la position verticale de la tige que le phénomène a lieu réellement.

C'est en 1865 que s'introduisit, pour la première fois, la méthode des battements pour la démonstration du changement de la tonalité d'un diapason qui s'approche ou s'éloigne d'un observateur. Voici en quels termes M. Radau, dans un Mémoire sur les battements et les sons résultants, parle de ce nouveau procédé (1) :

« Une expérience très-curieuse, due à M. Kœnig, consiste à observer à l'aide des battements l'influence des mouvements d'un corps sonore sur sa tonalité. On prend deux diapasons ut_4 accordés pour donner exactement *quatre* battements (1016 à 1024 *v. s.*) par seconde. On les place d'abord à côté l'un de l'autre, puis l'on rapproche le plus grave des deux de l'oreille, d'environ $0^m.65$, tout en continuant de compter les battements. La longueur d'onde de l'ut_4 est à peu près égale à $0^m.65$; l'oreille reçoit donc une vibration double en plus du diapason grave pendant le temps employé à le déplacer, comme si la note de ce diapason s'élevait d'une vibration double; et la conséquence est que l'on constate la perte d'un battement. Si c'est le plus aigu des deux diapasons que l'on rapproche de l'oreille, on entend un battement de trop. » M. Kœnig n'est pas allé plus loin.

On voit que toutes les expériences faites jusqu'à cette époque étaient loin d'être concluantes et n'avaient pas fait beaucoup avancer la question. Aussi

(1) *Théorie des battements*. Paris, 1865.

Vogel crut devoir reprendre, en 1876, les expériences de Buys-Ballot faites trente ans auparavant. Nous les apprécierons plus loin.

En 1872, M. Mayer (1) publia des *expériences acoustiques tendant à démontrer que la translation d'un corps en vibration donne lieu à une longueur d'onde différente de celle que produit le même corps vibrant dans une position fixe.* Mayer fit ces expériences avec quatre diapasons n^os^ 1, 2, 3, 4. Les n^os^ 1 et 2 faisaient 512 vibrations simples; le n° 3 faisait 508 vibrations; le n° 4, 516 vibrations par seconde. Les deux derniers diapasons donnaient donc deux battements par seconde avec les deux premiers diapasons. Le diapason n° 1 était placé devant une lanterne magique; une petite balle de liége, suspendue par un filament de soie, effleurait une de ses branches. Le diapason n° 2, étant mis en vibration à une distance qui variait de $9^m.15$ à $18^m.30$ du diapason n° 1, faisait encore vibrer ce dernier à l'unisson, ainsi que l'indiquait l'écartement de la balle. Lorsqu'au contraire le diapason n° 2 était approché avec une certaine vitesse du diapason n° 1, la balle de liége restait en contact, ce qui montre que les deux diapasons n'étaient plus à l'unisson. Dans cette expérience, dès que l'observateur se fut arrêté, il vit sauter la balle de liége. Les résultats furent les mêmes, lorsqu'au lieu de s'approcher du diapason n° 1, l'observateur s'en éloignait. Enfin, les dernières expériences furent faites avec les diapasons n^os^ 3 et 4. Lorsque ces deux diapasons, mis en vibration, restaient immobiles à une distance de $9^m.15$ du diapason n° 1, on n'observait aucune vibration de ce dernier. Mais la balle fut subitement déplacée lorsqu'on approchait ou qu'on éloignait l'un ou l'autre des deux diapasons avec une vitesse de $2^m.70$ du n° 1. Ceci montrait que ces deux diapasons de 508 et 516 vibrations se mettaient à l'unisson de 512.

Telles sont, en résumé, les expériences de M. Mayer. On voit qu'elles ne laissent pas d'être incomplètes, puisque, dans ces expériences, l'observateur n'a donné aucune mesure précise des longueurs parcourues par les diapasons mobiles. Il n'indiquait pas si la balle était mise en mouvement au moment même où l'un des diapasons aurait parcouru une longueur d'onde. Du reste, l'observateur annonçait qu'il avait l'intention de reprendre ses expériences de manière à faire une étude quantitative des phénomènes, « en employant un appareil essentiellement semblable, dans son action, à celui précédemment décrit. »

Nous n'avons trouvé aucun Mémoire de M. Mayer sur ce sujet depuis cette époque; il est donc probable qu'il n'a pas poussé plus loin ses expériences. Mais nous croyons devoir faire des observations au sujet de la méthode qu'il préconisait. Quelle que soit l'autorité du physicien américain, on ne peut

(1) *Comptes-rendus* de l'Académie des sciences. — *Annales de Poggendorff*, 1872.

s'empêcher de mettre en doute la valeur de ces expériences. D'après lui, en effet, deux diapasons exactement à l'unisson, qui s'influencent à une distance de 18 mètres, cesseraient d'avoir aucune influence l'un sur l'autre dès que l'un des diapasons est en mouvement, puisque, d'après cet observateur, la balle est complétement fixe dans ce dernier cas. Or, avant que le diapason mobile ait parcouru une ou deux longueurs d'onde, quand même le chemin parcouru est une fraction aussi petite que l'on veut d'une longueur d'onde, lorsque, par conséquent, les deux diapasons sont aussi voisins de l'unisson que l'on veut, dans ce cas, cependant, ils ne s'influenceraient pas! Cela n'est pas probable, et nous pouvons, de plus, faire une expérience en contradiction formelle avec l'hypothèse faite par M. Mayer, à savoir que deux diapasons qui ne sont pas exactement à l'unisson n'ont aucune influence l'un sur l'autre.

Prenons deux diapasons, l'un ut_4 de 1024 vibrations et l'autre de 1016 vibrations; si nous plaçons ces deux diapasons sur des caisses isolées et à côté l'un de l'autre; en donnant un coup d'archet au diapason ut_4 et arrêtant aussitôt avec la main son mouvement vibratoire, nous entendrons très-distinctement le second diapason qui vibre, et cependant ces diapasons donnent quatre battements à la seconde; à plus forte raison si le nombre des battements avait été seulement de deux. D'après cela, on doit admettre que si M. Mayer avait repris ses expériences, il aurait adopté un autre mode d'expérimentation. Il lui aurait été impossible de trouver par sa méthode une relation exacte entre le chemin parcouru par son diapason et l'instant précis où le diapason fixe entrait en vibration. Il est certain, en effet, que les mouvements vibratoires envoyés par les n^{os} 2, 3, 4, fixes ou mobiles, s'ajoutaient pour mettre en vibration les branches du diapason ut_4. Donc, si l'appareil avait été suffisamment sensible, la balle de liége aurait dû toujours se déplacer dans les expériences de M. Mayer. D'un autre côté, si l'appareil avait été assez sensible, le maximum du déplacement de la balle de liége aurait dû coïncider avec une longueur d'onde parcourue. Comment, alors, aurait-on pu mesurer comparativement ces deux quantités? La seule chose importante, en effet, était de déterminer si, pour une longueur parcourue, il y avait exactement une vibration double de plus. Or, nous ne voyons pas comment M. Mayer aurait pu, avec son appareil, arriver à la détermination exacte de ce résultat. Aussi la question fut reprise par Schüngel en 1875. Cet observateur employa la méthode des battements, comme nous le verrons dans la seconde partie de ce travail.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

EXPÉRIENCES DE M. VOGEL

M. Vogel a publié ses observations sans les faire suivre d'aucune discussion (1). Il s'est contenté, dans son Mémoire, de comparer les nombres obtenus par l'expérience à ceux que l'on pouvait calculer par les formules de Doppler. Il fait remarquer qu'il y a des différences tantôt positives, tantôt négatives, entre les nombres observés et calculés. Non-seulement il ne s'occupe pas d'en donner l'explication, mais encore il déclare que l'accord entre l'observation et le calcul est très-satisfaisant.

Pour discuter les observations de Vogel, nous avons admis l'exactitude des formules de Doppler et nous avons cherché à déterminer dans quel sens devaient marcher les erreurs d'observation quand la machine s'approchait et lorsqu'elle s'éloignait de l'observateur. Nous sommes alors arrivé à un résultat en contradiction avec celui que M. Vogel avait annoncé. Nous avons montré, en effet, comme conséquence de ses propres expériences, que si l'observateur appréciait *trop haut* le son produit par le sifflet de la locomotive quand elle s'approchait de lui, il devait encore l'évaluer *trop haut* lorsqu'elle s'éloignait.

Or, ce premier résultat était très-important à établir, car la vitesse du son c déduite des formules de Doppler en fonction de la tonalité à l'approche et au départ est représentée par la formule :

$$c = \frac{Nv + N'v'}{N - N'}$$

v, v' étant les vitesses de la locomotive dans les deux cas, et N, N' les tonalités correspondantes observées. De sorte que quand bien même il y aurait eu des erreurs d'observation, comme elles étaient dans le même sens et que

(1) *Annales de Poggendorff*, 1876.

N, N′ étaient des grands nombres, elles disparaissaient au dénominateur et l'on pouvait ainsi déterminer rigoureusement la vitesse du son.

Mais nous ne nous sommes pas arrêté à ce premier résultat, et nous avons calculé les erreurs d'observation dans chaque expérience. Nous avons ainsi établi les formules (F) par lesquelles nous avons pu calculer la tonalité à l'approche et au départ, débarrassée de toute équation personnelle. Il nous était alors permis de déterminer avec certitude la vitesse du son. Nous avons ainsi obtenu pour celle-ci des valeurs qui pouvaient varier de 318^m à 370^m dans une première série d'expériences; et, dans une seconde série, de 286^m à 376^m. Fallait-il attribuer ces différences à l'inexactitude des formules de Doppler? Évidemment non. Car, dans ce dernier cas, la vitesse obtenue aurait pu différer de celle du son, mais les différences n'auraient pas été tantôt positives, tantôt négatives.

Il est donc résulté pour nous des expériences de Vogel qu'il y a *modification de la vitesse de propagation du son produit par le sifflet d'une locomotive en mouvement.*

Or M. Vogel, n'ayant pas tenu compte de cette anomalie, devait nécessairement trouver des différences tantôt positives, tantôt négatives, entre les nombres qu'il avait observés et ceux qu'il calculait en admettant une vitesse du son de 350^m à 28°. On voit qu'il manque un élément à ces observations : la connaissance directe de la vitesse du son dans chacune des expériences. Donc, ces dernières ne peuvent encore nous permettre d'accepter ou de rejeter les formules de Doppler.

ANALYSE

M. Vogel, reprenant les expériences de Buys-Ballot, fit sur le chemin de fer de Cologne à Minden une série d'observations très-remarquables par leur exactitude. Mais le soin avec lequel il a opéré nous permettra de tirer une des conséquences les plus imprévues de ses expériences et qui avait échappé à M. Vogel, à savoir : que la vitesse de propagation d'une onde sonore, émise par le sifflet d'une locomotive en mouvement, doit être différente de celle que l'on observerait si la locomotive était en repos.

Or, M. Vogel n'ayant pas tenu compte de cette anomalie, n'ayant pas préalablement déterminé la vitesse de propagation du son émis par le sifflet d'une locomotive en mouvement; il en résulte que ses expériences ne peuvent, jusqu'à de nouvelles recherches, servir à vérifier les formules de Doppler.

Tout le travail de M. Vogel se résume dans le tableau suivant, dans lequel Z représente la locomotive qui s'approche et W qui s'éloigne de l'observateur.

EXPÉRIENCES	Direction.	Vitesse.	Observé.	Calculé.	Différences.
1. — Vitesse du son : 349m.5 à 26°.5........	Z	18.5	2089.0	2078.2	— 10.8
Son de la locomotive au repos : 1968.3.	W	18.8	1857.9	1867.8	+ 9.9
Observation : de 10h.45m.8s à 10h.48m.28s					
2. — Vitesse du son : 350m.6 à 28°.3........	Z	19.3	2118.2	2111.8	— 6.4
Son de la locomotive au repos : 1994.5.	W	19.6	1878.1	1889.0	+ 10.9
Observation : de 4h.36m.27s à 4h.39m.39s					
3. — Vitesse du son : 350m.6 à 28°.3........	Z	15.0	2092.9	2089.8	— 3.1
Son de la locomotive au repos : 1998.1.	W	15.8	1912.2	1914.1	+ 1.9
Observation : de 4h.51m.18s à 4h.55m.35s					
4. — Vitesse du son : 350m.6 à 28°.3........	Z	19.5	2185.5	2192.2	+ 6.7
Son de la locomotive au repos : 2069.0.	W	19.9	1964.7	1959.1	— 5.6
Observation : de 5h.11m.7s à 5h.14m.18s.					
5. — Vitesse du son : 350m.6	Z	7.75	1943.7	1934.4	— 9.3
Son de la locomotive au repos : 1891.6.	W	7.75	1842.3	1850.7	+ 8.4
Durée de l'observation : 1m.4s.5.					
6. — Vitesse du son : 350m.6...............	Z	8.62	1943.7	1935.9	— 7.8
Son de la locomotive au repos : 1886.4.	W	8.62	1836.4	1843.0	+ 6.6
Durée de l'observation : 58s.0.					
7. — Vitesse du son : 350m.8...............	Z	7.58	1791.0	1789.5	— 1.5
Son de la locomotive au repos : 1750.8.	W	7.58	1714.1	1713.8	— 0.3
Durée de l'observation : 66s.0.					
8. — Vitesse du son : 351m.5...	Z	7.52	1652.6	1654.3	+ 1.7
Son de la locomotive au repos : 1618.9.	W	7.52	1587.8	1585.0	— 2.8
Durée de l'observation : 66s..5.					

Les nombres calculés l'ont été par les deux formules de Doppler :

$$N = n_0 \frac{c}{c - v} \qquad N' = n_0 \frac{c}{c + v'}$$

c étant la vitesse du son, v, v' la vitesse de la locomotive qui s'approche ou s'éloigne, n_0 le nombre de vibrations émis par le sifflet de la locomotive à l'état de repos, N, N' les nouveaux nombres de vibrations quand la locomotive s'approche et lorsqu'elle s'éloigne de l'observateur.

Dans les expériences 3, 4, 5, 7, 8, l'auteur avait négligé d'indiquer la hauteur du son de la locomotive à l'état de repos; nous l'avons déterminée à l'aide des nombres calculés. Dans l'expérience 4, le son de la locomotive à l'état de repos que l'on déduit des deux nombres calculés 2192.2 et 1959.1 est 2069.0. Si on le déduit de la vitesse du son qui est connue et du premier nombre 2192.2, on obtient 2070.2; si on le déduit du second nombre 1959.1, on obtient 2069.1. Les deux nombres donnés par l'auteur sont donc légèrement inexacts. En adoptant le nombre 2069.0, ces deux nombres doivent être ainsi modifiés : *2190.8-1959.9*. Dans l'expérience 6, l'auteur a donné pour la locomotive à l'état de repos le nombre de vibrations 1886.4. Les nombres calculés doivent être ainsi modifiés : *1933.7-1841.1* au lieu de 1935.9-1843.0, nombres qui correspondraient à

1888.3 vibrations de la source sonore à l'état de repos. Tous les autres nombres calculés ont été vérifiés et reconnus exacts ou concordants.

La conclusion de l'auteur est que « *l'accord entre l'observation et le calcul est tel qu'on ne peut espérer davantage* ». Il remarque, en outre, qu'à l'approche, le son est trop haut d'une moyenne de 3.8 vibrations, et qu'à l'éloignement il est trop bas de 3.6 vibrations. Pour expliquer cette différence constante, M. Vogel ajoute :

« Il n'y a plus qu'une interprétation, c'est que la tension de la vapeur dans la chaudière avait un peu diminué pendant la marche, d'où la diminution observée de la hauteur du son. C'est à cause de cela que le ton était un peu trop haut à l'approche et trop bas à l'éloignement. »

Il semblerait, après avoir lu ce Mémoire, que l'on n'eût plus qu'à s'incliner. Nous allons essayer, cependant, quelques critiques.

Les observations ayant été faites par d'habiles musiciens, cherchons à déterminer le degré d'exactitude des nombres observés.

Si nous éliminons la vitesse du son c, ce qui nous permet de ne faire aucune hypothèse sur cette vitesse, entre les deux équations précédentes, nous obtenons :

$$n_0 = \frac{2NN'}{N + N'}$$

en supposant $V = V'$, ce qui modifiera très-peu les résultats. En substituant dans cette formule pour N, N' les nombres observés, nous verrons si pour n_0 nous obtenons des valeurs différant beaucoup de celles que l'on connaît dans chaque expérience.

On aura le tableau suivant :

Première expérience....	$n'_0 = 1966.7$	au lieu de $n_0 = 1968.3$	d'où $n'_0 - n_0 = -1.6$
Deuxième —	$n'_0 = 1990.9$	$n_0 = 1994.5$	$n'_0 - n_0 = -3.6$
Troisième —	$n'_0 = 1998.5$	$n_0 = 1998.1$	$n'_0 - n_0 = +0.4$
Quatrième —	$n'_0 = 2069.2$	$n_0 = 2069.0$	$n'_0 - n_0 = +0.2$
Cinquième —	$n'_0 = 1891.6$	$n_0 = 1891.6$	$n'_0 - n_0 = 0$
Sixième —	$n'_0 = 1888.5$	$n_0 = 1886.4$	$n'_0 - n_0 = +2.1$
Septième —	$n'_0 = 1751.7$	$n_0 = 1750.8$	$n'_0 - n_0 = +0.9$
Huitième —	$n'_0 = 1619.5$	$n_0 = 1618.9$	$n'_0 - n_0 = +0.6$

n'_0 indiquant le nombre de vibrations calculées à l'aide des formules de Doppler avec les nombres N, N' observés.

Une des premières conséquences que nous pensions pouvoir logiquement tirer de l'inspection de ces derniers tableaux est la parfaite exactitude des nombres observés, puisque, à l'aide de ces nombres, nous retrouvons dans chaque expérience pour n_0 les valeurs connues. Cependant, M. Vogel, ainsi que trente ans auparavant Buys-Ballot, avait annoncé que, d'après ses expériences, le son paraissait toujours plus aigu que ne l'exigeait la théorie quand la machine s'approchait et qu'il paraissait plus grave quand elle s'éloignait. Il s'agissait donc de déterminer, ce que n'ont pas fait ces auteurs, si cette anomalie entre l'observation et la théorie était due à l'inexactitude des formules de Doppler ou à des erreurs d'observation.

Si l'on admettait l'exactitude des formules de Doppler, il devrait résulter, d'après ces expérimentateurs, que les erreurs commises par eux l'auraient été en *plus* quand la locomotive s'approchait et en *moins* quand elle s'éloignait des observateurs placés sur la voie.

Il s'agit d'abord de rechercher si les erreurs commises ont pu l'être d'après ce phénomène, qu'un son tendrait à paraître d'autant plus élevé qu'il est plus fort et d'autant plus grave qu'il est moins intense. C'est évidemment là l'idée qui a inspiré ces auteurs pour expliquer les différences entre l'observation et le calcul. Le problème se pose donc ainsi : s'il n'y avait pas d'erreurs d'observation, on aurait :

$$N = n_0 + \alpha, \qquad N' = n_0 - \alpha'$$

$+\alpha$, $-\alpha'$ désignant l'accroissement réel et la diminution de la tonalité quand la locomotive s'approche et lorsqu'elle s'éloigne. S'il y a une erreur d'observation dans les deux cas, soit β sa valeur absolue que nous pourrons admettre sensiblement la même, que la locomotive s'approche ou qu'elle s'éloigne, auquel cas, d'après les auteurs, on aurait :

$$N = (n_0 + \alpha) \pm \beta \quad \text{et} \quad N' = (n_0 - \alpha') \mp \beta.$$

Quant à nous, nous ne pensions pas que les équations personnelles pussent se produire dans ce sens ; nous aurions plutôt admis qu'un musicien qui aurait de la tendance à entendre un son aigu plus haut, aurait, par cela même, de la tendance à entendre un son grave, moins grave. D'après cela, l'équation personnelle étant $\pm \beta$ quand la locomotive s'approche, devrait être encore $\pm \beta$ quand elle s'éloigne. Nous allons nous servir des expériences de M. Vogel pour juger la question.

Supposons que dans l'équation :

$$n'_0 = \frac{2NN'}{N + N'},$$

nous substituions :

$$N = (n_0 + \alpha) + \beta \quad \text{et} \quad N' = (n_0 - \alpha') + \beta,$$

selon notre hypothèse ; on aura :

$$n'_0 = \frac{2\left[n_0 + \alpha + \beta\right]\left[n_0 - \alpha' + \beta\right]}{2(n_0 + \beta) + (\alpha - \alpha')}.$$

On ne changera évidemment pas beaucoup la valeur du dénominateur en remplaçant $(\alpha - \alpha')$ par $2(\alpha - \alpha')$, très-petit par rappport à $2(n_0 + \beta)$. L'équation précédente deviendra donc :

$$\text{(A)} \qquad n'_0 = n_0 + \beta - \frac{\alpha\alpha'}{n_0 + \beta + (\alpha - \alpha')}.$$

D'après l'hypothèse des auteurs, en vertu de laquelle on a simultanément :

$$N = (n_0 + \alpha) + \beta \qquad \text{et} \qquad N' = (n_0 - \alpha') - \beta$$

il viendrait :

$$n'_0 = \frac{2\left[n_0 + \alpha + \beta\right]\left[n_0 - \alpha' - \beta\right]}{2n_0 + (\alpha - \alpha')}$$

puis, en remplaçant au dénominateur $(\alpha - \alpha')$ par $2(\alpha - \alpha')$, l'équation précédente simplifiée donnerait :

$$\text{(B)} \qquad n'_0 = n_0 - \beta\frac{\alpha + \alpha' + \beta}{n_0 + (\alpha - \alpha')} - \frac{\alpha\alpha'}{n_0 + (\alpha - \alpha')}.$$

Pour interpréter plus facilement les formules (A) et (B), faisons $\alpha' = \alpha$, ce qui modifiera très-peu les résultats, d'autant moins que la vitesse de la locomotive, quand elle s'approche de l'observateur et quand elle s'en éloigne, étant sensiblement la même dans toutes les expériences, α' diffère toujours très-peu de α.

Les formules (A) et (B) deviennent alors :

$$(a) \qquad n'_0 = n_0 + \beta - \frac{\alpha^2}{n_0 + \beta}$$

$$(b) \qquad n'_0 = n_0 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{n_0}$$

Or, l'équation (*a*) nous montre que, si β est égal à $\frac{\alpha^2}{n_0 + \beta}$, ou en diffère peu, nous aurons, pour n'_0 calculé en fonction des nombres observés, des valeurs égales à celles de n_0, ou plus grandes, ou plus petites, tandis que, d'après la deuxième équation (*b*), les valeurs de n'_0 devraient toujours être plus petites que celle de n_0. Or, nous avons vu que les différences $n'_0 - n_0$ étaient tantôt positives, tantôt négatives.

Les propres observations de M. Vogel nous conduisent donc à regarder comme inexacte la formule (*b*); nous verrons même plus loin, quand nous ferons le calcul des équations personnelles, que dans les expériences de M. Vogel la valeur de β a toujours été positive. Ainsi se trouve démentie par l'expérience cette idée préconçue, qu'en général un son tend à paraître plus aigu quand il s'approche de l'observateur et plus grave quand il s'éloigne de celui-ci, par la seule raison que l'intensité est plus et moins grande. Comment donc expliquer que le son était toujours plus aigu que ne l'indiquait le calcul de la formule de Doppler à Vogel et à Buys-Ballot quand la machine s'approchait et plus grave quand elle s'éloignait? C'est ce que nous montrerons plus loin. — Cherchons maintenant à déterminer les erreurs d'observation dans les expériences de M. Vogel. Et d'abord nous avons tout lieu d'admettre qu'elles doivent être relativement faibles. En cherchant à retrouver dans chaque expérience le nombre de vibrations émis par le sifflet de la locomotive en repos, en fonction de ceux que l'on observait quand elle s'approchait ou s'éloignait, nous avons vu que ce nombre était très-approximativement celui que l'on devait trouver. D'où nous pouvions conclure 1° que les observations avaient été faites avec toute la rigueur désirable; 2° que les formules de Doppler paraissaient justifiées, puisque la relation :

$$n_0 = \frac{2NN'}{N + N'}$$

est une conséquence de celles-ci.

Arrivons donc à ces erreurs d'observation.

N, N' désignant les nombres de vibrations observées lorsque la locomotive est en mouvement, nous avons démontré précédemment que nous avions, en général :

$$N = (n_0 + \alpha) + \beta \quad \text{et} \quad N' = (n_0 - \alpha') + \beta'$$

α, α' désignant la variation de la tonalité, β, β' les erreurs d'observation. En retranchant nous avons :

$$N - N' = (\alpha + \alpha') + (\beta - \beta');$$

β étant sensiblement égal à β' dans toutes les expériences, on voit que l'on a :

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{N - N'}{2}$$

Si nous posons $\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$, on voit que α_1 sera la moyenne arithmétique des élévations et des abaissements théoriques de n_0, et nous obtiendrons cette valeur de α_1 à l'aide des nombres N, N' tels qu'ils ont été fournis par l'observation, par la formule :

$$\alpha_1 = \frac{N - N'}{2}$$

C'est cette valeur de α_1 que nous allons maintenant introduire dans nos formules.

Si nous posons :

(1) $$N_1 = n_0 + \alpha_1 \quad \text{et} \quad N'_1 = n_0 - \alpha_1$$

N_1, N_1' désignant les nombres théoriques, il nous sera facile de calculer l'erreur que l'on commet dans l'hypothèse des égalités (1).

En effet, en vertu des équations de Doppler :

$$N_1 = n_0 \frac{c}{c - v} \quad \text{et} \quad N'_1 = n_0 \frac{c}{c + v}$$

nous avons :

(2) $$n_0 = \frac{2\,N_1 N'_1}{N_1 + N'_1}$$

Si les équations (1) étaient exactes, on devrait arriver à une identité en substituant les valeurs de N_1, N_1' qu'on en tire dans l'équation (2). On obtient ainsi :

(2 *bis*) $$N_0 = \frac{2(n_0 + \alpha_1)(n_0 - \alpha_1)}{2n_0} = n_0 - \frac{\alpha_1^2}{n_0}$$

Par conséquent l'erreur commise est représentée numériquement par $\frac{\alpha_1^2}{n_0}$.

Donc nous pourrons calculer n_0 en fonction de N_1, N'_1 par la formule (2), à condition de corriger le nombre ainsi obtenu de la quantité $+ \frac{\alpha_1^2}{n_0}$.

N_1, N'_1 étant toujours les nombres de vibrations théoriques, N, N′ les nombres de vibrations observés, si l'on suppose que dans les expériences les observateurs se soient trompés en plus, par exemple, d'un nombre K de seizièmes de tons, il s'ensuit que l'on aura :

(3) $$\begin{cases} N = N_1 + KN_1 = N_1(1 + K) \\ N' = N'_1 + KN'_1 = N'_1(1 + K) \end{cases}$$

donc en substituant dans la formule (2) les valeurs de N_1, N_1 en fonction de N, N′ on aura :

$$\frac{2}{1 + K} \; \frac{N \cdot N'}{N + N'}$$

qui doit être corrigé de $+ \frac{\alpha_1^2}{n_0}$ pour représenter exactement la valeur de n_0; on aura donc :

$$n_0 = \frac{2}{1 + K} \; \frac{NN'}{N + N'} + \frac{\alpha_1^2}{n_0}$$

Si l'on fait :

$$\frac{2NN'}{N + N'} = n'_0,$$

il viendra :

$$
(\mathrm{F}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\left(n_0 - \frac{\alpha_1^2}{n_0}\right) \frac{\mathrm{N}}{n'_0} &= \frac{\mathrm{N}}{1 + \mathrm{K}} = \mathrm{N}_1 \\
\left(n_0 - \frac{\alpha_1^2}{n_0}\right) \frac{\mathrm{N}}{n'} &= \frac{\mathrm{N}'}{1 + \mathrm{K}} = \mathrm{N}'_1
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les deux formules à l'aide desquelles nous pourrons calculer les nombres de vibrations corrigés de toute erreur d'observation. Nous aurons ainsi le tableau suivant :

				Formules (F).	Erreurs d'observation.
Première expérience....	$n_0 = 1968.3$,	$\alpha_1 = 115.55$	$\mathrm{N} = 2089.0$	d'où $\mathrm{N}_1 = 2083.5$	$+ 5.5$
			$\mathrm{N}' = 1857.9$	— $\mathrm{N}'_1 = 1853.1$	4.8
Deuxième —	$n_0 = 1994.5$,	$\alpha_1 = 120.05$	$\mathrm{N} = 2118.2$	— $\mathrm{N}_1 = 2114.4$	3.8
			$\mathrm{N}' = 1878.1$	— $\mathrm{N}'_1 = 1874.7$	3.4
Troisième —	$n_0 = 1998.1$,	$\alpha_1 = 90.35$	$\mathrm{N} = 2092.9$	— $\mathrm{N}_1 = 2088.2$	4.7
			$\mathrm{N}' = 1912.2$	— $\mathrm{N}'_1 = 1907.7$	6.0
Quatrième —	$n_0 = 2069.0$,	$\alpha_1 = 110.4$	$\mathrm{N} = 2185.5$	— $\mathrm{N}_1 = 2179.2$	6.3
			$\mathrm{N}' = 1964.7$	— $\mathrm{N}'_1 = 1959.0$	5.7
Cinquième —	$n_0 = 1891.6$,	$\alpha_1 = 59.7$	$\mathrm{N} = 1943.7$	— $\mathrm{N}_1 = 1942.3$	1.4
			$\mathrm{N}' = 1842.3$	— $\mathrm{N}'_1 = 1841.0$	1.3
Sixième —	$n_0 = 1886.4$,	$\alpha_1 = 53.65$	$\mathrm{N} = 1943.7$	— $\mathrm{N}_1 = 1941.6$	2.1
			$\mathrm{N}' = 1836.4$	— $\mathrm{N}'_1 = 1834.4$	2.0
Septième —	$n_0 = 1750.8$,	$\alpha_1 = 38.45$	$\mathrm{N} = 1791.0$	— $\mathrm{N}_1 = 1789.2$	1.8
			$\mathrm{N}' = 1714.1$	— $\mathrm{N}'_1 = 1712.4$	1.7
Huitième —	$n_0 = 1618.9$,	$\alpha_1 = 32.4$	$\mathrm{N} = 1652.6$	— N_1 — 1651.5	1.7
			$\mathrm{N}' = 1587.8$	— $\mathrm{N}'_1 = 1586.2$	1.6

La seule hypothèse que nous ayons faite pour arriver à la détermination de ces nombres N_1, N'_1 est celle-ci : nous avons admis que la vitesse de propagation du son était la même lorsque la locomotive s'approchait de l'observateur et lorsqu'elle s'en éloignait, sans assigner aucune valeur numérique à cette vitesse. On voit, en effet, qu'elle disparaît dans nos formules. Les corrections calculées seront donc exactes à moins que l'expérience ne vienne infirmer notre hypothèse. Si la vitesse du son ne se trouve pas la même dans les deux cas, mais que la différence dans les valeurs numériques de cette vitesse ne soit pas trop considérable, on pourra considérer ces corrections comme étant une première approximation.

Nous allons comparer maintenant les nombres que nous venons de calculer, corrigés de toute erreur d'observation, aux nombres que M. Vogel a calculés par les formules de Doppler, en fonction de la vitesse du son connu dans chaque expérience. Nous joindrons à ce tableau les nombres observés; on a :

Expériences.	Vitesse du son.	Nombres calculés par les formules de Doppler.	Nombres corrigés d'erreurs d'observation.	Différences.	Nombres observés. (Vogel.)	Différences. (Vogel.)
Première.....	349.5	2078.2	2083.5	+ 5.3	2089.0	+ 10.8
		1867.8	1853.1	— 14.7	1857.9	— 9.9
Deuxième.....	350.6	2111.8	2114.4	+ 2.6	2118.2	+ 6.4
		1889.0	1874.7	— 14.3	1878.1	— 10.9
Troisième	350.6	2089.8	2088.2	— 1.6	2092.9	+ 3.1
		1914.1	1907.7	— 6.4	1912.2	— 1.9
Quatrième....	350.6	2192.2	2179.2	— 13.0	2185.5	— 6.7
		1959.1	1959.0	— 0.1	1964.7	+ 5.6
Cinquième....	350.6	1934.4	1942.3	+ 7.9	1943.7	+ 9.3
		1850.7	1841.0	— 9.7	1842.3	— 8.4
Sixième......	350.6	1935.9	1941.6	+ 5.7	1943.7	+ 7.8
		1843.0	1834.4	— 8.6	1836.4	— 6.6
Septième.....	350.8	1789.5	1789.2	— 0.3	1791.0	+ 1.5
		1713.8	1712.4	— 1.4	1714.1	+ 0.3
Huitième.....	351.5	1654.3	1650.9	— 3.4	1652.6	— 1.7
		1585.0	1583.4	— 1.6	1587.8	+ 2.8

L'examen comparatif des nombres mêmes corrigés de toute erreur d'observation avec les nombres calculés par les formules de Doppler nous conduit aux résultats déjà formulés par Vogel et Buys-Ballot, à savoir que la tonalité est, *en général*, plus élevée à l'approche et plus faible au départ que ne l'indique la théorie. Nous avons dit *en général*, parce que dans les expériences 4 et 5, c'est l'inverse qui a précisément lieu. Or, ce fait est important à noter, puisqu'il détruit l'espèce de loi que Vogel voulait formuler. Cherchons à nous rendre compte des différences signalées par Vogel et qu'il n'a pas expliquées. Les formules de Doppler étant :

$$n = n_0(1 + \mathrm{K} + \mathrm{K}^2 + \ldots\ldots) = n_0 \frac{c}{c - v}$$

$$n' = n_0(1 - \mathrm{K} + \mathrm{K}^2 - \ldots\ldots) = n_0 \frac{c}{c + v}$$

dans lesquelles K représente le rapport de la vitesse de la locomotive à celle du son c, nous avons vu par le tableau précédent que les nombres n et n' que l'on calcule par ces formules diffèrent simultanément en plus et en moins des nombres trouvés et corrigés des erreurs d'observation, N_1, N'_1. Si nous voulions représenter ceux-ci par une formule empirique, il est évident que nous aurions la chance d'y arriver en posant :

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{N}_1 &= n_0\left[1 + \mathrm{K}(1 \pm \gamma)\right] \\ \mathrm{N}'_1 &= n_0\left[1 - \mathrm{K}(1 \pm \gamma)\right] \end{aligned}$$

On voit, en effet, que la valeur de K étant augmentée ou diminuée suivant que l'on prendra $1 + \gamma$ ou $1 - \gamma$, la valeur de N_1 sera plus grande ou plus petite que celle de n, alors qu'en même temps N'_1 deviendra plus petit ou plus grand que n'. Des deux formules nous tirons :

$$\frac{N_1}{N'_1} = \frac{1 + K(1 \pm \gamma)}{1 - K(1 \pm \gamma)}, \quad \text{d'où :}$$

(5) $$\frac{N_1 - N'_1}{N_1 + N'_1} = K(1 \pm \gamma) = K'$$

Or, il est évident que nous pouvons remplacer sans erreur sensible le rapport :

$$\frac{N_1 - N'_1}{N_1 + N'_1} \quad \text{par} \quad \frac{N - N'}{N + N'},$$

N et N′ étant les nombres observés. En effet, les erreurs d'observation disparaissent dans le numérateur $N - N'$ et sont insensibles dans le dénominateur, $N + N'$ étant un grand nombre, 3000 à 4000. Ainsi, dans l'expérience I, nous avons :

$$\frac{N_1 - N'_1}{N_1 + N'_1} = \frac{230.4}{3936.6} = 0.0585 \qquad \frac{N - N'}{N + N'} = \frac{231.1}{3946.9} = 0.0586$$

On aura donc, sachant que :

$$K' = \frac{N - N'}{N + N'}$$

$$\begin{cases} N_1 = n_0(1 + K') \\ N'_1 = n_0(1 - K') \end{cases}$$

Si nous calculons les valeurs de N_1 et N' dans la première expérience, nous trouvons :

$$N_1 = 2083.5 \qquad N'_1 = 1853.1;$$

de sorte que nous retombons ainsi sur les nombres corrigés tels que nous les avions obtenus en partant des formules (F).

Les formules empiriques (4) que nous avions admises nous ont conduit, comme nous l'avons vu, à la relation :

$$K' = \frac{N_1 - N'_1}{N_1 + N'_1} = K(1 \pm \gamma)$$

Or, cette équation est identique à celle à laquelle on arrive en éliminant n_0 entre les formules de Doppler :

(6) $$n = n_0 \frac{c}{c - v} \quad \text{et} \quad n' = n_0 \frac{c}{c + v'},$$

qui donne :

(*a*) $$c = \frac{nv + n'v'}{n - n'};$$

et dans le cas où $v = v'$, en faisant $\delta = \frac{v}{c}$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{n + n'}{n - n'}$$

d'où :

(7) $$\delta = \frac{n - n'}{n + n'}$$

Les formules de Doppler semblent donc justifiées.

Mais Vogel a calculé les nombres théoriques par les formules (6) dans lesquelles c est la vitesse de propagation du son. Mais puisque N_1 et N'_1 sont les nombres corrigés de toute erreur d'observation, on voit que Vogel a implicitement admis que l'on avait :

$$K' = \delta = K(1 \pm \gamma).$$

Si nous nous reportons aux formules (F), nous voyons que les nombres N_1, N'_1 ont été obtenus en fonction des nombres directement observés, N, N', sans faire aucune hypothèse sur la vitesse de propagation du son. Chaque expérience nous fournira ainsi le rapport :

$$\frac{N_1 - N'_1}{N_1 + N'_1},$$

et par conséquent $K(1 \pm \gamma)$ sachant que $K = \frac{V}{c}$. Mais Vogel a déterminé d'une manière très-rigoureuse la vitesse de la locomotive.

L'expression $(\pm \gamma)$ ne saurait donc corriger une erreur dans l'évaluation de cette vitesse. Nous sommes ainsi amenés à conclure que dans ces expériences il y a eu modification dans la vitesse de propagation du son produit par le sifflet de la locomotive en mouvement. Tel est le résultat et l'un des plus curieux que l'on déduit des expériences de Vogel et qui lui avait échappé. La formule (5) peut s'écrire, en effet :

$$\frac{c}{1 \pm \gamma} = V\frac{N_1 + N'_1}{N_1 - N'_1}$$

et nous permettra de calculer la vitesse de propagation du son

$$C' = \frac{c}{1 \pm \gamma}$$

dans les diverses expériences de Vogel. Comme il y a identité entre cette formule empirique et la formule (a), nous calculerons la vitesse du son dans les quatre premières expériences par la relation :

$$C' = \frac{N_1V + N'_1V'}{N_1 - N'_1},$$

la vitesse de la locomotive n'étant pas tout à fait la même au départ et à l'arrivée. Nous calculerons aussi la vitesse du son par la formule (*a*) dans laquelle nous remplacerons les nombres n et n' par les nombres directement observés N et N'.

Il est clair que dans les deux cas les nombres obtenus pour la vitesse du son seront sensiblement les mêmes, puisque les erreurs d'observation disparaissent au dénominateur dans (N — N'). On a le tableau suivant :

Expériences.	$C' = \frac{N_1 V + N'_1 V'}{N_1 - N'_1}$	$C'_1 = \frac{N V + N' V'}{N - N'}$	Vitesse du son.
Première	318.5	318.1	349.5
Deuxième	323.1	323.5	350.6
Troisième	340.5	335.5	»
Quatrième	370.0	370.0	»
Cinquième	289.4	286.3	»
Sixième	303.6	303.6	»
Septième	345.6	345.4	»
Huitième	372.8	376.0	»

On voit que, dans les quatre premières expériences, la vitesse du son a varié d'une façon graduelle de $318^m.5$ par seconde à 370^m. Dans les quatre dernières expériences, c'est encore la même chose. La presque identité des valeurs calculées avec les nombres corrigés N_1, N'_1 et avec les nombres directement observés N, N' vient encore confirmer ce que nous avions déjà montré, à savoir que les erreurs d'observation ont lieu dans le même sens quand la machine s'approche et lorsqu'elle s'éloigne. S'il n'en était pas ainsi, en effet, les erreurs d'observation ne disparaîtraient pas dans (N — N'); elles s'ajouteraient, au contraire, et alors les valeurs calculées de C' seraient différentes suivant qu'elles l'auraient été en fonction de N_1, N'_1 ou de N, N'.

Les quatre premières séries d'expériences ont été faites sur de grands trajets et la locomotive marchait avec des vitesses de 15 à 19 kilomètres. Dans les cinq dernières expériences, le trajet était réduit à $^1/_2$ kilomètre, et la vitesse de la locomotive n'était alors que $7^m.5$ à $8^m.5$.

Cependant, dans les deux cas, nous voyons que la vitesse du son, d'après les nombres observés, varie d'une façon régulièrement ascendante. Cette seule remarque suffirait pour empêcher de mettre sur le compte d'erreurs d'observation les différences que l'on trouve pour la vitesse du son. Si l'on voulait nous objecter que les corrections que nous avons introduites n'ont été déterminées qu'en fonction des nombres mêmes qu'il s'agissait de corriger, nous répondrions que les nombres observés, tels qu'ils ont été publiés par Vogel, sont sans doute une moyenne d'observations. Du reste, en nous reportant au tableau de Buys-Ballot, nous y trouvons les observations à trois stations différentes de six observateurs. Or, la moyenne des observations du premier groupe (première colonne) diffère de $^2/_{16}$ de ton de la moyenne des observations du deuxième groupe (deuxième colonne). Il en résulte donc qu'en moyenne, à chaque station, les observateurs s'étaient trompés de $^1/_{16}$ de ton, l'un en plus, l'autre en moins. Or, nous avons tout lieu d'admettre que les expériences de Vogel ont été faites d'une façon beaucoup plus précise que celles de Buys-Ballot. Ce dernier expérimentateur avait à peine deux secondes pour faire une observation qui ne fût pas entaché d'erreurs; tandis que Vogel pouvait faire durer la sienne près de $^3/_4$ de minute. Naturellement les erreurs devaient être inférieures à $^1/_{16}$ de ton dans les expériences de Vogel, puisque telles étaient ces erreurs dans celles de Buys-Ballot.

Admettons cependant une erreur de $^1/_{16}$ de ton dans les expériences de Vogel.

Nous avons $^1/_{16}$ de ton $= \sqrt[96]{2} = 1.00725.$

Si ε représente $^1/_{16}$ de ton, l'élévation ou l'abaissement du son observé, on aura :

$$N = n_0(1.00725)^{\varepsilon} \quad \text{et} \quad N' = n_0(1.00725)$$

Si donc on s'était trompé en plus de $^1/_{16}$ de ton comme cela aurait eu lieu dans les expériences I, II, III, V, VI, VII; puisque, par hypothèse :

$$N = N_1(1.00725) \qquad N' = N'_1(1.00725)$$

les nombres exacts auraient donc été :

$$N_1 = n_0(1.00725)^{\varepsilon - 1} \quad \text{et} \quad N'_1 = n_0(1.00725)^{-\varepsilon - 1}$$

d'où :

$$N - N_1 = N\,\frac{0.00725}{1.00725} \quad \text{et} \quad N' - N'_1 = N'\,\frac{0\ 00725}{1.00725}$$

Comme exemple, dans la première expérience, nous avons :

$$N = 2089 . N' = 1857,9, \quad \text{d'où} \quad N - N_1 = 15^{v} . 0 . N' - N'_1 = 13,3.$$

Ainsi, l'erreur la plus grande que nous pourrions admettre introduirait une différence de 15 vibrations quand la machine approche, de 13.3 quand elle s'éloigne de l'observateur. Calculons donc la vitesse du son avec ces nouveaux nombres :

$$N_1 = 2074 \quad \text{et} \quad N'_1 = 1844.6,$$

nous obtiendrons $C' = 318.4$ au lieu de 318.5 avec les nombres corrigés, et de 318.1 avec les nombres observés. Il faut donc conclure ou bien que les formules de Doppler sont inexactes, ou que réellement la vitesse de propagation du son a été différente dans chaque expérience. Le travail de M. Vogel ne peut donc actuellement servir à vérifier les formules de Doppler. Il manque, en effet, à ses observations un élément, la connaissance directe de la vitesse de propagation du son produit par le sifflet d'une locomotive en mouvement. Peut-être même cette vitesse doit-elle être différente suivant que la locomotive s'approche de l'observateur ou suivant qu'elle s'éloigne de celui-ci. Les formules de Doppler devraient donc s'écrire d'une façon générale :

$$N = n_0 \frac{c_z}{c_z - v}, \quad N' = n_0 \frac{c_w}{c_w + v'}$$

et alors, lorsqu'on aurait eu déterminé directement les valeurs de c_z et c_w, il serait permis de calculer l'augmentation et l'abaissement de la tonalité; puis, de comparer à ces nombres calculés les nombres fournis par l'observation. La comparaison pourrait alors permettre d'accepter ou de rejeter les formules de Doppler, ce que l'on ne peut faire encore aujourd'hui après les expériences de M. Vogel.

En terminant, revenons en quelques mots sur les vitesses anormales de propagation du son qui résulteraient des expériences de Vogel. Sans vouloir expliquer ces grandes différences, il n'est pas inutile de rappeler que Regnault avait antérieurement modifié les idées que l'on avait sur la vitesse de la propagation du son. Dans le tome XXXVII des *Mémoires de l'Académie des sciences*, nous voyons que, contrairement à la formule de Laplace, la vitesse du son augmente avec l'intensité. C'est ainsi que M. Regnault a obtenu les nombres suivants pour la vitesse de propagation du son produit par un coup de pistolet dans des tuyaux de $0^m.30$ de diamètre et de $1^m.10$.

CONDUITE DE $0^m.30$.

Charge.	Chemin parcouru.	Vitesse moyenne.
$1^{gr}.4$	1905	$332^m.37$
	3810	$330^m.34$
$1^{gr}.5$	3810	$332^m.18$
	7621	$330^m.43$

CONDUITE DE $1^m.10$.

Charge.		
1 gramme	749^m	334.16
	920^m	333.20
	1418^m	332.50
	5672^m	331.72
	8508^m	330.87
	11344^m	330.68
	14180^m	330.56
	19851^m	330.52

On voit que dans le cas d'un tuyau de conduite de $0^m.30$ pour une augmentation de poudre de $0^{gr}.10$, la vitesse du son, qui était de $330^m.34$ à 3810^m du pistolet, se trouve maintenant à la même distance de $332^m.18$.

Dans le cas d'une conduite de $1^m.10$ de diamètre (et nous pourrons assimiler ces tuyaux à l'air libre), c'était seulement après un chemin parcouru de 19051^m, que la vitesse limite à 0^o et à 760 pouvait être prise égale à $330^m.52$ par une charge de poudre de 1 gramme. Il y a donc, dans le cas du son produit par un coup de pistolet, un véritable transport des premières couches ébranlées, transport qui augmente la vitesse de propagation.

Dans le cas qui nous occupe, nous aurons à nous demander, en nous rappelant les expériences de Regnault, si l'on doit assimiler le son produit par le sifflet d'une locomotive à un coup de pistolet. Il faudrait alors prendre, pour la vitesse du son à 0° et à 760^{mm}, un nombre plus fort. Mais, en même temps, il faut rechercher si, par suite du déplacement rapide de la locomotive, il n'y a pas transport négatif des premières couches ébranlées, auquel cas, diminution dans la vitesse de propagation du son, comme dans les expériences 1, 2, 3, 5, 6, 7. La question est donc complexe; dans l'impossibilité de la résoudre expérimentalement, nous ne chercherons pas à faire d'hypothèse pour représenter plus ou moins approximativement la vitesse de propagation du son dans ces conditions. Nous avons voulu seulement appeler l'attention sur cette question.

CHAPITRE II

EXPÉRIENCES DE M. SCHUNGEL

M. Schüngel eut, le premier, l'idée d'appliquer la méthode des battements à la détermination de la tonalité d'un diapason en mouvement. Malheureusement cet auteur, croyant sans doute sa méthode irréprochable, a négligé de discuter les résultats auxquels il avait été conduit. Non-seulement il ne les a pas discutés, mais encore il les a présentés sous une forme qui pouvait faire croire à la rigueur de ses observations et à la démonstration de l'exactitude des formules de Doppler.

Voici comment nous avons opéré pour nous rendre compte de la valeur de ces expériences. M. Schüngel, dans ses tableaux, avait indiqué seulement la vitesse d'entraînement de son chariot et les battements entendus en 1^s. Comme, du reste, les deux diapasons qu'il employait produisaient 4^b en 1^s, lorsqu'ils étaient fixes, et qu'il comptait jusqu'à 9^b quand l'un se déplaçait, nous avons pu facilement en déduire, dans chaque expérience, et la durée d'une observation, et le nombre de battements correspondants perdus ou gagnés, et le chemin parcouru, toutes choses que M. Schüngel avait négligé de nous indiquer.

D'un autre côté, puisque les expériences de M. Schüngel devaient vérifier les formules de Doppler :

$$n' = n(1 \pm K + K^2 \pm \ldots\ldots),$$

K désignant le rapport de la vitesse du chariot à la vitesse du son, nous avons pensé que pour se faire une première idée des expériences de M. Schüngel, on pourrait rechercher si celles-ci vérifieraient seulement les formules limites :

$$n' = n(1 \pm K).$$

En effet, dans les expériences de M. Schüngel, la vitesse du chariot n'étant que d'environ 1^m, les valeurs de K à la deuxième puissance étaient négligeables; et c'était bien à la relation précédente que les formules de Doppler, dans ce cas, se réduisaient.

Mais cette relation nous conduit à cette conséquence, inexacte pour des expériences délicates, que pour une longueur d'onde parcourue, il y a exactement un battement de perdu ou de gagné. Si donc, avec la méthode peu sensible que M. Schüngel employait, il avait pu opérer suffisamment bien, il aurait dû arriver à ce résultat : que le produit des battements perdus ou gagnés *par la longueur d'onde du diapason mobile* eût été exactement égal au chemin parcouru par le chariot dans une expérience. Or, comme on pourra le voir, nous avons obtenu, entre ces deux résultats, des différences qui pouvaient être positives ou négatives, et s'élever à $0^m.40$ sur un chemin de 4^m.

Nous sommes allé plus loin; et puisque M. Schüngel avait émis l'idée que l'on pourrait, très-rigoureusement, déterminer *la vitesse du son* par la méthode des battements (les formules de Doppler étant considérées comme exactes par cet auteur), nous avons établi une formule qui nous faisait connaître la vitesse du son en fonction des battements observés en 1^s. Et en introduisant dans cette formule, pour les battements, les valeurs publiées par M. Schüngel, nous sommes arrivé à ce résultat que, si l'on voulait déterminer, comme il l'avait conseillé par sa méthode et à l'aide de ses observations, la vitesse du son, on obtenait pour celle-ci des nombres qui non-seulement n'étaient pas constants, mais encore pouvaient varier de 382^m à 315^m.

La conclusion à tirer du Mémoire de M. Schüngel est que le procédé qu'il avait employé ne pouvait servir à vérifier les formules de Doppler, puisqu'il n'avait pu obtenir des valeurs qui se rapprochassent même des formules limites.

ANALYSE

M. Schüngel a fait paraître, en 1873, dans les *Annales de Poggendorff* ses expériences sur la variation de la tonalité du son avec le déplacement de la source sonore. Quoique venu après Kœnig et Mayer, dont la notice sur le même sujet avait paru dans les mêmes *Annales de Poggendorff* une année auparavant, M. Schüngel ne semble pas avoir eu connaissance des travaux de ces derniers observateurs. Il paraît croire en effet que, depuis Buys-Ballot, personne ne se fût occupé de la même question. Il donne, comme étant de lui, la méthode des battements pour la recherche de la variation de la tonalité du son avec le déplacement de la source sonore. Mayer avait annoncé en ces termes qu'il comptait reprendre ses premières expériences : « Une machine a été inventée à l'aide de laquelle on peut communiquer un mouvement uniforme de translation au diapason ; c'est avec cette machine que je me propose de faire une étude quantitative des phénomènes, en employant un appareil essentiellement semblable, dans son action, à celui que je viens de décrire. » Nous n'avons pu retrouver la description de la machine qu'annonçait Mayer. Voici, en résumé, le travail de M. Schüngel :

Cet observateur se servait de deux diapasons de Kœnig, l'un donnant 512 vibrations, et l'autre 508. Il y avait donc 4 battements par seconde quand les deux diapasons étaient au repos.

Dans une première série d'expériences, le diapason de 508 vibrations, monté sur un chariot, s'approchait de l'observateur et du diapason fixe. Si la tonalité allait en augmentant avec le déplacement de la source sonore vers l'observateur, il devait y avoir diminution du nombre des battements en une seconde. M. Schüngel mettait le diapason mobile en mouvement à l'instant précis d'un battement, et l'arrêtait, dans toutes ses observations, lorsqu'il avait compté 9 battements dans le temps t. Il en déduisait le nombre des battements s observés en 1 seconde par la formule $s = \frac{9}{t}$ et, par conséquent, la tonalité du diapason mobile était donnée par la formule $n' = 512 - s$.

Pour vérifier la formule de Doppler, il lui fallait connaître la vitesse d'entraînement du diapason mobile, c'est-à-dire du chariot ; il lui fallait de plus, pour connaître les valeurs de s, estimer le temps pendant lequel un nombre déterminé de battements (toujours égal à 9) se faisait entendre. A cet effet, avec un télégraphe et un pendule, il fit un appareil enregistreur. Le pendule, à chaque seconde, fermait un moment le courant ; et sur le papier du télégraphe se marquait alors une série de points dont les distances correspondaient à la durée d'une seconde. D'un autre côté, à l'aide d'un interrupteur, on pouvait faire inscrire à la pointe du télégraphe, sur le papier de celui-ci, une ligne continue pendant la durée du mouvement du diapason : le rapport de la longueur de cette ligne au nombre de points inscrits par le pendule donnait le temps. En pressant sur l'interrupteur, dans un intervalle de temps de 9 battements, l'observateur fermait le circuit, et enregistrait ainsi la durée de ces battements. Pour obtenir les points où se trouvait le chariot au moment de l'abaissement ou de l'élévation de la clef de l'interrupteur, celui-ci communiquait par des fils avec un électro-aimant placé sur le chariot. On dessinait ainsi sur un papier, à l'aide d'un stylet fixé à une ancre, les différentes positions du chariot. On avait donc l'espace w parcouru par le chariot dans le temps t d'une observation.

M. Schüngel, dans les deux tableaux qu'il a publiés, a donné la vitesse v' du chariot, c'est-à-dire le rapport de l'espace parcouru w au temps t. Mais il n'a pas cru devoir publier les chemins parcourus w tels qu'il les avait observés, ni la durée t de ses observations.

Pour juger, comme nous allons le voir, du degré de valeur des observations de M. Schüngel, il est très-important de connaître et la durée des observations, et le chemin réellement parcouru par le chariot.

Si les observations de M. Schüngel sont exactes, comme il a fait mouvoir le chariot dans un intervalle de 9 battements, le chemin parcouru doit être un multiple exact de la longueur d'onde du diapason qui se déplace. C'est là une vérification d'une réelle valeur; tandis que la comparaison de la tonalité du diapason mobile à celle que l'on calculerait par les formules de Doppler est illusoire. En effet, dans ces expériences, la vitesse du diapason ne dépassait pas 1 mètre. Nous sommes donc étonné que M. Schüngel ne se soit pas rappelé ce que Doppler avait expressément indiqué, à savoir que la vérification de sa formule devait être faite à l'aide d'expériences dans lesquelles la vitesse d'entraînement de la source sonore serait du même ordre de grandeur que la vitesse de propagation du son.

Il ne fallait donc pas chercher à démontrer l'exactitude d'expériences faites par la méthode des battements, en comparant les nombres obtenus ainsi à ceux que l'on calculerait par la formule de Doppler.

En effet, si l'on compare les chemins parcourus par le chariot dans l'intervalle de 9 battements au produit des battements perdus par la longueur d'onde, on trouve des différences qui peuvent aller jusqu'à $0^m.372$, alors que le chemin parcouru par le chariot n'était que de $4^m.109$.

Si ces différences avaient toujours été de même signe, on en aurait tiré cette conclusion, très-intéressante, qu'il n'y avait pas, pour un battement perdu, une longueur d'onde exactement parcourue par le chariot. Mais les différences sont tantôt en plus, tantôt en moins. Ainsi, sur 18 observations, la somme des différences est (+ 1.047) et (1.116). Nous devons en conclure que ces différences entre la théorie et l'observation ne sont dues qu'à des erreurs.

Dans toutes ses expériences, l'auteur a compté 9 battements, et observé le temps correspondant à l'aide des nombres s (battements observés en 1 seconde). Nous avons conclu la durée des observations égale à $\frac{9}{s}$.

A l'aide du tableau dans lequel l'auteur a donné la vitesse v' du chariot, nous pouvons trouver le chemin w, parcouru par le chariot, par la formule $w = v't$.

Il nous est également facile de calculer le nombre de battements perdus. Si le diapason était resté fixe, le nombre des battements observés dans le temps t se serait trouvé égal à $4 \times t$. Comme, dans chaque observation, ce nombre de battements observés s'est trouvé égal à 9, il en résulte que le nombre de battements perdus s'est trouvé égal à $4t - 9$. D'après la théorie, pour une longueur d'onde parcourue par le diapason mobile, il y a un battement perdu; le chemin parcouru par le chariot doit donc être égal à la longueur d'onde du diapason multipliée par le nombre de battements perdus.

Nous avons le tableau suivant :

Tableau I.

$n = 508$ *v. d* (*Mémoire de Schüngel*).

Observations.	v — Vitesse du son.	$v' = \frac{n}{t}$ — Vitesse du chariot.	s — Battements entendus en 1".	$n' = 512 - s$ — Tonalité du diapason mobile.	$n' \frac{nv}{v - v'}$ — Tonalité calculée par la formule de Doppler.	Différence.
1............	342.21	0.90	2.8	509.2	509.3	+ 0.1
2............	—	0.90	2.6	509.4	509.3	— 0.1
3............	—	0.93	2.6	509.4	509.4	0.0
4............	—	0.94	2.6	509.4	509.4	0.0
5............	—	0.94	2.6	509.4	509.4	0.0
6............	—	0.95	2.7	509.3	509.4	+ 0.1
7............	—	0.96	2.5	509.5	509.4	— 0.1
8............	—	0.97	2.6	509.4	509.4	0.0
9............	—	0.98	2.6	509.4	509.5	+ 0.1
10............	—	1.01	2.5	509.5	509.5	0.0
11............	—	1.01	2.5	509.5	509.5	0.0
12............	—	1.02	2.5	509.5	509.5	0.0
13............	—	1.03	2.5	509.5	509.5	0.0
14............	—	1.04	2.4	509.6	509.5	— 0.1
15............	—	1.05	2.3	509.7	509.6	— 0.1
16............	—	1.06	2.5	509.5	509.6	+ 0.1
17............	—	1.10	2.4	509.6	509.6	0.0
18............	—	1.11	2.3	509.7	509.7	0.0

A l'inspection de ce tableau, d'après la coïncidence parfaite entre les nombres calculés par la méthode de battements et ceux obtenus par la formule de Doppler, il semblerait que l'on eût justifié et la rigueur des expériences de M. Schüngel, et la formule de Doppler. Or, le tableau suivant, obtenu avec les données mêmes de M. Schüngel, nous conduit à un tout autre résultat.

Nous avons cherché si les expériences de M. Schüngel s'approchaient des formules de Doppler, même simplifiées et réduites à leur premier terme, c'est-à-dire à $n\ (1 + k)$, au lieu de $n\ (1 + k + k^2 + \ldots$, etc.); ce n'est en effet que dans ce cas que, pour une longueur d'onde parcourue λ, on a exactement un battement perdu ou gagné.

En réduisant la formule de Doppler à $n\ (1 + k)$, nous aurions dû obtenir, dans les expériences de M. Schüngel, des nombres toujours plus forts que ceux calculés par cette dernière formule, tandis que les nombres oscillent autour de $n\,(1 + k)$, ce qui tend à nous faire croire à des erreurs d'observation.

Tableau I (*bis*).

$$n = 508\ v.d.,\ \text{d'où}\ \lambda = \frac{342.21}{508} = 0^{m}.6736.$$

Observations.	D — Durée d'une observation.	D×4 — 9 — Battements perdus.	$w - tv'$ — Chemin parcouru.	(D.4 — 9)λ — Produit des battem perdus par la longueur d'onde.	Différence.
1	3″.214	3.856	2.8926	2.597	— 0.296
2	3″.461	4.844	3.1149	3.263	+ 0.148
3	3″.461	4.844	3.2187	3.263	+ 0.044
4	3″.461	4.844	3.2533	3.263	+ 0.010
5	3″.461	4.844	2.2533	3.263	+ 0.010
6	3″.333	4.332	3.1666	2.918	— 0.249
7	3″.600	5.400	3.4560	3.637	+ 0.181
8	3″.461	4.844	3.3572	3.263	— 0.094
9	3″.461	4.844	3.3918	3.263	— 0.129
10	3″.600	5.400	3.636	3.637	+ 0.001
11	3″.600	5.400	3.636	3.637	+ 0.001
12	3″.600	5.400	3.672	3.637	— 0.035
13	3″.600	5.400	3.708	3.637	— 0.071
14	3″.750	6.000	3.900	4.042	+ 0.142
15	3″.913	6.652	4.109	4.481	+ 0.372
16	3″.600	5.400	3.796	3.637	— 0.159
17	3″.750	6.000	4.125	4.042	— 0.083
18	3″.913	6.652	4.343	4.481	+ 0.138

Somme des erreurs en + 1047
— en — 1116

On voit que les différences entre les chemins parcourus par le chariot et le produit des battements perdus par la longueur d'onde du diapason mobile peuvent s'élever à près de $0^{m}.40$, comme dans l'observation 15. De plus, comme ces différences sont tantôt en plus, tantôt en moins, elles sont dues véritablement à des erreurs d'observation.

Il était évidemment impossible que M. Schüngel, malgré tout le soin apporté à ses expériences, ne commît pas les erreurs que nous venons de faire ressortir. Il appuyait sur la clef de son appareil pour fermer le courant et mettre son télégraphe enregistreur en mouvement au moment précis d'un battement. Alors le chariot se met en marche. Pour que l'observation fût complétement exacte, il aurait donc fallu que l'observateur fût assez habile pour mettre le chariot en mouvement à l'instant précis du maximum d'un battement. Or, il est évidemment impossible d'admettre que tout cela se fût fait instantanément comme l'exigeait la manière d'opérer de l'observateur. Aussi n'est-il pas étonnant que tantôt le chariot fût en avance, tantôt en retard, par rapport au premier et au dernier battement perçu dans une observation.

Malgré l'imperfection des expériences de M. Schüngel, nous pourrons, en prenant la moyenne de ses observations, rechercher si le chemin moyen parcouru par le chariot diffère du produit moyen des battements perdus par la durée d'une observation. On aura :

Chemins parcourus par le chariot dans les 18 observations	=	$64^m.0294$
D'où chemin moyen....................................	=	$3^m.557$

Somme des produits des battements perdus par la durée des observations dans les 18 expériences......................................	=	$63^m.961$
D'où produit moyen..	=	$3^m.553$
Somme algébrique des erreurs dans les 18 observations...............	=	$0^m.069$
D'où erreur moyenne.	=	$0^m.0038$

On a donc le tableau suivant :

Nombre de battements perdus.	Moyenne des chemins parcourus.	Produit moyen des battements perdus par la longueur d'onde.	Différence.
5.275	$3^m.557$	$3^m.553$	$-\ 0^m.004$

Ainsi, d'après la moyenne des observations de M. Schüngel, nous arriverions à conclure que, pour chaque longueur d'onde parcourue par le chariot vers l'observateur, il y a une vibration double en plus entendue. Mais il est bien clair que ce résultat, quoique conforme aux idées théoriques, ne saurait être considéré comme démontré par les expériences de Schüngel : car s'il est vrai que la somme des erreurs en plus et en moins se contre-balance, on ne saurait cependant s'appuyer sur des observations qui, séparément, conduisent à des nombres si différents de ceux que l'on calculerait par la théorie.

M. Schüngel a publié une seconde série d'observations en déplaçant le diapason aigu de 512 *v. d.* Le diapason grave était fixe et l'aigu s'éloignait du grave et de l'observateur.

Voici le tableau publié par M. Schüngel :

Tableau II.

$n = 512$ (*Mémoire de Schüngel*).

Observations.	v	$v' = \frac{w}{t}$	s	$\nu' = 508 + s$	$n' = \frac{nv}{v + v'}$	Différence.
1............	340.36	0.91	2.7	510.7	510.6	— 0.1
2............	—	0.91	2.5	510.5	510.6	+ 0.1
3............	—	0.92	2.7	510.7	510.6	— 0.1
4............	—	0.92	2.6	510.6	510.6	0.0
5............	—	0.95	2.5	510.5	510.6	+ 0.1
6............	—	0.96	2.6	510.6	510.6	0.0
7............	—	0.97	2.5	510.5	510.5	0.0
8............	—	0.97	2.5	510.5	510.5	0.0
9............	—	0.98	2.6	510.6	510.5	— 0.1
10............	—	0.98	2.6	510.6	510.5	— 0.1
11............	—	1.00	2.5	510.5	510.5	0.0
12............	—	1.01	2.5	510.5	510.5	0.0
13............	—	1.02	2.5	510.5	510.5	0.0
14............	—	1.04	2.4	510.4	510.4	0.0
15............	—	1.05	2.3	510.3	510.4	+ 0.1

Comme précédemment nous déduisons, avec les données de l'auteur, le tableau suivant :

Tableau II (*bis*).

$$n = 512, \text{ d'où } \lambda = \frac{340.36}{512} = 0.6648$$

Observations.	D — Durée de l'observation.	$D \times 4 - 9$ — Battements perdus.	$w = tv'$ — Chemin parcouru.	$(D \times 4 - 9)\lambda$ — Produit des battements perdus par la longueur d'onde.	Différence.
1..............	3″.333	4.332	3.033	2.870	— 0m.153
2..............	3″.600	5.400	3.276	3.590	+ 0m.314
3..............	3″.333	4.332	3.066	2.880	— 0m.186
4..............	3″.461	4.844	3.184	3.220	+ 0m.036
5..............	3″.600	5.400	3.420	3.590	+ 0m.170
6..............	3″.461	4.844	3.322	3.220	— 0m.102
7..............	3″.600	5.400	3.492	3.590	+ 0m.098
8..............	3″.600	5.400	3.492	3.590	+ 0m.098
9..............	3″.461	4.844	3.392	3.220	— 0m.172
10..............	3″.461	4.844	3.392	3.220	— 0m.172
11..............	3″.600	5.400	3.600	3.590	— 0m.010
12..............	3″.600	5.400	3.636	3.590	— 0m.046
13..............	3″.600	5.400	3.672	3.590	— 0m.082
14..............	3″.750	6.000	3.900	3.989	+ 0m.089
15..............	3″.913	6.652	4.109	4.422	+ 0m.313

Somme des erreurs en + 1.118
— en — 0.923

On a donc, en prenant la moyenne :

Moyenne des battement perdus.	Moyenne des chemins parcourus.	Produit moyen des battements perdus par la longueur d'onde.	Différence.
—	—	—	—
5.232	3.465	3.478	+ 0.013

Les observations que nous avons présentées précédemment s'appliquent encore à cette seconde série d'expériences. Si nous nous reportons, de plus, au nombre moyen calculé dans la première série d'expériences, nous voyons que la différence entre le chemin moyen parcouru et le produit de la moyenne des battements par la longueur d'onde est de — 0.004. Dans la seconde série d'expériences, la même différence est de + 0.013.

Quelques auteurs ont admis que pour chaque longueur d'onde parcourue par le diapason mobile, il y avait un battement de gagné ou de perdu. Il n'est pas inutile de faire remarquer que cette manière de voir est en contradiction avec la formule de Doppler. En effet, s représentant toujours le nombre des battements entendus en une seconde, la formule par laquelle Schüngel calcule la tonalité n' du diapason mobile $(n' = 512 - s)$ peut s'écrire ainsi qu'il suit : [n représentant la tonalité du diapason mobile quand il est fixe $(n = 508)$]

$$n' = (n + 4) - s = n + \frac{(4 - s)n}{n} = n\left(1 + \frac{4 - s}{n}\right).$$

Or, $s = \dfrac{9}{t}$; la formule précédente devient donc :

$$n\left(1 + \frac{4t - 9}{nt}\right);$$

si l'on désigne par B_p le nombre des battements perdus par le temps t d'une observation, on a $B_p = 4\,t - 9$, et la formule précédente revient à :

$$n' = n\left(1 + \frac{B_p}{nt}\right) = n\left(1 + \frac{1}{V}\frac{B_p\lambda}{t}\right),$$

en désignant par V la vitesse du son et par λ la longueur d'onde du diapason n.

Si l'on compare le raport $\dfrac{B_p\lambda}{t}$ à la vitesse du chariot $v' = \dfrac{w}{t}$ (w exprimant le chemin parcouru par le chariot dans le temps t), on voit que l'hypothèse en vertu de laquelle il y aurait un battement de perdu ou de gagné pour une longueur d'onde parcourue donnerait :

$$w = B_p\lambda.$$

par conséquent $v' = \frac{B_p\lambda}{t}$; donc nous aurions pour représenter la tonalité t du diapason mobile quand il s'approche de l'observateur, la formule :

$$n' = n\left(1 + \frac{v'}{V}\right).$$

Dans ces conditions, la formule de Doppler donne :

$$n' = n\,\frac{V}{V - v'} = n\left(1 + \frac{v'}{V} + \frac{v'^2}{V^2} + \ldots\ldots,\right).$$

Pour en revenir aux expériences de M. Schüngel, on voit d'après cela que la vitesse d'entraînement v' de son chariot étant de 1 mètre, on avait :

$$n\left(\frac{v'}{V}\right)^2 = 0^{\text{vibration}}.009.$$

Les termes à la deuxième puissance, dans la formule de Doppler, étant négligeables, ce n'était donc pas la formule de Doppler que M. Schüngel pouvait vérifier, mais la formule :

$$n' = n\left(1 + \frac{v'}{V}\right).$$

Or, comme nous l'avons démontré, cette formule suppose implicitement que l'on ait $B_p\lambda = w$.

La vérification que M. Schüngel devait tirer de ses expériences, ce qu'il n'a pas fait, était de comparer, dans chacune d'elles, le produit des battements perdus par la durée d'une observation au chemin parcouru par son chariot. Nous avons fait cette comparaison, comme on l'a vu plus haut, et nous avons trouvé dans toutes les expériences de M. Schüngel des différences notables.

Nous pouvons aller plus loin, et, puisque M. Schüngel, dans ses tableaux, a comparé les nombres obtenus par lui à ceux que l'on calculerait par les formules de Doppler, nous allons faire aussi cette comparaison, mais d'une autre manière. Si K, K′ représentent toujours le rapport de la vitesse du chariot à la vitesse du son, nous avons les deux formules de Doppler :

$$N = \frac{n}{1 - K} \quad \text{d'où} \quad N - n = \frac{nK}{1 - K}$$

$$N' = \frac{n_1}{1 + K'} \quad \text{d'où} \quad n_1 - N' = \frac{n_1 K'}{1 + K'}$$

quand le chariot s'approche et quand il s'éloigne.

On tire de ces deux équations :

$$\frac{1}{K} = \frac{N}{N - n}, \qquad \frac{1}{K'} = \frac{N'}{n_1 - N'}.$$

Si les deux nombres obtenus par M. Schüngel concordent avec les formules de Doppler, on devra avoir :

$$\frac{K}{K'} = \frac{N - n}{n_1 - N'} \frac{N'}{N}$$

Si u et u' désignent la vitesse d'entraînement du chariot dans la première et la seconde observation, v étant toujours la vitesse du son, on a, comme on sait : $K = \frac{u}{v}$, $K' = \frac{u'}{v}$, de sorte que $\frac{K}{K'} = \frac{u}{u'}$. La formule précédente revient donc à :

$$\frac{u}{u'} = \frac{N - n}{n_1 - N'} \frac{N'}{N}$$

Or, dans les expériences de M. Schüngel, on a (s, s' étant les battements entendus en 1^s) :

$$\begin{array}{lll} N = 512 - s & n = 508 & \text{d'où } N - n = 4 - s \\ N' = 508 + s' & n_1 = 512 & \text{d'où } n_1 - N = 4 - s' \end{array}$$

Si donc les observations de M. Schüngel concordent avec celles de Doppler, il doit y avoir, entre le rapport des vitesses du chariot et les battements entendus en une seconde, la relation suivante :

$$\frac{u}{u'} = \frac{4 - s}{4 - s'} \frac{508 + s'}{512 - s}, \quad \text{d'où} \quad \frac{u}{4 - s}(512 - s) = \frac{u'}{4 - s'}(508 + s')$$

Telle est la formule qui permettra de comparer les éléments (u, s) du diapason qui s'approche aux éléments (u', s') du diapason qui s'éloigne.

Si l'on avait voulu faire la comparaison des éléments (u, s), (u_1, s_1) dans deux observations lorsque le diapason s'approche, on aurait eu de même :

$$\frac{u}{u_1} = \frac{4 - s}{4 - s_1} \frac{512 - s}{512 - s_1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{u}{4 - s}(512 - s) = \frac{u_1}{4 - s_1}(512 - s_1) = \text{Const.}$$

$$\text{et } \frac{u'}{u'_1} = \frac{4 - s'}{4 - s'_1} \frac{508 + s'_1}{508 + s'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{u'}{4 - s'}(508 + s') = \frac{u'_1}{4 - s'_1}(508 + s') = \text{Const.}$$

quand le diapason *s'éloigne*. Les deux constantes doivent être les mêmes d'après la relation précédente.

On a donc la relation générale :

$$\text{(D)} \quad \frac{u}{4 - s}(512 - s) = \frac{u_1}{4 - s_1}(512 - s_1) = \ldots\ldots = \frac{u'}{4 - s'}(508 + s')$$
$$= \frac{u_1}{4 - s'_1}(508 + s'_1) = \ldots\ldots,$$

lorsque la vitesse du son reste la même dans chaque expérience.

Dans ces équations il n'entre que des quantités du même ordre de grandeur. Elles sont donc les seules rationnelles qui permettent de vérifier les formules de Doppler lorsque la vitesse d'entraînement de la source sonore est relativement faible. Les vérifications ne seront plus illusoires comme elles l'étaient dans la méthode suivie par M. Schüngel.

Cet auteur était arrivé à regarder ses expériences comme une confirmation éclatante des formules de Doppler et avait même proposé de se servir de cette méthode pour calculer inversement la vitesse de propagation d'une onde sonore. Nous allons voir que les expériences de M. Schüngel étaient précisément dans ce cas en discordance avec les formules de Doppler; car s'il y avait eu concordance, les relations (D) se seraient parfaitement vérifiées. Or, nous avons le tableau suivant :

	$\frac{u}{4-s}(512-s)$		
1	381.9	11	343.0
2	327.4	12	340.4
3	338.3	13	349.8
4	342.0	14	331.2
5	342.0	15	314.8
6	372.1	16	360.0
7	326.0	17	350.3
8	352.9	18	332.8
9	356.5		
10	354.3		

	$\frac{u'}{4-s'}(508+s')$		
1	357.5	11	340.3
2	309.7	12	343.7
3	361.4	13	347.1
4	335.5	14	331.8
5	323.3	15	315.2
6	350.1		
7	330.1		
8	330.1		
9	357.4		
10	357.4		

Nous venons ainsi confirmer le résultat déjà obtenu par nous en comparant les nombres de Schüngel aux formules de Doppler simplifiées. Il n'y a concordance ni avec les formules de Doppler simplifiées, ni avec ces formules elles-mêmes. Si nous nous reportons au tableau (1 *bis*), nous voyons qu'il y a eu concordance dans l'expérience n° 11; nous en concluons que le nombre 343.0, dans la première série d'expériences, est la quantité constante qui conviendrait au cas où les expériences de Schüngel auraient été une confirmation des formules de Doppler. Tous les autres nombres oscillent autour de celui-là.

Nous arrivons maintenant à cette conclusion que les formules de Doppler sont inexactes, ou bien que, dans les expériences de M. Schüngel, il y a toujours eu des erreurs d'observation.

Il résultera cependant des recherches que nous publions dans la seconde partie de notre travail qu'on pourra se poser une troisième question : Le désaccord entre les formules de Doppler et les expériences de M. Schüngel ne serait-il pas dû à la vitesse d'entraînement du chariot dans ces expériences? Il suffira, en effet, d'admettre que cette vitesse n'ait pas toujours été rigoureusement constante pour nécessiter une correction des battements (s) entendus en une seconde et par suite modifier les valeurs des relations (D). Mais comme

M. Schüngel a négligé de nous donner l'espace parcouru par son chariot en fonction du temps, il nous est impossible de faire cette correction s'il y avait lieu. Toutefois, l'imperfertion de la méthode suivie par M. Schüngel, qui ne pouvait apprécïer des fractions de battements et être certain, par conséquent, que son chariot entrait en mouvement quand l'intensité du choc perçu était maximum, nous fait croire volontiers à des erreurs d'observation. Nous pensons même qu'on peut avoir la certitude qu'il en est ainsi si l'on se reporte aux tableaux (1 *bis*) et (2 *bis*). On voit que la *moyenne* des résultats concorde avec les nombres donnés par les formules de Doppler.

Pour toutes ces raisons il nous a paru impossible d'arriver à des résultats concluants en opérant comme M. Schüngel l'avait fait. Aussi nous avons pensé qu'il était indispensable, pour résoudre définitivement la question, de reprendre ces expériences par une méthode graphique à l'aide de laquelle on pût éliminer toutes les erreurs d'observation.

Remarquons, en terminant, que les rapports

$$\frac{u}{4 - s}(512 - s), \quad \frac{u'}{4 - s'}(508 + s')$$

représentent la vitesse du son qui était de 342^{m}.21 dans la première série d'expériences et de 340^{m}.36 dans la seconde série.

Le dernier tableau donnera donc la vitesse du son que l'on déduit des expériences de M. Schüngel. On se demande, en présence de pareils résultats, comment cet auteur a pu écrire les lignes suivantes :

« Pour montrer avec quelle approximation on obtient la vitesse du son, je dirai qu'avec deux diapasons de 508 et 512 vibrations et une vitesse de 0^{m}.8, une erreur de 0.001 dans le nombre des vibrations ne peut changer que d'un quart de mètre la vitesse du son.

« En finissant, je fais remarquer que de la valeur trouvée de s, on peut déduire avec assurance la valeur de la vitesse du son, car on est dans un air tranquille, dont on peut estimer exactement la température et l'état hygrométrique.

« J'abandonne à d'autres physiciens le soin de déterminer ainsi la vitesse du son, car je ne me propose pas de faire moi-même ces expériences.

« Je serai satisfait si l'on trouve que les difficultés ne sont pas insurmontables et si d'autres physiciens ne trouvent pas indignes d'eux d'augmenter les travaux sur la vitesse du son. »

TROISIÈME PARTIE

D'après l'étude à laquelle nous venons de nous livrer, nous voyons que les travaux antérieurs publiés sur la variation de la tonalité dans le cas du déplacement de la source sonore n'ont point épuisé la question.

Les recherches de Vogel étaient forcément incomplètes, comme nous l'avons vu. Quant aux expériences de Schüngel, elles n'ont pu nous conduire à des résultats même approximatifs. D'après l'analyse que nous avons présentée des Mémoires publiés à ce sujet, il se trouvait bien que la tonalité paraissait varier conformément aux idées théoriques de Doppler, mais il était impossible de dire si ses formules représentaient exactement le phénomène. Pour résoudre définitivement la question, nous avons adopté un procédé graphique et un appareil que nous décrirons plus loin.

A l'aide de cet appareil, nous avons fait deux séries d'expériences.

La première série, que l'on trouvera au § 2 du chapitre I^{er}, a pour but de montrer, ce que l'on n'avait pas fait jusqu'à présent, que l'observateur doit entendre plus ou moins de vibrations, quand la source sonore s'approche ou s'éloigne de lui. C'est ainsi que, dans notre appareil, la membrane vibrante qui représente le tympan de l'oreille d'un observateur écrit 502 *v. d.* du diapason fixe pour 256 *v. d.* du diapason chronographe. Dès que le diapason descend, c'est-à-dire s'approche de la membrane, celle-ci, dans le même temps, écrit : $503^{v.d.}.10$, $502^{v.d.}.8$, $502^{v.d.}.5$, $502^{v.d.}75$.

Le diapason s'éloigne-t-il, au contraire, de cette membrane, elle n'écrira plus que $501^{v.d.}$, $500^{v.d.}.75$, $501^{v.d.}.5$, $501^{v.d.}.25$.

Dans la deuxième série d'expériences transcrites au paragraphe 3 du chapitre I^{er}, les deux diapasons vibraient simultanément. Cette fois, ce sont des battements que la membrane inscrit. Or, l'inspection des tableaux nous montre avec quelle rigueur on peut se rendre compte, à chaque instant, de la variation, aussi faible qu'elle soit, de la vitesse d'entraînement du diapason mobile. Si le mouvement avait été uniforme et que la membrane eût écrit, par exemple, 10 battements pour 256 *v. d.* du diapason chronographe ; il est bien clair que, sur nos épreuves, 1 battement aurait dû correspondre à $25^{v.d.}.6$ du diapason chronographe ; tandis que si le mouvement n'est pas uniforme, 1 battement répondra à 24 *v. d.*, 26 *v. d.*, 27 *v. d.* du diapason chronographe. Nous avons, pour ainsi dire, un témoin constant des plus petites variations dans la vitesse d'entraînement de la source sonore.

Dans le chapitre II, nous abordons la question au point de vue théorique. Nous établissons d'abord (§ 2) les formules de Doppler. Nous montrons comment elles devraient être interprétées dans le cas où la vitesse d'entraînement ne serait pas constante. Nous montrons ensuite sous quelle forme (G) il est convenable de les représenter, lorsque la vitesse d'entraînement n'est plus du même ordre de grandeur que la vitesse de propagation du son.

Dans le paragraphe 3 du même chapitre, nous étudions la variation de la tonalité dans l'appareil des interférences. D'après l'identité des formules auxquelles nous arrivons avec celles de Doppler, nous concluons : que si l'on voulait vérifier les formules de Doppler lorsque, la source sonore restant fixe, l'observateur s'en approche ou s'en éloigne, on devrait employer l'appareil des interférences transformé de manière à écrire les battements.

Dans le chapitre III, nous étudions la variation de la tonalité dans notre appareil.

Nous examinons (§ 1er) le cas où la vitesse d'entraînement serait constante, et nous montrons, en appliquant les formules ordinaires des interférences, que pour identifier les valeurs des battements calculées par celles-ci avec celles que l'on déduit des formules de Doppler, on doit faire l'hypothèse suivante. Il faut admettre : premièrement, que notre appareil est ramené à l'appareil des interférences; secondement, que le diapason mobile (n, λ), devenu fixe, vibre comme si sa longueur d'onde λ était égale à λ_1 inverse de la tonalité cherchée.

Dans le § 2, nous examinons le eas où la vitesse d'entraînement est variable et nous donnons une formule empirique qui nous permet de déterminer la tonalité en fonction des battements observés. C'est la formule (7).

Dans le § 3, en appliquant les formules des interférences qui, conformément aux idées de Doppler, conviendraient à notre appareil, nous établissons une formule (9) qui nous donne, pour un nombre entier de battements, la différence entre la tonalité observée lorsqu'un chemin a été parcouru d'un mouvement variable et celle que l'on aurait eue si le mouvement avait été uniforme. Cette formule sera fondamentale, comme nous le verrons plus loin, pour vérifier l'exactitude des idées de Doppler.

Dans les chapitres IV et V qui suivent, nous ramenons les observations que nous avons faites avec des vitesses d'entraînement variables, à ce qu'elles auraient été si ces vitesses étaient restées constantes. Dans ces conditions, nous montrons que les battements correspondants aux diapasons ascendants et descendants d'un mouvement uniforme sont donnés par les deux formules empiriques :

$$A^1_\beta = B_\beta + 1{,}544 \quad \uparrow$$
$$A^1_\alpha = B_\alpha - 1{,}334, \quad \downarrow$$

A'_α, A'_β étant les battements qui correspondent à une vitesse uniforme; B_α, B_β ceux que l'on observe quand les diapasons restent fixes.

On en déduit alors facilement les tonalités qui conviennent au cas d'un mouvement uniforme.

Dans le chapitre VI, nous discutons les résultats précédemment obtenus, et nous concluons que les formules de Doppler sont très-exactes lorsque l'on a soin d'introduire la correction de la membrane.

Enfin, dans le chapitre VII, nous donnons les formules qui permettraient de calculer la vitesse du son, en fonction des battements inscrits en 1ˢ lorsque le mouvement du diapason mobile a été ramené à être uniforme. Nous montrons que cette méthode proposée par Schüngel ne saurait jamais servir à la recherche de la vitesse de propagation du son.

CHAPITRE PREMIER

§ 1er.

DESCRIPTION DE L'APPAREIL

Notre appareil se compose essentiellement de deux tubes de cuivre *a*, *b*, placés verticalement, de 0m.015 de diamètre et de 1m.20 de hauteur. Ces deux tubes se réunissent par leur extrémité inférieure en un seul. Ce dernier vient aboutir à une caisse résonnante *R*, sur laquelle est tendue une membrane en baudruche *M* armée d'un style. Dans cette caisse peut glisser un piston percé d'un trou qui, tout en laissant arriver à la membrane les vibrations de l'air, fait de cette caisse un véritable résonnateur. L'extrémité supérieure du tube *b* aboutit à une caisse résonnante *C*, devant laquelle vibre électriquement un diapason ut_4, d'environ (512 *v.d.*). Dans le tube *a* peut glisser, à frottement doux, un cylindre de cuivre d'une longueur sensiblement égale à celle de *a*. Ce cylindre aboutit à une caisse résonnante *C'*, devant laquelle vibre électriquement un diapason (ut_4 — 10 *v.d.*). On pourra, en faisant glisser le cylindre dans le tube *a*, faire varier à volonté la distance de cette caisse résonnante *C'* à celle *C* qui reste fixe. On obtient un mouvement de va-et-vient convenable en fixant aux deux extrémités de la caisse mobile une corde qui vient s'enrouler, après avoir passé sur des poulies, sur une roue à gorge, munie d'une manivelle comme le montre la figure.

Pour déterminer graphiquement le chemin parcouru par la caisse mobile, on la met en communication, par un fil électrique, avec un appareil enregistreur *E* et un système de piles. La communication électrique n'est établie dans l'électro-aimant qu'au moment où la caisse mobile est au commencement et à la fin de sa course. A ce moment même un style (*s*), placé à côté du style de la membrane *s'*, inscrit le changement qui s'est produit dans l'électro-aimant. Près du style de la membrane est placé un diapason chronographe de Kœnig de 256 *v.d.* (*ut*3), armé d'un style *s''*. La caisse résonnante, le diapason et l'électro-aimant sont placés sur un même support, de sorte que l'on peut facilement amener le style de la membrane, celui du diapason chronographe et celui de l'électro-aimant devant un cylindre noirci *T*. On peut donc obtenir ainsi exactement les mouvements vibratoires de la membrane pendant un temps déterminé par le diapason chronographe, et correspondant à un chemin parcouru par le diapason mobile.

Pour juger du degré de rigueur des observations faites dans ces conditions, nous ferons les remarques suivantes :

Lorsque la membrane vibre sous l'influence d'un diapason, *elle écrit un nombre de vibrations qui est exactement le même que celui qu'écrirait directement le diapason.*

Nos expériences nous le montreront nettement, et nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer les lecteurs à l'épreuve 1 de notre album. Cette épreuve a été obtenue en inscrivant les vibrations de deux diapasons, de 256 vibr. doubl. : 1° par l'intermédiaire d'une membrane armée d'un style ; 2° par inscription directe. Or, dans le même temps, il n'y a aucune différence dans le nombre des vibrations inscrites. Nous sommes donc assuré que, dans nos expériences, la membrane inscrira exactement les vibrations de nos deux diapasons.

En second lieu, quelle est l'influence de l'électricité sur les diapasons?

M. Kœnig a fait des expériences à ce sujet en 1862, et il a montré qu'un diapason de 100 *v.d.*, marchant électriquement, perdait en 1ˢ *un sixième* de vibration.

Quelles que soient les variations dues à l'emploi des électro-aimants, elles n'auront aucune influence dans les expériences dans lesquelles nous emploierons la méthode des battements, puisqu'elles se détruisent. Nous serons donc exactement dans les mêmes conditions que si nous avions fait vibrer nos diapasons avec l'archet. (Voir les épreuves 2, 3, 4.)

En dernier lieu, le mouvement vibratoire d'un des diapasons ne peut être influencé, par l'intermédiaire des tubes de communication (*a*, *b*), par le mouvement vibratoire du diapason voisin. On a eu soin, en effet, de prendre deux diapasons dont le nombre de vibrations différait de (10 *v.d.*). Nous sommes donc dans les meilleures conditions pour ne commettre aucune erreur d'observation.

Il nous reste à parler maintenant du mouvement de translation que nous donnerons à notre diapason mobile. Nous n'avons pas cherché à obtenir un mouvement qui fût rigoureusement constant. Il aurait été probablement impossible de résoudre ce problème. Quoique ayant toujours opéré de façon que le mouvement restât sensiblement le même dans une expérience, nous n'avons pas, *à priori*, admis cette constance comme Schüngel l'avait fait. Aussi, comme nous le verrons, nous avons pu montrer que les différences entre les observations et le calcul par les formules de Doppler devaient être mises sur le compte de la vitesse de translation de la source sonore.

Nous avons suivi deux méthodes pour déterminer la variation de la tonalité avec le déplacement de la source sonore : la méthode de l'inscription directe des vibrations du diapason qui se déplace, et la deuxième méthode, celle des battements. Cette dernière est la seule rigoureuse. La première méthode a surtout été suivie pour parler aux yeux. On n'avait pas, jusqu'à présent, montré qu'un diapason qui, fixe, écrit 502 *v.d.* pour 256 *v.d.* du diapason chronographe, écrira, par exemple, 503 *v.d.* dès qu'il se déplace dans un sens, et 501 *v.d.* lorsqu'il se déplace en sens contraire, pour 256 *v.d* du diapason chronographe.

DÉTERMINATION DE LA TONALITÉ DES DIAPASONS

L'épreuve n° 2 de notre album nous permet de déterminer exactement la tonalité du diapason ut_4 qui restera toujours fixe. Comme moyenne d'observations, nous avons $ut_4 = 512^{v.d.}.65$.

L'épreuve n° 3 nous donne la tonalité du diapason ($ut_4 - 10$) qui sera mobile. Nous voyons que nous avons $ut_4 - 10 = 502$ *v.d.*

Donc le nombre des battements produits par ces deux diapasons à l'état de repos est égal à 10.65.

L'épreuve n° 4 nous donne le nombre des battements de deux diapasons fixes. Nous obtenons $21^{b}.21$ pour 512 *v.d* du chronographe, ce qui nous donne $10^{b}.60$ en 1 seconde.

Cette dernière épreuve vient donc confirmer les valeurs obtenues directement dans les deux expériences épreuves. Elle nous montre en même temps, que les variations qui peuvent se produire dans la tonalité de chaque diapason par l'emploi des électro-aimants, ne saurait avoir la moindre influence sur le nombre des battements observés.

6

PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES

§ 2.

Les quatre premières épreuves n^{os} 5, 6, 7, 8, ont pour but de montrer qu'il y a variation dans la tonalité par le déplacement de la source sonore. Dans ces premières épreuves, on n'a pas cherché à déterminer de relation entre le chemin parcouru et ce changement de tonalité. On ne s'est pas appliqué à donner au diapason mobile un mouvement uniforme.

Chacune de ces épreuves porte :

1° Les inscriptions du diapason (ut_4—10) à l'état de repos ;

2° Les inscriptions du même diapason descendant, et qui, par conséquent, se rapproche de la membrane ;

3° Les inscriptions du même diapason s'élevant ou s'éloignant de la membrane.

Pour abréger l'écriture, nous représenterons le diapason qui descend par une flèche verticale dont la pointe est dirigée vers le bas. Lorsque la flèche regardera vers le haut, nous voudrons parler du diapason mobile en train de s'éloigner. Nous aurons avec les épreuves précédentes, le tableau suivant :

ÉPREUVE N° 5.

Diapason fixe..........	502	608	Diap. mob. ↓	503.10	609.10	Diap. mob. ↑	501	606.6
Diapason chronographe.	256	310	Diap. chron.	256	310	Diap. chron.	256	310

ÉPREUVE N° 6.

Diapason fixe..........	502	607.80	Diap. mob. ↓	502.80	609	Diap. mob. ↑	500.75	606.6
Diapason chronographe.	256	310	Diap. chron.	256	310	Diap. chron.	256	310

ÉPREUVE N° 7.

Diapason fixe........	502.1	607.80	Diap. mob. ↓	502.5	1005.25	Diap. mob. ↑	501.5	1002.6
Diapason chronographe	256	310	Diap. chron.	256	512	Diap. chron.	256	512

ÉPREUVE N° 8.

Diapason fixe...	502	608	Diap. mob. ↓	502.75	609.1	1005.6	Diap. mob. ↑	501.25	606.75
Diapason chron	256	310	Diap. chron.	256	310	512	Diap. chron.	256	310

Nous avons obtenu un grand nombre d'autres épreuves qu'il était inutile d'ajouter à celles-ci pour rendre évident le phénomène qui se passe dans le déplacement d'un diapason mobile. Nous allons chercher maintenant à déterminer, par le même procédé, la relation qui existe entre la variation de la tonalité et le chemin parcouru par le diapason. Cette méthode, avons-nous dit. sera moins rigoureuse que celle des battements, que nous emploierons ultérieurement. Elle sera moins rigoureuse uniquement par suite de la difficulté d'évaluer les fractions de vibrations. Dans nos épreuves, en effet, une vibration double occupe une longueur de $1^{mm}.5$, tandis que dans les épreuves que nous obtiendrons par la méthode des battements, un battement occupant en moyenne une longueur de 6 centimètres, on peut déterminer très-rigoureusement une fraction de battement correspondant à une fraction de vibration double.

Dans ces nouvelles épreuves, nous avons, comme précédemment, inscrit sur chacune le nombre de vibrations du diapason fixe, le nombre de vibrations du diapason descendant, puis montant. Le chemin parcouru était, dans les deux cas, de 1 mètre, c'est-à-dire environ d'une longueur d'onde et demie. Sur le passage du diapason, au commencement de sa course, il y avait interruption du courant, d'où inscription sur l'épreuve; la même chose se renouvelait à la fin de la course du diapason. Nous avons aussi obtenu trois séries d'épreuves dont nous transcrivons les résultats dans les tableaux suivants :

ÉPREUVE N° 9.

Diapason fixe..........	502.10	810	d'où	988.50	1008.58
— chronographe.	256	415		504	514.25

$(\alpha - \alpha')$

		α	α'
Diapason mobile $\downarrow$	Diapason chronographe.	0.25	504.25 = 504
	— $\downarrow$	0.50	990.25 = 989.75

Donc augmentation de la tonalité $= 1^{vd}.25$ pour $1^{m}.0$ en $\left(\frac{504}{256}\right)''$

$= 0^{vd}.63$ pour $1^{m}.0$ en $1''$

$(\alpha_1 - \alpha'_1)$

		α_1	α'_1
Diapason mobile $\uparrow$	Diapason chronographe.	4.75	519 = 514.25
	— $\downarrow$	9.50	1016.5 = 1007.0

Donc diminution de la tonalité $= 1^{vd}.58$ pour $1^{m}.0$ en $\left(\frac{514.25}{256}\right)''$

$= 0^{vd}.78$ pour $1^{m}.0$ en $1''$

ÉPREUVE N° 10.

Diapason fixe..........	502.1	812	d'où	867.9	1053
— chronographe.	256	414		442.5	536.9

$(\alpha - \alpha')$

		α	α'
Diapason mobile $\downarrow$	Diapason chronographe.	14.60	551.5 = 536.90
	— $\downarrow$	28.50	1083.0 = 1054.50

Donc augmentation de la tonalité $= 1^{vd}.5$ pour $1^{m}.0$ en $\left(\frac{536.90}{256}\right)''$

$= 0^{vd}.71$ pour $1^{m}.0$ en $1''$

			α_1	α_1'	
$(\alpha_1 - \alpha_1')$	Diapason mobile ↑	Diapason chronographe.	13.50	456.0	= 442.50
		— ↓	26.50	892.75	= 866.25

Donc diminution de la tonalité = $1^{vd}.65$ pour $1^m.0$ en $\left(\frac{442.50}{256}\right)$

= $0^{vd}.95$ pour $1^m.0$ en 1″

ÉPREUVE N° 11.

Diapason fixe..........	502	d'où	420	526.5
— chronographe.	256		823.5	1032.4

			α	α_1	
$(\alpha - \alpha')$	Diapason mobile ↓	Diapason chronographe.	0.75	527.25	= 526.5
		— ↓	1.5	1035.5	= 1034.0

Donc augmentation de la tonalité = $1^{vd}.6$ pour $1^m.0$ en $\left(\frac{526.5}{256}\right)''$

= $0^{vd}.77$ pour $1^m.0$ en 1″

			α_1	α_1'	
$(\alpha_1 - \alpha_1')$	Diapason mobile ↑	Diapason chronographe.	22.0	442	= 420
		— ↑	43.25	865.5	= 822.25

Donc diminution de la tonalité = $1^{vd}.25$ pour $1^m.0$ en $\left(\frac{420}{256}\right)''$

= $0^{vd}.76$ pour $1^m.0$ en 1″

Nous pouvons joindre à ces trois épreuves la suivante, n° 12, obtenue dans une autre serie d'expériences, dans celle des battements. Le chemin parcouru par le chariot fut alors de $0^m.96$. La tonalité du diapason fixe était de 502. (Voir épreuve n° 3.)

ÉPREUVE N° 12.

Diapason fixe..........	502	d'où	682.4	470.6	423.5
— chronographe.	256		348	240	216

			α	α'	
$(\alpha - \alpha')$	Diapason mobile ↑	Diapason chronographe.	12.75	360.75	= 348
		— ↑	25.0	706.50	= 681.50

Donc diminution de la tonalité = $0^{vd}.9$ pour $0^m.96$ en $\left(\frac{348}{256}\right)''$

= $0^{vd}.66$ pour $0^m.96$ en 1″

			α_1	α_1'	
$(\alpha_1 - \alpha_1')$	Diapason mobile ↓	Diapason chronographe.	1.0	241.0	= 240
		— ↓	2.0	474.25	= 472.25

Donc augmentation de la tonalité = $1^{vd}.55$ pour $0^m.96$ en $\left(\frac{240}{256}\right)''$

= $1^{vd}.65$ pour $0^m.96$ en 1″

			α_2	α_2'	
$(\alpha_2 - \alpha_2')$	Diapason mobile ↑	Diapason chronographe.	12.75	228.75	= 216.0
		— ↑	25.0	447.50	= 422.50

Donc diminution de la tonalité = $1^{vd}.0$ pour $0^m.96$ en $\left(\frac{216}{256}\right)''$

= $1^{vd}.18$ pour $0^m.96$ en 1″

Nous montrerons plus loin que les formules de Doppler, qui permettront de calculer la variation de la tonalité dans le cas de vitesses d'entraînement relativement faibles, sont les suivantes :

$$n' = n \pm \frac{D}{\lambda'}\,\frac{256}{\alpha},$$

D étant le chemin parcouru par le diapason mobile pour $\alpha\, v.d$ du diapason chronographe. Le signe + convient au cas où le diapason s'approche de la membrane, le signe — au cas où il s'en éloigne. Comparons les nombres obtenus dans nos expériences à ceux que l'on calculerait par ces dernières formules de Doppler, nous aurons le tableau suivant :

	DIAPASON MOBILE ↓ $(n' - n)$ Observé.	Calculé.	Différence		DIAPASON MOBILE ↑ $(n - n')$ Observé.	Calculé.	Différence.
N° 9	0.63	0.75	— 0.12	N° 9	0.78	0.73	+ 0.05
— 10	0.71	0.70	+ 0.01	— 10	0.95	0.85	+ 0.10
— 11	0.77	0.72	+ 0.05	— 11	0.76	0.90	— 0.14
— 12	1.65	1.52	+ 0.13	— 12	0.66	1.04	— 0.38
				— 12	1.18	1.68	— 0.50

On voit qu'il existe des différences entre les nombres observés et les nombres calculés par les formules de Doppler. A quoi sont-elles dues? Il nous sera évidemment impossible de l'expliquer maintenant, puisque nous pouvons facilement nous tromper dans l'évaluation même de nos vibrations de $^1/_4{}^{v.d}$. En effet, sur nos épreuves, une vibration double occupait une longueur de 1.5 millimètres; $^1/_8{}^{v.d.}$ correspond à $0^{mm}.2$. Or, nous sommes obligé de faire deux évaluations au commencement et à la fin de la course du diapason mobile. Une erreur de $0^{mm}.2$ est très-plausible dans chaque cas, ce qui peut nous donner $^1/_4{}^{v.d.}$ de différence uniquement due aux erreurs d'évaluation du nombre des vibrations sur les épreuves. Cette méthode de la détermination directe du nombre de vibrations du diapason en mouvement ne saurait donc être employée à la recherche de la vérification de la formule de Doppler.

Aussi, nous ne la proposons que comme première méthode d'approximation.

Nous arrivons maintenant à la méthode des battements indiquée pour la première fois par Kœnig, et aussi employée par Schüngel, comme nous l'avons dit. Mais ce que cette méthode peut avoir de rigoureux disparaissait entre les mains de cet expérimentateur. Il évaluait les battements à l'oreille lorsque ceux-ci lui paraissaient avoir leur maximum d'intensité. Il lui était donc impossible de déterminer ainsi des fractions de battements. Or, les formules de Doppler, comme nous le verrons, diffèrent en moyenne, soit en plus, soit en moins, sur huit battements observés, de $0^s.1$ avant la correction de la membrane, qui représente le tympan d'un observateur. Il était donc impossible à M. Schüngel, en opérant bien, de trouver par son procédé des nombres qui différassent de ceux calculés par les formules de Doppler. S'il est arrivé à ce résultat, comme nous l'avons vu, on ne peut l'attribuer qu'à des erreurs d'observation.

DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

PAR LA MÉTHODE DES BATTEMENTS

§ 3.

Les épreuves 13, 14, 15, 16, 17 de notre album ont été obtenues par cette méthode. Disons en quelques mots comment nous avons opéré.

Nous avons commencé par déterminer séparément la tonalité de chacun de nos deux diapasons. Ce sont les épreuves 2 et 3 précédemment indiquées. Puis les diapasons étant à l'état de repos, nous avons déterminé le nombre des battements qu'ils effectuaient en 1 seconde. C'est l'épreuve 4 de notre album. Cette dernière épreuve étant une vérification rigoureuse de la tonalité des diapasons précédemment obtenue, nous étions assuré d'avance de la rigueur des résultats auxquels nous devions arriver. Nous avons opéré méthodiquement dans nos diverses épreuves. Le diapason mobile était soulevé en haut de l'appareil, et par un coup d'archet on faisait entrer en vibration le diapason chronographe. Alors, au signal donné par l'opérateur, qui faisait tourner le cylindre noirci, un aide imprimait à la manivelle un mouvement de rotation en vertu duquel le diapason mobile descendait d'un mouvement aussi uniforme que possible. On recommençait la même opération en faisant monter le diapason. Dans les deux cas, la distance parcourue et inscrite par l'électro-aimant interrupteur était de $0^m.96$: cette longueur a toujours été la même dans toutes nos épreuves.

Une première remarque que l'on fera en examinant ces diverses épreuves est qu'une vibration double du diapason chronographe correspondant à $\left(\frac{1}{256}\right)^s$ occupe une longueur moyenne de 3 millimètres. Donc dans la détermination des battements par rapport au diapason chronographe, on ne pourra jamais se tromper, même de 1/3 de millimètre. La même observation s'applique à la détermination du chemin parcouru en fonction des mêmes vibrations.

Nous remarquerons encore que les battements inscrits sur nos épreuves s'étendent sur une longueur de 7 à 9 centimètres ; on pourra donc déterminer les fractions de battement avec la plus grande rigueur. Enfin si le mouvement du diapason avait été rigoureusement constant quand celui-ci s'éloigne ou s'approche de la membrane ; si, dans une observation, on eût, par exemple, observé 8^b alors que le diapason chronographe aurait inscrit 208 *v.d* ; il est bien clair que, dans ces conditions, nous aurions tracé sur nos épreuves 1^b pour 26 *v.d* du diapason chronographe. Le moindre changement dans la vitesse aura pour effet de faire inscrire 1^b pour 25 ou 27 *v.d.* du diapason chronographe.

Nous aurons ainsi un moyen très-rigoureux pour déterminer la variation du mouvement du diapason à chaque instant dans nos expériences. C'est encore une supériorité de notre procédé sur celui de M. Schüngel qui en avait été réduit à admettre que le mouvement de son chariot fût toujours resté constant. A l'occasion de quelques-unes de nos épreuves, nous aurons soin de déterminer le rapport des battements au nombre de vibrations correspondant du diapason chronographe.

Voici la nomenclature de nos six dernières épreuves :

ÉPREUVE N° 13.	α	α_0	CHEMIN PARCOURU $0^m.96$.	α	α_0
Diapason chronographe ..	259.5	250.75	Diapason chronographe	187.75	175
(N° 5) $\beta - \beta'$ Diapason mobile ↓	$9^{batt.}.36$	9 .0	(N° 3) $\beta_2 - \beta'_2$. Diapason mobile ↑	6.36	6
Diapason chronographe...	249.5	232.75	Diapason chronographe	298.75	294.75
(N° 4) $\beta_1 - \beta'_1$ Diapason mobile ↑	11.79	$11^b.0$	(N° 2) $\beta_3 - \beta'_3$. Diapason mobile ↑	$14^b.19$	14^b

	α	α_0
Diapason chronographe............	242.5	216.75
(N° 1) $\beta_4 - \beta'_4$. Diapason mobile ↓	$8^b.93$	8

RAPPORT DES BATTEMENTS AUX VIBRATIONS DU DIAPASON CHRONOGRAPHE

		vd				
$[\beta - \beta']$ ↓	β — à 1^{er} battement........	3.5				
	1^{er} battement..........	26.5	5^e battement.	27.5	9^e battem^t.	31.75
	2^e —	32.0	6^e —	24.5	9^e à β'...	5.25
	3^e —	25.75	7^e —	24.25		259.5
	4^e —	33.0	8^e —	25.75		

$[\beta_1 - \beta'_1]$ ↑	β_1 — à 1^{er} battement........	7.5	7^e battement...............	20.75
	1^{er} —	21.25	8^e —	19.0
	2^e —	22.0	9^e —	22.0
	3^e —	19.25	10^e —	23.0
	4^e —	20.0	11^e —	21.5
	5^e —	21.75	11^e à β	9.15
	6^e —	22.25		249.50

RAPPORT DES BATTEMENTS AUX VIBRATIONS DU DIAPASON CHRONOGRAPHE (*suite*)

$[\beta_2 - \beta'_2]$ ↓

β_2 — à 1er battement	12.75	4e battement	30.50
1er battement	27.25	5e —	27.25
2e —	31.5	5e à β'_2	28.25
3e —	30.25		187.75

$[\beta_3 - \beta'_3]$ ↑

1er battement	20.25	8e battement	20.50
2e —	21.25	9e —	20.25
3e —	20.25	10e —	21.50
4e —	19.75	11e —	22.25
5e —	20.00	12e —	22.25
6e —	21.50	13e —	22.25
7e —	21.50	14e —	21.25
		14e à β'_3	4.00
			298.75

$[\beta_4 - \beta'_4]$ ↓

β_4 — à 1er battement	7.75	5e battement	23.25
1er battement	26.5	6e —	24.00
2e —	31.0	7e —	24.00
3e —	29.25	8e —	28.50
4e —	30.25	8e à β'_4	18.00
			242.50

ÉPREUVE N° 14. — CHEMIN PARCOURU $0^m.96$.

	α	α_0
Diapason chronographe	396.25	353.50
N° 8. $\beta - \beta'$ Diap. mobile ↓	$14^b.67$	$13^b.0$

	α	α_0
Diapason chronographe	231.25	206
N° 6. $\beta_2 - \beta'_2$ Diap. mobile ↓	$7^b.89$	7.0

	α	α_0
Diapason chronographe	295.0	265
N° 7. $\beta_1 - \beta'_1$ Diapason mobile ↑	$13^b.31$	12^b

RAPPORT DES BATTEMENTS AUX VIBRATIONS DU DIAPASON CHRONOGRAPHE

$\beta - \beta'$	396.25	$\beta_1 - \beta'_1$	295	$\beta_2 - \beta'_2$	231.25
	vd	β_1 — à 1er battement	16.5	β_2 — à 1er battement	18.75
β — à 1er battement	19	1er battement	22.5	1er battement	33.5
1er battement	29.25	2e —	23.5	2e —	29.5
2e —	31.25	3e —	22	3e —	34.25
3e —	26	4e —	20.5	4e —	25.75
4e —	27	5e —	21.5	5e —	26
5e —	29.50	6e —	22.5	6e —	28
6e —	28	7e —	23	7e —	29
7e —	26	8e —	20	7e à β'_2	6.50
8e —	25.50	9e —	21		231.25
9e —	25	10e —	21.5		
10e —	24.50	11e —	23.5		
11e —	26.50	12e —	23.5		
12e —	27	12e — β'_1	13.5		
13e —	28		295.0		
13e — β'	23.75				
	396.25				

ÉPREUVE N° 15. — CHEMIN PARCOURU 0m.96.

		α	α₀
	Diapason chronographe..	391.75	385.25
N° 12.	β — β′ Diap. mobile ↓	$14^b.27$	14^b
	Diapason chronographe..	256.0	242.5
N° 11.	β_1 — β'_1 Diap. mobile ↑	$11^b.63$	11^b

		α	α₀
	Diapason chronographe..	194.0	184.25
N° 10.	β_2 — β'_2 Diap. mobile ↓	$6^b.34$	6^b
	Diapason chronographe...	232.50	194.75
N° 9.	β_3 — β'_3 Diap. mobile ↑	10.76	9^b

RAPPORT DES BATTEMENTS AUX VIBRATIONS DU DIAPASON CHRONOGRAPHE

(β — β′) ↓ ...	391.75	β_1 — β'_1......	256.0	β_2 — β'_2......	194.0	β_3 — β'_3.....	232.50
1er battement.	29.5	β_1 — à 1er batt	5.5	β_2 — à 1er batt	9.75	β_3 — à 1er batt	18.5
2e —	33.0	1er battement.	21.5	1er battement.	32.0	1er battement	23.5
3e —	28.0	2e —	24	2e —	30.5	2e —	21.25
4e —	28.5	3e —	20.5	3e —	34.5	3e —	20.25
5e —	31.5	4e —	21.5	4e —	27.0	4e —	21.5
6e —	26.0	5e —	22.5	5e —	28.0	5e —	22.75
7e —	25.5	6e —	22.5	6e —	32.25	6e —	20.75
8e —	25.0	7e —	22.0		194.00	7e —	20
9e —	26.25	8e —	20.75			8e —	22
10e —	27.0	9e —	20.75			9e —	22.75
11e —	28.0	10e —	22.50			9e à β'_3.....	19.25
12e —	25.0	11e —	23.50				232.50
13e —	26.5	11e — β'_1......	8.00				
14e —	26.5		256.00				
14e à β′.......	6.5						
	391.75						

ÉPREUVE N° 16. — CHEMIN PARCOURU 0m.96.

		α	α₀
	Diapason chronographe.	207	169.5
N° 13.	β — β′ Diap. mobile ↓	$7^b.41$	6^b

		α	α₀
	Diapason chronographe...	279.0	253
N° 15.	β_2 — β'_2 Diap. mobile ↑	$13^b.23$	12^b

		α	α₀
	Diapason chronographe...	233.5	207.75
N° 14.	β_1 — β'_1 Diap. mobile ↑	$11^b.28$	10^b

RAPPORT DES BATTEMENTS AUX VIBRATIONS DU DIAPASON CHRONOGRAPHE

β — β′..................	207	β_1 — β'_1...............	233.5	β_2 — β'_2............	279
β — à 1er battement.....	14.5	β_1 — à 1er battement..	17.75	β_2 — à 1er battement.	16
1er battement........	31.0	1er battement.....	22	1er battement...	20.75
2e —	28.5	2e —	21	2e — ...	23
3e —	32	3e —	19.5	3e — ...	22.25
4e —	24.5	4e —	19.75	4e — ...	20.5
5e —	25	5e —	21	5e — ...	20.5
6e —	28.5	6e —	20	6e — ...	20.5
6e à β′..............	23	7e —	19.5	7e — ...	22
	207.0	8e —	21.5	8e — ...	22
		9e —	21.75	9e — ...	19.5
		10e —	21.75	10e — ...	19.5
		10e — à β'_1........	8	11e — ...	20.25
			233.50	12e — ...	22.25
				12e à β'_2.........	10
					279.00

ÉPREUVE N° 17. CHEMIN PARCOURU $0^m.96$.

			—	—				α	α_0
	Diapason chronographe.		315.75	299.75		Diapason chronographe.		284.25	256.00
N° 16.	$\beta - \beta'$	Diap. mobile ↓	$11^b.31$	11^b	N° 18.	$\beta_2 - \beta_2'$	Diap. mobile ↓	$10^b.06$	9^b
	Diapason chronographe.		274	261		Diapason chronographe.		268.0	239.75
N° 17.	$\beta_1 - \beta_1'$	Diap. mobile ↑	12.44	12^b	N° 19.	$\beta_3 - \beta_3'$	Diap. mobile ↑	$12^b.21$	11^b

RAPPORT DES BATTEMENTS AUX VIBRATIONS DU DIAPASON CHRONOGRAPHE

$\beta - \beta'$........	315.75	$\beta_1 - \beta_1'$......	274	$\beta_2 - \beta_2'$......	284.25	$\beta_3 - \beta_3'$.....	268
1er battement.	21.25	1er battement.	18.25	β_2 — 1er batt.	7.25	β_3 — 1er batt.	7.5
2e —	32.25	2e —	22.75	1er battement.	29.50	1er battement	20.75
3e —	28.75	3e —	24.25	2e —	32.00	2e —	23.25
4e —	28	4e —	22	3e —	29.50	3e —	19
5e —	30.5	5e —	19	4e —	30.00	4e —	21
6e —	27.75	6e —	22.75	5e —	27.25	5e —	23
7e —	25	7e —	23.25	6e —	24.25	6e —	22
8e —	25.25	8e —	23	7e —	26.50	7e —	20.50
9e —	25	9e —	21	8e —	26.50	8e —	21
10e —	27	10e —	21	9e —	30.50	9e —	22
11e —	29	11e —	20.5	9e b — β_2'.....	21.00	10e —	24
11e à β'......	16	12e —	23.25		284.25	11e —	23.25
	315.75	12e — β_1'.....	13.00			11e b à β_3'.....	20.75
			274.00				268.00

CHAPITRE II

§ 1er

Nous allons maintenant aborder la question au point de vue théorique. Nous commencerons par donner une nouvelle démonstration des formules de Doppler lorsque, l'observateur restant fixe, la source sonore s'approche ou s'éloigne de celui-ci. Nous montrerons ensuite comment on peut transformer ces formules pour les rendre applicables au cas où la vitesse d'entraînement serait très-faible par rapport à la vitesse de la propagation du son. Nous chercherons enfin ce qui se passe lorsque la vitesse d'entraînement ne reste pas constante. Il en était ainsi dans nos expériences ; il était par conséquent indispensable d'examiner la question à ce point de vue. Ensuite, comme nous sommes en présence d'un véritable phénomène d'interférence, nous appliquerons les formules ordinaires des interférences, en ayant soin, bien entendu, de ramener le diapason mobile à être fixe.

Ceci nous donnera l'occasion de comparer la variation de la tonalité dans nos expériences, à celle qui aurait lieu dans l'appareil des interférences de Kœnig. Ici, en effet, les deux diapasons qui interfèrent restent fixes en même temps que la distance à la membrane devient variable. Dans nos expériences, le phénomène, quoique assez semblable à celui des interférences, n'est pas identiquement le même. La source sonore se déplace. Nous montrerons que dans l'appareil des interférences, la variation de la tonalité étant donnée par la formule

$$n' - n = \frac{D}{\lambda}\,\frac{1}{t}$$

D étant le chemin parcouru dans le temps t, λ la longueur d'onde correspondant à n, nous devrons avoir pour celle-ci, lorsque la source sonore viendra à se déplacer :

$$n' - n = \frac{D}{\lambda'}\,\frac{1}{t}$$

λ' étant la longueur d'onde correspondant à n'.

On voit que dans le cas où la variation de la tonalité est très-faible, λ' différant alors très-peu de λ, on peut substituer l'un des phénomènes à l'autre : c'est-à-dire admettre par exemple que, dans le cas d'une vitesse d'entraînement faible, on peut considérer la source sonore comme immobile en même temps que la distance varie, comme dans l'appareil des interférences.

§ 2

FORMULES DE DOPPLER

Dans l'appareil des interférences, le diapason se trouve fixe. Il est bien clair alors que l'onde reste toujours la même et que la *longueur* est tout à fait indépendante du chemin plus ou moins étendu qu'on lui fait parcourir, par conséquent de la distance du diapason à la membrane.

Si nous supposons au contraire que le diapason se déplace, *la longueur d'onde devient fonction de la distance du diapason à la membrane,* comme nous allons le voir. Soit U la vitesse de la propagation du son, Δ la distance du diapason à la membrane, à l'origine du mouvement, u la vitesse de translation de ce diapason vers la membrane, n désignant le nombre de vibrations du diapason. On aura le tableau suivant, qui indiquera les moments où se fera chaque vibration au diapason mobile et à la membrane.

	DIAPASON.	MEMBRANE.
1^re^ vibration......	$t = 0$	$t = \frac{\Delta}{U}$
2^e^ vibration......	$t = \frac{1^s}{n}$	$t = \frac{\Delta - \frac{u}{n}}{U} + \frac{1}{n} = \frac{\Delta}{U} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{u}{U}\right)$
3^e^ vibration......	$t = \frac{2^s}{n}$	$t = \frac{\Delta - \frac{2u}{n}}{U} + \frac{2}{n} = \frac{\Delta}{U} + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{u}{U}\right)$

Donc, pour l'observateur placé à la membrane, le diapason mobile vibre comme si, fixe, il faisait en 1ˢ un nombre de vibrations n' satisfaisant à la relation :

$$n' = \frac{n}{1 - \frac{u}{U}} = n\left[1 + \frac{u}{U} + \left(\frac{u}{U}\right)^2 + \ldots\ldots\right],$$

C'est la formule de Doppler que nous retrouvons ainsi très-facilement.

D'après les tableaux précédents, on voit qu'à l'époque :

$$t = 0 \quad \text{on a} \quad \lambda = \frac{U}{n},$$

et à l'époque :

$$t = \frac{1}{n} \quad \text{on a} \quad \lambda_1 = \frac{U}{n}\left(1 - \frac{u}{U}\right);$$

de sorte que, dans un intervalle de temps $\frac{1}{n}$, la longueur d'onde λ est devenue égale à λ_1.

On pourra formuler ce qui se passe lorsqu'un diapason se déplace, en disant que la relation

$$n\lambda = U = \text{Const.}$$

qui est pour ainsi dire la *caractéristique* d'un diapason fixe, cesse d'avoir lieu dès que celui-ci s'approche ou s'éloigne de l'observateur.

Nous avons établi la formule de Doppler dans l'hypothèse où la vitesse d'entraînement de la source sonore serait constante. Supposons maintenant qu'elle puisse être variable.

Soit u, u', u'' les vitesses entre les intervalles de temps.

$$\left[t = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{n}\right], \quad \left[t = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{n}\right], \quad \left[t = \frac{2}{n} \quad \text{et} \quad t = \frac{3}{n}\right];$$

Les distances à la membrane seront :

$$\Delta; \quad \Delta - \frac{u}{n}; \quad \Delta - \frac{u + u'}{n}; \quad \Delta - \frac{u + u' + u''}{n}$$

aux époques

$$t = 0; \quad t = \frac{1}{n}; \quad t = \frac{2}{n}; \quad t = \frac{3}{n}.$$

Si l'on pose :

$$\frac{u}{n} = \frac{u}{\mathrm{U}}\lambda, \quad \frac{u'}{n} = \frac{u}{\mathrm{U}}\lambda', \quad \frac{u''}{n} = \frac{u}{\mathrm{U}}\lambda'',$$

Ces distances pourront s'écrire :

$$\Delta, \quad \Delta - \frac{u}{\mathrm{U}}\lambda, \quad \Delta - \frac{u}{\mathrm{U}}(\lambda + \lambda'), \quad \Delta - \frac{u}{\mathrm{U}}(\lambda + \lambda' + \lambda'').$$

Donc on aura comme précédemment le tableau suivant qui donnera les époques relatives auxquelles le diapason et la membrane entrerait en vibration.

	DIAPASON.	MEMBRANE.
1re vibration...	$t = 0$	$t = \frac{\Delta}{\mathrm{U}}$
2e vibration...	$t = \frac{1}{n}$	$t = \dfrac{\Delta - \frac{u}{\mathrm{U}}\lambda}{\mathrm{U}} + \frac{1}{n} = \frac{\Delta}{\mathrm{U}} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\frac{\lambda}{\lambda}\right)$
3e vibration...	$t = \frac{2}{n}$	$t = \dfrac{\Delta - \frac{u}{\mathrm{U}}(\lambda + \lambda')}{\mathrm{U}} + \frac{2}{n} = \frac{\Delta}{\mathrm{U}} + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\frac{\lambda + \lambda'}{2\lambda}\right)$
4e vibration...	$t = \frac{3}{n}$	$t = \dfrac{\Delta - \frac{u}{\mathrm{U}}(\lambda + \lambda' + \lambda'')}{\mathrm{U}} + \frac{3}{n} = \frac{\Delta}{\mathrm{U}} + \frac{3}{n}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\frac{\lambda + \lambda' + \lambda''}{3\lambda}\right)$

Nous pourrons toujours poser :

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\frac{\lambda + \lambda'}{2\lambda}\right) = \frac{1}{n'}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\right), \quad \frac{1}{n}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\frac{\lambda + \lambda' + \lambda''}{2\lambda}\right) = \frac{1}{n''}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\right)$$

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\frac{\lambda + \lambda' + \ldots\ldots + \lambda^{(n-2)}}{(n-1)\lambda}\right) = \frac{1}{n^{(n-2)}}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\right)$$

De sorte que l'on aura pour la fin de la $n^{\text{ième}}$ vibration :

	DIAPASON.	MEMBRANE.
Fin $n^{\text{ième}}$ vibration......	$t = \frac{n}{n}$ .....,	$t = \frac{\Delta}{\mathrm{U}} + \frac{n}{n^{(n-1)}}\left(1 - \frac{u}{\mathrm{U}}\right)$

D'après la comparaison de ces valeurs à celles que l'on a obtenues précédemment pour la membrane lorsque la vitesse d'entraînement était constante, on voit que l'on peut ramener le problème de la variation de la tonalité, quand la vitesse de la source sonore est variable, à ce qu'il est dans le cas d'un mouvement uniforme. Seulement, il faut alors considérer le nombre de vibrations du diapason mobile comme susceptible de varier et, par exemple, dans le cas qui nous occupe, de la valeur n, s'être élevé ou abaissé à la valeur $n^{(n-1)}$.

Si donc nous avons pu déterminer cette variation pendant une seconde et que nous la désignions par δ, nous aurons $n^{(n-1)} - n = \pm \delta$, et pour la $n^{\text{ième}}$ vibration, nous aurons :

	DIAPASON.	MEMBRANE.
Fin $n^{\text{ième}}$ vibration.....	$t = 1^s$	$t = \frac{\Delta}{U} + \frac{n}{n}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)}$

Par conséquent, dans ce cas, la tonalité du diapason, pour un observateur placé à la membrane, sera :

$$n_1 = \frac{n}{1 - \frac{u}{U}}\left(1 \mp \frac{\delta}{n}\right)$$

Or :

$$\frac{n}{1 - \frac{u}{U}} = n'$$

est la tonalité du diapason quand la vitesse d'entraînement est constante et égale à u ; nous avons donc la formule générale :

$$n_1 = n'\left(1 \mp \frac{\delta}{n}\right) \tag{H}$$

Telle est la formule qui nous permettrait de déterminer la tonalité moyenne dans le cas où la source sonore ne reçoit pas un mouvement uniforme, si δ était connu; c'est-à-dire si la loi suivant laquelle varie la vitesse était donnée. Dans nos expériences, il aurait été impossible de trouver cette loi, ou du moins il aurait été très-difficile de le faire d'une façon exacte, puisque le chemin parcouru n'était que de 1 mètre. Aussi, nous n'avons pas cherché à corriger la formule de Doppler et à la ramener au cas d'une vitesse variable. Nous avons préféré suivre une autre marche et ramener, comme nous le verrons, nos observations faites dans le cas d'un mouvement variable, à ce qu'elles auraient été si la vitesse d'entraînement eût été constante. Dans ce cas, on pourra mettre en parallèle ces observations avec les formules ordinaires de Doppler.

Les formules de Doppler, faites lorsque le mouvement est variable, deviennent pratiquement illusoires si la vitesse d'entraînement de la source sonore cesse d'être du même ordre de grandeur que la vitesse du son. Nous l'avons démontré à propos de l'expérience de Schüngel. Il devient donc indispensable de modifier cette formule pour le cas de petite vitesse. On a :

$$n = n'\left(1 \pm \frac{u}{U}\right)$$

Si l'on remplace U, u, par leurs valeurs (D étant le chemin parcouru pendant le temps t d'une expérience) :

$$U = n'\lambda', \quad u = \frac{D}{t} \quad \text{il viendra} \quad n = n'\left(1 \mp \frac{D}{n'\lambda'}\frac{1}{t}\right)$$

d'où :

$$\text{(G)} \qquad n' = \pm \frac{D}{\lambda'}\frac{1}{t}$$

Telle est la forme qu'il convient de donner aux formules de Doppler dans le cas de vitesse d'entraînement relativement faible. Il convient d'ajouter qu'il n'y avait pas avantage à adopter cette forme si la durée d'une observation était considérable. Or, dans nos expériences, la durée moyenne de nos observations était de 1ˢ, et dans celle de Schüngel de 3ˢ. Nous avons donc une formule dans laquelle il n'entre que des quantités de même ordre de grandeur, et qui permettra de déterminer très-rapidement la valeur de n'.

Dans toutes nos expériences aussi bien que dans celles de Schüngel, la variation de la tonalité étant relativement faible, λ' a toujours eu une valeur peu différente de λ; de sorte que, pour calculer n', on supposera d'abord dans la formule (G) $\lambda' = \lambda$; ce qui donnera une première valeur approximative de n'. De cette valeur on déduira celle de λ', et cette nouvelle valeur de λ' étant mise dans la formule (G), donnera une nouvelle valeur approximative de n', et ainsi de suite.

Il a suffi de pousser jusqu'à la seconde approximation pour obtenir pour n' une valeur immédiatement constante.

Si l'on ajoute et retranche n_0 dans le premier membre de la formule (G), il vient :

$$\text{(G')} \qquad (n_0 - n) - (n_0 - n') = \frac{0.96}{\lambda'}\frac{1}{t}.$$

Si donc on supposait qu'un diapason fixe de n_0 vibrations supérieures à n fût placé à côté d'un autre diapason de n vibrations au moment de son départ, un observateur entendrait un certain nombre de battements.

En nommant B_t le nombre de battements qui aurait été entendus pendant le temps t, les deux diapasons étant à l'état de repos, on aurait pour le nombre de battements $(n_0 - n)$ entendus en une seconde :

$$n_0 - n = \frac{B_t}{t}.$$

Si l'on nomme de même A_t le nombre des battements que fait, pendant le temps t, le diapason fixe (n_0) avec le diapason mobile dont la tonalité s'est élevée à n', on aura :

$$n_0 - n' = \frac{A_t}{t}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (G′), celle-ci devient :

$$B_t - A_t = \frac{D}{\lambda'} \qquad (G'')$$

Telle est la relation à laquelle on arriverait, d'après la formule de Doppler, en employant la méthode des battements. Mais il est important de noter que cette équation a été *établie seulement dans l'hypothèse où la vitesse du diapason mobile était constante.*

§ 3

VARIATION DE LA TONALITÉ DANS L'APPAREIL DES INTERFÉRENCES

Cherchons comment deux diapasons (n_0, λ_0), (n, λ) qui produisent en 1s $(n_0 - n)$ battements agiront sur la membrane vibrante dans l'appareil des interférences, lorsque la distance x du diapason (n) viendra à varier d'un mouvement uniforme. Soit x' cette nouvelle distance au bout du temps t, de manière que l'on ait : $x - x' = \pm at$, a étant une quantité constante.

La membrane, sous l'influence de ces deux diapasons, prendra donc un mouvement vibratoire représenté par les équations :

$$(a) \qquad \begin{aligned} V &= \alpha \sin. 2\pi \left(n_0 t - \frac{x_0}{\lambda_0}\right) \\ v &= \alpha \sin. 2\pi \left(n t - \frac{x'}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

avec les conditions :

$$x - x_0 = \text{Const.} = \delta, \quad x - x' = at \quad \text{d'où} \quad x' = x_0 + \delta - at,$$

Si l'on substitue cette valeur de x' dans la seconde équation et que l'on pose :

$$n \pm \frac{a}{\lambda} = n_1, \quad \frac{x_0}{\lambda_0} - \frac{x_0 + \delta}{\lambda} = \varphi,$$

celle-ci devient :

$$v = \alpha \sin. 2\pi \left[n_1 t - \frac{x_0}{\lambda_0} + \varphi\right].$$

Le mouvement résultant de la membrane, sous l'influence des deux diapasons, sera donc :

$$v + V = R \sin. 2\pi \left[\frac{n_0 + n_1}{2} t - X\right]$$

sachant que :

$$R^2 = 2\alpha^2 \left[1 + \cos. 2\pi (n_0 - n_1) t - \varphi\right]$$

et :

$$t\varphi X = \frac{-\sin. 2\pi \left(\frac{n_0 - n_1}{2} t - \frac{x_0}{\lambda_0}\right) + \sin. 2\pi \left(\frac{n_0 - n_1}{2} t + \frac{x_0}{\lambda_0} - \varphi\right)}{\text{Cos}. 2\pi \left(\frac{n_0 - n_1}{2} t - \frac{x_0}{\lambda_0}\right) + \text{Cos}. 2\pi \left(\frac{n_0 - n_1}{2} t + \frac{x_0}{\lambda_0} - \varphi\right)} = t\varphi\, 2\pi \left(\frac{x_0}{\lambda_0} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Le mouvement vibratoire de la membrane présentera $(n_0 - n_1)$ fois par seconde des alternatives de maxima et de minima correspondant à des renforcements et à des affaiblissements périodiques du mouvement composé, donnés par les valeurs maxima et minima de R.

R prendra des valeurs maxima, comme il est facile de voir aux époques :

$$t = \frac{1}{n_0 - n_1}, \quad = \frac{2}{n_0 - n_1}, \quad = \frac{3}{n_0 - n_1} \cdots\cdots$$

et minima aux époques :

$$t = \frac{1}{2(n_0 - n_1)}, \quad = \frac{3}{2(n_0 - n_1)}, \quad = \frac{5}{2(n_0 - n_1)}$$

Si l'on nomme I l'intervalle de temps de deux battements, c'est-à-dire de deux renforcements de son, on aura, d'après la formule précédente :

$$I = \frac{1}{n_0 - n_1}.$$

Et si l'on a observé L de ces battements en 1^s, on aura :

(1) $$LI = 1^s.$$

En nommant A_t le nombre des battements que l'on aurait observés dans ces conditions, dans le temps t, on a :

$$L = \frac{A_t}{t}.$$

Si l'on substitue à L et à I leurs valeurs, l'équation (1) devient :

(2) $$A_t = (n_0 - n_1) t.$$

Telle est la formule qui donnerait la tonalité n_1 dans l'appareil des interférences en fonction des battements observés A_t.

Si l'on remplace n_1 par la valeur :

$$n_1 = n \pm \frac{a}{\lambda} = n \pm \frac{D}{\lambda} \frac{1}{t},$$

D étant la variation de la distance du diapason n dans le temps t, la relation (2) devient ;

$$A_t = (n_0 - n)t \pm \frac{D}{\lambda}. \tag{3}$$

Or $(n_0 - n)t$ est le nombre des battements B_t qui auraient été entendus dans le temps t, si la distance du diapason n à la membrane était restée constante; on a donc la relation générale :

$$B_t - A_t = \pm \frac{D}{\lambda}.$$

Telle est la formule qui fera connaître le nombre des battements perdus ou gagnés dans l'appareil des interférences.

Or, si nous nous reportons aux formules de Doppler, dans le cas où, la source sonore restant immobile, l'observateur s'approche ou s'éloigne de celle-ci, nous savons que nous avons pour la tonalité :

$$n_1 = n\left(1 \pm \frac{u}{U}\right)$$

Si l'on remplace u et U par leurs valeurs $U = n\lambda$, $u = \frac{D}{t}$, la formule précédente s'écrira :

$$n_1 = n \pm \frac{D}{\lambda}\frac{1}{t} \tag{K}$$

Telle est la forme sous laquelle il convient de représenter les formules de Doppler dans le cas où l'observateur s'approche ou s'éloigne de la source sonore avec une vitesse d'entraînement relativement faible.

Si nous retranchons les deux membres de cette équation de n_0, il viendra :

$$(n_0 - n_1)t - (n_0 - n)t = \pm \frac{D}{\lambda}$$

Or, cette équation est identique à l'équation (4) à laquelle nous sommes arrivé avec l'appareil des interférences. Donc, si nous avions voulu vérifier les formules de Doppler dans le cas où, la *source sonore restant immobile,* l'observateur *s'approche* ou *s'éloigne* de celle-ci, *nous aurions dû nous servir d'un appareil des interférences pour faire nos observations.*

Il aurait suffi de transformer cet appareil de manière à permettre à la membrane d'écrire des battements, en adoptant une disposition identique à celle dont nous nous sommes servi dans nos expériences. On vérifierait ainsi l'exactitude de la formule (4). Mais il faut se rappeler que cette formule a été établie uniquement dans le cas où la distance du diapason n à la membrane varierait d'une façon constante. Si l'on se reporte, en effet, aux formules qui donnent les intervalles de temps de deux battements consécutifs, on a :

$$\frac{N}{n_0 - n_1} = \frac{N + 1}{n_0 - n_1}$$

N étant le numéro d'ordre des battements.

Or, comme on a $n_1 = n \pm \frac{a}{\lambda}$, on voit que si, dans l'intervalle de temps de deux battements, la vitesse a vient à varier, les intervalles de temps de ceux-ci n'étant plus égaux, la relation (1) n'aura plus lieu, et par conséquent l'équation (4) ne sera plus exacte.

Nous reviendrons bientôt, du reste, sur ce sujet.

CHAPITRE III

VARIATION DE LA TONALITÉ DANS NOTRE APPAREIL

Nous devons traiter la question à deux points de vue : examiner le cas où la vitesse d'entraînement de la source sonore est constante et celui dans lequel elle serait fonction du temps.

§ 1er

VITESSE D'ENTRAINEMENT CONSTANTE

Pour établir les équations du problème, voici comment nous allons raisonner. Les premières épreuves que nous avons publiées nous ont montré que dès qu'un diapason se met en mouvement, s'approche ou s'éloigne d'une membrane, celle-ci écrit en 1s un nombre plus grand de vibrations que le diapason. La relation $n\lambda$ = Const., cesse donc d'avoir lieu par rapport à la membrane. Or, il est bien clair que le nombre n de vibrations du diapason reste constant pour un spectateur qui accompagnerait celui-ci. La modification doit donc porter sur la valeur de λ.

Si nous substituons à notre appareil celui des interférences, nous pourrons produire sur la membrane, avec cette substitution d'un diapason mobile à un diapason fixe, exactement le même effet. Il suffira d'établir, comme condition, que la distance x' à la membrane obéisse à la même loi de variation que dans le cas du diapason mobile. Mais il faudra, en même temps, remarquer que la relation $n\lambda = U$ étant la caractéristique du diapason fixe et que cette relation cessant d'avoir lieu comme nous l'avons montré lorsque le diapason devient mobile, il devient indispensable d'introduire dans la formule des interférences la seconde condition : que la longueur d'onde λ soit changée et devenue égale à une longueur λ_1 que nous déterminerons.

Les équations (a) deviennent dans ce cas :

$$(a') \qquad V = \alpha \sin. 2\pi\left(n_0 t - \frac{x_0}{\lambda_0}\right), \quad v = \alpha \sin. 2\pi\left(nt - \frac{x'}{\lambda_1}\right)$$

Si nous posons :

$$n_1 = n \pm \frac{a}{\lambda_1},$$

nous retomberons exactement sur les formules précédemment données :

Nous aurons, comme précédemment :

$$(2\ bis) \qquad A_t = (n_0 - n_1)t$$

qui deviendra, en substituant à n_1 sa valeur :

$$A_t = \left[(n_0 - n) \mp \frac{a}{\lambda_1}\right]t.$$

Si l'on remplace a par $\frac{D}{t}$, l'équation précédente s'écrira :

$$(3\ bis) \qquad A_t = (n_0 - n)t \pm \frac{D}{\lambda_1}.$$

Telle est la formule à laquelle nous arrivons.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la valeur de λ_1.

A cet effet remplaçons $(n_0 - n)t$ par sa valeur B_t, l'équation précédente devient alors :

$$(4\ bis) \qquad B_t - A_t = \pm \frac{D}{\lambda_1}$$

Or, si nous comparons cette dernière relation à la formule (G'') à laquelle nous sommes arrivé par une autre méthode, nous voyons que l'on doit avoir :

$$\lambda_1 = \lambda' = \frac{U}{n'}.$$

Donc λ_1 satisfait à la relation :

$$n_1\lambda_1 = U = \text{const.},$$

puisque d'après (2 *bis*), n_1 est ici ce que nous avions appelé n' précédemment, c'est-à-dire la tonalité du diapason mobile.

La formule (2 *bis*) est celle dont s'était servi Schüngel pour déterminer la tonalité n_1, en fonction des battements entendus en 1". On a en effet :

$$n_1 = n_0 \mp \frac{A_t}{t}. \tag{5}$$

Schüngel s'était servi de cette formule sans en donner la démonstration, la regardant sans doute comme évidente. En nous reportant aux considérations que nous avons présentées précédemment, nous voyons que cette formule cesse d'être exacte lorsque la vitesse d'entraînement de la source sonore n'est pas constante. Nous allons voir dans ce cas comment on doit la modifier.

§ 2

VITESSE D'ENTRAINEMENT VARIABLE

Formule empirique.

Cherchons à déterminer par une formule empirique la tonalité du diapason dans le cas d'une vitesse d'entraînement variable. Nous supposons pour simplifier que cette vitesse variable d'un battement à un autre reste constante dans l'intervalle de deux battements. D'après cela, si nous nommons n_1 la tonalité correspondante à une vitesse d'entraînement a de la source sonore, nous aurons toujours pour l'intervalle de temps de deux battements :

$$I = \frac{1}{n_0 - n_1}$$

Si nous nommons de même n'_1, n''_1 etc., les tonalités correspondantes à des vitesses a_1 $a'_1 \ldots$, nous aurons pour les intervalles de temps correspondants :

$$I' = \frac{1}{n_0 - n'_1}, \quad I'' = \frac{1}{n_0 - n''_1} \ldots, \quad I^{(n)} = \frac{1}{n_0 - n_1^{(n)}} \tag{a}$$

Et si K', K^n désignent les fractions de battements au commencement et à la fin de la course du diapason, on a pour les derniers intervalles de temps :

$$i' = K'.I, \quad i^{(n)} = K^{(n)}.I, \tag{b}$$

I désignant un intervalle de temps moyen. Pour l'obtenir il suffira de remarquer que si A_t^n désigne le nombre entier de battements dans le temps,

$$(I + I'' + \ldots\ldots + I^{(n)}),$$

on pourra prendre comme tonalité moyenne correspondante

$$N_0 = \frac{n'_1 + n''_1 t \ldots\ldots}{A_t^n}.$$

Nous poserons :

$$I = \frac{1}{n_0 - N_0}$$

et alors les valeurs de i', $i^{(n)}$ seront données par :

$$(b') \qquad i' = K' \frac{1}{n_0 - N_0}, \quad i^{(n)} = K^{(n)} \frac{1}{n_0 - N_0}.$$

Des équations (a) et (b') nous tirons :

$$\frac{1}{K'}(n_0 - N_0) = \frac{1}{i'},\ n_0 - n'_1 = \frac{1}{I'},\ n_0 - n''_1 = \frac{1}{I''} \ldots\ldots,\ \frac{1}{K^{(n)}}(n_0 - N_0) = \frac{1}{i^{(n)}}$$

Donc si l'on a observé un nombre entier ou fractionnaire de battements dans un intervalle de temps

$$(i' + I + I'' + \ldots\ldots + I^{(n)} + i^{(n)}),$$

on aura en ajoutant les équations précédentes membre à membre et désignant par A_i^0 le nombre entier de battements dans le temps

$$(I' + I'' + \ldots\ldots + I^{(n)}),$$

$$\left[A_i^0 + \frac{1}{K'} + \frac{1}{K^{(n)}}\right] n_0 - (n'_1 + n''_1 + \ldots\ldots) - \left(\frac{N_0}{K'} + \frac{N_0}{K^{(n)}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{i'} + \frac{1}{I} + \frac{1}{I''} + \ldots\ldots + \frac{1}{I^{(n)}} + \frac{1}{i^{(n)}}\right)$$

Cette formule deviendra, en divisant par A_i^0

$$\left[1 + \frac{1}{A_i^0}\left(\frac{1}{K'} + \frac{1}{K^{(n)}}\right)\right] n_0 - \frac{n'_1 + n''_1 + \ldots\ldots}{A_i^0} - N_0 \frac{1}{A_i^0}\left(\frac{1}{K'} + \frac{1}{K^{(n)}}\right)$$
$$= \frac{1}{A_i^0}\left(\frac{1}{i'} + \frac{1}{I'} + \ldots\ldots + \frac{1}{I^{(n)}} + \frac{1}{i^{(n)}}\right).$$

Cette dernière équation deviendra, en remplaçant :

$$\frac{n'_1 + n''_1 + \ldots}{A_i^0}$$

par sa valeur N_0 et simplifiant :

$$(6) \quad n_0 - N_0 = \frac{1}{A_i^0 + \frac{1}{K'} + \frac{1}{K^{(n)}}}\left(\frac{1}{i'} + \frac{1}{I'} + \ldots\ldots, + \frac{1}{I''} + \ldots\ldots + \frac{1}{i^{(n)}}\right).$$

Or nos épreuves nous donnent les valeurs I', I''... Si nous nommons θ le nombre de vibrations doubles du diapason chronographe dans l'intervalle de deux battements, nous aurons en général $I = \frac{\theta}{256}$, puisque notrediapason chronographe écrit 256 $v.\ d.$ en 1^s.

Donc si ε, θ', θ'', ... ε' sont les valeurs correspondantes à i', I′, I″, ... $i^{(n)}$; si l'on remarque en outre que l'on a $\frac{i}{I} = \frac{\varepsilon}{\theta}$, θ désignant la valeur moyenne

$$\frac{\theta' + \theta'' + \ldots + \theta^n}{A_i^\circ},$$

on aura en vertu des relations (6) pour K' et $K^{(n)}$

$$K' = \frac{\varepsilon}{\theta}, \quad K^{(n)} = \frac{\varepsilon'}{\theta}.$$

En substituant toutes ces valeurs dans l'équation (6), celle-ci devient :

$$n_0 - N_0 = \frac{256}{A_i^\circ + \frac{\theta}{\varepsilon} + \frac{\theta}{\varepsilon'}} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta''} + \ldots\ldots + \frac{1}{\theta^{(n)}} + \frac{1}{\varepsilon'}\right). \tag{7}$$

Telle est la formule qui nous donnera la *tonalité du diapason lorsqu'il se déplace avec une vitesse variable* et parcourra un chemin quelconque.

Elle peut encore s'écrire :

$$n_0 - N_0 = \frac{256}{A_i^\circ + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\theta}} \left[\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\theta^2} + \frac{1}{\theta'} + \ldots\ldots + \frac{1}{\theta^n}\right]. \tag{7 bis}$$

En effet, si au lieu des équations

$$\frac{1}{K'}(n_0 - N_0) = \frac{1}{i'}, \quad n_0 - n_1' = \frac{1}{I'}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{K_n}(n_0 - N_0) = \frac{1}{i^{(n)}}$$

Nous prenons les suivantes, en supposant m un entier :

$$K'^{(m-1)}(n_0 - N_0) = \frac{K'^m}{i'}, \; n_0 - n_1' = \frac{1}{I'}, \; \ldots\ldots \; K^{(n)(m-1)}(n_0 - N_0) = \frac{K^{(n)m}}{i^{(n)}}$$

et que nous les ajoutions membre à membre, nous auron[s]

$$\left[A_i^\circ + K'^{(m-1)} + K_n{}^{m-1}\right] n_0 - (n_1' + n_1'' + \ldots\ldots) - N_0(K'^{m-1} + K_n{}^{n-}$$
$$= \frac{K'^m}{i'} + \frac{1}{I'} + \ldots\ldots + \frac{K_n{}^m}{i^{(n)}}$$

Divisant par A° et remarquant que

$$\frac{n_1' + n_1'' + \ldots}{A_i^\circ} = N_0$$

il vient

$$n_0 - N_0 = \frac{1}{A_i^\circ + K'^{m-1} + K_n{}^{m-1}} \left[\frac{K'^m}{i'} + \frac{1}{I'} + \frac{1}{I} + \ldots\ldots + \frac{K_n{}^m}{i^{(n)}}\right],$$

relation qui doit avoir lieu quel que soit m.

Pour $m = 0$, nous retombons sur la formule (6) et par conséquent sur (7).
Pour $m = 2$, il vient

$$n_0 - N_0 = \frac{1}{A_t^0 + K' + K_n}\left[\frac{K'^2}{i'} + \frac{1}{I'} + \ldots\ldots + \frac{K_n^2}{i^{(n)}}\right]$$

qui nous conduit à la formule (7 *bis*) en remplaçant K′, $K^{(n)}$, i', I′ par leurs valeurs respectives.

Si le diapason entrait en mouvement au ***commencement d'un battement*** et s'arrêtait ***à la fin*** d'un battement, comme dans les expériences de Schüngel, la tonalité serait alors donnée par la formule :

$$(8) \qquad n_0 - N_0 = \frac{256}{A_t^0}\left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta''} + \ldots\ldots + \frac{1}{\theta^{(n)}}\right).$$

Enfin si la vitesse d'entraînement devenait uniforme, on aurait

$$\theta' = \theta'' = \ldots\ldots = \theta;$$

les formules (7) et (8) se réduiraient à :

$$n_0 - N_0 = \frac{256}{\theta}.$$

Or si A_t désigne le nombre de battements entier ou fractionnaire écrits sur nos épreuves pour α ***v. d.*** du diapason chronographe, on aura $A_t\theta = \alpha$ et la relation précédente s'écrira :

$$(9) \qquad n_0 - N_0 = A_t\,\frac{256}{\alpha}.$$

Si nous remarquons que $\frac{\alpha}{256} = t$, t étant la durée d'une observation, nous voyons que la formule précédente est identique à celle (2 *bis*) $n_0 - n_1 = \frac{A_t}{t}$ établie par la méthode des interférences Mais dans cette dernière relation la valeur de $n_1 = n \pm \frac{a}{\lambda_1}$ devait être une quantité constante, ce que l'on aurait pu obtenir en établissant cette condition pour le rapport $\frac{a}{\lambda_1}$. Nous avions supposé la vitesse a uniforme, puis déduit la valeur de λ_1.

La comparaison des relations (2 *bis*) et (9) nous montre maintenant que cette vitesse doit être uniforme. C'est seulement dans ce cas que la formule (7) se réduit à (9) et par conséquent que la formule (2 *bis*) peut avoir lieu.

Voici les valeurs de N_1 calculées par notre formule empirique.

	Diapason chronographe.	Battements correspondants. Diapason fixe.	Battements observés. Diapason mobile.	n_1
	α			
1 ↓	242.5	10.044	8.93	503.09
3..................	187.75	7.776	6.36	503.84
5..................	259.5	10.748	9.36	503.37
6..................	231.25	9.578	7.89	503.86
8..................	396.25	16.413	14.67	503.16
10.................	194	8.035	6.34	504.23
12.................	391.75	16.226	14.27	503.26
13.................	207	8.574	7.41	503.49
16.................	315.75	12.664	11.31	503.12
18.................	284.25	11.774	10.06	503.57
	β.			
2 ↑	298.75	12.374	14.19	500.44
4..................	249.5	10.334	11.79	500.49
7..................	295	12.219	13.31	501.06
9..................	232.50	9.630	10.76	500,76
11.................	256	10.645	11.63	501.00
14.................	233.5	9.668	11.28	500.27
15.................	279	11.556	13.23	500.45
17.................	274	11.349	12.44	500.78
19.................	268	11.101	12.21	500.83

§ 3

VITESSE D'ENTRAINEMENT VARIABLE

Formule théorique.

Reportons-nous à ce que nous avons dit lorsque nous avons voulu établir les formules de Doppler (H) dans le cas d'une vitesse d'entraînement variable. Nous avons vu que l'on pouvait ramener ce dernier cas à celui d'une vitesse d'entraînement constante à condition de supposer que le nombre n de vibrations du diapason mobile puisse prendre des valeurs variables d'un battement à un autre, n', n'', etc..., pour un spectateur qui l'accompagnerait. On peut comprendre ce phénomène en admettant que l'on a remplacé le diapason entraîné d'un mouvement variable par un diapason soumis à un mouvement uniforme, mais pour lequel, par exemple, la température viendrait à varier d'un battement à un autre. Il suffirait de déterminer la loi de variation de la température, de manière qu'une membrane prît le même mouvement vibratoire sous l'influence du premier ou du second de ces diapasons. D'après cela, nous pouvons représenter *a priori* le mouvement vibratoire que prend la membrane sous l'influence du diapason fixe n_0 et du diapason mobile n par les deux formules :

$$V = \alpha \sin. 2\pi \left(n_0 t - \frac{x_0}{\lambda_0}\right), \quad v = \alpha \sin. 2\pi \left(n' t - \frac{x'}{\lambda_1}\right).$$

Dans la dernière formule, nous devons prendre pour λ_1 la valeur $\lambda_1 = \frac{U}{n_1}$; U étant la vitesse du son et n_1 la tonalité que prendrait le diapason mobile (n) s'il était entraîné d'un mouvement uniforme comme nous l'avons démontré § I.

On voit que, conformément à notre hypothèse, nous avons eu soin de remplacer la valeur constante de n par une valeur variable n'. Et puisque maintenant notre diapason est animé d'un mouvement uniforme par lequel x devient x', si a désigne la vitesse d'entraînement constante, nous avons les équations de condition :

$$x - x_0 = \text{const.} = \delta, \quad x - x' = a t.$$

Si l'on pose :

$$n' \pm \frac{a}{\lambda_1} = n_1, \quad \frac{x_0}{\lambda_0} - \frac{x_0 + \delta}{\lambda_1} = \varphi,$$

il viendra :

$$v + V = R' \sin. 2\pi\left[\frac{n_0 + n'_1}{2} t - X\right],$$

sachant que :

$$R'^2 = 2\alpha^2\left[1 + \cos.(2\pi(n_0 - n'_1)t - \varphi)\right],$$

et X ayant la valeur que nous avons précédemment indiquée.

les battements correspondront aux valeurs maxima de R', par conséquent aux époques :

$$t = \frac{1}{n_0 - n'_1}, \quad \frac{2}{n_0 - n''_1}, \quad \frac{3}{n_0 - n'''_1},$$

les intervalles successifs des battements seront donnés par les formules :

$$I' = \frac{2}{n_0 - n''_1} - \frac{1}{n_0 - n'_1} \quad I'' = \frac{3}{n_0 - n'''_1} - \frac{2}{n_0 - n''_1}, \;\ldots\ldots$$

Or, nous avons supposé que dans un intervalle de deux battements, la vitesse de la source sonore restera constante, ce qui revient à admettre que les valeurs de n', n'', etc., restent constantes dans les mêmes limites, et par conséquent aussi les valeurs de n'_1, n''_1, etc. Donc, aux valeurs précédentes des intervalles, nous pourrons substituer les suivantes :

$$I' = \frac{1}{n_0 - n'_1}, \quad I'' = \frac{1}{n_0 - n''_1}, \quad I''' = \frac{1}{n_0 - n'''_1}, \;\ldots\ldots$$

D'où nous tirons :

$$n_0 - n'_1 = \frac{1}{I'}, \quad n_0 - n''_1 = \frac{1}{I''}, \;\ldots\ldots$$

Si nous remplaçons dans ces dernières formules n'_1, n''_1 par leurs valeurs et que l'on pose en même temps :

$$n' = n + \varepsilon', \quad n'' = n + \varepsilon'', \ \ldots\ldots$$

ε', ε'' désignant des quantités positives ou négatives infiniment petites par rapport à n, celles-ci deviendront :

$$(n_0 - n) \mp \frac{a}{\lambda_1} - \varepsilon' = \frac{1}{\mathrm{I}'}, \quad (n_0 - n) \mp \frac{a}{\lambda_1} - \varepsilon'' = \frac{1}{\mathrm{I}''}, \ldots.$$

Ajoutons membre à membre ces équations. Il y en a autant que l'on aura compté de battements entiers A°_t pendant la durée t d'une observation. Si, de plus, nous posons $(\varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots) = \mathrm{A}^\circ_t\, \varepsilon_0$, nous aurons :

$$(n_0 - n) \mp \frac{a}{\lambda_1} - \varepsilon_0 = \frac{1}{\mathrm{A}^\circ_t}\left(\frac{1}{\mathrm{I}'} + \frac{1}{\mathrm{I}''} + \frac{1}{\mathrm{I}'''} + \ldots\ldots\right) = \frac{256}{\mathrm{A}^\circ}\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} + \ldots\ldots\right)$$

Or, la formule empirique (8) nous montre que le second membre de cette dernière équation est égal à $n_0 - \mathrm{N}_0$; nous aurons donc, en substituant, simplifiant, et résolvant l'équation par rapport à ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \mathrm{N}_0 - \left[n \pm \frac{a}{\lambda_1}\right]. \tag{9}$$

Telle est la formule qui nous permettra de calculer la valeur de ε_0, correspondant à un nombre *entier* de battements.

N_0 sera donc ici calculé par la formule (8).

Nous voyons que ε_0 est une quantité qui s'est introduite comme correction qu'il faudrait ajouter si l'on voulait passer d'une vitesse d'entraînement variable à une vitesse constante.

Or, si, par un procédé quelconque, nous arrivons à déterminer directement, à l'aide d'une formule empirique, la tonalité dans le cas d'un mouvement uniforme, et si les différences entre les nombres ainsi obtenus et ceux N_0 sont précisément égales aux valeurs ε_0 que l'on calculerait par la formule précédente, nous en devrons conclure que $\left(n \pm \frac{a}{\lambda_1}\right)$ représente la tonalité dans le cas d'un mouvement uniforme, et que les formules de Doppler sont ainsi justifiées. Voici le tableau des valeurs de ε_0 calculées par la formule (9).

	Vitesse. $a = \frac{0.96}{\alpha} 256$	λ_1	$\frac{a}{\lambda_1}$	$n + \frac{a}{\lambda_1}$	Nombre entier de battements.	N_o	$\delta_o = N_o - \left(n + \frac{a}{\lambda_1}\right)$
1 ↓	1.013	0.6753	1.500	503.500	8	503.05	— 0.450
3............	1.308	0.6747	1.938	503.938	6	503.80	— 0.138
5............	0.947	0.6754	1.401	503.401	9	503.32	— 0.081
6............	1.062	0.6751	1.574	503.574	7	503.82	+ 0.246
8............	0.620	0.6761	0.916	502.916	13	503.16	+ 0.244
10...........	1.266	0.6747	1.876	503.876	6	504.22	+ 0.344
12...........	0.627	0.6761	0.927	502.927	14	503.25	+ 0.323
13...........	1.187	0.6749	1.758	503.758	6	503.47	— 0.288
16...........	0.804	0.6757	1.189	503.189	11	503.10	— 0.089
18...........	0.864	0.6755	1.279	503.279	9	503.56	+ 0.281
	$a = \frac{0.96}{\beta} 256$			$n - \frac{a}{\lambda_1}$			$\delta_o = N_o - \left(n - \frac{a}{\lambda_1}\right)$
2 ↑	0.822	0.6789	1.211	500.789	14	500.44	— 0.349
4............	0.985	0.6793	1.450	500.550	11	500.48	— 0.070
7............	0.833	0.6789	1.226	500.774	12	501.08	+ 0.306
9............	1.057	0.6794	1.554	500.446	9	500.75	+ 0.304
11...........	0.956	0.6791	1.408	500.593	11	500.98	+ 0.388
14...........	1.052	0.6793	1.548	500.452	10	500.27	— 0.182
15...........	0.880	0.6790	1.295	500.705	12	500.45	— 0.255
17...........	0.896	0.6790	1.319	500.681	12	500.76	+ 0.079
19...........	0.917	0.6792	1.350	500.650	11	500.82	+ 0.170

CHAPITRE IV

§ 1er.

Nous allons chercher maintenant à ramener les observations que nous avons faites avec des vitesses d'entraînement variables à ce qu'elles auraient été si ces vitesses étaient restées constantes. A cet effet, nous allons comparer les nombres obtenus quand le diapason descend à ceux que l'on obtient lorsqu'il remonte en parcourant le même chemin dans des temps différents.

Dans une première série de tableaux, nous mettrons en parallèle les battements observés pendant la durée totale d'une montée et d'une descente, et les battements que l'on aurait observés pendant le même temps si le diapason était resté fixe. Si nous prenions la moyenne des résultats ainsi obtenus en comparant le même diapason descendant avec tous les autres diapasons ascendants, il est bien clair que si celle-ci diffère de la moyenne des battements correspondant au diapason fixe, cette différence ne saurait être attribuée au diapason descendant.

Dans une seconde série de tableaux, nous avons comparé le diapason descendant à tous les autres diapasons montant. Nous avons pris les différences du temps entre les ascensions et les descentes. Nous avons ensuite comparé les battements correspondants observés aux battements qui auraient eu lieu pendant les mêmes différences de temps si le diapason était resté fixe. Nous verrons ensuite le sens qu'il faudra attacher à ces divers résultats :

DIAPASON ↓ N° 3 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $^{B}\alpha + {}^{B}\beta, \beta', ..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $^{A}\alpha + {}^{A}\beta, \beta', ..$	Différence $\pm \Delta x$
187.75 + 232.5 = 420.25	17.406	17.12	+ 0.286
249.5 = 437.25	18.110	18.15	— 0.040
256 = 443.75	18.380	17.99	+ 0.390
268 = 455.75	18.877	18.57	+ 0.307
274 = 461.75	19.125	18.80	+ 0.325
279 = 466.75	19.332	19.59	— 0.258
295 = 482.75	19.995	19.67	+ 0.325
298.75 = 486.50	20.150	20.55	— 0.400
233.5 = 421.25	17.444	17.64	— 0.196

DIAPASON ↓ N° 10 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $^{B}\alpha' + {}^{B}\beta, \beta', ..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $^{A}\alpha' + {}^{A}\beta, \beta', ..$	Différence $\pm \Delta x'$
194 + 232.5 = 426.5	17.665	17.10	+ 0.565
249.5 = 443.5	18.369	18.13	+ 0.239
256 = 450	18.639	17.97	+ 0.069
268 = 462	19.136	18.55	+ 0.586
274 = 468	19.384	18.78	+ 0.604
279 = 473	19.591	19.57	+ 0.021
295 = 489	20.254	19.65	+ 0.604
298.75 = 492.75	20.409	20.53	— 0.121
233.5 = 427.5	17.703	17.62	+ 0.083

DIAPASON ↓ N° 13 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

207 + 232.5 = 439.5	18.204	18.17	+ 0.034
249.5 = 456.5	18.908	19.20	— 0.292
256 = 463.0	19.178	19.04	+ 0.138
268 = 475.0	19.675	19.62	+ 0.056
274 = 481.0	19.923	19.85	+ 0.073
279 = 486	20.130	20.64	— 0.510
295 = 502	20.793	20.72	+ 0.073
298.75 = 505.75	20.948	21.60	— 0.653
233.5 = 440.5	18.242	18.69	— 0.448

DIAPASON ↓ N° 6 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

231.25 + 232.5 = 463.75	19.208	18.65	+ 0.558
249.5 = 480.75	19.912	18.68	+ 0.232
256 = 487.25	20.182	19.52	+ 0.662
268 = 499.25	20.679	20.10	+ 0.579
274 = 505.25	20.927	20.33	+ 0.597
279 = 510.25	21.134	21.12	+ 0.014
295 = 526.25	21.797	21.20	+ 0.597
298.75 = 530	21.952	22.08	— 0.128
233.5 = 464.75	19.246	19.17	+ 0.076

DIAPASON ↓ N° 1 AVEC LES AUTRES ↑

242.5 + 232.5 = 475	19.674	19.69	— 0.016
249.5 = 492	20.378	20.72	— 0.342
256.5 = 498.5	20.648	20.56	+ 0.088
268 = 510.5	21.145	21.14	+ 0.005
274 = 516.5	21.393	21.37	+ 0.023
279 = 521.5	21.600	22.16	— 0.560
295 = 537.5	22.263	22.24	+ 0.023
298.75 = 541.25	22.418	23.12	+ 0.702
233 5 = 476	19.712	20.21	+ 0.498

DIAPASON ↓ N° 5 AVEC LES AUTRES ↑

259.5 + 232.5 = 492	20.378	20.12	+ 0.258
249.5 = 509	21.082	21.15	— 0.068
256 = 515.5	21.352	20.99	+ 0.362
268 = 527.5	21.849	21.57	+ 0.279
274 = 533.5	22.097	21.80	+ 0.297
279 = 538.5	22.304	22.59	— 0.286
295 = 554.5	22.967	22.67	+ 0.297
298.75 = 558.25	23.122	23.55	— 0.428
233.5 = 493	20.416	20.64	— 0.224

DIAPASON ↓ N° 18 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

Diapason chronographe.	Battements correspondants du diapason fixe.	Somme des battements observés. Diapason mobile.	Différence ± Δ.
284.25 + 232.5 = 516.75	21.404	20.82	+ 0.584
233.5 = 517.75	21.442	21.34	+ 0.102
249.5 = 533.75	22.108	21.85	+ 0.258
256 = 540.25	22.378	21.69	+ 0.688
268 = 552.25	22.875	22.27	+ 0.605
274 = 558.25	23.123	22.50	+ 0.623
279 = 563.25	23.330	23.29	+ 0.040
295 = 579.25	23.993	23.37	+ 0.623
298.75 = 583.0	24.148	24.25	— 0.102

DIAPASON ↓ N° 16 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

	Battements correspondants du diapason fixe.	Somme des battements observés. Diapason mobile.	Différence ± Δ.
315.75 + 232.5 = 548.25	22.708	22.07	+ 0.638
233.5 = 549.25	22.746	22.59	+ 0.136
249.5 = 565.25	23.412	23.10	+ 0.312
256 = 571.75	23.682	22.94	+ 0.742
268 = 583.75	24.179	23.52	+ 0.659
274 = 589.75	24.427	23.75	+ 0.677
279 = 594.75	24.634	24.54	+ 0.094
295 = 610.75	25.297	24.62	+ 0.677
298.75 = 614.50	25.452	25.50	— 0.048

DIAPASON ↓ N° 12 AVEC TOUS LES AUTRES

391.75 + 232.5 = 624.25	25.856	25.03	+ 0.826
233.5 = 625.25	25.894	25.55	+ 0.344
249.5 = 641.25	26.560	26.06	+ 0.500
256 = 647.75	26.830	25.90	+ 0.930
268 = 659.75	27.327	26.48	+ 0.847
274 = 665.75	27.575	26.71	+ 0.865
279 = 670.75	27.782	27.50	+ 0.282
295 = 686.75	28.445	27.58	+ 0.865
298.75 = 690.50	28.600	28.46	+ 0.140

§ 2.

Si, au lieu de comparer la somme des battements du diapason mobile, nous comparons la différence de ces battements à celle des battements correspondants du diapason fixe, nous avons encore les tableaux suivants :

DIAPASON ↓ N° 3 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

Diapason chronographe.		Différence des battements correspondants du diapason fixe. $B_{\beta_1\beta'_1..} - B_x$	Différence des battements correspondants du diapason mobile. $A_{\beta_1\beta'_1..} - A_x$	Différence. Γ_α	$\pm \Delta_x$	$C_x = \Gamma_x \pm \Delta_x$
187.75 à 232.5	44.75	+ 1.854	+ 4.40	+ 2.546	+ 0.286	+ 2.832
233.5	45.75	1.892	4.92	3.028	— 0.196	—
249.5	61.75	2.558	5.43	2.872	— 0.040	—
256.0	68.25	2.828	5.27	2.442	+ 0.390	—
268.0	80.25	3.325	5.25	2.525	+ 0.307	—
274.0	86.25	3.573	6.08	2.507	+ 0.325	—
279.0	91.25	3.780	6.87	3.090	— 0.258	—
295.0	107.25	4.443	6.95	2.507	+ 0.325	—
298.75	111.0	+ 4.598	+ 7.83	+ 3.232	— 0.400	+ 2.832

DIAPASON ↓ N° 10 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

Diapason chronographe.		Différence des battements correspondants du diapason fixe. $B_{\beta 1}\beta'_{1..}-B_{x}$	Différence des battements correspondants du diapason mobile. $A_{\beta 1}\beta'_{1..}-A_{\alpha}$	Différence. Γ_{α}	$\pm\Delta_{\alpha}$	$C_{\alpha}=\Gamma_{\alpha}\pm\Delta_{x}$
194 à 232.5.......	38.5	+ 1.595	+ 4.42	+ 2.825	+ 0.565	+ 3.390
233.5	39.5	1.633	4.94	3.307	0.083	—
249.5	55.5	2.299	5.45	3.151	0.239	—
256.0	62.0	2.569	5.29	2.721	0.669	—
268.0	74.0	3.066	5.87	2.804	0.586	—
274.0	80.0	3.314	6.10	2.786	0.604	—
279.0	85.0	3.521	6.89	3.369	0.021	—
295.0	101.0	4.184	6.97	2.786	+ 0.604	—
298.75	104.75	+ 4.339	+ 7.85	+ 3.511	— 0.121	+ 3.390

DIAPASON ↓ N° 13 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

207 à 232.5.......	25.5	+ 1.056	+ 3.35	+ 2.294	+ 0.034	+2.328
233.5	26.5	1.094	3.87	2.776	— 0.448	—
249.5	42.5	1.760	4.38	2.620	— 0.292	—
256.0	49.0	2.030	4.22	2.190	+ 0.138	—
268.0	61.0	2.527	4.80	2.273	+ 0.055	—
274.0	67.0	2.775	5.03	2.255	+ 0.073	—
279.0	72.0	2.982	5.82	2.838	— 0.510	—
295.0	88.0	3.645	5.90	2.255	+ 0.073	—
298.75	91.75	+ 3.800	+ 6.78	+ 2.980	— 0.652	+ 2.328

DIAPASON ↓ N° 6 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

231.25 à 232.5........	1.25	+ 0.052	+ 2.87	+ 2.818	+ 0.558	+ 3.376
233.5	2.25	0.090	3.39	3.300	0.076	—
249.5	18.25	0.756	3.90	3.144	0.232	—
256.0	24.75	1.026	3.74	2.714	0.662	—
268.0	36.75	1.523	4.32	2.797	0.579	—
274.0	42.75	1.771	4.55	2.779	0.597	—
279.0	47.75	1.978	5.34	3.362	0.014	—
295.0	63.75	2.641	5.42	2.779	+ 0.597	—
298.75	67.50	+ 2.796	+ 6.30	+ 3.504	— 0.128	+ 3.376

DIAPASON ↓ N° 1 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

242.5 à 232.5	10	— 0.414	+ 1.83	+ 2.244	— 0.016	+ 2.228
233.5	9	— 0.376	2.35	2.726	— 0.498	—
249.5	7	+ 0.290	2.86	2.570	— 0.342	—
256.0	13.5	0.560	2.70	2.140	+ 0.088	—
268.0	25.5	1.057	3.28	2.223	+ 0.005	—
274.0	31.5	1.305	3.51	2.205	+ 0.023	—
279.0	36.5	1.512	4.30	2.788	— 0.560	—
295.0	52.5	2.175	4.38	2.205	+ 0.023	—
298.75	56.25	+ 2.330	+ 5.26	+ 2.930	— 0.702	+ 2.228

DIAPASON ↓ N° 5 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

Diapason chronographe.		Différence des battements correspondants du diapason fixe. $B_{\beta_1\beta'_1..}-B_\alpha$	Différence des battements correspondants du diapason mobile. $A_{\beta_1\beta'_1..}-A_x$	Différence. Γ_x	$\pm\Delta_x$	$C_x=\Gamma_\alpha\pm\Delta_x$
259.5 à 232.5......	27	− 1.118	+ 1.40	+ 2.518	+ 0.258	+ 2.776
233.5	26	1.080	1.92	3.000	− 0.224	—
249.5	10	0.414	2.43	2.844	− 0.068	—
256.0	3.5	− 0.144	2.27	2.414	+ 0.362	—
268.0	8.5	+ 0.353	2.85	2.497	+ 0.279	—
274.0	14.5	0.601	3.08	2.479	+ 0.297	—
279.0	19.5	0.808	3.87	3.062	− 0.286	—
295.0	35.5	1.471	3.95	2.479	+ 0.297	—
298.75	39.25	+ 1.626	+ 4.83	+ 3.204	− 0.428	+ 2.776

DIAPASON ↓ N° 18 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

284.25 à 232.5......	51.75	− 2.144	+ 0.70	+ 2.844	+ 0.584	+ 3.428
233.5	50.75	2.106	1.22	3.326	0.102	—
249.5	34.75	1.440	1.73	3.170	0.258	—
256	28.25	1.143	1.57	2.740	0.688	—
268	16.25	0.673	2.15	2.823	0.605	—
274	10.25	0.425	2.38	2.805	0.623	—
279	5.25	− 0.218	3.17	3.388	0.040	—
295	10.75	+ 0.445	3.25	2.805	+ 0.623	—
298.75	14.50	+ 0.600	+ 4.13	+ 3.530	− 0.102	+ 3.428

DIAPASON ↓ N° 16 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

315.75 à 232.5......	83.25	− 3.448	− 0.55	+ 2.898	+ 0.638	+ 3.536
233.5	82.25	3.410	− 0.03	3.380	0.156	—
249.5	66.25	2.744	+ 0.48	3.224	0.312	—
256	59.75	2.474	0.32	2.794	0.742	—
268	47.75	1.977	0.90	2.877	0.659	—
274	41.75	1.729	1.13	2.859	0.677	—
279	36.75	1.522	1.92	3.442	0.094	—
295	20.75	0.859	2.00	2.859	+ 0.677	—
298.75	17.0	− 0.704	+ 2.88	+ 3.584	− 0.048	+ 3.536

DIAPASON ↓ N° 12 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

391.75 à 232.5.....	159.25	− 6.596	− 3.51	+ 3.086	+ 0.826	+ 3.912
233.5	158.25	6.558	2.99	3.568	0.344	—
249.5	142.21	5.892	2.48	3.412	0.500	—
256	135.75	5.622	2.64	2.982	0.930	—
268	123.75	5.125	2.06	3.065	0.847	—
274	117.75	4.877	1.83	3.047	0.865	—
279	112.75	4.670	1.04	3.630	0.282	—
295	96.75	4.007	0.96	3.047	0.865	—
298.75	93.0	+ 3.852	− 0.08	+ 3.772	+ 0.140	+ 3.912

§ 3.

Cherchons maintenant à nous rendre compte des résultats que nous fournissent ces premiers tableaux.

Soit :	A_α	les battements observés	du diapason mobile	$\downarrow$	pour	$\alpha^{v.\,d.}$	D. chr.
—	A_β	—	—	$\uparrow$	—	β	—
—	B_α	—	du diapason fixe	pendant		α	—
—	B_β	—	—	—		β	—

Dans la première série des tableaux, la première colonne a été obtenue en ajoutant les nombres $(\alpha + \beta)$. La deuxième colonne a été obtenue en ajoutant les battements B_α, B_β ; la troisième les battements A_α, A_β. Enfin la dernière colonne, qui donne les valeurs de Δ a été obtenue en retranchant toujours la troisième colonne de la deuxième.

La première série des tableaux est donc représentée d'une manière générale par le suivant

1^re COLONNE.	2^e COLONNE.	3^e COLONNE.	Δ
$\alpha + \beta$	$B_\alpha + B_\beta$	$A_\alpha + A_\beta$	$\left[A_\alpha + A_\beta\right] - \left[B_\alpha + B_\beta\right]$
$\alpha + \beta'$	$B_\alpha + B_{\beta'}$	$A_\alpha + A_{\beta'}$	$\left[A_\alpha + A_{\beta'}\right] - \left[B_\alpha + B_{\beta'}\right]$

La valeur de Δ, comme nous le voyons, revient à :

$$\Delta = \left[A_\beta - B_\beta\right] - \left[B_\alpha - A_\alpha\right]$$

β étant la seule quantité variable dans un même tableau.

Si l'on se reporte à notre seconde série de tableaux, on voit qu'ils peuvent être représentés aussi d'une manière générale par le suivant :

1^re COLONNE.	2^e COLONNE.	3^e COLONNE.	Γ
$\beta - \alpha$	$B_\beta - B_\alpha$	$A_\beta - A_\alpha$	$\left[A_\beta - A_\alpha\right] - \left[B_\beta - B_\alpha\right]$
$\beta' - \alpha$	$B_{\beta'} - B_\alpha$	$A_{\beta'} - A_\alpha$	$\left[A_{\beta'} - A_\alpha\right] - \left[B_{\beta'} - B_\alpha\right]$

La dernière colonne a toujours été obtenue en retranchant la deuxième de la troisième. Nous obtenons ainsi pour Γ la valeur suivante :

$$\Gamma = \left[A_\beta - B_\beta\right] + \left[B_\alpha - A_\alpha\right]$$

Or, Γ a toujours eu une valeur positive comme le montre le tableau. Nous en concluons donc que l'on a dû avoir :

$$A_\beta > B_\beta \quad \text{et} \quad B_\alpha > A_\alpha,$$

c'est-à-dire que la tonalité devait aller en diminuant quand le diapason s'éloignait, et en augmentant quand il s'approchait.

Δ au contraire, avait des valeurs tantôt positives, tantôt négatives.

Pour obtenir C, on a toujours ajouté algébriquement Δ à Γ.

C sera ce que nous appellerons la *caractéristique* du diapason descendant en α ***v. d.*** du diapason chronographe et que nous désignerons par la lettre C_α.

L'inspection des tableaux nous montre que nous avons :

$$\Gamma_\alpha + \Delta_\alpha = C_\alpha = \text{Const.}$$

c'est-à-dire :

$$C_\alpha = 2\left[A_\beta - B_\beta\right] = 2\left[A_{\beta'} - B_{\beta'}\right] = 2\left[A_{\beta''} - B_{\beta''}\right] = \dots\dots$$

Or, quand nous passons d'un tableau à un autre, c'est-à-dire quand nous faisons varier la valeur de α, en comparant un diapason descendant avec tous les autres ascendants, nous avons, en général, une autre valeur pour la caractéristique, et nous obtiendrons :

$$C_{\alpha'} = 2\left[A_\beta - B_\beta\right] = 2\left[A_{\beta'} - B_{\beta'}\right] = \dots\dots$$

Pour une valeur α'' nous aurons de même :

$$C_{\alpha''} = 2\left[A_\beta - B_\beta\right] = 2\left[A_{\beta'} - B_{\beta'}\right] = \dots\dots$$

Si nous nommons A'_β, A''_β, les valeurs de A_β correspondant aux valeurs de $C_{\alpha'}$, $C_{\alpha''}\dots$, nous aurons, en faisant la somme des équations, membre à membre :

$$\frac{C_\alpha + C_{\alpha'} + C_{\alpha''} + \dots\dots}{2n} + B_\beta = \frac{A_\beta + A'_\beta + A''_\beta + \dots\dots}{n} = A^1_\beta.$$

De même :

$$\frac{C_\alpha + C_{\alpha'} + C_{\alpha''} + \dots\dots}{2n} + B_{\beta'} = \frac{A_{\beta'} + A'_{\beta'} + A''_{\beta'} + \dots\dots}{n} = A^1_{\beta'}$$

On voit que ces valeurs de A^1_β, $A^1_{\beta'}$, peuvent être considérées comme une première approximation des battements que l'on aurait observés sans erreur d'observation et d'un mouvement uniforme.

Si l'on se reporte à la valeur des chiffres caractéristiques, tels que nous les avons obtenus dans nos tableaux, et si l'on remarque que le nombre de ceux-ci est de 10, on verra que l'on a :

$$\frac{C_\alpha + C_{\alpha'} + C_{\alpha''} + \dots\dots}{2n} = 1.544$$

Donc, *lorsque les diapasons s'élèvent*, les battements que l'on aurait entendus si ceux-ci s'étaient éloignés de la membrane d'un mouvement uniforme, seront donnés par la formule :

$$\text{(M)} \qquad A'_\beta = B_\beta + 1.544 \uparrow$$

Et la formule empirique qui fait connaître la tonalité en fonction des battements observés, se réduira à la formule (8), laquelle s'écrira ici :

$$n_1 = n_0 - A'_\beta \frac{256}{\beta} = n - 1.544 \frac{256}{\beta}.$$

Nous pourrons alors comparer cette valeur de n_1 à celle N_1 que nous avons précédemment trouvée dans le cas d'un mouvement variable.

La différence ainsi obtenue sera mise en parallèle avec celle que, conformément aux idées de Doppler, nous avons calculée par la formule (9) et que nous avons désignée par ε_0. Les valeurs de N_0 calculées en ne prenant que les battements entiers et celles de N_1 qui correspondent à des battements entiers et fractionnaires, ne diffèrent que dans les $^1/_{1000}$ de battements. Aussi nous pouvons considérer ε_0 comme correspondant aussi bien à $N_0 - n_1$ qu'à $N_1 - n_1$, et nous représenterons maintenant cette valeur par ε_1. Nous verrons ensuite les conséquences que l'on en doit tirer.

Voici le tableau où seront consignés ces différents résultats :

	Diapason chronographe.	Battements correspondants du diapason fixe.	Battements observés du diapason ↑ Mouvement variable.	Battements du diapason ↑ Mouvement uniforme.			Observé.	Calculé.	Différence.
↑	β	B_β	A_β	A'_β	n_1	N_1	$N_1 - n_1$	ε_1	δ
2	298.75	12.374	14.19	13.973	500.68	500.44	− 0.24	− 0.35	+ 0.11
4	249.5	10.334	11.79	11.933	500.42	500.49	+ 0.07	− 0.07	+ 0.14
7	295.0	12.219	13.31	13.818	500.66	501.06	+ 0.40	+ 0.31	+ 0.09
9	232.5	9.630	10.76	11.229	500.30	500.76	+ 0.46	+ 0.30	+ 0.16
11	256.0	10.645	11.63	12.244	500.46	501.00	+ 0.54	+ 0.39	+ 0.15
14	233.5	9.668	11.28	11.267	500.31	500.27	− 0.04	− 0.18	+ 0.14
15	279.0	11.556	13.23	13.155	500.58	500.45	− 0.13	− 0.26	+ 0.13
17	274.0	11.349	12.44	12.948	500.56	500.78	+ 0.22	+ 0.08	+ 0.14
19	268.0	11.101	12.21	12.700	500.53	500.83	+ 0.30	+ 0.17	+ 0.13

CHAPITRE V

§ 1er.

Nous allons suivre une marche analogue à celle que nous venons d'indiquer pour arriver à déterminer les battements que l'on aurait observés quand les diapasons descendaient, si la vitesse d'entraînement avait été constante. A cet effet, nous allons comparer successivement les battements du diapason qui s'élève à ceux de tous les autres diapasons qui descendent.

Nous aurons les tableaux suivants :

DIAPASON ↑ N° 9 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $B\beta + B_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $A\beta + A_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Différence Δ
232.5 + 187.75 = 420.25	17.406	17.12	+ 0.286
194 = 426.5	17.665	17.10	+ 0.565
207 = 439.5	18.204	18.17	+ 0.034
231.25 = 463.75	19.208	18.65	+ 0.558
241.5 = 475	19.674	19.69	— 0.016
259.5 = 492	20.378	20.12	+ 0.258
284.25 = 516.75	21.404	20.82	+ 0.584
315.75 = 548.25	22.708	22.07	+ 0.638
391.75 = 624.25	25.856	25.03	+ 0.826

DIAPASON ↑ N° 14 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $B\beta + B_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $A\beta + A_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Différence Δ
233.5 + 187.75 = 421.25	17.444	17.64	— 0.196
194 = 427.5	17.703	17.62	+ 0.083
207 = 440.5	18.242	18.69	— 0.448
231.25 = 464.75	19.246	19.17	+ 0.076
242.5 = 476	19.712	20.21	— 0.498
259.5 = 493	20.416	20.64	— 0.224
284.25 = 517.75	21.442	21.34	+ 0.102
315.75 = 549.25	22.746	22.59	— 0.156
391.75 = 625.25	25.894	25.55	+ 0.344

DIAPASON ↑ N° 4 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

249.5 + 187.75 = 437.25	18.110	18.15	— 0.040
194 = 443.5	18.369	18.13	+ 0.239
207 = 456.5	18.908	19.20	— 0.292
231.25 = 480.75	19.912	19.68	+ 0.232
242.5 = 492	20.378	20.72	— 0.342
259.5 = 509	21.082	21.15	— 0.068
284.25 = 533.75	22.108	21.85	+ 0.258
315.75 = 565.25	22.788	23.10	— 0.312
391.75 = 641.25	26.560	26.06	+ 0.500

DIAPASON ↑ N° 5 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

256 + 187.75 = 443.75	18.380	17.99	+ 0.390
194 = 450	18.680	17.97	+ 0.710
207 = 463	19.219	19.04	+ 0.179
231.25 = 487.25	20.223	19.52	+ 0.703
242.5 = 498.5	20.689	20.56	+ 0.129
259.5 = 515.5	21.393	20.99	+ 0.403
284.25 = 540.25	22.419	21.69	+ 0.729
315.75 = 571.75	23.682	22.94	+ 0.742
391.75 = 647.75	26.871	25.90	+ 0.971

DIAPASON ↑ N° 19 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $B\beta+B_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $A\bar{\beta}+A_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Différence Δ
268 + 187.75 = 455.75	18.877	18.57	+ 0.307
194 = 462	19.136	18.55	0.586
207 = 475	19.675	19.62	0.055
231.25 = 499.25	20.679	20.10	0.579
242.5 = 510.5	21.145	21.14	0.005
259.5 = 527.5	21.849	21.57	0.279
284.25 = 552.25	22.875	22.27	0.605
315.75 = 583.75	24.179	23.52	0.659
391.75 = 659.75	27.327	26.48	+ 0.847

DIAPASON ↑ N° 17 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $B\beta+B_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $A\beta+B_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Différence. Δ
274 + 187.75 = 461.25	19.125	18.80	+ 0.325
194 = 468	19.384	18.78	0.604
207 = 481	19.923	19.85	0.073
231.25 = 505.25	20.927	20.33	0.597
242.5 = 516.5	21.393	21.37	0.023
259.5 = 533.5	22.097	21.80	0.297
284.25 = 558.25	23.123	22.50	0.623
315.75 = 589.75	24.419	23.75	0.677
391.75 = 665.75	27.575	26.71	+ 0.865

DIAPASON ↑ N° 15 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

279 + 187.75 = 466.75	19.332	19.59	— 0.258
194 = 473	19.591	19.57	+ 0.021
207 = 486	20.130	20.64	— 0.510
231.25 = 510.25	21.134	21.12	+ 0.014
242.5 = 521.25	21.600	22.16	— 0.560
259.5 = 538.5	22.304	22.59	— 0.286
284.25 = 563.25	23.330	23.29	+ 0.040
315.75 = 594.75	24.634	24.54	+ 0.094
391.75 = 670.75	27.782	27.50	+ 0.282

DIAPASON ↑ N° 7 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

295 + 187.75 = 482.75	19.995	19.67	+ 0.325
194 = 489	20.254	19.65	0.604
207 = 502	20.793	20.72	0.073
231.25 = 526.25	21.797	21.20	0.597
242.5 = 537.5	22.263	22.24	0.023
259.5 = 554.5	22.967	22.67	0.297
284.25 = 579.25	23.993	23.37	0.623
315.75 = 610.75	25.297	24.62	0.677
391.75 = 686.75	28.445	27.58	+ 0.865

DIAPASON ↑ N° 2 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.	Somme des battements correspondants du diapason fixe. $B\beta+B_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Somme des battements correspondants du diapason mobile. $A\beta+A_{\alpha_1}\alpha'_1..$	Différence. Δ
298.75 + 187.75 = 486.50	20.150	20.55	— 0.400
194 = 492.75	20.409	20.53	0.121
207 = 505.75	20.948	21.60	0.652
231.25 = 530	21.952	22.08	0.128
242.5 = 541.25	22.418	23.12	0.702
259.5 = 558.25	23.122	23.55	0.428
284.25 = 583	24.148	24.25	0.102
315.75 = 614.50	25.452	25.50	— 0.048
391.75 = 690.50	28.600	28.46	+ 0.140

§ 2.

DIAPASON ↑ N° 9 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.		Différence des battements correspondants du diapason fixe. — $B_{\alpha_1 \alpha'_1 ..} - B_\beta$	Différence des battements correspondants du diapason mobile. — $A_{\alpha_1 \alpha'_1 ..} - A_\beta$	Différence. — Γ	$\pm\Delta$	$C = \Gamma \pm \Delta$
232.5 à 187.75......	44.75	− 1.854	− 4.40	− 2 546	+ 0.286	− 2.260
194	38.5	1.595	4.42	2.825	0.565	—
207	25.5	1.056	3.35	2.294	0.034	—
231.25	1.25	− 0.052	2.87	2.818	+ 0.558	—
242.5	10	+ 0.414	1.83	2.244	− 0.016	—
259.5	27	1.118	1.40	2.518	+ 0.258	—
284.25	51.75	2.144	− 0.70	2.844	0.584	—
315.75	83.25	3.448	+ 0.55	2.898	0.638	—
391.75	159.25	+ 6.596	+ 3.51	− 3.086	+ 0.826	− 2.260

DIAPASON ↑ N° 14 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

233.5 à 187.75......	45.75	− 1.892	− 4.92	− 3.028	− 0.196	− 3.224
194	39.5	1.633	4.94	3.307	+ 0.083	—
207	26.5	1.094	3.87	2.776	− 0.448	—
231.25	2.25	− 0.090	3.39	3.300	+ 0.076	—
242.5	9	+ 0 376	2.35	2.726	− 0.498	—
259.5	26	1.080	1.92	3.000	− 0.224	—
284.25	50.75	2.106	− 1.22	3.326	+ 0.102	—
315.75	82.25	3.410	+ 0.03	3.380	− 0.156	—
391.75	158.25	+ 6.558	+ 2.99	− 3.568	+ 0.344	− 3.224

DIAPASON ↑ N° 4 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

249.5 à 187.75......	61.75	− 2.558	− 5.43	− 2.872	− 0.040	− 2.912
194	55.5	2.299	5.45	3.151	+ 0.239	—
207	42.5	1.760	4.38	2.620	− 0.292	—
231.25	18.25	0.756	3.90	3.144	+ 0.232	—
242.5	7	− 0.290	2.86	2.570	− 0.342	—
259.5	10	+ 0.414	2.43	2.844	− 0.068	—
284.25	34.75	1.440	1.73	3.170	+ 0.258	—
315.75	66.25	2.744	− 0.48	3.224	+ 0.312	—
391.75	142.25	+ 5.892	+ 2.48	− 3.412	+ 0.500	− 2.912

DIAPASON ↑ N° 11 AVEC TOUS LES AUTRES ↑

256 à 187.75......	68.25	− 2.828	− 5.27	− 2.442	+ 0.390	− 2.052
194	62	2.569	5.29	2.721	0.669	—
207	49	2.030	4.22	2.190	0.138	—
231.25	24.75	1.026	3.74	2.714	0.662	—
242.5	13.5	− 0.560	2.70	2.540	0.088	—
259.5	3.5	+ 0.144	2.27	2.414	0.362	—
284.25	28.25	1.143	1.57	2.740	0.688	—
315.75	59.75	2.474	− 0.32	2.794	0.742	—
391.75	135.75	5.622	+ 2.64	− 2.982	+ 0.930	− 2.052

DIAPASON ↑ N° 19 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.		Différence des battements correspondants du diapason fixe. $B_{x_1 x'_1..} - B_\beta$	Différence des battements correspondants du diapason mobile. $A_{x_1 x'_1..} - A_\beta$	Différence. Γ	$\pm\Delta$	$C = \Gamma \pm \Delta$
268 à 187.75......	80.25	— 3.325	— 5.85	— 2.525	+ 0.307	— 2.218
194	74	3.066	5.87	2.804	0.586	—
207	61	2.527	4.80	2.273	0.055	—
231.25	36.75	1.523	4.32	2.797	0.579	—
242.5	25.5	1.057	3.28	2.223	0.005	—
259.5	8.5	— 0.353	2.85	2.497	0.279	—
284.25	16.25	+ 0.673	2.15	2.823	0.605	—
315.75	47.75	1.977	— 0.90	2.877	0.659	—
391.75	123.75	+ 5.125	+ 2.06	— 3.065	+ 0.847	— 2.218

DIAPASON ↑ N° 17 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

274 à 187.75.......	86.25	— 3.573	— 6.08	— 2.507	+ 0.325	— 2.182
194	80	3.314	6.10	2.786	0.604	—
207	67	2.775	5.03	2.255	0.073	—
231.25	42.75	1.775	4.55	2.779	0.597	—
242.5	31.5	1.305	3.51	2.205	0.023	—
259.5	14.5	— 0.601	3.08	2.479	0.297	—
284.25	10.25	+ 0.425	2.38	2.805	0.623	—
315.75	41.75	1.729	— 1.13	2.859	0.677	—
391.75	117.75	+ 4.877	+ 1.83	— 3.047	+ 0.865	— 2.182

DIAPASON ↑ N° 15 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

279 à 187.75......	91.25	— 3.780	— 6.87	— 3.090	— 0.258	— 3.348
194	85	3.521	6.89	3.369	+ 0.021	—
207	72	2.982	5.82	2.838	— 0.510	—
231.25	47.75	1.978	5.34	3.362	+ 0.014	—
242.5	36.5	1.512	4.30	2.788	— 0.560	—
259.5	19.5	— 0.808	3.87	3.062	— 0.286	—
284.25	5.25	+ 0.218	3.17	3.388	+ 0.040	—
315.75	36.75	1.522	— 1.92	3.442	+ 0.094	—
391.75	112.75	+ 4.670	+ 1.04	— 3.630	+ 0.282	— 3.348

DIAPASON ↑ N° 7 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

295 à 187.75....	107.25	— 4.443	— 6.95	— 2.507	+ 0.325	— 2.182
194	101	4.184	6.97	2.786	0.604	—
207	88	3.645	5.90	2.255	0.073	—
231.25	63.75	2.641	5.42	2.779	0.597	—
242.5	52.5	2.175	4.38	2.205	0.023	—
259.5	35.5	1.471	3.95	2.479	0.297	—
284.25	10.75	— 0.445	3.25	2.805	0.623	—
315.75	20.75	+ 0.859	— 2.00	2.859	0.677	—
391.75	96.75	+ 4.007	+ 0.96	— 3.047	+ 0.865	— 2.182

DIAPASON ↑ N° 2 AVEC TOUS LES AUTRES ↓

Diapason chronographe.		Différence des battements correspondants du diapason fixe. $B_{\alpha_1 \alpha'_1 ..} - B_\beta$	Différence des battements correspondants du diapason mobile. $A_{\alpha_1 \alpha'_1 ..} - A_\beta$	Différence. Γ	$\pm \Delta$	$C = \Gamma \pm \Delta$
298.75 à 187.75....	111	— 4.598	— 7.83	— 3.232	— 0.400	— 3.632
194	104.75	4.339	7.85	3.511	0.121	—
207	91.75	3.800	6.78	2.980	0.652	—
231.25	67.50	2.796	6.30	3.504	0.128	—
242.5	56.25	2.330	5.26	2.930	0.702	—
259.5	39.25	1.626	4.83	3.204	0.428	—
284.25	14.50	— 0.600	4.13	3.530	0.102	—
315.75	17	+ 0.704	— 2.88	3.584	— 0.048	—
391.75	93	+ 3.852	+ 0.08	— 3.772	+ 0.140	— 3.632

§ 3.

En adoptant les mêmes lettres que précédemment, il est facile de voir que les deux séries de tableaux que nous venons de nouveau de donner peuvent être représentés d'une façon générale par les suivants :

1re COLONNE.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	Δ.
$\beta + \alpha$	$B_\alpha + B_\beta$	$A_\alpha + A_\beta$	$[A_\alpha + A_\beta] - [B_\alpha + B_\beta]$
$\beta + \alpha'$	$B_{\alpha'} + B_\beta$	$A_{\alpha'} + A_\beta$	$[A_{\alpha'} + A_\beta] - [B_{\alpha'} + B_\beta]$

La valeur de Δ a été obtenue en retranchant toujours la deuxième colonne de la troisième.

Cette valeur s'écrira :

$$\Delta = (A_\beta - B_\beta) + (A_\alpha - B_\alpha)$$

et pour un même tableau, α sera seul variable. On a aussi pour les seconds tableaux :

1re COLONNE.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	Γ.
$\beta - \alpha$	$B_\alpha - B_\beta$	$A_\alpha - A_\beta$	$[A_\alpha - A_\beta] - [B_\alpha - B_\beta]$
$\beta - \alpha'$	$B_{\alpha'} - B_\beta$	$A_{\alpha'} - A_\beta$	$[A_{\alpha'} - A_\beta] - [B_x - B_\beta]$

On peut encore représenter ainsi ces valeurs de Γ :

$$\Gamma = (B_\beta - A_\beta) + (A_\alpha - B_x)$$

α' étant encore seul variable. En ajoutant algébriquement Δ à Γ on a obtenu par $\Gamma \pm \Delta$ une valeur constante, quel que soit α, on aura donc, en désignant par C_β la valeur de cette caractéristique .

$$\Gamma + \Delta = C_\beta = 2(A_\alpha - B_\alpha) = 2(A_{\alpha'} - B_{\alpha'}) = \ldots..$$

On passera d'un tableau à un autre en changeant β en β', β'',... et l'on obtient comme précédemment :

$$C_{\beta'} = 2(A_\alpha - B_\alpha) = 2(A_{\alpha'} - B_{\alpha'}) = \ldots..$$
$$C_{\beta''} = 2(A_\alpha - B_\alpha) = 2(A_{\alpha'} - B_{\alpha''}) = \ldots..$$

Si l'on nomme A_α, A'_α, A''_α,... les valeurs de A_α correspondantes à C_β, $C_{\beta'}$, $C_{\beta''}$..., on aura, en faisant la somme terme à terme des équations précédentes :

$$\frac{C_\beta + C_{\beta'} + C_{\beta''} + \ldots..}{2n} + B_\alpha = \frac{A_\alpha + A'_\alpha + A''_\alpha + \ldots..}{n} = A^1_\alpha$$

de même :

$$\frac{C_\beta + C_{\beta'} + C_{\beta''} + \ldots..}{2n} + B_{\alpha'} = \frac{A_{\alpha'} + A'_{\alpha''} + A''_{\alpha''} + \ldots..}{n} = A^1_{\alpha'}$$

Or, si l'on se reporte aux valeurs des nombres caractéristiques auxquels nous sommes arrivé, on voit que l'on a :

$$\frac{C_\beta + C_{\beta'} + C_{\beta''} + \ldots..}{2n} = -1.334$$

Donc, la formule générale qui donnera la valeur des battements dans le cas où les diapasons *s'abaissent* d'un mouvement uniforme, sera :

(N) $$A^1_\alpha = B_\alpha - 1,334 \downarrow .$$

Quant à la tonalité, elle sera donnée conformément à ce que nous avons vu précédemment par la formule :

$$n_1 = n_0 - A^1_\alpha \frac{256}{\alpha}.$$

Si l'on calcule ainsi les valeurs de n_1 et qu'on les compare à celles de N_1, on obtiendra les différences $(N_1 - n_1)$ que l'on écrira parallèlement aux nombres ε_1, dans le tableau suivant :

↓	Diapason chronographe.	Battements correspondants du diapason fixe.	Battements observés du diapason ↓ Mouvement variable.	Battements du diapason ↓ Mouvement uniforme.			Observé.	Calculé.	Différence
	α	B_x	A_x	A_x	n_1	N_1	$N_1 - n_1$	ε_1	δ
1	242.5	10.044	8.93	8.710	503.41	503.09	— 0.32	— 0.45	+ 0.13
3	187.75	7.776	6.36	6.442	503.82	503.84	+ 0.02	— 0.14	+ 0.16
5	259.5	10.748	9.36	9.414	503.32	503.37	+ 0.05	— 0.08	+ 0.13
6	231.25	9.578	7.89	8.244	503.48	503.86	+ 0.38	+ 0.25	+ 0.13
8	396.25	16.413	14.67	15.079	502.86	503.16	+ 0.30	+ 0.24	+ 0.06
10	194.0	8.035	6.34	6.701	503.76	504.23	+ 0.47	+ 0.34	+ 0.13
12	391.75	16.226	14.27	14.892	502.87	503.26	+ 0.39	+ 0.32	+ 0.07
13	207.0	8.574	7.41	7.240	503.65	503.49	— 0.16	— 0.29	+ 0,13
16	315.75	13.078	11.31	11.744	503.08	503.12	+ 0.04	— 0.09	+ 0.13
18	284.25	11.774	10.06	10.440	503.20	503.57	+ 0.37	+ 0.28	+ 0.09

CHAPITRE VI

DISCUSSION DES RÉSULTATS

Sur les dix-neuf observations que nous venons de rapporter, nous voyons que les différences entre $N_1 - n_1$ et ε_1 sont constamment de même signe, et que leur valeur moyenne est $+ 0.14$. Nous avons donc

$$(N_1 - n_1) - \varepsilon_1 = + 0,14.$$

Cette dernière relation devient, en substituant à ε_1 sa valeur et simplifiant

$$n_1 = \left(n \pm \frac{a}{\lambda_1}\right) - 0^{\text{v. d.}}.14,$$

n étant égal à 502 $v.d.$

Or, les formules de Doppler, comme nous l'avons montré, se ramènent à la forme

$$n_1 = n \pm \frac{a}{\lambda_1};$$

il y a donc une différence entre nos observations et les formules de Doppler.

Nous devons avouer tout d'abord que, plein de confiance dans nos expériences, nous n'avions pas hésité à poser un point d'interrogation sur les formules de Doppler.

Nous nous basions sur ce fait que, s'il était entré des erreurs dans nos résultats, les nombres obtenus oscilleraient autour de ceux que l'on calcule par les formules de Doppler, comme cela était arrivé à Schüngel qui avait obtenu des différences tantôt positives, tantôt négatives.

Toutefois, on peut remarquer que nos observations n'impliquaient pas l'inexactitude des formules de Doppler, car elles n'en différaient que très-peu (1 vibration double sur 5,000). M. Desains nous engagea à revoir nos épreuves, en portant nos recherches spécialement sur la tension de la membrane; là devait être le nœud de la question, c'est-à-dire la correction de l'instrument qu'il restait à introduire dans nos expériences.

C'est ce que nous avons fait.

Tout d'abord, il est facile de reconnaître si la correction δ, dont la valeur moyenne est 0.14, dépend de l'instrument ou des formules mêmes. Or, si l'on compare respectivement les valeurs de δ aux vitesses correspondantes du diapason mobile, on ne trouve aucune relation entre ces valeurs. C'est ainsi que, dans deux expériences, les vitesses étant inversement proportionnelles aux nombres 194.0 et 315.7, les corrections correspondantes ont été, dans les deux cas, 0.13. Dans deux autres, les corrections ont été 0.09 et 0.16, alors que les vitesses étaient inversement proportionnelles à 284.25 et 187.75. Or la variation de la tonalité $(n_1 - n)$ reste égale à $\pm \frac{a}{\lambda_1}$ d'après Doppler, et à

$\pm \frac{a}{\lambda_1} - \delta$ d'après nos expériences.

λ_1 pouvant être considéré comme conservant la même valeur dans les deux formules, il s'ensuit que pour mettre en doute les formules de Doppler, δ devrait être une fonction de la vitesse a. Mais nous venons de démontrer qu'il n'y a aucun rapport entre ces deux quantités.

Donc la correction δ doit être, dans chaque expérience, la correction de l'instrument.

Nous allons déterminer directement cette correction en nous reportant à nos premières épreuves, où elle était restée invisible pour nous tant que notre attention n'avait pas été attirée sur ce point.

Pour déterminer l'influence de la membrane qui inscrit les vibrations, on peut songer à une légère résistance occasionnée par la faible tension que possède la membrane elle-même. Cette tension n'altérerait pas le nombre de vibrations, mais elle pourrait exercer une influence progressive sur l'amplitude des vibrations, influence qui se manifesterait par une sorte de battement très-lent, et qui pourrait altérer les nombres obtenus par nous d'une très-petite fraction de battement.

Il suffit de montrer, pour justifier cette explication, que la membrane, alors qu'elle vibre sous l'influence d'un seul diapason, peut interférer avec celui-ci. Or, c'est ce que l'on observe en examinant attentivement les épreuves par lesquelles nous avons déterminé, par l'intermédiaire de la membrane, le nombre de vibrations de nos deux diapasons ut_4 et $ut_4 - 10$.

Sur l'épreuve (18), qui nous donne le nombre de vibrations du diapason mobile $ut_4 - 10 = 502$ lorsqu'il reste fixe, qu'il s'approche et s'éloigne de la membrane, nous observons nettement ce résultat. L'épreuve avait été mise de côté par nous, comme n'étant pas assez parfaite. Cette imperfection consistait dans l'inégalité des vibrations écrites. Or, c'est là précisément la preuve d'un battement que l'on peut même mesurer, d'un maximum à un maximum, d'une façon très-nette.

On obtient ainsi :

Pour 123 *vd*. Diapason chronographe ($^1/_2$ seconde environ), 1 battement entre la membrane et le diapason $ut_4 - 10 = 502$ resté fixe.

Pour 122 *vd*. Diapason chronographe, 1 battement du diapason $ut_4 - 10$ mobile $\downarrow$.

Ce nombre peut être considéré comme sensiblement le même que le précédent, attendu que la détermination du point maximum est ici un peu douteuse.

Sur l'épreuve (19), qui nous donne le nombre de vibrations du diapason fixe $ut_4 = 512$, nous pouvons de même rechercher les battements réciproques de la membrane et du diapason. Si nous obtenions le même nombre, il est clair que l'influence de la membrane serait nulle dans l'inscription des battements des deux diapasons vibrant simultanément.

Mais nous obtenons 1 battement entre la membrane et le diapason de 512, pendant 130 *v.d.* du diapason chronographe.

C'est-à-dire que, sous l'influence du diapason $ut_4 - 10$, la membrane fait 10.55 battements pour 1300 *v.d* du diapason chronographe, tandis qu'elle fait 10 battements avec le diapason ut_4 dans le même temps.

Sous l'influence des deux diapasons, la membrane exécutera donc

$0^b.55$ pendant 1300 *vd*. Diapason chronographe.

c'est-à-dire

$0^b.055$ pour 130 *vd*. Diapason chronographe.

Or, la durée moyenne de nos observations étant proportionnelle à 260 *v.d.* du diapason chronographe, la correction moyenne de la membrane sera donc de $0^b.11$.

Nous retrouvons ainsi le nombre même auquel nous étions arrivé par la discussion de nos observations, c'est-à-dire par une méthode toute différente.

Si nous introduisons cette correction de la membrane, les nombres auxquels nous arrivons seront donc finalement donnés par la formule

$$n_1 = \left(n \pm \frac{a}{\lambda_1}\right) + (0.11 - \delta)$$

et les différences entre les nombres observés et ceux calculés par les formules de Doppler deviennent alors

	Expériences	1	3	5	6	8	10	12	13	16	18
$\downarrow$	$(0.11 - \delta) =$	-0.02	-0.05	-0.02	-0.02	$+0.05$	-0.02	$+0.04$	-0.02	-0.02	$+0.02$

	Expériences	2	4	7	9	11	14	15	17	19
$\uparrow$	$(0.11 - \delta) =$	0.00	-0.03	$+0.02$	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.03	-0.02

Ainsi, nous retrouvons la tonalité calculée par les formules de Doppler, à une approximation de $0^{v.d}05$ pour 500 $v.d$, c'est-à-dire de 1 pour 10,000.

CHAPITRE VII

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DU SON

Schüngel, comme nous l'avons rappelé, avait proposé d'employer la méthode des battements à la détermination de la vitesse du son.

Nous avons vu en même temps que cet auteur, quoique proposant cette nouvelle méthode, n'avait pas publié les résultats auxquels on arrivait avec ses nombres. Nous avons montré que la vitesse du son, calculée d'après ses expériences, pouvait varier de 382 mètres à 315 mètres, alors qu'elle était de 343 mètres. Il convient donc d'examiner le degré de valeur que peut présenter cette méthode. Il y a deux genres de correction à introduire, comme nous l'avons montré. La première est facile à éliminer. Elle est relative à la marche qu'il faut suivre pour ramener le mouvement du diapason mobile de variable à être uniforme. La correction du mouvement que l'on peut diminuer beaucoup par une construction convenable, disparaît complétement en employant la méthode dont nous avons fait usage.

Reste la perturbation des battements propres de la membrane avec chacun des diapasons. Cette perturbation peut-elle être mesurée directement, avec une exactitude suffisante, par des recherches sur la vitesse du son?

Il y aurait deux marches à suivre pour déterminer cette correction :

Faire écrire séparément par la membrane les vibrations des deux diapasons, en conclure le nombre des battements, et le comparer à celui qu'écrit la membrane lorsqu'ils vibrent simultanément. C'est ce que nous avons fait dans nos épreuves 1, 2, 3. Nous avons obtenu, pour le nombre de battements directs, 10.60, et celui déduit du comptage des vibrations

$$512.65 - 502 = 10.65.$$

Mais il est évident que ce dernier nombre n'est que d'une valeur relative, puisque les vibrations ayant une longueur moyenne de 2 millimètres, $^1/_{10}$ de vibration répond seulement à $^2/_{10}$ de millimètre.

La seconde méthode est celle qui nous a permis d'évaluer à $0^{vd}.11$ la correction moyenne de la membrane dans nos expériences. Mais elle présente encore de grandes difficultés. Lorsqu'un battement s'écrit sur une longueur de $0^m.50$, il est bien difficile de déterminer le point maximum. Pour une épreuve qui permet d'apprécier la position de ce point, on en obtient un grand nombre où cette évaluation est impossible. De plus, d'une épreuve à une autre, la tension de la membrane peut changer, légèrement il est vrai, mais suffisamment pour rendre fautive cette détermination directe déjà difficile.

Nous en sommes donc réduit à n'apprécier qu'indirectement la correction de la membrane, comme différence entre la tonalité observée et celle calculée par les formules de Doppler.

Voyons, dans ces conditions, comment nous pouvons en déduire la vitesse de propagation du son. Ayant la relation

$$n_1 = \left(n \pm \frac{a}{\lambda_1}\right) - \delta$$

nous savons, puisque les formules de Doppler ont été démontrées rigoureusement exactes, que la tonalité n_1 est inexacte. On a donc la relation

$$(n_1 + \delta)(\lambda_1 + \ldots\ldots) = \mathrm{U}$$

U étant la vitesse du son. En appelant n'_1, n''_1 les tonalités calculées par les formules de Doppler, on a

$$(1) \qquad n_1 = n'_1 - \delta, \quad n_2 = n_1 - \delta'$$

substituant à n'_1 et à n''_1 leurs valeurs

$$\frac{n}{1 - \frac{a}{\mathrm{U}}}, \quad \frac{n}{1 + \frac{a}{\mathrm{U}}},$$

on déduit pour la vitesse

$$\downarrow \frac{U}{a} = \frac{n'_1}{n'_1 - n}, \qquad \uparrow \frac{U}{a} = \frac{n''_1}{n - n''_1}.$$

Or, en désignant par s_1, s'_1 les battements observés, nous avons vu que nous avions

$$n_1 = n_0 - s_1, \qquad n_2 = n_0 - s'_1,$$

on aura donc en substituant ces valeurs dans (1)

$$n'_1 = n_0 - s_1 + \delta, \qquad n''_1 = n_0 - s'_1 + \delta'$$

d'où, pour la vitesse du son,

$$\downarrow \ U = a \frac{n_0 - s_1 + \delta}{\left[(n_0 - n) - s_1\right] + \delta}, \qquad \uparrow \ U = a \frac{n_0 - s'_1 + \delta'}{\left[s_1 - (n_0 - n)\right] - \delta'}.$$

Telles sont les formules qui nous permettraient de calculer la vitesse de propagation du son en fonction des battements observés et des corrections δ.

Les corrections δ seront d'autant plus faibles que les deux diapasons seront plus voisins de l'unisson. L'influence de la correction est insensible au numérateur, mais très-grande au contraire au dénominateur. Les expressions $\left[(n_0 - n) - s_1\right]$, $\left[s'_1 - (n_0 - n)\right]$ représentent les variations des battements inscrits en 1 seconde quand le diapason, d'abord fixe, se déplace. Ces nombres auront des valeurs d'autant plus grandes que le diapason parcourra plus de chemin en 1 seconde. Dans nos expériences, nous obtenions $1^b.5$, le chemin parcouru étant d'une longueur d'onde et demie. Or, la correction δ s'est trouvée de 0.14, c'est-à-dire le dixième du nombre qui est au dénominateur. Il en résulte que les vitesses du son, calculées par les formules précédentes, seront nécessairement inexactes, parce que l'influence de la correction est considérable. Tel est l'inconvénient de la méthode des battements, et qui doit en faire rejeter l'usage pour la détermination rigoureuse de la vitesse de propagation du son. Voici le tableau des vitesses que l'on calculerait par les formules précédentes.

↓	a	δ	s_1	U
1.............	1.013	0.13	9.19	327
3.............	1.308	0.16	8.78	324
5.............	0.947	0.13	9.28	318
6.............	1.062	0.13	9.13	324
8.............	0.620	0.06	9.75	324
10............	1.266	0.13	8.84	328
12............	0.627	0.07	9.72	315
13............	1.187	0.13	8.95	326
16............	0.804	0.13	9.51	318
18............	0.864	0.09	9.41	326

↑	a	δ'	s'_1	U
2	0.822	0.11	11.97	340
4	0.985	0.14	12.24	365
7	0.833	0.09	11.99	333
9	1.057	0.16	12.36	341
11	0.956	0.15	12.24	332
14	1.052	0.14	12.35	337
15	0.880	0.13	12.07	341
17	0.896	0.14	12.09	345
19	0.917	0.13	12.13	340

Vu et approuvé :

Paris, le 28 décembre 1878.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

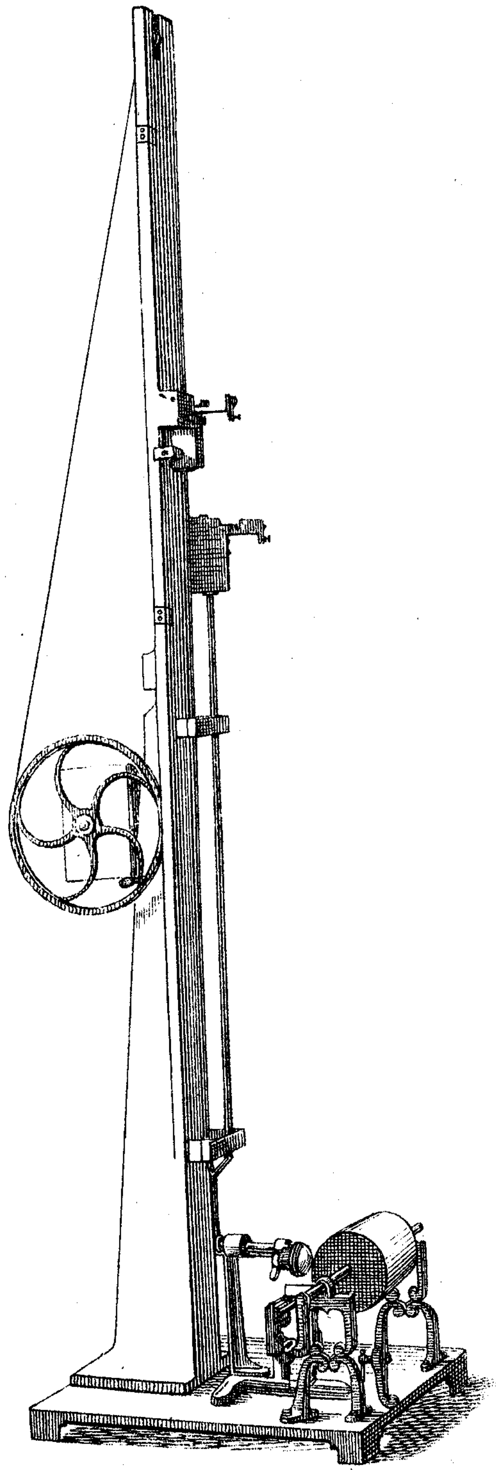
Vu et permis d'imprimer :

Le 28 décembre 1878.

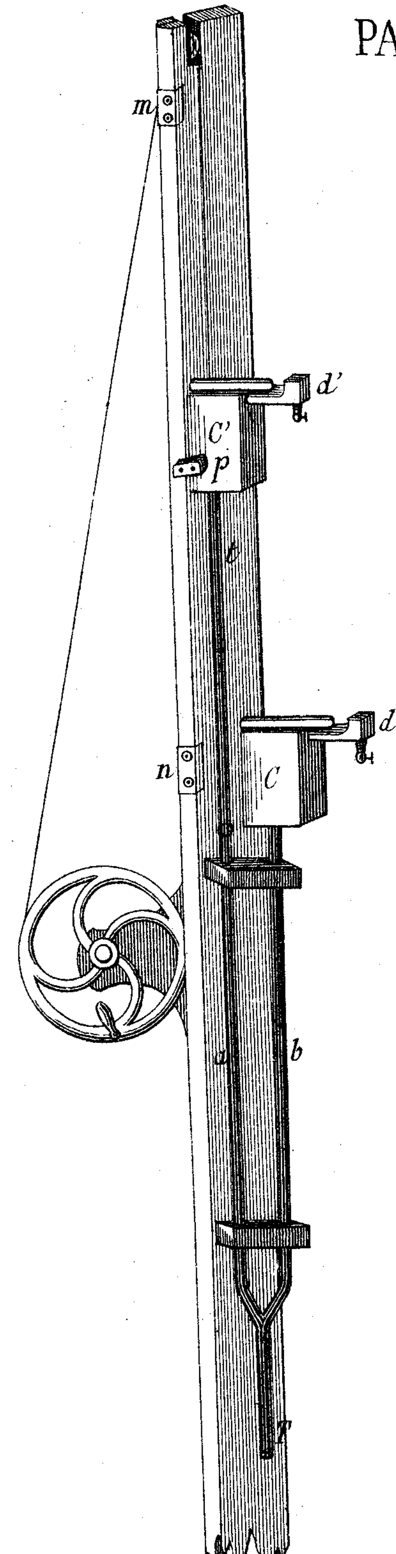
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

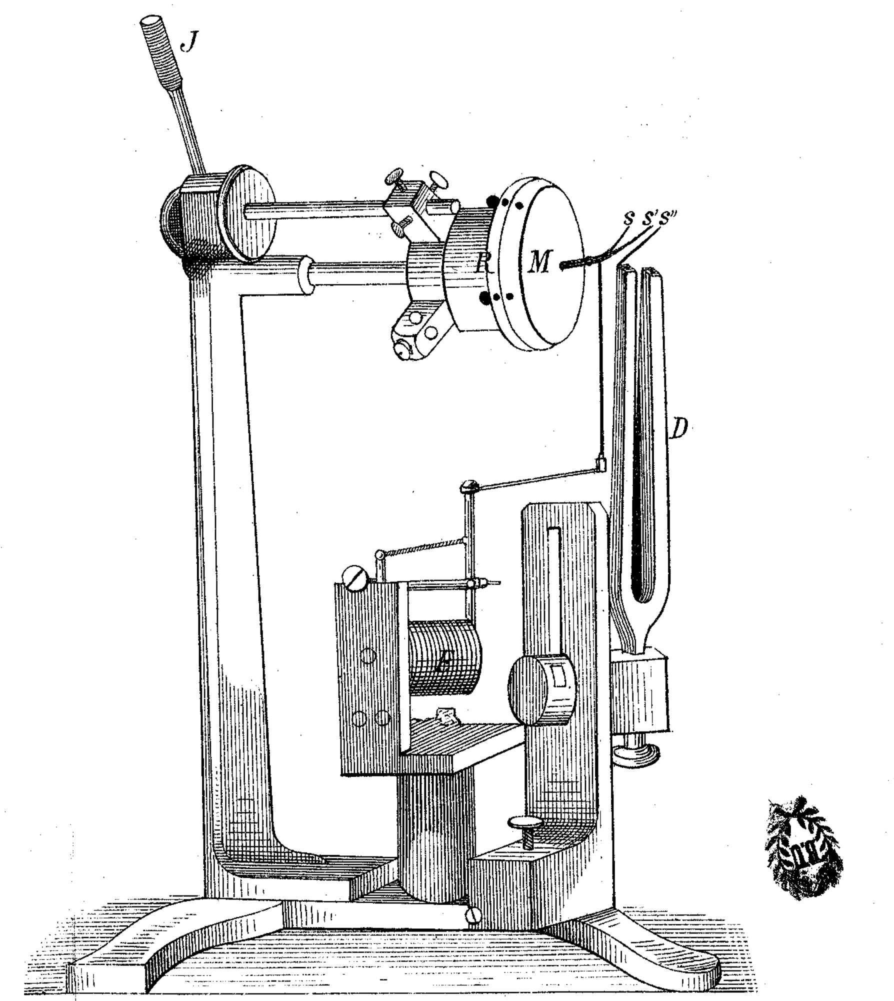
A. MOURIER.

VUE D'ENSEMBLE DE L'APPAREIL



PARTIES SÉPARÉES DE L'APPAREIL





d, — Diapason fixe, d' Diapason mobile.
C, C' — Caisse sonores.
t — Tube glissant dans le tube a
m, n — Course du diapason mobile.
m, n, p — Plaques de cuivre reliées par des fils électriques à une pile et à l'électro-aimant E

R — Caisse résonnante.
M — Membrane vibrante.
E — Electro-aimant.
D — Diapason chronographe.
s ---- Style de l'Electro-aimant.
s' ---- Style de la membrane.
s'' ---- Style du Diapason Chronographe
J — Tube de caoutchouc reliant R au tube T.

Lith. J. Hennet. 7, pas. Dauphine. Paris.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

DES ALCOOLS

Vu et approuvé :

Paris, le 28 décembre 1878.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer :

Le 28 décembre 1878.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

93711 PARIS. — Typographie de Ve RENOU, MAULDE et COCK, rue de Rivoli, n° 144.