TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

PAR H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Felix qui potuit rerum cognoscere causas.
(VIRGILE.)

TOME PREMIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1870

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

STATIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL.

NOTES.

PRÉFACE.

> ... Gardons-nous de croire à une omnipotence de la Géométrie seule qui n'existe pas et que l'histoire de la science dément.
>
> (LAMÉ, *Coordonnées curvilignes*.)

> ... La méthode analytique, à raison de son universalité, doit être enseignée de préférence et peut-être exclusivement....
>
> (CHASLES, *Aperçu historique*, p. 185.)

> ... Pour la perfection même de son œuvre, l'auteur a soin de n'employer, dans aucune des questions qu'il traite, ni figures, ni aucun raisonnement tiré de considérations géométriques....
>
> (POINSOT, *Note sur Lagrange*, 3ᵉ édit. de la *Mécanique analytique*, p. 389.)

> Trop éblouis par la simplicité, la lucidité, l'élégance de certaines démonstrations purement géométriques, ne les substituons pas partout en Mécanique aux méthodes analytiques qui ont véritablement signalé les théorèmes énoncés, et qui, bien présentées, sont aussi simples, aussi lucides, aussi élégantes.
>
> (LAMÉ, *Coordonnées curvilignes*, p. XV.)

Depuis quelques années, l'enseignement de la Mécanique rationnelle s'est modifié. Les professeurs de l'École Polytechnique et plusieurs professeurs de Faculté commencent la Cinématique avant d'aborder l'étude de la Statique.

Un grand nombre de savants se sont montrés hostiles à cette manière de procéder; les arguments qu'ils mettent en avant me semblent faciles à détruire. La Statique, disent-ils, a été inventée près de deux mille ans avant la Cinématique, et avant le principe de Dynamique sur lequel est fondée la Statique dans le nouveau mode d'enseignement; la Statique est donc une science à part et tout à fait indépendante des considérations du mouvement sur lesquelles on veut l'asseoir aujourd'hui; enfin il y a beaucoup d'inconvénients à modifier brusquement un mode d'exposition adopté depuis de longues années.

A cela, je répondrai que la Cinématique est une science ayant son existence indépendante de la Mécanique proprement dite, fondée sur la considération de la force, et cette science a été réellement créée en même temps que la Géométrie dont elle fait partie. On peut donc faire à part l'étude du mouvement des figures géométriques, d'autant mieux que nous n'avons pas besoin de principes nouveaux pour entreprendre cette étude. Ensuite, en abordant la Statique, on pose immédiatement tous les principes dont on a besoin pour construire la Dynamique. La Mécanique devient alors une science toute rationnelle au même titre que la Géométrie pure; enfin, comme le disaient si bien et Lagrange et mon illustre maître Bour : N'est-il pas bien singulier qu'ayant défini la force une cause de mouvement, on puisse établir toute une partie de la science des forces sans s'appuyer sur la considération du mouvement!

Si Archimède et ses successeurs ont pu exposer la Statique sans le secours de la Cinématique, c'est en admettant des principes, assez évidents, du reste, mais inutiles. Avant tout, la science doit chercher à réduire au plus petit nombre possible les postulata, que l'on ne peut, d'ailleurs, éviter complétement. Je crois avoir montré clairement dans le courant de cet Ouvrage en quoi consistaient les postulata sur lesquels reposait l'ancienne Statique.

Enfin, pour répondre à la dernière objection, je ferai observer que les anciennes démonstrations, une fois le théorème de Stevin établi, ne se trouveront nullement modifiées. En résumé, la nouvelle Mécanique ne diffère de l'ancienne que par une Introduction, qui est la Cinématique, branche de la Géométrie, et par une nouvelle démonstration du théorème du parallélogramme des forces fondée sur les principes fondamentaux de la Dynamique, que l'ancienne Mécanique n'évitait pas. Ainsi un peu plus de rigueur dans les principes, un peu plus de logique dans le mode d'exposition, voilà ce qui différencie la nouvelle méthode de l'ancienne.

J'ai donné presque toujours la préférence aux démonstrations analytiques; elles ont l'avantage de laisser dans l'esprit une trace ineffaçable et de fournir une méthode uniforme d'investigation. Tout s'enchaîne en analyse. La synthèse, au contraire, ne présente que des méthodes isolées et exige des efforts de mémoire prodigieux de la part de ceux qui abordent l'étude d'une science. Je citerai à l'appui de mon opinion un passage de Poinsot, le géomètre par excellence, et que l'on peut lire dans la première Note qui fait suite à la troisième édition de la Mécanique de Lagrange.

Maintenant que je crois avoir justifié l'ordre des matières exposées dans cet Ouvrage, je dois prévenir les candidats à la licence et à l'agrégation qui voudront bien étudier mon travail, que je ne me suis pas borné à développer leur programme, j'ai consacré un Chapitre spécial aux travaux récemment effectués par les continuateurs de Lagrange sur l'intégration des équations de la Dynamique. Les personnes qui voudront bien lire ce Chapitre y trouveront des méthodes fécondes pour résoudre certains problèmes qui, par les méthodes ordinaires, présenteraient de graves difficultés.

Je prie le lecteur de vouloir bien me pardonner certaines locutions vicieuses, telles que *droite parallèle égale et de même sens que*, etc.; ces locutions, mauvaises au point de vue grammatical, simplifient tellement le langage, que j'ai cru pouvoir me les permettre.

Je me suis permis également (toujours pour être plus concis) de supprimer certains développements donnés soit dans les Traités d'Analyse, soit dans les Traités de Physique. En un mot, je suppose le lecteur déjà un peu au courant des questions de Mécanique les plus élémentaires.

Je remercie MM. Gigon et Ribaucour qui ont bien voulu m'aider dans la correction des épreuves.

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE.

PREMIÈRE PARTIE.
CINÉMATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.
MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

I. — Préliminaires.

1. La *Mécanique* est la science du mouvement et de ses causes; elle se divise en trois parties : 1° la *Cinématique*, qui a pour but l'étude des diverses propriétés des figures en mouvement, étude considérée indépendamment des causes qui peuvent produire ce mouvement; 2° la *Statique*, qui a pour but l'étude des causes de mouvement ou *forces*, indépendamment des mouvements plus ou moins compliqués qui peuvent en résulter; 3° enfin la *Dynamique*, qui a pour but la recherche du mouvement produit par des causes connues, ou *vice versâ* la recherche des forces capables de produire un mouvement donné. Nous aborderons d'abord l'étude de la Cinématique. La Cinématique n'est, à proprement parler, qu'une branche

de la Géométrie dans laquelle on fait parfois entrer un élément nouveau, le *temps*.

Le *temps* ne peut pas se définir, mais il est essentiel de montrer comment on peut arriver à le mesurer. Deux temps sont égaux lorsqu'ils sont la durée de deux phénomènes identiques, et cette proposition est bien plus l'énoncé d'un fait qu'une définition. Quoi qu'il en soit, c'est en partant de ce fait ou de cette définition que l'on arrive à mesurer le temps. Si l'on imagine un vase rempli d'eau conservant constamment le même niveau, et si l'on pratique à la partie inférieure du vase une ouverture, la quantité d'eau écoulée pendant un certain temps pourra servir à mesurer ce temps, car le fait de l'écoulement d'un litre d'eau est un phénomène qui reste identique à lui-même et qui exige par suite le même temps pour son accomplissement. Nous pouvons prendre pour unité de temps le temps employé pour laisser écouler un litre d'eau; le temps t sera alors le temps qu'il faut pour laisser écouler t litres d'eau.

Nous n'avons pas à discuter les méthodes que l'on a proposées pour mesurer le temps; qu'il nous suffise de concevoir que l'on puisse adopter une unité, peu importe, du reste, pour le moment, la manière dont cette unité aura été choisie. Lorsque nous entrerons dans le domaine des applications il faudra, au contraire, choisir cette unité avec un soin minutieux; c'est alors que la Mécanique empruntera des notions étendues à la Physique expérimentale et à l'Astronomie, et cessera d'être une science purement rationnelle.

II. — Définition d'un mouvement.

2. Nous disons qu'un corps est en *mouvement* lorsque nous lui voyons occuper successivement diverses posi-

tions dans l'espace, il est en repos dans le cas contraire; le mouvement d'un corps sera parfaitement défini lorsque l'on connaîtra la position de chacun de ses points à chaque instant. Nous sommes donc tout naturellement conduits à définir le mouvement d'un point. A cet effet, on peut imaginer un système de coordonnées, et donner les coordonnées du point mobile en fonction du temps.

Si, pour fixer les idées, nous prenons trois axes rectangulaires, ox, oy, oz, et si nous comptons le temps à partir d'un certain instant bien défini, tel que l'apparition d'un phénomène constaté, si nous désignons par x, y, z les coordonnées du point mobile, et par t le temps écoulé depuis l'apparition du phénomène en question, x, y, z seront des quantités variables avec t, des fonctions $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ du temps; les équations

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

définiront entièrement le mouvement du point mobile. Car t une fois connu, on connaîtra x, y, z, c'est-à-dire la position du mobile; l'instant (*) à partir duquel on compte le temps porte le nom d'*origine des temps*, les quantités $\varphi(0)$, $\chi(0)$, $\psi(0)$, qui représentent les coordonnées du mobile à l'instant où l'on commence à compter le temps, sont ce que l'on appelle les *coordonnées à l'origine du temps*.

3. Si, entre les équations (1), on éliminait t, on trouverait deux relations de la forme

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

entre les coordonnées x, y, z. Ces équations représen-

(*) L'*instant* en Mécanique n'a pas de durée, c'est ce qui sépare deux temps consécutifs; l'instant est au temps ce que le point en Géométrie est à l'espace.

tent une courbe sur laquelle le point reste constamment, puisque ses coordonnées satisfont quel que soit t aux équations (2). Cette courbe que décrit le point mobile est ce que l'on appelle sa *trajectoire*. Les équations (1) portent le nom d'*équations du mouvement*.

4. Lorsque le mouvement d'un point s'effectue dans un plan, on peut prendre ce plan pour plan des xy; l'une des équations du mouvement se réduit alors à $z = 0$; on n'a pas besoin d'en tenir compte, et les équations du mouvement se réduisent à deux

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t).$$

En général, toutes les fois qu'un point sera assujetti à se mouvoir sur une surface connue, deux équations suffiront pour déterminer son mouvement; par exemple, pour connaître le mouvement d'un point à la surface d'une sphère, il suffira de donner sa longitude et sa latitude en fonction du temps.

Si un point est assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée, une seule équation suffira pour déterminer son mouvement. En effet, ce mouvement sera connu dès que l'on connaîtra l'équation

$$s = \varphi(t)$$

qui lie l'arc parcouru pendant le temps t à partir d'une origine donnée, au temps t employé à le parcourir.

Ajoutons enfin que les équations du mouvement ne se présenteront pas toujours sous la forme simple (1), mais sous des formes plus compliquées dont l'expression générale est,

$$\Phi(x, y, z, t) = 0, \quad \mathrm{X}(x, y, z, t) = 0, \quad \Psi(x, y, z, t) = 0.$$

III. — Mouvement uniforme.

5. Le *mouvement uniforme* est celui d'un point qui parcourt des espaces égaux en des temps égaux, quels que soient ces temps. Ceci revient à dire que la variation de l'espace est proportionnelle à celle du temps.

Si donc s désigne l'arc de trajectoire compté à partir d'une origine donnée, s_0 l'arc de trajectoire compté à partir de la même origine jusqu'à la position occupée par le mobile à l'époque t_0, on doit avoir

$$s - s_0 = v(t - t_0), \tag{1}$$

v désignant dans cette équation une quantité constante. Si l'on prend $t - t_0 = 1$, la formule précédente devient

$$s - s_0 = v.$$

La quantité v est donc l'espace parcouru par le mobile dans l'unité de temps; on lui donne le nom de *vitesse du mouvement* ou du point mobile. L'équation (1) est l'équation du mouvement uniforme. Cette équation se simplifie si l'on prend $t_0 = 0$, c'est-à-dire si l'on compte le temps à partir du moment où le mobile est en s_0. On a alors

$$s - s_0 = vt \quad \text{ou} \quad s = s_0 + vt.$$

Elle se simplifie encore en prenant $s_0 = 0$, c'est-à-dire en comptant les espaces à partir du point où se trouve le mobile à l'époque $t = 0$. On a dans ce cas

$$s = vt.$$

IV. — Vitesse d'un mouvement quelconque.

6. Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*. La vitesse d'un mouvement uniforme fait connaître

la rapidité de ce mouvement qui est toujours la même. Comment peut-on parvenir à la mesure précise de cette rapidité dans un mouvement varié ?

Pour résoudre cette question importante, nous observerons que le phénomène du mouvement est essentiellement continu, et que si l'on considère une période de temps assez courte Δt, le mouvement du point sera presque uniforme, en sorte que le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mesurera assez bien la rapidité du mouvement pendant le laps de temps Δt. On donne à ce rapport le nom de *vitesse moyenne* pendant le temps Δt ; la vitesse moyenne dépend non-seulement de t, mais encore de Δt, et ne donne aucune notion sur la nature du mouvement à l'époque t : il n'en est pas de même de la limite $\frac{ds}{dt}$ de cette vitesse moyenne, à laquelle on a donné le nom de *vitesse du mouvement à l'époque t*.

Ainsi l'on voit que la *vitesse* n'est autre chose que la dérivée de l'espace prise par rapport au temps.

Cette définition s'applique encore au mouvement uniforme. En effet, si l'on reprend la formule

$$(1) \qquad s - s_0 = v(t - t_0),$$

elle donne par différentiation

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} = v.$$

Réciproquement, si la vitesse d'un mouvement est constante, le mouvement est uniforme. En effet, si dans l'équation (2) on considère v comme une constante, l'intégration fournira la formule (1).

La formule

$$v = \frac{ds}{dt}$$

permet de calculer la vitesse dès que l'on connait les équations du mouvement. En effet, $\frac{ds}{dt}$ pourra se calculer en fonction des différentielles des coordonnées, lesquelles sont des fonctions implicites ou explicites du temps données par les équations du mouvement. Par exemple, si le mouvement est donné en coordonnées rectangulaires, on aura

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \chi'^2(t) + \psi'^2(t)}.$$

V. — Théorèmes sur les vitesses.

7. On représente géométriquement la vitesse v à l'époque t, d'un point en mouvement, en menant par la position du mobile à l'époque t, une tangente à la trajectoire; sur cette tangente, à partir du point de contact et dans le sens où s'effectue le mouvement, on porte une longueur égale à v.

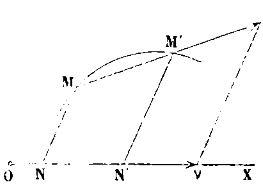
Pour bien comprendre ce mode de représentation, il faut d'abord dire ce que nous entendons par *sens du mouvement*, il faut ensuite faire comprendre ce que l'on entend par une *longueur égale à* v. Par la position occupée par le mobile à l'époque t, menons un plan normal à la trajectoire; le mobile en quittant le plan normal commencera à se mouvoir d'un certain côté de ce plan, on prend l'extrémité de la vitesse précisément de ce côté, son origine demeurant, comme on l'a dit, au point de contact; le sens de la vitesse est ainsi déterminé et porte le nom de *sens du mouvement*.

La vitesse $v = \frac{ds}{dt}$ est le rapport d'un espace à un temps, cette quantité varie donc à la fois avec l'unité d'espace et avec l'unité de temps. Quoi qu'il en soit, l'unité d'espace et l'unité de temps une fois fixées, le rapport v aura une valeur numérique; on devra alors entendre par *longueur égale à* v une longueur contenant autant d'unités de longueur qu'il y a d'unités abstraites dans le nombre v.

8. THÉORÈME I. — *La projection de la vitesse d'un point sur un axe quelconque est représentée en grandeur et en direction par la vitesse de la projection de ce point.*

En effet, soit MM′ (*fig.* 1) l'arc de trajectoire parcouru

Fig. 1.



dans le temps dt, la vitesse v du mobile sera la limite du rapport

$$\frac{\text{corde}\, MM'}{dt}.$$

Soient N et N′ les projections de M et de M′ sur l'axe OX, la vitesse de la projection du point mobile sera la limite de

$$\frac{NN'}{dt}.$$

Mais si $M\mu$ représente une longueur égale à $\dfrac{\text{corde}\, MM'}{dt}$ et si l'on projette $M\mu$ sur OX suivant la ligne $N\nu$, on aura

$$\frac{M\mu}{N\nu} = \frac{MM'}{NN'} = \frac{MM' : dt}{NN' : dt}.$$

Il résulte de là que

$$N\nu = \frac{NN'}{dt}.$$

la limite de $N\nu$ est donc la vitesse du mouvement projeté. Mais la limite de $M\mu$ est en grandeur et en direction la vitesse du mouvement lui-même; or, par hypothèse, $N\nu$ est la projection de $M\mu$. Le théorème est donc démontré.

9. Théorème II. — *La projection de la vitesse d'un point sur un plan est égale à la vitesse de la projection de ce point sur le plan.*

La démonstration de ce théorème se fait exactement comme celle du précédent.

Corollaire I. — Si l'on considère les équations du mouvement d'un point en coordonnées rectilignes, x, y, z désignant les coordonnées du mobile à l'époque t,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

seront les vitesses des mouvements projetés sur ox, oy, oz respectivement, les projections étant effectuées parallèlement à zoy, zox, xoy. Ces quantités représenteront donc aussi, en vertu du théorème I, les projections de la vitesse propre v du mobile sur les axes, et la vitesse v sera par suite la résultante des vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Si les coordonnées sont rectangulaires, et si α, β, γ désignent les angles que la tangente à la trajectoire dirigée dans le sens du mouvement fait avec les angles, on aura

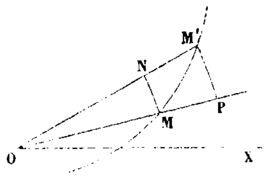
$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v\cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = v\cos\gamma,$$

et par suite, en ajoutant ces équations élevées au carré,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2.$$

10. Corollaire II. — Supposons que le mouvement d'un point s'effectue dans un plan, prenons des coordonnées polaires; soient OX (*fig.* 2) l'axe polaire, O le pôle, MM' l'arc décrit par le mobile dans le temps dt.

Fig. 2.



Soient $OM = r$, $XOM = \theta$ les coordonnées du mobile à l'époque t, on aura

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2};$$

$r\frac{d\theta}{dt}$ est la dérivée de $r\theta$ prise en regardant r comme constant; c'est donc la vitesse d'un point qui décrirait l'arc MN ayant son centre en O et son extrémité N sur le rayon vecteur du point M'. De même $\frac{dr}{dt}$ est la vitesse d'un point décrivant la droite MP ayant son extrémité sur l'arc M'P de cercle décrit de O comme centre avec OM' pour rayon; $r\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ sont les vitesses des projections du mobile sur la tangente à MN et sur MP; ce sont donc aussi les composantes de la vitesse suivant la tangente MN et suivant MP : on peut dire aussi que ce sont les composantes de la vitesse prises normalement et parallèlement au rayon vecteur du mobile; $r\frac{d\theta}{dt}$ est la *vitesse de circulation* du mobile, $\frac{dr}{dt}$ sa *vitesse de translation le long du rayon vecteur.*

$\frac{d\theta}{dt}$ s'appelle la *vitesse angulaire* du rayon OM; $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ est sa *vitesse aréolaire.*

Lorsque $\frac{d\theta}{dt}$ est constant, on dit que le rayon vecteur est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour du point O, et alors θ varie proportionnellement au temps.

VI. — Mouvement uniformément varié.

11. Le mouvement *uniformément varié* est celui dans lequel la vitesse prend des accroissements égaux dans des temps égaux, quels que soient ces temps.

Ou, si l'on veut, c'est le mouvement dans lequel la vitesse reçoit des accroissements proportionnels à ceux du temps.

Supposons le mouvement rectiligne; en prenant la trajectoire pour axe, l'équation unique du mouvement sera

$$v - v_0 = j(t - t_0);$$

dans cette formule, v et v_0 sont les vitesses aux époques t et t_0, j est une constante que l'on appelle l'*accélération.* L'équation précédente est une équation différentielle; pour obtenir l'équation du mouvement sous forme finie, il suffit de remplacer v par $\frac{ds}{dt}$ et d'intégrer, il vient alors

$$s - s_0 - v_0(t - t_0) = \frac{1}{2}j(t - t_0)^2,$$

ou bien

$$s = s_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} j (t - t_0)^2;$$

dans cette formule, s et s_0 sont les espaces parcourus par le mobile aux époques t et t_0 comptés à partir d'une origine déterminée.

L'équation du mouvement uniformément varié est de la forme

$$s = a + bt + ct^2.$$

Réciproquement, tout mouvement représenté par une semblable équation est uniformément varié; car la différentiation donne

$$v = \frac{ds}{dt} = b + 2ct;$$

d'où l'on tire

$$\Delta v = 2c\Delta t,$$

et, comme on voit, la variation de la vitesse est proportionnelle à celle du temps.

La discussion des cas particuliers de ce mouvement se fait dans les Cours de physique élémentaire; rappelons seulement que le mouvement est dit *uniformément accéléré* ou *retardé*, selon que j est positif ou négatif.

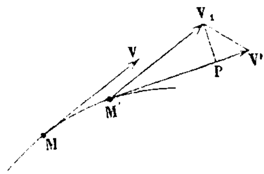
VII. — Accélération dans un mouvement quelconque.

12. Soient MM′ (*fig.* 3) la trajectoire d'un point mobile, MV sa vitesse à l'époque t, M′V′ sa vitesse à l'époque $t + \Delta t$. Menons M′V$_1$ égale et de même sens que MV; joignons V$_1$V′: la limite de $\frac{V_1V'}{\Delta t}$, lorsque Δt converge

vers zéro, est ce que l'on appelle l'*accélération totale du mobile à l'époque t* (*).

A mesure que l'on fait tendre Δt vers zéro, le point M' tend vers M et $V_1 V'$ tend vers une direction limite que

Fig. 3.



l'on appelle la *direction* de l'accélération totale. L'accélération totale se représente à l'aide d'une droite issue de M, ayant pour direction la position limite de $V_1 V'$, et pour longueur

$$\lim \frac{V_1 V'}{\Delta t}.$$

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point M, celles du point V seront

$$x + \mathrm{MV}\frac{dx}{ds}, \quad y + \mathrm{MV}\frac{dy}{ds}, \quad z + \mathrm{MV}\frac{dz}{ds},$$

s désignant l'arc de trajectoire décrit au bout du temps t. Or MV n'est autre chose que la vitesse $\frac{ds}{dt}$: en remplaçant MV par sa valeur, les coordonnées de V deviennent

$$x + \frac{dx}{dt}, \quad y + \frac{dy}{dt}, \quad z + \frac{dz}{dt}.$$

(*) L'accélération totale est en quelque sorte, comme on voit, la dérivée géométrique de la vitesse; je ferai comprendre ma pensée en supposant que le mouvement s'effectue dans un plan, MV et M' V' pourront alors représenter deux quantités imaginaires; V_1 V' représentera alors la différence de ces deux imaginaires, et l'on pourra écrire

$$V_1 V' = d.\mathrm{MV}.$$

Les coordonnées du point V_1 sont égales à celles de V respectivement augmentées de dx, dy, dz; quant aux coordonnées de V′, elles sont égales à celles de V, augmentées de leurs différentielles; car V′ est ce que devient V, quand on change t en $t + dt$. Ainsi les coordonnées de V′ sont

$$x + \frac{dx}{dt} + dx + d\,\frac{dx}{dt}, \cdots;$$

celles de V_1 sont

$$x + \frac{dx}{dt} + dx, \ldots.$$

Il en résulte que les projections de $V_1 V'$ sur les axes coordonnés sont respectivement

$$d\,\frac{dx}{dt},\quad d\,\frac{dy}{dt},\quad d\,\frac{dz}{dt}\quad \text{ou}\quad \frac{d^2x}{dt^2}\,dt,\quad \frac{d^2y}{dt^2}\,dt,\quad \frac{d^2z}{dt^2}\,dt;$$

par suite, les projections de l'accélération totale sont

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Or on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\,\dfrac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d\,\dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{ds}{dt}}{ds}\,\frac{ds}{dt};$$

ce que l'on peut encore écrire, en désignant la vitesse par v,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v\,\frac{d}{ds}\left(v\,\frac{dx}{ds}\right),$$

ou bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\,\frac{d^2x}{ds^2} + v\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dv}{ds},$$

ou bien encore, en appelant ρ le rayon de courbure de la trajectoire, et λ, μ, ν les angles qu'il fait avec les axes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2 \frac{\cos\lambda}{\rho} + \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds},$$

c'est-à-dire enfin, en appelant α, β, γ les angles que fait la vitesse avec les axes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2 \frac{\cos\lambda}{\rho} + \frac{dv}{dt}\cos\alpha.$$

On aurait de même

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{\cos\mu}{\rho} + \frac{dv}{dt}\cos\beta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = v^2 \frac{\cos\nu}{\rho} + \frac{dv}{dt}\cos\gamma.$$

Ces trois formules montrent que l'accélération totale est la résultante de deux droites : l'une $\frac{v^2}{\rho}$, dont la direction est celle du rayon de courbure ; l'autre $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{d^2s}{dt^2}$, dont la direction est celle de la tangente à la trajectoire. La première de ces droites porte le nom d'*accélération centripète* ou *normale ;* l'autre est ce que l'on appelle l'*accélération tangentielle*.

Ces résultats peuvent être établis par la Géométrie ; pour cela, il suffit de mener V_1P perpendiculaire à $M'V'$, V_1P est une normale située dans le plan osculateur, car le plan $V_1M'V'$ passe par une tangente parallèlement à la tangente infiniment voisine.

V_1V' est la résultante de V_1P et de PV' : donc $\frac{V_1V'}{dt}$ sera la résultante de $\frac{V_1P}{dt}$ et de $\frac{PV'}{dt}$; or, en appelant ε l'angle que fait $M'V'$ avec MV,

$$V_1P = M'V_1 \times \varepsilon = v\varepsilon = v\,ds\,\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{v\,ds}{\rho};$$

donc

$$\frac{V_1P}{dt} = \frac{v}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho};$$

donc la limite $\frac{V_1P}{dt}$ est l'*accélération centripète* déjà trouvée tout à l'heure. On a ensuite

$$PV' = M'V' - M'V_1 \cos\varepsilon = M'V' - M'V_1 = dv;$$

donc

$$\frac{PV'}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

et l'on reconnaît ainsi que l'accélération totale est la résultante des droites $\frac{v^2}{\rho}$ et $\frac{dv}{dt}$, portées l'une dans le sens du rayon de courbure, l'autre dans le sens de la tangente.

VIII. — Théorèmes sur les accélérations.

13. Théorème I. — *Lorsqu'un mouvement est rectiligne, l'accélération centripète est nulle, et, réciproquement, si l'accélération centripète est constamment nulle, le mouvement est rectiligne.*

En effet, l'accélération centripète a pour expression $\frac{v^2}{\rho}$; si elle est nulle, c'est que ρ est infini; et *vice versâ* si ρ est infini, l'accélération centripète sera nulle, car v ne peut être constamment nul ou infini, puisque $v = \frac{ds}{dt}$: cette remarque suffit pour démontrer le théorème en question.

Corollaire. — Dans le mouvement rectiligne, l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle et a pour expression $\frac{d^2s}{dt^2}$. Si de plus le mouvement est uniformément varié, $\frac{d^2s}{dt^2}$ devra être constant; car alors $\frac{ds}{dt}$ est de la forme $j(t - t_0)$, j désignant une constante. On voit donc que la définition de l'accélération que nous avons donnée quand il a été question du mouvement uniformément varié rentre dans la définition générale.

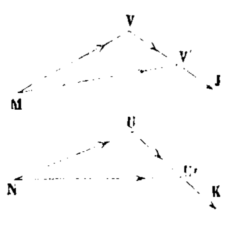
14. Théorème II. — *Dans le mouvement circulaire et uniforme l'accélération centripète est constante, l'accélération tangentielle est nulle.*

Cela résulte des expressions données plus haut pour ces accélérations, à savoir : $\frac{v^2}{\rho}$ et $\frac{dv}{dt}$. Ici v et ρ sont constants, donc $\frac{v^2}{\rho}$ est constant, $\frac{dv}{dt}$ est nul. L'accélération totale se confond avec l'accélération normale $\frac{v^2}{\rho}$.

15. Théorème III. — *La projection de l'accélération totale d'un point sur un axe ou sur un plan est égale à l'accélération totale de la projection de ce point.*

Ce théorème peut se démontrer comme il suit, dans le cas où la projection se fait sur un plan.

Fig. 4.



Soient MV et MV′ (*fig.* 4) les *projections* de la vitesse aux époques t et $t + dt$ et $VJ = \frac{VV'}{dt}$. Soient NU et NU′

les projections de MV et MV', c'est-à-dire les vitesses du mouvement projeté aux époques t et $t + dt$. UU' sera la projection de VV', la projection de J se trouvera alors en K sur UU'. Or on a

$$\frac{\text{VJ}}{\text{UK}} = \frac{\text{VV}'}{\text{UU}'} = \frac{\text{VV}' : dt}{\text{UU}' : dt};$$

donc $\text{UK} = \frac{\text{UU}'}{dt}$, donc la projection UK de l'accélération totale est l'accélération totale du mouvement projeté.

Si l'on avait projeté sur un axe, la démonstration eût été la même, la figure seule eût changé, car U, U' et N eussent été en ligne droite.

16. Théorème IV. — *Si d'un point de la trajectoire, infiniment voisin du mobile, on abaisse une perpendiculaire sur la vitesse, cette perpendiculaire représentera la moitié du produit de l'accélération normale par le carré de l'élément du temps.*

En effet, cette perpendiculaire a, comme on sait, pour expression

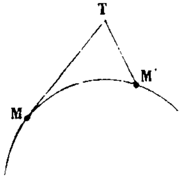
$$\frac{ds^2}{2\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{ds^2}{dt^2}\frac{dt^2}{2\rho} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\rho}\,dt^2.$$

C. Q. F. D.

Théorème V. — *Si sur la tangente à la trajectoire menée par la position* M *du mobile à l'époque* t, *et dans le sens du mouvement, on prend une longueur* MT *égale à* $v\,dt$; *si l'on joint l'extrémité* T *de la ligne ainsi menée à la position* M' *occupée par le mobile à l'époque* $t + dt$, *la ligne* TM' *sera égale à* $\frac{1}{2}j\,dt^2$, j *désignant l'accélération totale.*

En effet, les coordonnées de M étant x, y, z, celles de T (*fig.* 5) seront $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, tandis

Fig. 5.



que celles de M′ seront $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Les projections de TM′ sur les axes seront alors

$$\Delta x - dx, \quad \Delta y - dy, \quad \Delta z - dz,$$

ou bien, en vertu du théorème de Taylor,

$$\frac{1}{2}\, d^2 x, \quad \frac{1}{2}\, d^2 y, \quad \frac{1}{2}\, d^2 z,$$

ou

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 x}{dt^2} dt^2, \quad \frac{1}{2}\,\frac{d^2 y}{dt^2}\, dt^2, \quad \frac{1}{2}\,\frac{d^2 z}{dt^2}\, dt^2.$$

Ce sont précisément les projections de $\frac{1}{2}\, j\, dt^2$.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

I. — Préliminaires.

17. On appelle *corps solide*, en Mécanique rationnelle, un corps hypothétique dont tous les points sont assujettis à rester à des distances constantes les uns des autres; le solide de la Mécanique diffère donc du solide naturel par son inextensibilité, son manque absolu d'élasticité.

Bien que les solides inextensibles, incompressibles, n'existent pas dans la nature, l'étude que nous allons faire est appelée à rendre de grands services aux sciences appliquées; en effet, il est souvent commode, comme nous le verrons par la suite, de rapporter le mouvement d'un point à des axes coordonnés mobiles; ces axes, dont l'existence est toute fictive, forment un système solide dont les propriétés cinématiques vont être de la plus haute importance. Certains corps naturels, en mouvement, des liquides, des gaz même peuvent prendre une forme permanente en vertu de laquelle leurs différents points restent effectivement à des distances mutuelles, invariables pendant un laps de temps plus ou moins long; pendant ce temps, ces corps peuvent, relativement à leurs propriétés cinématiques, être assimilés à de véritables solides; à ces exemples on pourrait en joindre d'autres fort nombreux, et l'on voit une fois de plus que l'étude des êtres de raison peut conduire à des connaissances utiles et tout à fait pratiques.

Un corps solide est dit *animé d'un mouvement de translation* lorsque l'on peut toujours l'amener de l'une de ses positions dans une autre en faisant décrire à ses divers points des droites égales et parallèles; il en résulte que tous ses points possèdent la même vitesse, car le ds (élément de chemin) est le même pour chacun d'eux dans le temps dt; la vitesse commune à tous ces points est ce que l'on appelle la *vitesse de translation.*

Pour qu'un solide soit animé d'un mouvement de translation, il suffit évidemment que trois de ses points pris au hasard soient animés de mouvements identiques; nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition fort simple.

Un solide est dit animé d'un *mouvement de rotation autour d'un axe*, lorsque, cet axe étant invariablement lié à ce solide, tous les points de l'axe en question restent immobiles pendant le mouvement.

Il faut bien comprendre cette locution : *axe invariablement lié à un solide.* Un axe est un corps solide; si l'on imagine que l'on assujettisse ses points à rester à des distances invariables du solide considéré, il fera partie en quelque sorte de ce solide et lui sera *invariablement lié*. Pour lier un corps solide à un autre, il suffit évidemment de lier invariablement trois points du premier à trois points du second, mais si l'un de ces solides, le second par exemple, se réduit à un axe, deux points suffiront pour celui-ci. Ces propositions résultent de ce que deux tétraèdres sont égaux quand ils ont toutes leurs arêtes égales.

Lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, tous ses points décrivent des arcs de cercle dont les centres sont situés sur l'axe. Ces arcs de cercle contiennent tous le même nombre de degrés, en d'autres termes, les perpendiculaires menées de différents points du solide sur l'axe tournent toutes pendant le même temps dt d'un même angle $d\theta$; $\frac{d\theta}{dt}$ est ce que l'on appelle la *vitesse de rotation* du solide; si cette vitesse est constante, c'est-à-dire si les angles décrits par les perpendiculaires menées de différents points du corps sur l'axe pendant des temps égaux sont égaux, le mouvement de rotation est dit *uniforme*. Alors effectivement chacun des points du système possède un mouvement circulaire et uniforme. Tous ces principes sont trop connus des personnes qui abordent l'étude de la Mécanique rationnelle pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter longtemps.

II. — Composition des mouvements élémentaires.

18. Lorsqu'un corps reçoit successivement plusieurs mouvements, on appelle *mouvement résultant* un mouvement qui aurait pour but d'amener d'un seul coup le corps de sa position initiale à sa position finale; les mouvements successifs qui produisent le même effet que le mouvement résultant sont ce que l'on appelle les *mouvements composants*.

La recherche du mouvement résultant est un problème indéterminé; il devient au contraire parfaitement déterminé si on l'assujettit à certaines conditions; il est par exemple bien déterminé quand les mouvements composants sont infiniment petits et quand, négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on remplace les arcs de trajectoire par leurs cordes. Nous allons montrer comment les mouvements de rotation et de translation peuvent se composer de manière à fournir des mouvements résultants de même nature.

19. Nous conviendrons de représenter le mouvement de translation d'un corps par une droite égale parallèle et du même sens que les cordes des chemins décrits par chacun des points du corps.

20. Nous représenterons, avec Lagrange, un mouvement de rotation à l'aide d'une droite proportionnelle au déplacement angulaire (*), portée sur l'axe autour duquel s'effectue la rotation, et dans un sens tel, qu'un observateur, ayant sa tête à l'extrémité de la droite et ses pieds à l'origine, voie le mouvement s'exécuter dans le sens direct (celui des aiguilles d'une montre est le plus souvent choisi pour mouvement direct).

21. Théorème I. — *Un nombre quelconque de mouvements de translation a pour mouvement résultant une translation représentée par la résultante des droites qui représentent les mouvements composants.*

En effet, soient AB, BC, ..., MN les cordes des chemins décrits par un point du système dans les mouvements composants; soient A′B′, B′C′, ..., M′N′ les cordes analogues pour un second point du système. AN et A′N′ sont évidemment égales et parallèles; donc le mouvement résultant peut se réduire à une translation. Si les translations composantes sont représentées par AB, BC, ..., MN, la translation résultante sera représentée par la résultante AN des droites AB, BC, ..., MN.

C. Q. F. D.

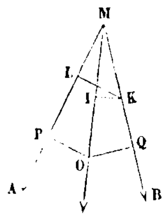
22. Théorème II. — *Le mouvement résultant de deux rotations infiniment petites dont les axes se rencontrent*

(*) Le *déplacement angulaire* est l'angle dont a tourné une perpendiculaire à l'axe de rotation invariablement liée au solide.

peut se réduire à une rotation représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les rotations composantes.

En effet, soit $MA = p$ et $MB = q$ les rotations composantes. Si nous considérons un point O situé dans le plan AMB (*fig.* 6), du point O menons OP et OQ, per-

Fig. 6.



pendiculaires sur MA et MB; en vertu de la rotation p, ce point (dans le cas de la figure) va décrire un arc de cercle derrière le plan de la figure; la grandeur de cet arc sera $p.OP$. Si maintenant on opère la rotation q, le point O va décrire un arc de cercle dirigé en sens inverse du précédent et dont la grandeur sera $q.OP$. Si l'on suppose les deux rotations p et q infiniment petites, les deux arcs de cercle que nous venons de considérer pourront être réduits à de petites droites normales au plan de AMB, et alors le point O restera immobile si l'on a

$$(1) \qquad p.OP = q.OQ.$$

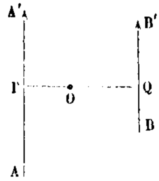
Ainsi les points O tels que la relation précédente soit satisfaite n'auront pas changé de place dans le mouvement résultant. Ce mouvement peut donc être assimilé à une rotation dirigée suivant MO, c'est-à-dire, en vertu de la formule (1) [et en vertu d'un théorème bien connu sur les parallégrammes (*)], suivant la diagonale du parallélogramme construit sur p et q. Pour calculer la valeur de la rotation résultante, nous prendrons un point K sur MB; la rotation cherchée sera égale au chemin décrit par le point K dans le mouvement, divisé par sa distance KI à MO; or, en désignant par KL la distance du point K à MA, le mouvement résultant du point K est un mouvement de rotation effectué autour de MA et égal à $p.\mathrm{KL}$; car, dans la rotation effectuée autour de MB, le point K reste immobile; la rotation cherchée sera donc $\frac{p.\mathrm{KL}}{\mathrm{KI}}$, c'est-à-dire

$$\frac{p.\sin \mathrm{AMB}}{\sin \mathrm{OMB}}.$$

Or cette expression est précisément la valeur de la diagonale du parallélogramme construit sur p et q. Le théorème est donc démontré.

23. Théorème III. — *Le mouvement résultant de deux rotations infiniment petites et dont les axes sont parallèles peut se réduire à une rotation égale à la somme algébrique des rotations composantes, les distances de la résultante aux composantes étant choisies en raison inverse de ces composantes.*

Fig. 7.



(*) Ce théorème, évident par la Géométrie analytique et facile à démontrer par des considérations synthétiques, peut s'énoncer : *La diagonale d'un parallélogramme est le lieu des points tels, que leurs distances aux côtés du parallélogramme soient en raison inverse de ces côtés.*

Considérons, en effet, les rotations $AA' = p$, $BB' = q$ et un point O (*fig.* 7) dans leur plan. Les mouvements successifs du point O dus aux rotations p et q sont $p.OP$, $q.OQ$, en convenant de donner aux distances PO, QO du point O aux droites AA', BB' le signe + ou le signe —, selon que PO ou QO sont dirigées de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche par rapport à AA'.

Le point O restera immobile dans le mouvement résultant, si l'on a

$$(1) \qquad p.OP + q.OQ = 0,$$

c'est-à-dire si le point O se trouve sur une droite parallèle à AA' telle, que le rapport de ses distances à p et q soit en raison inverse de p et q et que, de plus, le point O se trouve en dedans de l'intervalle AA'BB' si p et q sont de même signe, et en dehors si p et q sont de signes contraires. Ainsi le mouvement résultant se réduit bien à une rotation parallèle à AA'; pour calculer cette rotation, on observera que, dans le mouvement résultant, le point Q décrit l'arc $p.PQ$ et que, par suite, la rotation cherchée est $\frac{p.PQ}{OQ}$. Or de (1) on tire

$$\frac{p}{q} = -\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{PO},$$

ou bien

$$\frac{p+q}{p} = \frac{PO + OQ}{OQ} = \frac{PQ}{OQ}.$$

On en déduit

$$p + q = \frac{p.PQ}{OQ},$$

et la rotation cherchée est égale, comme on voit, à $p + q$.

C. Q. F. D.

On donne le nom de *couple de rotation* à l'ensemble de deux rotations égales, parallèles, mais de sens contraires.

24. Théorème IV. — *Un couple de rotation équivaut à une translation.*

Si l'on prend $p = -q$, l'équation (1) de tout à l'heure devient

$$\mathrm{OP} - \mathrm{OQ} = 0,$$

ou

$$\mathrm{PO} + \mathrm{OQ} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{PQ} = 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi le théorème III tombe en défaut pour $p = -q$ et aucun point ne peut revenir à sa position primitive après ses deux rotations. Mais le chemin décrit par le point O est $p(\mathrm{OP} - \mathrm{OQ}) = p(\mathrm{OP} + \mathrm{QO}) = p\,\mathrm{QP}$, c'est-à-dire que ce chemin est le même pour tous les points du plan AA′BB′; donc enfin le système se trouve animé d'un mouvement de translation normal au plan des rotations. C. Q. F. D.

III. — Composition générale des mouvements.

Lorsqu'on aura à composer un nombre quelconque de rotations concourantes, on composera d'abord la première avec la seconde, puis la troisième avec la résultante des deux premières, et ainsi de suite, et si l'on observe que la résultante de deux rotations peut être représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux rotations, c'est-à-dire par la résultante des droites qui représentent les deux rotations en question, on pourra énoncer le théorème suivant :

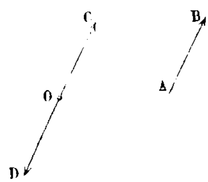
25. Théorème I. — *La résultante d'un nombre quelconque de rotations concourantes est une rotation re-*

présentée par la résultante des droites qui représentent les rotations composantes.

Remarque. — Ce théorème ainsi que ceux qui ont été énoncés au paragraphe précédent supposent que l'on ne compose que des mouvements infiniment petits. Si l'on avait à composer des mouvements finis, les infiniment petits du second ordre apparaîtraient dans les résultats et les modifieraient d'une façon notable, et qu'il est facile d'apprécier en traitant la question des rotations par l'analyse. Si l'on avait un nombre quelconque de translations et de rotations à composer, on pourrait les ramener à une seule rotation et à une seule translation de la manière suivante.

Choisissons un point O arbitrairement dans le système, soit AB (*fig.* 8) l'une des rotations composantes; par le

Fig. 8.



point O faisons passer deux rotations OC et OD égales à AB, parallèles à AB, mais l'une de même sens et l'autre de sens contraire. Les deux rotations OC, OD effectuées successivement ne changeront en rien la position du système, puisque l'une fait tourner le système dans un sens et l'autre le fait tourner en sens inverse d'un angle égal; mais les rotations OD et AB forment un couple, c'est-à-dire se ramènent à une translation.

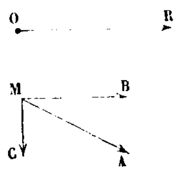
Ainsi, en résumé, chaque rotation pourra être censée transportée au point O, à la condition d'adjoindre au système des mouvements composants une nouvelle translation; toutes les rotations appliquées en O se composeront en une seule, toutes les translations se composeront en une seule aussi. Donc :

26. THÉORÈME II. — *Un nombre quelconque de rotations et de translations infiniment petites peuvent se ramener à une rotation unique passant par un point donné* O *et à une translation unique.*

Parmi tous les modes de composition au moyen desquels on peut ramener un système de rotations et de translations à une rotation unique et à une translation unique, il y en a un qui est surtout remarquable, c'est celui dans lequel la rotation se trouve parallèle à la translation.

Pour montrer que ce mode de composition est possible, supposons que l'on ait ramené tous les mouvements à une rotation OR (*fig.* 9) et à une translation MA; on

Fig. 9.



pourra regarder MA comme la résultante de deux translations, l'une MB parallèle à OR, l'autre MC perpendiculaire à OR. Mais la translation MC peut être remplacée par un couple de rotations dont les axes seront parallèles à OR. Ce couple de rotation se composera avec OR pour donner une rotation unique de même grandeur et de même direction que OR, mais ne passant plus par le point O. On peut donc énoncer le théorème suivant :

27. Théorème III. — *Un nombre quelconque de rotations et de translations infiniment petites peuvent se ramener à une seule rotation et à une seule translation parallèles entre elles.*

L'axe de rotation à laquelle on parvient ainsi porte le nom d'*axe spontané de rotation*.

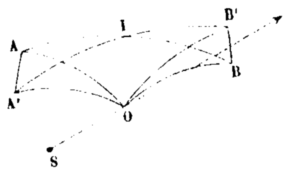
IV. — Sur le mouvement le plus général que peut prendre un corps solide.

28. Avant d'aborder l'étude du mouvement d'un solide dans toute sa généralité, il convient d'étudier le cas particulier où le corps présente un point fixe.

Considérons un solide en mouvement, et supposons que l'un de ses points S soit assujetti à demeurer en repos.

Du point fixe S comme centre décrivons une sphère, et considérons sur cette sphère une ligne courbe AB quelconque invariablement liée au solide en mouvement.

Fig. 10.



Soit $A'B'$ la position occupée par la courbe AB (*fig.* 10) lorsque le solide a pris un déplacement quelconque.

Sur les milieux des arcs de grands cercles AA' et BB' élevons des arcs de grands cercles normaux ; soit O leur point de rencontre : les triangles sphériques AOB, $A'OB'$ seront égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun et placés dans le même ordre ($AO = A'O$, parce que le point O est sur l'arc perpendiculaire sur le milieu de AA'; le triangle $AA'O$ est donc isoscèle).

Il résulte de là que si l'on fait tourner la figure AOB autour du rayon SO d'un angle mesuré par AOA', cette figure viendra coïncider avec $A'OB'$. Mais alors tout le solide, suivant le mouvement de la courbe AOB, passe de sa position initiale à sa position finale. Ainsi :

29. Théorème I. — *Le déplacement d'un solide qui présente un point fixe peut toujours se ramener à une rotation effectuée autour d'un certain axe.*

Cet axe de rotation est, comme on voit, l'intersection des plans normaux aux cordes des chemins décrits par les divers points du solide.

Supposons maintenant que AB et $A'B'$ soient deux positions infiniment voisines d'une même courbe invariablement liée au solide, correspondant aux époques t et $t + dt$. L'axe SO tendra vers une position limite que l'on appelle, d'après Poinsot, l'*axe instantané de rotation à l'époque t*.

Mais OI était l'intersection des plans normaux au milieu des cordes AA' et BB'. On peut donc dire que :

Théorème II. — *L'axe instantané de rotation est l'intersection des plans normaux aux trajectoires des divers points du solide en mouvement.*

La vitesse du point A est la limite de $\frac{AA'}{dt}$, celle du point B est la limite $\frac{BB'}{dt}$; or, en désignant par r et r' les distances de A et de B à l'axe OS, on a

$$\frac{AA'}{r} = \frac{BB'}{r'} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r}\frac{AA'}{dt} = \frac{1}{r'}\frac{BB'}{dt}.$$

Si l'on fait alors $dt = 0$, on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

30. Théorème III. — *Les vitesses des divers points du corps sont entre elles comme leurs distances à l'axe instantané.*

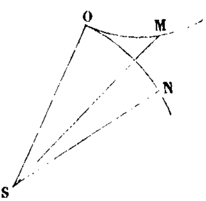
Il résulte de là que les points de l'axe instantané ont des vitesses nulles, et que les seuls points dont la vitesse est nulle sont situés sur l'axe instantané.

Nous appellerons *vitesse instantanée de rotation* le rapport constant de la vitesse d'un point quelconque à sa distance à l'axe instantané. En résumé :

31. Théorème IV. — *Lorsqu'un solide en mouvement présente un point fixe, il existe à chaque instant à l'intérieur du solide une droite dont tous les points ont une vitesse nulle, et cette droite est l'intersection des plans normaux aux trajectoires des divers points du système.* Cette droite est l'axe instantané.

Considérons maintenant l'axe instantané qui correspond à l'époque t; à l'époque $t + dt$ cette droite aura cessé en général d'être axe instantané, en sorte que

Fig. 11.



ce sera généralement une nouvelle droite du corps et une nouvelle droite de l'espace qui, confondues à l'époque $t + dt$, constitueront le nouvel axe instantané; en sorte que, une infinité de droites de l'espace, issues du point fixe S, vont successivement devenir axes instantanés. Soit ON (*fig.* 11) le lieu des traces de ces droites sur une sphère décrite du point fixe S comme centre; une infinité de droites du corps issues du point S vont devenir successivement axes instantanés et coïncider avec les droites précédentes à des époques différentes; soit OM le lieu des traces de ces droites sur la sphère.

Soient OS l'axe instantané à l'époque t, SN la droite de l'espace qui deviendra axe instantané à l'époque $t + dt$, SM la droite du solide qui, arrivée en SN, deviendra l'axe instantané.

Le chemin MN décrit par le point M pendant le temps dt sera $\omega\rho\, dt$; ω désignant la vitesse de rotation et ρ la distance du point M à l'axe instantané. Ce chemin est donc du second ordre, et par suite OM et ON sont deux courbes tangentes; donc le cône lieu des axes instantanés dans le corps est tangent au cône lieu des axes instantanés dans l'espace; de plus on a, aux infiniment petits du second ordre près, $OM = ON$, et, par suite, les deux cônes en question *roulent l'un sur l'autre sans glisser* (*). Donc :

32. Théorème V. — *Le mouvement le plus général d'un corps solide qui présente un point fixe se ramène au roulement sans glissement d'un cône invariablement lié au solide sur un cône fixe.*

Remarque. — Lorsque l'axe instantané est fixe dans le corps, il est fixe dans l'espace. En effet, les mêmes points du corps ont toujours une vitesse nulle, c'est-à-dire sont en repos.

De même, si l'axe instantané est fixe dans l'espace, il

(*) On dit que deux corps roulent l'un sur l'autre sans glisser lorsqu'ils restent continuellement en contact et que les arcs des deux corps dont les extrémités ont été en contact sont égaux.

doit être fixe dans le corps, car le corps tourne toujours autour de la même droite.

Ainsi, quand on voit un corps tourner autour d'un axe qui semble mobile dans l'espace, mais fixe dans le corps, il faut en conclure que l'axe réel de rotation est différent de l'axe apparent. Ce phénomène est celui de la toupie. La toupie semble tourner autour de son axe de figure, mais cet axe effectue une série d'oscillations autour de la verticale qui passe par la pointe de la toupie; on peut donc affirmer que l'axe de figure n'est pas l'axe réel autour duquel s'effectue la rotation instantanée.

33. Théorème VI. — *Le mouvement infiniment petit le plus général que puisse prendre un solide se réduit à une rotation et à une translation.*

Ce théorème, dû, à ce qu'il paraît, au géomètre florentin Giulo Mozzi, peut se démontrer comme il suit.

Prenons un point O du solide avant son déplacement et transportons ce point à sa position finale en animant le corps d'un mouvement de translation. Pour faire prendre au solide sa position définitive, il faudra le faire mouvoir en laissant le point O fixe; mais, d'après ce que nous avons vu, le mouvement le plus général d'un solide qui présente un point fixe se ramène à une rotation effectuée autour d'un axe passant par le point fixe; donc, enfin, le mouvement le plus général d'un solide se ramène à une rotation suivie d'une translation.

Or il y a une infinité de manières de ramener le mouvement à une rotation et à une translation, et, d'après ce que nous avons vu (27), le point O peut être choisi de telle sorte que l'axe de rotation soit parallèle à la translation. Mais alors le corps va tourner autour d'un certain axe et glisser le long de cet axe, en sorte que :

34. Théorème VII. — *Le mouvement infiniment petit le plus général d'un corps solide se ramène au mouvement hélicoïdal composé d'une rotation et d'une translation effectuée le long de l'axe de rotation.*

Il résulte de là qu'un corps solide en mouvement est à chaque instant animé d'un mouvement hélicoïdal, ou, si l'on veut, d'un mouvement qui peut se décomposer en une rotation suivie d'une translation effectuée le long de l'axe de rotation. Les axes de ces rotations successives portent le non d'*axes instantanés glissants*. Si l'on considère alors les lieux des axes instantanés glissants dans le corps et dans l'espace, ces deux lieux seront constamment tangents, et le lecteur verra facilement que ces lieux roulent sans glisser l'un sur l'autre, en sorte que :

Théorème VIII. — *Le mouvement le plus général d'un corps solide peut se ramener au roulement d'une surface réglée mobile sur une surface réglée fixe.* (Démonstration analogue à celle que nous avons donnée lorsque le solide présente un point fixe.)

Ce théorème est dû à Poncelet.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

I. — ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE QUI PRÉSENTE UN POINT FIXE.

35. L'étude que nous avons faite dans le Chapitre précédent du mouvement le plus général d'un corps solide est incomplète, en ce sens qu'elle ne nous permettrait pas de calculer la rotation et la translation auxquelles un mouvement peut se ramener dans des circonstances déterminées. En outre, cette étude a l'inconvérient de s'appuyer sur des considérations géométriques : cet inconvénient est grave, car il empêche de bien saisir le lien qui existe entre la théorie de la composition des mouvements et la théorie des mouvements relatifs dont nous allons aborder l'étude dans ce Chapitre.

Considérons un solide en mouvement, mais dont l'un des points est assujetti à demeurer en repos. Par le point fixe faisons passer trois axes rectangulaires fixes, ox, oy, oz; soient x, y, z les coordonnées d'un point M quelconque du solide, prises par rapport à ces axes fixes. Considérons enfin un second système d'axes rectangulaires $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ ayant même origine que le premier, mais invariablement liés au solide. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point M par rapport à ces nouveaux axes. Les formules de transformation des coordonnées nous donnent

$$(1)\quad \begin{cases} x = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ y = a'\,\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{cases}$$

et l'on a, comme on sait,

$$a = \cos(ox, o\xi), \quad b = \cos(ox, o\eta), \quad c = \cos(ox, o\zeta), \ldots.$$

On sait, de plus, que les neuf cosinus $a, b, c, \ldots$ sont liés entre eux par diverses formules, dont voici les principales :

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0, \\ a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{cases}$$

Si, de plus, on suppose que les directions positives des nouveaux axes puissent être amenées en coïncidence avec celles des anciens (*), on aura

$$(6)\quad \begin{cases} a = b'c'' - c'b'', & a' = \ldots, & a'' = \ldots, \\ b = c'a'' - a'c'', & b' = \ldots, & b'' = \ldots, \\ c = a'b'' - b'a'', & c' = \ldots, & c'' = \ldots. \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

(*) On devrait changer les signes des seconds membres des formules (6) et (7) si cette circonstance ne se présentait pas.

36. Ceci posé, différentions les formules (1) par rapport au temps t; ξ, η, ζ ne variant pas avec t doivent être considérés comme des constantes dans la différentiation, et l'on a

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \xi\,\frac{da}{dt} + \eta\,\frac{db}{dt} + \zeta\,\frac{dc}{dt},\\
\frac{dy}{dt} &= \xi\,\frac{da'}{dt} + \eta\,\frac{db'}{dt} + \zeta\,\frac{dc'}{dt},\\
\frac{dz}{dt} &= \xi\,\frac{da''}{dt} + \eta\,\frac{db''}{dt} + \zeta\,\frac{dc''}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules feront connaître la vitesse du point M au moyen de ses projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sur les axes fixes (8), lorsque l'on connaîtra a, b, c, ... en fonction du temps. Si nous désignons par u, v, w les projections de la vitesse du point M sur les axes $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{dz}{dt}$ étant les composantes de la vitesse le long des anciens axes, on aura

$$
(\mathrm{A})\qquad u = a\,\frac{dx}{dt} + a'\,\frac{dy}{dt} + a''\,\frac{dz}{dt}.
$$

Mais si l'on différentie les formules (4) et (5), on trouve

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a\,da + a'\,da' + a''\,da'' &= 0,\\
b\,db + b'\,db' + b''\,db'' &= 0,\\
c\,dc + c'\,dc' + c''\,dc'' &= 0;
\end{aligned}
\right.
$$

puis

$$
b\,dc + c\,db + b'\,dc' + c'\,db' + b''\,dc'' + c''\,db'' = 0 \ldots .
$$

On peut donc poser

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
p\,dt &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -(b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc''),\\
q\,dt &= a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = -(c\,da + c'\,da' + c''\,da''),\\
r\,dt &= b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = -(a\,db + a'\,db' + a''\,db'').
\end{aligned}
\right.
$$

Si alors on multiplie les formules (8) respectivement par a, a', a'' et si on les ajoute, il viendra, en vertu de (A), de (9) et (10),

$$u = q\zeta - r\eta.$$

Au moyen de permutations circulaires on obtient deux autres formules analogues, ce qui fournit le système

$$(11)\qquad \begin{cases} u = q\zeta - r\eta, \\ v = r\xi - p\zeta, \\ w = p\eta - q\xi. \end{cases}$$

Proposons-nous maintenant de trouver les points du corps, qui à l'époque t sont animés d'une vitesse nulle. Pour ces points on aura $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, et les équations (11) donneront

$$\begin{aligned} q\zeta - r\eta &= 0, \\ r\xi - p\zeta &= 0, \\ p\eta - q\xi &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations se réduisent à deux

$$(12)\qquad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Ces équations sont celles d'une droite lieu des points ayant une vitesse nulle à l'époque t; et si l'on pose

$$(13)\qquad \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \omega$$

la droite en question fera, avec les axes mobiles, des angles dont les cosinus seront $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$. Cette droite est précisément celle que nous avons appelée *axe instantané de rotation*.

La vitesse V du point M s'obtiendra en ajoutant les équations (11), après les avoir élevées au carré; on trouve ainsi

$$u^2+v^2+w^2=V^2=(q\zeta-r\eta)^2+(r\xi-p\zeta)^2+(p\eta-q\xi)^2,$$

c'est-à-dire

$$V^2=(p^2+q^2+r^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-(p\xi+q\eta+r\zeta)^2.$$

Cette formule peut s'écrire

$$V^2=\omega^2R^2\left[\left(\frac{p^2}{\omega^2}+\frac{q^2}{\omega^2}+\frac{r^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\xi^2}{R^2}+\frac{\eta^2}{R^2}+\frac{\zeta^2}{R^2}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{p\xi}{\omega R}+\frac{q\eta}{\omega R}+\frac{r\zeta}{\omega R}\right)^2\right],$$

en désignant, pour abréger, par R la distance $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ du point M au point fixe O. La formule précédente peut encore s'écrire

$$V^2=\omega^2R^2[1-\cos^2(R,\omega)],$$

ou bien

$$V=\omega R\sin(\omega,R),$$

ou bien encore

$$V=\omega\delta. \tag{14}$$

37. L'axe instantané possède une vitesse nulle à l'époque t, en sorte que (comme nous l'avons déjà fait observer dans le Chapitre précédent), tout le système tourne dans le temps dt autour de l'axe instantané. Si l'on divise la vitesse V par la distance δ du point M à l'axe instantané, le quotient ω sera ce que l'on peut appeler la vitesse de la rotation instantanée. $V\,dt$ étant le déplacement du point M dans le temps dt, $\frac{1}{\delta}V\,dt$ ou $\omega\,dt$ sera alors la rotation effectuée dans le temps dt, et $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ seront les projections de cette rotation sur les axes (25).

Il ne faut pas oublier que l'axe instantané n'est pas rigoureusement immobile, ses points ont une vitesse nulle, en sorte que le déplacement Δs de l'un de ses points sera $\frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \ldots$, c'est-à-dire se réduira à $\frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \ldots$, puisque la vitesse $\frac{ds}{dt}$ est nulle, en sorte que le déplacement de chaque point de l'axe instantané est un infiniment petit du second ordre, et que, en ne tenant compte que des quantités de l'ordre de dt, on peut supposer l'axe instantané immobile.

II. — Définition des mouvements relatifs.

38. Si l'on considère un corps en mouvement et si l'on imagine un observateur lui-même en mouvement, le mouvement qu'il attribuera au corps en question est ce que l'on appelle le *mouvement apparent* ou *relatif de ce corps*; le mouvement de l'observateur est dit *mouvement d'entraînement*; enfin le mouvement réel du corps est son *mouvement absolu*.

Précisons davantage. Imaginons un système d'axes $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ rectangulaires en mouvement et un point M possédant un mouvement propre indépendant du mouvement des axes, ce mouvement est ce que l'on appellera le *mouvement absolu* du point M; ce mouvement a sa trajectoire, sa vitesse et son accélération propres, que l'on appelle *trajectoire absolue, vitesse absolue, accélération absolue*. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point M prises par rapport aux axes Ω, ξ, η, ζ à l'époque t. Si l'on imagine alors trois axes fixes Ox, Oy, Oz rectangulaires et capables de coïncider avec les axes mobiles, et si l'on imagine, en outre, un mobile fictif M' ayant à l'époque t, par rapport aux axes fixes les mêmes coordonnées ξ, η, ξ que le point M par rapport aux axes mobiles, le point M′ aura un mouvement qui sera précisément celui qu'un observateur invariablement lié aux axes mobiles attribuerait au point M s'il n'avait pas conscience de son propre mouvement. Ce mouvement du point M′ est ce que l'on appelle le *mouvement relatif* du point M.

Si l'on imagine qu'à l'époque t on fasse coïncider les axes fixes avec les axes mobiles, la trajectoire du point M′ va prendre une certaine position dans l'espace, à laquelle on donne le nom de *trajectoire relative* du point M à l'époque t. La vitesse et l'accélération du point M′ prendront également des positions déterminées et seront ce que l'on appelle la *vitesse* et l'*accélération relative du point* M *à l'époque t*.

Enfin le *mouvement d'entraînement* du point M à l'époque t sera le mouvement absolu du point M″, invariablement lié aux axes mobiles qui coïncide à l'époque t avec le point mobile M. La trajectoire, la vitesse et l'accélération du point M″ sont ce que l'on appelle la *trajectoire*, la *vitesse* et l'*accélération d'entraînement du point* M *à l'époque t*.

III. — Théorie analytique des mouvements relatifs.

39. Soient $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ trois axes rectangulaires mobiles dont nous supposerons le mouvement connu et rapporté à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz; soient M un point mobile; ξ, η, ζ ses coordonnées prises par rapport aux axes mobiles; x, y, z ses coordonnées prises par rapport aux axes fixes; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'origine Ω prises par rapport aux axes fixes et t le temps.

Les formules qui serviront à calculer x, y, z en fonction de ξ, η, ζ, x_0, y_0, z_0 sont de la forme

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta,\\ y &= y_0 + a'\,\xi + b'\,\eta + c'\,\zeta,\\ z &= z_0 + a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned}\right.$$

a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' désignant les neuf cosinus qui servent à passer des axes fixes aux axes mobiles. Nous continuerons le numérotage de formules commencé au § I : alors il existera entre les quantités a, b,... les relations déjà écrites (2), (3), (4), (5), (6), (7).

Si nous différentions les formules (15), nous aurons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt} + a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \xi\frac{da'}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{dc'}{dt} + a'\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + c'\frac{d\zeta}{dt},\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \xi\frac{da''}{dt} + \eta\frac{db''}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} + a''\frac{d\xi}{dt} + b''\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Or $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les dérivées totales de x, y, z ; ce sont donc les projections de la vitesse absolue sur les axes fixes.

Les quantités $\frac{dx_0}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt} + \xi\frac{da'}{dt} + \cdots$ sont les dérivées de x, y, z, prises en regardant ξ, η, ζ comme invariables avec le temps. Ce sont donc les projections de la vitesse d'un point invariablement lié aux axes mobiles et coïncidant à l'époque t avec le point mobile M ; en d'autres termes, ce sont les projections de la vitesse d'entraînement du point M.

Enfin $a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt}$, $a'\frac{d\xi}{dt} + \cdots$ sont les dérivées de x, y, z, prises en laissant $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ constants. Ce sont donc les projections de la vitesse que posséderait un point ayant, par rapport à des axes fixes coïncidant à l'époque t avec Ω, ξ, η, ζ, les mêmes coordonnées que le point M par rapport aux axes mobiles; en d'autres termes, les quantités en question sont les projections de la vitesse relative sur les axes fixes.

Ainsi, en vertu des formules (16), les projections de la vitesse absolue sont égales aux sommes des projections de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative. Donc :

Théorème I. — *La vitesse absolue est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative* (*).

40. Si nous différentions de nouveau les équations (16), nous trouvons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_0}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2b}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c}{dt^2} + a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2} \\ &\qquad + 2\left(\frac{da}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{db}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ représentent les projec-

(*) Les formules (16) ayant encore lieu quand on remplace les dérivées prises par rapport à t par des différentielles, on voit que le déplacement absolu est la résultante du déplacement relatif et du déplacement dans le mouvement d'entraînement, pourvu que l'on ne considère que des mouvements infiniment petits.

tions sur les axes fixes de l'accélération absolue du point M.

$\frac{d^2x_0}{dt^2}+\xi\frac{d^2a}{dt^2}+\eta\frac{d^2b}{dt^2}+\zeta\frac{d^2c}{dt^2},\ldots$, dérivées de x, y, z, prises en laissant ξ, η, ζ constants, sont les projections sur les axes fixes de l'accélération d'entraînement.

$a\frac{d^2\xi}{dt^2}+b\frac{d^2\eta}{dt^2}+c\frac{d^2\zeta}{dt^2},\ldots$, dérivées de x, y, z, prises en laissant $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ constants, sont les projections de l'accélération relative sur les axes fixes. Nous n'insistons pas sur la démonstrations de ces propositions, à cause de leur analogie avec celles qui précèdent.

Enfin les quantités

$$(18)\quad \begin{cases} X = 2\left(\dfrac{da}{dt}\dfrac{d\xi}{dt}+\dfrac{db}{dt}\dfrac{d\eta}{dt}+\dfrac{dc}{dt}\dfrac{d\zeta}{dt}\right),\\[2ex] Y = 2\left(\dfrac{da'}{dt}\dfrac{d\xi}{dt}+\dfrac{db'}{dt}\dfrac{d\eta}{dt}+\dfrac{dc'}{dt}\dfrac{d\zeta}{dt}\right),\\[2ex] Z = 2\left(\dfrac{da''}{dt}\dfrac{d\xi}{dt}+\dfrac{db''}{dt}\dfrac{d\eta}{dt}+\dfrac{dc''}{dt}\dfrac{d\zeta}{dt}\right)\end{cases}$$

peuvent être regardées comme les projections d'une droite K à laquelle on a donné le nom d'*accélération centrifuge composée*; en sorte que l'on peut énoncer avec Coriolis le théorème suivant :

41. Théorème II. — *L'accélération absolue est la résultante de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et de l'accélération centrifuge composée.*

Pour déterminer la grandeur et la position de l'accélération centrifuge composée, multiplions les équations (18) par a, a', a'' et ajoutons : le premier membre de l'équation résultante sera la projection de l'accélération centrifuge sur l'axe des ξ, en sorte que X_1, Y_1, Z_1 désignant les nouvelles projections de cette accélération, on aura, en tenant compte des formules (9) et (10),

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right),\\ Y_1 &= 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right),\\ Z_1 &= 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

En faisant alors la somme des carrés de ces trois équations, on trouve

$$K^2 = 4\left[\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right]$$

ou bien

$$K^2 = 4\left\{(p^2+q^2+r^2)\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] - \left(p\frac{d\xi}{dt} + q\frac{d\eta}{dt} + r\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}.$$

On peut écrire cette équation comme il suit, en désignant par V_r la vitesse relative,

$$K^2 = 4\omega^2 V_r^2[1 - \cos^2(\omega, V_r)];$$

d'où l'on tire

$$K = 2\omega V_r \sin(\omega, V_r).$$

Les quantités qui entrent dans cette formule sont essentiellement positives; on doit donc prendre le signe + dans le second membre. Si l'on veut trouver la direction de l'accélération centrifuge composée, il suffit d'observer que les formules (19) donnent

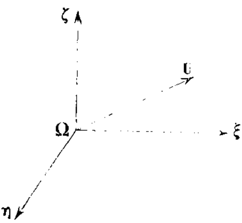
$$pX_1 + qY_1 + rZ_1 = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dt}X_1 + \frac{d\eta}{dt}Y_1 + \frac{d\zeta}{dt}Z_1 = 0;$$

et par suite l'accélération K est normale : 1° à l'axe instantané de rotation du système des axes mobiles ; 2° à la vitesse relative. On peut retrouver ces propriétés d'une autre manière, qui aura l'avantage de nous faire connaître le sens de K qui reste encore inconnu.

Pour y parvenir, faisons coïncider l'axe instantané avec l'axe des ζ et prenons pour plan des $\zeta\xi$ (*fig.* 12) le

Fig. 12.



plan qui passe par l'axe instantané et la parallèle ΩU menée à la vitesse relative. Il faudra poser

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = V_r \sin(\omega, V_r), \quad \frac{d\zeta}{dt} = V_r \cos(\omega, V_r).$$

Les formules (19) donneront alors

$$X_1 = 0,$$

$$Y_1 = 2\omega V_r \sin(\omega, V_r),$$

$$Z_1 = 0.$$

Y_1 est alors égal à K, et l'on voit que la vitesse relative et que l'axe instantané sont normales à K. Si l'on veut que Y_1 soit positif, c'est-à-dire réellement égal à K, il faut que l'angle $U\Omega\xi$ soit aigu; en d'autres termes, l'observateur ayant sa tête à l'extrémité de la droite K et ses pieds à l'origine, doit voir la vitesse relative dirigée à droite de l'axe instantané.

N. B. Nous donnerons des exercices sur la Cinématique dans une Note placée à la fin du volume.

DEUXIÈME PARTIE.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

STATIQUE DU POINT MATÉRIEL.

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

42. Jusqu'à présent, la Mécanique s'est présentée à nous en quelque sorte comme un corollaire de la Géométrie, et nous n'avons rien emprunté à l'expérimentation proprement dite. Cela tient à ce que nous n'avons point encore cherché à remonter des effets aux causes. Pour continuer l'étude de la Mécanique, il devient indispensable de poser de nouveaux principes. Nous n'en donnerons point de démonstration directe, ce serait entreprendre une tâche impossible; les puissants génies qui ont attaché leurs noms à ces principes ne les ont jamais démontrés; je dirai plus, ils ne les ont pas énoncés avec la forme lucide sous laquelle nous les connaissons aujourd'hui. Ces principes ne sont, en définitive, que des hypothèses qui sans doute, dans l'esprit de leurs inventeurs, ont fait place à un grand nombre d'autres hypothèses expliquant moins bien les faits observés. Je dis que ces principes ne sont que des hypothèses, parce qu'aucune expérience directe ne peut venir en donner la démonstration; mais jusqu'à présent toutes les consé-

quences déduites de ces principes, conséquences dont le nombre croît de jour en jour, ont été reconnues exactes lorsqu'elles ont pu être soumises au contrôle de l'expérimentation la plus délicate.

Si nous imaginons une sphère remplie d'une matière quelconque, et si, par la pensée, nous diminuons indéfiniment le rayon de cette sphère, il arrivera un moment où le rayon *passera* par zéro et où la sphère se réduira à un simple point; si je considère cette sphère au moment où elle va s'anéantir, j'obtiens ce que l'on peut appeler un *point matériel*. Le point matériel est donc bien différent de la molécule du physicien, laquelle possède un volume, une forme déterminée; la notion du point matériel est, comme on voit, indépendante de toute hypothèse sur la constitution de la matière, qui peut être continue ou discontinue, sans que, dans la Mécanique rationnelle, on ait besoin de s'en occuper.

II. — Principe de l'inertie. — Force.

43. Nous admettrons qu'un point matériel ne peut jamais modifier de lui-même son état de repos ou de mouvement; ce qui veut dire que, si aucune cause ne vient agir sur lui, il restera éternellement en repos s'il y était préalablement, ou continuera indéfiniment le même mouvement rectiligne avec la même vitesse. C'est en cela que consiste le *principe de l'inertie*. Par ce mot *inertie*, nous ne voulons point faire entendre que la matière soit inactive; au contraire, nous admettrons que toute cause capable de troubler l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel ne peut émaner que d'un ou de plusieurs autres points matériels; nous compléterons ainsi, au moyen de cette hypothèse, le *principe de l'inertie*.

Quelle est la nature des causes qui produisent le mouvement? C'est ce que nous ne saurons probablement jamais. Quoi qu'il en soit, on a donné à ces causes le nom de *forces*, et l'on a pu les définir nettement, de manière à les faire intervenir dans le calcul, à l'aide des considérations suivantes.

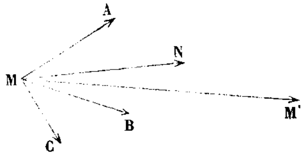
III. — Principe de l'indépendance des effets simultanés des forces.

44. *Lorsqu'une ou plusieurs forces agissent sur un même point matériel, chacune d'elles agit comme si les autres n'existaient pas et comme si le point matériel partait du repos.*

C'est dans cette proposition que consiste notre second principe dit l'*indépendance des effets simultanés des forces et du mouvement antérieurement acquis*. Mais ce principe, pour être compris, exige quelques développements. Voici sa signification précise.

J'appelle F, F′, F″,... (*) les forces qui sollicitent un point M en mouvement; je suppose que la force F, agissant seule et prenant le point M au repos, l'amène au bout du temps infiniment petit θ dans la position A (*fig.* 13);

Fig. 13.



je suppose que la force F′, agissant seule et prenant le point M au repos, l'amène dans la position B au bout du

(*) F, F′, F″,... ne sont pas des nombres; ce sont des noms que nous donnons aux forces pour les distinguer. Cette observation est importante pour l'intelligence de ce qui va suivre.

même temps θ, et ainsi de suite; je suppose enfin que, les forces F, F′, F″,... n'agissant pas, le point M se rende dans le même temps θ de M en N.

Sous l'influence combinée des forces F, F′, F″,... et de son mouvement propre, le point M se rendra en M′; nous admettrons que la droite MM′ est la résultante des droites MA, MB, MC,..., MN. Telle est la manière dont il faut entendre le principe que nous venons d'énoncer.

Ce principe est loin d'être évident; mais il est certainement impossible d'en donner une démonstration purement rationnelle. Nous nous contenterons d'en vérifier les conséquences plus ou moins directes que nous fournira l'analyse.

IV. — Du mouvement produit par les forces. — Mesure des forces.

45. Le *point d'application* d'une force est le point matériel sur lequel elle agit.

La *direction d'une force* est la tangente au premier élément de la trajectoire qu'elle ferait décrire à son point d'application en agissant seule et en prenant ce point d'application au repos.

Nous dirons qu'une force est *constante*, si, en prenant son point d'application au repos, elle lui communique toujours le même mouvement, quel que soit l'instant auquel on la fasse agir.

46. Nous dirons que deux forces *constantes* sont égales *en intensité* ou simplement sont égales, si, agissant successivement sur le même point matériel pris au repos, elles lui communiquent deux mouvements dont les trajectoires soient superposables et telles, que les arcs respectivement décrits en des temps égaux comptés à partir de l'origine du mouvement soient égaux.

Si nous supposons n forces de même intensité et de même direction qu'une force constante F et simultanément appliquées à un même point matériel M pris au repos, elles lui communiqueront un certain mouvement qui, en vertu du principe de l'indépendance des effets simultanés des forces, sera la résultante de n chemins égaux à celui qui serait dû à l'effet de la seule force F, et qui, par suite, sera toujours le même, quelle que soit l'époque à laquelle on fasse agir les forces en question ; le point M sera donc, par définition, soumis à une force constante. Cette force est ce que l'on appelle une force n fois plus grande que F. Deux forces, dont l'une est n fois plus grande que F et dont l'autre est m fois plus grande que F, seront dites dans le rapport de m à n. De là on passe, par les méthodes connues, à la définition de deux forces qui sont entre elles dans un rapport incommensurable quelconque. Si nous concevons alors que l'intensité d'une force f constante choisie arbitrairement ait été prise pour unité, les intensités de toutes les forces constantes pourront se mesurer à l'aide de f.

47. Théorème I. — *Lorsqu'une force constante agit sur un point matériel pris au repos, elle lui communique un mouvement rectiligne et uniformément varié.*

En effet, supposons qu'une force constante ait agi pendant un certain temps t sur un point matériel M ; soient, à l'époque t, x, y, z les coordonnées du point M prises par rapport à trois axes rectangulaires. Si à cette époque t la force cessait d'agir, le point décrirait dans le temps dt un chemin S dont la projection sur l'axe des x serait $\frac{dx}{dt}dt$, car le point M serait animé d'un mouvement uniforme en vertu du *principe de l'inertie*, et $\frac{dx}{dt}$ serait la composante de sa vitesse parallèle à l'axe des x. Si le point M partait du repos en x, y, z, la force lui ferait décrire un espace S′ dont les projections α, β, γ seraient constantes pour un même laps de temps dt, quel que soit t. Or, en vertu du principe de l'*indépendance des effets simultanés des forces*, pour avoir la position du point M à l'époque $t+dt$, il faut composer les chemins S et S′, et la quantité Δx sera donnée par la formule

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}dt + \alpha,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2 + \ldots = \frac{dx}{dt}dt + \alpha;$$

et, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2\alpha}{dt^2}.$$

Or α est constant avec dt; donc $2\alpha : dt^2$ est constant quand on prend t pour variable indépendante; en le désignant par $2a$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2a;$$

intégrons deux fois de suite par rapport à t, en observant que $\frac{dx}{dt}$ est nul pour $t=0$, puisque M part du repos : nous aurons

$$x - x_0 = at^2, \tag{1}$$

x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées initiales du point M. Cette équation et les suivantes, qui s'établissent de la même façon,

$$y - y_0 = bt^2, \quad z - z_0 = ct^2$$

sont les équations du mouvement. En éliminant t on a l'équation de la trajectoire; on voit qu'elle est rectiligne; si on la prend pour axe des x, les équations du mouvement se réduisent à la seule équation (1), qui est celle d'un mouvement uniformément varié (11).

48. Théorème II. — *Lorsque deux forces constantes agissent successivement sur le même point, elles lui communiquent des accélérations qui leur sont proportionnelles.*

En effet, si l'on considère une force φ et si l'on désigne par $2j$ l'accélération qu'elle communique à un certain point pris au repos, l'équation du mouvement uniformément varié de ce point sera $s = jt^2$, en vertu du théorème précédent. Si l'on fait alors agir n forces égales à φ, ou si l'on veut une force égale à $n\varphi$, chacune des forces φ agira comme si les autres n'existaient pas; au bout du temps t, chacune d'elles agissant seule ferait parcourir l'espace jt^2; si elles agissent simultanément, pour avoir le chemin décrit par le mobile, il faudra composer n chemins égaux à jt^2, ce qui fournira le chemin njt^2, et l'accélération du mouvement sera $2nj$.

Si donc on considère deux forces F et F′, si l'on désigne par φ leur commune mesure, et si l'on a

$$F = n\varphi, \quad F' = n'\varphi,$$

les forces F et F′ produiront des accélérations $2nj$ et $2n'j$, proportionnelles à n et à n', c'est-à-dire à F et F′; la proposition, étant vraie quels que soient n et n', a encore lieu quand F et F′ sont incommensurables.

On conclut de là un moyen de mesurer les forces. En effet, j et j' désignant les accélérations communiquées à un même point par deux forces F et F′, on a

$$\frac{F}{F'} = \frac{j}{j'} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{j} = \frac{F'}{j'}.$$

Le rapport $\frac{F}{j}$ est donc constant pour un même point matériel; ce rapport est ce que l'on appelle la *masse du point* en question. En désignant cette masse par m, on a

$$\frac{F}{j} = m \quad \text{ou} \quad F = mj.$$

Si l'on connaît m, l'expérience fera connaître j et l'on en conclura F. Or m peut être déterminé en faisant agir sur le point une force connue et en mesurant son accélération j, qui est le double de l'espace parcouru dans l'unité de temps lorsque le point part du repos. En effet

$$s = \frac{1}{2} j t^2 \quad \text{et, pour } t = 1, \quad s = \frac{1}{2} j.$$

V. — Forces variables.

49. Considérons un point en mouvement sous l'influence d'une force quelconque; soient M_0 sa position à l'époque t, et $M_0 M_1$ l'arc qu'il décrirait pendant le temps θ si la force qui le sollicite agissait seule et s'il partait du repos. Soit F la force constante capable de lui faire décrire la corde $M_0 M_1$ pendant le même temps, je dis que cette force existe et a pour expression

$$(1) \qquad F = m \cdot 2 \frac{M_0 M_1}{\theta^2},$$

m désignant la masse du point matériel; en effet, l'accélération due à la force F sera $\frac{F}{m}$ ou $\frac{2 M_0 M_1}{\theta^2}$, et l'espace parcouru dans le temps θ, sous l'influence de cette force, sera

$$\Delta s = \frac{1}{2} \left(\frac{2 M_0 M_1}{\theta^2} \right) \theta^2 \quad \text{ou} \quad M_0 M_1.$$

Ainsi la force F existe. F est ce que l'on peut appeler la valeur moyenne de la force pendant le temps θ, la limite f de F pour $\theta = 0$ est ce que l'on appelle la *valeur de la force* qui agit en M_0; f ne sera pas forcément tangente à la trajectoire à cause du mouvement antérieurement acquis par le mobile, mais elle aura une position limite qui sera la tangente à la trajectoire que décrirait le point s'il partait du repos en M_0, et s'il n'était soumis qu'à l'action de f.

Quant à la valeur de f, elle est facile à calculer : c'est la limite de l'expression (1)

$$(2) \qquad m \cdot 2\,\frac{M_0 M_1}{\theta^2};$$

or, aux infiniment petits du troisième ordre près, on a

$$M_0 M_1 = \Delta s = \theta\,\frac{ds}{dt} + \frac{\theta^2}{2}\,\frac{d^2 s}{dt^2};$$

mais, par hypothèse, le corps est censé partir du repos; donc la vitesse $\frac{ds}{dt}$ est nulle, et l'on a

$$M_0 M_1 = \frac{\theta^2}{2}\,\frac{d^2 s}{dt^2};$$

l'expression devient alors

$$f = m\,\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Ainsi, la force a pour mesure, à chaque instant, le produit de la masse du mobile par l'accélération $\frac{d^2 s}{dt^2}$, qu'elle lui communiquerait s'il était libre et s'il partait du repos.

On peut même dire que *la force a pour mesure le produit de la masse du point sur lequel elle agit par l'ac-*

célération qu'elle lui communiquerait si elle agissait seule. Sa direction est celle de cette accélération.

En effet, si le mobile était soumis à l'action d'une vitesse initiale, le mouvement s'obtiendrait en composant à chaque instant le mouvement dû à la force avec le mouvement dû à la vitesse initiale, ce qui n'altère ni la valeur ni la direction de l'accélération résultante.

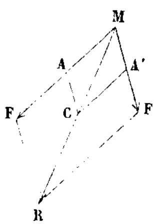
Nous représenterons dorénavant une force au moyen d'une droite ayant son origine au point d'application de la force, sa direction dans celle de la force, et pour longueur l'intensité de la force.

VI. — Parallélogramme des forces.

50. On appelle *résultante* de plusieurs forces une force capable de produire à elle seule le même effet que les forces données agissant simultanément. Ces dernières portent le nom de *composantes*.

Proposons-nous de trouver la résultante de deux for-

Fig. 14.



ces MF, MF′ (*fig.* 14) appliquées au même point M, de masse m; supposons d'abord les forces F et F′ constantes.

Lemme. — *Lorsqu'un mobile se meut en ligne droite d'un mouvement uniformément varié, il est sollicité par une force constante.*

En effet, l'expression de la force qui le sollicite est mj, j désignant l'accélération du mouvement, et la direction de cette force est constante.

Ceci posé, je suppose que le point M parte du repos, ce qui n'altère pas l'effet des forces (en vertu du deuxième principe (43). Si la force F agissait seule, elle produirait une accélération j, et, pendant le temps infiniment petit θ, ferait parcourir au mobile l'espace

$$\text{(1)} \qquad MA = \frac{1}{2} j\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\theta^2.$$

Si, au contraire, la force F′ agissait seule, le point décrirait le chemin

$$\text{(2)} \qquad MA' = \frac{1}{2}\frac{F'}{m}\theta^2$$

pendant le temps θ. En vertu du principe de l'indépendance des effets simultanés des forces, le chemin MC parcouru par le point M sous l'influence combinée de F et de F′ sera la diagonale du parallélogramme construit sur MA et MA′.

Le rapport $\frac{MA'}{MA}$ est constant et égal à $\frac{F'}{F}$; donc, en vertu d'un théorème bien connu et qui est fondamental en Géométrie analytique, le point C ou m décrit une ligne droite; cette ligne MC varie proportionnellement à $MA = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\theta^2$, c'est-à-dire au carré du temps; le mouvement du point C ou m est donc uniformément varié; le point en question peut être censé sollicité par une force constante (Lemme); l'accélération J due à cette force est facile à trouver, car

$$MC = \frac{1}{2} mJ\theta^2;$$

on a donc

$$mJ = \frac{2MC}{\theta^2}.$$

mJ est la force qui sollicite le point M, c'est la résultante cherchée; de plus, sa direction est MC.

Or, la diagonale MR du parallélogramme construit sur MF et MF′ coïncide en direction avec la diagonale de MACA′, car les parallélogrammes MFRF′, MACA′ sont semblables comme ayant un angle commun M et les côtés MA et MA′ proportionnels à MF et MF′, ainsi qu'on s'en assure en divisant (1) par (2). De plus, on a

$$\frac{MR}{MC} = \frac{MF}{MA},$$

ou

$$MR = \frac{MC.MF}{MA} = \frac{\frac{1}{2} J\theta^2 \times F}{\frac{1}{2}\frac{F}{m}\theta^2} = mJ.$$

Ainsi, MR est en grandeur et en direction égale à la force cherchée. On peut donc énoncer le théorème suivant fondamental en Statique :

La résultante de deux forces constantes est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

Si les forces F et F′ n'étaient pas constantes, le théorème précédent pourrait s'appliquer à leurs valeurs moyennes (49) et par suite à la limite de leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire aux forces F et F′ elles-mêmes, et la règle du parallélogramme se trouve démontrée pour des forces quelconques.

VII. — Réflexions sur les théories précédentes.

51. Jusqu'ici nous n'avons pas encore fait de Statique proprement dite, nous avons fait de la Dynamique, puisque nous nous sommes occupés à la fois des forces et des mouvements qu'elles produisaient.

Quelques auteurs ont vivement critiqué cette manière de commencer la Statique, et ont essayé de démontrer *à priori* le théorème du parallélogramme des forces sans s'appuyer sur des considérations de mouvement : Lagrange et Bour se sont montrés hostiles à cette manière de procéder. On peut lire à ce sujet les premières pages de la *Mécanique analytique* de Lagrange et les feuilles du *Cours de Mécanique et machines* professé par Bour à l'École Polytechnique.

Laplace (dans sa *Mécanique céleste*, t. I) commence l'étude de la Mécanique par la démonstration du parallélogramme des forces; sa démonstration est ingénieuse, mais elle ne saurait satisfaire pleinement un esprit rigoureux : il semble extraordinaire qu'ayant défini une force, une cause de mouvement, l'auteur ne s'appuie point sur cette définition pour mesurer la force et pour en déduire les principales propriétés.

VIII. — Conséquences du parallélogramme des forces.

52. Théorème. — *La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel est représentée en grandeur et en direction par la résultante des droites qui représentent ces forces.*

En effet, soient F, F′, F″, ... des forces quelconques appliquées à un même point matériel m. F et F′ peuvent être remplacées par leur résultante R représentée par la résultante des droites qui représentent F et F′; mais R et F″ peuvent être remplacées par leur résultante R′, qui est représentée par la résultante des droites qui représentent R et F″; or, cette droite est aussi la résultante qui représente F, F′ et F″. On verrait de même que R′ et F‴ peuvent être remplacées par une force représentée par la résultante des droites qui représentent F, F′, F″, F‴, et ainsi de suite.... On finira par réduire toutes les forces à une seule $R^{(n)}$, représentée par la résultante des droites qui représentent F, F′, F″,..., et qui ne sera autre chose que la force résultante de F, F′, F″,... Le théorème est donc démontré.

Corollaire I. — Soient F, F′,... diverses forces, R leur résultante, a, α, α',... les angles que R, F, F′,... font avec un axe fixe, on aura

$$R \cos a = \Sigma F \cos \alpha,$$

et en général on aura, entre R et F, F′,..., toutes les relations connues entre des droites et leur résultante.

Corollaire II. — Si l'on se donne une force R, on pourra la remplacer par plusieurs autres, pourvu que ces autres forces aient R pour résultante.

CHAPITRE II.

THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE.

I. — Principes fondamentaux et définitions.

53. On appelle *déplacement virtuel* d'un point un déplacement infiniment petit donné à ce point, et différent en général de celui que prendrait réellement le point sous l'influence des causes qui le sollicitent au mouvement.

Les déplacements virtuels sont indépendants du temps; on les représente par un δ, en réservant la caractéristique différentielle d pour les déplacements réels effectués dans le temps dt.

On appelle *travail virtuel* d'une force le produit de cette force par le déplacement virtuel de son point d'application et le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et celle du déplacement. Le travail est donc susceptible d'un signe qui sera $+$ ou $-$, selon que la force et le déplacement feront ensemble un angle aigu ou obtus.

54. Théorème I. — *Le travail d'une force, pour un déplacement virtuel quelconque, est égal à la somme des travaux virtuels de ses composantes pour le même déplacement.*

En effet, soient R une force, F, F', F'',... ses composantes, δs un déplacement virtuel donné à son point d'application; on a, en projetant successivement R et F, F', F'',... sur δs,

$$R\cos(R, \delta s) = \Sigma F\cos(F, \delta s),$$

et, par suite, en multipliant par δs,

$$R\,\delta s\cos(R, \delta s) = \Sigma F\,\delta s\cos(F, \delta s).$$

Cette formule contient la démonstration du théorème énoncé.

55. Théorème II. — *Le travail d'une force, dans un déplacement quelconque, est égal à la somme des travaux de la même force dans les déplacements composants.*

Soient F une force, δs un déplacement donné à son point d'application; soient δu, $\delta u'$, $\delta u''$,... divers déplacements ayant δs pour résultante : en projetant δs, δu, $\delta u'$,... sur F, on a

$$\delta s\cos(F, \delta s) = \Sigma\,\delta u\cos(F, \delta u),$$

d'où

$$F\,\delta s\cos(F, \delta s) = \Sigma F\,\delta u\cos(F, \delta u).$$

C. Q. F. D.

56. Corollaire. — Soient X, Y, Z les projections ou composantes d'une force F relatives à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; soient δx, δy, δz les projections du déplacement virtuel δs de son point d'application : on aura, en vertu du théorème I,

$$\text{trav. F} = \text{trav. X} + \text{trav. Y} + \text{trav. Z};$$

mais le travail de X est égal à la somme des travaux de cette force dans les déplacements δx, δy, δz. Le premier de ces travaux est $X\delta x$; les deux autres sont nuls, car $\cos(X, \delta y) = 0$, $\cos(X, \delta z) = 0$. On a donc, en faisant sur Y, Z une remarque analogue,

$$\text{trav.}\,F = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Cette formule résulte aussi de l'équation suivante :

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = F\delta s\left(\frac{X}{F}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{F}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{F}\frac{\delta z}{\delta s}\right)$$
$$= F\delta s\cos(F, \delta s).$$

L'expression que nous venons de faire connaître pour le travail de la force F est une des formules le plus fréquemment employées en Mécanique.

57. On appelle *moment* d'une force par rapport à un point le produit de cette force par sa distance au point. Le point porte le nom de *centre des moments*, et la distance en question est le *bras de levier* de la force.

On appelle *moment d'une force par rapport à un axe dont le sens est déterminé* le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au pied de l'axe. On donne un signe à ce moment. Ce signe est + ou —, selon que la projection de la force tend à faire tourner dans le sens direct ou dans le sens rétrograde son bras de levier considéré comme une droite mobile autour du centre des moments.

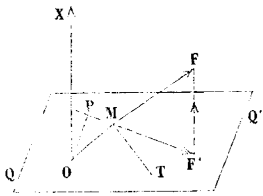
Le sens direct est défini toujours de la même manière. Ainsi un observateur ayant ses pieds à l'origine, sa tête à l'extrémité de l'axe, verra le bras de levier tourner dans le sens des aiguilles d'une montre si le moment est positif, dans le sens contraire s'il est négatif.

58. Théorème III. — *Le travail d'une force, dans un mouvement de rotation effectué autour d'un cer-*

tain axe, est égal au déplacement angulaire multiplié par le moment de la force pris par rapport à l'axe.

En effet, soient OX un axe, MF une force, M son point d'application, F′ sa projection sur un plan Q′Q perpendiculaire à OX et passant par le point M (*fig.* 16), $\delta\alpha$ un

Fig. 16.



déplacement angulaire donné au point M : le travail de MF est égal à la somme des travaux de ses composantes MF′ et F′F; mais le travail de F′F est nul, puisque cette force fait avec le déplacement du point M un angle dont le cosinus est zéro; on a donc

$$\text{trav.}\, F = \text{trav.}\, F'.$$

Si MT désigne alors la tangente au déplacement menée dans le sens des déplacements positifs, on a

$$\text{trav.}\, F = \text{trav.}\, F' = F' . OM . \delta\alpha \cos(F'MT)$$

si $\delta\alpha$ est positif; et

$$\text{trav.}\, F = - F' . OM \; \delta\alpha \cos(F'MT)$$

si $\delta\alpha$ est négatif. Menons OP perpendiculaire à MF′, l'angle F′MT sera égal ou supplémentaire de POM, en sorte que $OM \cos F'MT = \pm OM \cos POM = \pm OP$. On a donc

$$\text{trav.}\, F = \pm F' . OP . \delta\alpha.$$

ou

$$\text{trav.}\, F = \pm \delta\alpha . \text{mom.}\, F.$$

Supposons $\delta\alpha$ positif, le travail sera positif si la force est dirigée à droite de OM, c'est-à-dire si le moment est positif; donc, dans ce cas, la force et le moment sont positifs. On verrait de même que, si la force était dirigée vers la gauche de OM, le travail et le moment seraient négatifs tous deux; quand $\delta\alpha$ devient négatif, le moment ne change pas, le travail change de signe, on a donc toujours

$$\text{trav.}\,F = +\,\delta\alpha\,.\,\text{mom.}\,F.$$

C. Q. F. D.

59. Théorème IV. — *Le moment d'une force par rapport à un axe est égal à la somme des moments de ses composantes.*

En effet, soient R une force, F, F′, F″, ... ses composantes; si l'on donne, au point d'application de R, un mouvement de rotation autour de l'axe, et si $\delta\alpha$ désigne le déplacement angulaire, on a

$$\text{trav.}\,R = \Sigma\,\text{trav.}\,F,$$

ou

$$\delta\alpha\;\text{mom.}\,R = \Sigma\,\delta\alpha\;\text{mom.}\,F,$$

ou enfin

$$\text{mom.}\,R = \Sigma\;\text{mom.}\,F.$$

C. Q. F. D.

60. Problème I. — *Étant donnés les moments* L, M, N *d'une force* F *par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *calculer le moment de cette force par rapport à un axe* OI *passant par le point* O *et faisant avec les premiers des angles* α, β, γ.

Donnons, au point d'application de F, un mouvement de rotation ω autour de OI, la rotation ω pourra se décomposer en trois autres p, q, r, effectuées autour de Ox,

Oy, Oz respectivement, et l'on aura

$$p = \omega \cos\alpha, \quad q = \omega \cos\beta, \quad r = \omega \cos\gamma.$$

Écrivons que le travail de F, dans le mouvement résultant ω, est égal à la somme des travaux de F dans les mouvements composants, on aura

$$\omega . \text{mom}. F = L\omega \cos\alpha + M\omega \cos\beta + N \cos\gamma,$$

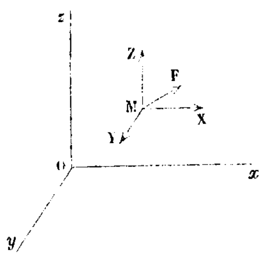
ou

$$\text{mom}. F = L \cos\alpha + M \cos\beta + N \cos\gamma.$$

61. Problème II. — *Soient* X, Y, Z *les projections d'une force sur trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz : *calculer les moments* L, M, N *de cette force par rapport aux axes.*

Soient M le point d'application de F (*fig.* 17); x, y, z ses coordonnées : le moment L de F par rapport à Ox

Fig. 17.



est égal à la somme des moments de X, Y, Z; or le moment de X, parallèle à l'axe Ox, est nul, le moment de Y est égal au produit de Y par son bras de levier z. Ce moment est négatif sur la figure, car la force Y tend à faire tourner son bras de levier dans le sens zy; si Y était négatif, le moment en question serait positif, mais la valeur absolue de Y serait $-Y$. Ainsi quand z est positif, le moment de Y est $-Yz$; on verrait de même que, si z était négatif, le moment serait égal à $-Yz$. Le moment de Z est Zy et positif sur la figure, car z tend à faire tourner son bras de levier dans le sens yz; en discutant le signe de ce moment, dans le cas où Z et y sont négatifs, on conclut que Zy représente, en grandeur et en signe, dans tous les cas, le moment de Z; on a donc

$$L = Zy - Yz,$$

et de même

$$M = Xz - Zx,$$
$$N = Yx - Xy.$$

62. Remarque I. — Si l'on appelle α, β, γ les angles que fait F avec les axes, on a

$$L = F(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$
$$M = F(z\cos\alpha - x\cos\gamma),$$
$$N = F(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Remarque II. — Si l'on transforme les coordonnées en appelant a, b, c, α', b', c', a'', b'', c'' les neuf cosinus qui servent à passer aux nouveaux axes en laissant l'origine immobile, on a

$$(1) \qquad L' = Z'y' - z'Y',$$

L', M', N', x', y', z', X', Y', Z' désignant les moments, les coordonnées et les composantes relatives aux nouveaux axes; or

$$Z' = cX + c'Y + c''Z,$$
$$y' = bx + b'y + b''z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La formule (1) devient alors

$$L' = (cX + c'Y + c''Z)(bx + b'y + b''z)$$
$$- (bX + b'Y + b''Z)(cx + c'y + c''z)$$

ou

$$L' = (Zy - Yz)(c''b' - b''c') + \ldots,$$

ou

$$L' = aL + a'M + a''N,$$

ce qui constitue une seconde manière de résoudre le problème I.

II. — Équilibre d'un point matériel.

63. Un point matériel, ou plus généralement un corps quelconque, est dit *en équilibre* sous l'influence de certaines forces, lorsque ces forces ne modifient pas son état de repos ou de mouvement; on dit aussi que *les forces* en question *se font équilibre*.

Pour que des forces appliquées à un même point matériel se fassent équilibre, il faut et il suffit évidemment que leur résultante soit nulle, car la résultante est la force qui à elle seule est capable de produire le même effet que les forces données.

Soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires; $X, X', \ldots,$ les projections des forces qui sollicitent le point M, sur l'axe des x; $Y, Y', \ldots$ leurs projections sur l'axe des y; $Z, Z', \ldots$ leurs projections sur l'axe des z : la condition nécessaire et suffisante pour que la résultante soit nulle est

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

car les premiers membres de ces équations sont les projections de la résultante sur les axes; et pour qu'une droite soit nulle, il faut et il suffit que ses projections sur trois droites concourantes soient nulles. Autrement :

Pour que la résultante soit nulle, il faut et il suffit que son travail soit nul pour tous les déplacements possibles du point M, car si l'on a toujours

$$R\,\delta s \cos(R, \delta s) = 0,$$

on en déduit $R = o$, car $\cos(R, \delta s)$ ne peut pas être toujours nul, et si $R\delta s \cos(R, \delta s)$ n'était pas nul, R ne saurait être nul. En remplaçant le travail de la résultante par la somme des travaux de ses composantes on a, en vertu d'un théorème du paragraphe précédent,

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = o.$$

D'où l'on peut conclure

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o,$$

car δx, δy, δz sont arbitraires.

Si le point M, au lieu d'être libre, était assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface fixe, on pourrait remplacer l'action de la courbe ou de la surface par une force, et effectivement cette action équivaut à une force, puisqu'elle modifie le mouvement que prendrait le corps s'il était libre.

64. Nous dirons qu'*il n'y a pas de frottement* si l'action de la surface ou de la courbe fixe se réduit à une force dirigée suivant une normale : dans ce cas, il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que la résultante des forces qui sollicitent le point matériel soit normale à la courbe ou à la surface.

En effet, si l'on décompose la résultante en deux autres forces, l'une normale, l'autre tangente à la courbe ou à la surface, la force normale n'aura aucun effet, en ce sens qu'elle tendra à enlever le point de la courbe ou de la surface et fera équilibre à l'action de la surface : quant à la force tangentielle, si elle n'est pas nulle, elle fera glisser le point matériel le long d'une des tangentes.

Si le point M était simplement assujetti à ne pas pénétrer d'un certain côté d'une surface donnée, il faudrait non-seulement exprimer que la résultante est normale à la surface, mais encore qu'elle est dirigée vers le côté où le point ne peut pas pénétrer, ou qu'elle est nulle.

Ces conditions peuvent encore s'exprimer autrement : dire que la résultante est normale à la surface ou à la courbe, c'est dire que le travail de cette résultante est nul pour tout déplacement effectué sur la courbe ou sur la surface. Pour exprimer ces conditions analytiquement on procède comme il suit.

65. Soit d'abord

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface sur laquelle le point est assujetti à demeurer. Soient x, y, z les coordonnées ; X la somme des projections sur l'axe des x des forces qui sollicitent le point; Y, Z les sommes analogues relatives aux autres axes. Soit, de plus, N la réaction normale de la surface. Les cosinus des angles que la normale fait avec les axes sont : $\Delta\frac{df}{dx}$, $\Delta\frac{df}{dy}$, $\Delta\frac{df}{dz}$, en posant, pour abréger,

$$\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2} = \frac{1}{\Delta}.$$

Les forces N, X, Y, Z doivent se faire équilibre sur le point supposé libre. On a donc

$$N\Delta\frac{df}{dx} + X = 0, \quad N\Delta\frac{df}{dy} + Y = 0, \quad N\Delta\frac{df}{dz} + Z = 0.$$

On en déduit

$$-N\Delta = X : \frac{df}{dx} = Y : \frac{df}{dy} = Z : \frac{df}{dz} = \Delta\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ces équations font connaître N et expriment, du reste, que la résultante est normale à la surface; car X, Y, Z sont égales aux projections de la résultante.

Si nous supposons que le point soit assujetti à demeurer sur une courbe, en désignant par ds l'élément d'arc et par λ, μ, ν les angles que fait la réaction N avec les axes, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} N\cos\lambda + X = 0, \\ N\cos\mu + Y = 0, \\ N\cos\nu + Z = 0. \end{cases}$$

A ces formules il faut joindre la relation

$$(2)\qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et la suivante qui exprime que la direction λ, μ, ν est normale à la direction ds,

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0.$$

Les équations (1), multipliées par dx, dy, dz et ajoutées, donnent

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Cette équation exprime que la résultante est normale à la courbe; si l'on élimine ensuite $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ entre (1) et (2), on trouve

$$N^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

On pourra calculer N par cette formule, après quoi les équations (1) feront connaître $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$.

III. — Principe de l'action et de la réaction.

66. Lorsqu'un point matériel A exerce une action sur un autre point B (et nous avons déjà dit que toute force émanait d'un point matériel), le second point B exerce aussi une action sur le point A, et les deux forces émanées de A et de B sont toujours égales, mais de sens opposé, et dirigées suivant AB.

Ce principe est le dernier de ceux dont nous ferons usage sans en donner de démonstration. Newton, qui l'a énoncé le premier, a donné à l'une des forces (celle qui émane de B) le nom d'*action*; l'autre porte le nom de *réaction*; ainsi on peut énoncer le principe de Newton comme suit : *l'action est égale et contraire à la réaction.*

Ce principe, ou du moins un nouveau principe, devenait tout à fait nécessaire pour étudier les relations qui existent entre un point et le monde extérieur, et l'on conçoit qu'il ne soit pas possible de démontrer de tels principes par la seule force de la raison : nous les vérifierons expérimentalement dans leurs conséquences.

67. Évaluons la somme des travaux virtuels des forces provenant de l'action mutuelle de deux points A, B. Soient x, y, z les coordonnées du point A; δs son déplacement virtuel; x', y', z' les coordonnées du point B; $\delta s'$ son déplacement virtuel, l la distance AB, f l'action mutuelle des points A et B. Si nous supposons d'abord la force f attractive, c'est-à-dire si nous supposons l'action de B sur A dirigée de A vers B, le travail développé en A sera

$$f\,\delta s \cos(\mathrm{AB}, \delta s);$$

le travail développé en B sera

$$f\,\delta s' \cos(\mathrm{BA}, \delta s');$$

la somme sera

$$(1)\qquad \mathrm{T} = f[\delta s \cos(\mathrm{AB}, \delta s) + \delta s' \cos(\mathrm{BA}, \delta s')].$$

Or on a

$$\cos(\mathrm{AB}, \delta s) = \frac{x'-x}{l}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{y'-y}{l}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{z'-z}{l}\frac{\delta z}{\delta s},$$

$$\cos(\mathrm{BA}, \delta s') = \frac{x-x'}{l}\frac{\delta x'}{\delta s'} + \frac{y-y'}{l}\frac{\delta y'}{\delta s'} + \frac{z-z'}{l}\frac{\delta z'}{\delta s'}.$$

La formule (1) devient alors

$$\begin{aligned} T = -f\frac{1}{l}[&(x'-x)(\delta x'-\delta x) \\ &+ (y'-y)(\delta y'-\delta y) + (z'-z)(\delta z'-\delta z)], \end{aligned}$$

ou

$$T = -\frac{f}{2l}\delta[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2],$$

c'est-à-dire

$$T = -\frac{f}{2l}\delta . l^2,$$

ou enfin

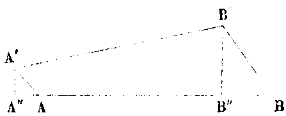
$$T = -f\delta l.$$

Si la force avait été répulsive, on aurait eu

$$T = f\delta l,$$

ce que l'on pouvait prévoir; car, toutes choses égales d'ailleurs, la force f changeant de sens, le travail doit changer de signe. La Géométrie conduit simplement au résultat que nous venons de trouver.

Fig. 18.



En effet, soit A'B' (*fig.* 18) la position de la droite AB après son déplacement virtuel, on a, si f est une force attractive,

$$T = -f.A''A + f B''B;$$

AA'' et BB'' désignant les projections de δs et $\delta s'$, la formule précédente peut s'écrire

$$T = f(B''B - A''A),$$

ou

$$T = f(AB - A''B''),$$

ou, aux infiniment petits du second ordre près,

$$T = f(AB - A'B') = f.(-\delta l) = -f\delta l.$$

IV. — Sur les diverses forces qui sollicitent les corps.

68. Les physiciens admettent généralement que les corps naturels sont formés d'atomes séparés les uns des autres par des vides. Le point matériel n'est pas un atome; c'est un point mathématique pris à l'intérieur de la matière, et faisant partie de cette matière : il y en aurait donc une infinité dans un atome, qui est un corpuscule de dimensions finies.

Nous tâcherons de n'introduire que le plus tard possible la notion d'atome dans l'étude que nous ferons, laissant ainsi la moindre part possible à l'hypothèse. Nous admettrons que, dans les systèmes matériels ou corps soumis à notre étude, le nombre des points matériels auxquels des forces sont appliquées est fini, ou plutôt nous n'étudierons que les systèmes formés de points matériels isolés et en nombre limité.

Les forces qui sollicitent un système de points matériels sont de deux espèces : elles sont *intérieures* ou *extérieures*; les forces intérieures sont celles qui émanent de points faisant partie du système; les forces extérieures émanent, au contraire, de points matériels extérieurs au système.

A un autre point de vue, nous partagerons les forces en forces *directement appliquées* au système et en *forces de liaison*. Nous définirons seulement ce que nous entendons par *forces de liaison*.

69. La plupart du temps, les divers points d'un système ne sont pas indépendants les uns des autres; leurs coordonnées sont assujetties à remplir certaines conditions, certaines égalités auxquelles on donne le nom de *liaisons*. Par exemple, un point du système peut être assujetti à rester sur une sphère; deux points peuvent être assujettis à rester à une distance invariable l'un de l'autre : ces conditions se traduisent par des équations entre les coordonnées de ces divers points, et constituent ce que l'on appelle des *liaisons*.

Ces liaisons équivalent à des forces. En effet, si nous supprimons une liaison, le corps va prendre un mouvement différent de celui qu'il aurait pris si la liaison avait subsisté, ou plutôt l'état de repos ou de mouvement du système va être modifié; il est évident que l'on ramènera le système à son état primitif, en appliquant à ses divers points certaines forces. (Il ne faut pas oublier qu'une force est la cause capable de modifier l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel.) Ainsi les liaisons équivalent à des forces. Ces forces sont ce que nous appellerons les *forces de liaisons;* elles peuvent être intérieures ou extérieures, suivant les cas.

Il y a quelquefois avantage à introduire directement dans le calcul les forces qui produisent une liaison donnée; on ne tient plus compte alors de cette liaison, et les forces de liaison en question deviennent des forces *directement appliquées*.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable de lever une difficulté qui résulte de nos conventions, et qui pourrait éveiller des doutes dans l'esprit du lecteur. Nous avons admis qu'un système pouvait renfermer une infinité de points matériels, et cependant nous avons admis qu'un nombre limité d'entre eux recevait l'action des forces; il semblerait, d'après cela, que si le corps se met en mouvement, les seuls points auxquels sont appliquées les forces vont se mouvoir et se détacher du système. Pour faire disparaître cette difficulté, il faut supposer que les points auxquels les forces ne sont pas appliquées aient des masses nulles et soient invariablement liés par groupes à certains points qui reçoivent l'action des forces, et qui auront une masse proportionnelle, si l'on veut, au volume dont les points qui leur sont liés font partie.

Ainsi, par exemple, on peut imaginer qu'un atome forme un solide de figure invariable, et qu'un point que nous appellerons *centre* de cet atome soit le point d'application d'une force; nous donnerons au centre de l'atome une masse proportionnelle au volume de l'atome; nous pourrons imaginer plusieurs centres dans l'atome, en sorte que l'on pourra toujours faire, dans les calculs, abstraction d'une certaine partie de la matière et la réduire à un nombre fini de points matériels invariablement liés entre eux.

Du reste les calculs et les raisonnements qui vont suivre seront indépendants de toute hypothèse sur la constitution de la matière, vu que nous ne parlerons que de systèmes de points matériels. Nous *solidifierons* quelquefois ces systèmes, c'est-à-dire que nous supposerons les distances mutuelles de leurs points invariables. Nous resterons ainsi pendant longtemps dans le domaine de l'abstraction; mais l'étude que nous aurons faite sera utile dans la suite, lorsque, abandonnant les spéculations rigoureuses de la Mécanique rationnelle, nous essayerons d'appliquer l'analyse aux phénomènes naturels, en introduisant les hypothèses dont nous avons parlé plus haut, modifiées convenablement suivant les besoins de la science.

V. — Théorème du travail virtuel.

70. Nous rappellerons d'abord qu'un corps est dit *en équilibre* sous l'influence de certaines forces, lorsque ces forces sont incapables de modifier son état de repos ou de mouvement. Ces forces *ne se détruisent pas;* elles produisent les forces de liaison. Prenons, par exemple, un point assujetti à rester sur un plan; ce point peut rester en repos sur ce plan, sans qu'aucune force agisse sur lui. Faisons agir sur ce point une force normale au plan, il va rester en équilibre; mais il faut alors que la fixité du plan équivaille à une force égale et de sens contraire à celle que nous venons de faire agir. Ainsi les forces directement appliquées engendreront en général des forces de liaison, variables avec les forces directement appliquées.

Théorème du travail virtuel. — *Pour qu'un système de points matériels soit en équilibre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels des forces qui le sollicitent soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons du système.*

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),... les coordonnées des différents points du système, les liaisons seront, comme nous l'avons déjà dit, des conditions exprimées au moyen d'équations telles que

$$L(x_1, y_1, z_1; x_2, \ldots) = 0, \tag{1}$$

entre les coordonnées des divers points du système. Soient δx_1, δy_1, δz_1; δx_2,... les variations correspondantes à un certain déplacement virtuel : nous dirons que ce déplacement est *compatible avec la liaison* (1), si l'on a

$$L(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, x_2 + \delta x_2, \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (1),

$$\frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dL}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dL}{dz_1}\delta x_2 + \ldots = 0.$$

Ceci posé, supposons d'abord que le système soit à *liaisons complètes*, c'est-à-dire que, n désignant le nombre de ses points, il existe $3n-1$ équations de liaison. Dans ce cas, chacune des $3n$ cordonnées $x_1, y_1, z_1; x_2, \ldots$ pourra s'exprimer à l'aide d'une seule d'entre elles, et chacun des points du système va être assujetti à décrire une courbe déterminée; les seuls déplacements compatibles avec les liaisons seront des déplacements effectués le long de ces courbes.

Pour qu'un point assujetti à décrire une courbe soit en équilibre, il faut, comme nous l'avons vu (p. 72), que la somme des travaux virtuels des forces qui lui sont directement appliquées soit nulle pour tout déplacement effectué le long de la courbe; or, pour que le système soit en équilibre, il faut que chacun de ses points soit en équilibre; donc il faut que la somme des travaux de toutes les forces directement appliquées soit nulle pour tout déplacement effectué le long des courbes, c'est-à-dire compatible avec les liaisons.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre k quelconque de liaisons (inférieur à $3n$, sans quoi $x_1, y_1, z_1, \ldots$ ne sauraient varier); soient

$$(\mathrm{L}) \qquad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots, \quad L_k = 0,$$

ces liaisons; s'il y a équilibre, cet équilibre ne sera pas troublé par l'introduction de nouvelles liaisons en nombre $3n-k-1$,

$$(\mathrm{M}) \qquad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \ldots, \quad M_{3n-k-1} = 0,$$

compatibles avec les premières (car introduire une liaison revient à s'opposer à certains déplacements, et si un point est en équilibre sous l'influence de certaines forces, on peut le supposer en repos en vertu du principe de l'indépendance des effets simultanés des forces; or s'il est en repos, il est bien clair qu'il restera encore en repos si l'on s'oppose simplement à ce qu'il se meuve dans un certain sens).

Mais nous avons maintenant $3n - 1$ liaisons, le système est à liaisons complètes; il faut donc que la somme des travaux des forces directement appliquées soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons (L) et (M) : mais les liaisons (M) sont quelconques; donc la *somme des travaux des forces directement appliquées doit être nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons* (L) *pour qu'il y ait équilibre.*

71. Il reste à prouver la réciproque : *Supposons que la somme des travaux des forces appliquées à un système soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons, je dis qu'il y aura équilibre.*

En effet, on peut supposer que le corps parte du repos; s'il n'y a pas équilibre, le système va se mettre en mouvement, le déplacement qu'il prendra sera compatible avec les liaisons, mais on pourra s'opposer au mouvement et rétablir l'équilibre en appliquant à chaque point une force d'intensité convenable dirigée en sens contraire du mouvement initial. Appelons F le système primitif des forces, Φ le système des nouvelles forces introduites. Sous l'influence de F et Φ, le système est en équilibre; donc la somme des travaux des forces F et Φ est nulle pour le déplacement compatible avec les liaisons, qui se produirait si Φ n'existait pas. Mais, par hypothèse, le travail des forces F est nul; donc le travail des forces Φ devrait l'être aussi, ce qui est absurde, puisque ces forces agissent toutes en sens inverse du déplacement considéré, et que, par suite, leur travail est négatif. Donc,..., et le théorème se trouve démontré. Le théorème précédent porte le nom de *principe des vitesses virtuelles* ou du *travail virtuel*.

VI. — Remarques sur le théorème précédent.

72. Remarque I. — Si l'on considère un *système libre*, c'est-à-dire dans lequel il n'existe pas de liaisons, pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de toutes les forces du système soit nulle pour tout déplacement du système. On peut le voir immédiatement en observant que, chaque point devant être en équilibre, la somme des travaux des forces qui le sollicitent doit être nulle; réciproquement, si la somme des travaux de toutes les forces du système est nulle quel que soit le déplacement, elle sera nulle en particulier si tous les points, à l'exception d'un seul, restent immobiles; mais alors ce point est en équilibre, puisque la somme des travaux de toutes les forces qui le sollicitent est nulle; donc chaque point du système, et par suite le système lui-même, est en équilibre.

Remarque II. — Nous avons supposé tacitement, dans la démonstration du principe des vitesses virtuelles, que les liaisons ne variaient pas avec le temps t; mais il est facile de voir que ce principe est encore vrai dans le cas où les liaisons sont fonctions du temps.

En effet, considérons le système à l'époque θ. Supposons que l'on remplace, dans chaque équation de liaison que nous supposerons de la forme

$$L(t, x_1, y_1, z_1, \ldots) = 0,$$

t par la constante θ, le principe des vitesses virtuelles sera vrai pour le nouveau système de liaisons; comme il est vrai ainsi à chaque instant θ, il a lieu pour toutes les valeurs de t : il est donc général.

Mais il faut observer (et cette remarque est importante en dynamique) que le déplacement réel infiniment petit que prend un corps en mouvement n'est pas compatible en général avec les liaisons à l'époque t, si celles-ci contiennent le temps; en effet, si $dx_1, dy_1, dz_1, \ldots$ désignent les variations de $x_1, y_1, z_1, \ldots$ dans le déplacement réel, on a

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx_1}dx_1 + \frac{dL}{dy_1}dy_1 + \ldots = 0,$$

tandis que l'on a seulement

$$\frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL}{dy_1}\delta y_1 + \ldots = 0;$$

donc on ne peut prendre $dx_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \delta y_1, \ldots$ que si $\frac{dL}{dt}$ est nul, c'est-à-dire si les liaisons ne contiennent pas le temps.

73. Remarque III. — Dans la démonstration que nous avons donnée du principe des vitesses virtuelles, nous avons supposé que si un point était assujetti à rester sur une courbe, on pouvait remplacer l'effet de la courbe par une force normale : ceci n'a lieu que s'il n'y a pas de *frottement* sur cette courbe. S'il y avait frottement, il faudrait remplacer les liaisons correspondant à ces frottements par les forces qu'elles produisent, ces forces étant considérées comme directement appliquées.

VII. — Application des principes précédents à la statique des solides.

74. Nous allons chercher les conditions d'équilibre d'un système solide; cette question sera étudiée plus à fond dans le Chapitre suivant : nous voulons seulement ici montrer comment on doit se servir du principe des vitesses virtuelles.

Les mouvements compatibles avec les liaisons dans un solide, c'est-à-dire les mouvements qui n'altèrent pas les distances mutuelles des points, se réduisent tous, comme on l'a vu, à une rotation et à une translation; donc, pour assurer l'équilibre, il suffira d'écrire que la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées est nulle pour tout mouvement de rotation et pour tout mouvement de translation (car le travail dans le mouvement résultant est la somme des travaux effectués dans les mouvements composants, p. 64).

Or un mouvement de rotation quelconque (p. 28) peut être remplacé par une translation convenablement choisie et par trois rotations effectuées autour de trois axes fixes; un mouvement de translation peut être décomposé en trois translations parallèles à trois axes fixes, en sorte qu'en définitive pour assurer l'équilibre il suffira d'écrire que la somme des travaux des forces directement appliquées est nulle pour trois rotations quelconques effectuées autour de trois axes coordonnés rectangulaires et pour trois translations quelconques parallèles aux axes.

Si l'on observe alors : 1° que le travail d'une force (p. 65) dans un mouvement de rotation est égal à son moment multiplié par le déplacement angulaire; 2° que le travail d'une force dans un mouvement de translation est égal à la projection de la force sur la direction du déplacement, multipliée par l'amplitude de ce déplacement, on arrive à cette conclusion :

Pour qu'un système solide soit en équilibre, il faut et il suffit : 1° *que la somme des moments des forces directement appliquées, pris par rapport à trois axes rectangulaires, soit nulle ;* 2° *que la somme des projections de ces forces sur les trois axes soit nulle.*

On peut arriver à ce résultat d'une autre manière. On observe que, pour tout déplacement compatible avec la solidité, la somme des travaux des forces de liaison est nulle ; en effet, ces forces sont intérieures et se réduisent à des actions mutuelles ; soient f une force intérieure, l la distance des points entre lesquels elle agit : on a vu que le travail correspondant à cette force est (p. 75) $\pm f\delta l$. Mais, dans les solides, $\delta l = 0$, puisque les équations de liaison sont de la forme $l = \text{const.}$; donc $\pm f\delta l = 0$, et, par suite, les travaux des forces de liaison (qui, ici, sont les forces intérieures) sont nuls ; soient donc X_1, Y_1, Z_1, $X'_1, \ldots$ les composantes des forces appliquées sur les points dont les coordonnés sont $x_1, y_1, z_1, x'_1, \ldots$; on devra avoir (p. 64)

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0;$$

pour tout déplacement compatible avec la solidité, on peut prendre

$$\delta x_1 = \delta x_2, \ldots \quad \text{et} \quad \delta y_1 = 0,\ \delta y_2 = 0, \ldots,\ \delta z_1 = 0,\ \delta z_2 = 0, \ldots,$$

ce qui revient à donner au système un mouvement de translation parallèle à l'axe des x ; la formule précédente se réduit alors à $\Sigma X = 0$, et l'on trouve de la même manière $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$.

On peut aussi prendre $\delta z = y\delta\alpha$, $\delta y = -z\delta\alpha$, $\delta x = 0$, ce qui revient à donner un mouvement de rotation autour de l'axe des x (*), et l'on a $\Sigma(Zy - Yz) = 0$; on aurait de même $\Sigma(Xz - Zx) = 0$, $\Sigma(Yx - Xy) = 0$.

On retrouve ainsi les mêmes conditions que tout à l'heure (58); il reste à prouver qu'elles sont suffisantes, car nous n'avons donné qu'un nombre restreint de déplacements. Si nous exprimons que trois points du système sont en équilibre, ou si l'on veut en repos, tous les autres le seront aussi. Or, pour exprimer que trois points du solide sont en repos, il suffit d'exprimer : 1° que l'un des points est fixe, ce qui exige trois équations ($x =$ const., $y =$ const., $z =$ const., par exemple); 2° que deux des coordonnées d'un second point sont constantes, car la fixité du premier point assujettit le second à se trouver sur une sphère, ce qui fournit deux équations; 3° qu'une seule coordonnée du troisième point est constante, car la fixité des deux premiers points l'oblige à se trouver sur un cercle déterminé, ce qui fournit encore une équation. Donc six équations suffiront pour assurer l'équilibre.

VIII. — Méthodes de Lagrange pour trouver les conditions d'équilibre d'un système.

75. Le théorème du travail virtuel fournit deux méthodes pour trouver les conditions d'équilibre des systèmes; nous allons les étudier successivement.

1° Méthode des multiplicateurs. — Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système; X, Y, Z les projections sur les axes de la force qui le solli-

(*) En effet, désignant par r la distance du point (x, y, z) à l'axe des x, et par α l'angle que fait le rayon r avec l'axe des y, nous aurons $y = r\cos\alpha$ et $z = r\sin\alpha$; par suite, en faisant tourner le système de l'angle $\delta\alpha$, on aura $\delta x = 0$, $\delta y = -r\sin\alpha\,\delta\alpha$ ou $-z\,\delta\alpha$, et $\delta z = r\cos\alpha\,\delta\alpha$ ou $y\,\delta\alpha$. C. Q. F. D.

cite; soient enfin

$$(1) \qquad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots, \quad L_k = 0$$

les équations de liaison. Si l'on se rappelle l'expression que nous avons donnée, p. 64, du travail d'une force, le théorème du travail virtuel fournit la relation

$$(2) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0;$$

où δx, δy,... désignent des déplacements quelconques compatibles avec les liaisons, c'est-à-dire (p. 79) satisfaisant aux équations :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum\left(\frac{dL_1}{dx}\delta x + \frac{dL_1}{dy}\delta y + \frac{dL_1}{dz}\delta z\right) = 0, \\ \sum\left(\frac{dL_2}{dx}\delta x + \frac{dL_2}{dy}\delta y + \frac{dL_2}{dz}\delta z\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Soit n le nombre total des points du système. Des équations (3), en nombre k, on peut tirer les valeurs de k variations en fonction des $3n - k$ autres, et porter ces valeurs dans (2); les $3n - k$ variations en question étant arbitraires, on pourra égaler leurs coefficients à zéro. On obtiendra ainsi $3n - k$ équations, qui seront celles de l'équilibre, puisqu'elles équivaudront à (2) et à (3). La position d'équilibre sera alors donnée en joignant aux $3n - k$ équations d'équilibre les k équations (1); on aura ainsi $3n$ équations pour déterminer les $3n$ coordonnées des points du système quand on connaîtra X, Y, Z,....

On peut faire l'élimination des variations par la méthode des multiplicateurs. A cet effet, multiplions la première équation (3) par λ_1, la seconde par λ_2,..., et ajoutons ces équations avec (2), il vient

$$(4) \sum\left[\left(X + \lambda_1\frac{dL_1}{dx} + \lambda_2\frac{dL_2}{dx} + \ldots + \lambda_k\frac{dL_k}{dx}\right)\delta x + \ldots\right] = 0$$

On peut profiter de l'indétermination des k quantités λ pour écrire arbitrairement k relations; nous pourrons donc annuler les coefficients de k variations: il reste alors $3n - k$ variations dans la formule (2); ces autres variations étant arbitraires, leurs coefficients doivent être identiquement nuls. On obtient donc les $3n$ équations suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} X_1 + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_1} + \ldots = 0, \\ X_2 + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_2} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_2} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les k premières déterminent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. En portant les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ dans les autres, on obtient les équations de l'équilibre; au lieu de procéder ainsi, on peut se contenter d'éliminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ d'une manière quelconque entre les formules (5).

Les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (et c'est un fait bien remarquable) peuvent servir à calculer les forces de liaison; en effet, désignons par P, Q, R les projections de la force de liaison qui agit sur le point (x, y, z). En introduisant les forces P, Q, R dans le calcul, on peut supposer le système libre, et l'on a, pour exprimer que les n points du système sont en équilibre, les $3n$ équations

$$\begin{gathered} X_1 + P_1 = 0, \\ X_2 + P_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

En comparant ces équations avec (5), on voit que

$$(6)\quad \begin{cases} P_1 = \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_1} + \lambda_3 \dfrac{dL_3}{dx_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On voit ainsi que $\lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1}$ est la projection, sur l'axe des x, de la force de liaison qui agit sur le point x_1 et qui émane de la liaison L_1; en effet, la suppression de cette liaison ferait disparaître de l'équation (6) le terme $\lambda_1 \frac{dL_1}{dx}$, que l'on peut regarder comme la projection d'une force sur l'axe des x.

76. 2° Méthode du changement de variables. — On peut, si l'on ne tient pas à calculer les forces de liaison, employer une méthode quelquefois préférable à la précédente; on calculera le travail en fonction de $3n-k$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}$, telles que ces variables ne soient liées entre elles par aucune relation. L'équation du travail se présentera alors sous la forme

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \ldots = 0;$$

comme $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ sont arbitraires, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0, \ldots$ seront les équations de l'équilibre. $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ doivent pouvoir se calculer en fonction de $q_1, q_2, \ldots$, en tenant compte des relations (1), qui réduisent ces variables à $3n-k$. Si l'on commence par établir $3n-k$ relations de la forme

$$f(q_1, q_2, \ldots, \quad x_1, x_2, \ldots, \quad y_1, y_2, \ldots, \quad z_1, z_2, \ldots) = 0,$$

on pourra, en les joignant à (1), exprimer $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ en fonction de $q_1, q_2 \ldots$, et ces valeurs, remises dans (1), satisferont identiquement à (1). On a donc une infinité de moyens de choisir les fonctions q.

CHAPITRE III.

ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES.

I. — Notions préliminaires.

77. Bien que le solide parfait, tel que nous l'avons défini en Mécanique rationnelle, soit un *être de raison*, il est utile d'étudier les conditions de son équilibre : d'abord, parce qu'un grand nombre de corps naturels ont une constitution qui les rapproche beaucoup des solides de la Mécanique rationnelle; ensuite, parce que, dans un grand nombre de cas, comme nous le verrons, on peut appliquer à des corps quelconques les équations de l'équilibre des solides.

On pourrait déduire du principe des vitesses virtuelles toute la statique. Plusieurs motifs nous empêcheront de le faire : en premier lieu, cette marche n'a pas été celle des inventeurs, qui ont introduit dans la science un grand nombre de mots encore usités aujourd'hui et qu'il est indispensable de connaître pour pouvoir lire leurs Mémoires originaux; en second lieu, le principe des vitesses virtuelles peut certainement servir à résoudre toutes les questions d'équilibre, mais il a l'inconvénient d'être souvent d'une application difficile et laborieuse; enfin il est bon d'étudier la science sous tous ses divers aspects, et, en procédant ainsi, l'on rencontre des théories intéressantes qui, concourant par des voies toutes différentes vers un même but, donnent à l'esprit une satisfaction que l'on est toujours heureux d'éprouver dans l'étude des sciences physicomathématiques. Nous démontrerons d'abord un principe qui est un corollaire du principe des vitesses virtuelles.

78. Principe. — *Pour que deux forces appliquées à un solide se fassent équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient égales et directement opposées.*

Ce principe est une conséquence des six équations de l'équilibre d'un solide. En effet, soient P, Q, R et P', Q', R' les composantes des forces en question estimées suivant trois axes rectangulaires; x, y, z et x', y', z' les coordonnées de leurs points d'application, les équations de l'équilibre sont

$$P + P' = 0, \quad Q + Q' = 0, \quad R + R' = 0,$$

$$\begin{aligned} Ry - Qz + R'y' - Q'z' &= 0, \\ Pz - Rx + P'z' - R'x' &= 0, \\ Qx - Py + Q'x' - P'y' &= 0. \end{aligned}$$

Les trois premières équations montrent que la force (P, Q, R) est égale et de direction opposée à (P', Q', R'). Quant aux trois dernières, elles peuvent s'écrire, en tenant compte des premières,

$$\frac{x - x'}{P} = \frac{y - y'}{Q} = \frac{z - z'}{R};$$

ce qui prouve que la droite qui joint les points (x, y, z) et (x', y', z') a la même direction que (P, Q, R).

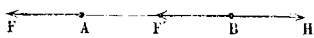
C. Q. F. D.

Le principe que nous venons de démontrer est souvent admis comme un axiome; nous avons préféré en donner une démonstration directe, et réduire, par cela même, le nombre des principes fondamentaux de la Mécanique.

79. Théorème. — *Une force appliquée à un corps solide peut être transportée en un point quelconque de sa direction, sans que l'état d'équilibre ou de mouvement du solide soit altéré.*

Soit, en effet, une force F (*fig.* 19) appliquée à un point A d'un solide; soit B un point du solide situé sur

Fig. 19.



la direction FA, ou, ce qui revient au même, un point invariablement lié à ce solide; appliquons en B deux forces BF′ et BH égales entre elles et à F, mais de directions opposées, l'état du système ne sera pas changé. Or les forces AF et BH se font équilibre; on peut donc les supprimer sans troubler l'état du système; il ne reste plus alors que la force BF′, qui produit, par suite, le même effet que AF.

Il ne faut pas se tromper sur le sens du théorème précédent. Nous venons simplement de prouver que l'état de repos ou de mouvement du système n'est pas altéré par la translation de la force F; mais les forces intérieures seront en général modifiées par cette translation; en sorte qu'au point de vue de la distribution des efforts intérieurs les forces F et F′ ne sont pas équivalentes.

Deux systèmes de forces appliqués au même corps sont dits *équivalents* lorsque la substitution de l'un des systèmes à l'autre n'altère pas l'état de repos ou de mouvement du corps. On peut donc dire que

Deux forces agissant dans le même sens et suivant la même droite sur un corps solide sont équivalentes.

80. Si nous admettons encore comme évident *à priori* ce principe, qui est une conclusion immédiate du parallélogramme des forces :

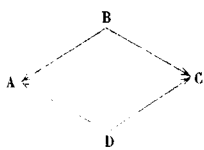
Les forces se composent et se décomposent d'après des lois géométriques qui sont indépendantes de la forme des corps auxquels elles sont appliquées et de leur nature, mais qui dépendent uniquement des grandeurs de ces forces et de leurs positions relatives.

Nous pourrons faire toute la statique du point matériel et des solides sans faire appel aux considérations de mouvement, sans même nous appuyer sur la définition de la force. Nous allons commencer par démontrer la règle du parallélogramme.

II. — Démonstration nouvelle du parallélogramme des forces.

Lemme. — *Un losange rigide* ABCD (*fig.* 20) *est en équilibre sous l'influence de quatre forces égales appliquées suivant* DA, DC, BA *et* BC.

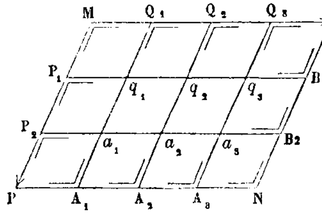
Fig. 20.



En effet, si nous admettons que la résultante de deux forces est indépendante de la nature du corps solide auquel ces forces sont appliquées et ne dépend que de la grandeur et de la position de ces forces, la résultante des forces AB et BC sera dirigée suivant BD; celle des forces DA et DC sera dirigée suivant DB, et sera égale à la première. Ces deux résultantes se feront donc équilibre.

Ceci posé, considérons deux forces commensurables MP et MQ (*fig.* 21), appliquées à un même point matériel; construisons

Fig. 21.



le parallélogramme MPNQ sur MP et MQ; supposons les forces MQ et MP dans le rapport $\frac{4}{3}$. Soit alors

$$MP_1 = P_1P_2 = P_2P = MQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q;$$

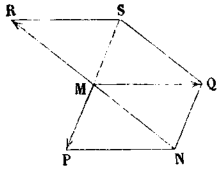
par les points Q_1, Q_2, Q_3 menons des parallèles Q_1A_1, Q_2A_2, Q_3A_3 à MP, et par les points P_1, P_2 menons P_1B_1, P_2B_2 parallèles à MQ; solidifions le parallélogramme MPNQ. Je dis que si l'on applique au parallélogramme deux nouvelles forces égales à NP et NQ, il sera en équilibre.

Pour le démontrer, nous pouvons observer : 1° au lieu des forces MP, MQ, NP, NQ, on peut appliquer les forces MP_1, P_1P_2, ... en M, P_1, ...; les forces MQ_1, Q_1Q_2, ... en M, Q_1, ...; les forces NB_2, B_2B_1, ... en N, B_2, ...; enfin les forces NA_3 ... en N, A_3, ...; car ces forces peuvent être censées appliquées en un point quelconque de leur direction; prenons les forces MP, P_1P_2, P_2P, par exemple : en les supposant appliquées en M, elles donneront par définition une force triple, c'est-à-dire précisément MP; 2° on peut appliquer encore au système les forces égales et directement opposées Q_1q_1 et A_1a_1, Q_2q_2 et A_2a_2, ..., B_1q_3 et P_1q_1, ...

En vertu de notre lemme, toutes les forces que l'on vient de considérer vont se faire équilibre sur les losanges MPA_3Q_3, $P_1PA_2Q_2$, $P_2PA_1a_1$, puis Q_1A_1NQ, $Q_2a_2B_2Q$, $Q_3q_3B_1Q$. Donc les forces MP, MQ, NP, NQ se font équilibre; par suite, la résultante de MP et MQ est égale et directement opposée à celle de NQ et NP; donc elle passe par le point N. Ainsi :

La résultante de deux forces appliquées au même point est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces. Je dis maintenant qu'elle est égale à cette diagonale. En effet (*fig.* 22), si en M et en sens inverse de MN on applique une

Fig. 22.



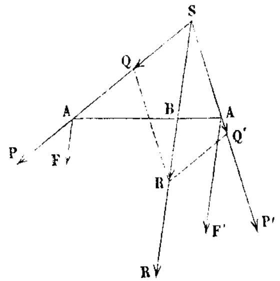
force MR égale à la résultante inconnue, les forces MQ, MP, MR seront en équilibre : donc MP est égale et directement opposée à la résultante de MR et MQ, c'est-à-dire dirigée suivant la diagonale du parallélogramme MRSQ construit sur ces deux forces. Les triangles RMS, MPN sont alors égaux (RS = MQ = PN, et les angles sont égaux, RMS = PMN comme opposés par le sommet, RSM, MPN comme alternes internes) : donc MR = MN, et par suite le théorème du parallélogramme des forces se trouve démontré.

III. — Composition des forces parallèles.

81. Théorème I. — *Deux forces parallèles et de même sens appliquées à un solide ont toujours une résultante égale à leur somme et qui leur est parallèle; cette résultante partage la droite des points d'application de ses composantes en deux segments qui sont en raison inverse de ces composantes.*

En effet, soient AF et A'F' (*fig.* 23) deux forces parallèles et de même sens appliquées à un solide quelconque. Au lieu de ces deux forces, considérons deux forces concourantes en S, AP et A'P' situées dans leur plan; ces deux forces peuvent être transportées en SQ et SQ' sur leur propre direction sans que l'état du système soit troublé; mais alors elles se composent en une seule SR, que l'on obtient par la règle du parallélogramme; SR rencontre AA' en B et peut, si l'on veut, être censée appli-

Fig. 23.



quée en B; mais, si du point B on abaisse des perpendiculaires p et p' sur SQ et SQ' respectivement, on aura, en vertu d'une propriété bien connue des parallélogrammes (p. 25),

$$\frac{SQ}{SQ'} = \frac{p'}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{p'}{p}, \tag{1}$$

et puis

$$\overline{SR}^2 = \overline{SQ}^2 + \overline{SQ'}^2 + 2\overline{SQ}.\overline{SQ'}\cos QSQ',$$

ou bien

$$\overline{SR}^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\cos(P, P'). \tag{2}$$

Imaginons maintenant que le point S s'éloigne indéfiniment, de telle sorte que P et P' viennent se confondre avec F et F'; soient ensuite $P = F$, $P' = F'$, la formule (1) aura toujours lieu; quant à la formule (2), elle deviendra

$$\overline{SR}^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' = (F + F')^2.$$

Donc la valeur limite de SR est $F + F'$, et la position limite de B partage AA' en deux segments tels que

$$\frac{F}{F'} = \frac{BA'}{BA};$$

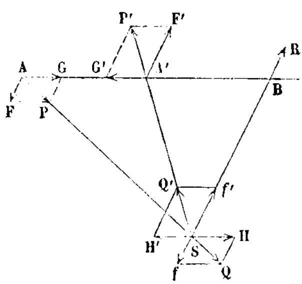
car à la limite il est facile de voir que les perpendiculaires p et p' abaissées du point B sur F et F' sont dans le même rapport que BA et BA'; de plus, SR devient parallèle à F et F'. Le théorème est donc démontré.

82. Théorème II. — *Deux forces inégales, mais parallèles et de sens contraire, appliquées à un solide, ont une résultante égale à leur différence. Cette résultante divise la droite qui passe par leurs points d'application, en deux segments qui sont en raison inverse des composantes. Mais elle est située en dehors de l'intervalle compris entre les composantes; enfin elle est de même sens que la plus grande des composantes.*

Nous pourrions adopter le même mode de démonstration que tout à l'heure; mais nous pouvons aussi procéder comme il suit :

Soient AF et $A'F'$ (*fig.* 24) deux forces parallèles et

Fig. 24.



de sens contraire; appliquons en A et A' deux forces AG, $A'G'$ égales et de sens contraires, l'état du système n'est pas changé. Soient AP la résultante de F et G, A′P′ celle de F′ et G′, ces forces ne sont pas parallèles si F et F′ ne sont pas égales. On peut alors supposer AP et A′P′ appliquées en leur point de concours S, suivant SQ et SQ′; décomposons maintenant SQ en deux forces $SH = AG$, $Sf = AF$ parallèles respectivement à AG et AF; décomposons également SQ′ en deux forces $SH' = A'G'$, $Sf' = A'F'$ parallèles respectivement à A′G′ et à A′F′ : mais alors SH et SH′ se détruisent, et il ne reste plus que Sf et Sf' parallèles à F et F′, et dont la résultante est $F' - F$. On a ensuite, en désignant par B le point où la résultante $F' - F$ vient rencontrer AA′,

$$\frac{A'B}{SH'} = \frac{SB}{Sf'} \quad \text{ou} \quad \frac{A'B}{SH'} = \frac{SB}{F'}.$$

On a de même

$$\frac{AB}{SH} = \frac{SB}{F},$$

et, par suite, en divisant membre à membre et en observant que $SH = SH'$,

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{F}{F'},$$

C. Q. F. D.

Remarque I. — Les deux théorèmes précédents auraient pu se démontrer analytiquement en partant des six équations de l'équilibre des solides (p. 85). Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration.

83. Corollaire. — Un nombre quelconque de forces parallèles appliquées à un solide pourront en général se réduire à une seule, que l'on obtiendra en composant d'abord les deux premières, puis leur résultante, avec la troisième, et ainsi de suite. La direction de la dernière

résultante est la même que celle des forces proposées; mais il est remarquable que son point d'application soit indépendant de la direction des composantes, et ne dépende que de leurs grandeurs relatives. En sorte que les composantes venant à tourner de manière à rester parallèles entre elles, et en conservant des intensités proportionnelles, la résultante passe par un point fixe, que l'on appelle *centre des forces parallèles*.

Remarque II. — La résultante est unique, c'est-à-dire que l'on arrive toujours au même résultat, quel que soit l'ordre dans lequel s'effectue la composition; il est facile de voir en effet que deux forces F, F' qui ne sont pas appliquées suivant la même droite ne peuvent pas être équivalentes. En effet, si F et F' étaient équivalentes, F ferait équilibre à une force P égale et directement opposée à F', ce qui est impossible en vertu de notre principe fondamental (p. 91).

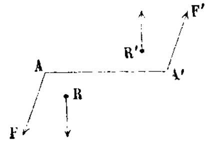
84. Remarque III. — Dans la démonstration du théorème II, nous avons écarté le cas où les forces F et F' seraient égales; effectivement la démonstration ne s'applique plus à ce cas, et si on le considère comme un cas limite du cas général, on arrive à ce résultat illusoire, qu'il existe une résultante nulle située à l'infini.

Il est facile de voir que :

85. Théorème III. — *Deux forces égales parallèles et de sens contraire, appliquées à un solide, n'ont pas de résultante.*

Première démonstration. — Si l'on admet que la composition des forces soit indépendante de la forme du solide auquel ces forces sont appliquées, ce qui n'est pas évident, il est facile de démontrer le théorème précédent. En effet, si les forces AF et $A'F'$ (*fig.* 25) égales, parallèles et de sens contraire avaient une résultante R, elles en auraient forcément une seconde R'; pour s'en assurer, il suffit de faire tourner le système AF, A'F' autour du milieu de AA'

Fig. 25.



et dans son plan, de manière à faire coïncider F avec F', et F' avec F, R prend alors la position R' et serait la seconde résultante. Ceci n'est pas possible, car R et R' ne peuvent être équivalentes, n'étant pas appliquées suivant la même droite. On pourrait objecter à ce raisonnement que la résultante R pourrait passer par le milieu de AA' perpendiculairement à AA' et au plan FAA'F'; mais on peut admettre que, par raison de symétrie, la force résultante pourrait être choisie en sens inverse de R, et l'on tombe encore sur deux résultantes qui ne sauraient être équivalentes.

On voit combien le raisonnement qui précède est vicieux, puisqu'il est fondé sur un nouveau principe. La marche que nous avons suivie dans l'étude de la Mécanique nous permet de démontrer le théorème précédent avec la plus grande facilité et sans principe nouveau. En effet :

Deuxième démonstration. — Si les forces F et F' avaient une résultante R, elles feraient équilibre à une force P égale et directement opposée à R. Les forces F, F', P se faisant équilibre, la somme de leurs projections sur un axe quelconque devrait être nulle (p. 91); mais la projection de F et celle de F' ont une somme nulle : donc la projection de P devrait être nulle; donc P et par suite R seraient nuls. Ainsi les forces F et F' n'ont pas de résultante; on sait du reste qu'elles ne peuvent pas se faire équilibre.

L'ensemble de deux forces égales parallèles et de sens contraire forment ce que l'on appelle un *couple*. La plus courte distance des deux forces porte le nom de *bras de levier* du couple.

IV. — De l'équivalence des couples.

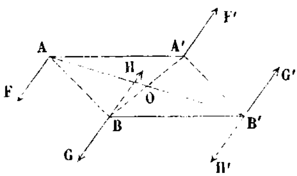
86. On appelle *moment d'un couple* la somme des moments des forces de ce couple, pris par rapport à un axe perpendiculaire au plan du couple et passant par le milieu du bras de levier.

En d'autres termes, le moment d'un couple est le produit du bras de levier de ce couple par l'une des forces du couple.

87. Théorème I. — *L'effet d'un couple ne change pas lorsqu'on le transporte parallèlement à lui-même.*

En effet, transportons le couple AF A'F' (*fig.* 26),

Fig. 26.

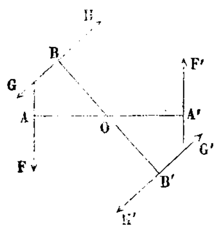


parallèlement à lui-même, en BGB'G'; en B et en B' appliquons deux forces BH et B'H' égales respectivement à BG et B'G', mais de sens contraire, les couples BG B'G' et BH B'H' se font équilibre, en sorte que leur introduction ne modifie pas l'état du système auquel AF A'F' est appliqué. Or les forces AF et B'H' se composent en une force unique égale à 2 AF et appliquée au milieu de AB' (p. 96), c'est-à-dire au centre O du parallélogramme AB A'B'; de même A'F' et BH se composent en une force unique égale aussi à 2 AF et appliquée en O, Mais cette résultante 2 AF est de sens contraire à celle que nous avons trouvée tout à l'heure. Donc les forces AF, A′F′, BH, B′H′ se détruisent mutuellement; il ne reste plus alors que les forces BG, B′G′, équivalentes par conséquent à AF et à A′F′. C. Q. F. D.

88. Théorème II. — *L'effet d'un couple n'est pas changé quand on le transporte d'une manière quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord considérer le couple AF A′F′ (*fig.* 27), nous le ferons

Fig. 27.



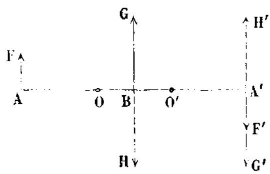
tourner autour du milieu de son bras de levier, de manière à l'amener dans la position BG B′G′, sans toutefois lui faire quitter son plan primitif. Si nous appliquons en B et en B′ deux forces BH et B′H′ égales à BG et B′G′, mais de sens contraire, l'introduction des forces BG, B′G′, BH, B′H′ ne modifiera pas l'effet du couple AF A′F′. Or AF et BH peuvent se composer en une force unique par la règle du parallélogramme; de même B′H′ et A′F′ se composeront en une force unique; les deux résultantes auxquelles on parvient ainsi sont évidemment de sens contraire et passent toutes deux par le point O : elles se détruisent donc; il ne reste plus alors que le couple BG B′G′ équivalent par suite à AF A′F′.

Mais l'effet du couple BG B′G′ ne sera pas altéré si on le transporte parallèlement à lui-même. Ceci revient à dire que l'effet de $AFA'F'$ n'est pas modifié quand on fait tourner ce couple et qu'on le transporte ensuite parallèlement à lui-même, ou bien encore : l'effet d'un couple n'est pas changé quand on le transporte d'une manière quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle.

89. Théorème III. — *Deux couples dont les plans sont parallèles et dont les moments sont égaux forment deux systèmes de forces équivalentes.*

En effet, on peut supposer que les deux couples aient leurs forces parallèles, leurs bras de levier en ligne droite et un point d'application commun A (*fig.* 28); car on

Fig. 28.



peut toujours déplacer l'un des couples, de manière à lui faire occuper, par rapport à l'autre, la position dont nous venons de parler, sans que son effet soit changé. Soient alors $AFA'F'$ et $BGA'G'$ les deux couples en question; appliquons en B et en A' deux forces BH et A'H' égales et directement opposées à BG et à A'G', l'effet du couple $BGA'G'$ sera détruit, en sorte que le système $AFA'F'$ est équivalent au système $BGA'G'$, $BHA'H'$, $AFA'F'$.

Mais les forces A'H' et AF se composent en une seule égale à leur somme S, appliquée en un point O tel que

$$(1)\qquad \frac{OA}{OA'} = \frac{A'H'}{AF} \quad \text{ou que} \quad \frac{OA'}{AA'} = \frac{AF}{S}.$$

Mais BH et A′F′ se composent en une seule force appliquée en O′ égale à leur somme S et telle que

$$(2) \qquad \frac{O'B}{O'A'} = \frac{A'F'}{BH} \quad \text{ou que} \quad \frac{O'A'}{BA'} = \frac{BH}{S}.$$

Des formules (1) et (2), on tire

$$(3) \qquad OA' = \frac{1}{S}\,AF.AA', \quad O'A' = \frac{1}{S}\,BA'.BH;$$

mais, par hypothèse, les couples AF A′F′ et BH A′H′ ont des moments égaux; donc

$$AF.AA' = BA'.BH.$$

Donc les formules (3) donnent $OA' = O'A'$; par suite les points O et O′ coïncident, et les deux forces appliquées en O′, toutes deux égales à S et de sens contraire, se détruisent; le système de forces considéré se réduit donc à BG A′G′, ce qui prouve l'équivalence des couples AFA′F′ et BG A′G′. C. Q. F. D.

V. — Composition des couples.

90. D'après ce qui précède, l'effet d'un couple ne dépend absolument que de son plan et de son moment. De là une manière de comprendre sous une même représentation géométrique tous les couples capables de produire le même effet.

Nous représenterons, avec Poinsot, un couple par une droite perpendiculaire à son plan et dont la longueur sera égale à son moment; nous donnerons enfin à cette droite un sens (qui déterminera le sens des forces du couple). Ce sens devra être tel, qu'un observateur ayant sa tête à l'extrémité de la droite et ses pieds à l'origine voie le bras de levier du couple tourner dans le sens direct (celui des aiguilles d'une montre ordinairement) lorsqu'on fixe le milieu de ce bras.

La droite qui représente un couple porte aussi le nom d'*axe du couple*.

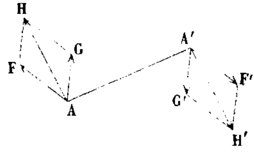
91. THÉORÈME I. — *Deux couples dont les axes sont parallèles se composent en un seul, dont l'axe est la somme algébrique des axes des couples composants.*

En effet, si deux couples ont des axes parallèles, ils peuvent être considérés comme situés dans le même plan; on peut même leur donner le même bras de levier, mais alors les forces de ces couples s'ajoutent algébriquement, comme leurs moments. Le théorème est donc démontré.

92. THÉORÈME II. — *Deux couples appliqués à un même solide se composent en un seul, dont l'axe est la résultante des axes des couples composants.*

Soit AA′ (*fig.* 29) l'intersection des plans des couples. On peut donner à ces couples le même bras de levier AA′

Fig. 29.



et même prendre ce bras de lévier égal à l'unité; dans ce cas, les axes des couples seront représentés par des droites égales à leurs forces respectives. Soient AFA′F′ et AGA′G′ les couples en question. En composant les forces AF, AG d'une part et A′F′, A′G′ de l'autre, on obtient un couple AH A′H′. Si nous faisons tourner la figure AFHG de 90 degrés dans son plan, les droites AF, AG, AH deviendront respectivement les axes des couples composants et résultants; mais AH ne cessera pas d'être la diagonale du parallélogramme FHGA. Le théorème est donc démontré.

93. Théorème III. — *Un nombre quelconque de couples se compose toujours en un seul, dont l'axe est la résultante des axes des couples composants.*

Réciproquement, si l'on se donne un couple quelconque, on pourra le décomposer en plusieurs autres, et cela d'une infinité de manières.

94. Soient un couple quelconque; λ, μ, ν les angles que fait son axe avec trois axes coordonnés rectangulaires: nous désignerons son moment par G. Soient X, Y, Z et $-$X, $-$Y, $-$Z les projections des forces qui constituent ce couple; x, y, z et x', y', z' les coordonnées de de leurs points d'application. La somme des moments des forces du couple par rapport à l'axe des x sera

$$Zy - Yz - Zy' + Yz',$$

ou bien

$$Z(y-y') - Y(z-z').$$

D'autre part, on a

$$(1)\quad G = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Mais, si l'on désigne par α, β, γ les angles que le bras de levier fait avec les axes et par p, q, r les angles que la force (X, Y, Z) du couple fait avec les axes, on aura, d'après une formule connue de Géométrie analytique (p. 37),

$$(2)\qquad \cos\lambda = \cos r\cos\beta - \cos q\cos\gamma,$$

et, par suite, en multipliant (1) et (2) membre à membre,

$$G\cos\lambda = Z(y - y') - Y(z - z'). \tag{3}$$

Pour que cette formule soit exacte, il faut que les directions (α, β, γ), (p, q, r) et (λ, μ, ν) puissent coïncider avec les directions des axes par une rotation convenablement effectuée. Or c'est ce qui a précisement lieu, car, si l'on fait coïncider G avec l'axe des x et le bras de levier avec l'axe des y, de telle sorte que le milieu tombe à l'origine et que y soit positif, la direction de la force positive Z sera celle de l'axe des z.

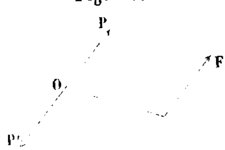
La formule (3) est l'expression analytique du théorème suivant :

95. Théorème IV. — *La somme des moments des forces d'un couple pris par rapport à une droite quelconque est égale à la projection de l'axe du couple sur cette droite.*

VI. — Composition générale des forces.

96. Théorème I. — *Un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide peut toujours se réduire d'une infinité de manières à une force unique et à un couple.*

Fig. 30.



En effet, soient O (*fig.* 30) un point pris arbitrairement et invariablement lié au solide, F une force quelconque appliquée au solide par le point O; on peut faire passer deux forces P, P' égales et parallèles à F, mais directement opposées l'une à l'autre. La force F peut donc être remplacée par un couple P', F et par une force OP égale à F et appliquée en O. En opérant de même sur chacune des forces du système, on obtiendra facilement un certain nombre de couples et un certain nombre de forces toutes appliquées en G. Les couples se composeront en un seul, et les forces en une seule appliquée en O. Comme le point O est arbitraire, il y aura une infinité de manières d'opérer la décomposition.

Remarque. — De quelque manière que l'on procède, la force unique à laquelle on arrive est la résultante de toutes les forces du système transportées en O; sa direction est donc déterminée. Nous allons maintenant prouver que l'on peut choisir le point O, de telle sorte que l'axe du couple résultant lui soit parallèle (*).

En effet, décomposons ce couple en deux autres, l'un normal, l'autre parallèle à la résultante. Le couple normal peut être placé de telle sorte que ses forces soient parallèles à la résultante; mais alors ses forces se composeront avec la résultante pour donner lieu à une force unique parallèle à l'autre couple.

Il est facile de voir que cette décomposition en une force et en un couple parallèle à la force ne peut être effectuée que d'une seule manière. En effet, si l'on transporte la résultante parallèlement à elle-même (nous avons vu que sa direction est déterminée), il faudra joindre au système un couple normal qui, se composant avec le couple parallèle, changera forcément la direction du couple résultant. Donc :

(*) Dorénavant, quand nous parlerons de la direction, de la grandeur, de la projection des composantes d'un couple, il faudra sous-entendre qu'il s'agit, non du couple lui-même, mais de son axe.

97. Théorème II. — *Un système quelconque de forces peut toujours se ramener à une force unique et à un couple parallèle à cette force.*

La force unique que l'on obtient dans ce cas porte le nom de *résultante de translation*; sa direction est l'*axe central du système de forces*; le couple unique auquel on arrive est ce qu'on appelle le *couple minimum*. Et, en effet, nous avons vu tout à l'heure que le couple obtenu dans le cas général est la résultante du couple dit *minimum* et d'un couple normal.

Le couple minimum a pour expression $G\cos i$, G désignant le couple résultant correspondant à un point O quelconque et i désignant l'angle que fait le couple résultant avec la résultante de translation.

98. Théorème III. — *Un système quelconque de forces appliquées à un solide peut toujours se ramener à deux forces uniques passant par deux points, dont l'un peut être choisi à volonté.*

En effet, nous avons vu que le système des forces données pouvait se ramener à une force R passant par un point donné O et à un couple. Or on peut transporter le couple parallèlement à lui-même jusqu'à ce que l'une de ses forces F passe par le point O. Les forces R et F se composeront alors en une seule, passant par le point donné O, et il restera l'autre force du couple.

VI. — Équations générales de l'équilibre et détermination analytique de la résultante d'un système de forces et du couple résultant.

99. Considérons un système de forces appliquées à un solide. Soient X, Y, Z les composantes d'une force quel-

conque du système estimées suivant trois axes de coordonnées rectangulaires ; on peut transporter la force (X, Y, Z) à l'origine des coordonnées à la condition d'adjoindre au système un couple dont les forces se composeront de la force (X, Y, Z) et d'une force égale, mais de sens contraire, appliquée à l'origine. Soient L, M, N les composantes de ce couple.

La résultante de toutes les forces transportées à l'origine aura pour projections sur ces axes coordonnés ΣX, ΣY, ΣZ; si l'on désigne ces projections par P, Q, R, on aura donc

$$(1) \qquad P = \Sigma X, \quad Q = \Sigma Y, \quad R = \Sigma Z.$$

Le couple résultant aura pour composantes ΣL, ΣM, ΣN; en sorte que, si l'on désigne ces composantes par U, V, W, on aura

$$(2) \qquad U = \Sigma L, \quad V = \Sigma M, \quad W = \Sigma N.$$

Or, d'après le théorème IV du paragraphe V (p. 107), L désigne la somme des moments des forces du couple (L, M, N) pris par rapport à l'axe des x; or l'une de ces forces est précisément la force (X, Y, Z); l'autre passe par l'origine, son moment est nul; donc L représente, si l'on veut, le moment de la force (X, Y, Z) pris par rapport à l'axe des x. On peut donc, en vertu des équations (1) et (2), énoncer le théorème suivant :

100. Théorème I. — 1° *La projection de la résultante d'un système de forces relative à un point* O *sur un axe quelconque est égale à la somme des projections de toutes les forces du système sur cet axe;* 2° *la projection du couple résultant sur un axe quelconque qui passe par le point* O *est égale à la somme des moments des forces du système pris par rapport à cet axe.*

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces qui agissent sur le système soit nulle et que le couple résultant soit nul; car une force ne peut jamais faire équilibre à un couple. Les équations de l'équilibre sont donc

$$P = 0,\quad Q = 0,\quad R = 0,$$
$$U = 0,\quad V = 0,\quad W = 0;$$

ou bien

$$\Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0,\quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma L = 0,\quad \Sigma M = 0,\quad \Sigma N = 0.$$

Nous retrouvons ainsi, par une autre voie, les six équations de l'équilibre des corps solides.

101. Problème I. — *Calculer la résultante de translation et le couple minimum d'un système de forces.*

Conservons toujours les mêmes notations; mais, au lieu de transporter les forces X, Y, Z à l'origine des coordonnées, transportons-les au point dont les coordonnées sont a, b, c. Les projections P, Q, R de la résultante seront encore ΣX, ΣY, ΣZ, et l'on aura toujours

$$(1)\qquad P = \Sigma X,\quad Q = \Sigma Y,\quad R = \Sigma Z.$$

Pour calculer les composantes du couple résultant, transportons l'origine des coordonnées au point (a, b, c). Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'application de la force (X, Y, Z) prises par rapport aux nouveaux axes; x, y, z ses anciennes coordonnées. On aura, en désignant toujours par U, V, W les projections du couple résultant,

$$U = \Sigma(Zy_1 - Yz_1)\quad V = \Sigma(Xz_1 - Zx_1),\quad W = \Sigma(Yx_1 - Xy_1),$$

ou bien, en observant que $x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$, $z_1 = z - c$,

$$U = \Sigma(Zy - Yz) - \Sigma(Zb - Yc),\quad V = \ldots,\quad W = \ldots,$$

ou bien, en désignant par L, M, N les moments de la force (X, Y, Z) pris par rapport aux anciens axes,

$$U = \Sigma L - \Sigma(Zb - Yc), \quad V = \ldots, \quad W = \ldots,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} U = \Sigma L - (bR - Qc), \\ V = \Sigma M - (cP - Ra), \\ W = \Sigma N - (aQ - Pb). \end{cases}$$

La valeur du couple minimum est $G \cos i$, G désignant le couple résultant relatif à un point quelconque (a, b, c) et i l'angle qu'il fait avec la résultante de translation. Or on a, en désignant par S la résultante de translation,

$$\cos i = \frac{U}{G}\frac{P}{S} + \frac{V}{G}\frac{Q}{S} + \frac{W}{G}\frac{R}{S},$$

et, par suite,

$$G \cos i = \frac{UP + VQ + WR}{S}.$$

En remplaçant, dans cette formule, U, V, W par leurs valeurs tirées des formules (2), on a

$$G \cos i = \frac{P\Sigma L + Q\Sigma M + R\Sigma N}{S},$$

ou, si l'on veut,

$$G \cos i = \frac{\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}}.$$

Si dans (2) on remplace U, V, W par les projections du couple minimum, les valeurs de a, b, c que l'on en déduira feront connaître le point d'application de la résultante de translation. Ces équations devront se réduire à deux, qui seront celles de l'axe central. Effectivement on a l'équation de condition

$$PU + QV + RW = P\Sigma L + Q\Sigma M + R\Sigma N.$$

102. Problème II. — *Touver les conditions pour qu'un système de forces se réduise* : 1° *à une force unique;* 2° *à un couple.*

Si l'on veut que le système de forces se réduise à une force unique, il faut exprimer que le couple résultant est nul, c'est-à-dire poser $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ dans les formules (2), ce qui donne

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \Sigma L = bR - cQ, \\ \Sigma M = cP - aR, \\ \Sigma N = aQ - bP. \end{cases}$$

Ces équations fournissent la relation suivante :

$$\text{(B)} \qquad P\Sigma L + Q\Sigma M + R\Sigma N = 0$$

lorsqu'on les ajoute après les avoir respectivement multipliées par P, Q, R. Si cette dernière relation est satisfaite, on trouvera une infinité de valeurs de a, b, c capables de satisfaire aux formules (A). Par suite, la relation (B) est la condition cherchée, les équations (A) seront les équations de la résultante, et a, b, c seront les coordonnées courantes.

Si l'on désire que le système se réduise à un couple, il faudra poser $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, c'est-à-dire exprimer que la somme des projections de toutes les forces est nulle pour un axe quelconque.

Lorsqu'un système de forces se réduit à une force résultante unique, une force égale et directement opposée à cette résultante tient le système en équilibre. Si l'on observe alors que le moment et la projection d'une force par rapport à un axe quelconque changent de signe quand cette force change de sens, on pourra énoncer le théorème suivant :

103. Théorème. — *Lorsqu'un système de forces a*

une résultante unique, la projection ou le moment de de cette résultante par rapport à un axe quelconque est la somme des projections ou des moments de ses composantes.

VIII. — Étude de divers cas dans lesquels les six équations de l'équilibre des solides peuvent se réduire a un nombre moindre.

Nous avons vu que les six équations de l'équilibre étaient nécessaires et suffisantes; mais il peut arriver que l'une ou même plusieurs d'entre elles soient identiquement satisfaites, d'après la nature du problème que l'on se propose de résoudre. Si, par exemple, toutes les forces passaient par l'origine des coordonnées, les équations des moments seraient satisfaites d'elles-mêmes.

104. Premier cas. — *Toutes les forces sont dans un même plan.* — Si toutes les forces sont comprises dans un même plan, en prenant ce plan pour plan des xy, les équations de l'équilibre se réduisent à trois. En effet, soient, comme plus haut, P la somme des projections des forces du système sur l'axe des x, Q la somme des projections sur l'axe des y, et R la somme des projections sur l'axe des z des mêmes forces; U, V, W les sommes des moments des forces pris par rapport à l'axe des x, des y et des z respectivement.

Si toutes les forces sont situées dans le plan des xy, l'équation $R = 0$ sera satisfaite d'elle-même, ainsi que $U = 0$, $V = 0$; les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre se réduiront donc à trois :

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad W = 0.$$

105. Deuxième cas. — *Les forces sont parallèles à un même plan.* — En prenant ce plan pour plan des xy, l'équation $R = o$ sera satisfaite d'elle-même, et alors les équations de l'équilibre se réduisent à

$$P = o, \quad Q = o, \quad U = o, \quad V = o, \quad W = o.$$

106. Troisième cas. — *Les forces sont parallèles à une même droite (ou perpendiculaires à un même plan).* — Ce cas est remarquable, parce qu'il se rencontre dans l'étude de la pesanteur. En prenant la droite pour axe des x, les équations $Q = o$, $R = o$, $U = o$ sont satisfaites d'elles-mêmes. Les équations de l'équilibre se réduisent alors à

$$P = o, \quad V = o, \quad W = o.$$

La condition $P = o$ exprime que les forces ont une résultante nulle; $V = o$, $W = o$ expriment que ces forces ne se réduisent pas à un couple; car si les forces se réduisaient à un couple, l'axe de ce couple serait perpendiculaire à l'axe des x, et il suffit alors d'exprimer que les projections $V = o$, $W = o$ sur l'axe des y et sur l'axe des z sont nulles.

107. Quatrième cas. — *Il existe un point fixe dans le système.* — Si l'on veut, on peut faire abstraction de la fixité du point en question; mais alors on devra remplacer cette condition de fixité, qui constitue une liaison, par une force appliquée au point fixe, et que l'on appelle la *réaction du point fixe*. Faisons passer les trois axes de coordonnées par le point fixe, et désignons par X, Y, Z les composantes de la réaction de ce point; nous devrons introduire les quantités X, Y, Z dans les équations de l'équilibre, qui deviendront

$$P + X = o, \quad Q + Y = o, \quad R + Z = o,$$
$$U = o, \quad V = o, \quad W = o;$$

les trois premières font connaître X, Y, Z, les trois dernières sont seules les équations de l'équilibre. On aurait pu arriver immédiatement à cette conclusion, en observant que les seuls déplacements compatibles avec les liaisons se réduisent à des rotations effectuées autour d'un axe passant par le point fixe, rotations qui se ramènent, comme on le sait, à trois; le théorème du travail virtuel fournissait alors immédiatement les formules $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ (p. 79).

On peut encore traiter la question d'une autre manière, réduire toutes les forces à une force unique passant par le point fixe et à un couple. La force unique est détruite par la résistance du point fixe, elle est donc égale et directement opposée à cette résistance; quant au couple, il faut et il suffit qu'il se réduise à zéro pour que l'équilibre soit assuré, ce que l'on exprime en écrivant

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

108. Cinquième cas. — *Il existe un axe fixe dans le corps.* — En prenant cet axe pour axe des x, on pourra ramener le système des forces à une force unique passant par l'origine et à trois couples situés dans les plans coordonnés; la force unique sera détruite par la fixité de l'axe, les couples situés dans les plans des xz et des xy sont également détruits par la fixité de l'axe; pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le couple situé dans le plan des yz soit nul, ou que l'on ait

$$U = 0;$$

ce sera la seule équation d'équilibre. Si le corps pouvait glisser le long de l'axe, il faudrait encore exprimer que la composante P qui sollicite le corps le long de l'axe est nulle, et l'on aurait en outre

$$P = 0.$$

On peut aussi traiter cette question en introduisant ce que l'on appelle les *réactions de l'axe ;* en effet, la fixité de l'axe sera assurée si l'on fixe deux de ses points pris à volonté. Soient X, Y, Z et X', Y', Z' les composantes des réactions de ces points, x et x_1 leurs abscisses. Les équations de l'équilibre deviennent

$$P + X + X' = o, \quad Q + Y + Y' = o, \quad R + Z + Z' = o,$$
$$U = o, \quad V - Zx - Z'x' = o, \quad W + Yx + Y'x' = o;$$

la seule condition d'équilibre est U = o, les cinq autres équations font connaître X + X', Y, Y', Z et Z'.

Les équations précédentes ne permettent pas de calculer X et X', et si au lieu de fixer deux points de l'axe on en avait fixé trois, on aurait encore eu cinq équations seulement pour déterminer les neuf composantes des réactions des points fixés. Les réactions des appuis sont-elles réellement indéterminées?

On peut répondre affirmativement à cette question en faisant observer qu'il y a une infinité de manières de choisir X et X', de manière à satisfaire aux équations de l'équilibre; l'indétermination tient à ce que la réaction des points fixes dépend de la distribution des forces à l'intérieur du corps. On peut transporter une force en un point quelconque de sa direction, sans altérer les conditions d'équilibre; mais on altère ainsi les forces intérieures dont les réactions des appuis vont dépendre. Ainsi, pour déterminer les quantités X, X', il faudrait connaître le mode de distribution des forces intérieures; or les corps solides, avons-nous dit, n'existent pas, sont des êtres de raison. L'expérience seule peut nous faire connaître la distribution et la valeur des forces intérieures dans un corps; X et X' doivent donc rester indéterminés.

Lorsque l'on considère un solide naturel, c'est-à-dire un corps élastique, on peut le supposer *rigidifié*, si nous pouvons nous exprimer ainsi et lui appliquer les six équations de l'équilibre (p. 111); mais le solide naturel différant du solide *rigide* de la Mécanique rationnelle, d'autres conditions seront nécessaires pour assurer son équilibre : ces conditions permettront alors de calculer X et X'.

109. Sixième cas. — *Le corps possède un nombre déterminé de points dans un plan fixe.* — Prenons le plan fixe pour plan des xy, si le corps n'a qu'un seul point dans le plan; on peut prendre ce point pour origine. En désignant par Z la réaction normale du plan, on aura

$$P + Z = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$
$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

La première équation fait connaître Z, les cinq autres sont celles de l'équilibre. Si l'on avait deux points du corps dans le plan, les équations générales de l'équilibre seraient, en désignant par Z et Z' les réactions de ces points, par x, y et x', y' les coordonnées des points en contact avec le plan,

$$P + Z + Z' = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$
$$U + Zy + Z'y' = 0, \quad V - Zx - Z'x' = 0, \quad W = 0.$$

On peut, si l'on veut, prendre $y = 0, y' = 0, x' = 0$, et alors les équations d'équilibre se réduisent à quatre

$$R = 0, \quad Q = 0, \quad U = 0, \quad W = 0,$$

et les deux autres équations font connaître Z et Z'. Si le corps avait trois points dans le plan fixe, on aurait toujours pour conditions de l'équilibre $Q = 0$, $R = 0$, $W = 0$; les trois équations restantes serviraient à calculer les réactions Z, Z', Z'' du plan fixe. Mais si le corps avait plus de trois points assujettis à rester sur le plan fixe, on n'aurait plus que trois équations pour déterminer quatre réactions. Nous tomberions dans une indétermination analogue à celle que nous avons rencontrée dans l'étude du cas précédent, et qui s'expliquerait de la même façon.

Remarque. — Tous les raisonnements que nous venons de faire reposent sur une hypothèse; c'est que les réactions que nous venons de considérer ne développent pas de frottements.

CHAPITRE IV.

CENTRES DE GRAVITÉ.

I. — Détermination du centre des forces parallèles.

110. Nous avons vu plus haut (p. 99) que la résultante d'un système de forces parallèles passait par un point fixe indépendant de la direction de ces forces, et que l'on appelle *centre des forces parallèles*. Voici comment on peut déterminer ce centre.

Soient F une force quelconque du système, R la résultante, α, β, γ les angles que font F et R avec trois axes rectangulaires; écrivons que le moment de R par rapport à chaque axe est égal à la somme des moments de ses composantes, nous aurons, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées du point d'application de R et par x, y, z les coordonnées du point d'application de F,

$$\begin{aligned}
R(\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta) &= \Sigma F(y\cos\gamma - z\cos\beta),\\
R(\zeta\cos\alpha - \xi\cos\gamma) &= \Sigma F(z\cos\alpha - x\cos\gamma),\\
R(\xi\cos\beta - \eta\cos\alpha) &= \Sigma E(x\cos\beta - y\cos\alpha).
\end{aligned}$$

Ces trois équations se réduisent à deux, qui représentent le lieu des points d'application de R, c'est-à-dire les équations mêmes de R. En effet, on peut les écrire ainsi

$$\frac{\xi - \frac{1}{R}\sum Fx}{\cos\alpha} = \frac{\eta - \frac{1}{R}\sum Fy}{\cos\beta} = \frac{\zeta - \frac{1}{R}\sum Fz}{\cos\gamma},$$

et l'on voit que la résultante passe par le point dont les coordonnées sont

$$\xi = \frac{1}{R}\sum Fx = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F},$$

$$\eta = \frac{1}{R}\sum Fy = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F},$$

$$\zeta = \frac{1}{R}\sum Fz = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

Le point (ξ, η, ζ) est, comme l'on voit, indépendant de la direction des forces F; il ne dépend que de leurs points d'application et de leurs grandeurs relatives. Ce point est précisément le centre des forces parallèles du système.

111. On appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de cette force par la distance du point d'application au plan. Fx représente le moment de la force F par rapport au plan des yz; $R\xi$ désigne le moment de la force R par rapport au même plan, et, comme l'on déduit des formules précédentes,

$$R\xi = \Sigma Fx,$$

on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme des moments de ses composantes, la résultante étant censée appliquée au centre des forces.*

II. — Définition du centre de gravité d'un corps.

112. La pesanteur est la cause qui met en mouvement les corps qui tombent à la surface de la terre. Nous admettrons, pour expliquer les effets de la pesanteur, que tous les corps soient composés de particules très-petites ou atomes; chacun de ces atomes renfermera un point matériel auquel se trouve appliquée une force que l'on appelle le *poids* de cet atome; la directiou de la force qui sollicite chaque atome est constante, on lui donne le nom de *verticale*.

Le *centre de gravité* d'un corps est le centre des forces parallèles ou poids qui sollicitent les atomes qui le composent, ce corps étant censé solidifié. Si l'on désigne par m la masse du point matériel auquel le poids d'un atome quelconque est appliqué, m pourra s'appeler la *masse* de l'atome. La *masse* d'un corps quelconque est la somme des masses des atomes qui le composent; son *poids* est la somme des poids de ses atomes.

Ceci posé, désignons par m la masse, et par mg le poids d'un atome pris à l'intérieur d'un corps de masse M; g est un nombre que nous supposerons le même pour tous les atomes; désignons par x, y, z les coordonnées de l'atome m, et par ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité du corps M. Les formules établies au paragraphe précédent, pour trouver le centre d'un système de forces parallèles, donneront

$$\xi = \frac{\Sigma mgx}{Mg},$$

ou bien

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \xi = \dfrac{\Sigma mx}{M} & \text{ou} & M\xi = \Sigma mx, \\ \eta = \dfrac{\Sigma my}{M} & & M\eta = \Sigma my, \\ \zeta = \dfrac{\Sigma mz}{M} & & M\zeta = \Sigma mz. \end{array} \right.$$

Voici maintenant comment on pourra, avec une exactitude suffisante pour nos besoins, déterminer le centre de gravité d'un corps naturel.

La densité d'un corps en un point déterminé est le rapport de la masse d'un très-petit volume de ce corps à ce volume, pris dans le voisinage du point considéré. Quoique le volume en question soit très-petit, il contient cependant un nombre immense d'atomes, en sorte que ses dimensions variant du simple au double par exemple, la densité ne varie pas sensiblement.

113. Si l'on considère alors un corps quelconque, si l'on désigne par ρ la densité en un point dont les coordonnées prises par rapport à trois axes rectangulaires soient x, y, z, la somme des masses des atomes contenus dans l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ sera sensiblement $\rho\,dx\,dy\,dz$; si dx, dy, dz sont suffisamment petits, la somme des produits des masses de ces atomes par leurs x sera sensiblement $\rho x\,dx\,dy\,dz$.

Il résulte de là que l'on a sensiblement

$$\Sigma m x = \int\int\int \rho x\,dx\,dy\,dz,$$
$$\Sigma m = \text{M} = \int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz;$$

et, par suite, les formules (1) donnent

$$\xi = \frac{\int\int\int \rho x\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz},$$
$$\eta = \frac{\int\int\int \rho y\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz},$$
$$\zeta = \frac{\int\int\int \rho z\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz}.$$

Lorsque ρ est constant pour tous les points d'un même corps, ce qui a lieu dans les corps dits *homogènes*, ρ disparaît, et alors les formules précédentes deviennent

$$\xi = \frac{\int\int\int x\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dx} \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{\Sigma x\,du}{u},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

du désignant l'élément de volume du corps, et *u* son volume entier.

Par analogie, les géomètres ont appelé *centre de gravité* d'un volume *u* un point (ξ, η, ζ) dont les coordonnées sont déterminées par les formules

$$\xi = \frac{\sum x\, du}{u}, \quad \eta = \frac{\sum y\, du}{u}, \quad \zeta = \frac{\sum z\, du}{u},$$

du désignant l'élément différentiel de ce volume, et x, y, z ses coordonnées. Ils ont aussi appelé *centre de gravité d'une surface* ω le point dont les coordonnées sont données par les formules

$$\xi = \frac{\sum x\, d\omega}{\omega}, \quad \eta = \frac{\sum y\, d\omega}{\omega}, \quad \zeta = \frac{\sum z\, d\omega}{\omega},$$

ou bien

$$\xi = \frac{\int\int x\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}\, dx\, dy}{\int\int\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}\, dx\, dy}, \ldots,$$

x, y z désignant les coordonnées de l'élément $d\omega$.

Le centre de gravité d'une ligne l est un point ξ, η, ζ donné par les formules

$$\xi = \frac{\sum x\, dl}{l}, \quad y = \frac{\sum y\, dl}{l}, \quad \zeta = \frac{\sum z\, dl}{l},$$

ou bien

$$\xi = \frac{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \ldots,$$

x, y, z désignant les coordonnées de l'élément dl.

Il reste à faire voir que la position du centre de gravité d'un solide géométrique est indépendante du choix des axes.

Cette proposition est presque évidente, mais enfin il ne faut pas oublier que les raisonnements qui nous y conduisent sont fondés sur des hypothèses que nous n'avons même pas encore justifiées par l'expérience, et que les vérités mathématiques doivent être établies avec la plus scrupuleuse rigueur.

114. Reprenons les formules

$$\xi = \frac{1}{u}\sum x\,du, \quad \eta = \frac{1}{u}\sum y\,du, \quad \zeta = \frac{1}{u}\sum z\,du,$$

dans lesquelles ξ, η, ζ représentent les coordonnées du centre de gravité du corps u (volume, surface ou ligne), et x, y, z les coordonnées de l'élément du.

Transformons les coordonnées à l'aide des formules connues

$$x = x_0 + a x_1 + b y_1 + c z_1,$$

. . . .

u conserve la même valeur du également. On a donc

$$\frac{1}{u}\sum x\,du = \frac{1}{u}\left[\sum x_0\,du + \sum a x_1\,du + \ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{u}\sum x\,du = \frac{1}{u}\left[x_0\sum du + a\sum x_1\,du + b\sum y_1\,du + c\sum z_1\,du\right].$$

Si donc on désigne par ξ', η', ζ' les coordonnés du nouveau centre de gravité, on peut écrire la formule précédente

$$\xi = x_0 + a\xi' + b\eta' + c\zeta';$$

on aurait également

$$\eta = y_0 + a'\xi' + b'\eta' + c'\zeta',$$
$$\zeta = z_0 + a''\xi' + b''\eta' + c''\zeta'.$$

Or, en appelant ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de l'ancien centre de gravité dans le nouveau système d'axes, on a

$$\begin{aligned}
\xi &= x_0 + a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1,\\
\eta &= y_0 + a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1,\\
\zeta &= z_0 + a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1.
\end{aligned}$$

Il résulte de là que $\xi' = \xi_1$, $\eta' = \eta_1$, $\zeta' = \zeta_1$; donc, enfin, le centre de gravité est un point fixe qui ne dépend pas de la position des axes des coordonnées. C. Q. F. D.

On peut démontrer cette proposition d'une autre manière, qui aura l'avantage de donner une définition géométrique du centre de gravité.

115. On appelle *moment d'inertie polaire* d'un corps par rapport à un point la somme des produits des masses des atomes de ce corps par les carrés de leurs distances au point en question.

Ainsi, m désignant la masse d'un atome et r sa distance au point O, Σmr^2 sera le moment d'inertie polaire du corps par rapport au point O.

Le *moment d'inertie polaire* d'un corps géométrique (volume, surface ou ligne) par rapport à un point O, sera la limite vers laquelle tend la somme $\Sigma r^2\,du$, dans laquelle r désigne la distance de l'élément du au point O.

116. Théorème. — *Le centre de gravité d'un corps est le point pour lequel le moment d'inertie polaire est un minimum.*

En effet, désignant par ξ, η, ζ les coordonnées du point pour lequel le moment d'inertie polaire doit être minimum, par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du corps, et par m la masse concentrée au point x, y, z, si le corps est un corps naturel, ou bien l'élément de volume, de surface ou de ligne correspondant aux coordonnées x, y, z si le corps est géométrique, la quantité à rendre minima est

$$\Sigma m[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2];$$

en égalant à zéro les dérivées de cette expression prises par rapport à ξ, η, ζ, on trouve

$$\Sigma m(\xi-x)=0, \quad \Sigma m(\eta-y)=0, \quad \Sigma m(\zeta-z)=0,$$

d'où l'on tire

$$\xi=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad \eta=\frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad \zeta=\frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Il y a donc un point unique qui répond au minimum, et ce point coïncide bien avec le centre de gravité tel qu'il a été défini plus haut.

III. — Théorèmes facilitant la recherche du centre de gravité.

117. Théorème I. — *Le centre de gravité d'une ligne droite est évidemment au milieu de cette droite; et, en général, lorsqu'une figure homogène a un centre de symétrie, ce centre de symétrie est le centre de gravité de la figure.*

Pour s'en convaincre, il suffit de prendre le centre de figure pour origine, et il est facile de voir que les quantités Σmx, Σmy, Σmz, dont il a été question dans le paragraphe précédent, sont nulles; car à un point dont les coordonnées sont x, y, z correspond un autre point dont les coordonnées sont $-x$, $-y$, $-z$; par suite, le centre de gravité a ses coordonnées égales à zéro, et coïncide avec le centre de figure.

Cette remarque fournit immédiatement le centre de gravité de la circonférence, des polygones réguliers, etc.

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une figure a un plan diamétral, le centre de gravité de cette figure, supposée homogène, se trouve dans le plan diamétral en question.*

En effet, si l'on désigne toujours par m un élément de la figure et par x, y, z les coordonnées de cet élément, les coordonnées du centre de gravité seront

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Or, dans l'intégrale $\Sigma m x$, par exemple, on peut grouper les éléments deux à deux, de telle sorte que la somme $m(x+x')$ ou $2m\frac{(x+x')}{2}$ soit le double produit d'un élément de volume par l'abscisse d'un point du plan diamétral, en sorte que si l'on prend ce plan diamétral pour plan des yz, on aura

$$\frac{\Sigma m x}{\Sigma m} = 0;$$

par suite, le centre de gravité se trouve bien dans le plan diamétral.

Nous aurions pu démontrer ce théorème à l'aide des principes de la statique, en le généralisant même un peu, et en faisant observer que, si les atomes d'un corps sont distribués régulièrement, de telle sorte qu'à un atome de masse m corresponde un autre atome de même masse diamétralement opposé, la résultante des poids de ces atomes aura son centre dans le plan diamétral; par suite, la résultante de tous les poids des atomes aura aussi son centre dans le même plan. Or ce centre est ce que nous avons appelé le *centre de gravité du corps;* le théorème est donc démontré.

118. THÉORÈME III. — *Lorsqu'un corps a un diamètre, le centre de gravité de ce corps se trouve sur le diamètre.*

En effet, un diamètre est l'intersection de deux plans diamétraux dans lesquels le centre de gravité doit se trouver à la fois.

THÉORÈME IV. — *Le centre de gravité d'une figure plane se trouve dans le plan de cette figure.*

Car le plan de la figure est un plan de symétrie.

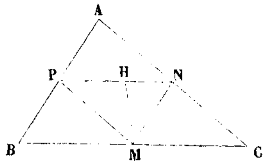
IV. — CENTRE DE GRAVITÉ DE CERTAINES FIGURES QUE L'ON PEUT OBTENIR SANS LE SECOURS DU CALCUL INTÉGRAL.

119. *Centre de gravité d'un triangle et de son périmètre.* — Chacune des médianes du triangle est un diamètre; donc : 1° le centre de gravité se trouve à l'intersection de ces médianes; 2° ces médianes se rencontrent au même point, puisque le centre de gravité est un point unique.

Le centre de gravité d'un triangle coïncide avec le centre de gravité de ses trois sommets assimilés à trois points matériels de masses égales, car les trois médianes sont des diamètres par rapport aux trois sommets. Soient A, B, C les sommets; la résultante des poids de B et de C est un poids double appliqué au milieu M de BC; en composant ce poids avec le poids placé en A, on trouve un poids triple appliqué sur la médiane AM et aux deux tiers de cette médiane comptés à partir du sommet A. Donc, *les médianes d'un triangle se coupent aux $\frac{2}{3}$ de leurs longueurs comptées à partir des sommets.*

Considérons maintenant le périmètre du triangle, son centre de gravité est le même que celui de trois poids placés au milieu des côtés en M, N, P (*fig.* 31), et proportionnels

Fig. 31.



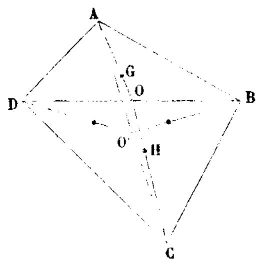
à ces côtés, ou, si l'on veut, proportionnels aux côtés du triangle MNP; or, si l'on commence par composer les poids N et P, leur résultante passera en un point H tel, que $\frac{HN}{HP} = \frac{MN}{MP}$; donc HM est la bissectrice de l'angle PMN. Or le centre de gravité cherché se trouve sur MH, car il est le point d'application de la résultante des forces placées en H et M. Ainsi, le centre de gravité doit se trouver sur les bissectrices des angles du triangle MNP; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Le centre de gravité du périmètre d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle proposé.

120. *Centre de gravité du quadrilatère.* — Lorsque l'on veut trouver le centre de gravité d'un polygone quelconque, on le décompose en triangles, et l'on n'a plus qu'à chercher le centre de gravité de poids proportionnels aux surfaces de ces triangles et appliqués à leurs centres de gravité respectifs. Cette construction se simplifie un peu dans le cas du quadrilatère; en effet, con-

sidérons le quadrilatère ABCD (*fig.* 32), le centre de gravité se trouvera sur la droite GH qui joint les centres

Fig. 32.



de gravité G, H des triangles ADB, DBC, ou, si l'on veut, les points qui partagent leurs médianes AO, OC aux $\frac{2}{3}$ à partir du sommet. En faisant usage des deux triangles ADC, ACB, on trouvera une seconde ligne qui devra contenir le centre de gravité cherché, et, par suite, ce centre de gravité sera déterminé.

121. *Centre de gravité d'un tétraèdre.* — Les plans qui passent par une arête et le milieu de l'arête opposée sont des plans diamétraux; ils se rencontrent donc en un même point qui est le centre de gravité du tétraèdre.

Trois plans diamétraux passant par le même sommet coupent la base opposée à ce sommet suivant ses médianes; ces trois plans passent par une même droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base. Ainsi :

Le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve au point de rencontre des droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des bases opposées.

Les plans diamétraux d'un tétraèdre sont aussi les plans diamétraux d'un système de quatre poids égaux placés aux sommets du tétraèdre; donc le centre de gravité de ces quatre poids coïncide avec celui du tétraèdre; mais, pour obtenir le centre des poids en question, on peut composer l'un des poids placé à l'un des sommets avec un poids triple appliqué au centre de gravité de la base opposée. On voit ainsi que *le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve placé aux $\frac{3}{4}$ de la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la base opposée, comptés à partir du sommet.*

On peut enfin déterminer le centre de gravité du tétraèdre en observant que l'on peut composer les poids placés aux extrémités de deux arêtes opposées; ces poids se composent alors en deux poids égaux appliqués au milieu de deux arêtes opposées; enfin, la résultante de ces derniers poids se trouve appliquée au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées. Donc :

Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre concourent en un même point et se coupent en leur milieu, qui est le centre de gravité du tétraèdre.

V. — Centre de gravité de quelques lignes.

122. *Arc de cercle.* — Prenons pour axe des x la droite qui joint le centre au milieu de l'arc; le centre de gravité se trouvant sur cette ligne, on n'aura besoin que de calculer l'abscisse du centre de gravité. Cette abscisse est fournie par la formule

$$\xi = \frac{1}{2s}\int_{-s}^{+s} x\,ds,$$

$2s$ désignant la longueur totale de l'arc. Or, en désignant par r le rayon, on a

$$x = r\cos\frac{s}{r},$$

et, par suite,

$$\xi = \frac{r}{2s}\int_{-s}^{+s}\cos\frac{s}{r}\,ds,$$

ou bien

$$\xi = \frac{r^2}{s}\sin\frac{s}{r};$$

en désignant par $2y$ la corde de l'arc, on a

$$r\sin\frac{s}{r} = y,$$

et, par suite,

$$\xi = \frac{r}{s}y = \frac{2y.r}{2s}.$$

ξ est donc une quatrième proportionnelle à la corde, à l'arc et au rayon.

123. *Arc d'hélice.* — Les équations de l'hélice sont

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = k\varphi,$$

r désignant le rayon du cylindre sur lequel l'hélice est tracée; φ est un angle variable et k une constante. En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité et ds l'élément d'arc, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + k^2}\,d\varphi,$$

ou bien

$$ds = \sqrt{r^2 + k^2}\,d\varphi.$$

On a donc, en désignant par Φ la valeur de φ à l'extrémité de l'arc et en supposant sa valeur nulle à l'origine,

$$\int ds = \Phi\sqrt{r^2 + k^2},$$

$$\xi = \frac{1}{\Phi}\int_0^\Phi r\cos\varphi\, d\varphi, \quad \eta = \frac{1}{\Phi}\int_0^\Phi r\sin\varphi\, d\varphi, \quad \zeta = \frac{1}{\Phi}\int_0^\Phi k\varphi\, d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\xi = \frac{r\sin\Phi}{\Phi}, \quad \eta = \frac{r(1-\cos\Phi)}{\Phi}, \quad \zeta = k\frac{\Phi}{2}.$$

Le paramètre φ désigne, comme l'on sait, la projection de l'arc d'hélice sur sa base; on voit donc que le centre de gravité se trouve à la moitié de la hauteur de l'extrémité de l'arc au-dessus de son origine, et que le centre de gravité se rapproche de l'axe de l'hélice à mesure que l'on fait grandir l'angle Φ, ou, ce qui revient au même, l'arc d'hélice lui-même.

124. *Arc d'ellipse.* — Les équations de l'ellipse sont

$$x = a\cos\varphi,$$
$$y = b\sin\varphi.$$

Lorsque l'on prend le grand axe pour axe des x, φ désigne alors un paramètre variable dont l'interprétation est bien connue, et a, b désignent les demi-axes de l'ellipse. Nous supposerons qu'il s'agisse d'un arc symétrique par rapport à l'axe des x; en désignant alors par ξ l'abscisse (seule inconnue) du centre de gravité, et par $-\Phi$ et $+\Phi$ les limites de φ, on aura

$$\xi = \frac{a\displaystyle\int_{-\Phi}^{+\Phi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi}{\displaystyle\int_{-\Phi}^{+\Phi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi};$$

si l'on pose alors

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \text{et} \quad \frac{c}{a} = e,$$

on a

$$\xi = a\left(\int_{-\Phi}^{+\Phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \cos\varphi \, d\varphi\right) : \int_{-\Phi}^{+\Phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi,$$

ou bien, en désignant par $E(\varphi)$ la fonction elliptique de seconde espèce $\int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}$,

$$\xi = \frac{a}{2e\,E(\Phi)}\left[\arcsin(e \sin\Phi) + e \sin\Phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\Phi}\right].$$

VI. — Centre de gravité de quelques aires planes.

125. *Centre de gravité d'un segment et d'un secteur circulaires.* — Soit a le rayon du secteur; on peut décomposer le secteur en une infinité de petits triangles au moyen de rayons suffisamment rapprochés; les centres de gravité de ces triangles se trouveront sur une circonférence concentrique à celle du secteur et de rayon égal à $\frac{2}{3}a$. On peut supposer ces triangles égaux, et alors on voit que les poids appliqués aux éléments égaux du secteur pourront être remplacés par des poids égaux appliqués à des éléments égaux de l'arc de cercle décrit du centre du secteur comme centre, avec un rayon égal à $\frac{2}{3}a$ et limité aux côtés du secteur, le centre de gravité du secteur sera donc le centre de gravité de l'arc en question.

Lorsque l'on connaît le centre de gravité d'un secteur, il est facile d'en déduire le centre de gravité du segment correspondant, en observant que ce centre de gravité est le point d'application de la résultante de deux forces; l'une est le poids du secteur appliqué à son centre de gravité; l'autre, prise en sens contraire, est le poids du triangle, qui, ajouté au segment, complète le secteur; cette force est appliquée au centre de gravité du triangle en question.

126. *Centre de gravité de la cycloïde.* — Nous allons chercher le centre de gravité de la surface comprise entre un arc de cycloïde limité à deux points de rebroussement consécutifs et la corde qui joint ces deux points. Prenons cette corde pour axe des x et la perpendiculaire élevée en son milieu pour axe des y; soit η l'ordonnée du centre de gravité cherché, qui, évidemment, se trouve sur l'axe des y, on aura

$$\eta = \frac{\int\int y\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy} = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}. \tag{1}$$

Or on a, en désignant par a le rayon du cercle générateur et par φ un angle convenablement choisi,

$$y = a(1 - \cos\varphi),$$
$$x = a(\pi - \varphi + \sin\varphi),$$

d'où l'on conclut

$$dx = a(\cos\varphi - 1)\,d\varphi;$$

en remplaçant y et dx par leurs valeurs, la formule (1) donne

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos\varphi)^3\,d\varphi}{\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi},$$

ou bien

$$\eta = \frac{a\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)\,d\varphi}{2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi},$$

ou bien encore

$$\eta = \frac{a}{2}\,\frac{2\pi + 3\pi}{2\pi + \pi},$$

c'est-à-dire

$$\eta = \frac{5a}{6}.$$

VII. — Centre de gravité de quelques solides et de quelques surfaces courbes.

127. *Centre de gravité d'une zone sphérique.* — Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

l'équation de la sphère dont la zone fait partie; $z = h$, $z = H + h$ les équations des bases de la zone; en désignant par ζ la cote du centre de gravité de la zone qui, évidemment, se trouve sur l'axe des z, $2\pi a H$ représentera la surface de la zone; $2\pi a H\zeta$ sera le moment pris par rapport à l'axe des x de son poids, la pesanteur étant censée agir dans le sens de l'axe des y négatifs; si maintenant on décompose la zone donnée en zones infiniment petites de hauteur dz, le moment d'une quelconque de ces zones sera $2\pi a\, dz \,.\, z$, en sorte que l'on aura, en égalant le moment de la zone à la somme des moments de ses parties,

$$2\pi a H \zeta = \int_h^{h+H} 2\pi a z\, dz,$$

ou

$$\zeta = \frac{(H + h)^2 - h^2}{2H},$$

ou, enfin,

$$\zeta = \frac{H^2 + 2hH}{2H} = h + \frac{H}{2};$$

donc, le centre de gravité d'une zone est au milieu de sa hauteur.

Centre de gravité d'un segment de sphère à bases parallèles. — En désignant toujours par

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

l'équation de la sphère; par $z = h$, $z = H + h$ les équations des bases, et par ζ la cote du centre de gravité, on a

$$\zeta \int_h^{h+H} \pi x^2 dz = \int_h^{h+H} \pi x^2 z\, dz,$$

ou bien

$$\zeta \int_h^{h+H} (a^2 - z^2)\, dz = \int_h^{h+H} (a^2 - z^2)\, z dz,$$

ou

$$\zeta \left[a^2 H - \frac{1}{3}(H + h)^3 + \frac{h^3}{3}\right]$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[(h + H)^2 - h^2\right] - \frac{1}{4}\left[(h + H)^4 - h^4\right];$$

cette équation fournira la valeur de ζ qui détermine la cote du centre de gravité.

128. *Centre de gravité d'un cône.* — Le centre de gravité d'un cône se trouve évidemment sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, car le cône peut être décomposé en une infinité de petits cylindres ayant leurs centres de gravité sur la droite en question; si alors nous désignons par B la base du cône et par h sa hauteur, si nous désignons en outre par x la section faite dans le cône par un plan parallèle à la base et situé à la distance y du sommet, si enfin η désigne la distance au sommet du plan parallèle à la base qui contient le centre de gravité, $\frac{Bh}{3}\eta$ désignera le moment du poids du cône pris par rapport à un plan parallèle à la base mené par le sommet, $x\,dy \cdot y$ désignera le moment d'une tranche infiniment mince du cône comprise entre deux plans parallèles à la base. En égalant le moment du cône tout entier à la somme des moments de ses tranches, on a

$$\frac{Bh}{3}\eta = \int_0^h xy\,dy;$$

or, on a

$$\frac{x}{B} = \frac{y^2}{h^2}, \quad x = \frac{By^2}{h^2}.$$

En portant cette valeur de x dans la précédente formule, on a

$$\frac{Bh}{3}\eta = \int_0^h \frac{By^3\,dy}{h^2}$$

ou

$$\eta = \frac{3}{4}h.$$

Ainsi, *le centre de gravité d'un cône est aux $\frac{3}{4}$ de la ligne qui joint le sommet au centre de gravité de la base, cette longueur étant comptée à partir du sommet.*

129. *Centre de gravité d'un cylindre tronqué.* — Supposons le cylindre droit et reposant par sa base sur le plan des xy; soient

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la base; ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité;

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

l'équation du plan de troncature : α, β, γ désignant les angles que la normale au plan fait avec les axes. On aura

$$(1) \qquad \xi = \frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}, \ldots$$

Commençons par évaluer l'intégrale qui figure en dénominateur et qui représente le volume du cylindre tronqué; cette intégrale est égale à

$$\iint z\,dx\,dy;$$

$z\,dx\,dy$ représente le moment de l'élément $dx\,dy$ de la base pris par rapport au plan de troncature, du moins à un facteur près, qui est la sécante de l'angle que le plan de base fait avec le plan de troncature; si alors on désigne par B la base du cylindre, par h la parallèle aux arêtes qui passe par le centre de gravité de la base, on aura

$$\iint z\,dz\,dy = \mathrm{B}h;$$

d'où l'on peut conclure que :

Le volume d'un cylindre tronqué est égal à sa section droite multipliée par la droite parallèle aux génératrices qui passe par les centres de gravité des sections droites.

Si l'on observe que la projection du centre de gravité d'une aire plane est le centre de gravité de la projection de cette aire (facile à démontrer), on pourra dire que :

Le volume d'un cylindre tronqué est égal au produit de la section droite par la ligne droite qui joint les centres de gravité de ses plans de troncature.

Revenons aux formules (1), nous pouvons les mettre sous la forme

$$\mathrm{B}h\xi = \iiint x\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

$$\mathrm{B}h\eta = \iiint y\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

$$\mathrm{B}h\zeta = \iiint z\,dx\,dy\,dz. \tag{4}$$

En effectuant l'intégration par rapport à z, dans la première de ces formules, on a

$$Bh\xi = \int\int \frac{p - x\cos\alpha - y\cos\beta}{\cos\gamma} x\,dx\,dy;$$

si l'on place alors l'origine au centre de gravité de la base, le facteur de p sera nul et l'on aura

$$Bh\xi = -\int\int x^2 \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dx\,dy - \int\int xy \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dx\,dy.$$

Nous verrons plus loin que l'on peut toujours diriger les axes de telle sorte que l'on ait (n° 139)

$$\int\int xy\,dx\,dy = 0;$$

dans ce cas, $\int\int x^2\,dx\,dy$, $\int\int y^2\,dx\,dy$ sont ce que l'on appelle les *moments d'inertie principaux* de la base B par rapport aux axes des y et des x; si l'on désigne ces quantités par b et a, on aura

$$Bh\xi = -b\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad Bh\eta = -a\frac{\cos\beta}{\cos\gamma};$$

l'équation (4) donne

$$\frac{1}{2}\int\int \frac{p^2 + x^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\beta - 2px\cos\alpha - 2py\cos\beta + 2xy\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\gamma} dx\,dy$$

ou, en ôtant les termes nuls,

$$Bh\zeta = \frac{1}{2}\int\int \frac{p^2\,dx\,dy}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}\int\int x^2\,dx\,dy + \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}\int\int y^2\,dx\,dy,$$

ou, enfin,

$$Bh\zeta = \frac{1}{2}\frac{p^2 B}{\cos^2\gamma} + \frac{b\cos^2\alpha + a\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}.$$

VIII. — Théorèmes de Guldin.

130. Théorème I. — *L'aire engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan est égale à la longueur de cette ligne multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

En effet, si l'on prend l'axe de révolution pour l'axe des x, l'expression de la surface engendrée par la courbe sera

$$\int 2\pi y\,ds,$$

ds désignant un élément de l'arc de courbe et y la distance de cet élément à l'axe de révolution; mais si η désigne l'ordonnée du centre de gravité de la courbe, on a

$$\int 2\pi y\,ds = 2\pi \int y\,ds = 2\pi\eta s;$$

$2\pi\eta$ est bien la circonférence décrite par le centre de gravité : le théorème est donc démontré.

131. Théorème II. — *Le volume engendré par une aire plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan est égal à la surface de cette aire multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

En effet, prenant l'axe de rotation pour axe des x et une perpendiculaire à cet axe menée dans le plan de l'aire plane pour axe des y, l'expression du volume engendré est

$$\int\int \pi\left[(y+dy)^2 - y^2\right]dx,$$

ou bien

$$2\pi\int\int y\,dx\,dy.$$

Cette expression est égale à $2\pi\eta A$, A désignant la surface de l'aire génératrice, et η l'ordonnée de son centre de gravité. En effet $\int\int y\,dx\,dy$ est la somme des moments par rapport à l'axe des x, des poids des éléments $dx\,dy$ de la surface et $A\eta$ est le moment total de la surface. Le volume engendré $2\pi\eta A$ est bien le produit de la circonférence $2\pi\eta$ que décrit le centre de gravité de l'aire par la surface A de cette aire.

Ces deux théorèmes portent le nom de théorèmes de Guldin. On peut généraliser le second comme il suit :

Si, au lieu de faire tourner l'aire A de manière à lui faire engendrer un solide de révolution complet, on la fait seulement tourner d'un angle $d\theta$, il est clair que le volume engendré sera au volume de révolution total $2\pi\eta A$ comme $d\theta$ est à 2π, en sorte que ce volume aura pour expression $\eta A\,d\theta$, ou bien, en désignant par ds l'arc $\eta\,d\theta$ décrit par le centre de gravité, $A\,ds$.

Ceci posé, considérons le solide engendré par une surface plane A qui reste toujours normale aux trajectoires que décrivent ses points. Si l'on considère la portion du volume engendré compris entre deux positions infiniment voisines de la surface A, cette portion de volume pourra être engendrée par la rotation du plan de la surface A autour de sa caractéristique. En désignant alors par ds l'arc décrit par le centre de gravité de la surface A, le petit volume en question aura pour expression $A\,ds$, et le volume total engendré dans un mouvement fini sera $\int A\,ds$ ou As. Donc :

132. Théorème III. — *Le volume engendré par une surface plane qui reste normale aux trajectoires de ses divers points est égal à la surface génératrice multipliée par la ligne que décrit son centre de gravité.*

CHAPITRE V.

MOMENTS D'INERTIE.

I. — Définitions.

133. On appelle *moment d'inertie* d'un corps par rapport à un axe, la somme des produits des masses de ses points matériels par le carré de leur distance à l'axe.

Si l'on prend l'axe en question pour axe des z, et si l'on désigne par m la masse et par x, y, z les coordonnés rectangulaires d'un point quelconque du système, le moment d'inertie de ce système sera l'intégrale

$$\Sigma m(x^2 + y^2).$$

Cette intégrale, s'il s'agit d'un corps naturel et continu, peut se ramener aux quadratures. En effet, si l'on considère un petit parallélépipède de dimensions dx, dy, dz, ayant ses arêtes parallèles aux axes, et contenant dans son intérieur le point m, et si ρ désigne la masse spécifique du corps considéré dans les environs du point m, la quantité $\rho\, dx\, dy\, dz$ représentera, à fort peu de chose près, la masse du parallélépipède (dx, dy, dz), pourvu que ses arêtes soient suffisamment petites.

x et y, variant peu d'un point à un autre du parallélépipède en question,

$$\rho\, dx\, dy\, dz(x^2 + y^2)$$

représentera approximativement le moment d'inertie de ce parallélépipède, et l'intégrale

$$\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz (x^2 + y^2),$$

étendue à tout le volume du corps donné, représentera très-approximativement le moment d'inertie total du corps.

Les considérations précédentes suffisent à tous les besoins de la Mécanique appliquée, vu l'extrême petitesse des molécules et des intervalles qui les séparent.

En Physique mathématique, on n'a pas toujours le droit de substituer aux intégrale Σ les intégrales $\int$, parce que l'on ne considère souvent qu'un nombre restreint de molécules, et que les distances intermoculaires sont comparables aux plus grandes dimensions des figures que l'on doit considérer. On peut lire à ce sujet la préface et les premières pages du Traité de M. Lamé, sur la théorie de l'élasticité dans les corps solides.

Quoi qu'il en soit, si nous considérons un corps géométrique continu, nous pourrons définir le *moment d'inertie de ce corps par rapport à l'axe des* z l'intégrale suivante étendue à tout le corps

$$\int \rho\, du (x^2 + y^2),$$

du désignant un élément de volume, de surface ou de ligne, selon que le corps géométrique sera un volume, une surface ou une ligne, et ρ désignant une fonction donnée de x, y, z que l'on appelle la *densité au point* (x, y, z).

II. — Problèmes sur les moments d'inertie.

134. Problème I. — *Étant donné le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe, calculer le moment d'inertie du même corps par rapport à un axe déterminé de position et parallèle au premier.*

Prenons l'axe donné pour axe des z, soit m la masse (*), x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du corps, le moment d'inertie donné est

$$\Sigma m(x^2 + y^2).$$

Le moment d'inertie pris par rapport à un axe parallèle à l'axe des z, et dont les coordonnées sont p et q, sera

$$\Sigma m[(x-p)^2 + (y-q)^2],$$

c'est-à-dire

$$\Sigma m(x^2 + y^2) + \Sigma m(p^2 + q^2) - 2\Sigma mpx - 2\Sigma mqy,$$

ou bien, en désignant par M la masse totale du corps et par a, b, c les coordonnées de son centre de gravité,

$$\Sigma m(x^2 + y^2) + \mathrm{M}(p^2 + q^2) - (2p\mathrm{M}a + 2q\mathrm{M}b).$$

(En effet, les coordonnées a, b, c du centre de gravité sont données par les formules

$$\mathrm{M}a = \Sigma mx,$$
$$\mathrm{M}b = \Sigma my,$$
$$\mathrm{M}c = \Sigma mz,$$

qu'on a établies plus haut (n° 112); ces formules interviendront plusieurs fois dans ce Chapitre, il est essentiel de les avoir constamment présentes à l'esprit.)

Ainsi le moment d'inertie pris par rapport au nouvel axe est égal au moment d'inertie pris par rapport à l'ancien, augmenté du moment d'inertie de la masse totale con-

---

(*) Bien que cette démonstration et les suivantes soient faites en adoptant une notation qui semble basée sur l'hypothèse moléculaire, on se convaincra aisément, en y regardant de près, que ces démonstrations s'appliquent aux corps géométriques. En effet, rien n'empêche de considérer la somme $\Sigma m(y^2 + z^2)$ comme une $\int$, pourvu que l'on y substitue mentalement $\rho\,du$ à m.

centrée sur le nouvel axe, et diminué d'une quantité qui s'annule quand l'ancien axe passe par le centre de gravité du corps.

Faisons passer l'ancien axe par le centre de gravité, le nouveau moment d'inertie sera

$$\Sigma m(x^2+y^2)+\mathrm{M}(p^2+q^2).$$

135. Donc : 1° *Le moment d'inertie d'un corps pris par rapport à une série d'axes parallèles est minimum lorsque l'axe passe par le centre de gravité ;*

2° *Les moments d'inertie d'un corps pris par rapport à des axes également distants d'un axe passant par le centre de gravité sont égaux.*

136. Le moment d'inertie d'un corps pris par rapport à un axe divisé par la masse totale du corps est ce qu'on appelle le *carré du rayon de gyration* du corps par rapport à l'axe. En sorte que si nous prenons

$$\Sigma m(x^2+y^2)=\mathrm{M}k^2,$$
$$p^2+q^2=\delta^2,$$
$$\Sigma m\left[(x-p)^2+(y-p)^2\right]=\mathrm{M}k'^2,$$

k et k' seront les rayons de gyration du corps par rapport à l'ancien et au nouvel axe. Nous aurons ainsi

$$\mathrm{M}k'^2=\mathrm{M}k^2+\mathrm{M}\delta^2-(2p\mathrm{M}a+2q\mathrm{M}b),$$

ou bien

$$k'^2=k^2+\delta^2-2ap-2bq.$$

Si l'axe des z passe par le centre de gravité, on aura seulement

$$k'^2=k^2+\delta^2,$$

ce qui permet de construire k' quand on connaît k et δ. Si l'on désigne par k'' le rayon de gyration, pris par rapport à un nouvel axe situé à la distance δ' de l'axe qui passe par le centre de gravité, on aura

$$k''^2 = k^2 + \delta'^2,$$

d'où l'on conclura

$$k''^2 = k'^2 + \delta'^2 - \delta^2;$$

ce qui permettra de construire k'' quand on connaîtra k', δ, δ'.

137. Problème II. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *calculer le moment d'inertie d'un corps pris par rapport à un axe* OI *passant par le point de concours des trois premiers, et faisant avec eux des angles respectivement égaux à* α, β, γ.

Soient m la masse; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M, la distance r de ce point à l'axe OI est égale à OM sin (OM, OI); on a donc

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)[1 - \cos^2(\mathrm{OM}, \mathrm{OI})],$$

ou

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2(\mathrm{OM}, \mathrm{OI}),$$

ou bien

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2;$$

si l'on observe alors que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ est égal à l'unité, on aura

$$\begin{aligned} r^2 = {} & (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ & - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} r^2 = {} & (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma \\ & - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Posons actuellement

$$\begin{aligned} \Sigma m(y^2+z^2) &= \mathrm{A}, & \Sigma myz &= \mathrm{D},\\ \Sigma m(z^2+x^2) &= \mathrm{B}, & \Sigma mxz &= \mathrm{E},\\ \Sigma m(x^2+y^2) &= \mathrm{C}, & \Sigma mxy &= \mathrm{F}, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \Sigma mr^2 = {} & \mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\gamma \\ & - 2\mathrm{D}\cos\beta\cos\gamma - 2\mathrm{E}\cos\alpha\cos\gamma - 2\mathrm{F}\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Les quantités A, B, C sont les moments d'inertie du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz; quant aux quantités D, E, F on les évaluera au moyen des formules suivantes, si le corps est continu :

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \int\!\!\int\!\!\int \rho\, dx\, dy\, dz\, yz,\\ \mathrm{E} &= \int\!\!\int\!\!\int \rho\, dx\, dy\, dz\, zx,\\ \mathrm{F} &= \int\!\!\int\!\!\int \rho\, dx\, dy\, dz\, xy, \end{aligned}$$

ρ désignant, comme plus haut, la masse spécifique du corps au point (x, y, z).

Si l'on observe alors que Σmr^2 est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OI, la formule précédente permettra de résoudre le problème au moyen des quadratures.

III. — Ellipsoïde central.

138. Théorème. — *Considérons une série de rayons vecteurs issus d'un point fixe de l'espace, et sur chacun de ces rayons vecteurs portons des longueurs proportionnelles à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie d'un corps donné, relatif à ce rayon vecteur, le lieu des extrémités des rayons vecteurs ainsi menés sera un ellipsoïde.*

En effet, si par le point fixe nous menons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, le moment d'inertie i du corps par rapport à un axe OI faisant avec Ox, Oy, Oz les angles α, β, γ sera donné par la formule du n° 137

$$(1)\quad \begin{cases} i = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ \qquad - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

A, B, C, D, E, F désignant des constantes définies au paragraphe précédent, les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur compté sur OI seront

$$X = \frac{k}{\sqrt{i}}\cos\alpha,\quad Y = \frac{k}{\sqrt{i}}\cos\beta,\quad Z = \frac{k}{\sqrt{i}}\cos\gamma;$$

k désignant une constante, on en déduit

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}X\sqrt{i},\quad \cos\beta = \frac{1}{k}Y\sqrt{i},\quad \cos\gamma = \frac{1}{k}Z\sqrt{i};$$

en portant ces valeurs dans (1), on a

$$(2)\quad k = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY.$$

Cette équation représente bien un ellipsoïde, ainsi que nous l'avions annoncé. En effet, la surface du second degré qu'elle représente est évidemment limitée de toutes parts. On peut du reste s'en assurer directement. La surface (2) est rapportée à son centre, et l'on peut choisir les axes de telle sorte que D, E, F soient nuls, on a alors simplement

$$k = AX^2 + BY^2 + CZ^2.$$

Or les quantités A, B, C sont essentiellement positives, puisqu'elles représentent les moments d'inertie du corps par rapport aux axes; donc la surface cherchée est bien un ellipsoïde.

Cet ellipsoïde, dans lequel on peut supposer $k = 1$, a été appelé par Poinsot *ellipsoïde central;* on l'appelle aussi quelquefois *ellipsoïde d'inertie.*

139. Lorsque le corps se réduit à une surface plane, la section de cet ellipsoïde par le plan de la surface porte le nom d'*ellipse d'inertie.*

D'après ce que nous venons de voir, il existe trois directions autour d'un même point pour lesquelles les sommes Σmyz, Σmxz, Σmxy sont nulles; ces trois directions, qui sont celles des axes de l'ellipsoïde central, portent le nom de directions principales ou d'*axes principaux d'inertie.*

Il résulte de ce qui précède que le moment d'inertie d'un corps par rapport à une série d'axes passant par un point fixe est en général susceptible d'un maximum et d'un minimum.

IV. — Problèmes sur les axes principaux.

140. Problème I. — *Trouver la condition pour qu'un axe soit principal en un de ses points déterminé.*

En conservant les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, si l'on prend la droite en question pour axe des z, il faudra que, si le point pour lequel l'axe est principal est à l'origine, on ait $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mxz = 0$; car la droite donnée est alors dirigée suivant l'un des axes de l'ellipsoïde d'inertie. Ces conditions sont évidemment nécessaires et suffisantes.

141. Problème II. — *Trouver la condition pour qu'un axe soit principal en un de ses points d'ailleurs indéterminé.*

Les quantités Σmyz, Σmxz ne seront pas nulles en général, si l'on prend pour axe donné l'axe des z, mais il devra exister un point dont les coordonnées soient o, o et h, et tel que, si l'on y transporte l'origine, on ait

$$\Sigma m y_1 z_1 = 0, \quad \Sigma m x_1 z_1 = 0;$$

x_1, y_1, z_1 désignant les nouvelles coordonnées du point m. Or on a

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - h.$$

On devra donc avoir

$$\Sigma m y (z - h) = 0, \quad \Sigma m x (z - h) = 0.$$

Soient a, b, c les coordonnées du centre de gravité, M la masse totale du corps ; les équations précédentes pourront s'écrire

$$(1) \qquad h \mathrm{M} b = \Sigma m y z, \quad h \mathrm{M} a = \Sigma m x z.$$

Si l'on élimine h, on a la condition cherchée

$$b \Sigma m x z = a \Sigma m y z,$$

qui se réduit à $\Sigma m x z = 0$, si le centre de gravité se trouve dans le plan des yz.

142. Problème III. — *Trouver la condition pour qu'un axe soit principal en tous ses points.*

Les équations (1) devront avoir lieu, quel que soit h; en prenant l'axe donné pour axe des z, on devra donc avoir

$$\Sigma m y z = 0, \quad \Sigma m x z = 0, \quad a = 0, \quad b = 0.$$

Ces équations expriment que l'axe est principal et qu'il passe par le centre de gravité; réciproquement, tout axe principal relatif au centre de gravité sera principal en tous ses points; car la translation de l'origine en un point quelconque de l'axe des z n'altérera pas la valeur nulle des sommes $\Sigma m y z$, $\Sigma m x z$.

143. Problème IV. — *Trouver les points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde central est de révolution; en d'autres termes, pour lesquels deux moments principaux sont égaux.*

Prenons pour axes coordonnés les axes d'inertie principaux relatifs au centre de gravité; soient ξ, η, ζ les coordonnées de l'un des points cherchés : transportons l'origine au point (ξ, η, ζ) en laissant les directions des axes, parallèles aux directions principales relatives au centre de gravité, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point (ξ, η, ζ) sera

$$(2) \qquad 1 = X^2 \sum m(y_1^2 + z_1^2) + \ldots \quad - 2YZ \sum m y_1 z_1 - \ldots,$$

x_1, y_1, z_1 désignant les coordonnées du point m prises par rapport aux nouveaux axes; or, en désignant par x, y, z les coordonnées du point m par rapport aux anciens axes, on a

$$x_1 = x - \xi, \quad y_1 = y - \eta, \quad z_1 = z - \zeta,$$

et, par suite,

$$\sum m(y_1^2 + z_1^2) = \sum m(y^2 + z^2) + \sum m(\eta^2 + \zeta^2) - 2\xi \sum mx - 2\eta \sum my.$$

Si l'on observe alors que $\sum mx$, $\sum my$ sont nuls, et si l'on désigne par M la masse totale du corps, on a

$$(3) \qquad \sum m(y_1^2 + z_1^2) = A + M(\eta^2 + \zeta^2) \ldots,$$

A, B, C désignant les moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité. On a de même

$$\sum m y_1 z_1 = \sum m(y - \eta)(z - \zeta),$$

ou bien

$$\sum m y_1 z_1 = \sum myz - \sum m\eta z - \sum m\zeta y + \sum m\eta\zeta,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma m y_1 z_1 = M \eta \zeta, \ldots \tag{4}$$

Si l'on a égard aux relations (3) et (4), l'équation (2) pourra s'écrire

$$1 = X^2[A + M(\eta^2 + \zeta^2)] + \ldots - 2YZM\eta\zeta - \ldots.$$

Si l'on exprime alors que cet ellipsoïde est de révolution, on trouve

$$\begin{aligned} A + M(\eta^2 + \zeta^2) - 2M\xi^2 &= B + M(\zeta^2 + \xi^2) - 2M\eta^2 \\ &= C + M(\xi^2 + \eta^2) - 2M\zeta^2. \end{aligned}$$

Telles sont les équations du lieu des points qui jouissent de la propriété cherchée; on peut les écrire comme il suit, en désignant par i, j, k les rayons de gyration relatifs aux axes de coordonnées :

$$i^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\xi^2 = j^2 + \zeta^2 + \xi^2 - 2\eta^2 = k^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2,$$

ou bien

$$\begin{aligned} i^2 - j^2 &= 3(\xi^2 - \eta^2), \\ j^2 - k^2 &= 3(\eta^2 - \zeta^2), \\ k^2 - i^2 &= 3(\zeta^2 - \xi^2). \end{aligned}$$

Le lieu des points cherchés est donc l'intersection de deux cylindres hyperboliques : ces cylindres se rencontrent, car les équations précédentes sont satisfaites lorsque l'on pose

$$\xi = \pm i\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \eta = \pm j\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \zeta = \pm k\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

144. Problème V. — *Trouver les points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde central se réduit à une sphère.*

Pour trouver ces points, on aura encore recours à l'équation (2) et l'on posera

$$\Sigma m x_1 y_1 = 0, \quad \Sigma m z_1 x_1 = 0, \quad \Sigma m y_1 z_1 = 0$$

et

$$\Sigma m (z_1^2 + y_1^2) = \Sigma m (x_1^2 + z_1^2) = \Sigma m (x_1^2 + y_1^2),$$

c'est-à-dire en vertu de (3) et (4)

$$A + M(\eta^2 + \zeta^2) = B + M(\zeta^2 + \xi^2) = C + M(\xi^2 + \eta^2),$$
$$\eta\zeta = 0, \quad \zeta\xi = 0, \quad \xi\eta = 0.$$

Les dernières formules montrent que les points cherchés se trouvent sur les axes principaux relatifs au centre de gravité; car elles sont satisfaites en posant $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Les premières donnent alors

$$A = B + M\xi^2 = C + M\xi^2,$$

ce qui exige que l'on ait $B = C$. L'ellipsoïde central relatif au centre de gravité doit être de révolution, et dans ce cas on a

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{A - B},$$

ce qui montre que, suivant l'axe de révolution, l'ellipsoïde en question doit être allongé. Ainsi les points cherchés n'existeront que dans des cas très-particuliers, et quand ils existeront ils seront au nombre de deux. Ils se confondront en un seul si l'on a $A = B = C$.

V. — Moments d'inertie de quelques surfaces planes.

La recherche des moments d'inertie des surfaces planes est très-importante, et se présente dans un grand nombre de questions de Mécanique appliquée, principalement dans la théorie de la résistance des matériaux. Nous allons passer en revue les cas qui se présentent le plus fréquemment.

145. *Moment d'inertie d'un rectangle pris par rapport à un axe parallèle à l'un de ses côtés.* — Soient a et b les dimensions de ce rectangle. Prenons pour axes de coordonnées deux côtés contigus, nous supposerons le rectangle homogène et nous prendrons sa masse spécifique égale à l'unité.

Le moment d'inertie de ce rectangle pris par rapport à l'axe des x (qui, pour fixer les idées, sera le côté a) est

$$\int_0^b \int_0^a dx\,dy\,y^2 = \frac{ab^3}{3}.$$

Si l'on désire maintenant le moment d'inertie du même rectangle par rapport à un axe parallèle au côté a et situé à la distance δ de ce côté, on observera que ce moment d'inertie est la différence des moments d'inertie de deux rectangles ayant pour base a et pour hauteurs δ et $b+\delta$, en sorte que la quantité cherchée sera

$$\frac{a}{3}\left[(b+\delta)^3 - \delta^3\right].$$

146. *Moment d'inertie d'un cercle par rapport à l'un de ses diamètres.* — Le moment d'inertie d'un élément du cercle est le produit de cet élément par le carré de sa distance à l'axe; or si nous désignons par r la distance de cet élément au centre, et par θ l'angle que le rayon vecteur r fait avec l'axe, l'élément de surface du cercle pourra être pris égal à $r\,d\theta\,dr$ (c'est l'expression d'un élément de surface en coordonnées polaires); la distance de l'élément à l'axe est $r\sin\theta$, en sorte que le moment d'inertie de l'élément est égal à $r^3\sin^2\theta\,d\theta\,dr$; si donc on désigne par a le rayon du cercle, son moment d'inertie total sera

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\sin^2\theta\,d\theta\,dr.$$

En intégrant par rapport à r, on trouve

$$\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta.$$

Or on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi;$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi;$$

par suite, le moment d'inertie cherché est $\pi\frac{a^4}{4}\cdot$ Le moment d'inertie d'une couronne circulaire, dont les rayons seraient a et b, sera par suite

$$\frac{\pi}{4}(a^4 - b^4).$$

147. *Moment d'inertie d'une ellipse pris par rapport à l'un des axes de cette ellipse.*

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de cette ellipse. Prenons le moment d'inertie par rapport à l'axe des x, ce moment est

$$\int\int dx\, dy\, y^2.$$

La première intégration relative à y doit être faite entre les limites

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

elle réduit l'intégrale double à la forme

$$\frac{2b^3}{3a^3}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2b^3}{3a^3}\int_{-a}^{+a}\frac{(a^2-x^2)^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

ou bien

$$(1)\qquad \frac{2b^3}{3a^3}\int_{-a}^{+a}\frac{a^4-2a^2x^2+x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

Or, on a

$$\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pi,\qquad \int_{-a}^{+a}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pi\frac{a^2}{2},$$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{x^4\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{3\pi a^4}{8}.$$

Le moment d'inertie cherché sera donc

$$\pi\frac{2b^3}{3a^3}\left(a^4-a^4+\frac{3}{8}a^4\right),$$

c'est-à-dire $\frac{\pi b^3 a}{4}$. Pour $a=b$, on retrouve l'expression du moment d'inertie d'un cercle par rapport à son diamètre $\pi\frac{a^4}{4}$.

VI. — Moments d'inertie de quelques solides.

148. *Moment d'inertie du parallélépipède rectangle par rapport à une de ses arêtes.* — Prenons l'arête en question pour axe des z; supposons le parallélépipède homogène et de densité égale à l'unité. Soient a, b, c les arêtes de ce solide; prenons-les respectivement pour axes

des x, des y et des z. Le moment d'inertie cherché sera

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c dx\,dy\,dz(y^2 + x^2),$$

c'est-à-dire

$$\frac{abc}{3}(a^2 + b^2).$$

Si l'on demandait le moment d'inertie de ce parallélépipède par rapport à un axe quelconque parallèle à son arête c, en appelant α et β les distances de l'arête c aux plans des yz et des xz, le moment cherché serait égal au moment d'un parallélépipède ayant pour arêtes $a + \alpha$, $b + \beta$, c, diminué du moment de deux parallélépipèdes ayant pour arêtes $a + \alpha$, β, c et a, $b + \beta$, c, et augmenté du moment d'un parallélépipède ayant pour arètes α, β, c, les moments de ces parallélépipèdes étant pris par rapport à leur arête c.

Le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle, dont les dimensions seraient $2a$, $2b$, $2c$, pris par rapport à un axe parallèle à l'arête c passant par le centre de gravité, serait

$$4\,\frac{a.b.2c}{3}(a^2 + b^2) = \frac{8abc}{3}(a^2 + b^2).$$

149. *Moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe.* — Soit R le rayon, h la hauteur de ce cylindre; nous prendrons pour élément de volume un prisme dont les arêtes seront parallèles à l'axe et dont la base sera un trapèze curviligne, limité d'une part à deux circonférences de rayons r et $r + dr$ ayant leurs centres sur l'axe et leurs plans perpendiculaires à l'axe, et d'autre part à deux rayons vecteurs issus de l'axe et faisant entre eux l'angle $d\theta$; la hauteur de ce prisme sera dz, en sorte que son volume sera $r\,d\theta\,dr\,dz$, et son moment d'inertie $r^2 r\,d\theta\,dr\,dz$ ou $r^3\,d\theta\,dr$; le moment d'inertie total cherché sera donc

$$\int_{z=0}^{z=h}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=R} r^3\,dr\,d\theta\,dz,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2}R^4 h.$$

Si l'on demandait le moment d'inertie d'une couche cylindrique de rayons R et $R+e$ et de hauteur h par rapport à son axe, le moment serait

$$\frac{\pi}{2}(R+e)^4 h - \frac{\pi}{2}R^4 h = \frac{\pi}{2}h(e^4 + 4e^3 R + 6e^2 R^2 + 4eR^3).$$

150. *Moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène pris par rapport à l'un de ses axes.* — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de cet ellipsoïde; supposons que l'on demande le moment pris par rapport à l'axe des z : ce moment sera

$$I=\int\int\int dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2)$$

ou bien

$$(1)\qquad I=\int\int\int dx\,dy\,dz\,x^2+\int\int\int dx\,dy\,dz\,y^2.$$

Occupons-nous d'abord de la première intégrale

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,x^2.$$

Si nous intégrons par rapport à z entre les limites

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad z=+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

qui correspondent à des valeurs constantes de x et y et satisfaisant à l'équation de l'ellipsoïde, nous réduisons notre intégrale à

$$(2)\qquad 2c\int\int dx\,dy\,x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

si maintenant nous laissons x constant et si nous intégrons par rapport à y, nous devrons faire varier y entre des limites fonctions de x, que nous obtiendrons en faisant $z=0$ dans l'équation de l'ellipsoïde; nous effectuerons ainsi la somme des moments d'une série de prismes compris entre deux plans parallèles au plan des zy situés à la distance dx l'un de l'autre; les limites de y sont

$$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad y=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

or on a

$$\int_{-r}^{+r} dy'\sqrt{r^2-y'^2}=\frac{1}{2}\pi r^2,$$

ainsi que l'on peut s'en assurer en observant que l'intégrale précédente représente l'aire d'un demi-cercle de rayon r. Si dans cette formule on fait

$$r=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad \text{et}\quad y'=\frac{y}{b},$$

on a

$$\frac{1}{b}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

l'intégrale (2) devient alors

$$(3)\qquad \pi bc\int dx\,x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

il reste à faire maintenant la somme des moments d'inertie de toutes les tranches analogues à celle dont nous venons de calculer le moment d'inertie, et comprises entre les plans parallèles au plan des yz situés aux distances $-a$ et $+a$ du plan des yz, c'est-à-dire qu'il faut prendre l'intégrale (3) entre les limites $-a$ et $+a$; on a alors

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,x^2 = \frac{2}{15}\pi a^3 bc;$$

on trouverait de même,

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,y^2 = \frac{2}{15}\pi b^3 ac,$$

et la formule (1) donne

$$\mathrm{I} = \frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2);$$

si l'on fait $a = b = c = \mathrm{R}$; on obtient le moment d'inertie d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres, ou

$$\frac{8}{15}\pi \mathrm{R}^5.$$

On peut traiter le problème d'une autre façon; posons

$$x = a\varepsilon\cos\psi\sin\theta,$$
$$y = b\varepsilon\sin\psi\sin\theta,$$
$$z = c\varepsilon\cos\theta.$$

Ces valeurs pour $\varepsilon = 1$ satisfont à l'équation de l'ellipsoïde, et si l'on fait varier ε entre o et -1, θ entre o et π, ψ entre o et 2π, on obtiendra une fois, et une fois seulement, les coordonnées de tous les points de l'intérieur et de la surface de l'ellipsoïde. En prenant alors ε, θ, ψ pour variables, l'intégrale (1) devient

$$\mathrm{I} = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\varepsilon\,d\theta\,d\psi\,\varepsilon^2(a^2\cos^2\psi\sin^2\theta + b^2\sin^2\psi\sin^2\theta)\Theta,$$

Θ désignant, pour abréger, le déterminant

$$\Theta = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\varepsilon}, & \dfrac{dx}{d\theta}, & \dfrac{dx}{d\psi} \\ \dfrac{dy}{d\varepsilon}, & \dfrac{dy}{d\theta}, & \dfrac{dy}{d\psi} \\ \dfrac{dz}{d\varepsilon}, & \dfrac{dz}{d\theta}, & \dfrac{dz}{d\psi} \end{vmatrix} = abc\varepsilon^2 \sin\theta.$$

On a donc

$$\mathrm{I} = abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon^4 d\theta\, d\psi\, d\varepsilon \sin\theta (a^2 \cos^2\psi \sin^2\theta + b^2 \sin^2\psi \sin^2\theta).$$

En intégrant par rapport à ε, on a

$$\mathrm{I} = \frac{abc}{5} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta\, d\psi \sin^3\theta\, (a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi).$$

En intégrant par rapport à ψ et en observant que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\psi\, d\psi = \int_0^{2\pi} \sin^2\psi\, d\psi = \pi,$$

on a

$$\mathrm{I} = \frac{\pi abc}{5} (a^2 + b^2) \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta,$$

ou, enfin,

$$\mathrm{I} = \frac{4\pi abc}{15} (a^2 + b^2).$$

Les variables ε, θ, ψ dont nous venons de faire usage sont très-utiles dans un grand nombre de questions d'analyse et de mécanique; les courbes tracées sur la surface de l'ellipsoïde, et qui ont pour équations : $\theta =$ const. et $\psi =$ const. sont des courbes conjuguées, c'est-à-dire tangentes en leur point de croisement à deux diamètres conjugués de l'indicatrice (*voir* Note I).

151. *Moment d'inertie d'un solide de révolution par rapport à son axe.* — Considérons le cylindre d'épaisseur dr compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe, son moment d'inertie est, d'après ce que nous avons vu, $\frac{\pi}{2}R^4\,dr$, R désignant son rayon. Le moment d'inertie de tout le solide sera donc

$$\frac{\pi}{2}\int R^4\,dr.$$

Application au cône de révolution. — Soient ρ le rayon de base du cône, h sa hauteur, le rayon R correspondant à la hauteur z comptée à partir du sommet est donné par la formule

$$\frac{R}{\rho} = \frac{z}{h} \quad \text{ou} \quad R = \frac{\rho z}{h};$$

le moment d'inertie cherché est donc

$$\frac{\pi}{2}\int_0^h \frac{\rho^4 z^4}{h^4}\,dz = \frac{\pi\rho^4 h}{10}.$$

CHAPITRE VI.

ÉQUILIBRE DES FILS ET DES CORDONS.

I. — Équilibre des cordons.

152. On donne le nom de *polygone funiculaire* à un système de points A, B, C,... liés entre eux par des cordons inextensibles; nous allons nous proposer de trouver les conditions d'équilibre d'un système de cette nature.

Considérons d'abord deux forces agissant aux extrémités d'un même cordon. Pour que ces deux forces se fassent équilibre, il faut que ces forces soient égales, directement opposées et de même direction que le cordon. En effet, s'il y a équilibre, cet équilibre ne devra pas être troublé en solidifiant le cordon, et alors on voit que les forces doivent agir comme nous l'avions annoncé; de plus, on voit que les deux forces doivent agir de manière à tendre le cordon; le cordon une fois tendu, il y aura équilibre, car ce cordon jouira de toutes les propriétés d'un corps solide, puisque les distances mutuelles de ses points sont assujetties à rester invariables. On donne le nom de *tension* du cordon à la valeur commune des forces qui le sollicitent.

Lorsque trois forces agissent sur un même point matériel A par l'intermédiaire de cordons, il faut et il suffit pour l'équilibre que chacune de ces forces soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres. En effet, s'il y a équilibre, cet équilibre ne sera pas troublé en fixant le point A. Considérons alors l'un des cordons aboutissant en A. Pour que la force appliquée à ce cordon le maintienne en équilibre, il faut que cette force agisse dans le sens du cordon. Ceci posé, solidifions le système. Les trois forces, agissant dans le sens des cordons, pourront être appliquées en A, et pour qu'il y ait équilibre, il faut que chacune d'elles soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Enfin si la condition précédente est remplie, il y aura équilibre. En effet, pour un déplacement compatible avec les liaisons, c'est-à-dire tel, que les cordons restent rectilignes et inextensibles, les forces extérieures se feront équilibre; quant aux forces intérieures, leurs travaux seront nuls, puisque les distances des points infiniment voisins sont invariables, et que les forces intérieures n'agissent qu'entre points infiniment voisins.

Considérons, en dernier lieu, un cordon ayant la liberté de glisser dans un anneau. Pour que ce cordon soit en équilibre, il faudra que les forces agissant à ses extrémités soient égales. En effet, nous savons déjà que les forces doivent être dirigées dans le sens des cordons; en désignant alors ces forces par P et Q, et les déplacements virtuels de leurs points d'application dirigés suivant ces forces par δp et δq, il faudra que

$$P\delta p + Q\delta q = 0;$$

mais si δp et δq sont compatibles avec les liaisons, le cordon ne devant pas changer de longueur, on a

$$\delta p = -\delta q;$$

donc l'équation précédente donne

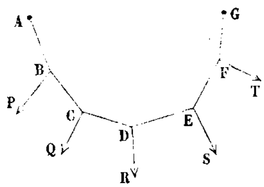
$$(P - Q)\,\delta p = 0,$$

c'est-à-dire $P = Q$. C. Q. F. D.

II. — Équilibre du polygone funiculaire.

153. Considérons maintenant un polygone funiculaire ABCDEFG (*fig.* 33) fixé à ses extrémités A et G ; soient

Fig. 33.



P, Q, R, S, T les forces qui sollicitent ses divers sommets; pour que le polygone soit en équilibre, il faut que les forces P, Q, R, . . . fassent équilibre aux tensions des cordons et aux forces de liaison en vertu desquelles les points A et G restent fixes.

Or, si l'on considère le point D par exemple, pour que ce point D soit en équilibre, il faut que la force DR qui le sollicite soit égale et directement opposée à la résultante des tensions des cordes DC et DE, et que la tension de chaque corde soit égale et directement opposée à la résultante de R et de la tension de l'autre corde. En représentant alors par (AB), (BC), (CD),... les tensions des cordons AB, BC,..., on aura

$$
\begin{aligned}
(CB) &= \text{résult. de } (BA) \text{ et } P,\\
(DC) &= \text{résult. de } (CB) \text{ et } Q\\
&= \text{résult. de } (BA),\ P \text{ et } Q,\\
(ED) &= \text{résult. de } (DC) \text{ et } R\\
&= \text{résult. de } (BA),\ P,\ Q \text{ et } R,
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite; ainsi *une tension quelconque est égale à la résultante de la première tension et de toutes les forces qui sollicitent le polygone depuis son origine jusqu'au point où agit cette tension.*

Il résulte de là que les forces (BA), P, Q, R, S, T, (FG) doivent se faire équilibre. Ces conclusions sont une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles, ou, si l'on veut, du principe de l'équilibre des corps solides.

154. Réciproquement, si l'on a

$$\begin{aligned}(CB) &= \text{résult. } (BA) \text{ et } P,\\ (DC) &= \text{résult. } (BA) \text{ et } P, Q,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

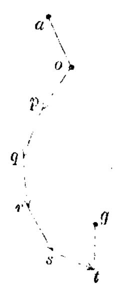
il y aura équilibre, car ces équations équivalent à

$$\begin{aligned}(CB) &= \text{résult. } (BA) \text{ et } P,\\ (DC) &= \text{résult. } (CB) \text{ et } Q,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

qui expriment que chacun des sommets est en équilibre.

Ceci posé, par un point o (*fig.* 34) menons op parallèle de même sens et égale à P, menons pq parallèle de même sens et égale à Q, ...; ceci fait, prenons oa paral-

Fig. 34.



lèle de même sens et égale à (BA), tg parallèle de même sens et égale à (FG); si le polygone funiculaire est en équilibre, la ligne polygonale $aopqrstg$ devra se fermer d'elle-même, et le point a devra coïncider avec le point g; les tensions (AB), (BC), (CD),... seront alors représentées par les droites ao, ap, aq, ar,.... Cette remarque est due à Varignon. Rapportons maintenant le polygone à trois axes ox, oy, oz; soient X_1, Y_1, Z_1 les projections de P sur les axes, X_2, Y_2, Z_2 les projections de Q,...; soient α_1, β_1, γ_1 les angles que AB fait avec les axes, α_2, β_2, γ_2 les angles que BC fait avec les axes,..., on aura

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{BA}) \cos\alpha_1 = \mathrm{X}_1 + (\mathrm{CB}) \cos\alpha_2, \\ (\mathrm{CB}) \cos\alpha_2 = \mathrm{X}_2 + (\mathrm{DC}) \cos\alpha_3, \\ (\mathrm{DC}) \cos\alpha_3 = \mathrm{X}_3 + (\mathrm{ED}) \cos\alpha_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

On aura deux autres systèmes d'équations analogues, et à ces formules il faudra joindre

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{AB}\cos\alpha_1 + \mathrm{BC}\cos\alpha_2 + \ldots = \mathrm{AG}\cos(\mathrm{AG}, ox), \\ \mathrm{AB}\cos\beta_1 + \mathrm{BC}\cos\beta_2 + \ldots = \mathrm{AG}\cos(\mathrm{AG}, oy), \\ \mathrm{AB}\cos\gamma_1 + \mathrm{BC}\cos\gamma_2 + \ldots = \mathrm{AG}\cos(\mathrm{AG}, oz), \end{array}\right.$$

$$(3) \qquad \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1, \ldots.$$

Soit n le nombre des sommets du polygone funiculaire, les équations (1) et leurs analogues sont au nombre de $3n$, les équations (2) sont au nombre de 3, les équations (3) au nombre de $n+1$; nous avons donc en tout $3n+3+n+1$ ou $4n+4$ équations entre X_1, Y_1, Z_1,..., α_1, β_1, γ_1,... (BA), (CB),..., c'est-à-dire entre $3n+3(n+1)+n+1=7n+4$ quantités. On pourra donc se donner les $3n$ quantités X_1, Y_1, Z_1,..., c'est-à-dire P, Q, R,..., et l'on pourra calculer les tensions et les directions des côtés du polygone funiculaire; on pourra au contraire se donner la forme du polygone et calculer les forces P, Q, R, ... à l'aide des équations (1); mais ce dernier problème sera indéterminé, parce que l'on pourra choisir arbitrairement une partie des tensions.

III. — Problème des ponts suspendus.

155. Dans la théorie des ponts suspendus, il s'agit de déterminer un polygone funiculaire plan, de telle sorte que les projections horizontales de ses divers éléments soient constantes, et de telle sorte que chacun des sommets supporte une même charge p. Les extrémités du polygone sont à la même hauteur; la longueur totale du polygone est donnée.

Soient l_1, l_2, $l_3, \ldots, l_n$ les longueurs respectives des côtés, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les angles qu'ils font avec une horizontale prise pour axe des x; soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les tensions des côtés, et x la projection donnée de chaque côté; soit enfin L la longueur totale du polygone : on a évidemment

$$(1)\qquad t_1\cos\alpha_1 = t_2\cos\alpha_2 = t_3\cos\alpha_3 = \ldots = t_n\cos\alpha_n,$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &t_1\sin\alpha_1 - t_2\sin\alpha_2 = t_2\sin\alpha_2 - t_3\sin\alpha_3 = \ldots \\ &\qquad = t_{n-1}\sin\alpha_{n-1} - t_n\sin\alpha_n = p, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad l_1\cos\alpha_1 = l_2\cos\alpha_2 = \ldots = l_n\cos\alpha_n = x,$$

$$(4)\qquad l_1 + l_2 + \ldots + l_n = \mathrm{L},$$

$$(5)\qquad l_1\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2 + \ldots + l_n\sin\alpha_n = 0:$$

en tout $3n$ équations et $3n$ inconnues $t_1, t_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Des formules (1) et (2) on tire

$$t_1\cos\alpha_1 - t_2\cos\alpha_2 = 0, \ldots,$$
$$t_1\sin\alpha_1 - t_2\sin\alpha_2 = p, \ldots.$$

d'où

$$t_1 = \frac{p \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad t_2 = \frac{p \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}, \ldots,$$

$$t_2 = \frac{p \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad t_3 = \frac{p \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}, \ldots$$

Ces formules feront connaître $t_1, t_2, \ldots$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ seront calculés en fonction de l_1, $l_2, \ldots$. Voyons comment on calculera $l_1, l_2, \ldots$; de (1) et (2) on tire

$$(6)\quad \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2 = \operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3 = \ldots = \operatorname{tang}\alpha_{n-1} - \operatorname{tang}\alpha_n;$$

de (3) on tire

$$\cos \alpha_i = \frac{x}{l_i}, \quad \sin \alpha_i = \frac{\sqrt{l_i^2 - x^2}}{l_i}, \quad \operatorname{tang} \alpha_i = \frac{\sqrt{l_i^2 - x^2}}{x},$$

et par suite (5) et (6) deviennent

$$(7)\quad \sqrt{l_1^2 - x^2} - \sqrt{l_2^2 - x^2} = \sqrt{l_2^2 - x^2} - \sqrt{l_3^2 - x^2} = \ldots,$$

$$(8)\quad \sqrt{l_1^2 - x^2} + \sqrt{l_2^2 - x^2} + \ldots = 0,$$

on posera alors

$$\sqrt{l_i^2 - x^2} = u_i, \quad u_2 - u_1 = \delta,$$

et les équations (7) et (8) donneront

$$u_1 = -\frac{n-1}{2}\delta, \quad u_2 = u_1 + \delta, \quad u_3 = u_1 + 2\delta, \ldots, \quad u_n = u_1 + (n-1)\delta.$$

En substituant ces valeurs dans (4), on aura une équation en δ qui fera connaître cette quantité et par suite $u_1, u_2, \ldots,$ c'est-à-dire $l_1, l_2, \ldots,$ et le problème sera résolu. On simplifie beaucoup les calculs en admettant que n est impair et que l'élément du milieu est horizontal; mais le calcul que nous venons de faire s'applique au cas où les points d'attache ne seraient pas à la même hauteur.

IV. — Équilibre d'un fil flexible.

156. Considérons un fil inextensible homogène dont tous les éléments sont sollicités par des forces de même ordre que ces éléments, et proposons-nous de déterminer les conditions d'équilibre de ce fil.

Rapportons-le à trois axes rectangulaires ox, oy, oz; soient x, y, z les coordonnées de l'un quelconque M de ses points; soit ds la longueur d'un élément compté à partir du point M, et ε la masse de l'unité de longueur du fil. Si l'on coupait le fil au point M, l'équilibre se trouverait rompu, mais on le rétablirait à l'aide d'une force T appliquée en M, et à laquelle on donne le nom de *tension au point* M.

Il est facile de voir que la tension doit être tangente à la courbe affectée par le fil. En effet, considérons un arc infiniment petit MN, les forces qui le sollicitent sont: 1° les tensions exercées en M et en N; 2° les forces extérieures dont l'intensité est de l'ordre de MN; si alors on suppose l'élément MN solidifié, ce qui ne trouble pas l'équilibre, et si l'on prend les moments par rapport à un axe passant en N, les moments des forces extérieures seront du second ordre, car leur intensité est infiniment petite et leur bras de levier l'est également, le moment de la tension en N est nul; donc le moment de la tension en M doit être du second ordre; or ceci ne peut avoir lieu que si la tension se trouve à une distance du second ordre du point N, car la tension est une force finie, puisqu'elle doit faire équilibre à la résultante de toutes les forces qui sollicitent la portion du fil située d'un même côté de M; ceci revient à dire que la tension est tangente au fil.

Pour bien comprendre la valeur de ce raisonnement, il faut observer que l'on augmente le moment des forces extérieures en les supposant appliquées en M et en prenant leurs moments individuels avec le même signe, et alors encore on voit que la somme de leurs moments est du second ordre.

Écrivons que l'arc $MN = ds$ solidifié est en équilibre; les équations des moments ont déjà été considérées implicitement, elles nous ont fait connaître la direction de la tension; il n'y a plus qu'à considérer les équations de projection.

157. Soit T la tension en M, $T + dT$ la tension en N; soient X, Y, Z les projections de la force qui sollicite l'élément MN rapportée à l'unité de masse du fil. La projection de la force T sur l'axe des x sera $-T\frac{dx}{ds}$, la projection de la force $T + dT$ sera $T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right)$, la projection de la force extérieure sera $X\varepsilon\, ds$; on aura donc

$$X\varepsilon\, ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

et de même

$$Y\varepsilon\, ds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$Z\varepsilon\, ds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0;$$

ou bien

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X\varepsilon + T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\frac{dT}{ds} &= 0,\\ Y\varepsilon + T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{dT}{ds} &= 0,\\ Z\varepsilon + T\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{dT}{ds} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions la première de ces équations par dx, la deuxième par dy, la troisième par dz, et ajoutons, en observant que

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx\,d^2x}{ds^3} + \frac{dy\,d^2y}{ds^3} + \frac{dz\,d^2z}{ds^3} = 0,$$

il viendra

$$(2)\qquad \varepsilon(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) + \frac{d\mathrm{T}}{ds}\,ds = 0.$$

Lorsque la quantité $\varepsilon(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ sera une différentielle exacte $d\varphi(x, y, z)$, l'équation précédente fera connaître T, et l'on aura

$$\varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0) = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T},$$

x_0, y_0, z_0 et T_0 désignant les valeurs de x, y, z, T en un point déterminé. On voit que T ne dépendra que de $\varphi(x, y, z)$. T une fois connu, les équations (1), ou même deux d'entre elles, feront connaître la forme de la courbe affectée par le fil. La fonction φ joue ici le même rôle que le travail dans le théorème des forces vives, comme nous le verrons plus loin.

Lorsque $\varepsilon(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ ne sera pas une différentielle exacte, on pourra trouver T comme il suit; on multipliera la seconde équation par $\frac{dz}{ds}$, la troisième par $\frac{dy}{ds}$ et l'on retranchera les équations l'une de l'autre; on aura ainsi

$$\varepsilon\left(\mathrm{Y}\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}\frac{dy}{ds}\right) + \mathrm{T}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{dz}{ds} - \frac{d^2z}{ds^2}\,\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

On obtiendra deux équations analogues à celle-ci entre lesquelles on pourra éliminer T : ce seront les équations différentielles de la courbe cherchée.

L'élimination de T et de $\frac{dT}{ds}$ entre les formules (1) conduit à la relation

$$\begin{aligned} X(d^2y\,dz - d^2z\,dy) + Y(d^2z\,dx - d^2x\,dz) \\ + Z(d^2x\,dy - d^2y\,dx) = 0, \end{aligned}$$

et l'on voit que les coefficients de X, Y, Z sont, à un facteur près, les cosinus des angles que la normale au plan osculateur fait avec les axes; donc la force (X, Y, Z) est située dans le plan osculateur de la courbe.

158. Problème. — *Trouver la forme d'équilibre d'un fil flexible tendu sur une surface donnée par son équation*

$$(3) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Dans ce cas, la force (X, Y, Z) est normale à la surface, et, par suite, à la courbe affectée par le fil, car la seule force qui sollicite le fil est la réaction de la surface. Mais alors on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

En effet, le premier membre de cette équation divisé par $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ et par ds représente le cosinus de l'angle que la force (X, Y, Z) fait avec l'élément ds de la courbe affectée par le fil; mais alors l'équation (2) donne

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad T = \text{const.};$$

ainsi :

159. *La tension est constante dans toute la longueur du fil.*

En introduisant cette hypothèse de T = const. dans les formules (1), elles deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon X + T\dfrac{d^2x}{ds^2} = 0, \\ \varepsilon Y + T\dfrac{d^2y}{ds^2} = 0. \\ \varepsilon Z + T\dfrac{d^2z}{ds^2} = 0. \end{cases}$$

En faisant passer εX, εY, εZ, dans les seconds membres, en élevant au carré et en ajoutant, on trouve

$$\frac{T^2}{ds^4}\left[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right] = \varepsilon^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

ou bien, en désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe,

$$\frac{T^2}{\rho^2} = \varepsilon^2 F^2;$$

F désignant la force qui sollicite le fil, on en conclut

$$\rho = \frac{T}{\varepsilon F}.$$

Le rayon de courbure varie donc en raison inverse de la réaction normale de la surface.

Nous avons vu que la force F était située dans le plan osculateur de la courbe; il en résulte que, la force F étant normale à la surface,

160. *Le plan osculateur de la courbe affectée par le fil est en chaque point normal à la surface, et, par suite, la force* F *est dirigée suivant le rayon de courbure; elle varie, comme nous avons vu, proportionnellement à la courbure.*

Les équations différentielles de la courbe s'obtiennent en éliminant T entre les équations (4); on a ainsi

$$\frac{1}{X}\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{Y}\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{Z}\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Or la force F étant normale à la surface, X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale à la surface fait avec les axes, c'est-à-dire à $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$. En remplaçant alors dans les formules précédentes X, Y, Z par $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$, il vient

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{ds^2}:\frac{df}{dx}=\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{df}{dy}=\frac{d^2z}{ds^2}:\frac{df}{dz}.$$

161. L'intégration de ces équations est un problème difficile, et en général au-dessus des forces de l'analyse. Toutefois on peut démontrer qu'elles définissent une *ligne géodésique* de la surface, c'est-à-dire une ligne qui est la plus courte possible, entre deux quelconques de ses points.

Soient, en effet, x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 deux points pris sur la surface, la longueur S de l'arc qui joint ces deux points sera donnée par la formule

$$S=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

On déduit, en faisant varier les deux membres,

$$\delta S=\int\frac{dx\,\delta\,dx+dy\,\delta\,dy+dz\,\delta\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

ou

$$\delta S=\int\frac{dx\,\delta\,dx+dy\,\delta\,dy+dz\,\delta\,dz}{ds}.$$

En intégrant par parties, il vient en observant que la quantité qui sort de dessous le signe $\int$ est nulle aux limites,

$$\delta S=-\int\left(\delta x\,d\,\frac{dx}{ds}+\delta y\,d\,\frac{dy}{ds}+\delta z\,d\,\frac{dz}{ds}\right).$$

On doit avoir pour la ligne minima

$$(6)\qquad \delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

équation à laquelle il faut joindre l'équation (3). En faisant varier cette équation, on a

$$(7)\qquad \delta x \frac{df}{dx} + \delta y \frac{df}{dy} + \delta z \frac{df}{dz} = 0.$$

Il faut maintenant éliminer l'une des variations δx, δy, δz, et égaler à zéro les coefficients des variations restantes; mais on peut aussi employer la méthode des multiplicateurs. A cet effet on multipliera (6) par λ, on ajoutera à (7) et on égalera à zéro les coefficients de δx, δy, δz, on aura ainsi

$$\lambda d\frac{dx}{ds} + \frac{df}{dx} = 0, \quad \lambda d\frac{dy}{ds} + \frac{df}{dy} = 0, \quad \lambda d\frac{dz}{ds} + \frac{df}{dz} = 0,$$

d'où l'on déduira les formules (5) par l'élimination de λ. On remarquera, du reste, l'identité de ces dernières formules avec les équations (4), dans lesquelles on a substitué $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$, à εX, εY, εZ et λds à T. Les constantes d'intégration se détermineront, dans tous les cas, en exprimant que la courbe passe par deux points donnés (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1).

V. — Théorie de la chainette.

162. Problème. — *Déterminer la forme d'équilibre d'un fil flexible homogène et pesant attaché en deux points fixes* A *et* B.

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$\varepsilon X + T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} = 0, \; \ldots.$$

Si dans ces formules on fait $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, c'est-à-dire si l'on prend l'axe des z vertical et dirigé de bas en haut, il vient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0, \\ T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} &= 0, \\ T\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds} &= \varepsilon g. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières équations s'intègrent immédiatement et donnent

$$T\frac{dx}{ds} = a,$$

$$T\frac{dy}{ds} = b;$$

a et b désignant deux constantes, on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

et, par suite,

$$y = \frac{b}{a}x + \text{const.};$$

ce qui prouve que la courbe cherchée est plane et verticale. Ce résultat était évident *à priori*.

Si l'on prend alors pour plan des zx le plan même de la courbe, les équations (1) se réduiront à deux :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} T\frac{ds}{dx} &= a, \\ T\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds} &= g\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

En intégrant la dernière équation, on a

$$T\frac{dz}{ds} = g\varepsilon s + c,$$

c désignant une nouvelle constante. Cette équation, combinée avec la première équation (2), donne, après avoir éliminé T,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g\varepsilon}{a}s + \frac{c}{a},$$

ou bien, en différentiant par rapport à x et en représentant $\frac{g\varepsilon}{a}$ par k,

$$(3)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

On intégrera cette équation en posant

$$(4)\qquad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dz}p.$$

On aura ainsi

$$p\frac{dp}{dz} = k\sqrt{1+p^2}$$

ou

$$\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = k\,dz.$$

On en conclut, en intégrant et en désignant par i une constante,

$$\sqrt{1+p^2} = kz + i$$

ou bien

$$p = \sqrt{(kz+i)^2 - 1},$$

c'est-à-dire, en vertu de (4),

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{(kz+i)^2 - 1};$$

d'où

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{(kz+i)^2 - 1}}.$$

En désignant par j une nouvelle contante, il vient

$$x + j = \frac{1}{k} \log \text{nép.}\left(kz + i + \sqrt{(kz+i)^2 - 1}\right)$$

ou bien

$$e^{(x+j)k} = kz + i + \sqrt{(kz+i)^2 - 1}.$$

On en tire

$$e^{-(x+j)k} = kz + i - \sqrt{(kz+i)^2 - 1},$$

et, par suite, en ajoutant,

$$(5) \qquad 2(kz + i) = e^{(x+j)k} + e^{-(x+j)k}.$$

163. Prenons pour axes l'horizontale du point A et la verticale du point B; soient α la distance horizontale, β la distance verticale des points A et B, en sorte que les coordonnées de A soient α et o, celles de B, o et β; soit l la longueur du fil, on peut déterminer i, j, k en fonction de α, β, l; en effet, l'équation (5) doit être satisfaite pour $x = \alpha$, $z = 0$ et pour $x = 0$, $z = \beta$; on a donc

$$(6) \qquad 2i = e^{(\alpha+j)k} + e^{-(\alpha+j)k},$$

$$(7) \qquad 2k\beta + 2i = e^{jk} + e^{-jk};$$

on tire ensuite de (5), en différentiant,

$$2\frac{dz}{dx} = e^{k(x+j)} - e^{-k(x+j)};$$

donc

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2k(x+j)} + e^{-k(x+j)} + 2\right],$$

et en extrayant les racines,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{k(x+j)} + e^{-k(x+j)}\right].$$

En intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, on aura

$$(8) \qquad l = \frac{1}{2k}\left[e^{k(\alpha+j)} - e^{-k(\alpha+j)} - e^{kj} + e^{-kj}\right].$$

Les formules (6), (7) et (8) permettront de calculer les constantes i, j, k en fonction des données α, β, l de la question. Ces équations sont transcendantes; leurs solutions ne sont pas toujours réelles. On conçoit en effet que la longueur l doit être supérieure ou au moins égale à la distance des points A et B.

En transformant les coordonnées et en remplaçant x par $x - j$, z par $z - \frac{i}{k}$, l'équation (5) prend la forme très-simple

$$z = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right).$$

Cette équation représente une courbe à laquelle on a donné le nom de *chaînette*, et dont nous allons étudier les propriétés.

164. La tension en un point quelconque se calculera à l'aide de la formule

$$d\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0,$$

d'où l'on conclura

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = a,$$

a désignant une constante; pour déterminer cette constante, on fera successivement $x = 0$, $x = \alpha$; en désignant alors par μ_0 et μ_1 les valeurs correspondantes de $\frac{dx}{ds}$, par T_0 et T_1 celles de T, on aura

$$T_0\mu_0 = a = T_1\mu_1.$$

Mais en projetant toutes les forces qui agissent sur le fil, on a

$$T_0\mu_0 + T_1\mu_1 = 0,$$
$$T_0\nu_0 + T_1\nu_1 + lg\varepsilon = 0,$$

ν_0 et ν_1 désignant les valeurs de $\frac{dy}{ds}$ en A et B. Ces deux équations feront connaître T_0, T_1, et par suite a.

§ VI. — Étude des propriétés de la chainette.

165. Reprenons l'équation de le chaînette

$$z = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}), \tag{1}$$

on en tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}), \tag{2}$$

et l'on reconnaît que la chaînette est symétrique par rapport à l'axe des z, que le point le plus bas a pour coordonnées 0 et $\frac{1}{k}$; enfin l'ordonnée de la courbe ainsi que sa dérivée vont en croissant quand la valeur absolue de x augmente; cette courbe n'a pas d'asymptotes.

En différentiant (2), on a

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{k}{2}(e^{kx} + e^{-kx}). \tag{3}$$

Des formules (1), (2) et (3) on tire

$$k^2 z = \frac{d^2 z}{dx^2}, \tag{4}$$

$$k^2 z^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \tag{5}$$

L'équation (5) permet de rectifier l'arc de chaînette compté à partir du point le plus bas; en effet elle donne

$$kz = \frac{ds}{dx} \tag{6}$$

ou

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right);$$

par suite, en intégrant depuis $x = 0$,

$$s = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} - e^{-kx}\right) = \frac{1}{k}\frac{dz}{dx}, \tag{7}$$

l'équation (6) donne

$$k\int z\,dx = s$$

ou

$$\int z\,dx = \frac{s}{k}.$$

Donc, *l'aire d'un segment de chaînette est égal à l'aire d'un rectangle ayant pour base l'arc correspondant et pour hauteur le paramètre* $\frac{1}{k}$.

Des équations (4) et (5) on tire

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z}{dx^2}} = kz^2 = z\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Donc, *dans la chaînette le rayon de courbure est proportionnel au carré de l'ordonnée;*

Le rayon de courbure est égal à la normale;

La normale est proportionnelle au carré de l'ordonnée.

Cette dernière propriété fournit une construction de la normale, et, par suite, de la tangente. Des équations (6) et (7), on tire

$$k^2 z^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

$$k^2 s^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

et par soustraction

$$k^2(z^2 - s^2) = 1,$$

ou bien

$$z^2 = \frac{1}{k^2} + s^2.$$

Ainsi, *l'arc de chaînette, compté à partir du point le plus bas, est le côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est l'ordonnée et dont le paramètre $\frac{1}{k}$ est l'autre côté.*

De là un moyen de rectifier l'arc de chaînette lorsque la courbe est construite et, par suite, de construire un rectangle égal à l'aire d'un segment de chaînette.

L'équation (7)

$$s = \frac{1}{k}\,\frac{dz}{dx}$$

montre que l'arc de chaînette est le côté d'un triangle rectangle dont l'autre côté est le paramètre $\frac{1}{k}$ et dont l'angle opposé est l'angle que fait la tangente avec l'axe des x ou l'angle que fait la normale avec l'ordonnée.

Il résulte de là et du théorème précédent, que l'on construit un triangle rectangle, ayant pour hypoténuse l'ordonnée, en abaissant du pied de l'ordonnée une perpendiculaire sur la tangente, ce triangle aura pour côté $\frac{1}{k}$ et s, et la distance du pied de l'ordonnée à la tangente sera $\frac{1}{k}$, c'est-à-dire constante. (Pour comprendre ce raisonnement il est bon de faire la figure.)

Mais la perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée sur la tangente rencontre cette tangente en un point dont la distance au point de contact est s ; le pied de la perpendiculaire en question appartient donc à une développante de chaînette dont l'origine serait au point le plus bas de la chaînette ; enfin la perpendiculaire constante $\frac{1}{k}$ abaissée du pied de l'ordonnée sur la tangente à la chaînette est la tangente de la développante; donc :

166. *La développante de chaînette dont l'origine est au point le plus bas est une courbe dans laquelle la tangente est constante.*

La courbe en question porte le nom de *tractrice*. Son équation différentielle résulte de sa définition, elle est

$$\frac{z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\frac{dz}{dx}} = \frac{1}{k},$$

ou

$$z^2\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] = \frac{1}{k^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

Cette équation donne

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{k^2 z^2}{1-k^2 z^2},$$

ou bien

$$\frac{dz\sqrt{1-k^2z^2}}{kz} = dx,$$

c'est-à-dire

$$x + \text{const.} = \frac{1}{k}\sqrt{1-k^2z^2} - \frac{1}{k}\log\text{nép.}\ \frac{1+\sqrt{1-k^2z^2}}{kz}.$$

Pour $z = \frac{1}{k}$, x doit s'évanouir; on aura donc

$$\text{const.} = 0,$$

et, par suite,

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{1-k^2z^2} - \frac{1}{k}\log\text{nép.}\ \frac{1+\sqrt{1-k^2z^2}}{kz}.$$

On voit que pour $z = \infty$ on a $x = 0$; la tractrice a donc pour asymptote l'axe des x; du reste son ordonnée, d'après la manière dont elle est construite, reste positive, et l'équation précédente montre que x croît en valeur absolue quand z décroît.

167. *Parmi toutes les courbes planes qui passent par deux points fixes et qui tournent autour d'un même axe situé dans leur plan, la chaînette est celle qui engendre l'aire minima.*

L'expression de l'aire engendrée par les lignes qui passent par les points donnés est

$$V = 2\pi\int z\,ds;$$

on en tire

$$\delta V = 2\pi\int\left(\delta z\,ds + z\frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + z\frac{dz}{ds}\,\delta\,dz\right).$$

En intégrant par parties et en observant que les limites sont fixes, on a

$$\delta V = 2\pi\int\left[\delta z\,ds - d\left(z\frac{dx}{ds}\right)\delta x - d\left(z\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right].$$

Pour qu'il y ait minimum il faut que

$$ds - d\left(z\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

$$d\left(z\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Ces équations donnent

$$s - z\frac{dz}{ds} = a,$$

$$z\frac{dx}{ds} = c;$$

a et c désignant deux constantes, la dernière équation peut s'écrire

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{z^2}{c^2},$$

ou bien

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}} = dx;$$

d'où l'on tire, en désignant la constante d'intégration par k,

$$x + k = c\,\mathrm{l}\left(\frac{z}{c} + \sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}\right),$$

et, par suite,

$$x = \left(e^{\frac{x+k}{c}} + e^{-\frac{x+k}{c}}\right):$$

c'est l'équation d'une chaînette. Les constantes c et k se détermineront en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés.

On peut observer que le travail d'un système de forces est une différentielle exacte $\delta\varphi$, la fonction φ est maxima ou minima dans la position d'équilibre. Or, dans le cas où les seules forces extérieures sont les poids des divers éléments du système, le travail $\delta\varphi$ est égal à la quantité $\delta\zeta$, dont le centre de gravité se déplace, multipliée par le poids total du système; donc, dans la position d'équilibre, on doit avoir $\delta\zeta = 0$, c'est-à-dire que le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible.

Il résulte de là que *de toutes les courbes de longueur donnée, celle qui a le centre de gravité le plus bas possible est la chaînette.*

En vertu du théorème de Guldin, la surface engendrée par une courbe tournant autour d'un axe situé dans son plan est égale à la longueur de la courbe multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité; donc, la courbe qui aura son centre de gravité le plus bas engendrera l'aire minima; donc :

De toutes les courbes planes ayant une longueur donnée et passant par deux points donnés tournant autour d'un axe situé dans leur plan, celle qui engendre l'aire minima est une chaînette.

Le calcul des variations conduit au même résultat.

VII. — Courbe des ponts suspendus.

168. Si l'on admet que les divers éléments de la chaîne d'un pont suspendu tendent vers zéro, on pourra assimiler cette chaîne à un fil, dont chaque élément serait chargé d'un poids proportionnel à sa projection.

Il est facile alors de calculer la forme de la courbe affectée par le fil. Les équations d'équilibre d'un fil sont

$$X\varepsilon + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + T\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

$$Z\varepsilon + \frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds} + T\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Si l'on fait alors $X = 0$ et $Z = k\frac{dx}{ds}$, on a

$$T\frac{dx}{ds} = a, \quad kx + T\frac{dz}{ds} = b;$$

on en conclut

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b - kx}{a},$$

et par suite

$$z = \frac{b}{a}x - \frac{k}{a}x^2 + c;$$

a, b, c désignant trois constantes, la courbe cherchée est donc une parabole. On déterminera les constantes en exprimant que le fil passe par deux points donnés et que sa longueur totale est donnée.

CHAPITRE VII.

SUR L'ATTRACTION.

I. — Attraction des sphères.

169. Les corps de la nature s'attirent, ainsi que le prouvent les phénomènes astronomiques et certains phénomènes physiques. Nous admettrons que deux éléments infiniment petits s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

Ceci posé, proposons-nous de déterminer l'attraction totale exercée par une sphère homogène sur un élément de masse m. Soit ρ la densité de la sphère, a son rayon, l la distance du point attiré au centre de la sphère.

Prenons pour axe des z la droite qui joint le point attiré m au centre de la sphère et pour origine le point attiré m. Soient r, θ, ψ les coordonnées polaires d'un élément de sphère, le volume de cet élément sera $r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\psi$; sa masse sera $\rho\,r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\psi$. Si l'on désigne par k l'attraction que l'unité de masse exerce sur l'unité de masse à l'unité de distance, l'attraction exercée par l'élément de sphère sur m sera

$$\frac{km\rho\,r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\psi}{r^2} \quad \text{ou} \quad km\rho\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\psi;$$

la composante de cette attraction suivant l'axe des z sera

$$km\rho\,dr\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\psi;$$

les composantes normales à l'axe des z se détruisent deux à deux; par suite, l'attraction totale G de la sphère sera

$$G = km\rho\int\int\int dr \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\psi;$$

l'intégration par rapport à ψ doit se faire entre les limites o et ψ et donne

$$G = 2\pi\, km\rho\int\int dr \sin\theta \cos\theta \, d\theta.$$

Si le point m est situé hors de la sphère, on aura $l > a$, et il faudra intégrer par rapport à r entre des limites qui seront racines de l'équation de la sphère

$$a^2 = r^2 + l^2 - 2lr\cos\theta,$$

c'est-à-dire entre les limites

$$l\cos\theta - \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}, \quad l\cos\theta + \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta};$$

on trouve ainsi

$$G = 4\pi\, km\rho\int \sin\theta\cos\theta \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}\, d\theta.$$

Les limites de θ sont o, et le demi-angle du cône circonscrit à la sphère ayant son sommet à l'origine, c'est-à-dire

$$0 \text{ et } \arcsin\frac{a}{l},$$

on a donc

$$G = -4\pi\, km\rho \frac{1}{3l^2}\left[(a^2 - l^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\arcsin\frac{a}{l}}$$

ou

$$G = \frac{4}{3}\pi\, km\rho \frac{a^3}{l^2}.$$

On peut écrire cette expression ainsi

$$G = k\,\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho \times m}{l^2}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *L'attraction exercée par une sphère homogène sur un point extérieur est la même que si toute la masse de cette sphère était réunie à son centre.*

Si le point attiré est intérieur à la sphère, l'intégrale G,

$$G = km\rho\int\int\int dr \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\psi,$$

ne peut plus s'évaluer de la même façon; on intégrera d'abord, par rapport à ψ, entre o et 2π, et l'on aura, comme plus haut,

$$G = 2\pi\, km\rho\int\int dr \sin\theta \cos\theta \, d\theta.$$

Il faut actuellement intégrer depuis $r = 0$ jusqu'à l'une des racines de l'équation de la sphère, c'est-à-dire jusqu'à

$$l\cos\theta + \sqrt{a^2 - l^2 \sin^2\theta};$$

on trouve alors

$$G = 2\pi\, km\rho\int\left(l\cos\theta + \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}\right) \sin\theta \cos\theta \, d\theta,$$

et l'intégration devra se faire, par rapport à θ, de o à π; on a donc enfin

$$G = \frac{4}{3}\pi km\rho\, l.$$

Théorème II. — *L'attraction d'une sphère sur un point intérieur est proportionnelle à la distance de ce point au centre de la sphère.*

Lorsque le point attiré est sur la sphère, on a $l = a$, la sphère passe par l'origine, G est toujours donné par la formule

$$G = mk\rho\int\int\int dr \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\psi;$$

en intégrant par rapport à ψ, on a

$$G = 2\pi\, mk\rho\int\int dr \cos\theta \sin\theta \, d\theta.$$

Il faut maintenant intégrer depuis $r = 0$ jusqu'à $r = 2a\cos\theta$, ce qui donne

$$G = 4\pi\, mk\rho \int a \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta,$$

et en intégrant enfin de o à $\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$G = \frac{4}{3}\pi\, mk\rho\, a \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3}\pi\, mk\rho\, l.$$

Dans la théorie de l'attraction, on donne le nom de *potentiel d'un point par rapport à un corps attirant* A, à l'intégrale

$$U = \sum \frac{km\mu}{r},$$

dans laquelle m désigne la masse du point attiré, μ la masse d'un élément du corps attirant A, et r la distance du point m à l'élément μ. Le signe Σ s'étend au volume entier du corps attirant.

Proposons-nous de calculer le potentiel d'un point m par rapport à une sphère; en faisant usage des mêmes coordonnées que tout à l'heure et des mêmes notations, on aura

$$\mu = \rho\, r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et, par suite,

$$U = \int\int\int km\rho\, r\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

On voit ainsi que U a une valeur finie et déterminée. En intégrant, par rapport à ψ, depuis o jusqu'à 2π, on a

$$U = 2\pi\, km\rho \int\int r\, dr \sin\theta\, d\theta.$$

1° Si le point est extérieur, on a $l > a$, et l'on intègre depuis $l\cos\theta - \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}$ jusqu'à $l\cos\theta + \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}$; on trouve ainsi

$$U = \pi m k\rho \int \left(l^2\cos^2\theta - l^2\sin^2\theta + a^2 + 2l\cos\theta\sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}\right)\sin\theta\, d\theta$$
$$- \pi m k\rho \int \left(l^2\cos^2\theta - l^2\sin^2\theta + a^2 - 2l\cos\theta\sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}\right)\sin\theta\, d\theta,$$

ou bien

$$U = 4\pi\, km\rho \int l \sin\theta \cos\theta \, d\theta \sqrt{a^2 - l^2 \sin^2\theta};$$

la dernière intégrale doit être prise entre les limites o et arc $\sin\frac{a}{l}$: on a donc finalement

$$U = \frac{4}{3}\pi\, km\rho \frac{a^3}{l}.$$

2° Dans le cas où le point attiré est intérieur, l'intégration doit se faire, par rapport à r, entre les limites o et $l\cos\theta + \sqrt{a^2 - l^2 \sin^2\theta}$; on a alors

$$U = \pi\, km\rho \int \left(l^2\cos^2\theta - l^2\sin^2\theta + a^2 + 2l\cos\theta\sqrt{a^2 - l^2\sin^2\theta}\right) \sin\theta \, d\theta,$$

et en intégrant entre les limites o et π, par rapport à θ,

$$U = \pi\, km\rho \left[2(a^2 - l^2) + \frac{4}{3} l^2\right]$$

ou

$$U = \frac{2}{3}\pi\, km\rho (3a^2 - l^2).$$

3° Enfin si nous supposons le point attiré sur la sphère même, on a toujours

$$U = 2\pi\, km\rho \int\int r\, dr \sin\theta \, d\theta \, d\psi;$$

il faut intégrer, par rapport à r, de o à $2a\cos\theta$, ce qui donne

$$U = 4\pi\, km\rho \int a^2 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta,$$

puis, par rapport à θ, de o à $\frac{\pi}{2}$; on a donc

$$U = \frac{4}{3}\pi\, km\rho\, a^2.$$

Remarques. — Lorsque l'on connaît l'attraction exercée par une sphère sur un point m, il est facile d'en déduire l'attraction relative à une couche sphérique.

Soit l la distance d'un point m au centre d'une couche sphérique de rayons R_1 et R_2. L'attraction exercée par la couche sera la différence des attractions exercées par les sphères de rayons R_1 et R_2; ainsi en supposant d'abord $l > R_2 > R_1$, l'attraction sera

$$\frac{4}{3}\pi k m \rho \frac{R_2^3}{l^2} - \frac{4}{3}\pi k m \rho \frac{R_1^3}{l^2} = \frac{4}{3}\pi k m \rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{l^2}.$$

Si le point attiré fait partie de la couche, alors $R_2 > l > R_1$, et l'attraction est égale à

$$\frac{4}{3}\pi k m \rho l - \frac{4}{3}\pi k m \rho \frac{R_1^3}{l^2} = \frac{4}{3}\pi k m \rho \frac{l^3 - R_1^3}{l^2}.$$

Si le point est intérieur, on a $R_2 > R_1 > l$, et l'attraction se réduit alors à zéro. Ainsi on arrive à ce résultat remarquable, que l'action d'une couche sphérique sur un point intérieur est nulle.

Nous avons supposé que les couches étaient homogènes, mais on voit facilement comment on étendrait les résultats précédents à des couches sphériques dans lesquelles la densité serait une fonction de la distance au centre.

II. — Théorie du potentiel.

170. — Considérons un corps A de forme quelconque, rapportons-le à trois axes rectangulaires; soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque de ce corps, ρ sa densité au point considéré; désignons toujours par k le coefficient de l'attraction, c'est-à-dire l'action exercée par l'unité de masse, sur l'unité de masse, à l'unité de distance. L'action exercée par l'élément considéré sur le point (x, y, z), situé à la distance u et dont la masse est m, sera

$$\frac{k m \rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{u^2};$$

les composantes de cette action parallèles aux axes de coordonnées seront

$$km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\xi - x}{u^3}, \quad km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\eta - y}{u^3}, \quad km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\zeta - z}{u^3};$$

par suite, les composantes de l'action totale du corps A sur le point M seront

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \iiint km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\xi - x}{u^3}, \\ Y &= \iiint km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\eta - y}{u^3}, \\ Z &= \iiint km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{\zeta - z}{u^3}; \end{aligned} \right.$$

ces intégrales devant s'étendre à tout le volume du corps A. Si le point m est extérieur à la masse attirante A, on reconnaît immédiatement que X, Y, Z sont finis et sont les dérivées partielles de la fonction

$$(2) \qquad U = \iiint km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{1}{u},$$

dans laquelle on a

$$u^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

et, par suite,

$$u\, du = -(\xi - x)\, dx - (\eta - y)\, dy - (\zeta - z)\, dz.$$

La quantité U n'est autre chose que le potentiel dont nous avons parlé tout à l'heure.

Lorsque le point m fait partie de la masse attirante, U, X, Y, Z se présentent sous une forme indéterminée; mais la considération des intégrales singulières montre que U, X, Y, Z ont des valeurs finies et déterminées. Nous allons prouver que dans ce cas on a encore

$$(3) \qquad \frac{dU}{dx} = X, \quad \frac{dU}{dy} = Y, \quad \frac{dU}{dz} = Z.$$

A cet effet, autour du point attiré, décrivons une sphère de rayon a. L'intégrale U pourra être décomposée en deux autres : la première U_1 sera prise à l'intérieur de la sphère a, la seconde U_2 à l'intérieur du corps A, abstraction faite de la portion occupée par la sphère a. On aura alors

$$(4) \qquad U = U_1 + U_2,$$

et, par suite,

$$(5) \qquad \frac{dU}{dx} = \frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_2}{dx}.$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les densités maxima et minima du corps à l'intérieur de la sphère a, l la distance du point x au centre de la sphère, dont nous désignerons les coordonnées par α, β, γ, nous aurons

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} l^2 &= (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2, \\ l\frac{dl}{dx} &= -(\alpha - x). \end{aligned} \right.$$

On a vu, en outre (169) que le potentiel U_1 dans le cas d'une sphère homogène était donné par la formule

$$U_1 = \frac{2}{3}\pi k m \rho(3a^2 - l^2).$$

Dans le cas actuel on aura évidemment

$$\frac{2}{3}\pi k m \rho_1(3a^2 - l^2) > U_1 > \frac{2}{3}\pi k m \rho_2(3a^2 - l^2),$$

ou bien, en désignant par θ une quantité comprise entre o et 1,

$$U_1 = \frac{2}{3}\pi k m [\rho_2 + \theta(\rho_1 - \rho_2)](3a^2 - l^2);$$

par suite, en vertu de (6),

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \frac{4}{3}\pi km[\rho_2 + \theta(\rho_1 - \rho_2)](\alpha - x)$$
$$+ \frac{2}{3}\pi km\frac{d\theta}{dx}(\rho_1 - \rho_2)(3a^2 - l^2).$$

La limite de $\frac{d\mathrm{U}_1}{dx}$ est, comme l'on voit, zéro, quand on fait converger le point x vers le centre de la sphère a, et quand on prend $a = 0$, la formule (5) donne alors

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \lim. \frac{d\mathrm{U}_2}{dx};$$

mais $\frac{d\mathrm{U}^2}{dx}$ est la composante de l'attraction relative à la portion du corps A extérieure à la sphère a, cette quantité a pour limite la composante de l'attraction totale exercée sur le point m; on a donc bien

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{X},$$

et les formules (3) sont encore vraies lors même que le point attiré est intérieur au corps attirant.

Si l'on différentie les formules (1), on a

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} = \int\int\int km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[3\frac{(\xi - x)^2}{u^5} - \frac{1}{u^3}\right],$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} = \int\int\int km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[3\frac{(\eta - y)^2}{u^5} - \frac{1}{u^3}\right],$$
$$\frac{d\mathrm{Z}}{dz} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\mathrm{U}}{dz^2} = \int\int\int km\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[3\frac{(\zeta - z)^2}{u^5} - \frac{1}{u^3}\right],$$

d'où l'on tire, en ajoutant,

$$(7) \qquad \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dz^2} = 0.$$

Mais cette formule a été établie en supposant finies les quantités placées sous les signes d'intégration dans les formules (1), car les règles de la différentition sous le signe $\int$ ne s'appliquent que dans ce cas; il y a donc lieu d'examiner à part le cas où la quantité placée sous les signes d'intégration peut devenir infinie, c'est-à-dire le cas où le point attiré fait partie de la masse attirante.

Si nous considérons encore une sphère infinitésimale de rayon a, contenant dans son intérieur le point (x, y, z), nous avons, en nous servant des mêmes notations que tout à l'heure,

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2,$$

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dz^2} &= \frac{d^2\mathrm{U}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_1}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_1}{dz^2} \\ &\quad + \frac{d^2\mathrm{U}_2}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_2}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_2}{dz^2}; \end{aligned} \right.$$

mais le point (x, y, z) étant extérieur à la masse dont le potentiel est U_2, on a

$$\frac{d^2\mathrm{U}_2}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_2}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_2}{dz^2} = 0.$$

et, par suite,

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dz^2} = \frac{d^2\mathrm{U}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_1}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{U}_1}{dz^2}.$$

Or on a trouvé

$$\frac{d\mathrm{U}_1}{dx} = \frac{2}{3}\pi k m[\rho_2 + \theta(\rho_1 - \rho_2)](\alpha - x) + \frac{2}{3}\pi k m \frac{d\theta}{dx}(\rho_1 - \rho_2)(3a_2 - l^2);$$

en différentiant encore, on a

$$\frac{d^2\mathrm{U}_1}{dx^2} = -\frac{2}{3}\pi k m[\rho_2 + \theta(\rho_1 - \rho_2)] + \Omega.$$

Ω désignant un ensemble de termes qui s'annulent pour

$a = 0$, la limite de $\frac{d^2 U_1}{dx^2}$ est donc

$$-\frac{2}{3}\pi k m \rho,$$

et, par suite, celle de $\frac{d^2 U_1}{dx^2} + \frac{d^2 U_1}{dy^2} + \frac{d^2 U_1}{dz^2}$ est égale à

$$-2\pi k m \rho;$$

la formule (8) donne alors

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = -2\pi k m \rho. \tag{9}$$

Cette formule peut être regardée comme générale, pourvu que l'on convienne de faire $\rho = 0$ pour les points extérieurs à la masse attirante.

La formule (7) a été donnée par Laplace, la formule (9) par Poisson. Nous ferons, au sujet de ces formules, une remarque. Nous avons calculé les composantes de l'attraction du corps A sur le point m par des intégrales aux différences infiniment petites. Cette façon de procéder n'est pas rigoureuse, et dans le cas d'un point intérieur, elle doit conduire à des conséquences erronées. En effet, il est aujourd'hui, pour nous, hors de doute que la matière se trouve composée de molécules isolées, agissant les unes sur les autres par attraction ou par répulsion. Si l'on considère un volume assez petit pour que l'on puisse, sans erreur sensible, négliger son carré, il y aura encore assez de molécules dans ce volume pour qu'on puisse considérer les actions de toutes les molécules qu'il contient sur une molécule extérieure comme sensiblement égales, et leur résultante comme proportionnelle au volume considéré; mais si la molécule attirée est très-près du volume attirant ou même si elle fait partie de ce volume, les considérations précédentes seront tout à fait inexactes. On devra donc renoncer aux intégrales ordinaires pour prendre des intégrales aux différences finies; ainsi le potentiel et les composantes de l'attraction seront représentés par les formules

$$U = \sum \frac{km\mu}{u},$$

$$X = \sum \frac{km\mu(\xi - x)}{u^3},$$

$$Y = \sum \frac{km\mu(\eta - y)}{u^3},$$

$$Z = \sum \frac{km\mu(\zeta - z)}{u^3},$$

dans lesquelles μ désigne la masse d'un point quelconque du corps attirant; u ne s'annulant alors jamais, on aura dans tous les cas, ainsi qu'il est facile de s'en assurer,

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

en sorte que la formule de Poisson serait inexacte.

III. — Attraction des ellipsoïdes.

171. Proposons-nous d'évaluer le potentiel d'un point (x, y, z) de masse m par rapport à l'ellipsoïde

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Ce potentiel est donné, comme nous l'avons vu, par la formule

$$U = \int\int\int \frac{mk\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{u},$$

les limites des intégrales étant celles de l'ellipsoïde. Pour effectuer l'intégration, Dirichlet (*Comptes rendus*, 1839) commence par multiplier l'intégrale triple par un facteur qui s'annule quand ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point extérieur à l'ellipsoïde, et qui se réduit à l'unité pour un point intérieur, ce qui permet de prendre pour limites $-\infty$ et $+\infty$; le facteur en question devra donc être nul pour

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} > 1,$$

et égal à l'unité pour

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} < 1;$$

les formules de Fourier (*) nous donneront le facteur

(*) Si le lecteur ne connaît pas les formules de Fourier, il peut s'en passer et trouver le facteur dont il est question par la méthode suivante : on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin b\varphi}{\varphi}\,d\varphi = \pm\frac{\pi}{2},$$

le signe du second membre étant celui de b; faisant successivement $b = g + 1$ et $b = g - 1$, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin g\varphi \cos\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \int_0^\infty \frac{\cos g\varphi \sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi = \pm\frac{\pi}{2},$$

le signe + correspondant au cas où $g > -1$ et le signe − au cas contraire, et

$$\int_0^\infty \frac{\sin g\varphi \cos\varphi}{\varphi}\,d\varphi - \int_0^\infty \frac{\cos g\varphi \sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi = \pm\frac{\pi}{2},$$

le signe + correspondant au cas où $g > 1$, le signe − au cas contraire. Des formules précédentes on tire

$$\int_0^\infty \frac{\cos g\varphi \sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi \begin{cases} = 0 & \text{pour } g > 1, \\ = \dfrac{\pi}{2} & \text{pour } g < 1 \text{ et } > 0, \end{cases}$$

et par conséquent

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos g\varphi \sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi = 0 \text{ ou } 1,$$

selon que g est $>$ ou < 1.

en question, et si l'on pose pour un instant

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=g,$$

on a en général

$$f(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\alpha)\cos g\varphi\cos\alpha\varphi\,d\alpha\,d\varphi;$$

et comme $f(g)$ doit être égal à 1 pour toutes les valeurs de g comprises entre 0 et 1 et nul pour les autres valeurs de g, on aura

$$f(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\cos g\varphi\cos\alpha\varphi\,d\alpha\,d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$(1)\qquad f(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\varphi\cos g\varphi}{\varphi}\,d\varphi;$$

ainsi le facteur dont nous avons besoin est

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\varphi\cos g\varphi}{\varphi}\,d\varphi,$$

en sorte que l'on peut écrire

$$\text{U}=mk\rho\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\varphi\cos g}{u\varphi}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\varphi,$$

ou bien encore

$$(2)\quad \text{U}=mk\rho\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varphi}{u\varphi}\,e^{g\varphi\sqrt{-1}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\varphi,$$

en convenant de ne prendre que la partie réelle du second membre.

Ceci posé, on a

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Posons dans cette formule

$$-x^2=u^2\psi\sqrt{-1}$$

ou

$$x = u\sqrt{\psi}\sqrt{-\sqrt{-1}} = u\sqrt{\psi}\,\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

et

$$dx = u\,\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,\frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2}},$$

nous aurons

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{u^2\psi\sqrt{-1}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,u\,\frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2}},$$

d'où nous déduirons

$$\frac{1}{u} = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{u^2\psi\sqrt{-1}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}.$$

Remplaçons $\frac{1}{u}$ par cette valeur dans l'équation (2), nous aurons

$$U = \frac{(1-\sqrt{-1})\sqrt{2}\,mk\rho}{\pi\sqrt{\pi}}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,e^{(g\varphi+\psi u^2)\sqrt{-1}}\,d\varphi\,d\psi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta;$$

si l'on remplace u^2 par sa valeur

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

il vient

$$(3)\quad U = \frac{(1-\sqrt{-1})\sqrt{2}\,mk\rho}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,e^{(x^2+y^2+z^2)\psi\sqrt{-1}}\,d\varphi\,d\psi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\xi^2\left(\frac{\varphi}{a^2}+\psi\right)-2x\xi\psi\right]\sqrt{-1}}\,d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\eta^2\left(\frac{\varphi}{b^2}+\psi\right)-2y\eta\psi\right]\sqrt{-1}}\,d\eta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\zeta^2\left(\frac{\varphi}{c^2}+\psi\right)-2z\zeta\psi\right]\sqrt{-1}}\,d\zeta;$$

or on a

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx;$$

et en posant

$$-x^2 = \alpha v^2 \sqrt{-1}$$

ou

$$x = v\sqrt{\alpha}\,\frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$dx = dv\sqrt{\alpha}\,\frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}};$$

on a

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha v^2\sqrt{-1}}\sqrt{\alpha}\,\frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\, dv;$$

dans cette nouvelle formule, posons

$$v = p - q,$$

il viendra en regardant p comme seule variable

$$\sqrt{\pi} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha}\, e^{\alpha q^2\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(p^2 - 2pq)\sqrt{-1}}\, dp,$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{\pi}(1 + \sqrt{-1})}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\alpha q^2\sqrt{-1}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(p^2 - 2pq)\sqrt{-1}}\, dp;$$

si maintenant on suppose tour à tour

$$p = \xi, \quad \alpha = \frac{\varphi}{a^2} + \psi, \quad \alpha q = x\psi,$$

$$p = \eta, \quad \alpha = \frac{\varphi}{b^2} + \psi, \quad \alpha q = y\psi,$$

$$p = \zeta, \quad \alpha = \frac{\varphi}{c^2} + \psi, \quad \alpha q = z\psi.$$

on aura

$$\frac{\sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{2\left(\frac{\varphi}{a^2}+\psi\right)}}e^{-\frac{x^2\psi^2}{\frac{\varphi}{a^2}+\psi}\sqrt{-1}}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left[\xi^2\left(\frac{\varphi}{a^2}+\psi\right)-2x\xi\psi\right]\sqrt{-1}}\,dx,$$

. . . . ;

la formule (3) devient alors

$$U=-2\sqrt{-1}\,mk\rho$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi\, e^{\sqrt{-1}\left[\frac{x^2\varphi\psi}{\varphi+a^2\psi}+\frac{y^2\varphi\psi}{\varphi+b^2\psi}+\frac{z^2\varphi\psi}{\varphi+c^2\psi}\right]}}{\varphi\sqrt{\psi}\sqrt{\left(\frac{a^2}{\varphi}+1\right)\left(\frac{b^2}{\varphi}+1\right)\left(\frac{c^2}{\varphi}+1\right)}}\,d\varphi\, d\psi;$$

posons maintenant

$$\frac{\varphi}{\psi}=t,\quad \frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}=g,$$

nous aurons

$$U=2\sqrt{-1}\,mk\rho\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi\, e^{g\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi\, dt}{\varphi^2\sqrt{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\left(\frac{t}{b^2}+1\right)\left(\frac{t}{c^2}+1\right)}};$$

si nous négligeons alors le coefficient de $\sqrt{-1}$, nous aurons

$$U=-2mk\rho\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi\sin g\varphi\, d\varphi\, dt}{\varphi^2\sqrt{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\left(\frac{t}{b^2}+1\right)\left(\frac{t}{c^2}+1\right)}}.$$

Si nous différentions U par rapport à x, nous trouverons la composante X de l'attraction parallèle à l'axe des x

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&X=-\frac{2mk\rho}{a^2}\\&\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi\cos g\varphi\,.\,2x}{\varphi\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\sqrt{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\left(\frac{t}{b^2}+1\right)\left(\frac{t}{c^2}+1\right)}}.\end{aligned}\right.$$

Si le point attiré (x, y, z) est intérieur à l'ellipsoïde, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1,$$

et *à fortiori*

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}<1;$$

c'est-à-dire $g<1$; mais alors on a [formule (1)]

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi\cos g\varphi\,d\varphi}{\varphi}=\frac{\pi}{2};$$

et, par suite, l'équation (4) donne

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
X &= -\frac{2m\pi k\rho}{a^2}x\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)R},\\
Y &= -\frac{2m\pi k\rho}{b^2}y\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{b^2}+1\right)R},\\
Z &= -\frac{2m\pi k\rho}{c^2}z\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{c^2}+1\right)R},
\end{aligned}\right.$$

R désignant, pour abréger, le radical

$$R=\sqrt{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\left(\frac{t}{b^2}+1\right)\left(\frac{t}{c^2}+1\right)}.$$

Si dans ces formules on change a, b, c en $a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon$, il vient, en ne considérant que la première de ces formules,

$$X=-\frac{2m\pi k\rho}{a^2\varepsilon^2}x\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2\varepsilon^2}+1\right)R'},$$

R' désignant la valeur que prend R quand on change t en

$\frac{t}{\varepsilon^2}$. Si alors on change $\frac{t}{\varepsilon}$ en t, il vient

$$X = -\frac{2m\pi k\rho}{a^2}x\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)R}.$$

Les composantes X, Y, Z ne sont donc pas altérées quand on augmente les axes de l'ellipsoïde dans un même rapport, il en résulte que les attractions de deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques sur un même point intérieur sont égales. Donc :

Théorème. — *L'attraction d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques concentriques sur un point intérieur est nulle.*

Lorsque le point attiré est extérieur, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} > 1,$$

et, par suite, on n'a

$$g \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t} < 1,$$

que pour les valeurs de t supérieures à la racine positive τ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t} = 1.$$

Or, pour $g > 1$, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi\cos g\varphi}{\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Par suite, les formules (5) sont encore exactes, mais les intégrales qui entrent dans ces formules sont nulles tant que t varie entre o et τ, en sorte que l'on a

$$X = -\frac{2m\pi k\rho}{a^2}x\int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)R},$$

$$Y = -\frac{2m\pi k\rho}{b^2}y\int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{b^2}+1\right)R},$$

$$Z = -\frac{2m\pi k\rho}{c^2}z\int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{c^2}+1\right)R}.$$

IV. — Étude du cas où l'ellipsoïde est de révolution.

171 *bis*. Pour obtenir les formules relatives au cas où l'ellipsoïde est de révolution, il suffit de faire $a = b$ dans les formules du paragraphe précédent; ces formules, qui dépendaient des fonctions elliptiques, vont p uvoir s'exprimer au moyen de logarithmes et de fonctions circulaires inverses, et l'on aura

$$(1)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{2m\pi k\rho}{a^2}x\displaystyle\int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)^2\sqrt{\frac{t}{c^2}+1}}, \\[2ex] Y = -\dfrac{2m\pi k\rho}{b^2}y\displaystyle\int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)^2\sqrt{\frac{t}{c^2}+1}}, \\[2ex] Z = -\dfrac{2m\pi k\rho}{c^2}z\displaystyle\int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\left(\frac{t}{c^2}+1\right)\sqrt{\frac{t}{c^2}+1}}, \end{cases}$$

τ désignant o ou la racine positive de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\tau}+\frac{y^2}{b^2+\tau}+\frac{z^2}{c^2+\tau}=1,$$

selon que le point (x, y, z) sera intérieur ou extérieur. Pour effectuer les intégrations, on posera

$$\frac{t}{c^2} - 1 = \frac{\theta^2}{c^2},$$

et l'on sera conduit à la recherche d'intégrales de fonctions rationnelles de θ.

Pour faire une application de ces formules, nous supposerons que l'on ait affaire à un point placé à la surface de l'ellipsoïde; nous supposerons l'ellipsoïde aplati et peu différent d'une sphère; enfin nous poserons

$$2m\pi k\rho = \lambda, \quad c^2 = a^2(1 - e^2).$$

Nous aurons ainsi

$$X = -\lambda x \int_0^\infty \frac{a^2 c\, dt}{(t + a^2)^2\sqrt{t + c^2}},$$

$$Y = X\frac{y}{x},$$

$$Z = -\lambda z \int_0^\infty \frac{a^2 c\, dt}{(t + a^2)(t + c^2)\sqrt{t + c^2}}.$$

En posant alors

$$t + a^2 = \theta, \quad dt = d\theta,$$

nous aurons

$$X = -\lambda x \int_{a^2}^\infty \frac{a^2 c\, d\theta}{\theta^2\sqrt{\theta - a^2 e^2}},$$

$$Y = X\frac{y}{x},$$

$$Z = -\lambda z \int_{a^2}^\infty \frac{a^2 c\, d\theta}{\theta(\theta - a^2 e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut développer en série les quantités $\dfrac{1}{\sqrt{\theta - a^2 e^2}}$,

$\dfrac{1}{(\theta - a^2e^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui entrent dans ces formules, et l'on a

$$X = -\lambda a^2 c x \int_{a^2}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{a^2 e^2}{\theta^{\frac{7}{2}}} + \frac{1.3}{2.4} \frac{a^4 e^4}{\theta^{\frac{9}{2}}} + \ldots \right) d\theta,$$

$$Y = X \frac{y}{x},$$

$$Z = -\lambda a^2 c z \int_{a^2}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2} \frac{a^2 e^2}{\theta^{\frac{7}{2}}} + \frac{3.5}{2.4} \frac{a^4 e^4}{\theta^{\frac{9}{2}}} + \ldots \right) d\theta;$$

c'est-à-dire

$$X = -2\lambda x \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{5} + \frac{1.3}{2.4} \frac{e^4}{7} + \ldots \right),$$

$$Y = -2\lambda y \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{5} + \frac{1.3}{2.4} \frac{e^4}{7} + \ldots \right),$$

$$Z = -2\lambda z \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \frac{e^2}{5} + \frac{3.5}{2.4} \frac{e^4}{7} + \ldots \right).$$

En désignant donc par p et q deux facteurs qui ne dépendent que de m, ρ et e, on a

$$X = -px, \quad Y = -py, \quad Z = -qz.$$

V. — Théorème d'Ivory.

171 *ter*. On appelle surfaces du second degré homofocales, celles dont les sections principales ont les mêmes foyers. Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

deux ellipsoïdes : ces deux ellipsoïdes seront homofocaux si l'on a

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2, \quad b^2 - c^2 = b'^2 - c'^2, \quad a^2 - c^2 = a'^2 - c'^2,$$

ou bien, τ désignant une constante,

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \tau. \tag{3}$$

Les points (x, y, z) et (x', y', z'), pris respectivement sur les ellipsoïdes (1) et (2), seront dits *correspondants* si l'on a

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}. \tag{4}$$

THÉORÈME I. — *La distance δ de deux points (x, y, z) et (ξ', η', ζ') pris respectivement sur chacun des ellipsoïdes homofocaux (1) et (2) est égale à la distance Δ de leurs correspondants (x', y', z') et (ξ, η, ζ).*

En effet, on peut poser

$$\left\{\begin{array}{lll} x = a\cos\alpha, & y = b\cos\beta, & z = c\cos\gamma, \\ \xi = a\cos\lambda, & \eta = b\cos\mu, & \zeta = c\cos\nu, \end{array}\right. \tag{5}$$

pourvu que l'on pose en même temps

$$\left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1. \end{array}\right. \tag{6}$$

On aura alors, en vertu des formules (4),

$$\left\{\begin{array}{lll} x' = a'\cos\alpha, & y' = b'\cos\beta, & z' = c'\cos\gamma, \\ \xi' = a'\cos\lambda, & \eta' = b'\cos\mu, & \zeta' = c'\cos\nu, \end{array}\right. \tag{7}$$

et par suite

$$\delta^2 = (x - \xi')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (5) et (7),

$$\delta^2 = a^2\cos^2\alpha + a'^2\cos^2\lambda - 2aa'\cos\alpha\cos\lambda + \ldots,$$

et de même

$$\Delta^2 = a^2\cos^2\lambda + a'^2\cos^2\alpha - 2aa'\cos\alpha\cos\lambda + \ldots.$$

On en déduit

$$\delta^2 - \Delta^2 = (a'^2 - a^2)(\cos^2\alpha - \cos^2\lambda) + \ldots,$$

ou bien

$$\delta^2 - \Delta^2 = \tau(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu),$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

$$\delta^2 - \Delta^2 = 0,$$

d'où l'on conclut $\delta = \Delta$.

Théorème d'Ivory. — *L'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur se ramène à l'attraction de l'ellipsoïde homofocal passant par le point attiré sur le point correspondant.*

En effet, les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde (1) sur le point extérieur (x, y, z) sont données par les formules

$$X = -2m\pi k\rho \frac{x}{a^2} \int_\tau^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\sqrt{\left(\frac{t}{a^2}+1\right)\left(\frac{t}{b^2}+1\right)\left(\frac{t}{c^2}+1\right)}},$$

. . . . ,

ou, si l'on veut,

$$(8)\qquad X = -2m\pi k\rho x \int_\tau^\infty \frac{abc\,dt}{(t+a^2)\sqrt{(t+a^2)(t+b^2)(t+c^2)}},$$

. . . .

Dans ces formules, τ désigne la racine positive de l'équation

$$(9)\qquad \frac{x^2}{a^2+\tau} + \frac{y^2}{b^2+\tau} + \frac{z^2}{c^2+\tau} = 1.$$

Cette équation, dans laquelle x, y, z sont les coordonnées du point attiré, peut être considérée, en vertu des relations (3), comme représentant un ellipsoïde homofocal avec l'ellipsoïde (1). Lorsque x, y, z deviennent coordonnées courantes, cet ellipsoïde contient le point attiré. Si dans les formules (8) on remplace t par $t+\tau$, on a

$$X = -2m\pi k\rho x \int_0^\infty \frac{abc\,dt}{(t+\tau+a^2)\sqrt{(t+\tau+a^2)(t+\tau+b^2)(t+\tau+c^2)}},$$

. . . .

Ces formules peuvent s'écrire

$$X = -\frac{2m\pi k\rho\, x\, abc}{\sqrt{a^2+\tau}\sqrt{b^2+\tau}\sqrt{c^2+\tau}\,(a^2+\tau)}$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2+\tau}+1\right)\sqrt{\left(\frac{t}{\tau+a^2}+1\right)\left(\frac{t}{\tau+b^2}+1\right)\left(\frac{t}{\tau+c^2}+1\right)}},$$

. . . .

Si l'on désigne alors par X', Y', Z' les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde (9) sur le point correspondant de (x, y, z), point dont les coordonnées sont

$$\frac{xa}{\sqrt{a^2+\tau}}, \quad \frac{yb}{\sqrt{b^2+\tau}}, \quad \frac{zc}{\sqrt{c^2+\tau}},$$

on trouve

$$X' = -2m\pi k\rho\,\frac{ax}{(a^2+\tau)\sqrt{a^2+\tau}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{a^2+\tau}+1\right)\sqrt{\left(\frac{t}{a^2+\tau}+1\right)\left(\frac{t}{b^2+\tau}+1\right)\left(\frac{t}{c^2+\tau}+1\right)}},$$

. . . ., ... ,

et l'on en conclut

$$\frac{X}{X'} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+\tau}\sqrt{c^2+\tau}}, \quad \ldots,$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{a\mathrm{X}}{\sqrt{a^2+\tau\mathrm{X}'}} = \frac{b\mathrm{Y}}{\sqrt{b^2+\tau\mathrm{Y}'}} = \frac{c\mathrm{Z}}{\sqrt{c^2+\tau\mathrm{Z}'}}$$

$$= \frac{abc}{\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)(c^2+\tau)}}.$$

Le théorème en question est donc démontré.

N. B. — On trouvera de longs développements sur la théorie du potentiel dans la *Statique* de l'abbé Moigno; dans la *Théorie mécanique de la Chaleur* par M. Briot. — Ces ouvrages renvoient aux sources originales. — *Voir* aussi les *Exercices* du Père Jullien.

EXERCICES.

I. Pour qu'un point O soit en équilibre sous l'influence des forces OF, OF', OF'',... qui lui sont directement appliquées, il suffit que le point O soit le centre de gravité des points F, F', F'',... auxquels on suppose des masses égales. (LEIBNITZ.)

II. Soient AF et A'F' deux forces quelconques, construisons sur ces deux forces, comme arêtes opposées, un tétraèdre; imaginons un observateur ayant ses pieds en A (ou en A') et sa tête en F (ou en F'), et regardant A'F' (ou AF). Si le point A' (ou A) est à la gauche de F' (ou de F), nous regarderons le tétraèdre comme positif; il sera négatif dans le cas contraire. Ceci posé, prouver que :

Si l'on a des forces appliquées à un solide, la somme des tétraèdres construits sur toutes ces forces, prises deux à deux, reste la même pour tous les systèmes de forces équivalents. En particulier, si les forces en question se font équilibre, la somme des tétraèdres construits sur ces forces, prises deux à deux, est nulle. (CHASLES.)

III. Trouver les positions d'équilibre de trois sphères pesantes, placées à l'intérieur d'une même sphère.

IV. Trouver les positions d'équilibre d'une tige pesante dont les extrémités sont assujetties à demeurer sur une même sphère ou sur deux plans inclinés.

V. Trois points assujettis à demeurer sur un même cercle se repoussent proportionnellement à leur distance : trouver leurs positions d'équilibre.

VI. Lorsque des forces appliquées à un solide conservent toujours même intensité, même direction et même point d'application :

1° On peut amener d'une infinité de manières le solide dans une position telle, que les forces en question aient une résultante unique;

2° La résultante unique dans ses diverses positions rencontre toujours une même ellipse et une même hyperbole invariablement liées au corps. (MINDING.)

VII. Trouver la surface sur laquelle il faut placer un point matériel sollicité par des centres fixes, pour qu'il reste en équilibre en chacun des points de cette surface.

Étudier en particulier le cas où l'attraction varie proportionnellement à la distance, ou en raison inverse du carré de la distance.

VIII. Le centre de gravité d'une zone est situé au milieu de sa hauteur.

IX. Soit G_a la projection du centre de gravité d'un triangle sphérique ABC sur le rayon de la sphère qui passe en A; soient O le centre de la sphère; R, son rayon; a, b, c les côtés du triangle, on a

$$OG_a = \frac{R}{2} \frac{a \sin b \sin C}{A + B + C - \pi}.$$

N. B. On trouve dans les Exercices du P. Jullien un grand nombre d'exemples de déterminations de centres de gravité et de moments d'inertie.

X. Le lieu des points d'un corps pour lesquels un des rayons de gyration principaux conserve une valeur constante a pour équation

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2+a} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2+b} + \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2+c} = 1,$$

a, b, c désignant des constantes. Le lieu en question porte le nom de *surface des ondes*.

XI. La recherche de la forme affectée par une lame élastique est un des problèmes que l'on propose dans les Cours de Mécanique appliquée aux constructions. Consulter à ce sujet : 1° la *Mécanique appliquée* de Bresse, t. Ier, résistance des matériaux; 2° le *Résumé des Leçons professées à l'École des Ponts et Chaussées*, par Navier; 3° la *Mécanique* de Poisson.

XII. Trouver l'action exercée par un cercle sur un point placé à l'intérieur ou à l'extérieur de ce cercle, en supposant que chacun des éléments de cercle attire le point en question : 1° en raison inverse du carré de la distance; 2° proportionnellement à la distance.

TROISIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — MÉTHODES GÉNÉRALES D'INTÉGRATION.

I. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

172. Le problème que l'on se propose en *Dynamique* est de trouver la relation qui existe entre un mouvement et les forces qui le produisent.

Nous nous occuperons d'abord du mouvement d'un point matériel.

Nous avons vu (49) que la force qui produit le mouvement d'un point matériel avait pour mesure le produit de l'accélération totale du point en mouvement par sa masse. Nous avons vu aussi que la direction de la force en question était celle de l'accélération totale du mobile. L'expression analytique de ces propositions va nous fournir les équations du mouvement.

Soient x, y, z les coordonnées du mobile comptées parallèlement à trois axes rectangulaires. Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la résultante F des forces qui sollicitent le point m (ou, ce qui revient au même, les sommes des projections sur les axes des forces qui sollicitent le point m). Écrivons que les projections de F sur les axes sont respectivement égales aux projections de l'accélération multipliées par la masse du mobile.

D'après ce qui a été dit (n° 15), les projections de l'accélération sur les axes sont égales respectivement aux accélérations du mouvement projeté sur les axes, c'est-à-dire à

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

dt désignant toujours l'élément du temps. En sorte que nous aurons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on se donne le mouvement du point m, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont connus, et les formules (1) serviront à calculer X, Y, Z et, par suite, F, qui est la résultante des forces qui sollicitent le point m.

Si l'on se donne, au contraire, les forces qui sollicitent le point m, X, Y, Z seront censées connues, et l'intégration des équations (1) fera connaître x, y, z en fonction du temps. Les équations (1) sont simultanées et du second ordre; leur intégration est impossible en général. Il existe cependant des cas nombreux où cette intégration peut être effectuée complétement ou au moins en partie; le Chapitre actuel a pour but l'étude d'un certain nombre de ces cas.

II. — Mouvement d'un point assujetti à demeurer sur une surface donnée.

172 bis. *Cas où il n'existe pas de frottement.* — S'il n'y a pas de frottement, l'action N de la surface sera une force normale dont la valeur inconnue doit entrer dans les équations du mouvement; les trois équations (1) contiennent alors quatre inconnues. Pour déterminer x, y, z, N, il faut une quatrième équation : ce sera celle de la surface donnée :

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

si cette surface est fixe, et

$$(2) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

si cette surface est susceptible de se déformer avec le temps. En appelant toujours X, Y, Z les sommes des projections des forces directement appliquées au mobile $m(x, y, z)$, la résultante de toutes les forces qui sollicitent le point m aura pour projections

$$X + N\cos(N, x), \quad Y + N\cos(N, y), \quad Z + N\cos(N, z),$$

ou

$$X + \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dx}, \quad Y + \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dy}, \quad Z + \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dz},$$

Δ désignant, pour abréger, la quantité

$$\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2},$$

que M. Lamé appelle le *paramètre différentiel du premier ordre de la fonction f*. (Nous mettons le double signe devant le radical, parce que la réaction de la surface peut s'exercer dans deux directions opposées; mais, dans chaque cas particulier, on saura quel signe on doit prendre.)

Par suite, les équations du mouvement seront

$$(3)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \dfrac{N}{\Delta}\dfrac{df}{dx}, \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \dfrac{N}{\Delta}\dfrac{df}{dy}, \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \dfrac{N}{\Delta}\dfrac{df}{dz}, \end{cases}$$

auxquelles il faudra joindre (1) ou (2), selon les cas.

Cas où il y a frottement. — Souvent un point placé sur une courbe ou une surface ne se met pas en mouvement sous l'impulsion d'une force tangente à la courbe ou à la surface, et, pendant le mouvement, il peut arriver que l'action de la surface ou de la courbe ne soit pas normale; dans ce cas, la composante tangentielle de l'action de la courbe, décomposée en force normale et tangentielle, est ce qu'on appelle le *frottement*. On admet généralement que le frottement est proportionnel à l'action normale de la courbe, dirigé en sens inverse du mouvement et indépendant de la vitesse. Dans ce cas, il faut modifier les seconds membres des formules (3) et y ajouter les composantes du frottement, qui sont

$$N\frac{dx}{ds},\quad N\frac{dy}{ds},\quad N\frac{dz}{ds},$$

ds désignant l'élément de trajectoire inconnue; on ajoute alors aux équations du mouvement la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

III. — Mouvement d'un point assujetti a demeurer sur une courbe.

173. Ce cas se traite à peu près comme le précédent; mais il y a une inconnue de plus à déterminer : la direction de l'action de la courbe. En désignant par λ, μ, ν les angles que fait l'action de la courbe avec les axes et en supposant qu'il n'y ait pas de frottement, les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu;$$

on a, du reste, conservé les mêmes notations que dans les paragraphes précédents. A ces équations il faut joindre : 1° les deux équations de la courbe le long de laquelle se meut le point m; 2° la relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1;$$

3° enfin l'équation suivante, où ds est l'élément de trajectoire :

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu = 0,$$

ou simplement

$$dx\cos\lambda + dy\cos\mu + dz\cos\nu = 0,$$

qui exprime que l'action de la courbe est normale.

IV. — Force d'inertie; son utilité.

174. On appelle *force d'inertie* d'un point en mouvement une force égale et directement opposée à celle qui produirait le mouvement du point.

Soient m la masse; x, y, z les coordonnées d'un point matériel; t le temps : nous avons vu (172) que les composantes de la force qui produisaient son mouvement ont pour expressions $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $m\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $m\dfrac{d^2z}{dt^2}$; la force d'inertie aura pour composantes des quantités égales et de signe contraire à celles-ci. Ainsi les composantes de la force d'inertie seront

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

L'accélération totale peut se décomposer en accélération normale et centripète; de même la force qui agit sur un point en mouvement peut se décomposer en force *normale* dirigée suivant le rayon de courbure de la trajectoire et en force tangentielle. On donne le nom de *force centripète* à la composante normale.

La force centripète et la force tangentielle sont évidemment égales aux accélérations de même nom multipliées par la masse; elles ont donc respectivement pour expressions (12)

$$m\frac{v^2}{\rho} \quad \text{et} \quad m\frac{dv}{dt},$$

v désignant la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire. La force d'inertie pourra aussi se décomposer en deux autres : l'une normale à la trajectoire et l'autre tangentielle. Ces deux composantes seront égales et directement opposées à la force centripète et à la force centrifuge. On leur donne le nom de *force centrifuge* et de *force tangentielle d'inertie*.

Dans la plupart des Traités de Physique, on donne des définitions de la force d'inertie qui sont tout à fait inintelligibles. La force d'inertie et la force centrifuge n'agissent pas sur le mobile; elles n'existent pas; et, si leur notion a été introduite dans la science, c'est qu'elles facilitent l'énoncé de certaines propositions, comme nous le verrons par la suite.

On a dit quelquefois que la force centrifuge était la *réaction de la trajectoire du mobile*. Cette locution est vicieuse; elle éveille des idées totalement fausses dans l'esprit de ceux qui abordent l'étude de la Mécanique, et font naître des difficultés qui n'existent pas dans la science. Comment une trajectoire, une ligne mathématique pourrait-elle exercer ou recevoir une action? Il n'y a que la matière ou plutôt le point matériel qui jouisse de cette propriété.

Voici toutefois ce qui a pu faire naître ces idées dans l'esprit de certains auteurs, qui n'ont pas fait une étude sérieuse de la Mécanique rationnelle.

Considérons un point assujetti à se mouvoir sur une ligne matérielle, c'est-à-dire dont tous les points seraient des points matériels (nous faisons ici une abstraction qui ne peut pas se réaliser) : l'action de la courbe fait naître une force normale. Si alors le point mobile n'est sollicité par aucune force *directement appliquée*, ou si la force *directement appliquée* est tangente à la trajectoire, l'action de la courbe sera précisément la force *centripète*; cette action émane alors du point matériel de la courbe en contact avec le mobile; mais, en vertu du principe de Newton, le mobile réagit sur le point en question de la trajectoire; la réaction égale et directement opposée à l'action est égale, dans ce cas particulier, à la force centrifuge.

Lorsqu'un point est attiré ou repoussé par un autre point matériel, il se met en mouvement, s'il n'est du reste sollicité par aucune autre force; mais il exerce sur le point qui agit sur lui une réaction égale à l'action qu'il en reçoit; dans ce cas encore très-particulier, la réaction, force égale et opposée à celle qui produit le mouvement, est égale à la force d'inertie. Ainsi, en résumé, la force d'inertie et la force centrifuge d'un point en mouvement ne sollicitent jamais ce point. Ce sont des forces purement fictives. Si l'on venait à faire agir la force d'inertie d'un point matériel sur ce point, il se mettrait en équilibre.

V. — Principe des forces vives.

175. Nous allons maintenant montrer comment on peut, dans certains cas, trouver des intégrales des équations du mouvement.

Reprenons les équations du n° 172.

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X, \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y, \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z, \end{cases}$$

dans lesquelles X, Y, Z représentent les sommes des projections sur les axes des forces qui sollicitent le point $m(x, y, z)$, et multiplions la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, il vient

$$(2)\quad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

mais en désignant par v la vitesse, on a

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$dv^2 = 2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

La formule (2) peut donc s'écrire

$$m.d\cdot\frac{v^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

ou

$$(3) \qquad d \cdot \frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

mv^2, produit de la masse du point matériel par le carré de sa vitesse, est ce que l'on appelle la *force vive* de ce point. Quant à $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, c'est le travail de la force (X, Y, Z) correspondant au déplacement (dx, dy, dz) réel produit par cette force; on lui donne le nom de *travail élémentaire*. $\int_{t_0}^{t}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est ce que l'on appelle le *travail total* de la même force, effectué depuis l'époque t_0 jusqu'à l'époque t.

Si l'on intègre la formule (3) depuis t_0 jusqu'à t, on a

$$(4) \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant, dit *des forces vives* ou du *travail* :

176. Théorème. — *La demi-variation de la force vive d'un mobile pendant un temps quelconque est égale au travail total de la force qui sollicite ce mobile, effectué pendant le même temps.*

Ce théorème n'a d'utilité (relativement à l'intégration) que si la quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est la différentielle exacte d'une fonction

$$\varphi(x, y, z),$$

c'est-à-dire que si

$$(5) \qquad X = \frac{d\varphi}{dx}, \quad Y = \frac{d\varphi}{dy}, \quad Z = \frac{d\varphi}{dz};$$

alors, en effet, l'équation (4) pourra s'écrire

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t} d\varphi = \int_{t_0}^{t} \frac{d\varphi}{dt}\,dt,$$

c'est-à-dire, en désignant par x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z, pour $t = t_0$,

$$(6) \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

La vitesse v ne dépend donc que de x, y, z, et si la fonction φ est continue, v reprendra exactement la même valeur v_0 toutes les fois que $\varphi(x, y, z)$ passera par la valeur $\varphi(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire toutes les fois que le mobile rencontrera la surface

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0) = \text{const.}$$

Les surfaces

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

sont ce que l'on appelle des *surfaces de niveau*. Des équations (5) on déduit

$$X : \frac{d\varphi}{dx} = Y : \frac{d\varphi}{dy} = Z : \frac{d\varphi}{dz}.$$

Or $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale à la surface de niveau fait avec les axes coordonnés; X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus des angles que la force motrice fait avec les mêmes axes. Donc la force motrice est normale à la surface de niveau traversée par le mobile.

Supposons maintenant le mobile assujetti à demeurer sur une courbe ou sur une surface fixe; soient N l'action de la courbe ou de la surface; λ, μ, ν les angles que N fait avec les axes, les équations du mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu.$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par dx, dy, dz, et si on les ajoute on tombe sur la formule (2) de tout à l'heure, car on a

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0,$$

vu que le déplacement (dx, dy, dz) est normal à la réaction N, dont la direction est donnée par les angles λ, μ, ν. En effectuant alors les mêmes transformations que tout à l'heure, on arrive au théorème suivant :

177. *La demi-variation de la force vive pendant le temps* T *d'un point qui n'est pas libre est égale au travail des forces directement appliquées effectué pendant le même temps.*

Ce théorème n'est, du reste, qu'un corollaire du précédent si l'on observe que, dans le travail total de toutes les forces, le travail de la réaction doit disparaître, puisque cette réaction est normale au déplacement du mobile.

Remarque I. — Nous venons d'observer que, dans le théorème des forces vives, les actions des courbes et des surfaces fixes sur lesquelles doit se mouvoir le point m n'intervenaient pas; en d'autres termes, le travail effectué de ces actions est nul. Mais si le point m était assujetti à se mouvoir sur une surface mobile, le travail effectif de l'action de la surface ne serait plus négligeable, parce que le déplacement réel (dx, dy, dz) ne s'effectuerait plus alors perpendiculairement à la normale de la surface variable.

Ainsi, par exemple : si l'on considère un point m en mouvement très-lent sur une sphère et si l'on fait mouvoir très-rapidement le centre de la sphère le long du rayon passant par le point m à l'époque t, il est clair que le chemin réel décrit par le point m vers l'époque t sera sensiblement normal à la surface de la sphère mobile.

Remarque II. — Lorsque la fonction φ passe par un maximum ou un minimum, la vitesse v passe aussi par un maximum ou un minimum; mais alors on a

$$d\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

équation qui exprime que le point m a atteint une position d'équilibre. Ainsi quand le mobile passe par une des positions où il serait en repos s'il n'avait pas de vitesse acquise, la vitesse qu'il possède est un maximum ou un minimum.

Remarque III. — Nous verrons, dans la suite, que le travail $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est, dans la plupart des cas, une différentielle exacte. Cela tient à ce que les forces de la nature sont généralement des attractions émanant de centres fixes ou mobiles et fonctions des distances qui séparent les points attirants des points attirés. Ainsi l désignant la distance de deux points, leur action mutuelle développe, comme nous avons vu, un travail égal en valeur absolue à $f\,dl$; f désignant l'action réciproque de ces points, si donc f est une fonction de l le travail sera une différentielle exacte. Les travaux développés par tant de points que l'on voudra seront des différentielles exactes, le travail total effectué sera donc une différentielle exacte.

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS RECTILIGNES.

I. — Du mouvement rectiligne en général.

178. Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force de direction constante et que sa vitesse initiale est dirigée dans le sens de la force motrice, il prend un mouvement rectiligne; en désignant par x l'espace parcouru compté à partir d'une origine fixe, et par X l'intensité de la force, l'équation du mouvement est donnée par la formule suivante, dans laquelle m désigne la masse du point et t le temps (172) :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}. \tag{1}$$

Si la force X est fonction de t seulement, on a

$$x = \frac{1}{m}\int\int \mathrm{X}\,dt^2,$$

et la vitesse est donnée par la formule

$$v = \frac{1}{m}\int \mathrm{X}\,dt.$$

Lorsque X est fonction de x seulement, on pose

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

On en déduit

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}v;$$

l'équation (1) devient alors

$$m\frac{dv}{dx}v = \mathrm{X},$$

ou bien

$$m\,dv.v = \mathrm{X}\,dx,$$

d'où

$$v^2 = \frac{2}{m}\int \mathrm{X}\,dx.$$

La vitesse est ainsi connue, on en déduit

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dx}{v} = dt, \quad t = \int\frac{dx}{v},$$

et le problème se trouve encore ramené aux quadratures.

Le problème est encore ramené aux quadratures quand X est une fonction de v, dans ce cas on a, au lieu de (1)

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{X}, \quad m\frac{dv}{\mathrm{X}} = dt, \quad m\int\frac{dv}{\mathrm{X}} = t.$$

On en déduit v ou $\frac{dx}{dt}$ en fonction de t, et une nouvelle intégration fournit x en fonction de t.

Pour déterminer les constantes qu'amène l'intégration, et qui sont toujours au nombre de deux, puisque l'équation (1) est du second ordre, il faut se donner la position du mobile et sa vitesse à l'instant initial $t = t_0$; on fait alors $t = t_0$ dans l'équation qui fournit x et dans celle qui fournit v ; on en déduit la valeur des constantes en fonction de t_0 et des valeurs de x et de v pour $t = t_0$ qui sont données par hypothèse.

II. — Mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à une fonction de la distance à ce centre.

179. Problème I. — *Trouver le mouvement d'un point sollicité par un centre fixe, proportionnellement à sa distance au centre, et animé d'une vitesse initiale dirigée vers le centre.*

Soit x la distance du point au centre d'action à l'époque t ; prenons la masse du point pour unité. Si la force est attractive, c'est-à-dire dirigée vers le centre d'action, la direction sera de sens contraire au sens dans lequel on compte les espaces, elle pourra donc être représentée par $-kx$, et l'équation du mouvement sera

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

k désignant une quantité positive. Si la force était répulsive, k serait négatif. L'intégrale générale de l'équation (1) est

$$(2) \qquad x = A\sin t\sqrt{k} + B\cos t\sqrt{k},$$

A et B désignant deux constantes réelles. Pour déterminer A et B, nous nous donnerons la vitesse initiale v_0 et la distance initiale x_0 du mobile au centre.

L'équation (1) différentiée donne

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{k}\,(A\cos t\sqrt{k} - B\sin t\sqrt{k});$$

en faisant $t = 0$ dans (2) et (3), on trouve

$$x_0 = B, \quad v_0 = A\sqrt{k}.$$

L'équation (2) peut alors s'écrire

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k}} \sin t\sqrt{k} + x_0 \cos t\sqrt{k}.$$

Le mouvement, comme l'on voit, est périodique, et le mobile repasse aux mêmes points à des époques éloignées l'une de l'autre de $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ unités de temps; la valeur maxima de x s'obtient en posant $\frac{dx}{dt} = 0$, et alors la vitesse est nulle; or on a

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos t\sqrt{k} - x_0\sqrt{k} \sin t\sqrt{k};$$

on en déduit, pour $\frac{dx}{dt} = 0$,

$$\operatorname{tang} t\sqrt{k} = \frac{v_0}{x_0\sqrt{k}}.$$

Si v_0 était nul on aurait

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{k}}, \quad \ldots.$$

Le mobile est animé, comme l'on voit, d'un mouvement oscillatoire, ce mouvement est à peu près celui que prend l'extrémité d'un ressort que l'on abandonne à lui-même, après l'avoir comprimé. Si la force qui sollicite le point m était répulsive, c'est-à-dire si k était négatif, on aurait, en posant $k = -\psi$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \psi x = 0,$$

et, en désignant par c et c' deux constantes,

$$(4) \qquad x = ce^{t\sqrt{\psi}} + c'e^{-t\sqrt{\psi}},$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\psi}\left(ce^{t\sqrt{\psi}} - c'e^{-t\sqrt{\psi}}\right),$$

et, par suite, pour $t = 0$,

$$x_0 = c + c',$$

$$\frac{v_0}{\sqrt{\psi}} = c - c'.$$

On en conclut

$$c = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\psi}}\right), \quad c' = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\psi}}\right),$$

et, par suite, en portant ces valeurs dans (4),

$$x = \frac{1}{2}\,x_0\left(e^{t\sqrt{\psi}} + e^{-t\sqrt{\psi}}\right) + \frac{v_0}{2\sqrt{\psi}}\left(e^{t\sqrt{\psi}} - e^{-t\sqrt{\psi}}\right).$$

Pour $t = \infty$, x est infini, le mobile s'éloigne donc indéfiniment avec le temps. Nous rencontrerons plus loin ce mouvement et nous pourrons en donner une représentation géométrique qui en fera bien saisir les particularités.

180. Problème II. — *Tous les éléments d'une droite fixe indéfinie attirent un point libre en raison inverse du carré de la distance; ce point part sans vitesse initiale, déterminer son mouvement.*

Il est clair que le mouvement du point s'effectuera suivant une droite perpendiculaire à la droite fixe; car la résultante de toutes les actions de la droite est évidemment normale à cette droite. Soit alors x la distance du mobile à la droite, à l'époque t; soit ds un élément de la droite situé à la distance s du pied de la perpendiculaire abaissée du mobile sur la droite; soit enfin $f\,ds$ l'action de l'élément ds de la droite sur l'unité de masse à l'unité de distance.

L'action de l'élément ds sur le mobile, dont nous prendrons la masse pour unité, est égale à $f\,ds$ divisé par le carré de la distance du mobile à ds; par suite cette action peut être représentée par

$$\frac{f\,ds}{s^2+x^2},$$

et la projection de cette action sur la droite x sera

$$\frac{f\,ds}{s^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{fx\,ds}{(s^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La résultante des actions de tous les éléments ds sera la somme de toutes les projections analogues dont nous venons de trouver l'expression, ou bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{fx\,ds}{(x^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette force est attractive, l'équation du mouvement sera donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{fx\,ds}{(x^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplions par dx les deux membres de cette équation, puis intégrons depuis $t=0$ jusqu'à $t=t$. On aura, en observant que $\frac{dx}{dt}$ est nul pour $t=0$, et en prenant la valeur de x pour $t=0$ égale à x_0,

$$\frac{v^2}{2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{f\,ds}{\sqrt{x^2+s^2}} - 2\int_0^{+\infty} \frac{f\,ds}{\sqrt{x_0^2+s^2}};$$

on en déduit

$$\frac{v^2}{2} = 2f\left[\log\left(s+\sqrt{x^2+s^2}\right) - \log\left(s+\sqrt{x_0^2+s^2}\right)\right]_0^{+\infty},$$

ou

$$v^2 = 4f\left(\log \frac{s + \sqrt{x^2 + s^2}}{s + \sqrt{x_0^2 + s^2}}\right)_0^{+\infty},$$

ou enfin

$$(7) \qquad v^2 = 4f\log\sqrt{\frac{x_0^2}{x^2}} = 4f\log\frac{x_0}{x}.$$

Si l'on remplace v par $\frac{dx}{dt}$, on a

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4f(\log x_0 - \log x)},$$

et, par suite,

$$(8) \qquad 2t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{f(\log x_0 - \log x)}};$$

le problème est ainsi ramené aux quadratures. Si l'on fait $x = 0$, on aura le temps T que met le mobile pour atteindre la droite attirante

$$\mathrm{T} = +\int_0^{x_0} \frac{dx}{2\sqrt{f(\log x_0 - \log x)}};$$

le temps demandé devant être positif, nous prenons le signe $+$ devant le radical (*).

(*) Nous ne donnons pas à x de valeurs négatives, parce que le mobile arrive sur la droite attirante avec une vitesse infinie; la force qui le sollicite alors est infinie, et les lois de la Mécanique ne peuvent s'appliquer à des cas singuliers de ce genre qui ne se présentent évidemment pas dans la nature. Toutefois, si l'on tenait absolument à discuter les valeurs négatives de x, il semblerait naturel d'admettre, en vertu de la formule (7), que x dans la formule (8) doit être remplacé par sa valeur absolue; ainsi, pour les valeurs négatives de x, j'écrirais, au lieu de (8),

$$t = \int_0^{x_0} \frac{dx}{2\sqrt{f(\log x_0 - \log x)}} + \int_0^{-x} \frac{dx}{2\sqrt{f[\log x_0 - \log(-x)]}}.$$

Cette formule montre que la plus grande valeur de $-x$ est x_0. Le mobile arrivé à l'abscisse $-x_0$ aura une vitesse nulle; il se trouvera alors dans des circonstances analogues à celles où il se trouvait à l'origine du temps et son mouvement sera oscillatoire.

III. — Mouvement d'un point dans un milieu résistant.

181. Lorsqu'un corps se meut dans l'air ou dans un fluide, il exerce sur les molécules de ce fluide une certaine action; les molécules du fluide réagissent alors en sens inverse, et le mouvement se trouve ralenti par une certaine force que l'on appelle la *résistance* du fluide.

182. Problème I. — *Déterminer le mouvement d'un point sollicité par une force constante dans un milieu dont la résistance varie comme le carré de la vitesse. On suppose que le point part du repos.*

Le mouvement que nous allons étudier est à peu près celui d'un corps qui tombe à la surface de la terre.

Soient x la distance, à l'époque t, du mobile à son point de départ; g l'intensité de la force constante qui le sollicite; $-gv^2 : k^2$ la résistance du milieu; nous mettons le signe $-$ devant l'expression précédente, parce que la résistance agit en sens inverse du mouvement. L'équation du mouvement sera, en supposant la masse du mobile égale à l'unité,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right),$$

ou bien

$$\frac{dv}{dt} = g\,\frac{k^2 - v^2}{k^2};$$

on en déduit

$$2\,\frac{k^2\,dv}{k^2 - v^2} = 2g\,dt,$$

ou bien

$$k\,dv\left(\frac{1}{k+v} + \frac{1}{k-v}\right) = 2g\,dt.$$

Si l'on intègre entre les limites $t = 0$ et $t = t$, on a, en observant que $v = 0$ pour $t = 0$,

$$k \log \frac{k + v}{k - v} = 2gt;$$

d'où l'on tire

$$\frac{k + v}{k - v} = e^{\frac{2gt}{k}},$$

et, par suite,

$$v = k \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = k \frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}};$$

en intégrant depuis $t = 0$, il vient

$$(2) \qquad x = \frac{k^2}{g} \log \frac{1}{2} \left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right),$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(3) \qquad x = \frac{k^2}{g} \left[\frac{gt}{k} + \log \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{2gt}{k}}\right)\right].$$

Si k est très-grand, on pourra écrire sans grande erreur

$$x = \frac{k^2}{g} \left[\frac{gt}{k} + \log \left(1 - \frac{gt}{k} + \frac{g^2 t^2}{k^2}\right)\right],$$

ou bien, en développant le logarithme en série,

$$x = \frac{k^2}{g} \left(\frac{gt}{k} - \frac{gt}{k} + \frac{g^2 t^2}{k^2} - \frac{g^2 t^2}{2k^2} - \dots\right),$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{gt^2}{2} + \dots.$$

Les termes qui ne sont pas écrits contiennent $\frac{1}{k}$ en facteur; par suite, si l'on fait $k = \infty$, on trouve

$$x = \frac{gt^2}{2},$$

et le mouvement est uniformément accéléré, ce que l'on pouvait prévoir; car alors la résistance est nulle, et le corps est mû par une force constante.

Il faut observer que x tiré de (2) ne change pas de valeur quand on change t en $-t$, ce qui indiquerait qu'à des intervalles de temps également éloignés de l'origine du mouvement, le mobile se trouve dans la même position, et, dans ces circonstances, la vitesse a des valeurs égales et de signe contraire, comme le prouve la formule (1). Mais les conclusions précédentes ne sont pas exactes, attendu que, pour les valeurs négatives de t, le mouvement s'exécutant dans un autre sens, la résistance alors ne serait plus $-\frac{gv^2}{k^2}$, mais $+\frac{gv^2}{k^2}$; en sorte que les formules (1) et (2) sont inexactes pour $t < 0$.

Le problème que nous allons résoudre tout à l'heure nous fera connaître le mouvement qui se produit lorsque la résistance agit dans le sens de la force g.

La formule (1) montre que v est moindre que k, l'équation différentielle du mouvement montre que $\frac{dv}{dt}$ est positif : donc la vitesse croît; elle atteint donc son maximum pour $t = \infty$, et alors $v = k$ et $x = \infty$.

183. Problème II. — *Un point se meut dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse; il est sollicité par une force constante, et animé d'une vitesse initiale en sens inverse de la force qui le sollicite : déterminer son mouvement.*

En conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, l'équation du mouvement deviendra

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(g + \frac{gv^2}{k^2}\right),$$

parce qu'alors la résistance agit dans le sens de la force.

L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{k^2}(k^2 + v^2),$$

ou bien

$$\frac{k\,dv}{k^2 + v^2} = -\frac{g\,dt}{k};$$

d'où l'on tire, en intégrant depuis $t = 0$ et en désignant par v_0 la vitesse initiale,

$$(1) \qquad \text{arc tang}\,\frac{v}{k} - \text{arc tang}\,\frac{v_0}{k} = -\frac{gt}{k},$$

ou bien, en prenant les tangentes des deux membres,

$$\left(\frac{v}{k} - \frac{v_0}{k}\right) : \left(1 + \frac{vv_0}{k^2}\right) = -\text{tang}\,\frac{gt}{k};$$

d'où l'on tire

$$v = k\,\frac{v_0 - k\,\text{tang}\,\dfrac{gt}{k}}{k + v_0\,\text{tang}\,\dfrac{gt}{k}} = k\,\frac{v_0\cos\dfrac{gt}{k} - k\sin\dfrac{gt}{k}}{k\cos\dfrac{gt}{k} + v_0\sin\dfrac{gt}{k}}.$$

Si l'on observe que le numérateur de la dernière fraction est au facteur $\dfrac{k^2}{g}$ près la dérivée du dénominateur, l'intégration effectuée à partir de $t = 0$ donnera

$$x = \frac{k^2}{g}\log\left(k\cos\frac{gt}{k} + v_0\sin\frac{gt}{k}\right).$$

Il semble, d'après cette dernière formule, que le mouvement soit périodique, et même qu'il présente des phases d'interruption; mais il faut observer que cette formule a été établie en donnant un signe déterminé à la vitesse; elle cessera donc d'avoir lieu quand v passera par zéro. Pour $v = 0$, la formule (1) donne

$$t = \frac{k}{g} \operatorname{arc\,tang} \frac{v_0}{k};$$

à partir du moment où l'on a $v = 0$, l'on se trouve dans le cas du problème précédemment étudié, et le mouvement change de nature.

Les exemples précédents montrent suffisamment comment on traiterait les questions de mouvement dans lesquelles il existe une résistance proportionnelle à une fonction quelconque de la vitesse et une force constante, et comment le problème du mouvement, dans ce cas, se ramène aux quadratures.

Remarque. — En général les solutions singulières des équations différentielles de la Mécanique doivent être rejetées, parce que, ne contenant pas le nombre voulu de constantes arbitraires, elles ne permettent pas ordinairement de satisfaire aux conditions initiales. Toutefois, il y a des cas où une solution singulière pourrait satisfaire à la question, comme on va le voir.

184. Problème III. — *Trouver le mouvement sollicité par une force proportionnelle à la racine carrée de la vitesse, et agissant dans la même direction que cette vitesse.*

Soient x l'espace parcouru par le mobile depuis le moment initial et v la vitesse, le mouvement est rectiligne et a évidemment pour équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2k\sqrt{v}, \tag{1}$$

t désignant le temps et k une constante positive ou négative; on tire de là

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = k\,dt,$$

ou bien, en intégrant,

$$\sqrt{v} = kt + a,$$

a désignant une constante. On peut écrire cette équation ainsi

$$(2) \qquad v = \frac{dx}{dt} = (kt + a)^2,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad x = \frac{1}{3k}(kt + a)^3 + b,$$

b désignant une nouvelle constante. L'équation (1) est satisfaite, en prenant $v = 0$ ou $x = \text{const.}$ Cette solution est singulière, car elle ne rentre pas dans le type (3). Cette solution correspond au cas où le mobile partirait sans vitesse initiale; il est clair qu'alors, la force motrice étant nulle, le point devra rester en repos. Si l'on détermine des constantes a et b de manière à satisfaire aux conditions $v = 0$ pour $t = 0$, $x = 0$ pour $t = 0$, on déduit de (2) et (3)

$$0 = a^2,$$

$$0 = \frac{a^3}{3k} + b \quad \text{ou} \quad b = 0;$$

mais (3) donne alors

$$x = \frac{1}{3}k^2t^3;$$

et la solution singulière convient seule à la question dans le cas particulier que nous venons d'examiner.

On conçoit en effet qu'il doive exister une discontinuité dans le cas où $v = 0$, car si le mobile a une très-petite vitesse, cette vitesse va être augmentée par l'action de la force, si cette force agit dans le sens de la vitesse, et l'espace va croître indéfiniment avec le temps; si, au contraire, la vitesse est rigoureusement nulle, la force le sera aussi, et le point m restera en repos.

Reprenons la formule (2). Si a et k sont de signes contraires, v deviendra nul pour $t = -\frac{a}{k}$. La force qui sollicite le point sera nulle en même temps, et le mouvement cessera. La formule (3) ne rend pas compte de cette circonstance, et le passage de la solution particulière à la solution singulière est un fait très-remarquable.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS CURVILIGNES.

I. — FORCES CENTRALES. — PRINCIPE DES AIRES.

185. Lorsqu'un point matériel est soumis à l'action d'une force qui passe par un point fixe, on peut toujours trouver trois intégrales du mouvement; en effet, reprenons les équations du Chapitre Ier (*voir* n° 172) :

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

dans lesquelles m désigne la masse du point matériel en mouvement; x, y, z, les coordonnées rectangulaires prises par rapport à trois axes fixes; X, Y, Z, les projections de la force motrice sur les axes; t, le temps. Supposons que l'on prenne pour origine le point par lequel passe constamment la force. Multiplions la troisième équation par y, la seconde par z, et retranchons, nous aurons

$$(2) \qquad m\left(\frac{d^2z}{dt^2}y - \frac{d^2y}{dt^2}z\right) = Zy - Yz;$$

mais si la force (X, Y, Z) passe par l'origine, on a

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z};$$

on a donc

$$Zy - Yz = 0,$$

ce que l'on aurait pu remarquer immédiatement en observant que $Zy - Yz$ est le moment de la force (X, Y, Z) par rapport à l'axe des x (n° 61); l'équation (2) devient alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} y - \frac{d^2 y}{dt^2} z = 0,$$

et l'on aurait deux équations analogues. On en tire, par l'intégration,

$$\frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z = 2a, \tag{3}$$

a désignant une constante. Or le premier membre de cette dernière équation n'est autre chose que le double de la vitesse aréolaire (p. 11) de la projection du point mobile sur le plan des yz.

En effet, posons

$$y = r \sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$

il vient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin\theta + r\cos\theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos\theta - r\sin\theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

et $r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ est bien la quantité dont nous avons parlé. On peut alors écrire l'équation (3) ainsi :

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = a\,dt.$$

Si l'on intègre et si l'on désigne par λ l'aire décrite par le rayon vecteur projeté sur le plan des yz depuis l'époque t_0, on a

$$\lambda = a(t - t_0).$$

Donc :

186. Théorème. — *Lorsqu'une force est constamment dirigée vers un centre fixe, la projection du rayon vecteur de son point d'application sur un plan fixe décrit des aires proportionnelles aux temps employés à les parcourir.*

Ce théorème porte le nom de *principe des aires*. Il fournit toujours, comme l'on voit (lorsqu'il y a lieu de l'appliquer), trois intégrales premières du problème dont on s'occupe, car les équations

$$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z = 2a,$$

$$\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x = 2b,$$

$$\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y = 2c,$$

où a, b, c désignent des constantes, sont des intégrales du problème. Si l'on multiplie la première de ces formules par x, la seconde par y, la troisième par z, on a

$$0 = ax + by + cz,$$

ce qui prouve que la trajectoire est plane. On pourra alors prendre le plan de la trajectoire pour plan des xy, et le problème ne contiendra plus en réalité que deux inconnues, x et y. On aura quatre intégrales à trouver, deux intégrales premières et deux intégrales secondes. Le principe des aires fournit une première intégrale; si le principe des forces vives peut s'appliquer, on en aura immédiatement une nouvelle. Toutefois il n'est pas nécessaire d'avoir recours à ces principes, c'est-à-dire de passer par les intégrales qu'ils fournissent, comme on peut s'en assurer par l'exemple qui suit.

187. Problème. — *Étudier le mouvement d'un point*

sollicité par un centre fixe proportionnellement à la distance.

Prenons pour plan des xy le plan dans lequel se meut le point donné, et plaçons l'origine au centre d'action. Prenons la masse du mobile égale à l'unité; soient x et y ses coordonnées, r sa distance à l'origine; soient enfin k l'action exercée par le centre fixe sur le mobile lorsque celui-ci se trouve à l'unité de distance, et t le temps. La force qui sollicite le mobile à l'époque t sera kr; sa projection sur l'axe des x sera $kr\frac{x}{r}$, ou kx, si la force est répulsive, et $-kr\frac{x}{r}$ ou $-kx$ si elle est attractive. Mais on peut la prendre toujours égale à kx en convenant de regarder k comme positif ou négatif, selon que la force sera répulsive ou attractive.

De même, la projection de cette force sur l'axe des y sera ky, et les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = kx, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = ky; \tag{1}$$

on en tire

$$\left\{ \begin{aligned} x &= ae^{t\sqrt{k}} + a'e^{-t\sqrt{k}}, \\ y &= be^{t\sqrt{k}} + b'e^{-t\sqrt{k}}, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

a, a', b, b' désignant des constantes. Pour les déterminer on se donnera la position et la vitesse initiale du mobile; soient x_0, y_0 ses coordonnées pour $t = 0$, u et v les composantes de sa vitesse à la même époque. En différentiant les formules (2), on a

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{k}\left(ae^{t\sqrt{k}} - a'e^{-t\sqrt{k}}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= \sqrt{k}\left(be^{t\sqrt{k}} - b'e^{-t\sqrt{k}}\right); \end{aligned} \right. \tag{3}$$

si dans (2) et (3) on fait $t = 0$, on a

$$x_0 = a + a', \quad u = \sqrt{k}(a - a'),$$
$$y_0 = b + b', \quad v = \sqrt{k}(b - b').$$

Ces équations déterminent a, b, a', b' en fonction de x_0, y_0, u, v. Pour obtenir la trajectoire, il faut éliminer t entre les équations (2). En résolvant ces équations par rapport à $e^{t\sqrt{k}}$ et $e^{-t\sqrt{k}}$, on a

$$e^{t\sqrt{k}} = \frac{b'x - a'y}{ab' - ba'},$$
$$e^{-t\sqrt{k}} = \frac{ay - bx}{ab' - ba'},$$

et, en faisant le produit de ces équations,

$$(b'x - a'y)(ay - bx) = (ab' - ba')^2.$$

Cette équation représentera toujours une conique. Lorsque k sera positif, a, b, a', b' seront réels, et la trajectoire sera une hyperbole; lorsque k sera négatif, a, b, a', b' seront imaginaires, et la conique sera une ellipse. Pour nous en assurer, il suffit de changer k en $-k$: les intégrales (2) peuvent alors se mettre sous la forme

$$x = a \sin t\sqrt{k} + a' \cos t\sqrt{k},$$
$$y = b \sin t\sqrt{k} + b' \cos t\sqrt{k},$$

a, a', b, b' désignant de nouvelles constantes réelles que l'on déterminerait comme tout à l'heure. Si l'on calcule $\sin t\sqrt{k}$ et $\cos t\sqrt{k}$, et si l'on fait usage de la formule

$$(\sin t\sqrt{k})^2 + (\cos t\sqrt{k})^2 = 1,$$

on trouve alors pour équation de la trajectoire

$$(b'x - a'y)^2 + (ay - bx)^2 = (ab' - ba')^2,$$

ce qui est bien l'équation d'une ellipse dont le centre est à l'origine.

En faisant usage du théorème des aires et du théorème des forces vives, on obtient aussi la solution de la question, quoique moins simplement.

II. — Étude du mouvement des planètes.

187. Le lecteur sait que les astres peuvent se diviser en quatre classes : 1° les étoiles ou astres fixes dont les distances mutuelles ne semblent pas varier sensiblement pendant une période de temps considérable : parmi ces astres on doit ranger le Soleil; 2° les planètes ou astres errants dont les distances mutuelles varient sensiblement dans l'espace d'une année et qui décrivent des orbites fermées autour du Soleil (ou autour d'autres étoiles); 3° les satellites des planètes qui ne s'écartent que peu d'une même planète en décrivant des orbites fermées autour de cette planète : la Lune est le satellite de la Terre ; 4° les comètes qui apparaissent brusquement dans le ciel pour ne plus revenir qu'à des intervalles de temps très-considérables, souvent même infinis.

Képler, après dix-sept années d'observations laborieuses, est parvenu à formuler les lois suivantes, auxquelles son nom est resté attaché :

1° Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers;

2° Les rayons vecteurs qui joignent le centre du Soleil au centre d'une planète décrivent des aires qui varient proportionnellement au temps;

3° Les carrés des temps des révolutions de deux planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses décrites par ces planètes.

Les comètes sont soumises aux lois de Képler; elles se distinguent des planètes par la nature de leur orbite, qui est très-allongée et quelquefois même parabolique ou hyperbolique.

Les satellites des planètes se comportent vis-à-vis des planètes comme celles-ci vis-à-vis du Soleil.

Bien que les lois de Képler ne soient qu'approchées, et que l'on y regarde les astres comme de simples points matériels, en négligeant leurs dimensions vis-à-vis de leurs distances mutuelles, nous allons essayer de soumettre ces lois à l'analyse, afin d'en déduire l'expression des forces qui sollicitent les planètes.

Prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires passant par le Soleil et tracées dans le plan de l'orbite d'une planète; soient m la masse de cette planète, x, y ses coordonnées rectangulaires, r, θ ses coordonnées polaires, X, Y les composantes de la force qui la sollicite, force évidemment située dans le plan de l'orbite; nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}. \end{cases}$$

Si l'on suppose l'axe des x dirigé suivant le grand axe de l'orbite,

$$(2) \qquad r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

sera l'équation de la section conique décrite par la planète. Dans cette formule, p désigne le paramètre, e l'excentricité de l'orbite.

Soit c le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps, on aura, en vertu de la seconde loi de Képler,

$$(3) \qquad r^2 d\theta = c\,dt,$$

$r^2\,d\theta$ désignant le double de l'aire décrite dans le temps dt et c une quantité constante. Ceci posé, multiplions les équations (1) respectivement par y et par x, et retranchons; nous aurons

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$$

ou bien

$$\text{(A)} \qquad m\frac{d}{dt}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\right) = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}.$$

Observons alors que

$$(4) \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

nous aurons

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta,$$

et la formule (A) se réduira à

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X},$$

c'est-à-dire, en vertu de (3),

$$0 = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X},$$

ou bien

$$\frac{x}{\mathrm{X}} = \frac{y}{\mathrm{Y}}.$$

Les composantes X, Y étant proportionnelles aux coordonnées x, y, on en conclut que la force qui sollicite la planète passe par l'origine, c'est-à-dire émane du Soleil; en désignant alors par φ cette force, on pourra poser

$$\mathrm{X} = \varphi\cos\theta, \quad \mathrm{Y} = \varphi\sin\theta,$$

φ étant regardé comme positif dans le cas où la force est répulsive, et comme négatif dans le cas où la force est attractive. Les équations (1) deviennent alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\cos\theta,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\sin\theta.$$

Multiplions la première équation par

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta,$$

la seconde par

$$dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta,$$

et ajoutons, nous aurons

$$m\frac{d^2x\,dx + d^2y\,dy}{dt^2} = \varphi\,dr.$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs (4), cette formule devient

$$\text{(B)} \qquad \frac{m}{2}d\frac{r^2d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = \varphi\,dr.$$

On simplifie un peu le calcul occasionné par ce changement de variables, en observant que $d^2x\,dx + d^2y\,dy$ est la différentielle de $\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)$, c'est-à-dire de la moitié du carré de l'élément de l'arc dont l'expression en coordonnées polaires est $r^2d\theta^2 + dr^2$.

Dans la formule (B), remplaçons dt^2 par sa valeur $\frac{r^4d\theta^2}{c^2}$ déduite de (3); nous aurons

$$c^2\frac{m}{2}d\frac{r^2d\theta^2 + dr^2}{r^4d\theta^2} = \varphi\,dr,$$

ou bien

$$\frac{c^2m}{2}d\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\frac{dr^2}{d\theta^2}\right) = \varphi\,dr.$$

Observons enfin que $-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ est égal à $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$, il viendra

$$\text{(C)}\qquad \frac{c^2 m}{2}\, d\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right]=\varphi\, dr.$$

Or de la formule (2) on tire

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1-e\cos\theta),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{p^2}(1-2e\cos\theta+e^2).$$

La formule (C) devient ainsi

$$\frac{c^2 m}{2p^2}\, d(1-2e\cos\theta+e^2)=\varphi\, dr;$$

d'où l'on tire

$$\text{(D)}\qquad \varphi=\frac{c^2 m}{2p^2}\,\frac{d}{d\theta}(1-2e\cos\theta+e^2)\,\frac{d\theta}{dr}.$$

La formule (2) donne

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{-ep\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}=-\frac{r^2 e\sin\theta}{p}.$$

La formule (D) devient alors

$$\varphi=-\frac{c^2 m}{2p^2}\,\frac{d}{d\theta}(1-2e\cos\theta+e^2)\,\frac{p}{r^2 e\sin\theta},$$

c'est-à-dire

$$\text{(5)}\qquad \varphi=-\frac{c^2 m}{pr^2}.$$

La force qui sollicite la planète est donc attractive et inversement proportionnelle au carré de sa distance au Soleil.

Considérons maintenant une seconde planète ; soient m' sa masse, r' sa distance au Soleil, p' son paramètre, e' son excentricité, φ' la force qui la sollicite ; soient, de plus, $2a$ et $2a'$ les grands axes respectifs des deux planètes, on aura

$$\varphi' = -\frac{c'^2 m'}{p' r'^2}, \tag{6}$$

c' désignant une nouvelle constante. Or les aires totales des orbites des deux planètes sont

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad \text{et} \quad \pi a'^2 \sqrt{1 - e'^2};$$

on a donc, en vertu de la seconde loi de Képler,

$$\frac{c}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\mathrm{T}},$$

$$\frac{c'}{2} = \frac{\pi a'^2 \sqrt{1 - e'^2}}{\mathrm{T}'},$$

T et T′ désignant respectivement les temps des révolutions des planètes m et m'. Les formules (5) et (6) deviennent ainsi

$$\varphi = -\frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{\mathrm{T}^2} \frac{m}{pr^2},$$

$$\varphi' = -\frac{4\pi^2 a'^4 (1 - e'^2)}{\mathrm{T}'^2} \frac{m'}{p' r'^2}.$$

Or, en vertu de la troisième loi de Képler, on a

$$\frac{\mathrm{T}'^2}{\mathrm{T}^2} = \frac{a'^3}{a^3}.$$

Si l'on élimine alors T et T′ entre les trois dernières équations, il vient

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{1-e^2}{1-e'^2}\,\frac{m}{m'}\,\frac{p'r'^2}{pr^2}\,\frac{a}{a'}.$$

Si l'on observe alors que $p = a(1-e^2)$ et que $p' = a(1-e'^2)$, il vient

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{m}{m'}\,\frac{r'^2}{r^2};$$

ce qui prouve que les forces qui sollicitent les planètes sont proportionnelles aux masses de ces planètes, en sorte que le rapport de φ à $\frac{m}{r^2}$ est le même pour toutes les planètes; en désignant ce rapport par k, on a

$$\varphi = \frac{mk}{r^2}.$$

Cette équation, déduite pour la première fois par Newton des lois de Képler, constitue ce que l'on appelle *le principe de la gravitation universelle.*

En vertu de ce principe, qui n'est qu'une extension légitime des formules que nous venons d'établir, *deux points matériels s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances.*

Avant d'aller plus loin, faisons un pas en arrière, et discutons les résultats auxquels nous venons d'arriver.

Nous avons basé la Mécanique sur trois principes fondamentaux : le principe de l'inertie, le principe de l'action égale et contraire à la réaction et le principe de l'indépendance des effets simultanés des forces. Les conséquences déduites logiquement de ces trois principes, appliquées aux observations astronomiques, nous font découvrir les forces qui sollicitent les planètes; et, en généralisant les résultats auxquels nous arrivons, nous admettons qu'ils s'étendent à deux points matériels quelconques. D'où nous concluons la *loi de la gravitation universelle*.

Jusqu'ici rien ne vient justifier les hypothèses que nous avons faites, si ce n'est peut-être la simplicité des résultats auxquels nous arrivons. Mais nous voici maintenant en état de vérifier expérimentalement les principes de la Mécanique dans leurs conséquences.

En effet, si la loi de la gravitation universelle est exacte, la cause qui fait tomber les corps à la surface de la Terre doit être l'attraction de la Terre; or on constate, à l'aide d'expériences délicates exécutées avec le pendule, et que nous décrirons bientôt, que l'intensité de la pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre.

La Lune obéit aux lois de Képler, la force φ qui la sollicite et qui émane du centre de la Terre, est donnée par la formule (5)

$$\varphi = -\frac{c^2 m}{pr^2};$$

l'accélération G due à cette force est donnée par la formule

$$G = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Or, en supposant l'orbite de la Lune à peu près circulaire, on peut prendre $p = r$; c désigne le double de l'aire décrite dans l'unité de temps; cette aire peut être représentée par $\frac{\pi r^2}{T}$, T désignant le temps d'une révolution. On a donc

$$G = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Or les mesures astronomiques font connaître r et T; en effectuant alors le calcul de G, on trouve un nombre sensiblement égal à $g\rho^2 : r^2$, g désignant l'accélération des corps qui tombent à la surface de la Terre et ρ le rayon terrestre.

Mais les calculs dont nous venons de parler ne vérifient que grossièrement les lois de Newton, et par suite les principes fondamentaux de la Mécanique; du reste, nous avons considéré les astres comme de simples points matériels, et les lois de Képler ne sont que des lois approchées.

Les astronomes ont admis la loi de la gravitation universelle comme une loi rigoureuse; ils s'en sont servis pour déterminer les mouvements des astres en s'appuyant uniquement sur les principes de la Mécanique rationnelle, et ils ont trouvé constamment les observations d'accord avec les résultats de la théorie. C'est surtout dans cette concordance que l'on doit voir la confirmation des principes de la Dynamique et de la loi de Newton.

III. — Démonstration théorique des lois de Képler.

188. Problème. — *Trouver le mouvement d'un point sollicité par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

D'après ce que nous avons vu § I, la trajectoire du mobile sera plane, et si l'on prend pour origine le centre fixe, et pour plan des xy le plan de la trajectoire, si de plus on désigne par r et θ les coordonnées polaires du mobile, le principe des aires fournira une première équation du mouvement

$$(1) \qquad r^2 d\theta = c\,dt,$$

dt désignant l'élément du temps et c le double de l'aire décrite dans l'unité de temps.

Soit m la masse du mobile, la force qui le sollicite pourra être représentée par $\frac{km}{r^2}$; l'élément d'arc de trajectoire étant $\sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$, le carré de la vitesse sera

$$\frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2},$$

et le principe des forces vives fournira la seconde équation du mouvement

$$(2) \qquad d\,\frac{1}{2}\,m\left(\frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2}\right) = -\frac{km}{r^2}\,dr;$$

$-\frac{km}{r^2}\,dr$ représente le travail de la force $\frac{km}{r^2}$ qui sollicite le mobile, $\pm\, dr$ désignant la projection de l'élément de trajectoire sur la direction de la force (67). En intégrant l'équation précédente et en désignant par b une constante, on a

$$(3) \qquad \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = \frac{2k}{r} + b.$$

Du reste, en désignant par v_0 la vitesse initiale du mobile et par r_0, θ_0 ses coordonnées initiales, on a

$$(4) \qquad b = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

Si de (1) on tire dt pour substituer sa valeur dans (3), on a

$$c^2\,\frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{r^4 d\theta^2} = \frac{2k}{r} + b,$$

ou

$$c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{2k}{r} + b.$$

Posant alors

$$\frac{1}{r} = z, \tag{5}$$

on a

$$c^2\left[z^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right] = 2kz + b,$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \pm \frac{c\,dz}{\sqrt{b + 2kz - c^2z^2}}.$$

Si r va en croissant avec θ, z ira en décroissant, et il faudra prendre le signe —; si r va en décroissant, on prendra le signe +. Prenons le signe —, la formule précédente s'écrira

$$d\theta = \frac{-c\,dz}{\sqrt{b + \frac{k^2}{c^2} - \left(cz - \frac{k}{c}\right)^2}},$$

d'où l'on déduira

$$\theta = \arccos \frac{c^2z - k}{\sqrt{bc^2 + k^2}} + \omega,$$

ω désignant une constante. Cette formule peut s'écrire

$$\sqrt{bc^2 + k^2}\cos(\theta - \omega) = c^2z - k,$$

ou bien, en remplaçant z par $\frac{1}{r}$,

$$r = \frac{c^2}{k + \sqrt{bc^2 + k^2}\cos(\theta - \omega)}. \tag{6}$$

Cette équation représente une section conique, dont le paramètre est $\frac{c^2}{k}$, l'excentricité $\frac{1}{k}\sqrt{bc^2 + k^2}$, et dont le foyer est à l'origine. Posons

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{c^2}{k} = a(1 - e^2), \\ \dfrac{1}{k}\sqrt{bc^2 + k^2} = e. \end{cases}$$

En supposant, pour fixer les idées, $e < 1$, ce qui suppose que la trajectoire soit elliptique, il viendra

$$(6\,bis)\qquad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}.$$

Cherchons, maintenant, l'expression de r et de θ en fonction de t.

A cet effet, éliminons $d\theta$ entre (1) et (3); de (1) on tire

$$d\theta = \frac{c\,dt}{r^2},$$

et, en portant cette valeur dans (3),

$$\frac{c^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} + b.$$

On en déduit

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = b + \frac{2k}{r} - \frac{c^2}{r^2},$$

$$dt = \frac{\pm\, dr}{\sqrt{b + \dfrac{2k}{r} - \dfrac{c^2}{r^2}}},$$

ou bien, en admettant que r croît avec t,

$$(8)\qquad dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{br^2 + 2kr - c^2}}.$$

On pourrait intégrer cette équation directement par les procédés ordinaires du calcul intégral, mais il est plus simple d'introduire, dans la question, une variable auxiliaire que nous allons déterminer par les considérations suivantes : à la place de c et de b, introduisons les constantes a et e; à cet effet résolvons les équations (7), nous aurons

$$(9)\qquad \begin{cases} c^2 = ak(1 - e^2) \\ b = -\dfrac{k}{a}. \end{cases}$$

L'équation (8) deviendra alors

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-\dfrac{k}{a}r^2 + 2kr - ak(1 - e^2)}},$$

ou bien encore

$$dt = \sqrt{\frac{a}{k}}\frac{r\,dr}{\sqrt{-a^2(1 - e^2) + 2ar - r^2}};$$

posons alors

$$a - r = ae\cos u,$$

ou bien

$$(10)\qquad r = a(1 - e\cos u),$$

nous aurons

$$dt = +\sqrt{\frac{a^3}{k}}(1 - e\cos u)\,du,$$

ou bien, en désignant par τ une constante,

$$(11)\qquad t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{k}}(u - e\sin u).$$

Cette formule renferme la troisième loi de Képler, car après une révolution u a varié de 2π, et le temps d'une révolution sera $2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{k}}$.

Lorsque l'on aura résolu l'équation (11) par rapport à u, l'équation (10) fera connaître r. Il reste maintenant à calculer l'angle θ en fonction de t, nous allons le calculer en fonction u; pour cela, dans l'équation (6 *bis*), remplaçons r par sa valeur déduite de (10), il viendra

$$a(1 - e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)},$$

ou bien

$$\cos u = \frac{e + \cos(\theta - \omega)}{1 + e\cos(\theta - \omega)};$$

on en tire

$$\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} = \frac{1-e}{1+e}\,\frac{1 - \cos(\theta - \omega)}{1 + \cos(\theta - \omega)}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta - \omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u.$$

Cette formule fera connaître θ quand on connaîtra u. Et l'intégration des équations du mouvement peut être considérée comme terminée.

Nous avons admis que l'on avait $e < 1$; si l'on avait eu $e > 1$ on n'aurait pas pu poser

$$r = a(1 - e\cos u),$$

parce que le rayon r peut croître indéfiniment dans l'hyperbole. Nous laisserons au lecteur le soin de faire l'intégration dans ce cas; cette intégration n'offre, du reste, aucune difficulté; mais comme le mouvement elliptique est celui qui se présente dans la théorie du mouvement des planètes, nous nous y arrêterons encore quelque temps.

Voyons quelles doivent être les circonstances initiales du mouvement pour que le mobile décrive une ellipse : on a trouvé (7)

$$e = \frac{1}{k}\sqrt{bc^2 + k^2}.$$

Si l'on a $e < 1$ on aura une ellipse; or $e < 1$ donne

$$\frac{bc^2}{k^2} + 1 < 1,$$

ou

$$\frac{bc^2}{k^2} < 0,$$

c'est-à-dire

$$b < 0.$$

On voit ainsi que c'est le signe de b qui fixera la nature de la trajectoire; or on a trouvé

$$b = v_0^2 - \frac{2k}{r_0};$$

donc pour

$v_0^2 < \frac{2k}{r_0}$ la trajectoire sera elliptique,

$v_0^2 = \frac{2k}{r_0}$ » » parabolique,

$v_0^2 > \frac{2k}{r_0}$ » » hyperbolique.

Lorsque $e = 0$, on a un cercle, et alors $r^2 \frac{d\theta}{dt}$, et r étant constants, θ croît proportionnellement au temps, le mouvement est uniforme.

Arrêtons-nous un instant au cas de la parabole. On a trouvé, équation (6),

$$r = \frac{c^2}{k + \sqrt{bc^2 + k^2}\cos(\theta - \omega)}.$$

Dans le cas de la parabole, on a seulement

$$r = \frac{c^2}{k[1 + \cos(\theta - \omega)]}.$$

Si l'on reprend alors la formule (8)

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{br^2 + 2kr - c^2}},$$

et si l'on pose

$$p = \frac{c^2}{k}, \quad b = 0,$$

il viendra

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \omega)}, \qquad dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{k(2r - p)}}.$$

et en désignant par τ une constante

$$(13) \qquad t - \tau = \frac{1}{3}(p + r)\sqrt{2r - p}.$$

Si, dans l'équation

$$(14) \qquad r = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \omega)},$$

on remplace r par sa valeur tirée de l'équation des aires $r^2\,d\theta = c\,dt$, il vient

$$c\,dt = \frac{p^2\,d\theta}{[1 + \cos(\theta - \omega)]^2}.$$

Si l'on pose $\theta - \omega = 2\psi$, il vient

$$c\,dt = \frac{p^2\,d\psi}{2\cos^4\psi},$$

ou

$$c\,dt = \frac{p^2\,\text{séc}^2\psi\,d\psi}{2\cos^2\psi} = \frac{1}{2}p^2\,\text{séc}^2\psi\,d\psi(1 + \operatorname{tang}^2\psi),$$

et, par suite, en désignant par α une constante,

$$c(t - \alpha) = \frac{1}{2}p^2\left(\operatorname{tang}\psi + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\psi\right).$$

Pour $t = \tau$, on a $r = \dfrac{p}{2}$ en vertu de la formule (13), et, par suite, en vertu de (14), $\theta - \omega = 0$ ou $\psi = 0$; donc $\alpha = \tau$. La formule précédente devient alors, en remplaçant α par τ, c par $\sqrt{pk}$ et ψ par $\dfrac{\theta - \omega}{2}$,

$$(15) \quad t - \tau = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{k}}\left[\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta - \omega) + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}(\theta - \omega)\right].$$

IV. — Application des formules précédentes au système du monde.

189. Si nous admettons la loi de la gravitation universelle, et si nous observons que le Soleil est incomparablement plus gros que les planètes, nous serons portés à négliger, dans une première approximation, l'attraction mutuelle des planètes pour ne considérer que celle du Soleil; enfin nous pourrons négliger les dimensions des astres et les regarder comme de simples points matériels.

Si l'on imagine alors un système d'axes passant par le centre du Soleil, et de directions fixes; si l'on imagine également un système d'axes fixes parallèles aux premiers; si l'on désigne ensuite par M la masse du Soleil, par m celle d'une planète, par x, y, z les coordonnées de la planète prises par rapport aux axes fixes, par ξ, η, ζ les coordonnées prises par rapport aux axes mobiles, par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du Soleil, et par f l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse placée à l'unité de distance, on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi + x_0 = x, \\ \eta + y_0 = y, \\ \zeta + z_0 = z, \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$(2)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots.$$

La force qui sollicite la planète est, en désignant par r sa distance au Soleil,

$$\frac{\mathrm{M}mf}{r^2};$$

la projection de cette force sur l'axe des x sera

$$\frac{\mathrm{M}mf}{r^2}\cdot\frac{x - x_0}{r},$$

et, par suite, les équations du mouvement de la planète seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M}mf}{r^2}\frac{x - x_0}{r}, \ldots,$$

ou bien, en vertu de (1) et (2),

$$(3) \qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M}mf}{r^3}\xi, \ldots$$

Les équations du mouvement du Soleil sont

$$\mathrm{M}\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{\mathrm{M}mf}{r^2}\frac{x - x_0}{r}, \ldots$$

ou

$$(4) \qquad \mathrm{M}\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{\mathrm{M}mf}{r^3}\xi;$$

en éliminant x_0, y_0, z_0 entre (3) et (4), on a

$$(5) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{(\mathrm{M}+m)f\xi}{r^3}, \ldots$$

Cette équation, qui est celle du mouvement relatif d'une planète, montre que ce mouvement relatif est le même que celui d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

En effet, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point par rapport à trois axes fixes, par $(\mathrm{M}+m)f$ un coefficient constant, et par r la distance de ce point à l'origine, l'action d'un centre d'attraction placé à l'origine pourra être représentée par

$$\frac{(\mathrm{M}+m)f}{r^2},$$

et la projection de cette action sera

$$\frac{(M+m)f}{r^2}\cdot\frac{\xi}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{(M+m)f\xi}{r^3};$$

les équations du mouvement du point (ξ, η, ζ) seront donc bien identiques à (5).

Il résulte de là que l'on pourra appliquer aux planètes dans leur mouvement relatif autour du Soleil les formules du paragraphe précédent, à la condition d'y faire

$$(1) \qquad k = (M+m)f.$$

Ces formules sont

$$(2) \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

$$(3) \qquad r = a(1-e\cos u),$$

$$(4) \qquad t-\tau = \sqrt{\frac{a^3}{k}}(u - e\sin u),$$

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta-\omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u.$$

On donne le nom de *problème de Képler* à celui dont le but est de calculer la position d'une planète en fonction du temps.

Rapportons le mouvement de la planète à trois axes de directions fixes passant par le centre du Soleil Ox, Oy, Oz, le plan des zy étant celui de l'écliptique; soient zy, yx, xz les traces de la sphère céleste sur les plans de coordonnées, ΩS la trace de l'orbite de la planète sur la sphère céleste, le point Ω et le point diamétralement opposé sont les *nœuds* de la planète. Soit A le *périhélie*, c'est-à-dire le sommet de l'orbite le plus rapproché du Soleil (l'autre sommet est l'*aphélie*).

Si l'on fait $t = \tau$, les formules précédentes donnent

$u = 0$, $r = a(1 - e)$ et $\theta = \omega$; ainsi τ est l'époque du passage de la planète au périhélie, ω est l'angle que fait OA avec la position de la planète à partir de laquelle on compte l'angle θ; en sorte que si l'on compte les angles à partir de Ω, ω sera l'arc ΩA; ceci posé, soient

$\Omega x = \alpha$ la longitude du nœud Ω,

φ l'inclinaison de l'orbite ΩS,

$PQ = \lambda$ la latitude de la planète P,

$Qx = L$ sa longitude,

ϖ la longitude du périhélie,

$v = \theta - \omega = AP$.

L'observation fait connaître α, φ, a, e, π, t, et le temps T de la révolution; v porte le nom d'*anomalie vraie* de la planète, et u est l'*anomalie excentrique*. Si l'on fait varier $\theta - \omega$ de 0 à 2π, u varie de 0 à 2π, et la formule (4) montre que $t - \tau$ varie de 0 à $2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k}}$. Donc

$$2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k}} = T. \tag{6}$$

La quantité

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{a^3}} \tag{7}$$

est ce que l'on appelle le *moyen mouvement*; $n(t - \tau)$ l'*anomalie moyenne*.

La formule (4) peut s'écrire

$$n(t - \tau) = u - e \sin u,$$

ou

$$u - n(t - \tau) - e \sin u = 0.$$

Cette équation est une de celles auxquelles on peut appliquer la formule de Lagrange; elle donne

$$u = n(t-\tau) + e\sin n(t-\tau) + \frac{e^2}{1.2}\,\mathrm{D}\sin^2 n(t-\tau) + \dots$$
$$+ \frac{e^i}{1.2.3\dots i}\,\mathrm{D}^{i-1}\sin^i n(t-\tau) + \dots,$$

Le symbole D^i indiquant que l'on doit prendre i fois la dérivée de la quantité qui suit par rapport à $n(t-\tau)$, ces dérivées se prendront facilement en développant $\sin^i n(t-\tau)$ en une suite de sinus ou de cosinus de multiples de $n(t-\tau)$; la formule précédente peut aussi s'écrire

$$u = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t-\tau) + e\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t-\tau) + \frac{e^2}{1.2}\,\mathrm{D}\sin^2\frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t-\tau) + \dots.$$

Le calcul des premiers termes de la série donne

$$u = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t-\tau) + e\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t-\tau) + \frac{e^2}{2}\sin\frac{4\pi}{\mathrm{T}}(t-\tau)$$
$$+ \frac{e^3}{3}\left[3\sin\frac{6\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}} - \sin\frac{2\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\right]$$
$$+ \frac{e^4}{6}\left[2\sin\frac{8\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}} - \sin\frac{4\pi(t-\tau)}{\mathrm{T}}\right] + \dots.$$

Lorsque u sera connu, les formules (3) et (5) donneront r et $v = \theta - \omega$. La série précédente est convergente pour toutes les planètes. Laplace a démontré cette proposition pour la première fois dans un des suppléments de sa *Mécanique céleste;* mais il n'existe pas, je crois, de démonstration plus simple que celle que j'ai fait connaître dans mon *Traité des Résidus*. Quoi qu'il en soit, la formule qui précède n'est pas assez convergente pour pouvoir être appliquée avec succès aux planètes dont l'excentricité est un peu forte. Lorsque l'on aura calculé $v = \theta - \omega$ et r, le triangle sphérique $\mathrm{P}\Omega\mathrm{Q}$ (*fig.* 35) donnera

$$\cos\Omega\mathrm{Q} = \cos\Omega\mathrm{P}\cos\mathrm{P}\Omega\mathrm{Q},$$

ou bien

$$\cos(\alpha - L) = \cos(A\Omega + \omega)\cos\varphi. \tag{8}$$

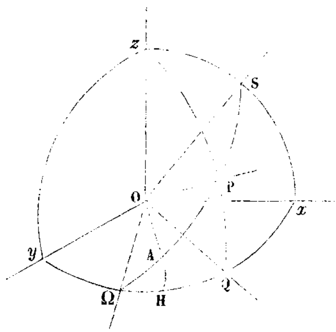
Si du point A on mène l'arc AH perpendiculaire à ΩQ, on aura $Hx = \varpi$, et, par suite,

$$\cos \Omega H = \cos \Omega A \cos\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\cos(\alpha - \varpi) = \cos \Omega A \cos\varphi. \tag{9}$$

Fig. 35.



De la formule (9) on conclura ΩA, et de la formule (8) L; le triangle $PQ\Omega$ donnera ensuite

$$\tang\lambda = \tang\varphi \sin(\alpha - L),$$

et fera connaître λ.

V. — Masse des planètes.

190. Soient m la masse d'une planète, m' celle de son satellite, M celle du Soleil; soient a et a' les demi-grands axes des orbites de la planète et de son satellite; soient enfin T et T' les temps des révolutions de ces deux astres :

on a trouvé [formule (7)]

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{a^3}},$$

et, en remplaçant k par sa valeur (1) du paragraphe précédent,

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{f(m + M)}{a^3}},$$

ou bien

$$f(m + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

On a de même

$$f(m + m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{m + M}{m + m'} = \frac{a^3 T'^2}{a'^3 T^2}.$$

On peut négliger m' vis-à-vis de m et M, on a ainsi

$$1 + \frac{M}{m} = \frac{a^3 T'^2}{a'^3 T^2}.$$

Dans cette formule on connaît a, a', T et T', on peut donc calculer le rapport $\frac{M}{m}$.

VI. — Mouvement des projectiles dans le vide.

191. Problème. — *Déterminer le mouvement d'un point pesant lancé dans une direction faisant un angle α avec l'horizon, avec une vitesse v.*

Prenons pour axes des y la verticale ascendante du point de départ, et pour axes des x l'horizontale du point de départ située dans le plan vertical qui contient la direction de la vitesse initiale.

Le mobile ne sortira évidemment pas du plan des xy. On peut, du reste, s'en assurer par l'analyse, en prenant pour axe des z l'axe perpendiculaire aux axes des x et des y; en désignant alors par x, y, z les coordonnées du mobile à l'époque t, et en observant que la seule force qui sollicite le mobile est la pesanteur, les équations du mouvement seront (172)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

g désignant l'accélération due à la pesanteur. La seconde équation intégrée donne

$$z = a + bt;$$

les constantes a et b devront être déterminées par les conditions

$$z = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$
$$\frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

ce qui donne

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Ainsi z reste nul pendant toute la durée du mouvement, ce qui prouve bien que la trajectoire est plane, ainsi que nous l'avions annoncé.

Les seules équations à considérer sont donc

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

En intégrant une première fois l'équation (1), on a

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

Si l'on fait $t = 0$, le premier membre se réduit à $v\cos\alpha$; on a donc

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha.$$

Si l'on intègre de nouveau et si l'on observe que, pour $t = 0$, x se réduit à zéro, il vient

$$(3) \qquad x = vt\cos\alpha.$$

En intégrant l'équation (2) et en observant que, pour $t = 0$, $\frac{dy}{dt}$ est égal à $v\sin\alpha$, on a

$$\frac{dy}{dt} = v\sin\alpha - gt.$$

En intégrant cette formule et en déterminant la constante, de telle sorte que l'on ait $y = 0$ pour $t = 0$, on trouve

$$(4) \qquad y = v\sin\alpha - g\frac{t^2}{2};$$

(3) et (4) sont les équations finies du mouvement; en éliminant le temps, on aura l'équation de la trajectoire

$$(5) \qquad y = x\,\text{tang}\,\alpha - g\frac{x^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est vertical; les coordonnées de son sommet, c'est-à-dire du point le plus élevé de la trajectoire, sont

$$\xi = \frac{v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, \quad \eta = \frac{v^2}{g}\frac{\sin^2\alpha}{2}.$$

L'élimination de α entre ces deux équations conduit à la relation

$$\xi^2 + 4\eta^2 - \frac{2v^2\eta}{g} = 0,$$

qui montre que les positions les plus élevées que le mobile puisse atteindre pour la même vitesse initiale, sous différents angles de projection, est une ellipse dont l'ordonnée maxima, $\eta = \frac{v^2}{2g}$, correspond à l'angle $\alpha = 0$. On a aussi

$$\frac{\xi}{\eta} = 2 \operatorname{cotg} \alpha,$$

et l'on voit ainsi que le lieu des positions les plus élevées que puisse atteindre le mobile pour un même angle de projection et avec des vitesses initiales variables est une ligne droite.

Le paramètre de la trajectoire est $\frac{v^2 \cos^2 \alpha}{g}$; les coordonnées du foyer sont donc

$$\xi = \frac{v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, \quad \eta = \frac{v^2}{2g} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha);$$

l'élimination de α donne

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{v^4}{4g^2};$$

ainsi le lieu des foyers des trajectoires correspondant à une même vitesse est un cercle.

Toutes les trajectoires correspondant à une même vitesse initiale ont la même directrice : l'ordonnée de cette directrice est $\frac{v^2}{2g}$: cette quantité est la hauteur à laquelle parviendrait le mobile, s'il était lancé verticalement de bas en haut.

Cherchons enfin l'enveloppe de toutes les trajectoires correspondant à une vitesse donnée. Pour y parvenir, il faut éliminer α entre l'équation (5) et sa dérivée, ou, ce qui revient au même, éliminer p entre l'équation

$$y = xp - g \frac{x^2}{2v^2} (1 + p^2)$$

et sa dérivée

$$0 = x - pg\frac{x^2}{v^2},$$

ce qui donne

$$y = \frac{v^2}{2g} - g\frac{x^2}{2v^2}.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est vertical, et dont le paramètre est $\frac{v^2}{g}$; cette parabole porte le nom de *parabole de sûreté*, parce que, en dehors de cette parabole, aucun point ne peut être atteint par un projectile partant de l'origine avec une vitesse v. En dedans de la parabole de sûreté, un même point peut être atteint de deux manières différentes. En effet, l'équation (5), dans laquelle x et y sont deux quantités données, est du second degré en $\tang\alpha$. Si l'on pose $\tang\alpha = p$, on a

$$y = px - g\frac{x^2}{2v^2}(1 + p^2);$$

d'où

$$p = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2v^2 gy - g^2 x^2}}{gx};$$

pour que l'on ait deux valeurs réelles de p, il faut que

$$v^4 - 2v^2 gy - g^2 x^2 > 0,$$

ou que

$$y - \frac{v^2}{2g} + \frac{gx^2}{2v^2} > 0.$$

Cette équation exprime que le point (x, y) est à l'intérieur de la parabole de sûreté : pour les points situés sur cette parabole, il n'y a plus qu'un angle admissible.

La portée du jet est l'abscisse du point où le projectile rencontre l'horizontale du point de depart. Cette portée s'obtiendra en faisant $y = 0$ dans l'équation (5) de la trajectoire ; on aura ainsi

$$x = 2v^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Cette portée sera maxima pour $\alpha = 45°$. En effet, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ étant constant, $\sin^2\alpha \cos^2\alpha$, et par suite $\sin\alpha \cos\alpha$, sera maximum pour $\sin\alpha = \cos\alpha$, c'est-à-dire pour $\alpha = 45°$.

VII. — Mouvement d'un point matériel pesant dans un milieu résistant.

192. Problème I. — *Déterminer le mouvement d'un point pesant de masse m, animé d'une vitesse initiale v, faisant un angle α avec l'horizon, dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse.*

La trajectoire du mobile étant évidemment plane et verticale, prenons pour axe des y la verticale ascendante du point de départ, et pour axe des x l'horizontale située dans le plan de la trajectoire dirigée du côté du mouvement. Soient x, y les coordonnées du mobile à l'époque t.

Les forces qui sollicitent le mobile sont : 1° son poids mg, qui est une force verticale, et dont les projections sont $0, -mg$; 2° la résistance du milieu. Cette résistance, étant proportionnelle à la vitesse, pourra être représentée par $mk\frac{ds}{dt}$, k désignant une constante et ds l'élément de trajectoire : la résistance du milieu se fait suivant la tangente et en sens inverse du mouvement. Les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont donc $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, et, par suite, les projections de la résistance du milieu sont $-km\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}$ ou $-km\frac{dx}{dt}$, et $-km\frac{dy}{dt}$;

par suite, les équations du mouvement deviennent, en supprimant le facteur m,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} - g.$$

Ces équations, intégrées entre les limites o et t, donnent

$$\frac{dx}{dt} = -kx + v\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky + v\sin\alpha - gt.$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants; leur intégration se fera par les méthodes connues, et l'on aura

$$x = \frac{v\cos\alpha}{k} + Ae^{-kt},$$

$$y = \frac{vk\sin\alpha + g}{k^2} + Be^{-kt} - \frac{g}{k}t;$$

les constantes A et B se détermineront en exprimant que x et y sont nuls pour $t = 0$. On trouve ainsi

$$0 = \frac{v\cos\alpha}{k} + A,$$

$$0 = \frac{vk\sin\alpha + g}{k^2} + B;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{v\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{vk\sin\alpha + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k};$$

en éliminant t, on a l'équation de la trajectoire

$$y = \frac{vk\sin\alpha + g}{vk\cos\alpha}x + \frac{g}{k^2}\log\left(1 - \frac{kx}{v\cos\alpha}\right).$$

Cette courbe est facile à discuter. On voit du reste que la différence entre l'ordonnée de la courbe et de la droite

$$y = \frac{vk \sin\alpha + g}{vk \cos\alpha} x$$

va en croissant, et que la courbe a une asymptote parallèle à l'axe des y située à la distance $\frac{v \cos\alpha}{k}$ de cet axe.

L'amplitude x du jet est donnée par la formule

$$0 = \frac{vk \sin\alpha + g}{v \cos\alpha} x + \frac{g}{k} \log\left(1 - \frac{kx}{v \cos\alpha}\right).$$

Problème II. — *Déterminer le mouvement d'un point pesant dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.*

En conservant les mêmes notations que tout à l'heure, la résistance du milieu sera représentée par $mk\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, ses projections seront

$$-mk\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{ds} = -mk \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad -mk \frac{ds}{dt} \frac{dy}{dt};$$

en sorte que les équations du mouvement prennent la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt}.$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k \frac{ds}{dt} \frac{dy}{dt} - g.$$

La première équation s'intègre immédiatement en divisant par $\frac{dx}{dt}$; on a ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = -k \frac{ds}{dt};$$

d'où

$$\mathrm{l}\,\frac{dx}{dt} = -\,ks + c.$$

La constante se détermine en faisant $t = 0$, et l'on en conclut $c = \mathrm{l}\,v\cos\alpha$; par suite

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha\, e^{-ks}.$$

Si dans l'équation (2) on néglige d'abord le terme $-g$, on trouve, en la traitant comme l'équation (1),

$$(4)\qquad \frac{dy}{dt} = pv\cos\alpha\, e^{-ks},$$

p désignant une constante; en faisant alors varier cette constante, on a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v\cos\alpha\left(\frac{dp}{dt}e^{-ks} - kpe^{-ks}\,\frac{ds}{dt}\right).$$

En substituant cette valeur dans (2), il reste, réductions faites,

$$v\cos\alpha\,\frac{dp}{dt}\,e^{-ks} = -\,g,$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{dp}{dt} = -\,\frac{g}{v\cos\alpha}\,e^{ks}.$$

Des équations (3) et (4), on tire

$$(6)\qquad \frac{dy}{dx} = p,$$

et des équations (3) et (5)

$$(7)\qquad \frac{dp}{dx} = -\,\frac{g}{v^2\cos^2\alpha}\,e^{2ks}.$$

Cette dernière équation est l'équation différentielle de la trajectoire; on peut la mettre sous la forme

$$\frac{dp}{ds}\,\frac{ds}{dx} = -\frac{g}{v^2\cos^2\alpha}\,e^{2ks},$$

ou bien

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{v^2\cos^2\alpha}\,e^{2ks}\,ds;$$

en intégrant, on a

$$p\sqrt{1+p^2} + \mathrm{l}\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) = c - \frac{g}{kv^2\cos^2\alpha}\,e^{2ks}.$$

La constante c se déterminera, de telle sorte que, pour $s=0$, on ait $p=\operatorname{tang}\alpha$. En désignant, pour abréger, par $-\varphi(p)$ la fonction

$$-\varphi(p) = \left[p\sqrt{1+p^2} + \mathrm{l}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) - c\right]\frac{kv^2\cos^2\alpha}{g},$$

ou

$$(8) \qquad -\varphi(p) = \int_{\operatorname{tang}\alpha}^{p}\sqrt{1+p^2}\,dp\,\frac{2kv^2\cos^2\alpha}{g},$$

l'équation précédente s'écrira

$$(9) \qquad \varphi(p) = e^{2ks},$$

et les formules (3), (4), (5) donneront

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v\cos\alpha}{\sqrt{\varphi(p)}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{pv\cos\alpha}{\sqrt{\varphi(p)}},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{g}{v\cos\alpha}\sqrt{\varphi(p)};$$

d'où l'on conclura, en divisant les deux premières par la troisième,

$$(10)\qquad dx = -\frac{dp}{\varphi(p)}\frac{v^2\cos^2\alpha}{g},$$

$$(11)\qquad dy = -\frac{p\,dp}{\varphi(p)}\frac{v^2\cos^2\alpha}{g},$$

$$(12)\qquad dt = -\frac{dp}{\sqrt{\varphi(p)}}\frac{v\cos\alpha}{g};$$

x, y et t se calculeront donc au moyen des quadratures. En vertu de (8), $\varphi(0)$ est nul; et, en vertu de (12), on voit que dp et dt étant de signes contraires, p décroît quand t croît.

De l'équation (8) on tire

$$\varphi(p) = \int_p^{\tang\alpha}\sqrt{1+p^2}\,dp\,\frac{2kv^2\cos^2\alpha}{g};$$

or on a, pour de grandes valeurs de p,

$$\sqrt{1+p^2} = p\left(1+\frac{\theta}{2p}\right),$$

θ désignant une quantité inférieure à l'unité; on a donc, en supposant $p_0 = \tang\alpha$ assez grand,

$$\int_{p_0}^{p}\sqrt{1+p^2}\,dp = \frac{p^2-p_0^2}{2} + \frac{\Theta}{2}(p-p_0),$$

Θ désignant une quantité inférieure à l'unité; donc on pourra écrire

$$-\int_p^{\tang\alpha}\sqrt{1+p^2}\,dp = A + \frac{p^2}{2} + \frac{\Theta}{2}(p-p_0),$$

A désignant une constante; par suite on pourra poser

$$-\varphi(p) = \frac{2kv^2\cos^2\alpha}{g}\left[A + \frac{p^2}{2} + \frac{\Theta}{2}(p-p_0)\right],$$

d'où

$$-\frac{1}{\varphi(p)} = \frac{g}{kv^2\cos^2\alpha}\,\frac{1}{2A + p^2 + \Theta(p - p_0)}$$
$$= \frac{g}{kv^2\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{p^2} + T'\right),$$

T′ désignant une série convergente ordonnée par rapport aux puissances de $\frac{1}{p}$, dont le premier terme est en $\frac{1}{p^3}$.

En portant cette valeur de $\frac{1}{\varphi(p)}$ dans (10), on a

$$dx = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{p^2} + T'\right)dp;$$

et, en intégrant depuis $p = p_0$ jusqu'à $p = \infty$,

$$x - x_0 = -\left(\frac{1}{kp_0} - \frac{T_0}{k}\right),$$

x et x_0 désignant les valeurs de x correspondantes à $p = \infty$ et $p = p_0$. T_0 représentant du reste ce que devient T pour $p = p_0$, cette formule prouve bien que x est fini pour $p = \infty$, et que la trajectoire a une asymptote verticale.

Les équations (10), (11), (12) peuvent s'intégrer lorsque l'angle α est très-petit, parce qu'alors p est lui-même très-petit : ce cas est celui que l'on rencontre dans l'artillerie lorsqu'il s'agit du tir de plein fouet, car on n'a à considérer que des portions de trajectoire dans lesquelles p reste très-petit. Dans ce cas, on a à peu près

$$-\varphi(p) = \int_{\tan\alpha}^{p}\sqrt{1 + p^2}\,dp = p - \tan\alpha,$$

par suite,

$$dx = \frac{dp}{\tan\alpha - p}\,\frac{v^2\cos^2\alpha}{g},$$
$$dy = \frac{p\,dp}{\tan\alpha - p}\,\frac{v^2\cos^2\alpha}{g},$$
$$dt = -\frac{v\cos\alpha}{g}\,\frac{dp}{\sqrt{\tan\alpha - p}}.$$

on en déduit sensiblement

$$x = \frac{v^2 \cos^3 \alpha}{g \sin \alpha} (p - \operatorname{tang} \alpha),$$

$$y = \frac{v^2 \cos^3 \alpha}{2 g \sin \alpha} (p^2 - \operatorname{tang}^2 \alpha),$$

$$t = \frac{2 v \cos \alpha}{g} \sqrt{\operatorname{tang} a - p},$$

et l'on reconnaît que la trajectoire est sensiblement parabolique.

CHAPITRE IV.

EXEMPLES DE MOUVEMENTS DE POINTS ASSUJETTIS A DEMEURER SUR DES COURBES OU DES SURFACES FIXES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

193. Nous avons vu au Chapitre I^{er} (3^{e} Partie) comment on met en équation le mouvement d'un point assujetti à demeurer sur une courbe ou sur une surface fixe. S'il s'agit d'une courbe, les équations de la trajectoire sont données; pour résoudre le problème, il n'y a qu'une relation à trouver entre le temps et les coordonnées : le théorème des forces vives fournit cette équation lorsque le travail est une différentielle exacte. Nous allons examiner un cas qui se présente souvent dans les applications, celui où le point mobile n'est soumis qu'à l'action d'une seule force : son poids, dans ce cas, en prenant l'axe des z vertical et dirigé de bas en haut, et en appelant m la masse, x, y, z les coordonnées du mobile, v la vitesse, le théorème des forces vives donne

$$dm\frac{v^2}{2} = -mg\,dz,$$

ou bien

$$d\frac{v^2}{2} = -g\,dz.$$

En intégrant on a

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = g(z_0 - z), \tag{1}$$

z_0 et v_0 désignant la hauteur et la vitesse initiale du mobile. On en déduit

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)};$$

lorsque $v_0 = 0$, on a seulement

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)},$$

ou bien

$$(2) \qquad v = \sqrt{2gh},$$

h désignant la quantité $z_0 - z$ dont le corps est descendu. Cette formule est d'un fréquent usage ; h est ce que l'on appelle la *hauteur* due à la vitesse v.

Les équations (1) et (2) ont encore lieu dans le cas où le mobile se meut sur une surface donnée ; elles constituent une intégrale première du mouvement.

II. — Mouvement du pendule.

194. Problème I. — *Un point matériel attaché à un fil inextensible et sans pesanteur est abandonné à lui-même sans vitesse initiale. On donne l'angle d'écart, c'est-à-dire l'angle θ_0 que fait le fil dans sa position initiale avec la verticale, et l'on demande de déterminer le temps que mettra le mobile pour descendre au point le plus bas de sa trajectoire.*

L'appareil idéal dont on propose de déterminer le mouvement est ce que l'on appelle un *pendule simple*.

Soient θ l'angle que fait le fil avec la verticale au bout du temps t, et r la longueur du fil. La vitesse du mobile au bout du temps t sera $-r\dfrac{d\theta}{dt}\cdot$ (On met le signe — devant cette expression, parce que θ décroît quand t croît :

$d\theta$ est donc négatif.) En appliquant alors la formule

$$v = \sqrt{2gh}$$

donnée au paragraphe précédent, on aura

$$(1) \qquad -r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gr(\cos\theta - \cos\theta_0)};$$

car la hauteur h dont le mobile est descendu est la différence des projections $r\cos\theta_0$ et $r\cos\theta$ du fil dans les positions qu'il occupe aux époques o et t. De la formule (1) on tire

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

En intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{T}{2}$, $\frac{T}{2}$ désignant le temps d'une demi-oscillation simple, c'est-à-dire le temps que le pendule met pour devenir vertical, il faudra prendre pour limite de θ, θ_0 et o. On aura ainsi

$$\frac{1}{2}T = -\sqrt{\frac{r}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

ou bien

$$\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Pour effectuer l'intégration, nous poserons

$$\cos\theta_0 = 1 - b,$$
$$\cos\theta = 1 - z, \quad d\theta = \frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}}.$$

Nous aurons alors

$$(2) \qquad \frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int_{0}^{b}\frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}\sqrt{b - z}},$$

ou bien

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_{0}^{b}\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

En développant $\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme, cette formule devient

$$T=\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^b \frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{z}{2}+\frac{1.2}{2.4}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\ldots\right];$$

or on trouve, dans les cours de calcul intégral,

$$\int_0^b \frac{z^n dz}{\sqrt{bz-z^2}}=\pi\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,b^n;$$

la formule précédente devient alors

$$T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^n\ldots\right].$$

Or b n'est autre chose que $1-\cos\theta_0$ ou $2\sin^2\frac{1}{2}\theta_0$; on a donc

$$T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right].$$

Lorsque θ_0 est très-petit, on a sensiblement

$$(3)\qquad T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Quand le mobile est arrivé au point le plus bas de sa trajectoire, il a acquis une vitesse en vertu de laquelle il remonte à une hauteur égale à celle dont il est tombé, parce que la vitesse redevient nulle quand le mobile repasse par la surface de niveau dont il est parti; or, dans le cas actuel, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux; à cause de la symétrie, le pendule effectuera alors une seconde oscillation identique à la première, mais en sens inverse, et ainsi de suite. Le temps T que l'on vient de trouver est celui d'une oscillation complète. La formule (3) peut servir au calcul de g lorsque l'on connaît T et r; nous reviendrons sur cette question dans un autre Chapitre. Nous allons maintenant étudier avec plus de soin le mouvement d'un point sur un cercle fixe.

195. Problème II. — *Étudier le mouvement d'un point pesant assujetti à demeurer sur un cercle vertical fixe.*

Prenons pour axe des y le diamètre vertical du cercle et pour axe des x la tangente au point le plus bas; soit r le rayon du cercle.

L'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0. \tag{1}$$

La seule force qui sollicite le point matériel est son poids mg, m désignant la masse de ce point; la projection de la force mg sur l'axe est $-mg$, sa projection sur l'axe des x est o, en sorte que si l'on désigne par N la réaction normale de la trajectoire et par λ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, on aura

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{N}\cos\lambda, \tag{2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + \mathrm{N}\sin\lambda. \tag{3}$$

Si l'on multiplie la première équation par dx, la seconde par dy, et si l'on observe que

$$dx\cos\lambda + dy\sin\lambda = 0, \tag{4}$$

il vient, en ajoutant et en supprimant le facteur m,

$$\frac{d^2x\,dx + d^2y\,dy}{dt^2} = -g\,dy, \tag{4 bis}$$

ou bien, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -gy + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, on donnera la vitesse v_0 correspondante à l'époque $t = 0$, et la hauteur y_0 correspondante à la même époque. On aura ainsi, pour $t = 0$,

$$\frac{1}{2}v_0^2 = -gy_0 + \text{const.}$$

En retranchant cette équation de la précédente, il viendra

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2} - \frac{v_0^2}{2} = g(y_0 - y). \tag{5}$$

Cette équation est la traduction analytique du théorème des forces vives; on aurait pu l'écrire immédiatement.

De l'équation (1) on tire

$$x = \sqrt{2ry - y^2},$$

d'où

$$dx = \frac{r - y}{\sqrt{2ry - y^2}}\,dy;$$

par suite,

$$dx^2 + dy^2 = dy^2\,\frac{r^2}{2ry - y^2}; \tag{6}$$

en substituant cette valeur de $dx^2 + dy^2$ dans l'équation (5), nous aurons

$$\frac{r^2}{2(2ry - y^2)}\frac{dy^2}{dt^2} - \frac{v_0^2}{2} = g(y_0 - y).$$

Cette équation fera connaître y en fonction de t. On en tire

$$dt = \frac{\pm r\,dy}{\sqrt{[v_0^2 + 2g(y_0 - y)](2ry - y^2)}},$$

et t s'exprimera en fonction de y au moyen des transcendantes elliptiques. Toutefois, lorsque l'on se propose seulement de trouver le temps d'une oscillation, on peut supposer que $v_0 = 0$, et l'équation précédente prend la forme

$$dt = \frac{\pm r\,dy}{\sqrt{2g(y_0 - y)(2ry - y^2)}}.$$

En remplaçant alors y par rz et y_0 par rb, on a

$$dt = \pm\sqrt{\frac{r}{2g}}\,\frac{dz}{\sqrt{(b-z)(2z-z^2)}};$$

en intégrant alors depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{T}{2}$ et depuis $z = 0$ jusqu'à $z = b$, on retrouvera la formule (2) du problème précédent.

Lorsque l'on aura calculé y en fonction de t, ce qui se fera, comme nous l'avons dit, au moyen des fonctions elliptiques, on obtiendra facilement x en fonction de t au moyen de l'équation (1). Pour calculer la réaction N, on fera usage de la relation (2) : à cet effet, on calculera d'abord $\cos\lambda$. On a

$$\cos\lambda = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

$$\cos\lambda = \frac{1}{r}\sqrt{2ry - y^2}.$$

L'équation (2) donnera alors

$$\frac{1}{m}N = r\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{1}{\sqrt{2ry - y^2}} = \frac{r}{x}\,\frac{d^2x}{dt^2},$$

et l'on choisira le signe du radical de telle sorte que N soit positif.

On met souvent l'équation du mouvement du pendule sous une forme simple, qu'il est bon de connaître : on prend pour variable l'angle θ que fait le rayon aboutissant au mobile avec la verticale; alors on a

$$y = r - r\cos\theta, \quad x = r\sin\theta,$$
$$dy = r\sin\theta\, d\theta, \quad dx = r\cos\theta\, d\theta.$$

L'équation (4 *bis*) peut s'écrire

$$d\frac{dx^2 + dy^2}{2\,dt^2} = -g\,dy,$$

ou bien, en remplaçant dx et dy par les valeurs précédentes,

$$(5) \qquad r^2\frac{d\theta\, d^2\theta}{dt^2} = -gr\sin\theta\, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0.$$

En intégrant l'équation (5), on a

$$(7) \qquad \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{v_0^2}{2} = gr(\cos\theta - \cos\theta_0,$$

θ_0 désignant la valeur initiale de θ. L'équation (5) est précisément celle qu'aurait fournie l'application directe du théorème des forces vives; en effet, la vitesse du mobile est $r\frac{d\theta}{dt}$, sa force vive est $mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, le travail de la pesanteur $-mg\,dy$ est égal à $-mgr\sin\theta\,d\theta$: on a donc

$$\frac{mr^2}{2}d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -mgr\sin\theta\, d\theta,$$

équation identique à (5).

L'équation (6) ne peut pas, en général, s'intégrer exactement, la formule (7) en est une intégrale première, mais l'emploi des fonctions elliptiques est indispensable lorsque l'on veut continuer l'intégration. Toutefois, on tire de (7)

$$(8) \qquad dt = \frac{r\,d\theta}{\sqrt{v_0^2 + 2gr\cos\theta - 2gr\cos\theta_0}},$$

et si, entre les données initiales, on avait la relation

$$v_0^2 - 2gr\cos\theta_0 = 2gr,$$

ou bien

$$4gr\cos^2\frac{1}{2}\theta_0 = v_0^2,$$

on en conclurait

$$dt = \frac{r\,d\theta}{\sqrt{2gr(1+\cos\theta)}},$$

ou bien

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{d\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

c'est-à-dire, en intégrant depuis $t = 0$ et depuis $\theta = \theta_0$,

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\log\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_0}{4}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}.$$

La formule (8) rend assez bien compte des diverses circonstances du mouvement. Ainsi l'on voit que, au signe près, la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ reprend les mêmes valeurs lorsque θ prend des valeurs égales, ou même des valeurs égales et de signe contraire. Cela résulte des propriétés connues des surfaces de niveau (176), qui, dans le cas actuel, sont des plans horizontaux. En intégrant la formule (8), on a

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r\,d\theta}{\sqrt{v_0^2 + 2gr\cos\theta - 2gr\cos\theta_0}}.$$

Nous avons déjà fait observer que, si le mobile descend, on doit prendre le radical avec le signe —, parce que $d\theta$ décroît quand t croît; quand le mobile monte, on doit prendre le signe $+$.

Partons avec le signe — et faisons $\theta = \theta_0$, le mobile va descendre, et, θ décroissant, t va croître jusqu'à ce que l'on ait $\theta = 0$. Si l'on donne alors à θ des valeurs négatives, le temps continuera à croître, et, comme l'intégrale prend des valeurs égales quand on intègre de o à θ ou de o à $-\theta$ au signe près, il en résulte qu'à des intervalles de temps également éloignés du moment où le mobile a atteint le point le plus bas de sa trajectoire, il se trouve à des hauteurs égales au-dessus de l'horizon. Si alors on a

$$v_0^2 - 2gr\cos\theta_0 < 2gr,$$

le radical deviendra imginaire dès que

$$v_0^2 + 2gr\cos\theta - 2gr\cos\theta_0 > 0;$$

mais avant d'atteindre la valeur de θ capable de satisfaire à cette inégalité, le radical s'annulera, et l'on aura $\frac{d\theta}{dt} = 0$. La vitesse s'annulera, le mobile tendra à descendre en vertu de son poids, et il descendra effectivement en suivant les mêmes lois que dans le mouvement qui avait lieu tout à l'heure en sens inverse. Si au contraire

$$v_0^2 - 2gr\cos\theta_0 > 2gr,$$

le radical ne devenant pas imaginaire, le mobile continuera son chemin toujours dans le même sens sans jamais s'arrêter, le mouvement sera périodique et symétrique par rapport au diamètre vertical de la trajectoire.

Enfin, si l'on a

$$v_0^2 - 2gr\cos\theta = 2gr,$$

le radical s'annulera quand on aura $\theta = -\pi$. A ce moment $\frac{d\theta}{dt}$ sera nul, et le mobile s'arrêtera au point le plus haut de sa trajectoire. L'équation (7) se réduit alors à

$$\frac{r}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g\cos\theta,$$

et l'on voit que $\theta = -\pi$ est une solution singulière de l'équation différentielle du mouvement. On voit ainsi comment une solution singulière peut parfois se substituer à l'intégrale générale d'un problème de Dynamique.

Il est bon d'observer que lorsque le point mobile acquiert une vitesse nulle, c'est-à-dire lorsque

$$v_0^2 + 2gr\cos\theta - 2gr\cos\theta_0 = 0,$$

il est parvenu à une hauteur $r(\cos\theta - \cos\theta_0)$ égale à $\frac{v_0^2}{2g}$, c'est-à-dire égale à celle dont il tomberait pour acquérir sans vitesse initiale la vitesse v_0.

III. — Pendule cycloïdal.

196. Problème. — *Déterminer le mouvement d'un point assujetti à demeurer sur une cycloïde située dans un plan vertical : on suppose la ligne des points de rebroussements horizontale et la courbe située au-dessous de cette ligne.*

Si l'on prend alors pour axe des x la tangente au point le plus bas de la cycloïde, et pour axe des y la verticale ascendante ; si l'on désigne, en outre, par r le rayon du cercle générateur, les équations de la cycloïde pourront se mettre sous la forme

$$x = r(\pi + u - \sin u), \tag{1}$$

$$y = r(1 + \cos u). \tag{2}$$

Si l'on désigne par x_0, y_0 les coordonnées initiales du mobile, par v_0 sa vitesse initiale et par t le temps, le théorème des forces vives donnera immédiatement une des intégrales du mouvement :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2g(y_0 - y)}, \tag{3}$$

ds désignant l'élément d'arc parcouru dans le temps dt (n° 192). Nous tirons ensuite des formules (1) et (2)

$$dx = r(du - \cos u \, du),$$
$$dy = -r \sin u \, du.$$

On en déduit

$$dx^2 + dy^2 = 2r^2 du^2 (1 - \cos u),$$

ou bien

$$ds^2 = dy^2 \frac{2r}{y},$$

ou bien enfin

$$ds = \pm dy \sqrt{\frac{2r}{y}}.$$

Si l'on remplace ds par cette valeur dans (3), on a

$$\frac{dy}{dt}\sqrt{\frac{2r}{y}} = \sqrt{v_0^2 + 2g(y_0 - y)},$$

d'où l'on déduit

$$dt = \pm \sqrt{\frac{2r}{(v_0 + 2gy_0)y - 2gy^2}}\, dy.$$

On peut supposer le mouvement descendant : alors y décroît quand t croît; il faut donc prendre le radical avec le signe —, et l'intégration fournira y en fonction de t : on voit que l'intégration pourra se faire exactement. Nous allons examiner un cas intéressant, c'est celui où l'on a $v_0 = 0$ et où l'on demande le temps $\frac{T}{2}$ d'une demi-oscillation. On a alors

$$\frac{T}{2} = \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{r}{g(y_0 y - y^2)}}\, dy,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

ou enfin

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{4}$$

Cette formule montre que les oscillations d'un point assujetti à demeurer sur une cycloïde sont isochrones, c'est-à-dire que leur durée ne dépend pas de leur amplitude. Si l'on se reporte à la formule qui fait connaître la durée des oscillations d'un mobile assujetti à demeurer sur un cercle (195), on voit que l'on a sensiblement

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}, \tag{5}$$

Pour les oscillations de faible amplitude, cette formule coïncide avec la précédente, si l'on observe que le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale, c'est-à-dire $4r$ dans le voisinage du point le plus bas. Si, en effet, on remplace r par $4r$ dans la formule (5), on retrouve la formule (4), et l'on peut admettre que, le mouvement s'effectuant sur un petit arc de courbe, on peut remplacer ce petit arc par son cercle osculateur.

On peut se procurer un véritable pendule cycloïdal à l'aide d'un artifice ingénieux qui consiste à suspendre un point matériel à l'aide d'un fil attaché au point de rebroussement d'une cycloïde égale et homothétique à celle qu'on veut faire décrire au mobile. Le fil dans le mouvement d'oscillation s'enroulera sur la cycloïde directrice, et le mobile décrira la développée de cette cycloïde, c'est-à-dire une cycloïde égale et semblablement placée.

IV. — Tautochrone et brachystochrone.

197. Nous venons de voir que le temps d'une oscillation d'un pendule cycloïdal était indépendant de l'amplitude de cette oscillation; en d'autres termes, le temps employé par un mobile pesant pour parvenir d'un point de la cycloïde au point le plus bas est indépendant de la hauteur dont on fait tomber le point; cette propriété du mouvement peut servir à définir la cycloïde, c'est ce qui va résulter de l'analyse suivante :

Problème I. — *Quelle est la courbe verticale que doit décrire un mobile, pour qu'il mette toujours le même temps pour parvenir en un point* O *de cette courbe, quel que soit son point de départ sur cette courbe.*

Pour résoubre le problème, prenons deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical, dans le plan de la courbe; soient x, y les coordonnées du point à l'époque t, s l'arc de courbe compté à partir du point O jusqu'à la position occupée par le mobile à l'époque t; soient x_0, y_0, s_0 les valeurs initiales de x, y, s, on aura, par le théorème des forces vives (172),

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y_0 - y)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

ou bien, en désignant par T le temps employé par le mobile pour parvenir en O et en intégrant de o à T,

$$(1) \qquad T = \int_0^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}.$$

Posons $s = \varphi(y)$, nous aurons

$$T = \int_0^{y_0} \frac{\varphi'(y)\,dy}{\sqrt{2g(y_0 - y)}};$$

enfin faisons

$$y = y_0 \cos u, \quad dy = -y_0 \sin u\,du.$$

Il viendra

$$T = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\varphi'(y_0 \cos u) y_0 \sin u\,du}{2\sqrt{g y_0} \sin\frac{1}{2}u},$$

ou bien

$$T = \frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(y_0 \cos u) \cos\tfrac{1}{2}u\,du.$$

T devant être indépendant de y_0, sa dérivée par rapport à y_0 sera nulle, et l'on aura

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{y_0}\,\varphi''(y_0 \cos u) \cos u + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \varphi'(y_0 \cos u) \right] \cos \frac{1}{2} u\,du.$$

Cette équation ayant lieu quel que soit y_0, on peut toujours prendre y_0 assez petit pour que le facteur qui multiplie $\cos\frac{1}{2}u\,du$ ne change pas de signe quand on fait varier u (à moins que la fonction φ ne soit indéterminée pour $y = 0$, ce qui n'offrirait aucun sens). On arrive à cette conséquence, que le second membre de l'équation précédente ne peut être nul si le facteur en question passe par des valeurs différentes de zéro. Donc

$$\sqrt{y_0}\,\varphi''(y_0 \cos u) \cos u + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \varphi'(y_0 \cos u) = 0,$$

ou bien

$$2y_0\varphi''(y_0\cos u)\cos u + \varphi'(y_0\cos u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$2y\frac{d^2s}{dy^2} + \frac{ds}{dy} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d^2s}{dy^2} : \frac{ds}{dy} = -\frac{1}{2y}.$$

On en conclut

$$\frac{ds}{dy} = \frac{k}{\sqrt{y}},$$

k désignant une constante.

On tire de là en élevant au carré

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{k^2}{y},$$

ou

$$dx = \sqrt{\frac{k^2}{y} - 1}\, dy,$$

ou enfin

$$x = \int\sqrt{\frac{k^2 - y}{y}}\, dy.$$

Remplaçons

$$y \text{ par } k^2 - y, \quad x \text{ par } -x,$$

ce qui revient à un simple changement d'origine des coordonnées, nous aurons

$$x = \int\sqrt{\frac{y}{k^2 - y}}\, dy,$$

ou

$$x = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{k^2y - y^2}} = \int\frac{y - \frac{k^2}{2}}{\sqrt{k^2y - y^2}}\, dy + \int\frac{\frac{1}{2}k^2\,dy}{\sqrt{k^2y - y^2}},$$

ou enfin

$$x = -\sqrt{k^2y - y^2} + \frac{k^2}{2}\arcsin\left(y - \frac{k^2}{2}\right) : \frac{k^2}{2} + \text{const.}$$

Si l'on remplace $y - \frac{k^2}{2}$ par y, on a

$$x = -\sqrt{\frac{k^4}{4} - y^2} + \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{2y}{k^2} + \text{const.};$$

c'est l'équation d'une cycloïde ayant pour rayon $\frac{k^2}{2}$.

198. Problème II. — *Étant donnés deux points* A *et* B *dans un plan vertical, déterminer une courbe située dans ce plan et telle, que le temps employé par un mobile pesant pour parcourir l'arc* AB *soit un minimum.*

Si l'on fait passer deux axes par le point le plus bas B, l'un vertical By, l'autre horizontal Bx, et situé dans le plan de la courbe, le temps employé pour parcourir l'arc AB sera donné, comme dans la question précédente, par la formule

$$T = \int_0^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

x, y, s, x_0, y_0, s_0 ayant la même signification que tout à l'heure. Si l'on fait varier la formule précédente, on en tire

$$\delta T = \int_0^{y_0} \frac{\delta\, ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_0^{y_0} \frac{\delta(1 + x'^2)^{\frac{1}{2}}\, dy}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

ou bien

$$\delta T = \int_0^{y_0} \frac{x'\,\delta x'\, dy}{\sqrt{2g(1 + x'^2)(y_0 - y)}}.$$

En intégrant alors par parties, on a

$$\delta T = -\int_0^{y_0} \delta x \frac{d}{dy} \frac{x'\, dy}{\sqrt{2g(1 + x'^2)(y_0 - y)}}.$$

En égalant à zéro le coefficient de δx, on a

$$\frac{x'}{\sqrt{2g(1+x'^2)(y_0-y)}}=k,$$

k désignant une constante. On en conclut

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=2gk^2\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right](y_0-y),$$

ou

$$dx=\pm dy\sqrt{\frac{2gk^2(y_0-y)}{1-2gk^2(y_0-y)}}.$$

Si l'on transforme les coordonnées en posant

$$y_0-y=y_1,\quad \frac{1}{2gk^2}=2r,$$

on a

$$dx=\pm dy_1\sqrt{\frac{y_1}{2r-y_1}},$$

ou

$$dx=\frac{y_1\,dy_1}{\sqrt{2ry_1-y_1^2}}.$$

En intégrant, on trouve

$$x=\pm\sqrt{2ry_1-y_1^2}+r\arcsin\frac{y_1-r}{r}+\text{const.}$$

Cette équation est encore celle d'une cycloïde. Les propriétés dynamiques que nous venons de trouver ont fait donner à la cycloïde les noms de courbe *tautochrone* et *brachystochrone*.

V. — Équations du mouvement d'un pendule simple dans un milieu résistant.

195. On n'est pas encore parvenu à intégrer le mouvement d'un pendule dans un milieu résistant; mais on peut exécuter cette intégration dans le cas où l'on suppose l'amplitude des oscillations très-petites.

Soient θ_0 l'angle d'écart, θ l'angle que fait, à un moment quelconque, le fil avec la verticale; r la longueur du pendule, m la masse du point matériel pesant : le travail de la pesanteur est $-mgr\sin\theta\, d\theta$; la résistance du milieu, pour de petits angles d'écart, et par suite pour de faibles vitesses, peut être considérée comme proportionnelle à la vitesse $r\frac{d\theta}{dt}$; en sorte que son travail pourra être représenté par $-kr\frac{d\theta}{dt}\cdot r\,d\theta$, ou par $-kr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt$. Le théorème des forces vives nous donnera alors

$$d.m\frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -mgr\sin\theta\, d\theta - kr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt,$$

ou, ce qui revient au même,

$$r\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{k}{m}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta + \frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Si l'on remplace $\sin\theta$ par θ, ce qui est permis, si θ reste très-petit, nous aurons

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0. \tag{1}$$

Pour intégrer cette équation, on commencera par résoudre l'équation caractéristique

$$r\alpha^2 + \frac{k}{m}\alpha + g = 0;$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad \alpha = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2} - 4rg}}{2r}.$$

Les valeurs de α seront généralement imaginaires; toutefois si m est faible, et si k, la résistance correspondante à la vitesse de 1 mètre par seconde, est considérable, les valeurs de α pourront être réelles; nous distinguerons donc trois cas :

1° Les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires. Les solutions de l'équation (1) sont de la forme

$$(3)\qquad \theta = e^{-\frac{k}{2mr}t}(\mathrm{A}\cos\mu t + \mathrm{B}\sin\mu t),$$

μ désignant, pour abréger, la quantité

$$\sqrt{\frac{g}{r} - \frac{k^2}{4m^2r^2}}.$$

On déterminera les constantes A et B; en exprimant que, pour $t = 0$, on a $\theta = \theta_0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$, on a ainsi

$$\theta_0 = \mathrm{A},$$
$$0 = -\frac{k}{2mr}\mathrm{A} + \mathrm{B}\mu;$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{B} = \frac{k\theta_0}{2\mu mr}.$$

L'équation (3) montre que le mouvement est oscillatoire, mais que l'amplitude des oscillations tend vers zéro quand t croît indéfiniment. Du reste, l'amplitude des oscillations est facile à calculer. Si, en effet, dans (3) on remplace A et B par leurs valeurs, on a

$$(4)\qquad \theta = e^{-\frac{k}{2mr}t}\left(\theta_0\cos\mu t + \frac{k\theta_0}{2\mu mr}\sin\mu t\right),$$

$$(5)\qquad \frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\frac{k^2 + 4\mu^2m^2r^2}{4\mu m^2r^2}e^{-\frac{kt}{2mr}}\sin\mu t.$$

Si, dans la dernière formule, on fait $t = 0, \frac{\pi}{\mu}, \frac{2\pi}{\mu}, \frac{3\pi}{\mu}, \ldots,$ on trouve $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Ces quantités représentent les durées successives de la première, des deux premières, des trois premières... oscillations : les oscillations sont donc isochrones, comme dans le vide; leur durée est

$$\frac{\pi}{\mu} \quad \text{ou} \quad \pi : \sqrt{\frac{g}{r} - \frac{k^2}{4m^2r^2}} \quad \text{ou} \quad \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

si k est très-petit. Si, dans la formule (4), on fait

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{\mu}, \quad \frac{2\pi}{\mu}, \ldots,$$

on aura

$$\theta = \theta_0, \quad \theta = -\theta_0 e^{-\frac{k\pi}{2m\mu r}}, \quad \theta = \theta_0 e^{-\frac{2k\pi}{2m\mu r}},$$
$$\theta = -\theta_0 e^{-\frac{3k\pi}{2m\mu r}}, \ldots.$$

Ces diverses valeurs de θ représentent les amplitudes successives des oscillations; elles varient, comme l'on voit, en progression géométrique.

2° Les racines de l'équation caractéristique sont réelles; dans ce cas, θ est de la forme

$$\theta = A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t},$$

et l'on a

$$A + B = \theta_0, \quad A\alpha + B\beta = 0;$$

on en déduit

$$A = \frac{\beta\theta_0}{\beta - \alpha}, \quad B = \frac{\alpha\theta_0}{\alpha - \beta},$$

ou

$$\theta = \frac{\theta_0}{\beta - \alpha}(\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha\beta\theta_0}{\alpha - \beta}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

On voit donc que $\frac{d\theta}{dt}$ ne change jamais de signe; par suite θ décroît toujours, et pour $t=\infty$, on a $\theta=0$: dans le cas actuel, le mouvement n'est donc plus oscillatoire.

3° Si les racines de l'équation caractéristique sont égales, on a

$$\theta = e^{-\frac{k}{2mr}t}(\mathrm{A}+\mathrm{B}t),$$

et l'on déterminera les constantes A et B au moyen des formules

$$\theta_0 = \mathrm{A},$$
$$0 = -\mathrm{A}\frac{k}{2mr}+\mathrm{B}.$$

On en conclura

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{k}{2mr}t}\left(1+\frac{kt}{2mr}\right),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\frac{k^2t}{4m^2r^2}e^{-\frac{k}{2mr}t};$$

$\frac{d\theta}{dt}$ ne change jamais de signe, et $\theta=0$ pour $t=\infty$: le mouvement est donc toujours de même sens et finit par s'éteindre pour $t=\infty$.

Prenons maintenant un mobile en mouvement sur une courbe quelconque. Soient s l'arc de courbe compté à partir du point le plus bas; x, y les coordonnées du mobile à l'éqoque t : nous aurons, en vertu du théorème des forces vives, en observant que le travail de la pesanteur est $-g\,dy$ et que celui de la résistance du milieu est $-k\frac{ds}{dt}ds$,

$$d\,\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -g\,dy - k\frac{ds}{dt}ds,$$

ou

$$m\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

ou

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+g\frac{dy}{ds}+k\frac{ds}{dt}=0.$$

Cette équation prendra la forme très-simple et identique avec celle des petites oscillations sur le cercle que nous venons d'intégrer, si l'on a

$$\frac{dy}{ds}=\frac{s}{r},$$

ou

$$\frac{ds}{dy}=\frac{r}{s}; \tag{6}$$

de cette formule, on tire

$$\frac{d^2s}{dy^2}=-\frac{r}{s^2}\frac{ds}{dy},$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

$$\frac{d^2s}{dy^2}r=-\left(\frac{ds}{dy}\right)^3.$$

On conclut de là, en remplaçant ds par $\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}\,dy$,

$$r\frac{d}{dy}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=-\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Posons $\frac{dx}{dy}=p$, nous aurons

$$\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dy}=-(1+p^2)^{\frac{3}{2}},$$

ou

$$\frac{rp\,dp}{(1+p^2)^2}=-dy,$$

ou enfin

$$\frac{1}{2}\frac{r}{1+p^2}=y+a,$$

a désignant une constante; ou, remplaçant r par $2r$,

$$\frac{r}{a+y} = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2,$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{r-a-y}{a+y}}\,dy = dx.$$

Cette équation, que nous avons déjà rencontrée, est celle d'une cycloïde. Ainsi, dans le pendule cycloïdal, les oscillations, dans un milieu résistant, s'effectuent comme les petites oscillations d'un pendule circulaire : cette proposition, du reste, se vérifie, quelle que soit la loi de la résistance du milieu.

VI. — Du plan incliné.

200. Considérons un point matériel pesant de masse m assujetti à demeurer sur une droite fixe faisant avec l'horizon un angle i et développant un frottement proportionnel à la pression, et proposons-nous de déterminer le mouvement de ce point.

Le problème que nous allons résoudre est ce que l'on appelle le *problème du plan incliné*; il a servi, comme l'on sait, à effectuer la première détermination approximative du nombre g.

Nous désignerons par x l'arc décrit par le mobile à partir de sa position initiale. Nous prendrons pour axe des x la droite donnée, et pour axe des y la normale à cette droite menée par l'origine du mouvement. Nous aurons alors, en désignant par N la réaction normale et par fN le frottement,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin i - fN,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0 = N - mg\cos i,$$

et nous devrons considérer f comme négatif dans le mouvement ascendant. En remplaçant, dans la première équation, N par sa valeur déduite de la seconde, nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin i - f\cos i),$$

ou bien, en intégrant et en déterminant convenablement les constantes,

$$x = \frac{g}{2}t^2(\sin i - f\cos i) + v_0 t.$$

Le mouvement sera donc uniformément accéléré, et l'accélération sera

$$g(\sin i - f\cos i),$$

ou, si l'on pose $f = \operatorname{tang}\varphi$,

$$g\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi},$$

φ désignant ce que l'on appelle l'*angle de frottement*. Supposons d'abord v_0 négatif, le mouvement sera ascendant, et comme l'on a

$$\frac{dx}{ds} = gt\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi} + v_0,$$

le mouvement s'arrêtera dès que

$$gt\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi} + v_0 = 0,$$

ou dès que

$$t = \frac{-v_0\cos\varphi}{g\sin(i-\varphi)}.$$

Il ne faut pas oublier que f est négatif et que $-\varphi$ est positif : donc la valeur précédente de t est finie; lorsque le mobile se sera arrêté, φ changera brusquement de signe.

Si l'on transporte alors l'origine au point d'arrêt, l'équation du mouvement devient

$$x = \frac{g}{2} t^2 (\sin i - f \cos i),$$

ou

$$x = \frac{g}{2} t^2 \frac{\sin(i - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Cette équation se réduit à $x = 0$, et le mobile reste en repos lorsque $i = \varphi$ ou lorsque $f = \tang i$; l'angle φ n'est jamais plus grand que i, parce que, le frottement devant s'opposer au mouvement, φ changerait de signe si le point x devait se mettre à remonter le plan incliné, ce qui prouve que, pendant le repos, la valeur de φ doit forcément changer si l'on a $i = \varphi$, et, par suite, le frottement au repos doit être inférieur en général au frottement pendant le mouvement.

Lorsque l'on communique au point un mouvement descendant, son mouvement est accéléré si $i > \varphi$, retardé si $i < \varphi$, et uniforme si $i = \varphi$; en sorte que, dans le cas où $i < \varphi$, le mobile s'arrêtera et φ devra forcément devenir égal à i pour que le mobile reste en repos. φ est, comme l'on voit, une fonction discontinue du temps; cette discontinuité rend assez difficiles les questions de Dynamique dans lesquelles on doit faire intervenir le frottement.

EXERCICES.

I. Trouver le mouvement d'un point m animé d'une vitesse initiale v_0 sollicité par un centre qui agit proportionnellement à la distance, en supposant que le centre en question se meuve uniformément dans le sens de la vitesse initiale v_0 du point m.

II. Trouver le mouvement d'un point placé dans le plan d'un cercle dont tous les éléments exercent une action proportionnelle à la distance.

III. Trouver le mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

IV. Trouver le mouvement d'un point sollicité par m centres fixes proportionnellement à la distance.

N. B. Le mouvement d'un point sollicité par deux centres fixes, en raison inverse du carré de la distance, a occupé successivement Euler (*Acad. Berlin*, 1760), Lagrange (*Méc. anal.*), Jacobi (*Crelle*, t. XXVII-XXIX) et M. J.-A. Serret (*Thèse*, 1847).

V. Un point matériel M se meut uniformément sur une droite D (ou sur un cercle C); un second point M′ se meut uniformément aussi avec une vitesse égale ou inégale à celle du point M : on suppose la vitesse du point M′ constamment dirigée vers le point M.

Trouver : 1° la trajectoire du point M′; 2° la forcce qui l'oblige à décrire la trajectoire (la trajectoire porte le nom de *courbe de poursuite*).

VI. Trouver le mouvement d'un point sollicité par une force perpendiculaire à une droite fixe, et 1° proportionnelle à la distance qui sépare le point mobile de la force, 2° ou proportionnelle à l'inverse de cette distance.

VII. Étudier le mouvement d'un point assujetti à demeurer sur un cercle fixe et sollicité par un point fixe proportionnellement à la distance.

VIII. Trouver une courbe située dans un plan vertical telle, qu'un mobile placé en M sur cette courbe et abandonné à son propre poids mette le même temps pour parcourir l'arc MN de cette courbe que pour parcourir la corde de cet arc, quelle que soit du reste l'extrémité N de cet arc. (On doit trouver une lemniscate de Bernoulli.)

IX. Un cercle O′ roule sur un cercle O extérieurement et engendre une épicycloïde. On suppose un point mobile placé sans vitesse initiale sur cette épicycloïde, et l'on demande de déterminer le temps d'une oscillation effectuée par ce mobile, en le supposant sollicité par une force émanant de O. On supposera d'abord la force constante; on la supposera ensuite proportionnelle à la distance, enfin proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

N. B. On trouvera un grand nombre de problèmes sur les tautochrones dans le troisième volume des Œuvres de Lagrange, publiées par M. J.-A. Serret (chez Gauthier-Villars).

X. Soient F la force qui produit l'équilibre d'un fil suivant une courbe plane donnée, F′ la force nécessaire pour entretenir le mouvement d'un point matériel sur cette courbe. Si les forces F et F′ sont parallèles, on aura

$$F = kF' \sin i,$$

k désignant un coefficient constant, et i l'angle que la tangente à la courbe fait avec la direction de F et de F′. (PAUL SERRET, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure.*)

XI. Conclure, du théorème précédent, que la chaînette est la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action d'une force proportionnelle à la distance du mobile à un axe fixe.

N. B. On trouvera, dans la *Mécanique céleste* de Laplace, t. I, deux méthodes différentes de celles que nous avons données pour trouver le mouvement d'un point sollicité par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.

XII. Un point matériel pesant décrit une courbe verticale telle, que le rapport k de la pression à la force centrifuge soit constant. On demande l'équation différentielle de cette courbe. Intégrer cette équation dans les cas suivants :

$$k = 2, \quad 0, \quad \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}.$$

XIII. Considérons une série de cycloïdes issues d'un même point A, situées dans le même plan vertical, et ayant leurs bases sur une même horizontale, des points matériels de même masse partent simultanément de A pour décrire chacun une des cycloïdes considérées; on demande le lieu de leurs positions à l'époque t. Ce lieu porte le nom de *courbe synchrone*. (JEAN BERNOULLI, *Actes de Leipsick*, 1697.)

XIV. Déterminer le mouvement d'un point lancé sur un cercle qui exerce un frottement proportionnel à la pression et à la vitesse.

XV. Un point mobile décrit sur une sphère une courbe qui coupe tous les méridiens passant par deux pôles fixes sous un angle constant : trouver la force qui sollicite ce point, en supposant le mouvement uniforme.

XVI. Un aimant tourne uniformément autour du milieu de la droite qui joint les pôles et décrit ainsi un plan; dans le plan de cet aimant se meut une masse de fer de dimensions infiniment petites, assujetties à rester sur une droite fixe. On propose d'étudier le mouvement de la masse de fer (on supposera l'action de chaque pôle constante, et non pas, comme cela devrait avoir lieu, proportionnelle à l'inverse du carré de la distance); on examinera le cas où la trajectoire exerce un frottement proportionnel à la pression. On supposera aussi le frottement proportionnel à la vitesse.

XVII. Trouver l'équation différentielle de la brachystochrone dans un milieu résistant.

XVIII. Trouver le mouvement d'un point lancé avec une vitesse donnée dans un milieu dont la résistance croît proportionnellement à la distance à un plan fixe.

XIX. Trouver la brachystochrone dans le cas d'un point sollicité par un centre fixe proportionnellement à la distance.

N. B. Le mouvement des planètes, dans l'hypothèse d'un milieu résistant, se trouve traité dans la *Mécanique* de Poisson et de Lagrange.

NOTES.

SUR LA THÉORIE DES SURFACES.

201. Nous avons employé dans cet Ouvrage, et nous emploierons encore, les équations

$$(1) \qquad x = a\cos\varphi\sin\theta, \quad y = b\sin\varphi\sin\theta, \quad z = c\cos\theta$$

pour représenter un ellipsoïde; nous avons dit, mais sans le démontrer, que $\varphi = \text{const.}$ et $\theta = \text{const.}$ déterminaient deux séries de courbes, qui en leurs points de croisement étaient tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice.

Trois équations telles que

$$(2) \qquad x = f(\theta, \varphi), \quad y = f_1(\theta, \varphi), \quad z = f_2(\theta, \varphi)$$

déterminent une surface dont l'équation en coordonnées ordinaires s'obtient en éliminant θ et φ; θ et φ, égalés à des constantes, représentent deux séries de courbes que l'on appelle *lignes coordonnées*. Une relation entre θ et φ telle que

$$F(\theta, \varphi) = 0$$

détermine une courbe tracée sur la surface. En effet, en vertu des formules (2), θ et φ sont fonctions de x, y et z; donc $F = 0$ équivaut à une équation entre x, y et z, c'est-à-dire représente une surface qui, par son intersection avec la surface proposée, fournit une courbe.

Ceci posé, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

1° La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations

$$(3) \qquad \theta = \text{const.}, \quad \varphi = \text{const.}$$

représentent des *lignes conjugués,* c'est-à-dire tangentes en leur point de croisement à deux diamètres conjugués de l'indicatrice, est

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\theta}, & \dfrac{dy}{d\theta}, & \dfrac{dz}{d\theta} \\ \dfrac{dx}{d\varphi}, & \dfrac{dy}{d\varphi}, & \dfrac{dz}{d\varphi} \\ \dfrac{d^2x}{d\theta\,d\varphi}, & \dfrac{d^2y}{d\theta\,d\varphi}, & \dfrac{d^2z}{d\theta\,d\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on désire, en outre, que les lignes (3) soient lignes de courbure, il faudra, à l'équation (3), joindre la suivante :

$$(5) \qquad \frac{dx}{d\theta}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{d\theta}\frac{dz}{d\varphi} = 0.$$

On vérifie sans peine que les valeurs de x, y, z tirées de (1) satisfont à l'équation (4).

2° La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (3) représentent des lignes *asymptotiques,* c'est-à-dire tangentes en leurs points de croisement à deux asymptotes de l'indicatrice, est que l'on ait identiquement

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\theta}, & \dfrac{dy}{d\theta}, & \dfrac{dz}{d\theta} \\ \dfrac{dx}{d\varphi}, & \dfrac{dy}{d\varphi}, & \dfrac{dz}{d\varphi} \\ \dfrac{d^2x}{d\theta^2}, & \dfrac{d^2y}{d\theta^2}, & \dfrac{d^2z}{d\theta^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\theta}, & \dfrac{dy}{d\theta}, & \dfrac{dz}{d\theta} \\ \dfrac{dx}{d\varphi}, & \dfrac{dy}{d\varphi}, & \dfrac{dz}{d\varphi} \\ \dfrac{d^2x}{d\varphi^2}, & \dfrac{d^2y}{d\varphi^2}, & \dfrac{d^2z}{d\varphi^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces théorèmes se démontrent de la façon la plus simple en cherchant l'équation générale des lignes conjuguées ou asymptotiques en coordonnées ordinaires, et en écrivant que cette équation est identiquement satisfaite quand on y substitue à la place de x, y, z leurs valeurs exprimées en θ et en φ. Les calculs sont un peu longs, mais n'offrent aucune difficulté. Ces deux théorèmes, que je crois nouveaux, complètent les résultats obtenus par Gauss dans ses *Disquisitiones circa superficies curvas*. Les théorèmes de M. Dupin se démontrent avec une simplicité extrême en partant du premier de nos théorèmes.

SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CINÉMATIQUE.

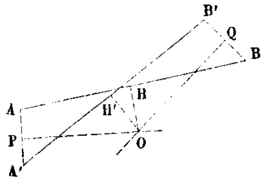
Nous avons vu (29) que le mouvement le plus général d'un solide présentant un point fixe se ramenait à une rotation effectuée autour d'une droite à laquelle on a donné le nom d'*axe instantané*.

Supposons que le point fixe se transporte à l'infini; tous les points du solide vont décrire des lignes planes, et le théorème que nous venons de rappeler va se transformer dans le suivant, facile à démontrer directement :

202. Théorème I. — *Toutes les fois qu'une figure plane se déplace, sans se déformer, dans son plan, son mouvement se ramène à une rotation effectuée autour d'un point fixe que l'on appelle* centre instantané de rotation.

Considérons une figure plane en mouvement dans son plan. Soit AB (*fig.* 36) une droite liée à la figure, soit A′B′ la position occupée par AB lorsque la figure s'est déplacée infiniment peu; sur les milieux de AA' et de BB', élevons des perpendiculaires; ces perpendiculaires PO, QO se couperont en un point O situé à une distance finie

Fig. 36.



ou infinie, et il est bien évident que l'on amènera la figure de l'ancienne position à la nouvelle, en la faisant tourner autour du point O d'un angle égal à $A'OA$.

Or $A'A$ est l'élément de courbe décrit par un point quelconque de la figure mobile et PO est la normale à cet élément. Donc :

203. Théorème II. — *Les normales aux courbes décrites par un point de la figure mobile passent par un point fixe qui est le centre instantané.*

Si du point O on mène OH et OH' normales, respectivement, à AB et $A'B'$, on aura $OH = OH'$ et $AOA' = HOH'$; par suite, le point H viendra en H' quand AB s'appliquera sur $A'B'$, et pendant le déplacement H décrira un arc de cercle HH' tangent à AB et à $A'B'$, et, par suite, H décrit l'enveloppe de AB. Donc :

204. Théorème III. — *Le point où une droite* AB *de la figure mobile touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire menée du centre instantané sur cette droite.*

205. Théorème IV. — *Le point où une courbe liée à la figure mobile touche son enveloppe est le pied de la normale à cette courbe passant par le centre instantané.*

Soient L le lieu des centres instantanés dans le plan, L′ la courbe liée à la figure mobile, lieu des points qui coïncident successivement avec les centres instantanés. Il est facile de prouver que le mouvement de la figure peut s'effectuer en supposant que l'on fasse rouler L′ sur L de manière que tous leurs éléments viennent successivement les uns sur les autres, ou, comme l'on dit, en faisant *rouler* L′ *sur* L *sans glissement*. Ainsi :

206. Théorème V. — *Le mouvement le plus général d'une figure dans son plan se ramène au roulement sans glissement d'une courbe liée à la figure mobile sur une courbe fixe.*

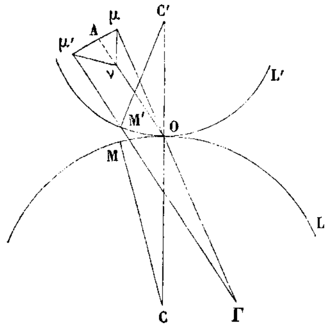
La démonstration de ce théorème est identique à celle que nous avons donnée pages 32 et 33.

207. Théorème VI. — *Réciproquement, lorsqu'une courbe* L′ *roule sur une autre* L *sans glisser, le centre instantané se trouve au point de contact des deux courbes.*

En effet, dans le roulement, le point de contact se déplace d'une quantité infiniment petite du second ordre. Soit M′ le point de la courbe L′ qui vient s'appliquer en M pendant le roulement, O le point de contact actuel des deux courbes; le déplacement du point M′ est mesuré par MO $\times$ angle M′OM; si MO est infiniment petit, l'angle M′OM le sera aussi, et MM′ sera du second ordre, comme nous l'avions annoncé.

Soit C′OC la normale commune aux deux courbes à l'époque t; soient $M'C'$ et MC les normales infiniment voisines, $OC = r$, et $O'C' = r'$ seront les rayons de courbure des courbes L et L' en O. Cherchons le rayon de

Fig. 37.



courbure ρ de la courbe $\mu\mu'$ décrite par le point μ; soit μ' la position occupée par μ quand le point M' est venu en M : $\mu'M$ sera la normale à $\mu\mu'$ passant en μ'. Mais $\mu'M$ peut être remplacé par $\mu'M'$, la distance MM' étant du second ordre. Soit Γ le point de rencontre de μO et de $\mu'M'$, on aura

$$\mu\Gamma = \rho.$$

Soit $d\varepsilon$ l'angle de contingence, on a

$$(1) \qquad \rho = \frac{\overline{\mu'\mu}}{d\varepsilon}.$$

Or $\overline{\mu\mu'}$ est l'arc dont a tourné le point μ; si l'on désigne $\overline{O\mu}$ par n et le déplacement angulaire par ω, on aura

$$(2) \qquad \mu\mu' = n\omega.$$

Or l'angle ω est l'angle dont tourne $M'C'$ pour venir se placer dans le prolongement de CM. On a donc

$$\omega = C + C' = \frac{ds}{r} + \frac{ds}{r'}, \tag{3}$$

ds désignant la longueur commune des arcs OM, OM'. Si sur M'O et μ'M' on construit le parallélogramme M'μ'Oν, on aura

$$d\varepsilon = \Gamma = \mu O \nu.$$

Soit A le point où Oν rencontre $\mu\mu'$. On aura, en appelant φ l'angle $\mu OC' = A\mu'\nu$ que fait la normale à la courbe $\mu\mu'$ avec la normale aux courbes L et L',

$$\mu' A = ds \cos\varphi, \quad \mu A = \mu\mu' - ds\cos\varphi.$$

Or

$$\mu OA = d\varepsilon = \frac{\mu A}{n},$$

ou, en vertu de la formule précédente,

$$d\varepsilon = \frac{\mu\mu' - ds\cos\varphi}{n}. \tag{4}$$

(1), (2), (3) et (4) donnent

$$\rho = \frac{n(r^{-1} + r'^{-1})}{r^{-1} + r'^{-1} - n^{-1}\cos\varphi}. \tag{5}$$

Si la courbe L' avait été intérieure à L', on aurait eu

$$\rho = \frac{n(r^{-1} - r'^{-1})}{r^{-1} - r'^{-1} - n^{-1}\cos\varphi}; \tag{6}$$

si L avait été intérieure à L', on aurait eu

$$\rho = \frac{n(r'^{-1} - r^{-1})}{r'^{-1} - r^{-1} + n^{-1}\cos\varphi}. \tag{7}$$

Les théorèmes qui précèdent sont d'une grande utilité dans la recherche des normales et des rayons de courbure des courbes. Nous prendrons un exemple.

208. On appelle *épicycloïde* la courbe engendrée par un point M d'une circonférence L′ assujettie à rouler sans glisser sur une circonférence fixe L. Si les circonférences L et L′ ont leurs centres d'un même côté du point de contact, l'épicycloïde est *intérieure*; dans le cas contraire, on dit qu'elle est *extérieure*.

Si la circonférence fixe L se réduit à une droite, l'épicycloïde devient ce que l'on appelle une *cycloïde*; si la circonférence mobile se réduit à une droite, l'épicycloïde devient une développante de cercle.

209. 1° Ceci posé, les théorèmes II et VI montrent que la normale, en un point M de l'épicycloïde, est la droite qui joint ce point M au point de contact O des deux cercles.

2° La tangente au point M est la droite qui joint le point M au point diamétralement opposé au point de contact O dans le cercle L′.

3° Le rayon de courbure de l'épicycloïde est donné par l'une des formules (5), (6), (7) du n° 207 (Théorème VI), dans lesquelles r et r' seront les rayons des cercles L et L′. Dans le cas actuel, les formules en question se simplifient, car $n = 2r'\cos\varphi$, et alors

$$\rho = n + \frac{nr}{2r' + r},$$

en convenant de donner des signes aux quantités ρ, r et r'. Ceci posé, on propose : 1° de donner une construction géométrique du rayon de courbure, 2° de démontrer que la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable à la première.

4° L'épicycloïde est une courbe algébrique toutes les fois que le rapport $\frac{r}{r'}$ est commensurable. Si l'on prend pour axe des x la droite qui joint le centre des circonférences L et L' au moment où le point O, décrivant l'épicycloïde, est sur la ligne des centres, la courbe pourra être représentée par les équations

$$x = (r + r')\cos u - r'\cos\frac{r + r'}{r'}u,$$

$$y = (r + r')\sin u - r'\sin\frac{r + r'}{r'}u.$$

Dans ces formules, r' aura le signe $+$ si les circonférences r et r' sont extérieures, le signe $-$ dans le cas contraire; u désigne l'angle que fait la ligne des centres avec l'axe des x.

Examiner les cas particuliers de $r = \infty$, $r' = \pm\infty$; en déduire les propriétés de la cycloïde et de la développante du cercle; examiner le cas de $r' = -\frac{r}{2}$, $r' = -\frac{r}{4}$: dans le premier cas on a une droite, dans le second une ellipse (*).

210. Méthode de Roberval. — Dans le *Recueil de divers ouvrages de Mathématiques et de Physique des Membres de l'Académie des Sciences* publié par Gallois, 1690, se trouve l'exposé d'une méthode pour le tracé des tangentes aux courbes; cette méthode, due à Roberval, a précédé la découverte du calcul infinité-

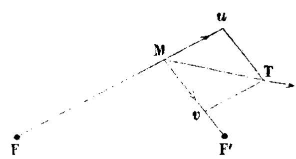
(*) On trouvera des détails sur ces sujets : 1° dans la *Cinématique* de Bour; 2° dans le commencement du *Calcul infinitésimal* de M. Duhamel; 3° dans le 25e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, Mémoire de M. de la Gournerie; 4° dans le troisième volume des *Œuvres de Pascal*, annotées par M. Drion (Librairie Hachette).

simal. Si l'on ouvre le Traité des fluxions de Newton, traduit en français (*), on s'apercevra facilement qu'au fond la méthode des fluxions est l'étude d'un cas particulier de la méthode de Roberval.

La tangente à une courbe n'est autre chose que la direction de la vitesse d'un mobile assujetti à décrire cette courbe. Si l'on peut décomposer cette vitesse en plusieurs autres faciles à trouver, on construira facilement la vitesse résultante, et par suite la tangente à la courbe en question. Tel est le principe de la méthode de Roberval. Newton, dans son calcul des fluxions, considère les composantes de la vitesse suivant deux axes rectangulaires.

Nous ne ferons qu'une seule application de la méthode de Roberval. Considérons une ellipse. Soient F et F′ les

Fig. 38.



foyers, M un point de la courbe. Supposons qu'un mobile décrivant la courbe soit arrivé en M à l'époque t, décomposons sa vitesse en deux autres, dirigées, l'une Mu, suivant FM, l'autre, Mv, suivant MF′. Or on a

$$MF + MF' = 2a,$$

$2a$ désignant le grand axe. On en déduit

$$\frac{dMF}{dt} + \frac{dMF'}{dt} = 0; \tag{1}$$

(*) Newton, *Méthodes des Fluxions et des Suites infinies*. In-4; 1740. Chez Gauthier-Villars Prix : 6 francs.

d'où l'on conclut, au premier abord, que les vitesses Mu et $M\nu$, respectivement égales à $\frac{dMF}{dt}$ et à $\frac{dMF'}{dt}$, sont égales; par suite, la vitesse cherchée est la diagonale d'un losange ayant pour côtés un rayon vecteur et le prolongement de l'autre. On trouve ainsi que la bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs est la tangente cherchée.

Mais ce raisonnement, qui a été appliqué par Roberval à l'hyperbole, n'est pas juste, parce que l'on a admis que u était égal à $\frac{dMF}{dt}$. Voici comment on doit présenter les choses.

La vitesse cherchée MT est la résultante de deux autres : 1° la vitesse $Mu = \frac{dMF}{dt}$ du point M suivant FM; 2° la vitesse de circulation uT du rayon FM; elle peut aussi être considérée comme la résultante de $M\nu = \frac{dMF'}{dt}$ et de la vitesse de circulation νT du rayon F'M. Mais en vertu de (1), $Mu = M\nu$; les deux triangles rectangles MuT et $M\nu$T sont donc égaux comme ayant même hypoténuse et un côté égal. Donc MT est bien la bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs.

C. Q. F. D.

EXERCICES SUR LA CINÉMATIQUE.

N. B. On trouvera de nombreux développements sur l'étude du mouvement considéré indépendamment de ses causes : 1° dans les Ouvrages de Cinématique de Bour et de M. Resal; 2° dans la Thèse de M. Nicolaïdès, officier du Génie de l'armée hellénique; 3° dans divers Mémoires de MM. Mannheim et Ribaucour.

I. Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan : 1° il existe toujours un point de cette figure dont l'accélération totale est nulle : ce point s'appelle le *centre des accélérations*; 2° le lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle est un cercle; 3° le lieu des points dont l'accélération normale est nulle est un cercle.

II. Soit MJ l'accélération d'un point M à l'époque t, M'J' son accélération à l'époque $t + dt$, soit R la résultante de ces deux accélérations; $\frac{R}{dt}$ est ce que M. Somoff appelle l'*accélération du second ordre du point* M.

Ceci posé, on propose de calculer : 1° les composantes parallèles à trois axes rectangulaires de l'accélération du second ordre; 2° la grandeur et la position de la droite qu'il faut composer avec l'accélération relative et l'accélération d'entraînement du second ordre, pour obtenir l'accélération absolue du second ordre.

(SOMOFF, *Acad. de Saint-Pétersbourg : Mémoires sur les accélérations des divers ordres.*)

III. Considérons un système de points en mouvement, soit O l'un d'eux; à l'époque t autour du point O comme centre décrivons une sphère infiniment petite. Soit A un point de la surface de cette sphère; portons sur le rayon OA une longueur OM égale à $\frac{1}{OA}\,\frac{d.OA}{dt}$: le lieu des points M ainsi obtenus sera un ellipsoïde.

IV. L'*épitrochoïde* est la courbe engendrée par un point invariablement lié à un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle fixe; quand ce dernier se réduit à une droite, l'*épitrochoïde* devient une *trochoïde* : ceci posé, on demande de construire la normale et le rayon de courbure de l'épitrochoïde par la considération du centre instantané de rotation.

V. Un point M se meut uniformément sur un cercle avec une vitesse a, pendant que le centre du cercle décrit une circonférence d'un mouvement uniforme : prouver que la trajectoire du point M est une épitrochoïde; examiner le cas où l'un des cercles a un rayon infini.

VI. L'ellipse peut être engendrée par un point d'une droite de grandeur constante qui s'appuie sur deux droites rectangulaires. Montrer que le centre instantané décrit un cercle, et que, par suite, toute ellipse est une épitrochoïde; en déduire un moyen de construire le rayon de courbure de l'ellipse.

VII. Appliquer la méthode de Roberval au tracé de la tangente à l'hyperbole, à la spirale d'Archimède, aux conchoïdes.

VIII. Un angle constant a ses deux côtés tangents à une courbe donnée : mener la normale au lieu de ses sommets.

IX. Une droite de grandeur constante se meut de telle sorte que ses extrémités s'appuient sur deux cercles situés dans le même plan : étudier le mouvement d'un point quelconque de cette droite.

X. Lorsqu'un plan se meut dans l'espace, les plans normaux aux trajectoires de ses points passent tous par un même point du plan, que l'on appelle *foyer*.

La trajectoire du foyer est perpendiculaire au plan mobile.

Le lieu des points dont les trajectoires sont situées dans le plan mobile est une droite; cette droite est la caractéristique du plan.

Lorsque plusieurs plans passent par une même droite A, le lieu de leurs foyers est une droite B. Les plans qui passent par la droite B ont leurs foyers sur la droite A.

(CHASLES.)

FIN DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Page 17, avant-dernière ligne, *au lieu de* les projections de la vitesse, *lisez* les droites qui représentent la vitesse.

» 62, ligne 5, *au lieu de* la résultante qui représente, *lisez* la résultante des droites qui représentent.

» 107, dernière ligne, *au lieu de* appliquée au solide par le point O; on, *lisez* appliquée au solide; par le point O, on.

» 199, première formule de la page, *au lieu de* $\frac{dU}{dx}$, *lisez* $\frac{dU_1}{dx}$.

» 204, formule qui précède immédiatement la formule (2), au numérateur, *au lieu de* $\sin\varphi \cos g$, *lisez* $\sin\varphi \cos g\varphi$.

» 207, formule (4), rétablissez les différentielles $d\varphi\, dt$ sous l'intégrale.

» 224, lignes 21 et 22, *au lieu de* à la force centripète et à la force centrifuge. On, *lisez* à la force centripète et à la force tangentielle. On.