


*H. F. n. f. 166. (TV 5.)*  
**THÈSES**

# D'ASTRONOMIE

ET

# DE MÉCANIQUE,

PRÉSENTÉES 

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR M. F. ALQUIER,

Agrégé, ancien Élève de l'École Polytechnique.



**PARIS,**

**BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE**  
**de l'École Polytechnique et du Bureau des Longitudes,**

Rue du Jardinet, 12.

**1852.**

# ACADÉMIE DE PARIS.

---

## FACULTÉ DES SCIENCES.

---

MM. MILNE EDWARDS, Doyen,

THENARD,  
PONCELET,

BIOT  
*hertel,*

POUILLET,  
CONSTANT PREVOST,  
DUMAS,

AUGUSTE DE SAINT-HILAIRE,  
DESPRETZ,

STURM,  
DELAFOSSÉ,

BALARD,  
LEFÉBURE DE FOURCY,

LE VERRIER,  
CHASLES,

CAUCHY,  
DUHAMEL,

DE JUSSIEU,  
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE,

LANÉ,  
DELAUNAY,

VIEILLE,  
BERTRAND,

MASSON,  
PELIGOT,

PAYER,  
DUCHARTRE,

} Professeurs  
honoraires.

} Professeurs.

} Agrégés.

---

---

# THÈSE D'ASTRONOMIE.

---

## SUR L'ATTRACTION.

---

1. On sait que le calcul de l'action attractive ou répulsive exercée sur un point de l'espace par un système de molécules, se ramène à celui d'une certaine fonction qui, dans la loi naturelle, exprime la somme algébrique des masses des molécules agissantes, divisées par leurs distances respectives au point considéré. C'est cette fonction qui a reçu le nom de *potentiel*; nous la désignerons constamment par  $V$ . C'est en passant par l'intermédiaire de cette fonction que les géomètres ont attaqué jusqu'à présent les problèmes les plus importants que leur présente la théorie de l'attraction; il importe donc d'en étudier avec soin la nature et les propriétés.

2. Considérons en premier lieu le cas où les masses remplissent un espace déterminé. Soit donc

$$V = \int \frac{dm}{r},$$

$dm$  étant un élément  $(x, y, z)$  de la masse et  $r$  sa distance au point considéré  $(a, b, c)$ ;  $X, Y, Z$  étant les trois composantes, on a

$$X = \frac{dV}{da} = \int \frac{dm(x-a)}{r^3},$$

$$Y = \frac{dV}{db} = \int \frac{dm(y-b)}{r^3},$$

$$Z = \frac{dV}{dc} = \int \frac{dm(z-c)}{r^3}.$$

Si l'on remplace  $x, y, z$  par des coordonnées polaires et qu'on

( 4 )

exprime  $dm$  au moyen des mêmes coordonnées, les expressions précédentes deviennent :

$$V = \int k r \sin u \, dr \, d\lambda \, du,$$

$$X = \int k \cos u \sin u \, dr \, d\lambda \, du,$$

$$Y = \int k \sin^2 u \cos \lambda \, dr \, d\lambda \, du,$$

$$Z = \int k \sin^2 u \sin \lambda \, dr \, d\lambda \, du.$$

Sous cette forme, on voit que les points situés à une distance infiniment petite n'apportent dans les intégrales que des parties également infiniment petites, et, conséquemment, que le potentiel, ainsi que les composantes, reste fini et continu, même lorsque le point attiré fait partie de la masse.

3. Lorsque le point attiré ne fait pas partie de la masse, on peut obtenir  $\frac{dX}{da}$  ou  $\frac{d^2V}{da^2}$  en différenciant sous le signe  $\int$ , et l'on arrive alors à la relation connue

$$(1) \quad \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = 0.$$

Pour savoir à quoi est égale cette même somme lorsque le point attiré fait partie de la masse, considérons d'abord un corps sphérique, auquel cas on calcule facilement  $V$ , et, par suite, ses coefficients différentiels des divers ordres.

Dans ce cas,

$$V = 2 \pi k R^2 - \frac{2}{3} \pi k (a^2 + b^2 + c^2);$$

on tire de là

$$\frac{dV}{da} = -\frac{4}{3} \pi k a, \quad \frac{dV}{db} = -\frac{4}{3} \pi k b, \quad \frac{dV}{dc} = -\frac{4}{3} \pi k c,$$

$$\frac{d^2V}{da^2} = -\frac{4}{3} \pi k, \quad \frac{d^2V}{db^2} = -\frac{4}{3} \pi k, \quad \frac{d^2V}{dc^2} = -\frac{4}{3} \pi k,$$

ce qui montre que

$$(2) \quad \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4 \pi k.$$

Lorsqu'on considère le potentiel de la sphère relativement à un point extérieur, la valeur de  $V$  est la même que si la masse était entièrement concentrée au centre,

$$V = \frac{4}{3} \frac{\pi k R^3}{\rho},$$

$$\frac{dV}{da} = -\frac{4}{3} \frac{\pi k R^3 a}{\rho^3},$$

$$\frac{dV}{db} = -\frac{4}{3} \frac{\pi k R^3 b}{\rho^3},$$

$$\frac{dV}{dc} = -\frac{4}{3} \frac{\pi k R^3 c}{\rho^3},$$

$$\frac{d^2V}{da^2} = \frac{4 \pi k R^3 (3a^2 - \rho^2)}{3 \rho^3},$$

$$\frac{d^2V}{db^2} = \frac{4 \pi k R^3 (3b^2 - \rho^2)}{3 \rho^3},$$

$$\frac{d^2V}{dc^2} = \frac{4 \pi k R^3 (3c^2 - \rho^2)}{3 \rho^3}.$$

Ces valeurs, comparées aux valeurs intérieures, montrent ce que nous avons déjà remarqué, à savoir, que le potentiel et ses coefficients différentiels du premier ordre varient d'une manière continue en passant de l'extérieur à l'intérieur, tandis que les coefficients du deuxième ordre deviennent discontinus.

Si nous considérons actuellement un point faisant partie d'une masse quelconque, et que nous imaginions une petite sphère contenant ce point, le potentiel se composera d'une partie provenant de la sphère et d'une partie provenant du reste du corps : la première partie satisfera à l'équation (2), et la seconde à la relation (1); de sorte qu'en considérant le corps entier, on aura

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi k.$$

Lorsque le point est sur la surface même du corps, chacun des coefficients différentiels précédents a deux valeurs, l'une correspondant à l'espace extérieur et l'autre à l'espace intérieur; d'où résultent, en les combinant, huit valeurs différentes pour la somme, dont deux seulement sont à considérer, l'une égale à zéro correspondant à ce

qu'on peut appeler la face extérieure de la surface, et l'autre égale à  $-4\pi k$  correspondant à la face intérieure.

4. Considérons maintenant le cas où les masses sont distribuées sur une ou plusieurs surfaces. Si  $k$  est la densité variable,  $k ds$  sera la masse contenue sur l'élément  $ds$ , et, par suite, le potentiel sera

$$V = \int \frac{k ds}{r}.$$

Dans ce cas, comme dans le précédent, le potentiel reste fini, même lorsque le point fait partie de la surface. En effet, si  $\rho$  est la distance du point considéré à un point quelconque de la surface du plan tangent, et  $\theta$  l'angle de ce rayon vecteur avec un axe tracé dans ce plan, l'élément de surface du plan tangent sera  $\rho d\rho d\theta$ , et l'élément de la surface dont ce dernier est la projection  $\frac{\rho d\rho d\theta}{\cos\psi}$ ,  $\psi$  étant l'angle de la normale à l'élément considéré avec la normale à l'origine, de sorte que

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \frac{k}{\cos\psi} \cdot \frac{\rho}{r} d\rho d\theta;$$

cette intégrale ne peut être infinie, puisque  $\cos\psi$  et  $\frac{\rho}{r}$  ayant pour limite l'unité, l'élément reste fini.

5. Examinons maintenant comment varie l'action attractive ou répulsive lorsqu'on traverse la surface. Considérons un point M sur la surface et prenons intérieurement sur la normale une longueur infiniment petite MP; menons en P un plan perpendiculaire qui sépare de la surface le segment infiniment petit AMB dont nous allons calculer l'action sur le point P. Cette action, décomposée suivant la normale, est représentée par

$$N = \int_0^{\theta_0} \frac{k d\sigma \cos z}{\cos \xi}.$$

$k$  étant la densité en M,  $d\sigma$  la portion interceptée sur la sphère ayant P pour centre et pour rayon l'unité, par un cône ayant pour base l'élément  $ds$  du segment AMB;  $z$  et  $\xi$  les angles que font les génératrices du cône avec la normale à l'origine et la normale à l'élément considéré. La portion de la valeur cherchée, donnée par les valeurs

de  $\alpha$  qui diffèrent infiniment peu de 90 degrés, est nulle, comme on peut s'en convaincre en mettant N sous la forme

$$N = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \frac{k}{\cos \psi} \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \frac{y}{r^2} \cdot d\rho d\psi,$$

$\psi$ ,  $\rho$  et  $\theta$  ayant la même signification que dans le numéro précédent, et  $y$  étant la perpendiculaire abaissée de l'élément  $ds$  sur le plan perpendiculaire passant par P.  $\frac{y}{r^2}$  a une valeur finie dans tous les points pour lesquels  $\alpha$  a une valeur différant infiniment peu de 90 degrés, et, par conséquent, ces points ne fournissent rien à la valeur de l'intégrale. Dans l'autre portion de l'intégrale, le rapport  $\frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$  peut être remplacé par l'unité dont il diffère infiniment peu, et l'on a alors

$$N = 2\pi k.$$

Quant aux composantes dans le plan APB, il est facile de voir qu'elles se détruisent deux à deux. L'action exercée par le petit segment au point M est nulle, car le rapport  $\frac{y}{r^2}$  a alors constamment une valeur finie. Enfin, l'action en un point extérieur et infiniment voisin P<sub>1</sub> est

$$N_1 = \int_0^{\alpha_1} \frac{k d\pi \cos \alpha}{\cos \theta};$$

$\alpha$ , différant infiniment peu de 90 degrés. Dans ce cas, pour la même raison que dans le premier, on peut se contenter d'intégrer jusqu'à une valeur de  $\alpha$  différant d'une quantité finie de 90 degrés et voir la limite vers laquelle tend la valeur ainsi obtenue; on trouve, comme précédemment,

$$N_1 = 2\pi k.$$

Or cette dernière action est de sens contraire à la première; de plus, l'action du reste de la surface et des autres surfaces, s'il y en a, varie infiniment peu en passant de P en P<sub>1</sub> et reste de même sens; donc l'action décomposée suivant la normale varie brusquement de  $4\pi k$  en passant de l'intérieur de la surface à l'extérieur, de  $2\pi k$  lorsque le point arrive sur la surface, et de  $2\pi k$  lorsqu'il la dépasse.

Si les molécules sont disposées de manière à n'avoir aucune action

sur l'intérieur, l'action sera égale à  $4\pi k$  en un point extérieur très-voisin de la surface; de plus, elle sera normale à cette surface.

Considérons actuellement une droite inclinée d'un angle  $\theta$  sur la normale; soient  $p$  et  $p'$  les actions de la surface entière sur deux points infiniment voisins de la droite précédente, l'un intérieur, l'autre extérieur, décomposées suivant cette droite; soient  $R$  et  $R'$  les composantes normales de l'action totale en ces deux points;  $T$  et  $T'$  les composantes de cette action suivant la perpendiculaire à la normale située dans le plan qui contient cette normale et la droite considérée. On a

$$p = R \cos \theta + T \sin \theta,$$

$$p' = R' \cos \theta + T' \sin \theta,$$

d'où

$$p - p' = (R - R') \cos \theta + (T - T') \sin \theta:$$

mais

$$R - R' = 4\pi k,$$

$k$  étant la densité dans les points voisins de la surface, et

$$T = T';$$

donc

$$p - p' = 4\pi k \cos \theta.$$

6. Puisque l'action décomposée suivant une droite ( $r$ ) est représentée par  $\frac{dV}{dr}$ , il résulte de ce qui précède que ce coefficient différentiel varie brusquement de  $4\pi k$  ou  $4\pi k \cos \theta$  en passant de l'extérieur à l'intérieur. De plus, la composante normale en un point de la surface où il existe de la masse, n'est plus représentée par le coefficient différentiel  $\frac{dV}{dn}$ , mais par la valeur extérieure de ce coefficient diminuée de  $2\pi k$  ou par sa valeur intérieure augmentée de  $2\pi k$ .

7. Les principes précédents trouvent leur application dans la théorie de l'électricité. Une masse électrique placée sur un corps conducteur doit pour l'équilibre s'y distribuer de manière à ce que son action soit nulle dans tout l'intérieur; les coefficients différentiels  $\frac{dV}{da}$ ,  $\frac{dV}{db}$ ,  $\frac{dV}{dc}$  sont donc nuls ainsi que ceux du second ordre, ce qui entraîne  $\rho = 0$  d'après l'équation (2), c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir de masse dans l'intérieur du corps et que les molécules électriques doivent seulement être distribuées sur la surface avec une



densité variable dépendant de la forme du corps et des influences auxquelles il est soumis. L'action exercée par un corps conducteur, électrisé en un point extérieur voisin de sa surface, est donc normale à cette surface et proportionnelle à la densité électrique au point considéré.

8. Le calcul fait précédemment suppose que la surface ne présente rien de particulier au point considéré. Je vais examiner le cas où le corps présenterait une pointe. Je suppose d'abord que la pointe ait la forme d'un cône droit dont l'angle est  $\theta$ , et je considère l'action exercée sur un point A intérieur situé sur l'axe et infiniment rapproché du sommet. Je mène par ce point un plan perpendiculaire à l'axe; l'action exercée par la portion de surface comprise entre ce plan et le sommet est moindre que  $2\pi\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant la plus grande densité. Pour calculer l'action exercée par l'autre portion de surface, considérons l'élément compris entre deux plans infiniment voisins perpendiculaires à l'axe du cône; la composante suivant l'axe de

l'action de cet élément est exprimée par  $\frac{2\pi \sin \frac{\theta}{2} dl i \cos \omega}{\alpha^2 l}$ ,  $l$  étant la distance du sommet aux plans comptée suivant les génératrices,  $\alpha$  le rapport entre cette distance  $l$  et la distance du point A à la même tranche, rapport qui est toujours fini et tend vers l'unité à mesure que l'angle  $\omega$  se rapproche de  $\frac{1}{2}\theta$ ;  $i$  est une densité moyenne entre celles des différents points de la tranche.

Considérons seulement  $\frac{2\pi \sin \frac{\theta}{2} i dl}{l}$  et intégrons cette expression depuis une valeur  $l_1$  infiniment petite pour laquelle  $\omega$  a déjà une valeur différent d'une quantité finie de 90 degrés, jusqu'à une valeur  $l_2$  finie, mais d'ailleurs aussi petite que l'on veut; la valeur de l'intégrale est  $2\pi \sin \frac{\theta}{2} \bar{i} \log \frac{l_2}{l_1}$ , c'est-à-dire infinie par rapport à  $\bar{i}$ , valeur moyenne de  $i$  entre les limites de l'intégration. Le résultat aurait encore été infini en intégrant la même expression multipliée par  $\frac{\cos \omega}{\alpha^2}$ , qui a constamment une valeur finie entre les limites de l'intégration. Ce résultat montre que l'action de la surface contenant la pointe conique ne peut être nulle sur les points intérieurs qu'autant que la

densité croît indéfiniment lorsqu'on considère des points de plus en plus rapprochés du sommet. Si le cône était rentrant, la densité devrait, au contraire, être nulle au sommet. Si le cône n'était pas à base circulaire, l'action calculée précédemment serait évidemment plus grande que celle qui se rapporterait à un cône droit dont l'angle avec l'axe choisi arbitrairement serait égal à l'inclinaison maxima des tangentes, et dont l'épaisseur pour chaque tranche serait égale à l'épaisseur minima des points de la tranche correspondante, et, par suite, infinie aussi.

9. Si l'on a deux systèmes de points matériels  $M_1, M_2, M_3, \dots, m_1, m_2, m_3, \dots$ , que  $V$  et  $v$  soient les potentiels de chacun de ces systèmes en un point de l'autre, on a

$$\sum M v = \sum m V,$$

car ces deux sommes sont composées identiquement des mêmes termes. Si chaque système est disposé d'une manière continue sur une ou plusieurs surfaces, les sommes précédentes se changent en intégrales, et l'on a

$$\int K v dS = \int k V ds,$$

$k$  et  $K$  étant les densités correspondantes aux éléments  $ds$  et  $dS$ .

10. Si l'on suppose que le deuxième système forme une couche homogène à la surface d'une sphère, on obtient, dans ce cas,

$$\int V ds = 4 \pi (R M_0 + R^2 V_0),$$

$R$  étant le rayon de la sphère,  $M_0$  la somme des masses du premier système intérieures à la sphère, et  $V_0$  la valeur du potentiel des masses extérieures relative au centre.

11. *Si le potentiel de masses situées en dehors d'un espace limité ou distribuées sur sa surface a une valeur constante  $A$  dans une partie de cet espace, cette valeur conviendra aussi au reste de l'espace.*

Car, si l'on conçoit une sphère dont une partie, ainsi que le centre, soit contenu dans la portion de l'espace où le potentiel a la valeur

constante A, on a, d'après le numéro précédent.

$$\int V ds = 4\pi R^2 A,$$

et, par suite.

$$\int (V - A) ds = 0,$$

V étant la valeur du potentiel sur l'élément sphérique  $ds$  et l'intégrale étant étendue à toute la sphère. Or cela serait impossible si V n'avait pas la même valeur A dans le reste de l'espace; car cette valeur serait alors plus grande que A ou plus petite sur toute la portion de sphère extérieure, en prenant le rayon suffisamment petit.

*Si le potentiel d'un système de masses a une valeur constante dans une partie de l'espace extérieur, cette valeur conviendra à tout l'espace extérieur et ne pourra être que zéro, valeur qui convient à un point infiniment éloigné.*

12. On sait que l'intégrale  $\int \frac{\cos u ds}{r^2}$ , étendue à tous les points d'une surface fermée, est nulle, égale à  $2\pi$  ou enfin à  $4\pi$ , suivant que le point d'où émanent les rayons vecteurs  $r$  est extérieur sur la surface ou intérieur. Si l'on multiplie par l'élément de masses  $d\mu$  et qu'on fasse la somme pour tous les points d'une masse, on trouve

$$\int P ds = 4\pi M + 2\pi M_1,$$

M étant la somme des masses intérieures,  $M_1$  la portion distribuée sur la surface, P la composante normale considérée comme positive lorsqu'elle est dirigée suivant la partie intérieure de la normale, comme négative dans l'autre cas. Élevons une normale par un point quelconque de la surface, désignons par  $p$  la distance de ce point à un point quelconque de la normale, distance que nous regarderons comme positive à l'intérieur de la surface. On peut considérer le potentiel comme fonction de  $p$  et de deux autres variables servant avec  $p$  à déterminer la position du deuxième point. P, d'après le n° 6, peut être remplacé par la valeur extérieure de  $\frac{dV}{dp}$  diminué de  $2\pi k$ ; il en

résulte que la formule

$$\int \frac{dV}{dp} ds = 4\pi M$$

est vraie dans tous les cas,  $M$  étant la somme des masses intérieures et de celles distribuées sur la surface, pourvu que l'on prenne pour  $\frac{dV}{dp}$  sa valeur extérieure. La formule précédente serait encore vraie en prenant pour  $\frac{dV}{dp}$  sa valeur intérieure,  $M$  ne comprenant alors que les masses intérieures, de sorte que, dans ce cas, lorsqu'il n'y a pas de masses intérieures, on a

$$\int \frac{dV}{dp} ds = 0.$$

**15.**  $T$  étant un espace limité,  $q$  la force avec laquelle agissent sur l'élément de volume  $dT$  les masses situées en dehors de l'espace, ou distribuées d'une manière continue à la surface, on a la relation

$$\int V \frac{dV}{dp} ds = - \int q^2 dT,$$

la deuxième intégrale s'étendant à tout le volume  $T$ , et la première à toute la surface qui le limite.

En effet,

$$\int V \frac{dV}{dp} ds = \int V \left( \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dp} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dp} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dp} \right) ds;$$

mais

$$\int V \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dp} ds = \int \varepsilon V \frac{dV}{dx} dy dz,$$

en remarquant que

$$\frac{dx}{dp} = \cos u \quad \text{et} \quad \pm ds \cos u = dy dz,$$

$u$  étant l'angle de la partie intérieure de la normale avec la partie positive de l'axe des  $x$ ,  $\varepsilon$  ayant la valeur  $+1$  à l'entrée et la valeur  $-1$  à la sortie. Or

$$\int \varepsilon V \frac{dV}{dx} dy dz = - \int \left[ \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + V \frac{d^2 V}{dx^2} \right] dx dy dz.$$

puisque

$$\frac{d\left(V \frac{dV}{dx}\right)}{dx} = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V \frac{d^2V}{dx^2}.$$

Faisant le même calcul par rapport à  $y$  et à  $z$ , ajoutant les trois intégrales, en remarquant que

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = q^2,$$

et

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

on arrive à la relation qu'il s'agissait de démontrer.

**14.** Dans le numéro précédent, les valeurs de  $\frac{dV}{dp}$  sont celles relatives à l'espace intérieur; mais, pour ces valeurs, puisqu'il n'y a pas de masses intérieures, on a

$$\int A \frac{dV}{dp} ds = 0,$$

$A$  étant une constante quelconque; donc

$$\int q^2 dT = \int (A - V) \frac{dV}{dp} ds.$$

Par conséquent, si le potentiel a une valeur constante  $A$  en tous les points de la surface,  $q = 0$  en tous les points de l'intérieur, c'est-à-dire qu'il y a destruction totale des forces dans tout l'espace, et, par suite, la valeur  $A$  convient à tout cet espace.

**15.** *Si le potentiel de masses situées dans un espace limité a une valeur constante  $A$  en tout point de la surface, cette valeur convient à tout l'espace infini extérieur, si elle est nulle; dans le cas contraire, le potentiel en un point extérieur ne peut avoir que des valeurs de même signe et plus petites.*

En effet, si le potentiel en un point extérieur  $O$  pouvait avoir une valeur  $B$  non comprise entre  $0$  et  $A$ , on pourrait trouver sur chaque direction partant de  $O$  un point où le potentiel aurait une même valeur

C comprise entre B et A ou entre B et 0, et l'ensemble de ces points formerait une surface fermée complètement extérieure à la première; la valeur C convenant à tous les points de cette surface fermée, conviendrait également au point O, et l'on arriverait ainsi à une contradiction. D'après cela, si la valeur A est nulle, il en sera de même du potentiel en un point extérieur quelconque. Le potentiel, dans le cas où A n'est pas nulle, ne peut être égal ni à 0, ni à A; car, si de O comme centre, on décrit une sphère entièrement extérieure à la surface considérée, on aura, pour cette sphère,

$$\int (V - B) ds = 0,$$

B étant la valeur du potentiel au centre O. Cela ne peut avoir lieu qu'autant que  $V = B$  en tous les points, ou que V soit tantôt plus grand que B, tantôt plus petit. Le second cas est en contradiction avec la première partie du théorème lorsque  $B = 0$  ou  $B = A$ ; du premier il résulterait que la valeur B serait nulle et conviendrait à tout l'espace extérieur, ce qui ne peut être si A n'est pas 0.

16. Si l'on fait  $\int V ds$  pour tous les points d'une surface sphérique comprenant l'espace T, on a

$$\int V ds = 4\pi RM,$$

M étant la somme des masses; donc V ne peut être nul pour tous les points de l'espace extérieur, que lorsque la somme des masses est nulle. Ainsi, *lorsque des masses dont la somme algébrique est nulle, sont situées dans l'intérieur d'un espace limité ou distribuées d'une manière continue sur la surface, de manière que le potentiel ait une valeur constante en chaque point de cette surface, cette valeur ne peut être différente de zéro et s'étend à tout l'espace extérieur; d'où il suit que, dans tout cet espace, l'action des masses est nulle.*

17. Les conclusions des deux paragraphes précédents s'appliquent à une surface non fermée, lorsqu'il n'existe de masses que sur cette surface. Alors tout point qui n'est pas sur la surface appartient à l'espace extérieur.

Dans ce qui va suivre, nous entendrons par distribution homogène, une distribution qui ne comprend que des masses de même signe.

**18.** *Il existe un mode de distribution homogène d'une masse M, pour lequel la différence  $V - U$  a une valeur constante en tous les points de la surface qui contiennent une portion de la masse et une valeur plus grande dans les autres,  $U$  étant une fonction finie et continue des coordonnées.*

Considérons, en effet,

$$\Omega = \int (V - U) m ds;$$

il existe une distribution homogène pour laquelle cette intégrale a une valeur minimum; pour la trouver, calculons la variation  $\delta\Omega$ , correspondante à un changement infiniment petit  $\mu$  dans la densité  $m$ ; nous trouvons

$$\delta\Omega = \int (V - U) \mu ds,$$

en remarquant que, d'après le n° 9, on a

$$\int \delta V \cdot m ds = \int V \mu ds.$$

La variation  $\mu$  est assujettie à la condition

$$\int \mu ds = 0,$$

et aussi à celle de n'être négative en aucune partie vide de la surface. Mettant  $\delta\Omega$  sous la forme

$$\delta\Omega = \int (W - A) \mu ds,$$

$W$  étant égal à  $V - U$ , et  $A$  étant une valeur constante comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de  $W$ , on voit facilement que, si  $W$  n'avait pas une valeur constante dans les parties où il y a de la masse, on pourrait rendre  $\delta\Omega$  négatif en prenant  $\mu$  négatif dans une partie de la surface où la valeur de  $W$  est plus grande que  $A$ , et positif dans une partie où  $W$  est plus petit que  $A$ . On le pourrait également dans le cas où  $W$ , étant constant dans les parties pleines, aurait

une valeur plus petite en quelque point des parties vides. Dans le cas de  $U = 0$ , il ne peut y avoir de parties vides sur la surface; car, d'après ce que nous venons de dire, dans ces parties le potentiel ne devrait pas avoir une valeur plus petite que la valeur constante convenant aux parties pleines, tandis que le contraire devrait avoir lieu d'après le numéro précédent.

**19.** Le mode de distribution précédent est d'ailleurs unique; car, s'il y en avait deux,  $m$  et  $V$  ayant les valeurs  $m_1$  et  $V_1$  dans le premier,  $m_2$  et  $V_2$  dans le deuxième, le potentiel d'une distribution dans laquelle on aurait

$$m = m_1 - m_2,$$

serait  $V_1 - V_2$ ; ce potentiel serait aussi constant, et la masse distribuée serait nulle. Cette valeur constante ne pourrait être que zéro, et conviendrait à l'espace intérieur et extérieur; d'où résulterait  $\frac{dV}{dr}$  nul en un point quelconque d'une droite quelconque, et, par suite, la densité

$$m_1 - m_2 = 0, \quad \text{ou} \quad m_1 = m_2,$$

puisque  $\frac{dV}{dr}$  varie de  $4\pi(m_1 - m_2)\cos\theta$ , en passant de l'extérieur à l'intérieur.

Les résultats précédents seraient les mêmes si la masse était distribuée sur plusieurs surfaces, c'est-à-dire qu'il existerait encore une distribution unique ne laissant aucune partie vide, et pour laquelle le potentiel aurait la même valeur en chaque point des différentes surfaces.

**20.** Je dis maintenant qu'il existe toujours un mode de distribution homogène ou hétérogène de la masse  $M$ , occupant toute la surface et pour lequel  $V - U$  est constante dans toute l'étendue de cette surface. En effet, soient  $m_0$  et  $V_0$  les valeurs de  $m$  et  $V$  dans le mode de distribution homogène correspondant au minimum de  $\int V m ds$ ; soient  $m_1$  et  $V_1$  ces mêmes valeurs pour le mode également homogène correspondant au minimum de  $\int (V - \varepsilon U) m ds$ ,  $\varepsilon$  ayant une valeur



constante quelconque. Soit un troisième mode de distribution, dans lequel on aurait

$$\mu = \frac{m_1 - m_0}{\varepsilon};$$

le potentiel serait égal à

$$\frac{V_1 - V_0}{\varepsilon} = \nu,$$

et la masse entière serait nulle.  $V_0$  est constant dans toute l'étendue de la surface, et  $V_1 - \varepsilon U$  dans la partie où a lieu la deuxième distribution; donc, dans ces mêmes parties,  $\nu - U$  a une valeur constante. Supposons que  $\varepsilon$  tende vers zéro et que l'on fasse

$$\mu = \lim \frac{m_1 - m_0}{\varepsilon},$$

nous obtiendrons ainsi une distribution d'une masse nulle pour laquelle  $\nu - U$  a une valeur constante sur toute la surface, puisque  $\varepsilon$  tendant vers zéro, la deuxième distribution se rapproche indéfiniment de la première. Si maintenant nous prenons

$$m = m_0 + \mu,$$

dans ce nouveau mode la masse sera  $M$  et le potentiel  $V_0 + \nu$  aura encore avec  $U$  une différence constante. On démontrerait, comme précédemment, que le mode est unique.

Il y a toujours une distribution pour laquelle  $V - U$  a une valeur constante donnée; en effet, si nous prenons la densité

$$m = \alpha m_0 + \mu,$$

le potentiel sera

$$V = \alpha V_0 + \nu;$$

la différence constante  $\alpha V_0 + \nu - U$  sera déterminée pour chaque valeur de  $\alpha$ , et, réciproquement, la valeur de  $\alpha$  sera déterminée lorsqu'on donnera la valeur constante que doit avoir le potentiel; la masse sera déterminée, puisqu'elle est égale à  $\alpha M$ , et dès lors il n'y aura qu'une seule manière de satisfaire à la question.

**21.** 1°. *Un système quelconque de masses extérieures à un espace*

peut être remplacé, quant à son action dans l'intérieur de cet espace, par une masse distribuée sur la surface même. La masse à distribuer reste indéterminée, et, pour chaque valeur de cette masse, il n'y a qu'une solution.

Ou autrement :

*Il y a toujours une manière unique de distribuer une masse donnée sur une ou plusieurs surfaces, de manière que son action fasse équilibre dans les espaces intérieurs à ces surfaces à l'action de masses distribuées d'une manière quelconque extérieurement.*

2°. *Un système quelconque de masses intérieures peut être remplacé, quant à son action extérieure, par une masse égale distribuée sur la surface.*

Ou autrement :

*On peut toujours faire équilibre à une masse distribuée dans l'intérieur de certains espaces limités, quant à son action sur les espaces extérieurs, par une masse égale et de signe contraire distribuée sur les surfaces limites.*

Ces théorèmes apparaissent comme conséquences immédiates du numéro précédent, en considérant  $U$  comme le potentiel d'un système de masses.

**22.** Considérons le cas où  $U$  est constant; la surface est alors une surface d'équilibre, c'est-à-dire que la résultante des actions des masses est normale en tout point de cette surface. La couche qui peut remplacer les masses que nous supposons intérieures est alors en même temps une couche d'équilibre; car le potentiel  $V$  de cette couche, étant égal à  $U$ , est constant dans toute l'étendue de la surface, et, par conséquent, de l'espace compris. Les valeurs de  $\frac{dV}{dr}$ , suivant la normale, différant de  $4\pi\gamma$ , la valeur intérieure étant nulle, tandis que l'extérieure est égale à la résultante  $R$  des actions des masses, on a

$$R = 4\pi\gamma, \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{1}{4\pi} R.$$

Telle est, dans ce cas, l'expression simple de l'épaisseur de la couche

en chaque point. Si l'on remarque que la résultante  $R$  varie en raison inverse de la distance de la surface d'équilibre considérée à la surface infiniment voisine, on reconnaît les couches dont M. Chasles avait donné la construction.

**25.** Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général.

*Soit une masse*

$$M = m + m_1;$$

*considérons une surface de niveau relative à l'attraction de cette masse contenant dans son intérieur la portion  $m$ , tandis que  $m_1$  est à l'extérieur. Si l'on distribue sur cette surface une masse égale à  $m$ , de manière que l'expression de la densité en chaque point soit*

$$k = \frac{1}{4\pi} R,$$

*$R$  étant la résultante des actions de  $m$  et  $m_1$  en ce point, la couche ainsi formée aura sur les points intérieurs une action égale et contraire à celle de  $m_1$ , et sur les points extérieurs la même action que  $m$ .*

En effet, il existe une distribution sur cette surface d'une masse égale à  $m$  qui peut remplacer  $m$  quant à son action sur les points extérieurs; le potentiel de cette distribution est égal à celui de  $m$ , et, par conséquent, la somme de ce potentiel et de celui de  $m_1$  est constante dans tous les points de la surface, et, par suite, de l'espace compris; donc cette distribution a sur les points intérieurs une action égale et contraire à celle de  $m_1$ . Pour avoir l'expression de la densité en chaque point, remarquons que les actions des masses  $m$  et  $m_1$  sur un point de la surface considérée ayant une résultante normale, leurs composantes dans le plan tangent doivent être égales et de sens contraires, ce qui donne la relation

$$(1) \quad P \sin \theta = P_1 \sin \theta_1,$$

$\theta$  et  $\theta_1$  étant les angles des actions  $P$  et  $P_1$  des masses  $m$  et  $m_1$  avec la normale. Appliquant le théorème de Laplace, on trouve

$$P (\cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1) - 4\pi k \cos \theta_1 = -P_1,$$

3..

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$P \cos \theta \cos \theta_1 - P_1 \sin^2 \theta_1 - 4\pi k \cos \theta_1 = -P_1,$$

d'où

$$k = \frac{1}{4\pi} (P \cos \theta + P_1 \cos \theta_1) = \frac{1}{4\pi} R.$$

**24.** Si la masse distribuée sur la surface de niveau, considérée dans le numéro précédent, n'est pas égale à  $m$  et que la loi des densités soit toujours la même, c'est-à-dire exprimée par

$$k = \frac{\alpha}{dn},$$

$\alpha$  étant un coefficient constant et  $dn$  la portion de la normale comprise entre la surface de niveau considérée et la surface infiniment voisine, les actions de la couche et de la masse  $m$  sur un point extérieur auront encore la même direction, mais seront entre elles comme la masse distribuée sur la surface est à la masse intérieure  $m$ .

Les actions de cette couche et de la masse extérieure  $m_1$  sur un point intérieur seront de sens contraire et dans le rapport de la masse de la couche à la masse  $m_1$ .

Si, sur une seconde surface de niveau contenant  $m$  et laissant  $m_1$  à l'extérieur, on fait une distribution analogue d'une masse quelconque, les actions de ces deux couches sur un point extérieur à l'une et à l'autre seront de même direction et dans le rapport de leurs masses; il en sera de même de leurs actions sur un point intérieur à l'une et à l'autre.

**25.** La détermination du mode de distribution d'une masse donnée sur une surface, de telle sorte que la valeur du potentiel à la surface soit exprimée par une fonction  $U$ , est dans la plupart des cas au-dessus des forces de l'analyse. On peut cependant résoudre ce problème dans le cas où la surface est celle d'un sphéroïde différant peu d'une sphère. Soient  $\rho$  la distance d'un point indéterminé de la surface du sphéroïde au centre de la sphère dont il diffère peu,  $R$  le rayon de cette sphère; on a

$$\rho = R (1 + \gamma z),$$

$\gamma$  étant un coefficient très-petit et  $z$  une fonction de  $u$  et de  $\lambda$ , coordonnées angulaires qui, avec  $\rho$ , déterminent la position du point.

Nous trouverons l'expression de la densité  $K$  en exprimant que la différence des deux valeurs de  $\frac{dV}{d\rho}$  à la surface est égale à  $4\pi k \cos \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur.

Les deux valeurs de  $V$  à la surface sont exprimées par

$$A_0 \left( \frac{R}{\rho} \right) + A_1 \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 + A_2 \left( \frac{R}{\rho} \right)^3 \dots,$$

$$B_0 + B_1 \left( \frac{\rho}{R} \right) + B_2 \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \dots,$$

$A_0, A_1, A_2, \text{etc.}, B_0, B_1, B_2, \text{etc.}$ , étant des fonctions satisfaisant à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d \left[ (1 - \mu^2) \frac{dU_i}{d\mu} \right]}{d\mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{d^2 U_i}{d\lambda^2} + i(i+1) U_i = 0, \quad \cos u = \mu.$$

Or on doit avoir

$$(1) \quad (1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}} V = (1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}} U;$$

si l'on substitue successivement à  $V$  chacune de ces valeurs en y remplaçant  $\frac{\rho}{R}$  par  $1 + \gamma z$  et négligeant les termes en  $\gamma$ , on trouve

$$U_0 + U_1 + U_2 \dots = A_0 + A_1 + A_2 \dots = B_0 + B_1 + B_2 \dots,$$

$U_0 + U_1 + U_2 \dots$  étant le développement de  $(1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}} U$ , et les fonctions  $U_i$  satisfaisant à l'équation aux différences partielles. Comme une même fonction ne peut être développée ainsi que d'une seule manière, il en résulte qu'en négligeant les termes en  $\gamma^2$ , on a

$$A_0 = U_0 + \gamma a_0, \quad B_0 = U_0 - \gamma b_0,$$

$$A_1 = U_1 + \gamma a_1, \quad B_1 = U_1 - \gamma b_1,$$

$$A_2 = U_2 + \gamma a_2, \quad B_2 = U_2 - \gamma b_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

Substituant dans la relation (1), et négligeant les termes en  $\gamma^2$ , il

vient

$$a_0 + a_1 + a_2 \dots = \frac{1}{2} z (U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots),$$

$$b_0 + b_1 + b_2 \dots = \frac{1}{2} z (U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots),$$

et, par suite,

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \dots;$$

par suite, sauf les quantités en  $\gamma^2$ ,

$$B_0 = U_0 - \gamma a_0, \quad B_1 = U_1 - \gamma a_1, \quad B_2 = U_2 - \gamma a_2 \dots$$

Si l'on forme les deux dérivées, qu'on y remplace  $\frac{\rho}{R}$  par  $1 + \gamma z$  et qu'on néglige les termes en  $\gamma^2$ , il vient, après avoir multiplié les deux membres par  $R(1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}}$  et remplacé  $A_0, A_1, A_2$ , etc.,  $B_0, B_1, B_2$ , etc., par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} 4\pi KR \cos \theta (1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}} &= U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots \\ &+ \gamma (a_0 + a_1 + a_2 \dots) \\ &- \frac{1}{2} \gamma z (U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots). \end{aligned}$$

Les deux dernières parties se détruisent, de sorte que

$$K = \frac{(1 + \gamma z)^{-\frac{3}{2}}}{4\pi R \cos \theta} (U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots).$$

ou

$$K = \frac{1 - \frac{3}{2} \gamma z}{4\pi R} (U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots);$$

car  $(1 + \gamma z)^{-\frac{3}{2}}$  peut être remplacé par  $1 - \frac{3}{2} \gamma z$  et  $\cos \theta$  par 1, en ne négligeant que des termes comparables à  $\gamma^2$ .

Dans le cas d'une sphère exacte,  $\rho = 0$ , et alors on a rigoureusement

$$K = \frac{1}{4\pi R} (U_0 + 3U_1 + 5U_2 \dots),$$

$U_0, U_1, U_2$ , etc., étant les termes du développement de  $U$ .

Si nous supposons  $U$  égal à une constante  $C$ , nous devons retrouver l'expression de l'épaisseur d'une couche d'équilibre infiniment mince,

disposée à la surface du sphéroïde que donne Laplace dans la *Mécanique céleste*. Dans ce cas,  $U_0, U_1, U, \dots$  sont les termes du développement de  $C(1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}}$  ou  $C(1 + \frac{1}{2}\gamma z)$ , de sorte que si  $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots$  est le développement de  $z$ , on a

$$U_0 = C + \frac{1}{2}\gamma CZ_0, \quad U_1 = \frac{1}{2}\gamma CZ_1, \quad U_2 = \frac{1}{2}\gamma CZ_2, \dots$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de  $K$ , elle devient

$$K = \frac{C}{4\pi R} + \frac{\gamma C}{4\pi R}(-Z_0 + Z_2 + 2Z_3 + 3Z_4 \dots);$$

or l'expression de l'épaisseur de la couche d'équilibre donnée par Laplace est

$$R' - R + \gamma R \left\{ \left[ \left( \frac{R'}{R} \right)^{-1} - 1 \right] Z_0 + \left[ \left( \frac{R'}{R} \right)^{-1} - 1 \right] Z_1 + \left[ \left( \frac{R'}{R} \right)^2 - 1 \right] Z_2 \dots \right\}.$$

Si l'on remplace  $\frac{R'}{R}$  par  $1 + \mu$ ,  $\mu$  étant un coefficient très-petit, il vient, en négligeant les termes en  $\mu^2$ ,

$$R\mu + \gamma R\mu(-Z_0 + Z_2 + 2Z_3 + 3Z_4 \dots);$$

cette expression devient identique à celle donnée plus haut, en prenant  $\mu$  égale à  $\frac{C}{4\pi R^2}$ .

**26.** Je terminerai en démontrant, d'après M. Liouville, que, quel que soit le nombre des surfaces, il n'y a qu'une seule manière de distribuer des masses données sur ces surfaces, de sorte qu'il y ait équilibre.

Imaginons qu'il y ait deux états d'équilibre, les densités étant représentées dans le premier état par les fonctions  $a, b, c$ , etc., des coordonnées, et dans le deuxième par les fonctions  $a', b', c'$ , etc.; il y en aurait un troisième correspondant aux densités

$$\alpha = a - a', \quad \beta = b - b', \quad \gamma = c - c', \dots,$$

pour lequel la masse serait nulle sur chaque surface.

Or, pour tout point extérieur par rapport aux couches,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

donc

$$\iiint \left( \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right) dx dy dz = 0,$$

en étendant les intégrations à tous les points qui n'appartiennent pas aux corps.

En intégrant une fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \iint V \left( \frac{dV}{dx} dy dz + \frac{dV}{dy} dx dz + \frac{dV}{dz} dx dy \right) \\ & - \iiint \left[ \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Comme  $V$  devient nul pour les valeurs infinies de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , les éléments de l'intégrale double sont seulement ceux contigus aux surfaces des corps.  $d\omega$  étant l'élément superficiel,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  les angles de la normale à cet élément avec les axes, on a

$$\begin{aligned} dx dy &= d\omega \cos \nu, \\ dx dz &= d\omega \cos \mu, \\ dy dz &= d\omega \cos \lambda; \end{aligned}$$

l'intégrale double devient

$$\iint V \left( \frac{dV}{dx} \cos \lambda + \frac{dV}{dy} \cos \mu + \frac{dV}{dz} \cos \nu \right) d\omega.$$

Cette intégrale est nulle pour chaque corps en particulier; car elle équivaut à

$$V \cdot 4\pi \iint \alpha d\omega,$$

en observant que  $V$  a une valeur constante pour chaque surface et que

$$\frac{dV}{dx} \cos \lambda + \frac{dV}{dy} \cos \mu + \frac{dV}{dz} \cos \nu$$



( 25 )

exprime l'action normale ou  $4\pi\alpha$ . Or

$$\iint \alpha d\omega = 0,$$

puisqu'elle exprime la masse; il reste donc

$$\iiint \left[ \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz = 0,$$

ce qui exige que pour tous les points extérieurs on ait

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0;$$

ce qui ne peut s'accorder avec le théorème de Laplace qu'autant que la densité est nulle en chaque point. Donc

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \dots,$$

c'est-à-dire que les deux distributions sont identiques.

*Vu et approuvé,*

Le 26 avril 1851.

LE DOYEN PAR INTÉRIM DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
DUMAS.

*Permis d'imprimer,*

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE LA SEINE,  
CAYX.

---

---

# THÈSE DE MÉCANIQUE.

---

---

## SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR DEUX SPHÈRES CONDUCTRICES MISES EN PRÉSENCE.

---

---

Soient  $V'$  le potentiel de la couche située sur la première sphère, relatif aux points intérieurs,  $V''$  le potentiel relatif aux points extérieurs,  $U'$  et  $U''$  les potentiels de la deuxième couche. Les deux conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre sont exprimées par

$$V' + U'' = \text{constante}, \quad V'' + U' = \text{constante},$$

pour tous les points situés dans l'intérieur de l'une ou l'autre des deux sphères.

Appelant  $\gamma'$  la densité électrique sur la première sphère, en un point dont les coordonnées sont  $a$ ,  $\theta'$ ,  $\omega'$ , on a

$$V' = \int \int \frac{\gamma' a^2 \sin \theta' d\theta' d\omega'}{\Delta} = \int \int \frac{\gamma' a^2 d\mu' d\omega'}{\Delta},$$

en posant

$$-\cos \theta' = \mu'.$$

Pour les points intérieurs, le développement de  $\frac{1}{\Delta}$  est

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{a} \left\{ 1 - 2 \frac{x}{a} [\mu' \mu + \sqrt{1 - \mu'^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\omega' - \omega)] + \frac{x^2}{a^2} \right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{a} \left( U'_0 + U'_1 \frac{x}{a} + U'_2 \frac{x^2}{a^2} + \dots + U'_n \frac{x^n}{a^n} \dots \right); \end{aligned}$$

pour les points extérieurs,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{x} \left( U''_0 + U''_1 \frac{a}{x} + U''_2 \frac{a^2}{x^2} \dots + U''_n \frac{a^n}{x^n} \dots \right),$$

$U_0', U_1', U_2', \dots, U_n'$  sont des fonctions rationnelles par rapport à  $\mu'$ ,  $\sqrt{1 - \mu'^2} \cos \omega'$ ,  $\sqrt{1 - \mu'^2} \sin \omega'$ , et satisfont à l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d \left[ (1 - \mu'^2) \frac{dU_n'}{d\mu'} \right]}{d\mu'} + \frac{1}{1 - \mu'^2} \frac{d^2 U_n'}{d\omega'^2} + n(n + 1) U_n' = 0.$$

Concevons, ainsi que cela est toujours possible,  $\mathcal{Y}'$  développée en une suite de fonctions analogues

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'_0 + \mathcal{Y}'_1 + \mathcal{Y}'_2 \dots + \mathcal{Y}'_n \dots,$$

et rappelons que ces fonctions jouissent des deux propriétés suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \mathcal{Y}'_k U_n' d\mu' d\omega' = 0$$

si  $k$  n'est pas égal à  $n$ ,

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \mathcal{Y}'_n U_n' d\mu' d\omega' = \frac{4\pi}{2n + 1} \mathcal{Y}_n,$$

$\mathcal{Y}_n$  étant ce que devient  $\mathcal{Y}'_n$  lorsqu'on y remplace  $\mu'$  et  $\omega'$  par les coordonnées  $\mu$  et  $\omega$  du point considéré. On obtient, par ces considérations,

$$V' = 4\pi a \left[ \mathcal{Y}_0 + \frac{x}{3a} \mathcal{Y}_1 + \frac{x^2}{5a^2} \mathcal{Y}_2 \dots + \frac{x^n}{(2n + 1)a^n} \mathcal{Y}_n \dots \right],$$

$$V'' = \frac{4\pi a^2}{x} \left[ \mathcal{Y}_0 + \frac{a}{3x} \mathcal{Y}_1 + \frac{a^2}{5x^2} \mathcal{Y}_2 \dots + \frac{a^n}{(2n + 1)x^n} \mathcal{Y}_n \dots \right],$$

ou, posant

$$\mathcal{Y}_0 + \frac{x}{3} \mathcal{Y}_1 + \frac{x^2}{5} \mathcal{Y}_2 \dots + \frac{x^n}{2n + 1} \mathcal{Y}_n = \varphi(\mu, x),$$

$$V' = 4\pi a \varphi \left( \mu, \frac{x}{a} \right), \quad V'' = \frac{4\pi a^2}{x} \varphi \left( \mu, \frac{a}{x} \right);$$

de même, en posant

$$\psi(\mu_1, x_1) = z_0 + \frac{x_1}{3} z_1 + \frac{x_1^2}{5} z_2 \dots + \frac{x_1^n}{2n + 1} z_n \dots,$$

$z'_0 + z'_1 + z'_2 \dots + z'_n$  étant le développement de la densité  $z'$  à la surface de la deuxième sphère;  $\mu_1$  et  $x_1$  se rapportant au centre de

cette sphère,

$$U' = 4 \pi b \psi \left( \mu_1, \frac{x_1}{b} \right), \quad U'' = \frac{4 \pi b^2}{x_1} \psi \left( \mu_1, \frac{b}{x_1} \right),$$

les deux équations de condition sont donc

$$(1) \quad \begin{cases} a \varphi \left( \mu, \frac{x}{a} \right) + \frac{b^2}{x_1} \psi \left( \mu_1, \frac{b}{x_1} \right) = h, \\ \frac{a^2}{x} \varphi \left( \mu, \frac{a}{x} \right) + b \psi \left( \mu_1, \frac{x_1}{b} \right) = g. \end{cases}$$

Une fois que nous aurons déterminé les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  par les deux équations précédentes, nous obtiendrons les densités par les deux formules

$$y = 2x \frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

$$z = 2x_1 \frac{d\psi(\mu_1, x_1)}{dx_1} + \psi(\mu_1, x_1),$$

à la condition de faire  $x = 1$  après la différentiation. Les fonctions  $y_n$  étant indépendantes de  $\omega$ , satisfont à l'équation

$$\frac{d \left[ (1 - \mu^2) \frac{dy_n}{d\mu} \right]}{d\mu} + n(n+1) y_n = 0;$$

or les coefficients du développement

$$(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 \dots + P_n x^n \dots,$$

qui sont entiers et rationnels par rapport à  $\mu$ , satisfont à la même équation; il en résulte que

$$y_n = A_n P_n,$$

$A_n$  étant un coefficient constant. Donc

$$y = A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2 \dots + A_n P_n \dots,$$

$$\varphi(\mu, x) = A_0 P_0 + A_1 P_1 \frac{x}{3} + A_2 P_2 \frac{x^2}{5} \dots + A_n P_n \frac{x^n}{2n+1} \dots,$$

pour  $\mu = 1$ ,

$$\varphi(1, x) = f(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{3} + A_2 \frac{x^2}{5} \dots + A_n \frac{x^n}{2n+1} \dots,$$

car les coefficients  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ , etc., sont dans ce cas égaux à 1.

Ce qui précède montre que, si l'on connaissait  $f(x)$ , on en déduirait la valeur générale  $\varphi(\mu, x)$ , en développant la première en série ascendante et multipliant les différents termes par les coefficients des termes de même rang dans le développement de  $(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , lesquels coefficients peuvent se calculer par la formule

$$P_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n}.$$

Si nous posons aussi

$$\psi(1, x) = F(x),$$

$f(x)$  et  $F(x)$  doivent satisfaire aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{x_1} F\left(\frac{b}{x_1}\right) = h, \\ \frac{a^2}{x} f\left(\frac{a}{x}\right) + b F\left(\frac{x_1}{b}\right) = g, \end{cases}$$

ou, en remplaçant  $x_1$  par  $c - x$  dans la première, et  $x$  par  $c - x$  dans la deuxième,

$$(3) \quad af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x} F\left(\frac{b}{c-x}\right) = h,$$

$$(4) \quad \frac{a^2}{c-x_1} f\left(\frac{a}{c-x_1}\right) + b F\left(\frac{x_1}{b}\right) = g.$$

Dans ces équations,  $x$  peut varier depuis  $-a$  jusqu'à  $+a$ , et  $x_1$  depuis  $-b$  jusqu'à  $+b$ . Posant

$$\frac{x_1}{b} = \frac{b}{c-x'},$$

la nouvelle variable  $x'$  pourra prendre les valeurs comprises entre  $+a$  et  $-a$ , et l'on pourra la remplacer par  $x$ ,

$$(5) \quad \begin{cases} af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x} F\left(\frac{b}{c-x}\right) = h, \\ \frac{a^2(c-x)}{c^2 - b^2 - cx} f\left(\frac{ac - ax}{c^2 - b^2 - cx}\right) + b F\left(\frac{b}{c-x}\right) = g. \end{cases}$$

Éliminant la fonction  $F$ , divisant par  $a$ , changeant  $x$  en  $ax$ , et remplaçant  $\frac{c^2 - b^2}{a}$  par  $k$ , l'équation à intégrer prend la forme définitive

$$(6) \quad f'(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{h}{a} - \frac{gb}{ac - a^2 x}.$$

Posons d'abord

$$f'(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{h}{a};$$

on satisfait à cette équation par la série infinie

$$f(x) = \frac{h}{a} \left[ \psi_0(x) + b \psi_1(x) + b^2 \psi_2(x) - \dots + b^n \psi_n(x) \dots \right],$$

pourvu que les fonctions  $\psi$  satisfassent aux conditions exprimées par

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_{(n+1)}(x) = \frac{1}{k - cx} \psi_n\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right);$$

on satisfait à la deuxième, en posant

$$\psi_n(x) = \frac{1}{A_n + B_n x},$$

si  $A_n$  et  $B_n$  satisfont, quel que soit  $n$ , aux équations

$$A_{n+1} = k A_n + c B_n, \quad - B_{n+1} = c A_n + a B_n.$$

En éliminant  $B_n$  et  $B_{n+1}$  entre ces deux équations et celle que l'on obtient en changeant  $n$  en  $n + 1$  dans la première, on tombe sur l'équation du deuxième ordre

$$(7) \quad A_{n+2} + (a - k) A_{n+1} + b^2 A_n = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$A_n = p \alpha^n + q \alpha'^n;$$

$\alpha$  et  $\alpha'$  étant les racines de l'équation

$$\alpha^2 + (a - k) \alpha - b^2 = 0,$$

on en conclut

$$B_n = p \frac{\alpha - k}{c} \alpha^n + q \frac{\alpha' - k}{c} \alpha'^n.$$

Les valeurs de  $p$  et  $q$  déterminées par la condition

$$\psi_0(x) = 1$$

sont

$$p = \frac{k - \alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad q = \frac{-k + \alpha}{\alpha - \alpha'};$$

donc

$$\psi_n(x) = \frac{\alpha - \alpha'}{(\alpha + a - cx)\alpha^n - (\alpha' + a - cx)\alpha'^n};$$

en tenant compte des relations

$$\alpha + \alpha' = k - a, \quad \alpha\alpha' = b^2, \quad (\alpha - k)(\alpha' - k) = c^2,$$

$$f(x) = \frac{h(\alpha - \alpha')}{a} \sum \frac{b^n}{(\alpha + a - cx)\alpha^n - (\alpha' + a - cx)\alpha'^n},$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de  $n$ .

On trouve de même qu'on satisfait à

$$f(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = -\frac{gb}{ac - a^2x},$$

par

$$f(x) = \frac{g(\alpha - \alpha')}{a} \sum \frac{b^{n+1}}{[c - (\alpha' + a)x]\alpha^{n+1} - [c - (\alpha + a)x]\alpha'^{n+1}}.$$

On a donc une solution particulière de l'équation (6), en prenant

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h(\alpha - \alpha')}{a} \sum \frac{b^n}{(\alpha + a - cx)\alpha^n - (\alpha' + a - cx)\alpha'^n} \\ &\quad - \frac{g(\alpha - \alpha')}{a} \sum \frac{b^{n+1}}{[c - (\alpha' + a)x]\alpha^{n+1} - [c - (\alpha + a)x]\alpha'^{n+1}}; \end{aligned}$$

la valeur correspondante de  $F(x)$  se déduit de l'équation (4), en changeant  $x$ , en  $bx$ ,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{ga(\alpha - \alpha')}{b} \sum \frac{b^n}{(b^2 + a\alpha - bcx)\alpha^n - (b^2 + a\alpha' - bcx)\alpha'^n} \\ &\quad - \frac{ha(\alpha - \alpha')}{b} \sum \frac{b^{n+1}}{[bc - (b^2 + a\alpha')x]\alpha^{n+1} - [bc - (b^2 + a\alpha)x]\alpha'^{n+1}}. \end{aligned}$$

Le premier cas que nous allons examiner est celui où les deux sphères sont en contact; dans ce cas,  $\alpha = \alpha'$ , et nos formules deviennent illusoires. Dans ce cas,

$$A_n = p\alpha^n + q\alpha'^n$$

n'est plus l'intégrale générale de l'équation (7); si l'on prend

$$A_n = p\alpha^n + nq\alpha^{n-1},$$

on arrive alors, en remarquant que, dans ce cas, les deux constantes sont égales, à

$$f(x) = bh \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{b+n(1+b) - n(1+b)x} \\ - \sum \frac{1}{(1+b)(1+n) - [1+(1+b)n]x} \end{array} \right\} \quad [*],$$

en faisant  $\alpha = 1$ .

Cette solution particulière est celle qui convient au problème qui nous occupe; en effet, la solution générale peut être mise sous la forme  $f(x) + \frac{\psi(x)}{1-x}$ , et, en substituant et tenant compte de ce que  $f(x)$  est solution, on arrive à

$$\psi(x) = \psi \left[ \frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)} \right].$$

Considérons la suite de valeurs

$$x_1, \quad x_2 = \frac{1+b-x_1}{b+(1+b)(1-x_1)}, \quad x_3 = \frac{1+b-x_2}{b+(1+b)(1-x_2)}, \dots;$$

on a

$$\psi(x_n) = \psi(x_1).$$

Or la limite de ces valeurs est évidemment l'une des racines de l'équation

$$x = \frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)},$$

lesquelles sont égales à 1. Donc

$$\lim x_n = 1$$

et

$$\psi(x) = \psi(1) = \text{const.}$$

[\*] On arrive au même résultat en cherchant, par la règle ordinaire, la valeur vers laquelle tend le terme général de la première série, lorsque  $\alpha$  et  $\alpha'$  tendent vers la valeur commune,  $b$  et  $c$  vers la valeur  $1+b$ .



Ainsi, la solution générale est

$$f(x) + \frac{c}{1-x};$$

si  $c$  n'était pas nulle, la fonction deviendrait infinie, ce qui est inadmissible dans le cas qui nous occupe.

Revenons à la valeur de  $f(x)$  et cherchons à remplacer

$$\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x}$$

par une intégrale définie de la forme

$$A \int_0^1 t^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}+n} dt,$$

en donnant à  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A$  des valeurs indépendantes de  $n$ ; nous trouvons pour solution unique

$$1+b = \beta, \quad -1 = \alpha, \quad 1+b = \gamma,$$

$$-1-b = \delta, \quad A = \frac{1}{(1+b)(1-x)};$$

substituant,

$$\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} = \frac{1}{(1+b)(1-x)} \int_0^1 t^{\frac{-1+(1+b)x}{(1+b)(1-x)}+n} dt.$$

On trouve de même

$$\frac{1}{(1+b)(1+n)-[1+(1+b)n]x} = \frac{1}{(1+b)(1-x)} \int_0^1 t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}+n} dt;$$

de sorte que, en remarquant que  $1+t+t^2\dots$  est le développement convergent de  $\frac{1}{1-t}$ , la valeur de  $f(x)$  peut se mettre sous la forme de l'intégrale définie suivante :

$$f(x) = \frac{bh}{(1+b)(1-x)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}} \left( t^{\frac{1}{1+b}} - 1 \right)}{1-t} dt.$$

La valeur de  $F(x)$  se tire de l'équation (4) en changeant dans  $f(x)$

$x$  en  $\frac{1}{1+b-x}$ , et remplaçant ensuite  $x$  par  $bx$ ,

$$F(x) = \frac{h}{b(1+b)(1-x)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{x}{1+b}(1-x)} \left( t^{-\frac{b}{1+b}} - 1 \right)}{1-t} dt.$$

Si l'on désigne par  $e$  la quantité d'électricité contenue sur la sphère de rayon 1, on a

$$e = \iint \gamma a^2 d\mu d\omega = 4\pi f_0(x),$$

en se rappelant les développements de  $\gamma$  et  $f(x)$ , ainsi que la relation

$$\iint P_n d\mu d\omega = 0, \quad \text{excepté pour } n = 0.$$

De même, la quantité d'électricité contenue sur la sphère du rayon  $b$ ,

$$e_1 = 4\pi b^2 F_0(x);$$

de sorte que la masse totale qui seule est déterminée,

$$E = 4\pi [f_0(x) + b^2 F_0(x)],$$

en mettant à la place de  $f_0(x)$  et  $F_0(x)$  leurs valeurs,

$$E = \frac{4\pi bh}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} + t^{-\frac{b}{1+b}} - 2}{1-t} dt,$$

équation qui pourrait servir à déterminer la constante  $h$ .

Nous allons actuellement étudier la densité électrique aux différents points des deux sphères, et d'abord au point de contact.

La densité sur la sphère de rayon 1 est donnée par la formule

$$\gamma = 2x \frac{df(x)}{dx} + f(x),$$

à la condition de faire  $x = 1$  après la différentiation.

En posant  $t = \theta^{1-x}$ , développant en série et intégrant, on trouve

$$f(x) = \frac{h}{1+b} \left[ 1 + \frac{1-x}{2} + A(1-x)^2 + \dots \right],$$

et, par suite,

$$2x \frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0 \quad \text{pour } x = 1.$$

On arriverait au même résultat en calculant la densité sur l'autre sphère.

On peut d'ailleurs démontrer que ce résultat doit se reproduire pour deux corps quelconques en contact. En effet, si par le point de contact on imagine la normale commune, qu'on prenne sur cette normale et de part et d'autre deux points infiniment rapprochés du point de contact, et que par ces points on imagine deux plans perpendiculaires à la normale, on partage les deux surfaces en quatre parties dont deux sont infiniment petites par rapport aux deux autres. Appelons P et Q les actions des deux grands segments suivant la normale en A, R la composante de l'action des autres corps; nous savons d'ailleurs que les actions des deux petits segments sont exprimées par  $2\pi\varepsilon$  et  $2\pi\varepsilon'$ ,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  étant les densités sur les deux surfaces au point de contact: chacune de ces actions varie infiniment peu de l'un des points à l'autre; on doit donc avoir pour l'équilibre de ces points,

$$P - Q - R + 2\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon' = 0,$$

$$P - Q - R - 2\pi\varepsilon - 2\pi\varepsilon' = 0,$$

ce qui exige que

$$\varepsilon + \varepsilon' = 0,$$

c'est-à-dire que la densité totale soit nulle au point de contact.

Si l'on venait à soustraire les deux sphères à leur influence mutuelle, les densités deviendraient uniformes sur chaque sphère; on obtiendra ces densités uniformes A et B en faisant  $x = 0$  dans  $f'(x)$  et  $F(x)$ . Prenons leur rapport

$$\frac{B}{A} = \frac{\int_0^1 \frac{t \frac{b}{1+b} - 1}{1-t} dt}{b^2 \int_0^1 \frac{t \frac{1}{1+b} - 1}{1-t} dt};$$

( 37 )

en faisant, dans la relation connue

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1} - t^{n-m-1}}{1-t^n} dt = \frac{\pi}{\operatorname{tang} \frac{m\pi}{n}},$$

$$n = 1, \quad m = \frac{1}{1+b},$$

on exprime l'une des intégrales au moyen de l'autre, et le rapport précédent devient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{b^2} + \frac{\pi \cot \frac{\pi}{1+b}}{b^2 \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt}$$

On voit facilement sur la première forme du rapport  $\mathcal{E}$  qu'il est plus grand que 1 si  $b < 1$ ; ainsi la densité moyenne est plus grande sur la plus petite sphère, quoique la quantité totale d'électricité soit plus petite, ainsi qu'on va le voir. En effet, la différence

$$D = 4\pi b^2 B - 4\pi A = \frac{4\pi^2 b h}{1+b} \cot \frac{\pi}{1+b}$$

est positive lorsque  $b$  est plus grand que 1.

Cherchons la limite du rapport  $\mathcal{E}$  lorsque  $b$  diminue indéfiniment; pour cela, remarquons que

$$\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt = \frac{1+b}{b} + \int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt,$$

par conséquent,

$$\mathcal{E} = \frac{\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt}{b(1+b) + b^2 \int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt}$$

Développant les deux termes suivant les puissances de  $\frac{b}{1+b}$  et sup-

primant un facteur  $b$ , on trouve

$$\lim \varepsilon = \int_0^1 \frac{\log \frac{1}{t}}{1-t} dt = 1 + \frac{1}{4} \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449.$$

Déterminons maintenant la densité sur la sphère de rayon 1, au point diamétralement opposé à celui du contact, à l'aide de la formule

$$y = 2x \frac{df(x)}{dx} + f(x),$$

en faisant  $x = -1$  après la différentiation

$$Y = \frac{b^2 h}{4(1+b)^2} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{2(1+b)}} \left( t^{-\frac{1}{1+b}} - 1 \right)}{1-t} \log \frac{1}{t} dt.$$

Soit  $Z$  la densité au point correspondant de la seconde sphère

$$Z = \frac{h}{4b(1+b)^2} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2(1+b)}} \left( t^{-\frac{b}{1+b}} - 1 \right)}{1-t} \log \frac{1}{t} dt.$$

Lorsque les deux sphères sont égales,

$$Y = Z = \frac{h}{16} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{3}{4}} - t^{-\frac{1}{4}}}{1-t} \log \frac{1}{t} dt = Y';$$

dans ce cas, la densité moyenne sur chaque sphère devient

$$A = \frac{h}{2} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}} - 1}{1-t} dt.$$

En posant  $t^{\frac{1}{4}} = \theta$ , on trouve

$$A = h \log 2,$$

$$Y' = h \int_0^1 \frac{\log \frac{1}{\theta}}{1+\theta^2} d\theta;$$

de sorte que

$$\frac{Y'}{A} = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log \frac{1}{\theta}}{1 + \theta^2} d\theta.$$

Développant  $\frac{1}{1 + \theta^2}$  en série et intégrant, en observant que pour  $\theta = 0$ ,

$$\log \theta \cdot \theta^{2n+1} = 0,$$

et que

$$\int_0^1 \log \frac{1}{\theta} \cdot \theta^{2n} d\theta = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\frac{Y'}{A} = \frac{1}{\log 2} \left[ 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} \dots \pm \frac{1}{(2n+1)^2} \dots \right],$$

$$\frac{Y'}{A} = 1,322 \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près.}$$

Soit actuellement  $\delta$  le rapport de la densité maximum sur la sphère de rayon  $b$  à la densité moyenne sur celle de rayon  $a$ ,

$$\delta = \frac{\int_0^1 \left( t \frac{-\frac{b}{1+b} - 1}{1+b} \right) t^{-\frac{1}{2(1+b)}} \log \frac{1}{t} dt}{1-t} \cdot \frac{1}{4b^2(1+b) \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b} - 1}}{1-t} dt}.$$

Cherchons la limite de ce rapport lorsque  $b$  tend vers zéro; mettons-le d'abord sous la forme

$$\delta = \frac{\int_0^1 \left( t \frac{-\frac{b}{1+b} - 1}{1+b} \right) t^{-\frac{b}{2(1+b)}} \log \frac{1}{t} dt}{4b(1+b)^2 + 4b^2(1+b) \int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{1+b} - 1}}{1-t} dt},$$

et, pour  $b = 0$ ,

$$\lim \delta = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}} \log^2 \frac{1}{t}}{1-t} dt,$$

posant  $t = \theta^2$ , développant en série  $\frac{1}{1-\theta^2}$ , et intégrant

$$\begin{aligned} \lim \delta &= 4 \left[ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 \dots \right] \\ &= 4 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \dots \right] = 4 \left( 1 - \frac{1}{8} \right) \times 1,20206 \\ &= 4,20721. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifierait que le rapport de la plus grande densité sur la sphère de rayon  $a$  à la densité moyenne sur la même sphère, s'approche de 1 à mesure que  $b$  tend vers zéro.

En calculant les répulsions au point de contact et au point diamétralement opposé, on trouve zéro pour la première et  $4\pi Y$  pour la deuxième ( $Y$  étant la densité qui a été déterminée précédemment), comme cela résulte, en effet, du théorème de Laplace.

Occupons-nous maintenant de former la fonction  $\varphi(\mu, x)$ . Pour cela, prenons la valeur de  $f(x)$  en série, et remarquons que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} \\ &= \frac{1}{b+n(1+b)} \left\{ 1 + \frac{n(1+b)}{b+n(1+b)} x + \frac{n^2(1+b)^2}{[b+n(1+b)]^2} x^2 \dots \right\}. \end{aligned}$$

D'après la remarque faite en commençant, la partie correspondante de  $\varphi(\mu, x)$  est

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b+n(1+b)} \left\{ P_0 + P_1 \frac{n(1+b)}{b+n(1+b)} x + P_2 \frac{n^2(1+b)^2}{[b+n(1+b)]^2} x^2 \dots \right\} \\ &= \frac{1}{b+n(1+b)} \left\{ 1 - \frac{2\mu n(1+b)}{b+n(1+b)} x + \frac{n^2(1+b)^2}{[b+n(1+b)]^2} x^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ [b+n(1+b)]^2 - 2\mu n(1+b)[b+n(1+b)]x + n^2(1+b)^2 x^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = R_n; \end{aligned}$$

il faut de même remplacer

$$\frac{1}{(1+b)(1+n) - [1+(1+b)n]x},$$

par

$$\left\{ (1+b)^2(1+n)^2 - 2\mu(1+b)(1+n)[1+(1+b)n]x + [1+(1+b)n]^2 x^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = R'_n,$$

de sorte que l'on aura

$$\varphi(\mu, x) = b\hbar (R_0 - R'_0 + R_1 - R'_1 \dots + R_n - R'_n \dots).$$

( 41 )

Cette valeur convient à la grande ou à la petite sphère, selon qu'on fait  $b <$  ou  $> 1$ . Si l'on voulait avoir  $\psi(\mu, x)$ , il faudrait, dans  $\varphi(\mu, x)$ , mettre  $\frac{1}{b}$  à la place de  $b$ , et diviser le résultat par  $b$ .

Au moyen de cette formule et de

$$y = 2x \frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

Poisson a calculé les densités électriques à différentes distances du point de contact et dans différentes hypothèses, sur le rapport entre les rayons des deux sphères.

Coulomb a trouvé que la densité est sensiblement nulle jusqu'à une assez grande distance du point de contact; on trouve, dans le calcul, une confirmation de ce résultat. Car, en développant  $y$  suivant les puissances de  $1 - \mu$ , on trouve que les deux premiers termes manquent, de sorte que  $(1 - \mu^2)^2$  est facteur à tous les termes; or  $(1 - \mu^2)^2$  est une fraction plus petite que 0,0001 jusqu'à environ 9 degrés du point de contact.

Revenons maintenant au cas général. Les valeurs de  $f(x)$  et  $F(x)$  déjà trouvées sont

$$\begin{aligned} f(x) &= h(\alpha - \alpha') \sum \frac{b^n}{(\alpha + 1 - cx)\alpha^n - (\alpha' + 1 - cx)\alpha'^n} \\ &\quad - g(\alpha - \alpha') \sum \frac{b^{n+1}}{[c - (\alpha' + 1)x]\alpha^{n+1} - [c - (\alpha + 1)x]\alpha'^{n+1}}, \\ F(x) &= \frac{g(\alpha - \alpha')}{b} \sum \frac{b^n}{(b^2 + \alpha - bcx)\alpha^n - (b^2 + \alpha' - bcx)\alpha'^n} \\ &\quad - \frac{h(\alpha - \alpha')}{b} \sum \frac{b^{n+1}}{[bc - (b^2 + \alpha')x]\alpha^{n+1} - [bc - (b^2 + \alpha)x]\alpha'^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ces valeurs ne sont que des solutions particulières; si l'on veut avoir la valeur complète de  $f(x)$ , il faut ajouter à la précédente la solution complète de l'équation

$$f(x) = \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - x}{k - cx}\right).$$

Si nous posons

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{(1 - mx)(1 - m'x)}},$$



( 42 )

et si nous prenons pour  $m$  et  $m'$  les racines de l'équation

$$cm^2 - (1 + k)m + c = 0,$$

l'équation se réduit à

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{c-x}{k-cx}\right).$$

Il est facile de montrer que  $\psi(x)$  doit être constante; en effet, si l'on considère la suite de valeurs

$$x_1, \quad x_2 = \frac{c-x_1}{k-cx_1}, \quad x_3 = \frac{c-x_2}{k-cx_2}, \dots, \quad x_n = \frac{c-x_{n-1}}{k-cx_{n-1}}, \dots$$

on a

$$\psi(x_1) = \psi(x_n).$$

Or cette série de valeurs a une limite qui est évidemment racine de l'équation

$$x = \frac{c-x}{k-cx},$$

et n'est, par conséquent, autre qu'une des valeurs précédentes de  $m$ ; ainsi

$$\psi(x) = \psi(m) = \text{constante.}$$

Dans le cas qui nous occupe, la constante doit être nulle, sans quoi  $f(x)$  deviendrait infinie pour  $x = m$ .

Si l'on désigne la densité de la couche électrique, avant l'action mutuelle des deux corps, par  $A$  sur la sphère de rayon  $a$ , par  $B$  sur celle de rayon  $b$ , on a

$$\begin{aligned} A &= f_0(x) = \frac{h}{a} \sum \frac{b^n}{(a+a)\alpha^n - (\alpha'+a)\alpha'^n} \\ &\quad - \frac{g}{ac}(\alpha - \alpha') \sum \frac{b^{n+1}}{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}, \\ B &= \frac{ga}{b}(\alpha - \alpha') \sum \frac{b^n}{(b^2+a\alpha)\alpha^n - (b^2+a\alpha')\alpha'^n} \\ &\quad - \frac{ha}{b^2c}(\alpha - \alpha') \sum \frac{b^{n+1}}{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ces équations pourront servir à déterminer les constantes  $g$  et  $h$ .

Pour former la valeur de  $\varphi(\mu, x)$ , observons que la valeur de  $f(x)$  est un assemblage de termes de la forme  $\frac{1}{p - qx}$  : si donc

$$\frac{1}{p - qx} = \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{qx}{p} + \frac{q^2 x^2}{p^2} \dots \right).$$

la partie correspondante de  $\varphi(\mu, x)$  sera

$$\frac{1}{p} \left( P_0 + P_1 \frac{qx}{p} + P_2 \frac{q^2 x^2}{p^2} \dots \right),$$

ou

$$(p^2 - 2pq\mu x + q^2 x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

la valeur totale sera donc

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, x) &= \frac{h}{a} \sum \frac{(\alpha - \alpha') b^n}{\sqrt{A_n^2 - 2A_n(\alpha_n - \alpha'_n) c \mu x + (\alpha_n - \alpha'_n)^2 c^2 x^2}} \\ &\quad - \frac{g}{a} \sum \frac{(\alpha - \alpha') b^{n+1}}{\sqrt{(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1})^2 c^2 - 2(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}) A'_n c \mu x + A_n'^2 x^2}}, \end{aligned}$$

en faisant, pour abrégier,

$$\begin{aligned} (\alpha + a) \alpha^n - (\alpha' + a) \alpha'^n &= A_n, \\ (\alpha' + a) \alpha'^{n+1} - (\alpha + a) \alpha'^{n+1} &= A'_n; \end{aligned}$$

de meme

$$\begin{aligned} \psi(\mu, x) &= \frac{g a}{b} \sum \frac{(\alpha - \alpha') b^n}{\sqrt{(B_n^2 - 2B_n)(\alpha^n - \alpha'^n) b c \mu x + (\alpha^n - \alpha'^n)^2 b^2 c^2 x^2}} \\ &\quad - \frac{h a}{b} \sum \frac{(\alpha - \alpha') b^{n+1}}{\sqrt{(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}) b^2 c^2 - 2(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}) B'_n b c \mu x + B_n'^2 x^2}}, \\ (b^2 + a \alpha) \alpha^n - (b^2 + a \alpha') \alpha'^n &= B_n, \\ (b^2 + a \alpha') \alpha'^{n+1} - (b^2 + a \alpha) \alpha'^{n+1} &= B'_n. \end{aligned}$$

Les séries précédentes sont convergentes toutes les fois que les deux sphères ne sont pas en contact; elles sont très-convergentes dans le

(1.)

cas, le seul que nous considérerons, où le rayon  $b$  est très-petit par rapport à la distance  $c - a$ .

Prenant dans la valeur de  $f(x)$  jusqu'aux termes en  $b^3$ , il vient

$$\begin{aligned} a f(x) &= h + \frac{hba}{c^2 - b^2 - acx} + \frac{hb^2 a^2}{(c^2 - b^2)^2 - a^2 c^2 - (c^2 - b^2 - a^2) acx} \\ &+ \frac{h b^3 a^3}{D(c^2 - b^2) + a^4 b^2 - (D + a^2 b^2) acx} - \frac{gb}{c - ax} \\ &- \frac{gb^2 a}{(c^2 - a^2 - b^2)c - (c^2 - a^2) ax} - \frac{gb^3 a^2}{(D + a^2 b^2)c - [D + b^2(c^2 - b^2)] ax}, \end{aligned}$$

en faisant

$$D = (c^2 - a^2 - b^2)^2 - 2 a^2 b^2,$$

échangeant les lettres  $a$  et  $b$ , ainsi que  $g$  et  $h$ ,

$$\begin{aligned} b F(x) &= g + \frac{gab}{c^2 - a^2 - bcx} + \frac{ga^2 b^2}{(c^2 - a^2)^2 - b^2 c^2 - (c^2 - a^2 - b^2) bcx} \\ &+ \frac{ga^3 b^3}{D(c^2 - a^2) + b^4 a^2 - (D + a^2 b^2) bcx} - \frac{ha}{c - bx} \\ &- \frac{ha^2 b}{(c^2 - a^2 - b^2)c - (c^2 - b^2) bx} - \frac{ha^3 b^2}{(D + a^2 b^2)c - [D + a^2(c^2 - a^2)] bx}, \end{aligned}$$

négligeant dans chaque terme la partie qui dépend de  $b^3$ ,

$$\begin{aligned} a f(x) &= h + \frac{hab}{c^2 - acx} + \frac{ha^2 b^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - acx)} - \frac{gb}{c - ax} - \frac{gb^2 a}{(c^2 - a^2)(c - ax)}, \\ b F(x) &= g + \frac{gab}{c^2 - a^2} + \frac{gab^2 cx}{(c^2 - a^2)^2} + \frac{ga^2 b^2}{(c^2 - a^2)^2} - \frac{ha}{c} - \frac{habx}{c^2} - \frac{hab^2 x^2}{c^3} \\ &- \frac{ha^2 b}{(c^2 - a^2)c} - \frac{ha^2 b^2 x}{(c^2 - a^2)^2} - \frac{ha^3 b^2}{(c^2 - a^2)^2 c}; \end{aligned}$$

A et B étant les densités primitives de l'électricité sur les deux sphères. on a

$$\begin{aligned} a A &= h \left[ 1 + \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2 (c^2 - a^2)} \right] - \frac{g b}{c} \left( 1 + \frac{ab}{c^2 - a^2} \right), \\ b B &= - \frac{ha}{c} \left[ 1 + \frac{ab}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{(c^2 - a^2)^2} \right] + g \left[ 1 + \frac{ab}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{(c^2 - a^2)^2} \right], \end{aligned}$$

on en tire

$$h = a A + \frac{b^2 B}{c},$$

$$g = \frac{a^2 A}{c} + \left( 1 - \frac{ab}{c^2 - a^2} + \frac{ab}{c^2} \right) b B,$$

et, substituant dans  $af(x)$  et  $bF(x)$ , en négligeant toujours les termes en  $b^3$ ,

$$af(x) = a A + \frac{b^2 B}{c} - \frac{b^2 B}{c - ax},$$

$$F(x) = B - \frac{a^2 A}{c^2} x - \frac{a^2 b A}{c^3} x^2,$$

et, opérant d'après les règles données précédemment,

$$a\varphi(\mu, x) = a A + \frac{b^2 B}{c} - \frac{b^2 B}{\sqrt{c^2 - 2ca\mu x + a^2 x^2}},$$

$$\gamma = A + \frac{b^2 B}{ac} - \frac{b^2 B (c^2 - a^2)}{a(c^2 - 2ca\mu + a^2)^{\frac{3}{2}}};$$

de même,

$$\psi(\mu_1, x) = B - \frac{a^2 A}{c^2} \mu_1 x + \frac{a^2 b A}{2c^2} (1 - 3\mu_1^2) x^2,$$

$$z = B - \frac{3a^2 A}{c^2} \mu_1 + \frac{5a^2 b A}{2c^3} (1 - 3\mu_1^2).$$

Si nous supposons que la sphère de rayon  $b$  ait été primitivement à l'état naturel,

$$B = 0 \quad \text{et} \quad z = - \frac{3a^2 A}{c^2} \left( \mu_1 + \frac{3\mu_1^2 - 1}{2} \frac{5b}{3c} \right),$$

la comparaison de cette valeur avec la valeur générale montre que la densité sur la sphère de rayon  $b$  est égale, dans le cas où celle-ci contenait primitivement de l'électricité, à celle qui existait dans le cas où l'état primitif de la sphère était l'état naturel, augmentée d'une quantité constante qui est la densité primitive  $B$ . En faisant successivement

$$\mu_1 = + 1 \quad \text{et} \quad \mu_1 = - 1,$$

on trouve que l'électricité qui se trouve sur la partie en regard de la

sphère de rayon  $a$  est de signe contraire à celle de cette dernière, tandis que celle de la partie opposée est de même signe. Le cercle de séparation dont la position est donnée par

$$\mu_1 + \frac{3\mu_1^2 - 1}{2} \frac{5b}{3c} = 0,$$

est sensiblement un grand cercle.

Lorsque A et B étant de même signe, on a

$$\frac{3\Lambda a^2}{c^2} \left( 1 + \frac{5b}{3c} \right) > B,$$

l'électricité au point qui répond à  $\mu_1 = 1$  est de signe contraire à B, et, par suite, à celle qui existe dans la partie opposée; le cercle de séparation est donné par l'équation

$$\frac{3\Lambda a^2}{c^2} \left( \mu_1 + \frac{3\mu_1^2 - 1}{2} \frac{5b}{3c} \right) = B.$$

Lorsque, au contraire, on a

$$\frac{3\Lambda a^2}{c^2} \left( 1 + \frac{5b}{3c} \right) < B,$$

l'électricité est de même signe dans toute l'étendue de la sphère.

Lorsque A et B sont de signes contraires, l'électricité au point correspondant à  $\mu_1 = 1$  est toujours de même signe que B, c'est-à-dire de signe contraire à A. Au point opposé de la même sphère, elle est de signe contraire à A ou de même signe, suivant que

$$B > \text{ ou } < \frac{3\Lambda a^2}{c^2} \left( 1 - \frac{5b}{3c} \right).$$

Maintenant, supposons que la sphère de rayon très-petit  $b$  soit mise en contact avec une autre sphère électrisée positivement; la quantité d'électricité qu'elle lui prendra sera représentée par  $A \frac{\pi^2}{b}$ , A étant ce qui restera: la densité au point correspondant à  $\mu = 1$  sera exprimée par

$$A \left( \frac{\pi^2}{b} - \frac{3a^2}{c} \right);$$

ce qui montre que cette densité, nulle lors du contact, devient d'abord négative, puis de nouveau nulle lorsque

$$c - a = \left( \frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1 \right) a,$$

et enfin positive pour

$$c - a > \left( \frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1 \right) a.$$

*Vu et approuvé.*

Le 26 avril 1851.

LE DOYEN PAR INTÉRIM DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
DUMAS.

*Permis d'imprimer,*

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE LA SEINE,  
CAYX.