N° D'ORDRE
402.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. A.-E. PELLET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Clermont.

1re THÈSE. — Sur la théorie des équations algébriques.
2e THÈSE. — Sur la théorie des surfaces.

Soutenues le 14 Mars 1878, devant la Commission d'Examen.

MM. BRIOT, *Président.*
BOUQUET, } *Examinateurs.*
DARBOUX, }

CLERMONT-FERRAND

FERDINAND THIBAUD, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Rue Saint-Genès, 8-10.

1878.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
	DELAFOSSE.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	N	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

CLERMONT-FERRAND. — IMPRIMERIE DE FERDINAND THIBAUD, RUE SAINT-GENÈS, 8-10.

ERRATA.

Page 12, ligne 8, au lieu de *factions*, lisez *facteurs*.

Page 12, ligne 23, au lieu de

$$f'\left(x, Z_{\frac{m}{\mu}} - 1\right)$$

lisez

$$f'\left(x, Z_{\frac{m}{\mu}-1}\right)$$

Page 13, ligne 5, rétablir ainsi la suite :

$$x_i,\ \theta_1(x_i)\ldots,\ \theta_{m-1}(x_i).$$

Page 16, ligne 12, au lieu de *il a une quantité*, lisez *il y a une quantité*.

Page 16, dernière ligne, rétablir ainsi l'équation :

$$(\alpha - x_i)\,[\alpha - \psi_1(x_i)]\ldots\ldots[\alpha - \psi_{\mu-1}(x_i)] = z_i$$

Page 17, ligne 3, au lieu de z_1 lisez z_i.

Page 17, ligne 6, *id*.

Page 30, ligne 8, lisez :

$$(2)\ \left[x''^2_{2uv} - x''_{2u^2}\,x''_{2v^2} + y''^2_{2uv} - y''_{2u^2}\,y''_{2v^2}\right]$$

Page 41, ligne 1, effacez sin 2ϕ ; ligne 3, au lieu de :

$(B^2 - B'^2)\sin 2\phi$, lisez : $2\,(B^2 - B'^2)\sin 2\phi$.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA THÉORIE

DES

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

1. Dans son grand Traité des substitutions et des équations algébriques, M. Camille Jordan commence par établir les propriétés des groupes de substitutions et ensuite, suivant en cela la voie tracée par Galois, il en déduit les propriétés correspondantes des équations algébriques. On pourrait ce semble, au moins pour les propriétés générales, comme celles des équations simples et de la décomposition d'une équation en équations simples, procéder inversement. C'est le but que je me suis proposé dans ce travail. La méthode repose sur le théorème suivant :

$\theta(x)$ étant en fonction rationnelle de x, soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle prend lorsqu'on remplace x successivement par les m racines de l'équation $f(x) = 0$ irréductible et de degré m ; μ est un diviseur de m et ces μ valeurs sont racines d'une équation irréductible.

Je ne sais si ce théorème a déjà été énoncé ; mais j'espère qu'on trouvera que la démonstration que j'en donne est rigoureuse. Ce théorème étant admis, le reste s'en déduit avec facilité.

Ainsi dans ce travail, il n'y a rien de nouveau comme résultat, à moins que ce ne soit le théorème énoncé plus haut ; j'ai pensé qu'un certain intérêt s'attacherait à des démonstrations nouvelles dans ces théories si difficiles des substitutions et des équations algébriques, moins utiles assurément que celles du calcul infinitésimal, mais qui ne leur cèdent pas au point de vue de la beauté.

2. Nous rappellerons d'abord quelques définitions et théorèmes. Une fonction *rationnelle* de plusieurs quantités est une fonction de ces quantités qui peut s'exprimer par les quatre opérations : addition, soustraction, multiplication et division, répétées un nombre fini de fois; soient : a_1, a_2, a_3, $\ldots a_k$, k quantités non commensurables regardées comme connues; toute fonction rationnelle de ces quantités et des nombres ordinaires est dite *rationnelle actuellement*, ou simplement rationnelle; toute quantité ne pouvant pas s'exprimer rationnellement au moyen des k quantités a_1, a_2, $\ldots a_k$ est actuellement *irrationnelle*. Nous supposons que parmi les k quantités $a_1, \ldots a_k$ aucune ne puisse s'exprimer rationnellement en fonction des autres, sans quoi on pourrait diminuer leur nombre. Dans le cas où aucune quantité n'est donnée spécialement, les seules quantités rationnelles sont les nombres entiers et fractionnaires; les irrationnelles obtenues par des extractions successives de racines effectuées sur des nombres commensurables, se désignent ordinairement sous le nom d'*irrationnelles* arithmétiques.

Plus généralement, plusieurs quantités étant considérées comme connues, les irrationnelles racines d'équations algébriques dont les coefficients sont rationnels s'appellent irrationnelles algébriques.

Une fonction entière de z, $f(z)$, à coefficients rationnels est dite irréductible, lorsqu'elle n'admet aucun diviseur rationnel, c'est-à-dire à coefficients rationnels. Une équation est dite irréductible, lorsque son premier membre est une fonction irréductible. Cela posé, on a le théorème suivant :

Si $f(z)=0$ est une équation irréductible, $F(z)$ une fonction rationnelle et que l'équation $F(z)=0$ admette une racine z de $f(z)=0$, elle admettra aussi toutes les autres. (Serret, *Alg. sup.*, p. 215).

3. Une équation actuellement irréductible peut se réduire lorsqu'on admet à figurer parmi les quantités connues certaines quantités qui n'étaient pas d'abord regardées comme telles.

Ainsi, l'équation $x^4+1=0$, irréductible lorsqu'on ne regarde comme connus que les nombres rationnels, se décompose en deux équations $x^2-\sqrt{2}\,x+1=0$ et $x^2+\sqrt{2}\,x+1=0$ lorsqu'on admet $\sqrt{2}$ à figurer parmi les quantités connues. Lorsque nous conviendrons de regarder comme connue, une certaine irrationnelle, nous dirons, suivant l'usage, que nous *adjoignons* cette quantité aux quantités connues.

Soient $\varphi(z)=0$ une équation irréductible, et $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{m-1}$ ses m racines; soit en outre $f(z, z_0)$ une fonction entière de z, à coefficients fonctions rationnelles de z_0, irréductible après l'adjonction de z_0; $f(z, z_1) \ldots f(z, z_{m-1})$, sont également irréductibles lorsqu'on adjoint respectivement $z_1\ z_2 \ldots z_{m-1}$, aux quantités connues; et si la fonction entière $F(z, z_0)$ est divisible par $f(z, z_0)$, $F(z, z_1)$ le sera par $f(z, z\ )$, $F(z, z_2)$ par $f(z, z_2)$ et ainsi des autres.

Si $f(z, z_i)$ n'est pas irréductible, soit $\beta(z, z_i)$ un de ses diviseurs; ζ étant regardée comme une indéterminée, effectuons la division des polynômes $f(z, \zeta)$, $\beta(z, \zeta)$ et désignons par $\wedge(z, \zeta)$, $\theta(z, \zeta)$ le quotient et le reste de cette division; on aura :

$$f(z, \zeta) = \beta(z, \zeta)\ \wedge(z, \zeta) + \theta(z, \zeta)$$

et d'après notre hypothèse, on a identiquement

$$\theta(z, z_0) = 0\ ;$$

Car le polynôme $\theta(z, \zeta)$ est au plus du degré μ_{-1} en z, μ étant le degré β, et la précédente équation est satisfaite par chacune des μ racines de $\beta(z, z_0)=0$. Ainsi, dans le polynôme $\theta(z, \zeta)$ les coefficients des diverses puissances de z doivent s'annuler pour $\zeta = z_0$; par conséquent, ces coefficients s'annuleront aussi, si l'on remplace ζ par une quelconque des racines de l'équation $\varphi(z)=0$, puisqu'elle est supposée irréductible.

La première partie du théorème est donc démontrée; pour démontrer la seconde partie, on remplacerait dans $F(z, z_0)$ et $f(z, z_0)$, z_0 par ζ et on effectuerait la division comme précédemment; on verrait que le reste est identiquement nul pour $\zeta = z_0$, et que par suite, il est nul aussi lorsqu'on y remplace ζ par une autre racine de $\varphi(z)=0$.

4. Voici maintenant un théorème qui nous sera fort utile :

$\theta(x)$ étant une fonction rationnelle de x, soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle prend lorsqu'on remplace x successivement par les m racines de l'équation $f(x)=0$ irréductible et de degré m; μ est un diviseur de m et ces μ valeurs sont racines d'une équation irréductible.

Désignons par $x_0, x_1 \ldots x_{m-1}$ les m racines de $f(x)=0$. Celles de ces racines qui donnent pour $\theta(x)$ la valeur $\theta(x_0)$, satisfaisant à la fois aux deux équations $f(x)=0$ et $\theta(x)-\theta(x_0)=0$, appartiennent au plus grand commun diviseur des premiers membres de ces équations, et réciproquement les racines de ce plus grand commun diviseur égale à 0 satisfont à la fois aux deux équations précédentes. Soit $\chi[x, \theta(x_0)]$ ce plus grand commun diviseur, je dis que $\chi[x, \theta(x_1)]$ sera le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $\theta(x)-\theta(x_1)$. En effet, $\chi[x, \theta(x_1)]$ divise $f(x)$ et $\theta(x)-\theta(x_1)$ d'après le n° 3. De plus il n'y a pas de polynôme de degré supérieur a $\chi[x, \theta(x_1)]$ divisant à la fois $f(x)$ et $\theta(x)-\theta(x_1)$, car on en déduirait d'après le théorème qui fait l'objet de ce n° 3 un polynôme de degré supérieur à $\chi[x, \theta(x_0)]$ divisant $f(x)$ et $\theta(x)-\theta(x_0)$. Maintenant si $\chi[x, \theta(x_0)]=0$ et $\chi[x, \theta(x_1)]=0$ ont une racine commune, elles ont toutes leurs racines communes. En effet, la racine commune appartient à la fois à $f(x)=0$ et à $\theta(x)-\theta(x_0)=0$ d'une part; à $f(x)=0$ et $\theta(x)-\theta(x_1)=0$ d'autre part; or les deux équations $\theta(x)-\theta(x_0)=0$ et $\theta(x)-\theta(x_1)=0$ ne peuvent avoir de racine commune que dans le cas où $\theta(x_0)=\theta(x_1)$. Et alors $\chi[x, \theta(x_0)]=\chi[x, \theta(x_1)]$.

Il résulte de ce qui précède que les m racines de $f(x)=0$ se partagent en $\frac{m}{\nu}$ groupes de ν racines, ν étant le degré de $\chi[x, \theta(x_0)]$; les racines de chaque groupe donnent la même valeur pour $\theta(x)$ et cette valeur varie d'un groupe à l'autre.

Si l'on adjoint $\theta(x_0)$ aux quantités connues, $\chi[x, \theta(x_0)]$ devient un polynôme rationnel; ce polynôme est irréductible. En effet, s'il admettait un diviseur $\chi_1[x, \theta(x_0)]$ à coefficients fonctions rationnelles de $\theta[x_0)$, $\chi(x, \theta(x_1)]$ admettrait le diviseur $\chi_1[x, \theta(x_1)]$. Or soient $y_0, y_1 \ldots\ldots\ldots y_{\mu-1}$ les μ valeurs de $\theta(x)$, μ désignant le rapport $\frac{m}{\nu}$. Ces μ valeurs sont racines d'une équation à coefficients rationnels; car on a:

$$y_0^n + y_1^n + \ldots + y^n_{\mu-1} = \frac{1}{\nu}\left[\theta(x_0)^n + \theta(x_1)^n + \ldots + \theta(x_{m-1})^n\right]$$

et le second membre fonction symétrique des racines de l'équation $f(x)=0$ est rationnel; et les coefficients de l'équation en y, sont des fonctions entières des μ valeurs qu'il acquiert lorsqu'on donne à n successivement les μ valeurs $1, 2 \ldots \mu$. D'après cela, le produit $\chi_1(x, y_0)\ \chi_1(x, y_1)$ $\ldots \chi_1(x, y_{\mu-1})$ serait rationnel et diviserait le polynôme $f(x)$, tout en étant de degré inférieur, ce qui est impossible, puisque $f(x)$ est supposé irréductible.

Enfin, l'équation qui a pour racines les μ valeurs $y_0, y_1, \ldots y_{\mu-1}$ est irréductible. En effet, si elle ne l'était pas, soit μ' le degré de l'un de ses diviseurs, et $y_0, y_1, \ldots y_{\mu'-1}$ ses μ' racines. Le produit :

$$\chi(x, y_0)\,\chi(x, y_1)\ldots\chi(x, y_{\mu'-1})$$

aurait ses coefficients rationnels et diviserait $f(x)$, tout en étant de degré inférieur.

Ainsi, non-seulement, le théorème est démontré, mais encore on a la proposition suivante qui le complète :

A chacune des μ valeurs distinctes qu'acquiert la fonction $\theta(x)$ lorsqu'on remplace x par les diverses racines de l'équation $f(x) = 0$, correspond un diviseur de $f(x)$, à coefficients fonctions rationnelles de la valeur de $\theta(x)$ considérée; et ce diviseur est irréductible, si l'on ne considère comme connues que les quantités avec lesquelles ses coefficients sont formés.

5. Le théorème peut s'étendre à une fonction d'un nombre quelconque de racines d'une équation $f(x) = 0$, irréductible ou non, pourvu qu'elle n'ait pas de racines égales. Pour cela nous nous appuierons sur un théorème fondamental dans la théorie, dû à Lagrange. Soit : $V_0 = \varphi(x_0, x_1 \ldots x_{m-1})$ une fonction rationnelle des m racines de l'équation $f(x) = 0$, pouvant acquérir par les permutations des racines $1.2.3\ldots m$ valeurs distinctes; par exemple, on peut prendre :

$$V_0 = M_0 x_0 + M_1 x_1 + \ldots + M_{m-1} x_{m-1},$$

$M_0, M_1, \ldots M_{m-1}$ étant des quantités rationnelles, ou même si l'on veut des nombres entiers; il y a une infinité de systèmes de valeurs de ces coefficients, tels que V_0 acquière $1.2.3\ldots m$ valeurs distinctes par les permutations des racines. Les $1.2.3\ldots m$ valeurs de V sont racines d'une équation à coefficients rationnels, $\pi(V) = 0$, de degré $1.2.3\ldots m$ qui peut être réductible. Chacune des m racines $x_0, x_1, \ldots x_{m-1}$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de l'une des valeurs de V (Serret, *Alg. sup.*, t. II, p. 413); par suite, les diverses valeurs de V peuvent s'exprimer rationnellement en fonction l'une de l'autre. $\pi(V) = 0$ se décompose en facteurs irréductibles d'égal degré, et ce degré est indépendant de la fonction prise pour V, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions posées.

Soit F (V), un des diviseurs irréductibles de Π (V); V est appelée la *fonction résolvante* et F (V) = 0 l'équation *résolvante*. Le degré (N) de l'équation F (V) = 0 est appelé l'*ordre* de l'équation $f(x) = 0$ (Voir Serret, *Alg. sup.* et Camille Jordan, *Traité des substitutions*).

Soit $x_0 = \psi_0(V_0)$; on a : $f[\psi_0(V_0)] = 0$. Par suite :

$$f[\psi_0(V)] = 0$$

admet toutes les racines de l'équation F (V) = 0, puisque celle-ci est irréductible. Ainsi les diverses valeurs qu'acquiert la fonction $\psi_0(V)$, lorsqu'on substitue à V les diverses racines de F (V) = 0, sont racines de $f(x) = 0$. Si donc $f(x) = 0$ est irréductible, les valeurs distinctes comprises dans la suite $\psi_0(V_0)$, $\psi_0(V_1)$ ... $\psi_0(V_{N-1})$ sont au nombre de m, degré de $f(x) = 0$, et N est un multiple de m. Si $f(x)$ n'est pas irréductible, soit :

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_i(x),$$

$f_1(x), \ldots f_i(x)$ étant des polynômes entiers irréductibles. Si x_0 est racine du facteur $f_1(x)$ égalé à 0 par exemple, $\psi_0(V)$ prend par la substitution à V des diverses racines de l'équation F (V) = 0, des valeurs égales aux diverses racines de $f_1(x) = 0$; et le degré de F (V) est un multiple des degrés des divers polynômes $f_1(x), f_2(x), \ldots f_i(x)$. Bien plus, le degré de F (V) est un multiple des degrés des équations résolvantes des diverses équations.

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0 \ldots\ldots f_i(x) = 0.$$

Soient en effet V′ une fonction résolvante de l'équation $f_1(x) = 0$, et $F_1(V') = 0$ l'équation résolvante. V_0' est une fonction rationnelle de V_0; soit $V_0' = \pi_0(V_0)$; on a : $F_1[\pi_0(V_0)] = 0$. Donc $F_1[\pi_0(V)] = 0$ admet toutes les racines de l'équation F (V) = 0. Donc $\pi_0(V)$ acquiert par la substitution à V des diverses racines de l'équation F (V) = 0 des valeurs égales aux racines de $F_1(V') = 0$, et puisque celle-ci est irréductible, le nombre des valeurs distinctes de $\pi(V)$ est égal au degré de $F_1(V') = 0$. Toutes ces propositions sont des corollaires très-simples du numéro précédent.

6. Soit maintenant :

$$z_0 = \Pi(x_0, x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{m-1})$$

une fonction rationnelle des m racines d'une équation $f(x) = 0$, n'ayant pas de racines égales. Désignons par V_0 une fonction résolvante de cette équation et par $F(V)=0$ son équation résolvante de degré N. Les racines de l'équation $f(x)=0$ sont des fonctions rationnelles de V_0; soient :

$$x_0 = \psi_0(V_0),\ x_1 = \psi_1(V_0),\ x_2 = \psi_2(V_0) \ldots x_{m-1} = \psi_{m-1}(V_0);$$

substituons dans z_0, à la place des quantités x leurs valeurs en fonction de V_0. On en déduira :

$$z_0 = \Pi_1(V_0);$$

$\Pi_1(V)$ acquiert par la substitution à V des diverses racines de l'équation $F(V)=0$, un nombre ν de valeurs distinctes (ν est un diviseur de N), parmi lesquelles se trouve z_0, et ces valeurs sont racines d'une équation irréductible. De plus $F(V)$ admet un diviseur à coefficients fonctions rationnelles de z_0, irréductible si on n'adjoint que cette quantité aux quantités connues, de degré $\frac{N}{\nu}$; ce diviseur égalé à 0 est la nouvelle équation résolvante après l'adjonction de z_0. Remarquons que $V_0, V_1 \ldots V_i \ldots V_{N-1}$ étant les diverses racines de l'équation $F(V)=0$,

$$\psi_0, (V_i), \psi_1(V_i), \psi_2(V_i) \ldots\ldots \psi_{m-1}(V_i),$$

représentent dans un certain ordre les m racines de l'équation $f(x)=0$; en donnant à i, successivement les N valeurs $0, 1, 2 \ldots, N-1$ on obtient donc N permutation entre les racines; les substitutions, pour passer de l'une d'elles à toutes les autres, forment un groupe de substitutions conjuguées; c'est le théorème fondamental de Galois. La substitution à V dans $\Pi_1(V)$ des diverses racines de $F(V)=0$, revient à effectuer dans la fonction

$$\Pi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$$

les diverses substitutions de ce groupe. Ainsi en appelant ce groupe, le *groupe conjugué propre à l'équation* $f(x)=0$, comme c'est l'usage, on a la proposition suivante :

Si dans une fonction $\Pi(x_0, x_1 \ldots x_{m-1})$ *des racines d'une équation* $f(x)=0$ *n'ayant pas de racines égales, on effectue les diverses substitutions du groupe conjugué propre à cette équation, les valeurs distinctes qu'acquiert la fonction sont racines d'une équation irréductible; l'adjonction d'une de ces valeurs aux quantités connues réduit le groupe de substitutions propre à l'équation à celles du groupe primitif qui laissent invariable la fonction :*

$$\Pi(x_0, x_1 \ldots\ldots x_{m-1})$$

La dernière partie de cette proposition résulte de ce que le diviseur de F (V) à coefficients fonctions rationnelles de z_0, irréductible après l'adjonction de cette seule quantité, formé comme il a été dit au n° 4, a précisément pour racines lorsqu'on l'égale à 0, celles des racines de $F(V) = 0$, qui donnent pour $\pi_1(V)$ une valeur égale à $\pi_1(V_0)$. Nous arrêterons là ces applications du théorème du n° 4 aux équations résolvantes, nous proposant d'y revenir plus loin avec plus de détails.

II.

De la réduction des équations en général.

7. Soit $F(x) = 0$ une équation actuellement irréductible de degré m et qui se réduit lorsqu'on adjoint aux quantités connues une racine z_0 de l'équation également irréductible $\phi(z) = 0$, de degré n, dont les coefficients sont rationnellement connus. Désignons par $f(x, z_0)$ un des facteurs irréductibles de F (x), et soit μ son degré.

$$f(x, z_1);\ f(x, z_2), \ldots\ldots f(x, z_{n-1}),$$

$z_0, z_1 \ldots\ldots z_{n-1}$ étant les autres racines de $\phi(z) = 0$, sont également irréductibles et diviseurs de F (x), cela résulte immédiatement du N° 3.

Le produit :

$$f(x, z_0).\ f(x, z_1) \ldots\ldots f(x, z_{n-1}),$$

ordonné par rapport aux puissances de x, a pour coefficients des fonctions symétriques des racines de l'équation $\phi(z) = 0$; ces coefficients sont donc rationnels, et comme toutes les racines de ce produit égalé à 0 sont aussi racines de $F(x) = 0$, qui est irréductible, ce produit est une puissance de F (x). En désignant par q l'exposant de cette puissance, on a :

$$n\mu = mq$$

μ est inférieur à m, il s'ensuit que q est inférieur à n; si n est premier, il divisera donc m; de même si m est premier, il divise n.

8. Si $f(x, z_0)$, $f_1(x, z_0)$, ... $f_i(x, z_0)$ sont les facteurs irréductibles de F (x) lorsqu'on adjoint z_0, $f(x, z_1)$, $f_1(x, z_1)$, ... $f_i(x, z_1)$ sont les facteurs irréductibles de F (x) lorsqu'on adjoint z_1 (3).

Soient μ le degré de $f(x, z_0)$, μ_1 celui de $f_1(x, z_0)$, μ_2 celui de $f_2(x, z_0)$ ... et μ_i celui de $f_i(x, z_0)$; soient de plus mq le degré du produit

$$f(x, z_0)\, f(x, z_1) \ldots\ldots f(x, z_{n-1}),$$

mq_1 celui du produit analogue formé avec les fonctions f_1, mq_i avec les fonctions f_i; on a les relations :

$$\mu + \mu_1 + \ldots\ldots + \mu_i = m$$
$$n\mu = mq,\ n\mu_1 = mq_1 \ldots\ldots n\mu_i = mq_i,$$
$$n = q + q_1 + \ldots\ldots + q_i;$$

la dernière est une conséquence des précédentes.

9. Il y a réciprocité entre les fonctions $F(x)$ et $\phi(z)$.

Soit : x_0 une racine de $f(x, z_0)$: parmi les n fonctions $f(x, z_0) \ldots f(x, z_{n-1})$, il y en a q qui admettent cette racine x_0 et q seulement, d'après le n° 7; il en résulte que $f(x_0, z) = 0$ a q racines communes avec $\phi(z) = 0$. Leur plus grand commun diviseur est donc de degré q. Soit $\chi(z, x_0)$ ce plus grand commun diviseur, $\chi(z, x_1)$ est également diviseur de $\phi(z)$ et le produit :

$$\chi(z, x_0)\ \chi(z, x_1) \ldots\ldots \chi(z, x_{m-1})$$

est égal à la puissance μ^{ieme} de $\phi(z)$. Parmi ces facteurs, il y en a μ qui admettent la racine z_0, donc $\chi(z_0, x)$ a μ racines communes avec $F(x) = 0$ et leur plus grand commun diviseur n'est autre que $f(x, z_0)$.

Les polynômes $\chi(z, x_i)$ sont irréductibles; car autrement soit $\chi'(z, x_0)$ un diviseur de $\chi(z, x_0)$. Le produit :

$$\chi'(z, x_0)\ \chi'(z, x_1) \ldots\ldots \chi'(z, x_{m-1})$$

serait une puissance μ', $\mu' < \mu$ de $\phi(z)$. Donc $\chi'(z_0, x) = 0$, aurait μ' racines seulement communes avec $F(x) = 0$, d'où par divisions on conclurait un polynôme de degré μ' à coefficients fonctions rationnelles de z_0, et s'annulant pour $x = x_0$; $f(x, z_0)$ ne serait donc pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

10. Si parmi les n fonctions $f(x, z_i)$ du n° 7 il y en a ν égales à $f(x, z_0)$, elles peuvent se partager en $\frac{n}{\nu}$ groupes de fonctions égales entre elles. En effet, il y a une infinité de nombres entiers a, tels que $f(a, z)$ prennent seulement ν valeurs égales à $f(a, z_0)$, lorsqu'on remplace z successivement par

les n racines de l'équation $\varphi(z) = 0$. Posons $f(a, z_0) = Z_0$. D'après le n° 4, Z_0 est racine d'une équation irréductible de degré $\frac{n}{\nu}$ à coefficients rationnels. L'adjonction de Z_0 permet de décomposer $\varphi(z)$. L'un de ses facteurs de degré ν admet pour racines les ν valeurs de z, qui donne à $f(a, z)$ la valeur $f(a, z_0)$ et les coefficients de $f(x, z_0)$ s'expriment rationnellement en fonction de Z_0. Si on remplace Z_0 par les autres racines de l'équation en Z, on obtient les autres fonctions $f(x, z_j)$.

De là, il résulte qu'on peut choisir $\varphi(z)$ de manière que les n factions $f(x, z_j)$ soient tous différents; et alors.

$$n < \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m}{1 . 2 \ldots\ldots\ldots \mu \;\; 1 . 2 \ldots\ldots (m - \mu)}$$

11. Si toutes les racines de $\varphi(z) = 0$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles, μ est un diviseur de m, $f(x, z_0)$, $f_1(x, z_0) \ldots$ sont d'égal degré et égales respectivement à des termes de la suite $f(x, z_0)$, $f(x, z_1) \ldots$ En effet, deux termes de cette suite ne peuvent avoir de diviseurs communs, car leurs coefficients sont exprimés en fonction des mêmes irrationnelles, et leur produit est une puissance de $F(x)$. Si on désigne par Z_0 la quantité $f(a, z_0)$, Z_0 est racine d'une équation $\varphi_1(Z) = 0$ à coefficients rationnels, de degré $\frac{m}{\mu}$, nombre de valeurs distinctes comprises dans la suite $f(a, z_0)$, $f(a, z_1) \ldots f(a, z_{n-1})$ et les coefficients de $f(x, z_0)$ s'expriment rationnellement en fonction de Z_0. Soit $f'(x, Z_0)$, ce que devient $f(x, z_0) \ldots$ L'adjonction de toutes les racines de $\varphi_1(Z) = 0$, décompose $F(x)$ dans le produit des facteurs irréductibles.

$$f'(x, Z_0) f'(x, Z_1) f'(x, Z_2) \ldots f'(x, Z_{\frac{m}{\mu}} - 1)$$

On est dans le cas précédent, lorsqu'on adjoint aux quantités connues toutes les racines d'une équation irréductible.

Des équations holodromes.

12. Nous appellerons équations *holodromes*, les équations irréductibles, dont toutes les racines peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles; les équations *résolvantes* rentrent dans cette classe d'équations. On sait que deux racines quelconques d'une telle équation peuvent

s'exprimer rationnellement en fonction l'une de l'autre. Soient $F(x)=0$ une équation holodrome de degré m, et

$$x_0, x_1 = \theta_1(x_0), x_2 = \theta_2(x_0) \ldots x_{m-1} = \theta_{m-1}(x_0)$$

ses m racines, $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots$ désignaut des fonctions rationnelles.

La suite : $x_i, \theta_1(x) \ldots\ldots \theta_{m-1}(x_1)$ est dans un ordre différent la même que la suite :

$$x_0, x_1 \ldots\ldots x_{m-1}$$

On peut supposer que les fonctions θ soient entières; remplaçons x_0 par une variable x; et, considérons la suite des fonctions :

$$(1)\ x, \theta_1(x) \ldots \theta_i(x) \ldots \theta_{m-1}(x);$$

$\theta_i \theta_j(x)$ est une fonction entière de x qui, divisée par $F(x)$ donne pour reste une des m fonctions (1), $\theta_i(x), \theta_j(x)$ étant deux quelconques des fonctions de cette suite; de sorte que l'on peut dire que les fonctions (1) forment un *groupe* relativement à l'équation $F(x)=0$. De plus, au lieu de $\theta_i \theta_i(x)$, on écrit $\theta_i^2(x) \ldots$ etc.

13. — I. Adjoignons une racine Z_0 de l'équation irréductible $\Phi(Z)=0$ qui permet de décomposer $F(x)=0$, et soient $f(x, Z_0)$ un facteur irréductible de $F(x)$ de degré μ, et

$$(2)\ x_0, \psi_1(x_0) \ldots \psi_{\mu-1}(x_0)$$

ses μ racines. $\theta_i(x_0)$ étant une racine de $F(x)=0$ non comprise dans la suite précédente,

$$(3)\ \theta_i(x_0), \theta_i \psi_1(x_0) \ldots\ldots \theta_i \psi_{\mu-1}(x_0)$$

sont μ racines de $F(x)=0$, dont toute fonction symétrique est aussi symétrique par rapport aux racines de l'équation $f(x, Z_0)=0$ et par conséquent peut s'exprimer rationnellement en fonction de Z_0.

L'équation qui admet pour racines les μ quantités (3) est irréductible, car autrement on en déduirait un diviseur pour $f(x, Z_0)$. Les suites (2) et (3) sont distinctes; si elles ne contiennent pas toutes les racines de l'équation $F(x)=0$, on formera une nouvelle suite de μ quantités, racines de $F(x)=0$, et d'une équation à coefficients fonctions rationnelles de Z_0, irréductible, et ainsi de suite. Donc, après l'adjonction de Z_0, $F(x)$ se décompose en facteurs irréductibles d'égal degré, et ce degré que nous avons désigné par μ est un diviseur de m. Remarquons que les μ fonctions

$$x, \psi_1(x) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x)$$

forment un groupe relativement à l'équation $F(x) = 0$; de même la suite (3) donne le groupe :

$$x, \theta_i \psi_1 \theta_i^{-1}(x) \ldots\ldots \theta_i \psi_{\mu-1} \theta_i^{-1}(x)$$

En effet $\psi_i \psi_j(x_0)$ est une racine de $f(x, Z_0)$, et par suite est égale à l'une des quantités (2), etc.

Quant à la suite (3), si l'on pose $x_i = \theta_i(x_0)$, on a $x_0 = \theta_i^{-1}(x_i)$, et elle coïncide avec la suite :

$$x_i, \theta_i \psi_1 \theta_i^{-1}(x_i) \ldots\ldots \theta_i \psi_{\mu-1} \theta_i^{-1}(x_i)$$

On aura ainsi un groupe pour chaque facteur irréductible de $F(x)$, après l'adjonction de Z_0; seulement, il peut arriver que ces différents groupes de fonctions coïncident, comme nous le verrons plus loin, ou qu'elles aient toutes un certain nombre de fonctions communes.

II. Z_1 étant une autre racine de $\Phi(Z) = 0$, $f(x, Z_1)$ est irréductible comme $f(x, Z_0)$, et si on désigne par x_1 une racine de l'équation $f(x, Z_1) = 0$, les μ racines de cette équation seront (3) :

$$x_1, \psi_1(x_1) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x_1).$$

Si donc les équations $f(x, Z_1) = 0$ et $f(x, Z_0) = 0$ ont une racine commune, elles ont toutes leurs racines communes, et l'adjonction de Z_1 produit le même effet que l'adjonction de Z_0. Dans tous les cas, l'adjonction de Z_1 conduit aux mêmes groupes de fonctions relativement à l'équation $F(x) = 0$; soient $Z_0, Z_1 \ldots\ldots Z_{N-1}$, les N racines de $\Phi(Z) = 0$; le produit :

$$f(x, Z_0) f(x, Z_1) \ldots\ldots f(x, Z_{N-1})$$

est égal à une puissance de $F(x)$. Si on désigne par q l'exposant de cette puissance, on peut partager les N fonctions $f(x, Z)$ en $\frac{N}{q}$ groupes de fonctions égales entre elles. D'après le n° 10, on pourra former une équation $\varphi(z) = 0$ de degré $n = \frac{N}{q}$, à coefficients rationnels, telle que si on désigne par

$z_0, z_1 \ldots\ldots z_{n-1}$ ses n racines, les fonctions $f(x, Z_0), f(x, Z_1), \ldots$ seront respectivement égales à des fonctions de la suite :

$$f'(x, z_0), f'(x, z_1) \ldots\ldots f'(x, z_{n-1})$$

dont le produit est égal à $F(x)$; $\Phi(Z)$ sera de même décomposable en un produit de n fonctions de degré q,

$$\varphi'(Z, z_0), \varphi'(Z, z_1) \ldots\ldots \varphi'(Z, z_{n-1})$$

Les racines de $\varphi(z) = 0$ sont fonctions rationelles des racines de $F(x) = 0$ et de $\Phi(Z) = 0$. On a de plus $\mu n = m$.

Réciproquement soient :

$$x, \psi_1(x) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x)$$

μ fonctions de la suite (1), formant un groupe relativement à l'équation $F(x) = 0$; x_0 étant une racine de $F(x) = 0$,

$$(\alpha)\ x_0, \psi_1(x_0) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x_0)$$

sont μ racines de cette équation; soit x_1 une racine de $F(x) = 0$, ne faisant pas partie de cette suite;

$$x_1, \psi_1(x_1) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x_1)$$

sont également μ racine de $F(x) = 0$; elles sont différentes des μ racines (α); en effet, si on avait :

$$\psi_i(x_1) = \psi_j(x_0)$$

on en déduirait :

$$\psi_i^{-1} \psi_i(x_1) = x_1 = \psi_i^{-1} \psi_j(x_0)$$

et par suite x_1 serait une des racines (α) contre l'hypothèse.

Ainsi μ est un diviseur de m, degré de $F(x) = 0$. La fonction :

$$(a - x)[a - \psi_1(x)][a - \psi_2(x)] \ldots\ldots [a - \psi_{\mu-1}(x)]$$

où a est une indéterminée rationnelle, acquiert $\frac{m}{\mu}$ valeurs distinctes lorsqu'on substitue successivement à x les diverses racines de $F(x) = 0$. Ces valeurs sont racines d'une équation irréductible à coefficients rationnels, et l'adjonction d'une racine de cette dernière équation décompose $F(x)$ en $\frac{m}{\mu}$ facteurs irréductibles de degré μ.

14. Supposons, maintenant, que $\Phi(Z) = 0$ soit elle-même holodrome; et soit comme précédemment $f(x, Z_0)$ un des facteurs irréductibles de $F(x)$, après l'adjonction de Z_0, racine de $\Phi(Z) = 0$. Si on désigne par x une racine de $F(x) = 0$ n'appartenant pas à $f(x, Z_0) = 0$; les μ quantités,

$$x_1, \psi_1(x_1) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x_1)$$

d'une part, et, en posant : $x_1 = \theta(x_0)$, les μ quantités

$$\theta(x_0), \theta\psi_1(x_0) \ldots\ldots \theta\psi_{\mu-1}(x_0)$$

d'autre part, sont racines d'équations à coefficients fonctions rationnelles de Z_0 et irréductibles; l'équation à laquelle appartiennent les μ premières est de la forme : $f(x, Z_1) = 0$, Z_1 étant une racine de $\Phi(Z) = 0$. Puisque dans ces deux suites, il a une quantité commune, $x_1 = \theta(x_0)$, elles sont les mêmes à l'ordre près; de sorte que les deux groupes de fonctions :

$$x, \psi_1(x), \ldots\ldots\ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x)$$
$$x, \theta\psi_1\theta^{-1}(x), \ldots\ldots \theta\psi_{\mu-1}\theta^{-1}(x)$$

ne diffèrent que par l'ordre. Nous exprimerons cette propriété en disant que le premier groupe est échangeable à la fonction θ. Ainsi :

Lorsqu'on adjoint à une équation holodrome $F(x) = 0$, une racine d'une équation $\Phi(Z) = 0$ également holodrome, les groupes de fonctions correspondants aux divers facteurs irréductibles sont les mêmes. Par suite, ce groupe est permutable à toutes les fonctions θ, telles que $F[\theta(x)] = 0$ en même temps que $F(x)$.

Réciproquement soient :

$$x, \psi_1(x), \psi_2(x) \ldots\ldots \psi_{\mu-1}(x)$$

μ fonction de la suite (1), formant un groupe relativement à l'équation $F(x) = 0$, échangeable à toutes les fonctions de cette suite (1)

$$(\alpha - x)[\alpha - \psi_1(x)] \ldots\ldots [\alpha - \psi_{\mu-1}(x)]$$

est une fonction de x qui acquiert $\frac{m}{\mu}$ valeurs distinctes lorsqu'on substitue à x les diverses racines de l'équation $F(x) = 0$, d'après le numéro précédent. L'équation qui admet ces $\frac{m}{\mu}$ valeurs pour racines est holodrome; en effet, soient :

$$(\alpha - x_0)[\alpha - \psi_1(x_0)] \ldots\ldots [\alpha - \psi_{\mu-1}(x_0)] = z_0$$
$$(\alpha - x_1)[\alpha - \psi_1(x_1)] \ldots\ldots [\alpha - \psi_{\mu-1}(x_1)] = z_1$$

deux des valeurs considérées et $x_i = \theta(x_0)$. On a, puisque le groupe des fonctions ψ est permutable à toutes les fonctions de la suite (1),

$$z_1 = [\alpha - \theta(x_0)]\,[\alpha - \theta\,\psi_1(x_0)]\ldots\ldots[\alpha - \theta\,\psi_{\mu-1}(x_0)$$

or, toute fonction symétrique des μ quantités :

$$x_0,\ \psi_1(x_0)\ldots\ldots\psi_{\mu-1}(x_0)$$

est exprimable rationnellement en fonction de z_0; donc z_1 qui est aussi une fonction symétrique de ces μ quantités, d'après sa seconde forme, s'exprimera rationnellement en fonctions de z_0; par suite, l'équation $\varphi(z) = 0$ de degré $\frac{m}{\mu}$ qui produit le même effet que $\Phi(Z) = 0$, et qu'on formera d'après la méthode du n° 13 (II), est holodrome comme $\Phi(Z) = 0$.

15. Si $\Phi(Z) = 0$ n'est pas une équation holodrome, l'adjonction de toutes ses racines équivaut à l'adjonction d'une racine d'une équation holodrome, son équation résolvante. Considérons les différents groupes de fonctions correspondant aux diverses racines de $\varphi(z) = 0$. Le groupe correspondant à l'adjonction d'une racine de l'équation résolvante de $\Phi(Z) = 0$, se composera des fonctions communes à tous ces groupes, lesquelles sont évidemment permutables à toutes les fonctions θ.

En effet, devant être compris dans chacun de ces groupes, il ne peut contenir que des fonctions qui leur soient communes ; en second lieu, il les contient toutes, puisque toute fonction rationnelle des racines de l'équation $\varphi(z) = 0$, qui produit le même effet que $\Phi(Z) = 0$, peut s'exprimer rationnellement en fonction d'une racine de $F(x) = 0$, et est invariable, lorsqu'on remplace cette racine par celles qu'on obtient en effectuant sur cette racine les opérations indiquées par ces fonctions communes. Si ces groupes ne contiennent pas de fonctions communes, ou ce qui est la même chose, si l'un d'eux ne contient pas de groupe échangeable à toutes les fonctions θ, les racines de $F(x) = 0$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des racines de $\varphi(z) = 0$.

16. Comme M. Camille Jordan, nous dirons que deux équations dont les coefficients sont formés avee les mêmes irrationnelles sont *équivalentes*, lorsque les racines de l'une pourront s'exprimer rationnellement en fonction des racines de l'autre, qu'une équation holodrome est *simple* lorsqu'elle ne pourra se réduire qu'à l'aide d'une équation holodrome équivalente.

Il est clair que deux équations holodromes équivalentes sont de même degré.

Etant données deux équations simples non équivalentes, l'adjonction des racines de l'une aux quantités connues laisse l'autre simple.

Etant données trois équations simples non équivalentes deux à deux, il peut se faire que l'adjonction des racines de deux de ces équations réduise la troisième, mais les trois équations sont alors de même degré. En effet, adjoignons seulement les racines de l'une des équations, les deux autres restent simples; maintenant ces deux équations sont équivalentes, puisque l'adjonction des racines de l'une réduit l'autre; donc elles sont de même degré. Ainsi les trois équations sont de même degré deux à deux.

Ce que nous venons de dire de trois équations simples, peut se dire d'un nombre quelconque, autre que deux, d'équations simples.

17. Soit $F(x) = 0$, une équation holodrome de degré m et $\phi(z) = 0$, une équation simple, permettant de la réduire de degré ν. Après l'adjonction d'une racine de $\phi(z) = 0$, $F(x)$ se décomposera en ν équations holodromes et équivalentes de degré $\frac{m}{\nu}$. Il peut se faire que $F(x) = 0$ se réduise à l'aide d'autres équations simples, non équivalentes à $\phi(z) = 0$; et que parmi elles, il s'en trouve de degré ν; soit $\phi_1(z)$ l'une d'elles, et ainsi de suite. On arrivera à un certain nombre d'équations simples.

$$(\alpha) \qquad \phi(z) = 0, \quad \phi_1(z) = 0 \ldots \phi_{\alpha-1}(z) = 0$$

toutes de degré ν, permettant chacune de réduire $F(x) = 0$ et telles que l'une quelconque d'entre elles reste simple lorsqu'on adjoint aux quantités connues les racines de toutes les précédentes et que toute autre équation simple de degré ν permettant de réduire $F(x) = 0$ se réduise après l'adjonction des racines de ces α équations.

Au lieu de partir de $\phi(z) = 0$, on pourrait partir de toute autre équation simple de degré ν, permettant de réduire $F(x) = 0$, et alors en opérant comme plus haut, on arriverait à une autre suite.

$$\phi'(z) = 0 \quad \phi_1'(z) = 0 \quad \phi'_{\beta-1}(z) = 0,$$

jouissant des mêmes propriétés que la précédente. Les équations résolvantes des deux équations.

$$\begin{array}{lll} (1) & \phi(z) \;\; \phi_1(z) \;\; \phi_2(z) & \phi_{\alpha-1}(z) = 0 \\ (2) & \phi'(z) \;\; \phi'_1(z) \ldots\ldots & \phi_{\beta-1}(z) = 0. \end{array}$$

sont équivalentes. En effet, les racines de $\phi'(z) = 0$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des racines de l'équation (1); de même, celles de $\varphi'_1(z)=0\ldots\varphi'_{\beta-1}(z)=0$; réciproquement les racines des équations $\varphi_1(z)=0$, $\varphi_2(z)=0\ldots$, $\varphi_{\alpha-1}(z)=0$ s'expriment rationnellement en fonction des racines de l'équation (2).

La résolvante de l'équation (1) est de degré ν^α. En effet, si on adjoint une racine de l'équation $\varphi_1(z)=0$, ce degré est divisé par ν; et il en est de même chaque fois que l'on adjoint une racine des équations (α). La résolvante de l'équation (2) est pour la même raison de degré ν^β. Ces deux résolvantes sont de même degré puisqu'elles sont équivalentes; donc $\beta=\alpha$.

Il est clair que ce que nous venons de dire des équations simples à coefficients rationnels, réduisant $F(x)=0$, de degré ν, peut se répéter pour l'ensemble des équations d'un autre degré quelconque.

18. Soit maintenant $\psi(z)=0$ l'équation holodrome équivalente à l'ensemble des équations simples à coefficients rationnels, permettant de réduire $F(x)=0$, telles qu'aucune d'elles ne puisse se réduire par l'adjonction des racines des autres, et que de plus toute autre équation simple réduisant $F(x)=0$, se réduise par l'adjonction d'une racine de $\psi(z)=0$. Le degré de $\psi(z)$ est égal au produit des degrés de ces équations simples. Nous appellerons ces équations simples, dont les coefficients sont rationnels, avant l'adjonction de toute irrationnelle, équations du premier ordre; et toute fonction rationnelle des racines de ces équations, fonction du premier ordre, par analogie avec ce qu'Abel appelle fonction algébrique du premier ordre. De même, nous appellerons équations simples du second ordre, et fonctions du second ordre, les équations simples dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du premier ordre, et les fonctions rationnelles des racines de ces équations; et en général équations simples du μ^{ieme} ordre et fonctions du μ^{ieme} ordre, les équations simples dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du $\mu-1^{\text{ieme}}$ ordre et les fonctions rationnelles des racines de ces équations.

m étant le degré de $F(x)=0$, n celui de $\psi(z)=0$, z_0 une racine de $\psi(z)=0$, après l'adjonction de z_0, $F(x)=0$ se décompose en n équations holodromes équivalentes de degré $\frac{m}{n}$. Soit $f(x, z_0)=0$ l'une d'elles. Le groupe de fonctions de $f(x, z_0)=0$ est permutable au groupe de fonctions de $F(x)=0$. Soit $\pi(\zeta, z_0)=0$ une équation holodrome et simple après l'adjonction de z_0, de degré ν_1 et permettant de réduire $f(x, z_0)$. Après l'adjonction d'une racine de l'équation $\pi(\zeta, z_0) = 0$, $f(x, z_0) = 0$ se décompose en ν_1 équations holodromes de degré $\frac{m}{n\nu_1}$, équivalentes, et le groupe de fonctions qui est le même pour toutes ces équations sera permutable à toutes les fontions du groupe de $f(x, z_0) = 0$, mais en général il ne le sera pas aux fonctions du groupe de $F(x) = 0$; z_1 étant une autre racine de $\psi(z) = 0$, $\pi(\zeta, z_1) = 0$ permettra de décomposer $f(x, z_1)$ (3); mais $f(x, z_1) = 0$ est équivalente à $f(x, z_0) = 0$; donc $\pi(\zeta, z_1) = 0$ est une autre équation simple après l'adjonction de z_0 permettant de décomposer $f(x, z_0)$. De sorte qu'il y aura un certain nombre de racines de $\psi(z) = 0$: $z_0, z_1, \ldots, z_{\alpha'-1}$, qui substituées à z_0 dans $\pi(\zeta, z_0)$, donneront des équations simples permettant de réduire $f(x, z_0) = 0$, telles qu'une quelconque d'entre elles reste simple après l'adjonction des racines de toutes les autres, et que l'équation simple obtenue en substituant à z_0 dans $\pi(\zeta, z_0) = 0$, une autre racine de $\psi(z) = 0$ se réduise après l'adjonction des racines de ces α' équations.

Au lieu de partir de $\pi(\zeta, z_0) = 0$ on pourrait partir de tout autre équation simple obtenue en substituant à z_0 une autre racine de $\psi(z) = 0$; on arriverait à une autre suite $z'_0, z'_1, \ldots\ldots z'_{\beta'-1}$. Mais en raisonnant comme au numéro précédent, on voit que $\beta' = \alpha'$, et que l'ensemble des nouvelles équations est équivalent à l'ensemble des premières.

19. La résolvante de l'équation :

$$\pi(\zeta, z_0)\ \pi(\zeta, z_1) \ldots\ldots \pi(\zeta, z_{\alpha'-1}) = 0$$

est de degré $\nu_1^{\alpha'}$ et l'adjonction d'une racine de cette équation résolvante permet de décomposer $f(x, z_0) = 0$ en $\nu_1^{\alpha'}$ équations équivalentes de degré $\frac{m}{n\nu_1^{\alpha'}}$. Les coefficients de cette équation résolvante doivent contenir l'irrationnelle z_0, ce qui exige que la suite $z_0, z_1, z_{\alpha'-1}$ ne contienne pas toutes les racines de $\psi(z) = 0$; car autrement cette équation holodrome et à coefficients rationnels avant l'adjonction de z_0, serait décomposable par des équations simples du premier ordre, lesquelles décomposeraient par suite $f(x, z_0) = 0$, ce qui est contre l'hypothèse. Soit $\Pi(\zeta, z_0) = 0$, cette équation résolvante. Si on remplace dans les coefficients de cette équation z_0 par une autre racine de $\psi(z) = 0$, l'équation nouvelle obtenue est holodrome et équivalente à la première. En susbstituant ainsi à z_0 les diverses racines de $\psi(z) = 0$, on obtient un certain nombre d'équations distinctes, c'est-à-dire n'ayant pas les mêmes racines, nombre qui est un diviseur de n; et le produit des premiers membres de ces équations, qui est indépendant de l'irrationnelle z_0, donne, égalé à 0, une équation dont la résolvante est de degré $\nu_1{}^{\alpha'} n'$, n' étant un diviseur de n. En effet, cette équation résolvante ne peut être décomposée qu'à l'aide des équations simples du premier ordre qui décomposent $\psi(z) = 0$, et ses équations simples du second ordre sont $\pi(\zeta, z_0) = 0$, $\pi(\zeta, z_1) = 0, \ldots \pi(\zeta, z_{\alpha'-1}) = 0$. Cette équation résolvante décompose $F(x) = 0$ en $\nu_1{}^{\alpha'} n'$ équations holodromes, équivalentes, qui ont même groupe de fonctions, et ce groupe est permutable à toutes les fonctions du groupe de $F(x) = 0$. Il en résulte qu'après l'adjonction d'une racine de $\Pi(\zeta, z_0) = 0$, $f(x, z_0) = 0$ se décompose en $\nu_1{}^{\alpha'}$ équations holodromes équivalentes, dont le groupe unique est permutable non seulement aux fonctions du groupe de $f(x, z_0) = 0$, mais encore à toutes les fonctions du groupe de $F(x) = 0$

Ce que nous avons dit des équations simples du second ordre peut se répéter pour les équations des divers ordres.

Ainsi une équation holodrome $F(x) = 0$ *se réduit à l'aide d'une suite d'équations simples; cette suite n'est pas entièrement déterminée, mais la suite des degrés de ces équations simples l'est abstraction faite de l'ordre, et le produit de ces degrés est égal à celui de* $F(x)$. *Si on considère les groupes de fonctions des équations en lesquelles se décomposent successivement* $F(x) = 0$, *chacun de ces groupes est contenu dans le précédent et échangeable à toutes ses fonctions* (Camille Jordan, *Traité des substitutions*, p. 266 et suiv.).

De la décomposition des équations.

20. Soit $f(x) = 0$, une équation irréductible non holodrome de degré m et $F(V) = 0$ son équation résolvante. Cette équation résolvante se décomposera en équations simples, comme il vient d'être dit. Parmi ces équations simples, quelques-unes réduiront $f(x) = 0$. Supposons que les premières qui permettent de réduire $f(x) = 0$, appartiennent au $\mu^{\text{ième}}$ ordre, de sorte que l'ensemble des équations simples d'ordre inférieur laissent $f(x) = 0$ irréductible; soit $F_1(v) = 0$ l'équation holodrome équivalente à l'ensemble de ces équations simples, v_0 une de ses racines et $\pi(z, v_0) = 0$ une équation simple de degré ν_1 permettant de réduire $f(x) = 0$. Après l'adjonction d'une

racine z_0 de cette dernière équation, $f(x)$ se décompose en facteurs d'égal degré (11); le nombre n de ces facteurs est un diviseur de m et de ν_1. Les autres équations simples obtenues en substituant à v_0 dans les coefficients de l'équation $\pi(z, v_0) = 0$, une autre racine de $F_1(v) = 0$ décomposent $f(x) = 0$ d'une manière analogue. Soient $v_0, v_1, v_2 \ldots v_{\alpha-1}$ les racines de $F_1(v) = 0$ donnant, comme au numéro 18, une suite d'équations simples $\pi(z, v_0) = 0$, $\pi(z, v_1) = 0 \ldots \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0$ telles que l'une quelconque reste simple après l'adjonction des racines de toutes les autres, et que toutes les équations simples $\pi(z, v_i) = 0$, v_i étant une racine de $F_1(v) = 0$, se réduisent après l'adjonction des racines de ces α équations simples. Chacune de ces équations simples divisera par n le degré de $f(x)$, et leur ensemble par n^α.

Deux cas peuvent se présenter; n^α est égal à m, ou bien lui est inférieur. Dans le premier cas, nous dirons que $f(x) = 0$ est une équation *primitive* (Camille Jordan, *Loc. cit.*, p. 260). $F(V) = 0$ est dans ce cas équivalente aux deux équations

$$F_1(v) = 0, \quad \pi(z, v_0)\,\pi(z, v_1) \ldots \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0$$

Si n^α n'est pas égal à m, soit $F_2(v') = 0$ l'équation holodrome à coefficients rationnels avant l'adjonction de toute irrationnelle, autre que celles qui entrent dans les coefficients de $f(x) = 0$, équivalente à $F_1(v) = 0$ et $\pi(z, v_0)\,\pi(z, v_1) \ldots \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0$. Après l'adjonction d'une racine v_0' de $F_2(v') = 0$, $f(x) = 0$ se décompose en n^α équation d'égal degré, et on pourra former une équation à coefficients rationnels:

$$y^{n^\alpha} + A_1 y^{n^\alpha - 1} \ldots\ldots + A_{n^\alpha} = 0,$$

telle que

$$f(x) = [M(y_1)\, x^{m'} + \ldots\ldots]\; [M(y_2)\, x^{m'} + \ldots\ldots]$$

$m' = \frac{m}{n^\alpha}$, et $y_1 \ldots, \ldots\ldots, y_{n^\alpha}$ étant les racines de l'équation en y (11).

Ainsi une équation qui n'est pas primitive peut se ramener à un certain nombre d'équations primitives; et le produit des degrés de ces équations est égal au degré de l'équation proposée.

21. La concordance entre la théorie précédente et celle de M. Camille Jordan est évidente. Dans la plupart des applications, surtout géométriques, il est préférable de recourir à la méthode des groupes des substitutions, car

ordinairement on sait qu'il doit exister entre les racines certaines relations qui se traduisent par un groupe de substitutions entre ces racines. Cependant on pourra quelquefois simplifier par la méthode qui précède.

Ainsi, supposons que $f(x) = 0$ soit l'équation générale de degré m; $F(V) = 0$, son équation résolvante est de degré $1.2.3\ldots m$, et son groupe est formé de toutes les substitutions possibles entre ses m racines. Cette équation est primitive; elle n'est donc réduite que par les équations simples de $F(V) = 0$ d'ordre le plus élevé. Soit $F_1(v) = 0$, l'équation holodrome équivalente à l'ensemble des équations simples d'ordre inférieur, v_0 une de ses racines; après l'adjonction de v_0, $F(V) = 0$ se décompose en équations équivalentes; soit $F_2(V, v_0) = 0$ l'une d'elles, et $\pi(z, v_0) = 0$ une équation simple réduisant l'équation précédente; les autres équations simples de $F_2(V, v_0) = 0$ s'obtiendront en substituant à v_0 dans les coefficients de $\pi(z, v_0) = 0$ les autres racines de $F_1(v) = 0$; et toutes ces équations simples réduiront $f(x) = 0$; de plus, le groupe de fonctions de $F_2(V, v_0) = 0$ est permutable aux fonctions du groupe de $F(V) = 0$; ou, ce qui est la même chose, le groupe de l'équation, après l'adjonction de v_0, est permutable à toute substitution.

Or, si m est supérieure à 4, tout groupe auquel toute substitution est permutable contient le groupe alterné. (Camille Jordan, *Traité des substitutions*, p. 63.)

Donc, si $m > 4$ le degré de $F_1(v)$ est égal à 2, et on peut prendre

$$F_1(v) = v^2 - \Delta$$

Δ étant le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines; $F_2(V, v_0) = 0$ est de degré $\frac{1.2\ldots m}{2}$; ses équations simples distinctes ne peuvent être qu'au nombre de deux : $\pi(z, v_0)$ et $\pi(z, v_1)$. Mais ces deux équations simples seraient forcément équivalentes (19); donc l'équation $F_2(V, v_0) = 0$ est simple (Camille Jordan, *Loc. cit.*, p. 66).

Vu et approuvé.
Paris, 14 janvier 1878.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer.
14 janvier 1878.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

DEUXIÈME THÈSE

SUR LA

THÉORIE DES SURFACES.

1. Lorsque des fonctions sont définies par des équations différentielles que l'on ne sait pas intégrer, on peut de ces équations déduire des relations qui expriment certaines propriétés des fonctions inconnues, sans les déterminer complétement. Pour obtenir ces relations, on peut supposer que ces fonctions sont développables par la formule de Taylor pour les valeurs des variables comprises entre de petites limites.

Cette méthode a l'avantage de fournir à peu près la solution du problème entre ces limites. Nous nous proposons dans cette Note d'appliquer cette méthode à l'étude des surfaces applicables sur une surface donnée et des familles de surface pouvant faire partie d'un système triple orthogonal.

Relativement au premier problème, on arrive facilement à l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée; la méthode permet en outre d'étudier comment une surface peut se déformer autour d'un point, et ce qui reste constant dans cette déformation, le produit des rayons de courbure principaux (théorème de Gauss), la courbure géodésique des courbes correspondantes, et l'angle que deux courbes correspondantes font entre elles. Appliquée à un système de coordonnées curvilignes donnant pour la distance de deux points infiniment voisins, l'expression:

$$E\,d\rho^2 + F\,d\rho_1^2 + G\,d\rho_2^2 + 2L\,d\rho_1\,d\rho_2 + 2M\,d\rho_2\,d\rho + 2N\,d\rho\,d\rho_1$$

la même méthode donne six équations différentielles entre les fonctions E, F, G, L, M, N, équations qui ont été données, dans le cas où le système de coordonnées est orthogonal par M. Lamé.

Relativement aux familles de surfaces pouvant faire partie d'un système triple orthogonal, on obtient directement leur équation différentielle, après avoir trouvé le théorème de Dupin.

2. Nous résoudrons d'abord le problème d'algèbre suivant, qui se présentera plusieurs fois :

f, f_1, f_2 étant des polynômes homogènes en x et y, de degré $n-1$, trouver deux polynômes φ et ψ homogènes en x et y, satisfaisant aux équations :

$$a\,\varphi'_x + a_1\,\psi'_x = f;\; b\,\varphi'_y + b_1\,\psi'_y = f_1;$$
$$b\,\varphi'_x + a\,\varphi'_y + b_1\,\psi'_x + a_1\,\psi'_y = f_2;$$

le déterminant $ab_1 - ba_1$ étant supposé différent de 0.

Posons :

$$a\,\varphi + a_1\,\psi = \mathrm{F},\; b\,\varphi + b_1\,\psi = \mathrm{F}_1$$

Les équations données deviendront :

$$\mathrm{F}'_x = f, \quad \mathrm{F}'_{1y} = f_1, \quad \mathrm{F}'_{1x} + \mathrm{F}'_y = f_2.$$

En prenant les dérivées par rapport à x et à y, des deux membres de la dernière équation, et remplaçant $\mathrm{F}_1{}'''_{x^2y}$ par $f_1{}''_{x^2}$, F'''_{y^2x} par f''_{y^2}, on obtient l'équation de condition :

$$(1)\; f''_{1x^2} + f''_{y^2} = f''_{2xy}$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs de x et de y pour que le problème admette une solution.

Cette équation de condition étant satisfaite, on a :

$$n\,(n-1)\,\mathrm{F} = x^2 f'_x + 2xy\,f'_y + y^2\,(f'_{2y} - f'_{1x})$$
$$n\,(n-1)\,\mathrm{F}_1 = x^2\,(f'_{2x} - f'_y) + 2\,xy\,f'_{1x} + y^2\,f'_{1y}.$$

Remarquons que l'équation de condition (1) est satisfaite, lorsque χ étant une fonction homogène de x et d'y, on a :

$$f = a_2\,\chi'_x,\; f_1 = b_2\,\chi'_y,\; f_2 = b_2\,\chi'_x + a_2\,\chi'_y$$

et qu'elle devient :

$$f''_{2xy} - f''_{y^2} - f''_{1x^2} = \chi''_{x^2}\,\chi''_{y^2} - \chi''^2_{xy} = 0$$

dans le cas où l'on a :

$$f = \tfrac{1}{2}\chi'^2_x,\ f_1 = \tfrac{1}{2}\chi'^2_y,\ f_2 = \chi'_x \chi'_y.$$

3. On peut de la même manière résoudre le problème lorsqu'il y a trois variables. Soient les équations :

$$a\,\varphi'_x + a_1\,\psi'_x + a_2\,\chi'_x = f,\ b\,\varphi'_y + b_1\,\psi'_y + b_2\,\chi'_y = f_1,\ c\,\varphi'_z + c_1\,\psi'_z + c_2\,\chi'_z = f_2,$$
$$a\,\varphi'_y + b\,\varphi'_x + a_1\,\psi'_y + b_1\,\psi'_x + a_2\,\chi'_y + b_2\,\chi'_x = F_2,$$
$$a\,\varphi'_z + c\,\varphi'_x + a_1\,\psi'_z + c_1\,\psi'_x + a_2\,\chi'_z + c_2\,\chi'_x = F_1,$$
$$b\,\varphi'_z + c\,\varphi'_y + b_1\,\psi'_z + c_1\,\psi'_y + b_2\,\chi'_z + c_2\,\chi'_y = F,$$

f, f_1, f_2, F, F_1, F_2 étant des polynômes homogènes en x, y, z de degré $n-1$, et le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a, & a_1, & a_2 \\ b, & b_1, & b_2 \\ c, & c_1, & c_2 \end{vmatrix} \gtrless 0\,;$$

φ, ψ, χ devant être des fonctions homogènes.

Posons :

$$a\,\varphi + a_1\,\psi + a_2\,\chi = \mathrm{F},\ b\,\varphi + b_1\,\psi + b_2\,\chi = \mathrm{F}_1,$$
$$c\,\varphi + c_1\,\psi + c_2\,\chi = \mathrm{F}_2.$$

Les équations données deviennent :

$$\mathrm{F}'_x = f,\ \mathrm{F}'_{1y} = f_1,\ \mathrm{F}'_{2z} = f_2\,;$$
$$\mathrm{F}'_{1z} + \mathrm{F}'_{2y} = F,\ \mathrm{F}'_z + \mathrm{F}'_{2x} = F,\ \mathrm{F}'_y + \mathrm{F}'_{1x} = F_2.$$

On en tire :

$$\mathrm{F}'''_{1z^2y} + \mathrm{F}'''_{2y^2z} = F''_{yz},$$

d'où :

$$f''_{1z^2} + f''_{2y^2} = F''_{yz}.$$

De même :

$$f''_{z^2} + f''_{2x^2} = F''_{1xz},\ f''_{y^2} + f''_{1x^2} = F''_{2xy}.$$

Et ces relations doivent être satisfaites identiquement, pour que le problème admette une solution.

Ces relations ne sont pas les seules. En effet, des équations primitives, on tire encore :

$$F''_{1zx} + F''_{2yx} = F'_x, \; F''_{zy} + F''_{2xy} = F''_{1y}, \; F''_{yz} + F''_{1xz} = F'_{2z};$$

d'où :

$$2\,F''_{zy} = F'_{1y} + F'_{2z} - F'_x; \; 2\,F''_{1zx} = F'_x + F'_{2z} - F'_{1y};$$
$$2\,F''_{2xy} = F'_x + F'_{1y} - F'_{2z}.$$

Mais $F'''_{zyx} = f''_{yz}$, $F'''_{1zyx} = f''_{1zy}$, $F'''_{2zyx} = f''_{2yx}$, d'où les relations qui doivent être identiques :

$$2\,f''_{yz} = F''_{1yx} + F''_{2zx} - F''_{x^2}, \; 2\,f''_{1zx} = F''_{xy} + F''_{2xy} - F''_{1y^2},$$
$$2\,f''_{2xy} = F''_{xz} + F''_{1yz} - F''_{2z^2}.$$

Ces six équations de condition étant vérifiées, on a :

$$n(n-1)\,F = x^2 f'_x + y^2 (F'_{2y} - f'_{1x}) + z^2 (F'_{1z} - f'_{2x})$$
$$+ yz (F_{1y} + F'_{2z} - F'_x) + 2zx\,f'_z + 2xy\,f'_y;$$

F_1, F_2 seraient donnés par deux équations analogues.

Remarquons, comme dans le numéro précédent, que les six équations de condition sont vérifiées lorsque, π étant une fonction homogène en x, y, z, on a :

$$f = a_3\,\pi'_x, \; f_1 = b_3\,\pi'_y, \; f_2 = c_3\,\pi'_z, \; F = b_3\,\pi'_z + c_3\,\pi'_y,$$
$$F_1 = a_3\,\pi'_z + c_3\,\pi'_x, \; F_2 = a_3\,\pi'_y + b_3\,\pi'_x.$$

Lorsque u représentant la fonction du second degré :

$$A\,x^2 + A'\,y^2 + A''\,z^2 + 2\,B\,yz + 2\,B'\,zx + 2\,B''\,xy$$

on a :

$$f = \tfrac{1}{2}\,u'^2_x, \; f_1 = \tfrac{1}{2}\,u'^2_y, \; f_2 = \tfrac{1}{2}\,u'^2_z, \; F = u'_y\,u'_z,$$
$$F_1 = u'_z\,u'_x, \; F_2 = u'_x\,u'_y,$$

les équations de condition deviennent :

$$AA' - B''^2 = 0, \; A'A'' - B^2 = 0, \; A''A - B'^2 = 0, \; BA - B'B'' = 0$$
$$B'A' - BB'' = 0, \; B''A'' - BB' = 0.$$

Elles expriment que la fonction u doit être un carré parfait.

4. Cherchons maintenant l'équation différentielle des surfaces applicables sur un plan.

Deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, lorsqu'on peut faire correspondre leurs points un à un, de manière que deux arcs de courbe correspondants quelconques soient égaux. D'après cela, u et v étant deux paramètres qui définissent un point de la surface, $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ le carré de la distance des points correspondant à u, v et $u + du$, $v + dv$, on doit pouvoir trouver deux fonctions de u et v, x et y, telles que l'on ait identiquement :

$$(1)\ E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = dx^2 + dy^2.$$

Considérons les points correspondant à $u = 0$, $v = 0$, et supposons que pour ces valeurs, E, F, G, x, y soient développables par la formule de Taylor, suivant les puissances de u et v, pour les petites valeurs de ces variables.

On a :

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots + E_n + \ldots.$$

E_n désignant une fonction homogène en u et v de degré n; ainsi

$$E_1 = \left(\frac{dE}{du}\right)_0 u + \left(\frac{dE}{dv}\right)_0 v;\ E_2 = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2E}{du^2}\right)_0 u^2 + 2\left(\frac{d^2E}{du\,dv}\right)_0 uv + \left(\frac{d^2E}{dv^2}\right)_0 v^2\right]$$

de même pour les autres fonctions. Posons :

$$x = au + bv + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots$$
$$y = a_1 u + b_1 v + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n + \ldots\ldots$$

il vient :

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 = {} & [a^2 + a_1^2 + 2(a\,x'_{2u} + a_1\,y'_{2u}) +]\,du^2 \\ & + 2[ab + a_1 b_1 + (a\,x'_{2}v + b\,x'_{2u} + a_1\,y'_{2v} + b_1\,y'_{2u}) +]\,du\,dv \\ & + [b^2 + b_1^2 + 2(b\,x'_{2v} + b_1\,y'_{2v}) +]\,dv^2 \end{aligned}$$

Remplaçant dans l'équation (1) $dx^2 + dy^2$ par sa valeur, et identifiant les coefficients de du^2, $du\,dv$, dv^2, il vient d'abord :

$$E_0 = a^2 + a_1^2,\ G_0 = b^2 + b_1^2,\ F_0 = ab + a_1 b_1;\ \text{d'où}\ ab_1 - ba_1 = \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Puis :

$$\tfrac{1}{2}E_1 = a\,x'_{2u} + a_1\,y'_{2u};\ F_1 = a\,x'_{2v} + b\,x'_{2u} + a_1\,y'_{2v} + b_1\,y'_{2u},\ \tfrac{1}{2}G_1 = b\,x'_{2v} + b_1\,y'_{2v},$$

équations qui déterminent x_2, y_2.

Identifiant les termes du deuxième degré, il vient ensuite :

$$\tfrac{1}{2}E_2 - \tfrac{1}{2}x'^2_{2u} - \tfrac{1}{2}y'^2_{2u} = ax'_{3u} + a_1\,y'_{3u},\ \tfrac{1}{2}G_2 - \tfrac{1}{2}x'^2_{2v} - \tfrac{1}{2}y'^2_{2v} = b\,x'_{3v} + b_1\,y'_{3}v.$$
$$F_2 - x'_{2u}x'_{2v} - y'_{2u}y'_{2v} = a\,x'_{3v} + b\,x'_{3u} + a_1\,y'_{3v} + b_1\,y'_{3u}.$$

Pour que ce dernier système d'équations admette une solution, il faut, d'après le n° 2, que les premiers membres satisfassent à la condition :

$$(1)\quad F''_{uv} - \tfrac{1}{2}E''_{v^2} - \tfrac{1}{2}G''_{u^2} + x''^2_{2uv} - x''_{2u^2}\,x''_{2v^2} + y''^2_{2uv} - y''_{2u^2}\,y''_{2v^2} = 0.$$

Posons :

$$a\,x_2 + a_1\,y_2 = f,\ \ b x_2 + b_1\,y_2 = f_1\,;$$

d'après le n° 2, f et f_1 s'expriment à l'aide de coefficients de E_1, G_1, F_1 ; et l'on a :

$$(2)\quad [x''^2_{2uv} - x''_{2u^2}\,x''_{2v^2} + y''^2_{2uv} - y''_{2u^2}\,y''_{2v^2}]$$

$$= \frac{G_0(f''^2_{uv} - f''_{u^2} f''_{v^2}) + F_0(f''_{u^2} f''_{1v^2} + f''_{1u^2} f''_{v^2} - 2 f''_{uv} f''_{1uv}) + E_0(f''^2_{1uv} - f''_{1u^2} f''_{1v^2})}{E_0\,G_0 - F_0^2} = I$$

Substituant dans l'équation (1), et après avoir développé, effaçant l'indice $_0$, on a l'équation différentielle à laquelle doivent satisfaire les fonctions E, F, G, pour que la surface soit applicable sur un plan.

5. Rapportons, en particulier, la surface à un système de coordonnées cartésiennes, ξ, η, ζ. Transportant l'origine au point considéré, il faudra remplacer respectivement :

$$\xi,\ \eta,\ \zeta \text{ par : } \xi_0 + u,\ \eta_0 + v,$$
$$\zeta_0 + p\,u + q\,v + \tfrac{1}{2}(r\,u^2 + 2 s\,u\,v + t\,v^2) + \zeta_3 +$$

Le carré de la distance de deux points infiniment voisins est $d\,\xi^2 + d\eta^2 + d\,\zeta^2$; ce qui donne :

$$E = 1 + p^2 + 2p\,(ru + sv) + [(ru + sv)^2 + 2p\,\zeta'_{3u}] +$$
$$F = pq + p\,(su + tv) + q\,(ru + sv) + (ru + sv)(su + tv) + p\,\zeta'_{3v} + q\,\zeta'_{3u} +$$
$$G = 1 + q^2 + q\,(su + tv) + (su + tv)^2 + 2q\,\zeta'_{3v} + \ldots$$

Par suite il vient :

$$a^2 + a_1^2 = 1 + p^2,\ b^2 + b_1^2 = 1 + q^2,\ ab + a_1 b_1 = pq,\ ab_1 - ba_1 = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Puis, d'après les formules du n° 2, les fonctions désignées plus haut par f et f_1, deviennent :

$$2f = p\,(ru^2 + 2\,suv + tv^2),\ \ 2f_1 = q\,(ru^2 + 2\,suv + tv^2)$$

et :

$$I = \frac{(p^2 + q^2)(s^2 - rt)}{1 + p^2 + q^2}$$

Les coefficients de ζ_3 se détruisent dans : $F''_{2uv} - \frac{1}{2} E''_{2v^2} - G''_{2u^2}$, et cette quantité se réduit à $rt - s^2$. Ainsi le premier membre de l'équation (1) devient :

$$\frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2}.$$

Donc l'équation différentielle des surfaces applicables sur un plan est $rt - s^2 = 0$ dans le système des coordonnées cartésiennes.

6. La recherche des surfaces applicables sur une surface donnée pour laquelle la distance de deux points infiniment voisins est :

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

revient à trouver trois fonctions de u et de v, x, y, z satisfaisant à l'équation différentielle :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

D'après une remarque de M. Darboux, si on suppose z connu et exprimé en u et v,

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 - dz^2$$

sera le ds^2 d'une surface développable, puisque cette expression sera égale à $dx^2 + dy^2$. Posons :

$$z = z_0 + pu + qv + \tfrac{1}{2}(ru^2 + 2\,suv + tv^2) + z_3 + \ldots$$

Il faut, dans le n° 4, remplacer E par :

$$E_0 - p^2 + E_1 - 2p(ru + sv) + E_2 - (ru + sv)^2 - 2\,pz'_{3u} + \ldots, \text{ etc.}$$

Substituant dans l'équation (1) du même numéro, on voit que, comme pour les surfaces développables, les termes provenant de z_3 disparaissent ; et ceux qui contiennent r, t, s, au second degré se réduisent à :

$$\frac{(s^2 - rt)(E_0 G_0 - F_0^2)}{E_0 G_0 - F_0^2 - p^2 G_0 - q^2 E_0 + 2\,F_0\,pq.}$$

Ainsi les fonctions x, y, z satisfont à une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme :

$$(E_0 G_0 - F_0)(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

A, B, C, D étant des fonctions connues de u, v, p et q.

7. Rapportons la surface à un système d'axes rectangulaires, ξ, η, ζ, l'origine étant au point correspondant à $u=0$, $v=0$ et le plan $\zeta=0$ étant le plan tangent. Le point étant supposé ordinaire, on a pour les petites valeurs de ξ, η :

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(r'\xi^2 + 2s'\xi\eta + t'\eta^2) + \zeta_3 + \ldots$$

et $r't' - s'^2 = \frac{1}{RR_1}$, R et R_1 étant les rayons de courbure principaux au point considéré. ξ, η, s'annulant pour $u=v=0$, ne contiennent pas de termes indépendants, par suite ζ ne contient pas de termes du premier degré en u et v. Ainsi on peut poser :

$$\xi = au + bv + \xi_2 + \ldots, \eta = a_1 u + b_1 v + \eta_2 + \ldots$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}(r u^2 + 2 s u v + t v^2 + \zeta_3 + \ldots\ldots$$

et l'on a :

$$rt - s^2 = (ab_1 - ba_1)^2 (r'\,t' - s'^2) = \frac{(ab_1 - ba_1)^2}{R\,R_1}.$$

Les équations pour déterminer a, b, a_1, b_1, restent les mêmes qu'au n° (4), ainsi que celles qui déterminent ξ_2, η_2.

Dans les équations qui donnent ξ_3, η_3, il faut remplacer E_2, G_2, F_2 respectivement par :

$$E_2 - \zeta'^2_{2u}, \; G_2 - \zeta'^2_{2v}, \; F_2 - \zeta'_{2u}\,\zeta'_{2v}.$$

L'équation (1) du n° (4) devient donc ;

$$rt - s^2 = \frac{E_0G_0 - F_0^2}{R\,R_1} = F''_{2uv} - \frac{1}{2}\,E''_{2v^2} - \frac{1}{2}\,G''_{2u^2} + I$$

8. Ainsi lorsque deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, les mesures de la courbure sont égales pour les deux surfaces aux points correspondants, ce qui est le théorème de Gauss. En outre, la formule qui démontre le théorème donne en même temps l'expression de la courbure.

Mais des formules établies au numéro précédent, on peut tirer d'autres conséquences. Les termes du premier et du second degré en u et v dans ξ et η sont indépendants des coefficients de ζ, et parmi ceux du premier degré a, b, a_1, b_1, un seul est arbitraire, cette quantité arbitraire correspondant à l'indétermination de la direction des axes coordonnés dans le plan tangent. Si on se donne une relation entre v et u : $v = mu + nu^2 + n_1 u^3 + \ldots$, on aura une courbe sur la surface donnée passant par le point $u=0$, $v=0$.

Transportant cette valeur de v dans ξ, η, ζ, on aura les équations de la courbe homologue sur la surface applicable. D'après ce qui précède, les éléments de la projection de cette courbe sur le plan tangent, fonctions des coefficients différentiels de premier et de second ordre, et indépendants du choix des axes coordonnés, sont constants pour $u=0$, $v=0$, pendant la déformation. Ainsi :

Sur deux surfaces applicables, les courbes homologues se coupent sous le même angle, et la courbure géodésique est la même aux points correspondants de deux courbes homologues.

9. La démonstration actuelle du théorème qui précède offre cet avantage sur les autres méthodes de donner l'expression de la courbure géodésique d'une courbe en fonction des variables u et v. On a, en désignant par $\frac{1}{\rho}$ la courbure géodésique :

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{(d\xi\, d^2\eta - d\eta\, d^2\xi)^2}{[d\xi^2+d\eta^2]^3}$$

Or pour $u=0$, on a :

$$d\xi=(a+bm)\,du,\quad d\eta=(a_1+b_1 m)\,du,$$
$$d^2\xi=2(\Xi_2+bn)\,du^2,\quad d^2\eta=2(\mathrm{H}_2+b_1 n)\,du^2,$$

Ξ_2, H_2 désignant ce que deviennent ξ_2 et η_2 en remplaçant u par 1 et v par m ; ce qui donne :

$$\frac{1}{\rho^2}=4\frac{[(E_0 G_0-F_0^2)\,n+\varphi_1(E_0+m F_0)-\varphi(F_0+m G_0)]^2}{(E_0 G_0-F_0^2)(E_0+2mF_0+m^2G_0)^3}.$$

φ_1 et φ désignant ce que deviennent f_1 et f lorsqu'on remplace u par 1 et v par m. Nous croyons cette formule nouvelle.

En écrivant que ρ est infini, on aura l'équation différentielle des lignes géodésiques, qui est en effaçant l'indice $_0$, et remplaçant m par v', n par $\frac{v''}{2}$:

$$(1)\quad (EG-F^2)\frac{v''}{2}+\varphi_1(E+v'F)-\varphi(F+v'G)=0$$

φ et φ_1 désignant les polynômes :

$$\frac{1}{4}\left[\frac{dE}{du}+2v'\frac{dE}{dv}+v'^2\left(2\frac{dF}{dv}-\frac{dG}{du}\right)\right]$$
$$\frac{1}{4}\left[\left(2\frac{dF}{du}-\frac{dE}{dv}\right)+2v'\frac{dG}{du}+v'^2\frac{dG}{dv}\right]$$

10. Si on suppose $E = 1$, $F = 0$, c'est-à-dire qu'aux variables v et u correspondent une série de lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, l'équation (1) devient :

$$2\,G\,v'' + 2\,v'\frac{dG}{du} + v'^2\,\frac{dG}{dv} + v'^3\,G\,\frac{dG}{du} = 0$$

Si, en outre, la surface est de révolution, et si à $v =$ constante, correspondent les méridiens de la surface, G est indépendant de v et l'équation précédente devient :

$$2\,G\,v'' + 2\,v'\frac{dG}{du} + v'^3\,G\,\frac{dG}{du} = 0,$$

et elle admet pour première intégrale :

$$\frac{1}{v'^2} = -G + K\,G^2$$

K étant une constante arbitraire. Ainsi pour avoir v en fonction de u, il suffit d'effectuer une intégration :

$$v = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{K\,G^2 - G}}.$$

Si $F = 0$, $E = G$, c'est-à-dire si aux variables u et v correspondent un système de lignes isothermes orthogonales, l'équation différentielle des lignes géodésiques devient :

$$2\,E\,v'' - (1 + v'^2)\left(\frac{dE}{dv} - v'\,\frac{dE}{du}\right) = 0.$$

Dans le cas où : $E = \varphi(u) + \psi(v)$, on en a immédiatement une première intégrale :

$$\frac{\varphi(u)\,v'^2 - \psi(v)}{1 + v'^2} = c$$

Cette intégrale première subsiste évidemment si le ds^2 de la surface est de la forme :

$$[\varphi(u) + \psi(v)]\,[\varphi_1(u)\,du^2 + \psi_1(v)\,dv^2].$$

On est dans ce cas lorsqu'on définit un point de l'ellipsoïde par les lignes de courbure qui y passent.

Sur l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins dans un système de coordonnées curvilignes.

11. L'équation différentielle :

$$E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 = dx^2 + dy^2,$$

E, F, G, x, y étant des fonctions de u et de v, implique des relations entre les fonctions E, F, G. Il est à supposer qu'il en est de même pour l'équation différentielle suivante :

$$(1)\quad E\, d\rho^2 + F\, d\rho_1^2 + G\, d\rho_2^2 + 2\, L\, d\rho_1\, d\rho_2 + 2\, M\, d\rho_2\, d\rho + 2\, N\, d\rho\, d\rho_1 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

E, F, G, L, M, N, x, y, z, étant supposés des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2. Si on prend pour variables indépendantes x, y, z, ρ, ρ_1, ρ_2 seront trois fonctions d'x, y et z, qui représenteront trois familles de surfaces, si on considère x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point; et le premier membre de l'équation (1) est le carré de la distance de deux points d'intersection infiniment voisins des deux systèmes de trois surfaces correspondant à ρ, ρ_1, ρ_2, d'une part; et $\rho + d\rho$, $\rho_1 + d\rho_1$, $\rho_2 + d\rho_2$, d'autre part.

Pour obtenir les relations entre les dérivées des fonctions E, F, G, L, M, N, nous supposerons, comme plus haut, que l'origine des coordonnées cartésiennes coïncide avec le point $\rho = 0$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$; et que E, F, G, L, M, N, x, y, z soient développables, suivant les puissances de ρ, ρ_1, ρ_2 pour les petites valeurs de ces variables.

Ainsi :

$$E = E_0 + E_1 + E_2 \ldots\ldots,\quad F = F_0 + F_1 + \ldots\ldots$$

E_1, représentant :

$$\left(\frac{dE}{d\rho}\right)_0 \rho + \left(\frac{dE}{d\rho_1}\right)_0 \rho_1 + \left(\frac{dE}{d\rho_2}\right)_0 \rho_2, \text{ etc.}$$

$$x = a\,\rho + b\,\rho_1 + c\,\rho_2 + x_2 + x_3 + \ldots,\quad y = a_1\,\rho + b_1\,\rho_1 + c_1\,\rho_2 + y_2 + \ldots$$
$$z = a_2\,\rho + b_2\,\rho_1 + c_2\,\rho_2 + z_2 + z_3 + \ldots$$

dx, dy, dz désignant les différentielles totales de x, y, z, le carré de la distance de deux points infiniment voisins, correspondant à :

$$\rho,\ \rho_1,\ \rho_2 \text{ et } \rho + d\rho,\ \rho_1 + d\rho_1,\ \rho_2 + d\rho_2, \text{ est :}$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Identifiant avec l'expression écrite plus haut, il vient d'abord

$$(1)\quad \begin{aligned} &E_0 = a^2 + a_1^2 + a_2^2,\ F_0 = b^2 + b_1^2 + b_2^2,\ G_0 = c^2 + c_1^2 + c_2^2,\\ &L_0 = bc + b_1c_1 + b_2c_2,\ \ M_0 = ca + c_1a_1 + c_2a_2,\ \ N_0 = ab + a_1b_1 + a_2b_2. \end{aligned}$$

d'où on tire :

$$\begin{vmatrix} a, & a_1, & a_2 \\ b, & b_1, & b_2 \\ c, & c_1, & c_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} E_0, & N_0, & M_0 \\ N_0, & F_0, & L_0 \\ M_0, & L_0, & G_0 \end{vmatrix}$$

Puis identifiant les termes du premier degré en ρ, ρ_1, ρ_2 on a :

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}E_1 = a\,x'_{2\rho} + a_1\,y'_{2\rho} + a_2\,z'_{2\rho},\\ &\tfrac{1}{2}F_1 = bx'_{2\rho_1} + b_1\,y'_{2\rho_1} + b_2\,z'_{2\rho_1},\\ &\tfrac{1}{2}G_1 = cx'_{2\rho_2} + c_1\,y'_{2\rho_2} + c_2\,z'_{2\rho_2},\\ &N_1 = bx'_{2\rho} + ax'_{2\rho_1} + b_1y'_{2\rho} + a_1y'_{2\rho_1} + b_2z'_{2\rho} + a_2z'_{2\rho_1},\\ &M_1 = cx'_{2\rho} + ax'_{2\rho_2} + c_1y'_{2\rho} + 1y'_{2\rho_2} + c_2z'_{2\rho} + a_2z'_{2\rho_2},\\ &L_1 = bx'_{2\rho_2} + cx'_{2\rho_1} + b_1\,y'_{2\rho_2} + c_1y'_{2\rho_1} + b_2z'_{2\rho_2} + c_2z'_{2\rho_1}. \end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$(2)\ ax_2 + a_1y_2 + a_2z_2 = f,\ bx_2 + b_1y_2 + b_2z_2 = f_1,\ cx_2 + c_1y_2 + c_2z_2 = f_2,$$

f, f_1, f_2 seront donnés par les formules du n° 3 à l'aide des coefficients de E_1, F_1, G_1, L_1, M_1, N_1. En identifiant les termes du second degré, on a six équations qu'on obtiendra à l'aide des précédentes en remplaçant dans les seconds membres, x_2, y_2, z_2 par x_3, y_3, z_3, et dans les premiers

$$E_1 \text{ par } E_2 - x'^2_{2\rho} - y'^2_{2\rho} - z'^2_{2\rho},\ F_1 \text{ par } F_2 - x'^2_{2\rho_1} - y'^2_{2\rho_1} - z'^2_{2\rho_1},$$
$$G_1 \text{ par } G_2 - x'^2_{2\rho_2} - y'^2_{2\rho_2} - z'^2_{2\rho_2},$$
$$L_1 \text{ par } L_2 - x'_{2\rho_1}x'_{2\rho_2} - y'_{2\rho_1}y'_{2\rho_2} - z'_{2\rho_1}z'_{2\rho_2},\ \ M_1 \text{ par } M_2 - x'_{2\rho_2}x'_{2\rho} - y'_{2\rho_2}y'_{2\rho} -$$
$$z'_{2\rho_2}z'_{2\rho},\ N_1 \text{ par } N_2 - x'_{2\rho}x'_{2\rho_1} - y'_{2\rho}y'_{2\rho_1} - z'_{2\rho}z'_{2\rho_1}.$$

Pour que ces dernières équations admettent une solution, il faut que les premiers membres satisfassent aux équations différentielles établies au n° 3.

Ces équations ont été données par M. Lamé dans le cas où les surfaces coordonnées sont orthogonales; dans le cas général, elles correspondent aux six équations données par M. Aoust entre ce qu'il appelle les courbures *inclinées* des lignes coordonnées.

Ces équations s'interprètent aisément quand l'expression (1) est égale à: $d\rho^2 + d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + du^2$, u étant une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. On trouve qu'alors, comme dans le cas des surfaces applicables sur un plan, f, f_1, f_2, sont proportionnels à:

$$2u_2 = \left(\frac{d^2u}{d\rho^2}\right)_0 \rho^2 + \left(\frac{d^2u}{d\rho_1^2}\right)_0 \rho_1^2 + \left(\frac{d^2u}{d\rho_2^2}\right)_0 \rho_2^2 + 2\left(\frac{d^2u}{d\rho_1 d\rho_2}\right)_0 \rho_1\rho_2 + 2\left(\frac{d^2u}{d\rho_2 d\rho}\right)_0 \rho_2\rho + 2\left(\frac{d^2u}{d\rho d\rho_1}\right)_0 \rho\,\rho_1.$$

Les termes provenant de u_3 disparaissent des équations de conditions, et elles expriment simplement que u_2 est un carré parfait (3). Ainsi la fonction u peut se définir par les équations:

$$\rho\,\phi(\alpha) + \rho_1\,\phi_1(\alpha) + \rho_2\,\phi_2(\alpha) + u + \chi(\alpha) = 0$$
$$\rho\,\phi'(\alpha) + \rho_1\,\phi'_1(\alpha) + \rho_2\,\phi'_2(\alpha) + \chi'(\alpha) = 0$$

ϕ, ϕ_1, ϕ_2, χ étant des fonctions indéterminées du paramètre α.

12. Parmi les neuf quantités a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, trois seulement sont arbitraires à cause des équations (1) du numéro précédent. Comme on peut éliminer entre ces équations, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, on ne peut se donner arbitrairement a, b, c, de même a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2.

Dans le cas où les surfaces coordonnées sont orthogonales deux à deux, c'est-à-dire ou $L = M = N = 0$, des équations (1) on déduit d'après les formules connues.

$$\frac{a^2}{E_0} + \frac{b^2}{F_0} + \frac{c^2}{G_0} = 1, \quad \frac{a_1^2}{E_0} + \frac{b_1^2}{F_0} + \frac{c_1^2}{G_0} = 1, \quad \frac{a_2^2}{E_0} + \frac{b_2^2}{F_0} + \frac{c_2^2}{G_0} = 1$$

$$\frac{aa_1}{E_0} + \frac{bb_1}{F_0} + \frac{cc_1}{G_0} = 0, \quad \frac{aa_2}{E_0} + \frac{bb_2}{F_0} + \frac{cc_2}{G_0} = 0, \quad \frac{a_1a_2}{E_0} + \frac{b_1b_2}{F_0} + \frac{c_1c_2}{G_0} = 0.$$

Par suite, il vient, en multipliant les deux membres de la première des équations (2) par $\frac{a}{E_0}$, ceux de la seconde par $\frac{b}{F_0}$, ceux de la troisième par $\frac{c}{G_0}$ et ajoutant:

$$x_2 = \frac{a}{E_0} f + \frac{b}{F_0} f_1 + \frac{c}{G_0} f_2,$$

de même:

$$y_2 = \frac{a_1}{E_0} f + \frac{b_1}{F_0} f_1 + \frac{c_1}{G_0} f_2; \quad z_2 = \frac{a_2}{E_0} f + \frac{b_2}{F_0} f_1 + \frac{c_2}{G_0} f_2.$$

D'où les relations entre les dérivées de la fonction x de ρ, ρ_1, ρ_2 remarquées par M. Lamé dans son *Traité sur les coordonnées curvilignes* (p. 88), et qui lui ont paru curieuses, parce qu'elles ne contenaient ces dérivées qu'au premier degré.

13. Des formules établies au n° 11, on peut déduire toutes les affections des surfaces coordonnées, et plus généralement des surfaces définies par une équation entre ρ, ρ_1, ρ_2, et des courbes définies par deux équations entre ρ, ρ_1, ρ_2. Ainsi cherchons les rayons de courbure principaux des surfaces coordonnées, que nous supposons orthogonales; on peut faire :

$$b = c = 0 \quad a_1 = c_1 = 0 \quad a_2 = b_2 = 0$$

ce qui revient à prendre pour axes de coordonnées les normales aux surfaces $\rho = 0$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$. On a alors :

$$a = \sqrt{E_0},\ b_1 = \sqrt{F_0},\ c_2 = \sqrt{G_0};$$

puis, en se bornant aux termes du deuxième degré :

$$x = \sqrt{E_0}\,\rho + \frac{1}{\sqrt{E_0}} f,\ y = \sqrt{F_0}\,\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{F_0}} f_1,\ z = \sqrt{G_0}\,\rho_2 + \frac{1}{\sqrt{G_0}} f_2$$

où d'après le n° 3.

$$4f = \rho^2 \left(\frac{dE}{d\rho}\right)_0 - \rho_1^2 \left(\frac{dF}{d\rho}\right)_0 - \rho_2^2 \left(\frac{dG}{d\rho}\right)_0 + 2\rho_2\rho\left(\frac{dE}{d\rho_2}\right)_0 + 2\rho_1\rho\left(\frac{dE}{d\rho_1}\right)_0,$$

$$4f_1 = -\rho^2 \left(\frac{dE}{d\rho_1}\right)_0 + \rho_1^2 \left(\frac{dF}{d\rho_1}\right)_0 - \rho_2^2 \left(\frac{dG}{d\rho_1}\right)_0 + 2\rho_2\rho_1\left(\frac{dF}{d\rho_2}\right)_0 + 2\rho\rho_1\left(\frac{dF}{d\rho}\right)_0,$$

$$4f_2 = -\rho^2 \left(\frac{dE}{d\rho_2}\right)_0 - \rho_1^2 \left(\frac{dF}{d\rho_2}\right)_0 + \rho_2^2 \left(\frac{dG}{d\rho_2}\right)_0 + 2\rho_2\rho_1\left(\frac{dG}{d\rho_1}\right)_0 + 2\rho\rho_2\left(\frac{dG}{d\rho}\right)_0$$

Ainsi l'on a pour l'équation de la surface $\rho_2 = 0$:

$$z = -\frac{1}{4\sqrt{G_0}}\left[\left(\frac{dE}{d\rho_2}\right)_0 \frac{x^2}{E_0} + \left(\frac{dF}{d\rho_2}\right)_0 \frac{y^2}{F_0}\right].$$

Cette équation montre que les axes des x et des y sont tangents aux lignes de courbure de la surface $\rho_2 = 0$, passant par l'origine (*Théorème* de Dupin), et elle donne pour valeurs des rayons de courbure principaux :

$$-\frac{1}{2E_0\sqrt{G_0}}\left(\frac{dE}{d\rho_2}\right)_0,\ -\frac{1}{2F_0\sqrt{G_0}}\left(\frac{dF}{d\rho_2}\right)_0.$$

Familles de surfaces pouvant faire partie d'un système triple orthogonal.

14. On sait que pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un

système orthogonal, il faut que son paramètre satisfasse à une équation différentielle du troisième ordre, indiquée pour la première fois par M. Bonnet, et que M. Maurice Lévy a donnée sous une forme simple, en prenant un système particulier de coordonnées (*Journal de l'Ecole polytechnique*, 43e cahier). Nous nous proposons d'établir directement le résultat de M. Lévy, en partant des équations qui définissent un système orthogonal.

α, β, γ étant trois fonctions d'x, y, et z, pour qu'à trois valeurs données quelconques de α, β, γ correspondent trois surfaces orthogonales, il faut que l'on ait :

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dy}+\frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dz}=0\\ &\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dy}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\frac{d\alpha}{dz}=0\\ &\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=0 \end{aligned}$$

Considérons les trois surfaces correspondant à un système de valeurs de α, β, γ que nous pouvons supposer être 0, et prenons pour axes de coordonnées les normales à ces surfaces en l'un de leurs points de rencontre. On peut ramener les équations des trois familles à la forme :

$$\alpha = x + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots; \quad \beta = y + \beta_2 + \ldots\ldots; \quad \gamma = z + \gamma_2 + \ldots\ldots;$$

α_2, β_2, γ_2 désignant des polynômes homogènes du second degré en x, y, z ; α_3, β_3, γ_3 du troisième, etc. Tirons de ces équations les coefficients différentiels de α, β, γ et transportons-les dans les équations (1). Elles devront être identiquement vérifiées quelles que soient les valeurs de x, y, z. En égalant à 0 les termes du premier degré, on a :

$$\beta'_{2z} + \gamma'_{2y} = 0, \quad \gamma'_{2x} + \alpha'_{2z} = 0, \quad \alpha'_{2y} + \beta'_{2x} = 0;$$

on en tire par différentiation :

$$\beta''_{2zx} + \gamma''_{2yx} = 0; \quad \gamma''_{2xy} + \alpha''_{2zx} = 0, \quad \alpha''_{2yz} + \beta''_{2xz} = 0$$

d'où :

$$(2)\quad \alpha''_{2yz} = 0, \quad \beta''_{2xz} = 0, \quad \gamma''_{2yx} = 0$$

c'est-à-dire que les axes de coordonnées sont tangents aux lignes de courbure des trois surfaces, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; ce qui es le théorème de Dupin.

Egalant à 0, les termes du second degré, il vient ensuite :

$$\beta'_{3z} + \gamma'_{3y} = -(\beta'_{2x}\gamma'_{2x} + \beta'_{2y}\gamma'_{2y} + \beta'_{2z}\gamma'_{2z}) = f$$
$$\gamma'_{3x} + \alpha'_{3z} = -(\gamma'_{2x}\alpha'_{2x} + \gamma'_{2y}\cdot\alpha'_{2y} + \gamma'_{2z}\alpha'_{2z}) = f_1$$
$$\alpha'_{3y} + \beta'_{3x} = -(\alpha'_{2x}\beta'_{2x} + \alpha'_{2y}\beta'_{2y} + \alpha'_{2z}\beta'_{2z}) = f_2.$$

De ces équations on tire, en opérant comme plus haut :

$$2\gamma''_{3xy} = f'_x + f'_{1y} - f'_{2z}.$$

Le second membre contient les dérivées de β_2, α_2; mais elles disparaissent si on prend la dérivée par rapport à z, en tenant compte bien entendu des équations (2). Il vient :

$$2\gamma'''_{3xyz} = f''_{xz} + f''_{1yz} - f''_{2z^2} = 4\gamma''_{2xz}\gamma''_{2yz}.$$

En rapportant la famille des surfaces γ à un système fixe d'axes coordonnées, on aura donc une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

15. M. Lévy a démontré dans son Mémoire que le lieu des ombilics des surfaces γ est une trajectoire orthogonale de ces surfaces. Ce théorème se déduit facilement des formules qui précèdent. Posons :

$$\gamma = z + (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx) +$$
$$[\Gamma_3 + z(A_1x^2 + A'_1y^2 + 2B_1xy)] + \dots$$

Γ_3 désignant un polynôme homogène du troisième degré, dans lequel aucun terme ne contient z au premier degré. D'après ce qui précède, on a :

$$B_1 = 4BB'.$$

Dans les environs d'un ombilic, les lignes de courbure prennent successivement toutes les directions dans le plan tangent ; pour l'ombilic même les lignes de courbure sont indéterminées et la relation :

$$B_1 = 4BB'$$

doit être vérifiée quelle que soit la direction de l'axe des x. En remplaçant x et y par :

$$x'\cos\phi - y'\sin\phi,\quad x'\sin\phi + y'\cos\phi$$

dans l'expression de γ, le coefficient de $y'z$ devient $2(B\cos\phi - B'\sin\phi)$, celui de $x'z$: $2(B\sin\phi + B'\cos\phi)$ et enfin celui de $zx'y'$:

$$2B_1\cos 2\phi + (A'_1 - A)\sin 2\phi;$$

$\sin 2\varphi$; si le point, origine des coordonnées, est un ombilic de la surface $\gamma = 0$, on a $A = A'$, et on doit avoir quel que soit φ :

$$B_1 \cos 2\varphi + (A'_1 - A_1)\frac{\sin 2\varphi}{2} = (B^2 - B'^2) \sin 2\varphi + 4 BB' \cos 2\varphi ;$$

ce qui exige qu'on ait :

$$B_1 = 4 BB', \; A'_1 - A_1 = 4 (B^2 - B'^2).$$

Posons :

$$A_1 - 4 B'^2 = A'_1 - 4 B^2 = a,$$

l'expression de γ devient :

$$\gamma = z + [A (x^2 + y^2) + A''z^2 + 2 Byz + 2 B'zx] + [\Gamma_3 + az (x^2 + y^2) + 4z (B'x + By)^2] + \ldots$$

et on peut disposer de l'axe des x de manière que $B' = 0$.

16. Pour démontrer le théorème de M. Lévy, on peut procéder de deux manières différentes; supposer γ très-petit et constant, et montrer que le point de rencontre de la surface correspondante avec l'axe des z est un ombilic de cette surface, en y transportant l'origine; c'est d'abord ainsi que j'avais procédé. Mais il est plus net et plus simple, ainsi que me l'a fait remarquer M. Darboux, de déduire la propriété en question des équations de la ligne des ombilics des surfaces $\gamma =$ const... On reconnaît aisément que la tangente à cette ligne est la normale à la surface $\gamma = 0$.

Les équations qui déterminent les ombilics d'une surface sont :

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

Pour avoir les coefficients différentiels p, q, r, s, t relatifs à la surface $\gamma =$ une quantité constante très-petite, et aux points de cette surface peu éloignés de l'origine, nous donnerons à x et y, les accroissements infiniment petits dx, dy; l'accroissement correspondant de z, Δz, est défini par la condition que γ ne varie pas. Ainsi Δz est donné par l'équation :

$$0 = \Delta z + (\gamma'_{2x} dx + \gamma'_{2y} dy + \gamma'_{2z} \Delta z) + [A (dx^2 + dy^2) + A''\Delta z^2 + 2 Bdy\, \Delta z] + + (\gamma'_{3x} dx + \gamma'_{3y} dy + \gamma'_{3z} \Delta z) + \tfrac{1}{2} [\gamma''_{3x^2} dx^2 + \ldots] + \ldots$$

en supposant ce qui est permis $B' = 0$.

$$\text{Or :} \quad \Delta z = dz + \frac{d^2 z}{2} + \frac{d^3 z}{6} + \ldots$$

$$\text{où :} \quad dz = pdx + qdy, \; d^2 z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2, \ldots\ldots$$

Substituant cette valeur de Δz dans l'équation précédente, ordonnant par rapport à dx, dy, et égalant à 0 les coefficients des diverses puissances de dx, dy, on aura les équations qui déterminent p, q, r, s, t, etc.

Il vient en égalant à 0 le coefficient de dx :

$$p = -\frac{\gamma'_{2x} + \gamma'_{3x} + \dots}{1 + \gamma'_{2z} + \dots}$$

ou en se bornant dans le développement de p aux termes du premier degré en x, y, z:

$$p = -\gamma'_{2x} = -2\,Ax$$

de même :

$$q = -\gamma'_{2y} = -2\,(Ay + Bz).$$

Egalant à 0 le coefficient de dx^2, on a :

$$\frac{r}{2} = -\frac{A + \frac{1}{2}\gamma''_{3x^2} +}{1 + \gamma'_{2z} +} \quad \text{ou : } r = -2\,A - \gamma''_{3x^2} + 2\,A\,\gamma'_{2z}$$

en se bornant aux termes qui contiennent x, y, z à une puissance inférieure à 2. De même :

$$s = 4\,BAx - \gamma''_{3xy}\,, \quad t = -2\,A + 8\,B\,(Ay + Bz) - \gamma''_{3y^2} + 2\,A\,\gamma'_{2z}.$$

Pour avoir le lieu des ombilics des surfaces $\gamma = \text{const}$; on peut supposer x, y, z développés suivant les puissances de l'arc σ compris entre l'origine et le point x, y, z. Soient :

$$x = l\sigma + m\sigma^2 + n\sigma^3 \dots, \quad y = l_1\,\sigma + m_1\,\sigma^2 + \dots, \quad z = l_2\,\sigma + m_2\,\sigma^2 + \dots$$

Les coefficients l, m, ..., l_1, m_1 ..., l_2, m_2, ... se détermineront en portant ces valeurs dans les équations :

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sigma^2$$

ordonnant par rapport à σ et annulant les coefficients des diverses puissances de σ.

D'après les valeurs précédemment données, dans l'équation $\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2} = 0$ les termes du premier degré en x, y, z, qui seuls peuvent donner des termes du premier degré en σ, se réduisent à :

$$\gamma''_{3x^2} - \gamma''_{3y^2} + 8\,B\,(Ay + Bz)$$

et il est facile de s'assurer que les termes en z se détruisent. Remplaçant x

et y par l et l_1; l'expression obtenue doit être nulle ; ce qui donne une équation de la forme :

$$L\,l + L_1\,l_1 = 0.$$

Le produit pq est au moins du second degré en σ, et le rapport $\frac{s}{pq}$ doit être très-voisin de $-2A$ pour de petites valeurs de σ; cela exige que les termes du premier degré en σ s'annulent dans s. Ces termes ne peuvent provenir que de: $4\,ABx - \gamma''_{3xy}$, qui n'a pas de terme en z; remplaçant x et y par l et l_1, on obtient une nouvelle équation

$$M\,l + M_1\,l_1 = 0$$

homogène et du premier degré en l et l_1. Les deux équations obtenues n'étant pas en général compatibles, il faut qu'on ait séparément $l = 0$, $l_1 = 0$. Il en résulte en vertu de l'équation :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2,\ l_2 = 1.$$

Ainsi la ligne des ombilics est tangente à l'axe des z, c'est-à-dire normale à la surface $\gamma = 0$.

17. Le plan osculateur de la courbe est le plan des zy. En effet, les cosinus de la tangente à l'extrémité de l'arc σ, sont proportionnels à p, q, -1, ou:

$$-2\,Ax\ldots\ldots,\quad -2\,Ay - 2\,Bz\ldots\ldots,\quad -1$$

c'est-à-dire en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de σ, et négligeant les termes de degré supérieur à 1 en σ:

$$0\quad,\quad -2\,B\sigma\quad,\quad -1.$$

Ainsi cette tangente est perpendiculaire à l'axe des x, à ce degré d'approximation ; par suite, l'axe des x est perpendiculaire au plan osculateur, et ce plan osculateur est le plan des zy.

On déduit du théorème de M. Lévy ce résultat intéressant que les seules familles de surfaces du second degré susceptibles de faire partie d'un système orthogonal sont des familles de surfaces à plans principaux communs.

Vu et approuvé.
Paris, 14 janvier 1878.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer.
14 janvier 1878.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

Note relative à la première Thèse.

Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier.

Le théorème qui fait l'objet du n° 4 de la première Thèse peut s'étendre aux congruences irréductibles suivant un module premier. Soient :

$$F(x) \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

une congruence irréductible de degré ν, i une de ses racines et

$$f(i) \equiv a_0 + a_1 i + \ldots\ldots\ldots + a_{\nu-1} i^{\nu-1} \ (mod.\ p.)$$

une fonction entière de cette racine.

Les autres racines de la congruence $F(x) \equiv 0$, peuvent être représentées par :

$$i^p, i^{p^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ i^{p^{\nu-1}}$$

Cherchons le nombre de termes distincts compris dans la suite :

$$(1) \qquad f(i), \qquad f(i^p), \ldots\ldots\ldots\ldots, f\left(i^{p^{\nu-1}}\right)$$

Les termes de cette suite sont respectivement congrus aux termes de la suivante :

$$(2) \qquad f(i) \qquad [f(i)]^p, \qquad [f(i)]^{p^{\nu-1}}$$ (Serret, *Alg. sup.*, n° 347.)

Soit : $[f(i)]^{p^{k+\nu_1}}$ le premier terme de cette suite congru à un des précédents, $[f(i)]^{p^k}$; on aura :

$$[f(i)]^{p^{k+\nu_1}} - [f(i)]^{p^k} \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

ou :

$$\left[[f(i)]^{p^{\nu_1}} - f(i) \right]^{p^k} \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

d'où

$$[f(i)]^{p^{\nu_1}} \equiv f(i) \ (mod.\ p.)$$

Ainsi $k = 0$. D'ailleurs,

$$[f(i)]^{p^{\nu_1+1}} \equiv [f(i)]^p \ (mod.\ p.)$$

Donc les termes des suites (1) et (2) se reproduisent périodiquement à partir de ν_1^{ieme} ; et comme :

$$[f(i)]^{p^\nu} \equiv f(i) \qquad (mod.\ p.)$$

ν_1 est un diviseur de ν.

La congruence qui admet pour racines les ν_1 valeurs distinctes des suites (1) et (2) a ses coefficients entiers, et elle est irréductible, car autrement les ν_1 termes :

$$f(i),\ [f(i)]^p, \ldots\ldots [f(i)]^{p^{\nu_1-1}}$$

ne seraient pas distincts.

Ainsi, lorsque dans une fonction entière quelconque $f(x)$ à coefficients entiers, on remplace x par les ν racines d'une congruence irréductible, (*mod. p.*) le nombre des valeurs distinctes obtenues est un diviseur de ν, et la congruence qui admet pour racines ces valeurs distinctes est irréductible.

Nous ferons deux applications de ce théorème :

Première application. — Soient $F(x)$ et $F_1(x)$ deux fonctions irréductibles suivant le *mod. p.*, de degré ν et ν_1, premiers entre eux, l'élimination de i et i_1 entre les trois congruences :

$$F(i) \equiv 0,\ F_1(i_1) \equiv 0,\ I \equiv ii_1 \ (mod.\ p.)$$

donnera une congruence : $F(I) \equiv 0$ irréductible *mod. p.*, et de degré $\nu\nu_1$.

Le degré de la congruence irréductible dont I est racine est égal au nombre de termes distincts que comprend la suite :

$$I,\ I^p,\ I^{p^2} \ \ldots\ldots\ldots$$

Soit μ le plus petit nombre tel que : $I^{p^\mu} \equiv I$, on aura en remplaçant I par ii_1 :

$$i^{p^\mu-1} \equiv \left(\frac{1}{i_1}\right)^{p^\mu-1} \equiv \alpha, \quad (mod.\ p.)$$

α appartenant aux deux congruences $x^{p^\nu-1} - 1 \equiv 0$, $x^{p^{\nu_1}-1} - 1 \equiv 0$ (*mod. p.*) et par suite au p. g. c. d. de leurs premiers membres égalé à 0 :

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

est réel.

Je dis de plus que α est congru à 1, *mod. p.*

En effet, de $i^{p^\mu-1} \equiv \alpha$, on tire : $i^{p^\mu} \equiv \alpha i$; par suite αi est racine de la congruence $F(x) \equiv 0$. Les deux congruences :

$$F(i) \equiv 0, \quad F(\alpha i) \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

de même degré ayant une racine commune, ont leurs coefficients proportionnels, puisqu'elles sont irréductibles ; donc on a entre autres relations au moins celle-ci : $\alpha^\nu \equiv 1$ (*mod. p.*).

De même $\frac{i_1}{\alpha}$ est racine de $F_1(x) \equiv 0$, et l'on a :

$$\alpha^{\nu_1} \equiv 1 \ (mod.\ p.).$$

Comme ν et ν_1 sont premiers entre eux, ces deux dernières congruences n'ont d'autre racine commune que 1. Ainsi :

$$i^{p^\mu-1} \equiv \left(\frac{1}{i_1}\right)^{p^\mu-1} \equiv 1 \ (mod.\ p.)$$

Ce qui exige que μ soit divisible par ν et ν_1 et puisque ces deux nombres sont premiers entre eux, $\mu = \nu\nu_1$.

Deuxième application. — Soit $F(x)$ une fonction irréductible (*mod. p.*), de degré ν, et telle que le coefficient du terme de degré $\nu - 1$ ne soit pas congru à 0, *mod. p.*; la fonction $F(x^p - x)$ obtenue en remplaçant x par $x^p - x$ dans la première est irréductible.

Soit I, une racine de la congruence :

$$F(x^p - x) \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

on a :

$$I^p \equiv I + i \ (mod.\ p.)$$

i étant une racine de $F(x) \equiv 0$. Puis :

$$I^{p^2} \equiv I + i + i^p \quad I^{p^3} \equiv I + i + i^p + i^{p^2}, \ldots\ldots \ (mod.\ p.).$$

Il en résulte que les νp premiers termes de la suite :

$$I, I^p, I^{p^2} \ldots\ldots\ldots$$

sont distincts.

En effet, soit :

$$I^{p^k} \equiv I \ (mod.\ p.)$$

on en conclut :

$$i + i^{p} + i^{p^2} \ldots\ldots\ldots + i^{p^{k-1}} \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

d'où, en élevant à la puissanee $p^{\text{ième}}$

$$i^{p} + i^{p^2} + \quad + i^{p^k} \equiv 0 \ (mod.\ p.)$$

et en rapprochant cette congruence de la précédente

$$i^{p^k} - i \equiv 0, \ (mod.\ p.)$$

ce qui exige que k soit divisible par ν. On a :

$$I^{p^\nu} \equiv I + s_1 \quad I^{p^{2\nu}} \equiv I + 2s_1 \ (mod.\ p.)$$

et quel que soit m :

$$I^{p^{m\nu}} \equiv I + ms_1 \ (mod.\ p.)$$

s_1 désignant la somme : $\qquad i + i^{p} + i^{p^2} + i^{p^{\nu-1}}$,
différente de 0, *mod. p.* par hypothèse.

Donc pour que $I^{p^{m\nu}} \equiv I$, il faut et il suffit que $ms_1 \equiv 0$, d'où $m \equiv 0 \ (mod.\ p.)$.
Ainsi le plus petit nombre k tel que :

$$1^{p^k} \equiv I \ (mod.\ p.)$$

est $p\nu$. Donc I est racine d'une congruence irréductible de degré $p\nu$, c'est-à-dire que $F(x^p - x)$ est une fonction irréductible.

De plus, l'analyse précédente montre que si s_1 ou le coefficient de $x^{\nu-1}$ dans $F(x)$ est congru à 0 *mod. p.*, $F(x^p - x)$ est décomposable en p facteurs irréductibles, *mod. p.* de degré ν.

J'ai établi déjà ce théorème, en m'appuyant sur une théorie un peu différente dans une note présentée par M. Serret à l'Académie des Sciences le 14 février 1870. Mais de la démonstration actuelle on peut tirer une méthode pour former des fonctions irréductibles, *mod. p.* d'un degré égal à une puissance du module, qui dans certains cas conduira à un calcul moins long qne celle qni a été donnée par M. Serret dans le *Journal des Mathématiques pures*, année 1872.

Soient $f(x)$ une fonction irréductible de degré p^n, et i une des racines de la congruence $f(x) \equiv 0 \ (mod.\ p.)$; i^ν est racine quel que soit ν, d'une congruence irréductible dont le degré divise p^n. Ce degré est égal au nombre $(p^{n'})$ de termes distincts compris dans la suite :

$$i^{\nu}\ (i^{\nu})^{p}\ (i^{\nu})^{p^2},\ (i^{\nu})^{p^3}\ \ldots\ldots.$$

Soit s_ν la somme des puissances $\nu^{\text{ièmes}}$ des racines de la congruence $f(x) \equiv 0$, on a :

$$s_\nu \equiv p^{n-n'}\left[\overset{\nu}{i} + (i^p)^{\nu} + (i^{p^2})^{\nu} + \ldots\ldots \left(i^{p^{p^{n'}-1}}\right)^{\nu}\right] (mod.\ p.)$$

Si donc s_ν n'est pas congru à 0 *mod. p.*, $n = n'$ et i^ν est racine d'une congruence irréductible de degré p^n.

De plus, dans cette congruence, le terme de degré $p^n - 1$ est congru à s_ν et, par conséquent, différent de 0.

En y remplaçant x par $x^p - x$ on obtiendra donc une fonction irréductible de degré p^{n+1}.

Exemples : La congruence $x^p - x - 1 \equiv 0$ *mod. v.* est irréductible, puisqu'elle provient du changement de x en $x^p - x$ dans $x - 1$. On reconnaît immédiatement que s_{-1} est différent de 0 *mod. p.* dans cette congruence.

On obtiendra donc une congruence irréductible de degré p, et dans laquelle le coefficient du terme de degré $p - 1$ sera différent de 0, en éliminant x entre la congruence précédente et : $X \equiv \frac{1}{x}$ (*mod. p.*).

L'élimination s'effectue sans difficulté, et l'on obtient :

$$X^p + X^{p-1} - 1 \equiv 0\ (mod.\ p.).$$

La congruence

$$x^{p^2} - x^p + (x^p - x)^{p-1} - 1 \equiv 0\ (mod.\ p.)$$

de degré p^2 est donc irréductible.

Dans cette dernière congruence s_{-p+1} est différent de 0, *mod. p.*

Eliminant x entre les deux congruences :

$$\left.\begin{array}{c} x^{p^2} - x^p + (x^p - x)^{p-1} - 1 \equiv 0, \\ X\,x^{p-1} - 1 \equiv 0, \end{array}\right\}\ (mod.\ p.)$$

Il vient :

$$X^p\,[X^p - (1 - X)^{p-1}]^{p-1} - (1 - X^p)^{p-1} \equiv 0\ (mod.\ p.)$$

congruence irréductible de degré p^2, et dans laquelle le coefficient du terme de degré $p^2 - 1$ est différent de 0, (*mod. p.*).

La congruence de degré p^3 :

$$(x^{p^2} - x^p)\left[x^{p^2} - x^p - (1 + x - x^p)^{p-1}\right]^{p-1} - (1 + x^p - x^{p^2})^{p-1} \equiv 0 \;(mod.\ p.)$$

est donc irréductible.

CLERMONT-FERRAND. — IMPRIMERIE DE FERDINAND THIBAUD, RUE SAINT-GENÈS, 8-10.