HFuf 166 (3 33-34) 4°

THÈSES
DE MÉCANIQUE
ET D'ASTRONOMIE

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

LE 3 AVRIL 1848,

Par M. A.-H. DESBOVES.

PARIS,
IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

1848

2064

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. DUMAS, Doyen, BIOT, FRANCOEUR, DE MIRBEL, PONCELET, POUILLET, STURM, DELAFOSSE, LEFÉBURE DE FOURCY, DE BLAINVILLE, CONSTANT PRÉVOST, AUGUSTE DE SAINT-HILAIRE, DESPRETZ, BALARD, MILNE EDWARDS, CHASLES, LE VERRIER,	Professeurs.
DUHAMEL, VIEILLE, MASSON, PELIGOT, DE JUSSIEU, PAYER, BERTRAND,	Agrégés.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE DE MÉCANIQUE.

Sur le mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres mobiles suivant une certaine loi.

I.

Le problème de la détermination du mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres fixes s'est naturellement présenté aux géomètres successeurs de Newton. Euler et Lagrange ont montré, par des méthodes différentes, comment ce problème pouvait se ramener aux quadratures; mais leurs méthodes, remarquables par d'ingénieux artifices de calcul, n'avaient pas un caractère de généralité assez grand pour leur faire découvrir une classe étendue de problèmes susceptibles d'être ramenés aux quadratures, comme le problème particulier qu'ils avaient résolu. C'est dans ces derniers temps que M. Liouville, prenant son point de départ dans les travaux de Lagrange et de M. Jacobi, a montré par deux méthodes différentes, que toutes les fois que le principe des forces vives a lieu dans le mouvement d'un point matériel, et que la fonction des forces a une certaine forme générale qu'il fait connaître, le problème est ramené aux quadratures. Ainsi, à la simple inspection de la fonction des forces exprimée dans un système de coordonnées que donne la méthode elle-même, on voit immédiatement qu'il est possible de résoudre le problème des centres fixes. Mais, ce qui est surtout remarquable, on voit de la même manière, et avec la même facilité, qu'on peut ramener aux quadratures un problème nouveau d'un sens mécanique suffisamment clair, dont M. Liouville a le premier donné l'énoncé, ainsi qu'il suit : Trouver le mouvement d'un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

point matériel attiré suivant la loi de l'inverse du carré des distances par deux centres mobiles sur une circonférence de cercle et toujours placés aux extrémités d'un même diamètre. On suppose d'ailleurs que le mouvement des deux centres d'action soit tel, que le point attiré se trouve toujours dans le plan déterminé par l'axe du cercle et le diamètre mobile. On peut aussi, sans rendre plus difficile la solution du problème, compliquer un peu l'énoncé en ajoutant une troisième force proportionnelle à la distance, émanant du centre même du cercle. L'analogie est alors tout à fait complète entre l'énoncé du nouveau problème et l'énoncé du problème des centres fixes, tel que Lagrange l'a résolu.

Je me propose, dans cette Thèse, de développer la solution du problème des centres mobiles, en faisant principalement usage de la méthode fondée sur la connaissance d'une solution complète d'une certaine équation aux différences partielles, du premier ordre et non linéaire. M. Liouville a fait connaître une solution complète de cette équation dans un cas très-général, puis il en a déduit, comme cas particulier, une formule beaucoup plus simple qui lui a donné immédiatement l'énoncé et la solution de son nouveau problème (*). J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'arriver directement à la formule simple qui suffit à la résolution du problème des centres mobiles. C'est à quoi je suis parvenu par l'étude attentive du Mémoire où M. Liouville a généralisé ses premières recherches (**). Il m'a aussi paru curieux de chercher si les anciennes méthodes d'Euler et de Lagrange, pour la solution du problème des deux centres fixes, pouvaient, avec quelques modifications, s'appliquer au problème des centres mobiles qui paraît plus compliqué. J'ai trouvé et je ferai voir ici que les deux méthodes s'appliquent de la manière la plus heureuse au problème de M. Liouville.

II.

M. Jacobi a démontré que toutes les fois que le principe des forces vives avait lieu, le problème de l'intégration des équations différen-

(*) *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 440.

(**) Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1850.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tielles ordinaires de la mécanique appliquées au mouvement d'un ou de plusieurs points libres, ou soumis à des liaisons quelconques, pouvait se ramener à la détermination d'une solution complète d'une équation aux différences partielles du premier ordre. En nous bornant au cas du mouvement d'un seul point libre, si l'équation des forces vives est $\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2} = 2(U + C)$, nous savons, d'après le théorème de M. Jacobi, que pour intégrer les trois équations du mouvement,

$$(1) \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dU}{dx_1}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dU}{dx_2}, \quad \frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{dU}{dx_3},$$

il suffit de trouver une fonction Θ de x_1, x_2, x_3 contenant trois constantes arbitraires différentes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition, et satisfaisant identiquement à l'équation aux différences partielles,

$$(2) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = 2(U + C).$$

Cette fonction étant connue, et A, B, C étant les constantes de la fonction, les intégrales cherchées du mouvement seront

$$(3) \qquad \frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C',$$

A′, B′, C′ étant de nouvelles constantes arbitraires qui, avec A, B, C, complètent le nombre de constantes arbitraires que doit donner l'intégration des équations proposées. Toute la difficulté du problème est donc ramenée à déterminer une solution complète de l'équation (2).

La première idée qui se présente à l'esprit est de chercher à déterminer la solution complète en suivant les règles données par M. Jacobi pour l'intégration des équations aux différences partielles non linéaires du premier ordre (*); mais en appliquant cette méthode, on est conduit à intégrer un système d'équations simultanées qui n'est autre que le système des équations proposées elles-mêmes. On peut prendre la question sous un autre point de vue, et chercher à déterminer une solution complète de l'équation (2), directement et pour ainsi dire à

(*) *Journal de Mathématiques*, tome III.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la simple inspection de cette équation. Un cas très-simple où la fonction peut se déterminer ainsi est celui où U est la somme de trois quantités Q_1, Q_2, Q_3 respectivement fonctions de x_1, x_2, x_3.

En effet, pour satisfaire à la double condition que l'équation (2) soit vérifiée identiquement, quelle que soit la constante C, et que la fonction contienne les trois constantes arbitraires, il suffira évidemment de poser

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 &= AR_1 + BS_1 + 2CT_1 + 2Q_1 = \varpi(x_1),\\ \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 &= AR_2 + BS_2 + 2CT_2 + 2Q_2 = \psi(x_2),\\ \left(\frac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 &= AR_3 + BS_3 + 2CT_3 + 2Q_3 = \chi(x_3); \end{aligned}\right.$$

les fonctions R_1, R_2, etc., étant liées entre elles par les équations

$$(5)\quad R_1 + R_2 + R_3 = 0,\ S_1 + S_2 + S_3 = 0,\ T_1 + T_2 + T_3 = 1$$

[les indices (1, 2, 3), dans les signes de fonctions, s'appliquent respectivement à des fonctions d'une seule des variables x_1, x_2, ou x_3]; on aura alors

$$(6)\qquad \Theta = \int\sqrt{\varpi(x_1)}\,dx_1 + \int\sqrt{\psi(x_2)}\,dx_2 + \int\sqrt{\chi(x_3)}\,dx_3.$$

Le cas très-simple que nous venons de considérer n'a certainement rien de bien intéressant en lui-même, puisque dans le cas où la fonction des forces satisfait à la condition que nous avons indiquée, les variables sont séparées dans chacune des équations du mouvement, et que chacune d'elles peut s'intégrer séparément. Mais concevons maintenant que les variables x_1, x_2, x_3 soient remplacées par d'autres variables ρ_1, ρ_2, ρ_3, liées aux premières de telle façon, qu'après la substitution, l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire en désignant par λ, λ', λ'' certaines fonctions des nouvelles variables, on ait

$$(7)\qquad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda''}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 = 2(U + C).$$

Si ρ_1, ρ_2, ρ_3 formaient un nouveau système quelconque de coordonnées, l'équation (7) contiendrait les doubles produits $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$, etc. Mais nous

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

supposons que les nouvelles variables soient liées aux anciennes de telle sorte que, dans l'équation (7), les coefficients de ces doubles produits soient nuls.

Il est évident qu'on peut prendre maintenant pour U la fonction beaucoup plus compliquée que tout à l'heure

$$U = \frac{Q_1}{\lambda} + \frac{Q_2}{\lambda'} + \frac{Q_3}{\lambda''}, \tag{8}$$

et remplacer les équations (4), (5) et (6) par les suivantes, dans lesquelles, ainsi que dans la précédente, les signes de fonction se rapportent aux nouvelles variables

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 &= AR_1 + BS_1 + 2CT_1 + 2Q_1 = \varpi(\rho_1), \\ \left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 &= AR_2 + BS_2 + 2CT_2 + 2Q_2 = \psi(\rho_2), \\ \left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 &= AR_3 + BS_3 + 2CT_3 + 2Q_3 = \chi(\rho_3), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\frac{R_1}{\lambda} + \frac{R_2}{\lambda'} + \frac{R_3}{\lambda''} = 0, \quad \frac{S_1}{\lambda} + \frac{S_2}{\lambda'} + \frac{S_3}{\lambda''} = 0, \quad \frac{T_1}{\lambda} + \frac{T_2}{\lambda'} + \frac{T_3}{\lambda''} = 1, \tag{10}$$

$$\Theta = \int \sqrt{\varpi\rho_1}\, d\rho_1 + \int \sqrt{\psi(\rho_2)}\, d\rho_2 + \int \sqrt{\chi(\rho_3)}\, d\rho_3. \tag{11}$$

Nous avons maintenant deux espèces de conditions à remplir : 1° choisir les nouvelles variables, de manière que dans l'équation (7), il manque les doubles produits de la forme $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$; 2° déterminer des fonctions R_1, S_1, etc., satisfaisant aux équations (10). Voyons d'abord comment la première condition sera remplie.

Si l'on remplace dans l'équation (2) $\frac{d\Theta}{dx_1}$, $\frac{d\Theta}{dx_2}$, $\frac{d\Theta}{dx_3}$ par leurs valeurs respectives $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_1} + \frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_1} + \frac{d\Theta}{d\rho_3}\frac{d\rho_3}{dx_1}$, $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_2} +$ etc., $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_3} +$ etc., et qu'on égale à zéro les coefficients des doubles produits de la forme $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$, on tombe sur les équations :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_1} + \frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_2}{dx_2} + \frac{d\rho_1}{dx_3}\frac{d\rho_2}{dx_3} &= 0, \\ \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_3}{dx_1} + \frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_3}{dx_2} + \frac{d\rho_1}{dx_3}\frac{d\rho_3}{dx_3} &= 0, \\ \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_3}{dx_1} + \frac{d\rho_2}{dx_2}\frac{d\rho_3}{dx_2} + \frac{d\rho_2}{dx_3}\frac{d\rho_3}{dx_3} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or, si l'on considère les équations

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \rho_1, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = \rho_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = \rho_3,$$

qui lient les nouvelles variables aux anciennes, comme étant les équations de surfaces variables dans lesquelles x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point de la surface, ρ_1, ρ_2, ρ_3 des paramètres variables, les équations (12) montrent que les surfaces variables dont nous parlons doivent toujours former un système de surfaces orthogonales.

La substitution que nous venons d'indiquer montre en même temps que l'on a

$$(13)\quad \lambda = \frac{1}{\frac{d\rho_1^2}{dx_1^2} + \frac{d\rho_1^2}{dx_2^2} + \frac{d\rho_1^2}{dx_3^2}}, \quad \lambda' = \frac{1}{\frac{d\rho_2^2}{dx_1^2} + \frac{d\rho_2^2}{dx_2^2} + \frac{d\rho_2^2}{dx_3^2}}, \quad \lambda'' = \frac{1}{\frac{d\rho_3^2}{dx_1^2} + \frac{d\rho_3^2}{dx_2^2} + \frac{d\rho_3^2}{dx_3^2}}.$$

Nous pouvons aussi remarquer immédiatement que si l'on exprime $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ dans le nouveau système de coordonnées satisfaisant à la condition que nous venons d'énoncer, l'expression de ds^2 sera de la forme $p_1\, d\rho_1^2 + p_2\, d\rho_2^2 + p_3\, d\rho_3^2$, et les quantités λ, λ', λ'' pourront être prises respectivement égales à p_1, p_2, p_3.

En effet, si l'on remplace, dans l'expression de ds^2, dx_1, dx_2, dx_3 par les différentielles totales relatives à ρ_1, ρ_2, ρ_3, dont x_1, x_2, x_3 peuvent être considérées comme des fonctions, on aura

$$(14)\quad p_1 = \frac{dx_1^2}{d\rho_1^2} + \frac{dx_2^2}{d\rho_1^2} + \frac{dx_3^2}{d\rho_1^2}, \quad p_2 = \frac{dx_1^2}{d\rho_2^2} + \frac{dx_2^2}{d\rho_2^2} + \frac{dx_3^2}{d\rho_2^2}, \quad p_3 = \frac{dx_1^2}{d\rho_3^2} + \frac{dx_2^2}{d\rho_3^2} + \frac{dx_3^2}{d\rho_3^2};$$

et pour que les doubles produits des différentielles $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, manquent dans l'expression de ds^2, on devra avoir

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{d\rho_1}\frac{dx_1}{d\rho_2} + \frac{dx_2}{d\rho_1}\frac{dx_2}{d\rho_2} + \frac{dx_3}{d\rho_1}\frac{dx_3}{d\rho_2} = 0, \\ \frac{dx_1}{d\rho_1}\frac{dx_1}{d\rho_3} + \frac{dx_2}{d\rho_1}\frac{dx_2}{d\rho_3} + \frac{dx_3}{d\rho_1}\frac{dx_3}{d\rho_3} = 0, \\ \frac{dx_1}{d\rho_2}\frac{dx_1}{d\rho_3} + \frac{dx_2}{d\rho_2}\frac{dx_2}{d\rho_3} + \frac{dx_3}{d\rho_2}\frac{dx_3}{d\rho_3} = 0. \end{cases}$$

Mais comme on peut le déduire immédiatement des équations (6) du Mémoire de M. Lamé sur les coordonnées curvilignes (*), les

(*) *Journal de Mathématiques*, tome V, page 320.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équations (12) et (15) sont une conséquence l'une de l'autre, et les seconds membres des équations (13) et (14) sont égaux; le théorème est donc démontré.

Il reste maintenant à déterminer les fonctions R_1, S_1, etc., satisfaisant aux équations (10).

Un cas très-simple où ces fonctions se déterminent immédiatement avec la plus grande facilité, c'est celui où $\lambda = \lambda' = \lambda''$; en effet, les équations de condition sont alors

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 = \lambda.$$

On pourra satisfaire à ces équations très-simplement, en prenant par exemple $R_1 = S_1 = 1$, $R_2 = S_2 = -1$, $R_3 = S_3 = T_3 = 0$, d'où résultera $\lambda = \lambda' = \lambda'' = T_1 + T_2$. La valeur de Θ prend alors une forme très-simple, qu'il ne paraît pas utile de rapporter ici. Remarquons seulement que si l'on se bornait au cas de deux variables, c'est-à-dire si $\lambda'' = 0$, on trouverait que le système des coordonnées elliptiques ordinaires dans un plan satisfait aux deux conditions $\lambda = \lambda'$, $\lambda = T_1 + T_2$, et même il y a plus, que ce système, comme l'a fait voir M. Liouville (*), est le seul pour lequel les deux conditions précédentes soient remplies. En formant l'expression de U correspondante à ce cas, on en déduira, en particulier, la solution du problème des deux centres fixes, lorsque la courbe est plane.

Il existe un autre cas où il est très-facile de trouver des valeurs de R_1, R_2, R_3, etc., satisfaisant aux équations (10) : c'est lorsqu'on a $\lambda = \lambda'$, λ'' étant différent de λ et λ'.

En effet, si l'on met les équations (10) sous la forme

$$R_1 + R_2 + R_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = \lambda,$$

on voit que l'on pourra prendre $R_3 = 1$, $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $S_3 = 0$, $T_3 = 0$, et l'on aura alors

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = -(R_1 + R_2), \quad \lambda = T_1 + T_2.$$

Je vais faire voir tout à l'heure que le cas qui nous occupe en ce

(*) *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 360.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

moment conduit à la solution du problème des centres mobiles : il est donc essentiel de développer tous les calculs qui s'y rapportent. Il y aurait ici à résoudre une question analytique analogue à celle dont nous parlions tout à l'heure. Cette question serait de déterminer les systèmes de coordonnées pour lesquels les conditions $\lambda = \lambda' = T_1 + T_2$, $\frac{\lambda}{\lambda''} = R_1 + R_2$ sont remplies; mais elle paraît présenter d'assez grandes difficultés analytiques, et d'ailleurs sa solution ne nous est pas indispensable. En effet, si nous adoptons le système de coordonnées qui se présente le plus naturellement à l'esprit quand on veut résoudre le problème des centres mobiles, c'est-à-dire le système de coordonnées composé de l'angle φ que fait le plan méridien mobile avec un plan fixe passant par l'axe de rotation, et des coordonnées elliptiques ρ et μ rapportées dans le plan mobile aux deux centres mobiles d'attraction, nous trouverons sans difficulté, pour valeur de ds^2,

$$ds^2 = \frac{(\rho^2 - \mu^2)}{\rho^2 - c^2} d\rho^2 + \frac{\rho^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} d\mu^2 + \frac{\rho^2 \mu^2}{c^2} d\varphi^2.$$

On voit que les coefficients de $d\rho^2$, $d\mu^2$, $d\varphi^2$, aux facteurs près $\rho^2 - c^2$, $c^2 - \mu^2$, satisfont aux conditions exigées; mais ces facteurs, comme nous allons le voir, n'empêchent pas d'appliquer la méthode.

En effet, si l'on pose $\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = d\alpha$, $\frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = d\beta$, d'où l'on déduit $\rho^2 = \Psi(\alpha)$, $\mu^2 = X(\beta)$, l'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = [\Psi(\alpha) - X(\beta)] d\alpha^2 + [\Psi(\alpha) - X(\beta)] d\beta^2 + \frac{\Psi(\alpha) . X(\beta)}{c^2} d\varphi^2;$$

et l'on voit que, dans le nouveau système de coordonnées α, β, φ, les coefficients de $d\alpha^2$, $d\beta^2$, $d\gamma^2$ satisfont bien aux conditions voulues. Maintenant, pour calculer l'expression de Θ, il suffira de remplacer dans les équations (9) les variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 ou leurs équivalentes ρ, μ, φ par α, β, ρ, de sorte que R_1, S_1, etc., représentent des fonctions d'une seule variable α, β ou φ; mais si l'on veut que R_1, S_1, etc., restent des fonctions de ρ, μ, φ dans l'expression de Θ, on pourra supposer que l'on remette dans ces fonctions, pour α, β, leurs valeurs en ρ et μ : ce qui revient évidemment à supposer que, dans les équations (9), (10) et (11), R_1, S_1, etc., restent des fonctions de ρ, μ et φ. Si

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

maintenant on remplace dans les équations (9), modifiées comme il vient d'être dit, $\frac{d\theta}{d\alpha}$, $\frac{d\theta}{d\beta}$ par leurs valeurs $\frac{d\Theta}{d\rho}\sqrt{\rho^2 - c^2}$, $\frac{d\Theta}{d\mu}\sqrt{c^2 - \mu^2}$, on trouvera

$$\Theta = \int \frac{\sqrt{\varpi\rho}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}\, d\rho + \int \frac{\sqrt{\psi\mu}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu + \int \chi(\varphi)\, d\varphi.$$

Quant à la valeur de U, si l'on représente les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 par $\frac{f(\rho)}{\rho^2}$, $\frac{F(\mu)}{\mu^2}$ et $\Pi(\varphi)$, son expression sera

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{\Pi(\varphi)}{\rho^2\mu^2}.$$

Mettons maintenant dans $\varpi(\rho)$, $\psi(\mu)$ et $\chi(\varphi)$, pour S_1, S_2, S_3, R_3 et T_3 les valeurs données plus haut; pour T_1, T_2, R_1, R_2 leurs valeurs respectives ρ^2, $-\mu^2$, $\frac{c^2}{\rho^2}$, $-\frac{c^2}{\mu^2}$ déduites des équations $\lambda = \lambda' = \rho^2 - \mu^2$, $\frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{c^2}{\mu^2} - \frac{c^2}{\rho^2}$, et enfin, pour Q_1, Q_2, Q_3 les valeurs indiquées tout à l'heure, nous trouverons sans difficulté

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{Ac^2 + B\rho^2 + 2C\rho^4 + 2f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}}$$
$$+ \int d\psi \sqrt{A + 2\Pi(\varphi)}.$$

Cette formule, à un changement insignifiant près, et qu'il eût d'ailleurs été facile d'éviter si cela eût présenté quelque avantage, est précisément celle que M. Liouville a obtenue par une voie toute différente de la nôtre, dans un des derniers numéros de son Recueil. Appliquons la formule au problème des centres mobiles.

En désignant par r, r', R les distances du point attiré aux deux centres mobiles et au centre fixe, on aura, par un calcul facile, $U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2$ (*); mais on a $r = \rho + \mu$, $r' = \rho - \mu$, et en désignant par $2c$ la distance des deux centres mobiles, $R^2 = \rho^2 + \mu^2 - c^2$. Donc

(*) Le calcul de U se trouve fait plus loin dans l'exposition de la méthode d'Euler.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'expression de U devient

$$U = \frac{g}{\rho + \mu} + \frac{g'}{\rho - \mu} + k(\rho^2 + \mu^2 - c^2),$$

et, par conséquent, on peut supposer, dans l'expression de Θ donnée tout à l'heure,

$$\Pi(\varphi) = 0, \quad F(\mu) = -\mu^2(g\mu - g'\mu + k\mu^4 - kc^2\mu^2),$$
$$f(\rho) = \rho^2(g\rho + g'\rho + k\rho^4 - kc^2\rho^2).$$

Faisant ces substitutions, puis formant, suivant la règle de M. Jacobi, les équations intégrales

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \qquad \frac{d\Theta}{dB} = B', \qquad \frac{d\Theta}{dC} = t + C',$$

on trouve sans difficulté, en posant

$$P = (\rho^2 - c^2)[2k\rho^6 - (2kc^2 - C)\rho^4 + 2(g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2],$$
$$Q = (\mu^2 - c^2)[2k\mu^6 - (2kc^2 - C)\mu^4 + 2(g - g')\mu^3 - B\mu^2 + Ac^2],$$

les trois équations suivantes :

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{P}} = \frac{\mu d\mu}{\sqrt{Q}}, \qquad \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{P}} - \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{Q}} = dt, \qquad \frac{c^2 d\rho}{\rho\sqrt{P}} - \frac{c^2 d\mu}{\mu\sqrt{Q}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}}.$$

Comme on le voit, les variables sont séparées, et le problème est ramené aux quadratures. Nous ne ferons pas, pour le moment, d'autres remarques, nous réservant de reprendre la discussion du problème après que nous aurons fait voir, comme nous l'avons promis en commençant, que les méthodes d'Euler et de Lagrange, pour la solution du problème des centres fixes, peuvent aussi s'appliquer au problème des centres mobiles.

III.

Méthode d'Euler. — Pour appliquer cette méthode au problème des centres mobiles, je prendrai pour guide le travail de Legendre, qui a simplifié l'exposition d'Euler (*); j'adopterai aussi autant que possible toutes les notations du Traité des fonctions elliptiques.

(*) *Traité des Fonctions elliptiques,* tome I, page 518.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soient ox' l'axe de rotation, $y'oz'$ le plan des centres mobiles, F et G ces deux centres, O le centre fixe, x, y', z' les coordonnées du point attiré M par rapport aux trois axes ox', oy', oz', x, y les coordonnées du même point rapportées dans le plan méridien à l'axe du cercle et au diamètre mobile, (a, b) $(-a, -b)$ les coordonnées des deux centres mobiles; posons aussi

$$\mathrm{MF} = s, \quad \mathrm{MG} = r, \quad \mathrm{FG} = 2h, \quad \mathrm{MFO} = \omega, \quad 180^\circ - \mathrm{MGO} = \varphi,$$

les équations du mouvement seront

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mathrm{A}x}{r^3} - \frac{\mathrm{B}x}{s^3}, \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= -\frac{\mathrm{A}(y'-b)}{r^3} - \frac{\mathrm{B}(y'+b)}{s^3}, \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= -\frac{\mathrm{A}(z'-c)}{r^3} - \frac{\mathrm{B}(z'+c)}{s^3} \ (*). \end{aligned} \right.$$

Si l'on observe qu'en vertu des équations $b^2 + c^2 = h^2$, $\frac{y'}{z'} = \frac{b}{c}$, on a

$$bdb + cdc = 0,$$
$$y'db + z'dc = \frac{y'}{b}(bdb + cdc) = 0,$$

et, par suite,

$$rdr = (y' - b)\,dy' + (z' - c)\,dz' + xdx,$$
$$sds = (y' + b)\,dy' + (z' + c)\,dz' + xdx,$$

comme si les centres d'action étaient fixes, on aura à la manière ordinaire l'équation des forces vives

$$\frac{dx^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{A}}{r} + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{2h}.$$

De la seconde et de la troisième des équations (1) on déduit facilement $y'dz' - z'dy' = \mathrm{H}dt$; les termes $\frac{\mathrm{A}}{r^3}(cy' - bz')$, $\frac{\mathrm{B}}{s^3}(cy' - bz')$ étant nuls, en vertu de l'équation $\frac{y'}{z'} = \frac{b}{c}$. En désignant

(*) Nous supposons $k = 0$, l'hypothèse de k différent de zéro ne donnant lieu à aucune difficulté.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par φ l'angle du plan méridien avec le plan des x', y', on peut aussi, comme on sait, mettre l'équation précédente sous la forme $y^2 d\varphi = \mathrm{H}dt$.

Nous allons maintenant déduire la troisième intégrale de la considération des aires élémentaires $d\alpha$, $d\beta$ engendrées pendant le mouvement, dans le plan méridien par les rayons vecteurs r et s. On aura

$$d^2\alpha = (y - h)\, d^2 x - x d^2 y,$$
$$d^2\beta = (y + h)\, d^2 x - x d^2 y;$$

d'un autre côté, les valeurs $y' = y \cos\varphi$, $z' = y \sin\varphi$ donnent

$$d^2 y' \cos\varphi + d^2 z' \sin\varphi = d^2 y - y^2 d\varphi^2,$$

et en substituant dans cette équation les valeurs de $d^2 y'$ et $d^2 z'$ données par les équations du mouvement, ainsi que la valeur de $d\varphi$ déduite de l'équation $y^2 d\varphi = \mathrm{H}dt$, on aura

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\mathrm{H}^2}{y^3} - \frac{\mathrm{A}(y - h)}{r^3} - \frac{\mathrm{B}(y + h)}{s^3}.$$

Mettant maintenant dans les expressions de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, pour $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, leurs expressions maintenant connues, on aura

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\mathrm{H}^2 x}{y^3} + \frac{2\mathrm{B}hx}{s^3}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{H}^2 x}{y^3} - \frac{2\mathrm{A}hx}{r^3};$$

de ces deux dernières équations on déduit, par un calcul très-simple,

$$\frac{d\alpha\, d^2\beta + d\beta\, d^2\alpha}{dt^2} = -2\mathrm{A}h \sin\varphi\, d\varphi + 2\mathrm{B}h \sin\omega\, d\omega$$
$$+ 8\mathrm{H}^2 \frac{\sin\varphi \sin^3\omega\, d\varphi + \sin\omega \sin^3\varphi\, d\omega}{\sin^3(\varphi + \omega)}.$$

Cette équation ne diffère de celle qui a été trouvée par Euler dans le cas des centres fixes que par le dernier terme. Or il arrive que ce dernier terme est une différentielle exacte de deux variables, comme le terme correspondant du problème des centres fixes. En appliquant les règles connues pour intégrer une différentielle exacte de deux variables, on trouve, après quelques réductions,

$$\int \frac{\sin\varphi \sin^3\omega\, d\varphi + \sin\omega \sin^3\varphi\, d\omega}{\sin^3(\varphi + \omega)} = -\frac{1}{2}\frac{\sin^2\omega \sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi + \omega)} + \text{constante}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En intégrant l'équation précédemment écrite, on aura donc

$$\frac{d\alpha\, d\beta}{dt^2} = 2\,\mathrm{A}h\cos\varphi - 2\,\mathrm{B}h\cos\omega - 4\,\mathrm{H}^2\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)} + 2\,\mathrm{C}'h;$$

c'est la troisième intégrale cherchée.

Il faut maintenant procéder à la séparation des variables. Les calculs, à partir de ce moment, sont tout à fait les mêmes que pour le problème des centres fixes. Employons tout de suite, avec Legendre, le changement de variables qui doit conduire à la séparation cherchée; c'est-à-dire posons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = pq, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{p}{q}:$$

d'où l'on déduira

$$\sin\varphi = \frac{2pq}{p^2+q^2}, \quad \cos\varphi = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \quad \sin\omega = \frac{2pq}{1+p^2q^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2};$$

$$r = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2}, \quad s = \frac{a}{1-p^2} - \frac{aq^2}{1+q^2}.$$

On aura ensuite facilement, en fonction de p et q, les valeurs de $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2$ et de $r^2 s^2\,d\varphi\,d\omega$, et l'on sera conduit à l'équation

$$\frac{r^2 s^2\,d\varphi\,d\omega}{4h^2(dx^2+dy^2)} = \frac{p^2\,dq^2 - q^2\,dp^2}{(1+q^2)^2\,dp^2 + (1-p^2)^2\,dq^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}},$$

en posant

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}'}{2} + \frac{\mathrm{A}}{2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{B}}{2}\cos\omega - \frac{\mathrm{H}^2}{h}\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\omega+\varphi)},$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{C} + \frac{2\,\mathrm{A}h}{r} + \frac{2\,\mathrm{B}h}{s} - \frac{\mathrm{H}^2 h}{y^2}.$$

Les polynômes M et N étant exprimés en p et q, on aura l'équation $\mathrm{P}dq^2 = \mathrm{Q}dp^2$, dans laquelle $\mathrm{P} = \mathrm{M}p^2 - \mathrm{N}(1-p^2)^2$, $\mathrm{Q} = \mathrm{M}q^2 + \mathrm{N}(1+q^2)^2$. Le résultat cherché ne devant différer de celui qu'on obtient dans le problème des centres fixes que par les termes contenant H^2 en facteur, calculons ces termes; nous aurons

$$\frac{h}{y^2} = \frac{(1+q^2)^2(1-p^2)^2}{h(1+p^2)^2(1-q^2)^2}, \quad \frac{1}{h}\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)} = \frac{4p^2q^2}{h(p^2+1)^2(1-q^2)^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour avoir le terme qui multiplie H^2 dans P, on multipliera les valeurs que nous venons de trouver pour $\frac{h}{y^2}$ et $\frac{1}{h}\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\omega+\varphi)}$, respectivement par p^2 et $(1-p^2)^2$; et en retranchant la seconde de la première, on aura

$$\frac{(1-p^2)^2 p^2}{h(1+p^2)^2};$$

on trouverait de même $\frac{(1+q^2)^2 q^2}{h(1-q^2)^2}$ pour le multiplicateur de H^2 dans Q.

L'équation aux variables séparées devient ainsi

$$\frac{dp}{\sqrt{Cp^2+\frac{1}{2}(A+B)(1-p^4)-\frac{1}{2}C'(1-p^2)^2-\frac{H^2}{h}\frac{(1-p^2)^2p^2}{(1+p^2)^2}}}$$
$$=\frac{dq}{\sqrt{Cq^2+\frac{1}{2}(A-B)(1-q^4)+\frac{1}{2}C'(1+q^2)^2-\frac{H^2}{h}\frac{(1+q^2)^2q^2}{(1-q^2)^2}}}.$$

Si l'on veut donner à l'équation précédente la forme qu'elle prend lorsqu'on choisit pour variables $\rho=\frac{r+s}{2}$, $\mu=\frac{r-s}{2}$, on trouve, en posant $Ch+2C'h+H^2=D$,

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}\sqrt{C\rho^4+2(A+B)h\rho^3-Dh\rho^2+H^2h^3}}$$
$$=\frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2-h^2}\sqrt{C\mu^4-2(A-B)h\mu^3-Dh\mu^2+H^2h^3}},$$

ce qui est la formule de la première méthode, dans laquelle on aurait fait $k=0$.

On trouverait ensuite dt et $d\varphi$ sans difficulté.

IV.

Méthode de Lagrange (*). — Prenons pour origine le point autour duquel la rotation a lieu, et, pour axe des z, l'axe de rotation. Soient

(*) *Anciens Mémoires de l'Académie de Turin*, tome IV.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(a, b), $(-a, -b)$ les coordonnées des deux centres mobiles qui sont dans le plan des x, y ; u, v les distances du point attiré à ces deux centres. Les équations du mouvement seront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{A(x-a)}{u^3} + \dfrac{B(x+a)}{v^3} = 0, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt^2} + \dfrac{A(y-b)}{u^3} + \dfrac{B(y+b)}{v^3} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{Az}{u^3} + \dfrac{Bz}{v^3} = 0. \end{cases}$$

De ces équations on déduit, comme nous l'avons vu pour la méthode d'Euler, l'équation des forces vives

$$(2)\qquad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2A}{u} + \frac{2B}{v} + 4C.$$

Multipliant les équations (1) respectivement par $x - a$, $y - b$, z, et ajoutant, il viendra

$$(3)\qquad \frac{(x-a)\,d^2x + (y-b)\,d^2y + (z-c)\,d^2z}{dt^2} = -\frac{A}{u} - B\,\frac{u^2 + v^2 - f^2}{2v^2},$$

f étant la distance des deux centres mobiles.

On trouve aussi sans difficulté, en différentiant deux fois l'équation

$$u^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2,$$

et divisant par dt^2,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u^2}{2\,dt^2} = \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + (x-a)\dfrac{d^2x}{dt^2} + (y-b)\dfrac{d^2y}{dt^2} \\[2ex] \qquad\qquad + (z-c)\dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{dadx + dbdy}{dt^2}. \end{cases}$$

Ajoutons maintenant membre à membre les équations (2), (3), (4), il viendra

$$(5)\qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2 - u^2}{v^3}\right) - \frac{dadx + dbdy}{dt^2} + 4C.$$

On trouverait d'une manière semblable

$$(6)\qquad \frac{d^2v^2}{dt^2} = \frac{B}{v} + \frac{A}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2 - v^2}{u^3}\right) + \frac{dadx + dbdy}{dt^2} + 4C.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On voit que la mobilité des centres introduit dans les équations (5) et (6), auxquelles Lagrange ramène principalement le problème des centres fixes, une seule quantité nouvelle $\frac{dadx + dbdy}{dt^2}$. Or je dis que cette quantité peut s'exprimer par une fonction très-simple de u et de v.

En effet, on a d'abord

$$dadx + dbdy = \frac{da\,(ydx - xdy)}{y},$$

comme on le voit en se servant des équations $y = \frac{b}{a}x$, $ada + bdb = 0$.

D'un autre côté, en différentiant l'équation $y = \frac{b}{a}x$, on trouve facilement

$$da = b\,\frac{(ydx - xdy)}{s^2},$$

s désignant la distance de l'origine à la projection du point attiré sur le plan des x, y. Donc

$$dadx + dbdy = \frac{b}{y}\frac{(ydx - xdy)^2}{s^2} = \frac{f}{2}\frac{(ydx - xdy)^2}{s^3}.$$

Mais en multipliant la première des équations (1) par y, la deuxième par x, et retranchant, on a

$$\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{xd^2y}{dt^2} = 0;$$

intégrant

$$ydx - xdy = \mathrm{H}dt,$$

substituant la valeur de $ydx - xdy$ dans l'expression de $dadx + dbdy$, il viendra

$$\frac{dadx + dbdy}{dt^2} = \frac{f}{2}\frac{\mathrm{H}^2}{s^3} = \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(v^2 - u^2)^3},$$

s étant facilement trouvé égal à $\frac{v^2 - u^2}{2f}$.

Les équations (5) et (6) deviennent donc

$$(7)\qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{A}}{u} + \frac{\mathrm{B}}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2 - u^2}{v^3}\right) - \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(u^2 - v^2)^3} + \mathrm{C},$$

$$(8)\qquad \frac{d^2v^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{B}}{v} + \frac{\mathrm{A}}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2 - v^2}{u^3}\right) + \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(u^2 - v^2)^3} + \mathrm{C}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En faisant $H = 0$, on a les équations de Lagrange pour le problème des centres fixes.

La question de déterminer les deux équations finies entre u, v et t est ramenée à l'intégration des équations (7) et (8). Nous connaissons déjà une intégrale du premier ordre de ces deux équations: c'est l'équation des forces vives dans laquelle il serait très-facile de tout ramener aux variables u et v. Mais il sera plus élégant de chercher avec Lagrange les intégrales des équations (7) et (8), en déduisant de ces équations, par des combinaisons diverses, d'autres équations telles, que les premiers membres soient des différentielles exactes, et telles aussi que, dans les seconds membres, les multiplicateurs de A, B, etc., soient des différentielles exactes de deux variables. Or, comme il arrive que les multiplicateurs de H^2, dans les équations dont nous venons de parler, sont des différentielles exactes de deux variables, la marche de Lagrange peut être appliquée sans aucune modification; et même il n'y a de calcul nouveau que celui des intégrations des fonctions différentielles de deux variables qui multiplient H^2 dans les diverses équations intégrables.

Nous représenterons, pour abréger, dans les calculs qui vont suivre par P, Q, R, etc., l'ensemble des termes indépendants de H^2, et qui sont les mêmes lorsque les centres sont fixes ou lorsqu'ils sont mobiles.

Multiplions (7) et (8) respectivement par $d.v^2$ et $d.u^2$; ajoutons membre à membre, puis intégrons, il viendra

$$\frac{d.u^2 \times d.v^2}{2dt^2} = P - \frac{4f^4 H^2}{2(u^2 - v^2)^2}. \tag{9}$$

Multiplions maintenant (7) et (8) respectivement par $2v^2 d.u^2$ et $2u^2 d.v^2$, l'équation (9) par $d.u^2 + d.v^2$; retranchons de la somme des deux premières ainsi formées la troisième, puis intégrons les deux membres de l'équation résultant de cette combinaison, nous aurons

$$\frac{v^2(d.u^2)^2 + u^2(d.v^2)^2}{2\,dt^2} = Q + 2f^4 H^2 \frac{(u^2 + v^2)}{(u^2 - v^2)^2}. \tag{10}$$

Si l'on ajoute à cette équation ou qu'on en retranche l'équation (9)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

multipliée par $2uv$, on obtient

$$\frac{(vd.u^2 + ud.v^2)^2}{4\,dt^2} = \mathrm{R} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{(u+v)^2},$$

$$\frac{(vd.u^2 - ud.v^2)^2}{4\,dt^2} = \mathrm{S} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{(u-v)^2}.$$

R et S étant respectivement des fonctions de $u + v$ et $u - v$. En posant $u + v = p$, $(u - v) = q$, les deux équations précédentes deviennent

$$\frac{uvdp}{dt} = \sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{p^2}},$$

$$\frac{uvdq}{dt} = \sqrt{\mathrm{S} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{q^2}};$$

d'où l'on déduit

(11) $$\frac{dp}{\sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{p^2}}} = \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{S} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{q^2}}}$$

$$dt = \frac{(p^2 - q^2)\,dp}{4\sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{p^2}}},$$

ou bien

(12) $$dt = \frac{p^2\,dp}{4\sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{p^2}}} - \frac{q^2\,dq}{4\sqrt{\mathrm{S} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{q^2}}}.$$

Enfin, on aura l'angle φ du plan méridien avec le plan fixe des xy par l'équation $\frac{s^2\,d\varphi}{dt} = \mathrm{H}$ qui résulte, comme on sait, de l'équation démontrée $ydx - xdy = \mathrm{H}dt$. On aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4\,\mathrm{H}f^2}{(u^2 - v^2)^2} = \frac{4\,\mathrm{H}f^2}{p^2q^2};$$

mettant dans cette équation, pour dt, la valeur tirée de l'équation (12), on aura

$$d\varphi = \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{4\sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\,\mathrm{H}^2}{p^2}}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou bien

$$(13)\qquad d\varphi = \frac{dp}{4p^2\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}} - \frac{dq}{4q^2\sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}}}.$$

En remettant dans les équations (11), (12) et (13), pour R et S, leurs valeurs

$$R = Cp^4 + (A + B)p^3 + Dp^2 - (A + B)f^2 p + E,$$
$$S = Cq^4 + (A - B)q^3 + Dq^2 - (A - B)f^2 q + E,$$

et observant qu'en vertu d'une relation facile à trouver entre les trois constantes arbitraires C, D, E et les quantités connues, les polynômes $Rp^2 + f^4 H^2$, $Sq^2 + f^4 H^2$ sont respectivement divisibles par $p^2 - f^2$ et $q^2 - f^2$, on retombe précisément sur les formules trouvées par les autres méthodes.

V.

Discussion. — Nous avons trouvé précédemment, en posant

$$P = (\rho^2 - c^2)[2k\rho^6 - (2kc^2 - C)\rho^4 + 2(g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2],$$
$$Q = (\mu^2 - c^2)[2k\mu^6 - (2kc^2 - C)\mu^4 + 2(g - g')\mu^3 - B\mu^2 + Ac^2],$$

les trois équations suivantes :

$$(1)\qquad \frac{\rho d\rho}{\sqrt{P}} = \frac{\mu d\mu}{\sqrt{Q}},\qquad \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{P}} - \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{Q}} = dt,\qquad \frac{c^2 d\rho}{\rho\sqrt{P}} - \frac{c^2 d\mu}{\mu\sqrt{Q}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}},$$

dans lesquelles les variables sont séparées. Comme on le voit, les valeurs des inconnues dépendront, en général, des fonctions abéliennes, même quand il n'y aurait aucune force appliquée au centre fixe, et que l'une des forces appliquées aux centres mobiles serait nulle. Si l'on excepte le cas où chacune des équations $P = 0$, $Q = 0$ aurait des racines égales, les intégrales des équations (1) ne pourront pas se réduire aux fonctions elliptiques.

Pour déterminer les constantes d'intégration A, B, C, il suffira de diviser par dt les deux membres de chacune des équations (1), et de remplacer dans ces équations ρ, μ, φ, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

initiales supposées connues. On aura ainsi trois équations qui ne contiendront pas d'autres inconnues que A, B, C. On pourrait aussi, en se donnant la vitesse initiale, déterminer la constante C par l'équation des forces vives, et les deux autres A et B par deux des équations (1), ou deux équations résultant de leur combinaison.

A part le cas des racines égales dont nous avons parlé tout à l'heure, pour que les quadratures des équations (1) dépendent des fonctions elliptiques, il est nécessaire et suffisant que les puissances impaires de ρ et μ disparaissent sous les radicaux, et que l'on ait $g + g' = 0$, $g - g' = 0$, c'est-à-dire que les deux centres mobiles ne soient pas des centres d'action. Le problème que l'on résout alors n'est plus, à proprement parler, le problème des centres mobiles. Nous nous arrêterons cependant un moment sur sa solution, parce qu'elle nous fournira la démonstration d'un théorème fondamental d'analyse.

En effet, g et g' étant égaux à zéro, le point matériel n'est plus soumis qu'à une seule force proportionnelle à la distance émanant d'un centre fixe, et la courbe décrite par le point mobile est, d'après un théorème connu, une section conique dont le centre se confond avec le centre d'action. La courbe décrite dans le plan mobile sera, en général, différente d'une section conique, et il sera facile d'en trouver l'équation en résolvant ce problème très-simple de géométrie analytique : Trouver le lieu des points qui sont les traces successives laissées par une section conique fixe sur un plan mobile autour d'un axe passant par le centre de la section, et situé hors de son plan. L'équation de la courbe étant obtenue en coordonnées polaires, par exemple, on pourra toujours, par une transformation de coordonnées, l'obtenir en coordonnées ρ et μ. Mais, d'un autre côté, la première des équations (1), si l'on y fait $g = 0$, $g' = 0$, $\rho^2 = \lambda$, $\mu^2 = \nu$, peut être mise sous la forme

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^4 + D\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + G}} = \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^4 + D\nu^3 + E\nu^2 + F\nu + G}} :$$

donc cette dernière équation est susceptible d'une intégrale algébrique.

On est ainsi conduit à la démonstration générale du théorème d'Euler, sans qu'il soit besoin de connaître aucune des transformations que l'on peut faire subir aux polynômes du quatrième degré contenus sous les radicaux.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le cas où l'on a $k = 0$, le point matériel se meut en ligne droite, et la courbe dans le plan mobile est une hyperbole, puisqu'elle peut être considérée comme l'intersection d'un hyperboloïde de révolution par un plan qui passe par l'axe de révolution. Cette remarque conduirait encore au théorème d'Euler.

Ce n'est pas seulement dans le cas très-particulier que nous venons de considérer que la courbe dans le plan mobile peut être une section conique. On démontre, de la même manière que pour le problème des centres fixes, qu'en supposant les trois centres agissant à la fois suivant la loi indiquée, la courbe dans le plan mobile peut être une ellipse $\rho = \rho_0$, ou une hyperbole $\mu = \mu_0$; ρ_0 satisfaisant aux équations $P = 0$, $\frac{dP}{d\rho} = 0$, et μ_0 aux équations $Q = 0$, $\frac{dQ}{d\mu} = 0$. L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi données chacune par une solution singulière de la première des équations (1); je ne crois pas utile de donner ici la démonstration qui est tout à fait la même que pour le problème des centres fixes : il me suffira de renvoyer à un travail récent de M. Serret. Je passe tout de suite à la partie la plus intéressante de la discussion.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que ρ_0, ν_0 étaient les valeurs initiales quelconques de ρ et μ; supposons maintenant que la valeur initiale de ρ ou de μ soit égale à c. Nous aurons encore deux solutions singulières sous les conditions précédemment énoncées, c'est-à-dire pourvu que, pour $\rho = c$, on ait $\frac{dP}{d\rho} = 0$, et pour $\mu = c$, $\frac{dQ}{d\mu} = 0$. Mais si la somme 2ρ des distances du point attiré aux deux centres fixes est précisément égale à la distance $2c$ de ces centres, le point attiré se trouve évidemment sur la ligne qui joint les centres d'action, et entre les deux. Si $2\mu = c$, le point attiré se trouve encore sur la ligne des centres, mais en dehors des centres. Ainsi, le cas particulier où le point attiré se trouve sur la ligne même des centres est résolu par deux solutions singulières de la première des équations du mouvement. Voyons ce que deviennent en même temps les deux autres équations du mouvement. Ces deux équations, qui doivent suffire à la détermination complète du mouvement, contiennent trois constantes arbitraires; mais l'une d'elles peut s'exprimer en fonction des deux autres par la relation $\frac{dP}{d\rho} = 0$, pour $\rho = c$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En supposant, pour plus de simplicité, $k = 0$, on a

$$P = \sqrt{(\rho^2 - c^2)[2C\rho^4 + 2(g+g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2]};$$

la condition pour que le polynôme P ait deux racines égales à c est évidemment exprimée par l'équation

$$2Cc^2 + 2(g+g')c - B + A = 0,$$

d'où l'on tire

$$B = A + 2Cc^2 + 2(g+g')c.$$

Avant de faire $\rho = c$ dans les équations qui donnent $d\varphi$ et dt, remplaçons $\gamma \frac{\rho d\rho}{\sqrt{P}}$ par $\frac{\mu d\mu}{\sqrt{Q}}$; nous aurons

$$d\varphi = \frac{c^2\sqrt{A}(\mu^2 - \rho^2)}{\rho^2\mu\sqrt{Q}}\,d\mu, \quad dt = \mu\frac{(\rho^2 - \mu^2)}{\sqrt{Q}}\,d\mu.$$

Faisant maintenant $\rho = c$, et remplaçant la constante B par la valeur que nous venons de trouver, on aura, pour la solution du problème du mouvement du point matériel entre les deux centres mobiles et sur la ligne qui les joint, les deux équations suivantes :

$$(2) \qquad d\varphi = \frac{H\sqrt{\mu^2 - c^2}}{\mu\sqrt{M}}\,d\mu,$$

$$(3) \qquad dt = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - c^2}}{\sqrt{M}}\,d\mu.$$

En posant

$$\sqrt{A} = H \text{ et } M = 2C\mu^4 + 2(g-g')\mu^3 - [H^2 + 2Cc^2 + 2(g+g')c]\mu^2 + H^2c^2,$$

μ étant évidemment la distance du point attiré à l'origine des coordonnées, l'équation (2) est l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Quant aux constantes H et C, elles seront déterminées au moyen des équations

$$(4) \qquad \frac{V^2}{2} = \frac{g}{c+\mu} + \frac{g'}{c-\mu} + C,$$

$$(5) \qquad \mu^2 d\varphi = H dt,$$

dans lesquelles on aura remplacé V, μ, $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs initiales

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

données. L'équation (5) se déduit d'ailleurs des équations (2) et (3) par la division membre à membre de ces deux équations.

On arrivera de la même manière aux équations du problème dans le cas de $\mu = c$, et il est facile de voir que les équations qui conviennent à ce cas peuvent se déduire des équations correspondantes à $\mu = c$ par le simple changement de g' en $-g'$. (Nous supposons tacitement que g' est la force appliquée au centre d'action qui est le plus près du mobile, lorsque celui-ci se trouve en dehors des centres.)

On peut vérifier d'une manière très-simple que les formules précédemment trouvées pour le cas qui nous occupe sont bien celles que donnerait la solution directe du problème.

En effet, dans ce cas, le point matériel peut être considéré comme soumis à l'action d'une force unique émanant d'un centre fixe, et dont l'intensité serait $\frac{g}{c+\mu} \pm \frac{g'}{c-\mu}$, le signe + ou le signe — étant choisi selon que le mobile est ou n'est pas entre les deux centres d'action. Mais d'après les formules données en Mécanique pour le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, on peut écrire immédiatement les deux équations

$$\frac{d\mu^2 + \mu^2 d\varphi^2}{2\,dt} = \frac{g}{c+\mu} \pm \frac{g'}{c-\mu} + \mathrm{C},$$

$$\frac{\mu^2 d\varphi}{dt} = \mathrm{H};$$

et en faisant le calcul très-simple relatif à la séparation des variables, on retombe précisément sur les équations (2) et (3), ou sur les équations qui s'en déduisent par le changement de g' en $-g'$.

Les formules (2) et (3) font, en général, dépendre la solution du problème des fonctions abéliennes; mais, dans le cas de $g = g'$ si le mobile se trouve entre les deux centres d'action, et $g = -g'$ si le point attiré se trouve en dehors des centres, la solution ne dépend plus que des fonctions elliptiques, et même la valeur de φ peut s'exprimer par des fonctions de première espèce seulement.

On pourrait donc, par les Tables de Legendre, trouver à chaque instant la position du mobile; mais sans entrer dans les calculs nécessaires à cet objet, nous pouvons donner une idée de la courbe décrite dans les deux cas particuliers que nous venons d'énoncer, et auxquels, à partir de ce moment, nous allons nous borner uniquement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les équations du mouvement (2) et (3) peuvent se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \frac{\mu d\varphi}{d\mu} = \frac{H\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{2C(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)}},$$

$$(7) \qquad \frac{d\mu}{dt}\,\frac{\sqrt{2C(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)}}{\mu\sqrt{\mu^2-c^2}};$$

α^2 et β^2 étant les valeurs de μ^2, que l'on obtient en posant

$$M = 2C\mu^4(H^2+2Cc^2+4g)\mu^2+H^2c^2 = 0.$$

(On trouve facilement d'ailleurs que c est compris entre les deux valeurs α et β.)

Les équations précédentes (6) et (7) s'appliqueront au mouvement du point mobile sur la ligne des centres d'action, que ce point soit ou ne soit point entre les deux centres, pourvu que l'on suppose que la force attractive appliquée au centre le plus proche du mobile devienne répulsive lorsque le mobile se trouve sur le prolongement de la ligne des centres: c'est ce que nous supposerons dans tout ce qui va suivre.

Il y aura trois cas à considérer dans la discussion, suivant que C sera positif, négatif ou nul; c'est-à-dire en désignant par V_0 et μ_0 les valeurs initiales de V et de μ, suivant que l'on aura

$$V_0^2 > \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}, \quad V_0^2 < \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}, \quad \text{ou} \quad V_0^2 = \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}.$$

1er *cas.*— $V_0^2 > \dfrac{4gc}{c^2-\mu_0^2}$.

L'équation (6) montre que, depuis la valeur $\mu = \alpha$ jusqu'à $\mu = c$, on aura des valeurs réelles pour l'angle φ; que, pour $\mu = \alpha$, la courbe est perpendiculaire au rayon vecteur; et que, pour $\mu = c$, elle est tangente au rayon vecteur. On aura ainsi une branche de courbe qui commencera à une distance de l'origine $\mu = \alpha$, et qui se terminera au cercle $\mu = c$: la branche de courbe sera donc tout entière comprise entre le centre et la circonférence de ce cercle. Remarquons aussi qu'au point $\mu = c$ des circonstances singulières se manifestent comme on devait s'y attendre. La vitesse V se confond avec la vitesse suivant le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rayon vecteur $\frac{dr}{dt}$, et elle a une valeur infinie, tandis que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ conserve une valeur finie.

Si l'on suppose maintenant que le mobile se trouve sur le prolongement de la ligne des centres sur lequel il a été primitivement placé, on verra sans difficulté que la courbe décrite par le mobile est une espèce de spirale extérieure au cercle $\mu = c$, et qui, commençant par être perpendiculaire au rayon vecteur, à une distance de l'origine $\mu = \beta$, tend, après un nombre infini de circonvolutions, à devenir tangente au rayon vecteur.

2e *cas.* — $V_0^2 < \frac{4gc}{c^2 - \mu_0^2}$.

Ce second cas se discuterait comme le précédent. On trouverait d'abord, dans l'intérieur du cercle $\mu = c$, une branche de courbe passant par le centre du cercle, et terminée au rayon vecteur $\mu = \alpha$, auquel elle est perpendiculaire; puis, hors du cercle, une seconde branche partant perpendiculairement de la circonférence, pour se terminer à la distance $\mu = \beta$, perpendiculairement au rayon vecteur.

3e *cas.* — $V_0^2 = \frac{4gc}{c^2 - \mu_0^2}$.

C étant égal à zéro, il est facile de voir qu'en posant $\frac{Hc}{\sqrt{gc + H^2}} = \alpha$, l'équation différentielle de la courbe peut s'écrire

$$d\varphi = \frac{\alpha}{c\mu} \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}.$$

La partie de courbe située hors du cercle n'existe plus maintenant, et l'on a dans l'intérieur de ce cercle une branche de courbe analogue à celle qui a été trouvée dans le premier cas. Mais ce qui est très-remarquable, c'est que cette branche de courbe est la moitié de l'arc d'une épicycloïde compris entre deux points de rebroussement successifs. Cette épicycloïde, comme il est facile de le voir d'ailleurs, est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{c - \alpha}{2}$ roulant intérieurement sur le cercle $\mu = c$. On peut remarquer encore que si l'on prend pour valeur initiale de μ la valeur α elle-même, et, par conséquent, pour vitesse initiale la vitesse perpendiculaire au

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rayon vecteur, on trouve, pour cette vitesse initiale, l'expression très-simple $\frac{H}{\alpha}$.

Dans le dernier cas que nous venons d'examiner, l'équation différentielle de la courbe était intégrable, on peut se demander s'il existe d'autres cas d'intégration.

Il est évident que les seconds membres des équations (2) et (3), dans lesquelles M a la valeur que nous avons donnée plus haut, ne pourraient devenir des différentielles exactes que dans deux cas : si $\sqrt{\mu^2 - c^2}$ était facteur commun au numérateur et au dénominateur des seconds membres, ou bien si M était un carré parfait. Or il est facile de voir d'abord que le dernier cas ne peut jamais se présenter; car, en exprimant la condition pour que $M = 0$ ait deux racines égales, on trouve une équation impossible entre H et C. Quant au premier cas, si l'on met l'équation différentielle de la courbe sous la forme

$$d\varphi = \frac{H\sqrt{c^2 - \mu^2}\, d\mu}{\mu\sqrt{(C\mu^2 - H^2)(c^2 - \mu^2) + gc}},$$

on voit que $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ ne pourrait être facteur commun que si $gc = 0$. Or les cas de $g = 0$, $c = 0$ sont évidemment à exclure; et d'ailleurs si l'on faisait l'intégration, on trouverait l'équation polaire d'une ligne droite, comme cela doit être évidemment.

Vu et approuvé,

Le 15 mars 1848.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

DUMAS.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général de l'Université,
Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Sur les perturbations planétaires.

I.

Lorsque le principe des forces vives a lieu, les équations du mouvement d'un ou de plusieurs points libres peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dU}{dy}, \text{ etc.}$$

Supposons qu'on ait obtenu les intégrales de ces équations avec le nombre $2n$ de constantes arbitraires double du nombre des variables indépendantes, et qu'on veuille avoir les intégrales des équations du mouvement troublé

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = m\dfrac{dU}{dx} + \dfrac{d\Omega}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = m\dfrac{dU}{dy} + \dfrac{d\Omega}{dy}, \text{ etc.} \end{cases}$$

D'après la théorie de la variation des constantes arbitraires, on peut supposer que, dans le mouvement primitif et dans le mouvement troublé, les coordonnées x, y, z..., et les vitesses $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$... sont exprimées de la même manière, au moyen des constantes a_1, b_1,, a_2, b_2,... a_n, b_n; mais dans le cas du mouvement troublé, on a à résoudre la question de trouver les variations de ces dernières quantités pour une époque quelconque du mouvement. Lagrange a donné une forme très-élégante aux équations qui servent à déterminer la variation des constantes arbitraires dans le cas qui nous occupe. Il a remarqué, en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

particulier, que si les variables a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n sont les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses, les équations du problème prennent la forme extrêmement simple

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_1}, & \dfrac{da_2}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_2}, \ldots & \dfrac{da_n}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_n}, \\ \dfrac{db_1}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_1}, & \dfrac{db^2}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_2}, \ldots & \dfrac{db_n}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_n}. \end{cases}$$

Mais en se fondant sur les travaux de M. Hamilton, M. Jacobi a donné un autre système de constantes dont les variations sont données par des équations de la forme des équations (3), et qui sont plus avantageuses dans le problème des perturbations planétaires. Voici comment sont données les constantes arbitraires de M. Jacobi :

Θ étant une fonction de $x, y, z, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\sum \frac{1}{m}\left[\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2\right] = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

et les intégrales des équations (1) étant, comme on sait, les suivantes :

$$(3)\qquad \frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2 \ldots \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = t + \tau,$$

les $2n$ constantes arbitraires α_1, α_2,..., C, τ jouissent de la même propriété que les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses, c'est-à-dire qu'on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = +\dfrac{d\Omega}{d\beta_1}, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = +\dfrac{d\Omega}{d\beta_2}, \ldots & \dfrac{d\mathrm{C}}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\tau}. \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha_1}, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha_2}, \ldots & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\mathrm{C}}. \end{cases}$$

Le théorème que je viens de reproduire d'après M. Jacobi se trouve énoncé sans démonstration dans le cinquième volume des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Je me propose de le démontrer ici, en me servant comme lemme d'une autre proposition donnée aussi sans démonstration par M. Jacobi, à la suite de celle que je viens d'énoncer. Je démontrerai d'abord cette proposition.

M. Jacobi se pose le problème suivant :

« Étant donné un système quelconque d'éléments entre lesquels et » le temps on a, dans le mouvement troublé, un système d'équations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» de la forme canonique (*), trouver d'autres systèmes d'éléments
» jouissant de la même propriété. »

La solution de ce problème est contenue dans le théorème suivant :

Soit donné le système

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = -\dfrac{dH}{db_1}, & \dfrac{da_2}{dt} = -\dfrac{dH}{db_2}, \ldots, & \dfrac{da_n}{dt} = -\dfrac{dH}{db_n}, \\ \dfrac{db_1}{dt} = \dfrac{dH}{da_1}, & \dfrac{db_2}{dt} = \dfrac{dH}{da_2}, \ldots, & \dfrac{db_n}{dt} = \dfrac{dH}{da_n}. \end{cases}$$

» H étant une fonction quelconque de t et des variables $a_1, b_1,$
» $a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$, soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ de nouvelles variables
» entre lesquelles et les précédentes on a les équations suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{d\psi}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, & \dfrac{d\psi}{d\alpha_n} = \beta_n, \\ \dfrac{d\psi}{d\alpha_1} = -b_1, & \dfrac{d\psi}{d\alpha_2} = -b_2, \ldots, & \dfrac{d\psi}{d\alpha_n} = -b_n, \end{cases}$$

» ψ étant une fonction quelconque des variables $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, a_1 a_2 \ldots a_n$
» qui ne contient ni t ni les autres variables.

» Je dis que si l'on exprime, au moyen des équations précédentes,
» la fonction H par t et les nouvelles variables $\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1 \beta_2, \ldots, \beta_n$,
» on aura entre ces dernières des équations différentielles précisément
» de la même forme que les proposées, savoir :

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = -\dfrac{dH}{d\beta_1}, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = -\dfrac{dH}{d\beta_2}, \ldots, & \dfrac{d\alpha_n}{dt} = -\dfrac{dH}{d\beta_n}, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = \dfrac{dH}{d\alpha_1}, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \dfrac{dH}{d\alpha_2}, \ldots, & \dfrac{d\beta_n}{dt} = \dfrac{dH}{d\alpha_n}. \end{cases}$$

Si l'on ne suppose aucune forme particulière aux équations qui lient entre elles les nouvelles et les anciennes variables, on aura, en général, pour déterminer la variation des nouveaux éléments, les équations connues

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dH}{d\alpha_1} dt = [\alpha_1, \beta_1] d\beta_1 + [\alpha_1, \alpha_2] d\alpha_2 + [\alpha_1, \beta_2] d\beta_1 + \ldots, \\ \dfrac{dH}{d\beta_1} dt = -[\alpha_1, \beta_1] d\alpha_1 + [\alpha_2, \beta_1] d\alpha_2 - [\beta_2, \beta_1] d\beta_2 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(*) C'est-à-dire de la forme des équations (3).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les symboles $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$, etc., ayant leur signification ordinaire, c'est-à-dire qu'on a, par exemple,

$$[\alpha_1 \beta_1] = \frac{da_1}{d\alpha_1}\frac{db_1}{d\beta_1} - \frac{db_1}{d\alpha_1}\frac{da_1}{d\beta} + \frac{da_2}{d\alpha_1}\frac{db_2}{d\beta_1} - \frac{db_2}{d\alpha_1}\frac{da_2}{d\beta_1} + \ldots.$$

Nous avons maintenant à faire voir que si les nouvelles variables $a_1, b_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ sont liées aux anciennes $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ par les équations (6), les équations (8) se réduiront à la forme connue; or, pour cela, il suffit évidemment de prouver que l'on a les équations suivantes :

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1, \quad [\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_3, \beta_3] = 1,$$
$$[\alpha_1, \alpha_2] = 0, \quad [\alpha_1, \alpha_3] = 0, \quad [\alpha_1, \beta_2] = 0.$$

Prouvons, par exemple, que l'on a $[\alpha_1 \beta_1] = 1$.

Dans ce but, nous formerons d'abord les différentielles de ψ par rapport à α_1 et β_1. ψ est primitivement une fonction des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$; mais nous supposons, en prenant les différentielles, qu'on ait remplacé $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par leurs valeurs en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. En désignant par $\left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right)$ la différentielle de ψ prise par rapport à la variable α_1, en tant qu'elle entre explicitement dans la fonction, nous aurons les deux équations

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right) + \frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{d\alpha_1} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{d\alpha_1} \cdots + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{d\alpha_1},$$
$$\frac{d\psi}{d\beta_1} = \qquad \frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{d\beta_1} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{d\beta_1} \cdots + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{d\beta_1}.$$

Mais en vertu des équations (6), on a

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\psi}{da_1} = -b_1, \quad \frac{d\psi}{da_2} = -b_2, \ldots, \quad \frac{d\psi}{d\alpha_n} = -b_n;$$

donc les équations précédentes deviennent

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1 - b_1\frac{da_1}{d\alpha_1} - b_2\frac{da_2}{d\alpha_1} \cdots - b_n\frac{da_n}{d\alpha_1},$$
$$\frac{d\psi}{d\beta_1} = \quad - b_1\frac{da_1}{d\beta_1} - b_2\frac{da_2}{d\beta_1} \cdots - b_n\frac{da_n}{d\beta_1}.$$

Maintenant, si l'on différentie la première des équations précédentes par rapport à β_1, la seconde par rapport à α_1, et qu'on égale les deux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

résultats en effaçant les termes analogues à $\frac{b_1 da_1}{d\alpha_1 d\beta_1}$, $\frac{b_1 da_1}{d\beta_1 d\alpha_1}$, qui se détruisent dans les deux membres, il reste précisément $[\alpha_1, \beta_1] = 1$.

On prouverait de la même manière que l'on a

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_3, \beta_3] = 1, \ldots.$$

Si, d'un autre côté, on considère les quantités $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$, ..., on voit tout de suite pourquoi, en appliquant le mode de démonstration précédent, ces quantités sont nulles et non pas égales à 1. C'est que, par exemple, dans les quantités $\frac{d\psi}{d\alpha_1 d\alpha_2}$, $\frac{d\psi}{d\alpha_2 d\alpha_1}$, qui doivent conduire à la quantité $[\alpha_1, \alpha_2]$, les termes β_1, β_2 étant différentiés par rapport à α_1, α_2 sont nuls, et dans $\frac{d\psi}{d\beta_1 d\beta_2}$, $\frac{d\psi}{d\beta_2 d\beta_1}$, qui doivent donner $[\beta_1, \beta_2]$, les termes analogues à β_1, β_2 ne se trouvent pas.

Le théorème qui doit nous servir de lemme peut être considéré maintenant comme complétement démontré.

Revenons au premier théorème, dont la démonstration est notre objet principal.

Lorsque les éléments variables sont les valeurs initiales des coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et les valeurs initiales des quantités $\frac{mdx}{dt}$, $\frac{mdy}{dt}, \ldots$, que nous désignerons par $-b_1, -b_2, \ldots$, les équations qui déterminent les variations des éléments ont, comme nous l'avons déjà remarqué, la forme canonique; ce sont, par exemple, les équations (5), dans lesquelles on aurait changé les signes de b_1, $b_2, \ldots$, ou, ce qui revient au même, les signes des seconds membres.

Pour que le théorème que nous avons en vue soit démontré, il suffit, d'après le lemme, de faire voir que des équations semblables aux équations (6) lient les anciennes variables $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$, aux nouvelles $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$, obtenues comme il a été dit en commençant.

Or nous avons vu que les intégrales des équations (1) sont les suivantes :

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \frac{d\Theta}{dh} = t + \tau,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'on sait, d'ailleurs, qu'on a les intégrales premières

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{mdx}{dt}, \quad \frac{d\Theta}{dy} = \frac{mdy}{dt}, \text{ etc.}$$

Si l'on fait dans ces équations $t = 0$, on devra remplacer x, y, z, $\frac{mdx}{dt}$, $\frac{mdy}{dt}$, ..., par leurs valeurs initiales a_1, $-b_1$, a_2, $-b_2$, ..., a_n, $-b_n$; Θ deviendra alors une fonction de a_1, a_2, ..., α_1, α_2, ..., α_{n-1}, C, et l'on aura les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dC} = \tau,$$

$$\frac{d\Theta}{da_1} = b_1, \quad \frac{d\Theta}{da_2} = -b_2, \ldots, \quad \frac{\Theta}{da_n} = -b_n,$$

c'est-à-dire précisément les équations (6).

Le théorème est donc démontré.

II.

Nous allons maintenant faire l'application du théorème de M. Jacobi au problème des perturbations planétaires. Si les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses étaient des éléments dont il fût avantageux de déterminer les variations de préférence à tous les autres, le théorème de M. Jacobi, quoique curieux en lui-même, serait sans utilité réelle; mais s'il arrive, comme nous allons le faire voir, qu'en choisissant convenablement les fonctions Θ, les constantes α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 soient précisément les éléments dont il importe de calculer les variations, on conçoit toute l'importance du nouveau théorème. Je ne sais par quelle méthode M. Jacobi détermine une solution complète de l'équation aux différences partielles; mais, quoi qu'il en soit, je m'appuierai, pour la recherche de la solution complète, sur des résultats que j'ai précédemment obtenus dans un autre travail. La règle que nous avons donnée plus haut pour obtenir les constantes α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 est la suivante :

Déterminez une fonction Θ de x, y, z qui contienne, outre la constante qu'on peut toujours lui ajouter, les trois constantes A, B, C,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et qui satisfasse identiquement à l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2(U + C),$$

puis formez les intégrales $\frac{d\Theta}{dA} = A'$, $\frac{d\Theta}{dB} = B'$, $\frac{d\Theta}{dC} = t + \tau$; A, B, C, A', B', τ seront les six constantes demandées.

Supposons que dans l'équation précédente, x, y, z soient remplacées par d'autres variables tellement choisies, que l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire qu'elle soit de la forme

$$p_1\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + p_3\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 = 2(U + C).$$

Si l'on obtient une fonction Θ de ρ_1, ρ_2, ρ_3 et des constantes arbitraires A, B, C satisfaisant identiquement à l'équation précédente, il est clair que si dans l'expression de Θ on met à la place de ρ_1, ρ_2, ρ_3 leurs valeurs en x, y, z, on aura une solution convenable de l'équation différentielle proposée. Mais au lieu de remplacer d'abord dans Θ ρ_1, ρ_2, ..., par leurs valeurs en x, y, z, il est évident qu'on peut prendre immédiatement les différentielles de Θ par rapport à A, B, C, sauf à imaginer qu'ensuite, dans

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 soient remplacées par leurs valeurs en x, y, z. Le dernier changement de variables que nous venons d'indiquer n'est point d'ailleurs nécessaire; nous n'en avons parlé que pour la clarté de l'exposition. Ce qui importe seulement, c'est de bien savoir quelle est la signification des constantes A, B, C, A', B', τ : c'est une question sur laquelle nous reviendrons bientôt.

Il nous faut maintenant choisir notre système de coordonnées. Celui qui se présente naturellement à l'esprit est le système des coordonnées polaires dans l'espace qui satisfait à cette condition, que l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

M. Liouville, dans un cas très-général de la fonction des forces a, fait connaître une solution Θ exprimée au moyen des coordonnées polaires dans l'espace. Dans son Mémoire, cette solution Θ est déduite d'une autre beaucoup plus complexe, qui est exprimée en coordonnées elliptiques. Mais comme dans ma Thèse sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres mobiles, j'ai obtenu, pour une certaine expression de la fonction des forces, une solution Θ exprimée en fonction des coordonnées elliptiques dans un plan et de l'angle de ce plan avec un plan fixe, il m'a paru convenable de déduire la fonction Θ, dans le cas des coordonnées polaires, de celle que j'avais déjà trouvée, et que je vais rappeler.

La fonction Θ dont il s'agit est la suivante :

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{Ac^2 + B\rho^2 + 2C\rho^4 + 2f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}}.$$

Pour introduire dans Θ les coordonnées polaires, savoir, le rayon vecteur r, l'angle ψ du rayon vecteur avec l'axe de z, l'angle φ de l'axe des x et de la projection sur le plan des xy du rayon vecteur, il y a principalement à considérer le terme

$$\int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}},$$

sur lequel porte toute la difficulté.

En effet, pour passer du système de coordonnées dans lequel est exprimée la fonction Θ précédente au système des coordonnées polaires, il suffit de supposer que l'un des centres fixes auxquels se rapportent les quantités $\rho = \frac{r + r'}{2}$, $\mu = \frac{r - r'}{2}$ (r et r' étant les distances du point attiré aux deux centres), vienne se confondre avec l'autre : c'est ce qu'on exprime en faisant $\rho = r$, $\mu = 0$, $c = 0$.

Le premier terme de Θ devient alors, en y faisant $c = 0$, $\rho = r$, $\int \frac{dr}{r^2} \sqrt{2Cr^4 + Br^2 + 2f(r)}$, et le dernier terme reste tel qu'il était ; mais on ne voit pas immédiatement ce que devient le second terme contenant en évidence la quantité $\frac{\mu}{c}$ qui, dans l'hypothèse actuelle, se pré-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sente sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour calculer ce second terme, écrivons-le sous la forme

$$\int \frac{d\frac{\mu}{c}}{\sqrt{1-\frac{\mu^2}{c^2}}}\sqrt{-\frac{Ac^2}{\mu^2}-B+2C\mu^2+2\frac{F(\mu)}{\mu^2}},$$

et cherchons la valeur limite de $\frac{\mu}{c}$ pour $\mu = 0$, $c = 0$. Pour trouver cette limite, calculons la valeur de r' dans le triangle ayant pour côtés r, r', $2c$ et $90 - \psi$ pour angle compris entre les côtés r et $2c$; nous aurons

$$r' = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr\sin\psi},$$

puis

$$\frac{\mu}{c} = \frac{\sqrt{r^2+4c^2-4cr\sin\psi}-r}{2c} = \frac{2c - 2r\sin\psi}{\sqrt{r^2+4c^2-4cr\sin\psi}+r},$$

et enfin, limite de $\frac{\mu}{c} = -\sin\psi$, et, par suite,

$$\frac{-d\frac{\mu}{c}}{\sqrt{1-\frac{\mu^2}{c^2}}} = d\psi.$$

Introduisons ces valeurs dans le second terme mis sous la forme que nous venons de lui donner, nous aurons, pour ce second terme,

$$-\int \frac{d\psi}{\sin\psi}\sqrt{-A - B\sin^2\psi + 2\chi(\psi)};$$

la valeur complète de Θ devient alors, comme M. Liouville l'a trouvé d'une autre manière,

$$\Theta = \int \frac{dr}{r^2}\sqrt{Br^2 + 2cr^4 + 2f(r)} - \int \frac{d\psi}{\sin\psi}\sqrt{-A - B\sin^2\psi + 2\chi(\psi)}$$
$$+ \int d\varphi\sqrt{A + 2\Pi(\varphi)}.$$

Quant à la fonction U qui doit accompagner cette valeur de Θ, on peut la déduire aussi de la fonction U qui accompagnait notre ancienne

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur de Θ en mettant cette dernière fonction U sous la forme

$$U = \frac{\frac{\mu^2}{c^2} f(\rho) + \rho^2 \frac{F(\mu)}{c^2} + (\rho^2 - \mu^2) \frac{\Pi(\varphi)}{c^2}}{\frac{\mu^2}{c^2} \rho^2 (\rho^2 - \mu^2)},$$

et passant à la limite, on a

$$U = \frac{\sin^2 \psi\, f(r) + r^2 \chi(\psi) + r^2 \Pi(\varphi)}{r^4 \sin^2 \psi}.$$

Si l'on fait $f(r) = r^4 f_1(r)$, la valeur de U prend la forme plus simple

$$U = f_1(r) + \frac{\chi(\psi) + \Pi(\varphi)}{\rho^2 \sin^2 \psi}.$$

III.

Il faut maintenant appliquer les nouvelles valeurs de Θ et de U au problème des deux corps. U étant égal, dans le problème dont il s'agit, à $\frac{g}{r}$, on aura

$$f_1(r) = \frac{g}{r}, \quad f(r) = gr^3, \quad \chi(\psi) = 0, \quad \Pi(\varphi) = 0,$$

et, par suite,

$$\Theta = \int \frac{dr}{r} \sqrt{2Cr^2 + 2gr + B} - \int \frac{d\varphi}{\sin \psi} \sqrt{-A - B \sin^2 \psi} + \int d\varphi \sqrt{A}.$$

Formant maintenant les équations $\frac{d\Theta}{dA} = A'$, $\frac{d\Theta}{dB} = B'$, $\frac{d\Theta}{dC} = t + \tau$, on aura

$$(9) \qquad \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{A}} + \int \frac{d\psi}{2 \sin \psi \sqrt{-A - B \sin^2 \psi}} = A',$$

$$(10) \qquad \int \frac{dr}{2r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} + \int \frac{\sin \psi\, d\psi}{2\sqrt{-A - B \sin^2 \psi}} = B',$$

$$(11) \qquad \int \frac{r dr}{\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} = t + \tau;$$

ou bien, en différentiant,

$$(12) \qquad d\varphi = -\frac{\sqrt{A}\, d\psi}{\sin \psi \sqrt{-A - B \sin^2 \psi}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$(13)\qquad \frac{dr}{r\sqrt{2Cr^2+2gr+B}} = -\frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A-B\sin^2\psi}},$$

$$(14)\qquad \frac{rdr}{\sqrt{2Cr+2gr+B}} = dt.$$

Si j'avais voulu établir une liaison plus intime encore entre mon travail actuel et le travail sur le mouvement d'un point attiré par deux centres mobiles, j'aurais pu obtenir les formules précédentes sans passer par le calcul d'une nouvelle fonction Θ. Il eût suffi pour cela d'introduire dans les formules du problème que nous venons de rappeler les conditions $k = 0$, $g' = 0$, $c = 0$, $\mu = 0$, $\frac{\mu}{c} = -\sin\psi$. Le calcul, fait de cette manière, confirme pleinement d'ailleurs celui que nous venons de faire.

IV.

Nous pourrions faire voir dès maintenant, par les équations (13), (14) et (15), que le principe des aires a lieu, que la courbe est plane, et qu'elle est une section conique; mais la question importante étant de trouver la signification des constantes A, B, C, A', B', τ, nous allons nous occuper immédiatement de cette question, et celle d'interpréter les équations (13), (14) et (15) se trouvera résolue en même temps.

Pour trouver la signification des différentes constantes arbitraires, nous allons comparer nos formules aux équations connues du mouvement elliptique auquel nous voulons nous borner. On voit d'abord immédiatement ce que représente la constante C; car puisque, d'un côté, nous avons posé $\frac{V^2}{2} = \frac{g}{r} + C$, et que, d'après la formule connue du mouvement elliptique, on a

$$\frac{V^2}{2} = g\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

on aura

$$C = -\frac{g}{2a}.$$

Pour trouver la signification des constantes arbitraires B et τ, nous

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comparerons à l'équation connue du mouvement elliptique,

$$\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{e^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}} = dt,$$

l'équation (14) mise sous la forme

$$\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{1+\frac{B}{ga}-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}} = dt.$$

On voit que l'on peut poser $1 + \frac{B}{ga} = e^2$; d'où $B = -ga(1-e^2)$, c'est-à-dire qu'au facteur près $-g$, B représente le demi-paramètre. Quand on a remplacé B et C par leurs valeurs dans l'équation (11), cette équation devient identique à celle du mouvement elliptique

$$t + \tau = \int \frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{e^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}}.$$

Donc τ peut être considéré comme représentant le temps du passage par le périhélie.

Pour obtenir la valeur de la constante A, multiplions membre à membre les équations (12) et (14), puis divisons membre à membre cette nouvelle équation et l'équation (13); il viendra

$$r^2 \sin^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{A};$$

ce qui donne le principe des aires appliqué à la projection de la trajectoire sur le plan des xy, et, par suite, à l'orbite elle-même, en admettant, ce qui résulte du reste de nos formules, comme nous le ferons voir tout à l'heure, que l'orbite est plane.

Le double de l'aire décrite dans l'unité de temps sur le plan de l'orbite par le rayon vecteur étant égal à $\sqrt{ga(1-e^2)}$, nous aurons, en représentant par γ l'angle du plan de l'orbite avec le plan des xy,

$$\sqrt{A} = \sqrt{ga(1-e^2)}\cos\gamma, \quad \text{ou} \quad A = ga(1-e^2)\cos^2\gamma.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour obtenir maintenant la valeur de B′, nous allons déduire de nos équations l'équation polaire de l'ellipse. En désignant par θ l'angle fait par le rayon vecteur avec un axe choisi arbitrairement dans le plan de l'orbite, nous aurons, d'après le principe des aires, l'équation

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{A}}{\cos\gamma},$$

ou bien, en mettant à la place de $\sqrt{A}$ sa valeur précédemment trouvée $r^2 \sin^2\psi \frac{d\varphi}{dt}$,

$$\sin^2\psi\, d\varphi = \cos\gamma\, d\theta.$$

Substituant maintenant pour $d\varphi$ sa valeur tirée de l'équation (12), et indiquant l'intégration, on aura

$$\frac{\cos\gamma\,\theta}{\sqrt{A}} = -\int \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}};$$

puis, si l'on met dans l'équation (10), à la place de $\int \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}}$, sa valeur $\frac{\cos\gamma\,\theta}{\sqrt{A}}$, il viendra

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} + \frac{\theta}{\sqrt{ga(1-e^2)}} = 2B',$$

ou bien

$$\int \frac{\sqrt{ga(1-e^2)}\, dr}{r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} = 2B'\sqrt{ga(1-e^2)} - \theta.$$

Or cette équation devient identique à l'équation polaire de l'ellipse, en remettant pour B et C leurs valeurs. On voit ainsi qu'on peut supposer que $2B'\sqrt{ga(1-e^2)}$ est la longitude du périhélie, et, par conséquent, qu'au facteur $2\sqrt{g}$ près, B′ est la longitude du périhélie divisée par la racine carrée du demi-paramètre.

Il nous reste à trouver la signification de la constante A′. Or cette constante nous est donnée immédiatement par l'équation (11), mise

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sous la forme

$$\varphi - 2A'\sqrt{A} = \int_{\frac{\varpi}{2}}^{\psi} \frac{\sqrt{A}\,d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}};$$

car il suffit de supposer que la constante $-2A'\sqrt{A}$ est la valeur de φ pour $\psi = \frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire la longitude du nœud. Ainsi, au facteur près $-2\sqrt{g}$, la constante A' est égale à la longitude du nœud divisée par le produit de la racine carrée du demi-paramètre et du cosinus de l'inclinaison.

Remarquons, en passant, que l'équation (12), après qu'on y a remplacé A et B par leurs valeurs précédemment trouvées, peut s'écrire

$$d\varphi = \frac{d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{\tang^2\gamma - \cot^2\psi}};$$

et, en intégrant, on a

$$\cot\psi = \tang\gamma\sin(\varphi - h),$$

h étant la longitude du nœud.

L'équation précédente peut être considérée comme l'équation d'un plan qui fait un angle γ avec le plan des xy, et dont la trace sur ce plan fait avec l'axe des x un angle h, comme il est facile de le voir par un triangle sphérique rectangle. Nous pouvons donc dire que la courbe est plane, comme nous l'avions supposé dans les calculs précédents, et en même temps nous avons une vérification de la détermination de nos constantes A et B.

Concluons maintenant comme résultat définitif de notre travail, que les éléments dont nous pouvons déterminer les variations par des équations de forme canonique sont :

L'axe inverse, le temps du passage par le périhélie, le demi-paramètre, le demi-paramètre multiplié par le carré du cosinus de l'inclinaison, la longitude du périhélie divisée par la racine carrée du demi-paramètre; et, enfin, la longitude du nœud divisée par le produit de la racine carrée du demi-paramètre et du cosinus de l'inclinaison. M. Jacobi trouve des éléments un peu différents des nôtres. Ce sont les suivants :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'axe inverse, le temps du passage par le périhélie, la racine carrée du demi-paramètre, la racine carrée du demi-paramètre multipliée par le cosinus de l'inclinaison, la longitude du périhélie et celle du nœud. On voit que le choix des éléments est à peu près aussi avantageux d'un côté que de l'autre; et, d'ailleurs, on pourrait sans difficulté déduire l'un de l'autre les deux systèmes d'équations canoniques correspondant aux deux systèmes d'éléments.

Vu et approuvé,

Le 25 mars 1848.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

DUMAS.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général de l'Université,
Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC