

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

MM. LAMBERT ET PICQUÉ,

Attachés à l'Ecole spéciale militaire de S.-Cyr.



Paris,

CHEZ L. HACHETTE,
LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
RUE PIERRE-SARRAZIN, 12.

—
1842

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.



1. Les procédés de la géométrie ordinaire conduisent avec exactitude au tracé d'une figure plane bien définie et aux constructions à exécuter sur son plan. Dès qu'on a voulu considérer des formes à trois dimensions, cette science s'est bornée à les représenter d'une manière vague, dans le but seulement d'exposer quelques théories ou d'indiquer la série d'opérations pour arriver à la solution d'une question. Mais que de difficultés insurmontables s'il fallait dans l'espace représenter les données d'un problème et faire les constructions qui doivent conduire aux résultats. Cependant on conçoit l'utilité, la nécessité même de donner la description graphique exacte tant des données que des résultats, afin de compléter la question que la géométrie ordinaire n'a pu qu'ébaucher. On a donc été naturellement porté à chercher un moyen de ramener les opérations graphiques dans l'espace à s'exécuter sur un plan unique, et c'est là le but de la nouvelle branche des mathématiques appelée *Géométrie descriptive*.

La géométrie descriptive est la branche des mathématiques qui a pour objet de représenter sur une surface plane les figures de l'espace.

2. Les lignes, les surfaces, pouvant être considérées comme composées de points, tout se réduit à savoir représenter un point sur la surface plane choisie pour la description d'un corps. On y est

La projection d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

Les projections d'un point sur deux plans qui se coupent déterminent sa position dans l'espace.

parvenu par *la méthode des projections*. Le pied a (fig. 1) de la perpendiculaire Aa abaissée du point A de l'espace sur le plan en question MN est dit *la projection* de A sur ce plan.

Si la projection a ne suffit pas pour déterminer graphiquement le point A de l'espace, puisqu'on sait seulement qu'il se trouve sur la perpendiculaire aA au plan MN , ses projections a et a' sur deux plans fixes, non parallèles, donnés de position, le font connaître complètement, parce qu'il est à l'intersection des deux droites aA , $a'A$, élevées perpendiculairement aux deux plans MN et PQ .

Pour que deux points pris au hasard sur deux plans puissent représenter les projections d'un point de l'espace, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées de ces deux projections sur l'intersection commune des deux plans se coupent en un même point de cette intersection.

3. Le plan aAa' dans lequel se trouvent le point de l'espace et ses deux projections est à la fois perpendiculaire aux deux plans MN et PQ , et par conséquent à leur intersection commune NP ; il coupe donc ces plans suivant deux droites $a\alpha$ et $a'\alpha$ perpendiculaires à NP , en un même point α de cette intersection. On ne pourra donc pas prendre au hasard deux projections pour celles d'un point de l'espace. Si, comme pour les projections a et a' , les perpendiculaires $a\alpha$, $a'\alpha$, à l'intersection commune, se coupent en un même point α de cette intersection, elles détermineront bien un point A de l'espace. En effet, les deux perpendiculaires qu'on élèverait respectivement des points a et a' aux plans MN et PQ se trouveraient dans un même plan $a\alpha a'$ perpendiculaire à leur intersection commune NP , et par conséquent à ces deux plans, et alors ces deux perpendiculaires aA , $a'A$, se couperaient nécessairement.

Si au contraire les deux projections données a et a' étaient telles que les perpendiculaires $a\alpha$ et $a''\alpha'$ à NP ne vinssent pas à se rencontrer en un même point de cette droite, les deux plans menés perpendiculairement à NP , l'un par $a\alpha$ et l'autre par $a'\alpha'$, seraient parallèles et distincts l'un de l'autre. Le premier contiendrait la perpendiculaire aA au plan MN , le second celle $a''B$ au

plan PQ. Les deux perpendiculaires aA et $a'B$ ne se rencontreraient donc pas, et ne sauraient par conséquent déterminer un point de l'espace.

4. Reste à faire voir comment on ramène la projection a' sur le plan MN choisi pour la description des figures. On imagine pour cela que le plan PQ tourne autour de l'intersection commune NP pour se rabattre sur le plan MN et ne former avec lui qu'un seul et même plan. Dans ce mouvement, la droite $a'\alpha$ ne cesse pas d'être perpendiculaire à NP au point α , de sorte que la projection a' se trouve après le rabattement sur la perpendiculaire abaissée de la projection a sur NP, et à une distance $\alpha a'$ de cette droite. De cette manière, au moyen des projections a et a' données dans le rabattement, et de l'angle aza' qui mesure l'inclinaison des deux plans connus de position, on a tous les éléments nécessaires pour déterminer le quadrilatère $\alpha\alpha a'A$, et par conséquent la position du point A de l'espace. Car il ne faut pas perdre de vue que le rabattement n'a été admis que comme moyen d'exécution d'opérations graphiques; et, toutes les fois qu'il s'agira de quelques considérations géométriques, on doit, par la pensée, relever le plan PQ dans sa véritable situation.

Les deux projections d'un point se ramènent sur un même plan moyennant le rabattement d'un des plans sur l'autre.

Dans ce rabattement les deux projections d'un même point de l'espace se trouvent sur une même perpendiculaire à la charnière.

5. Les deux plans MN et PQ sur lesquels se font les projections s'appellent *plans de projection*, et leur intersection NP se nomme la *ligne de terre*.

Les deux plans de projection, jusqu'ici arbitraires, sont choisis de préférence perpendiculaires entre eux. Leur position en effet est plus simplement définie, et les deux perpendiculaires à leurs directions respectives, telles que aA et $a'A$, qui déterminent le point de l'espace moyennant ses deux projections, se coupant à angle droit, donnent avec plus de précision leur point de rencontre A. Pour se figurer encore plus aisément les deux plans de projection dans l'espace, on suppose l'un

Les deux plans de projection sont choisis ordinairement perpendiculaires entre eux, l'un horizontal et l'autre vertical. Les distances des deux projections à la ligne de terre représentent alors les distances du point de l'espace à ces plans.

de ce plans *horizontal* et l'autre *vertical* (*). C'est ce dernier qui se rabattra sur le plan horizontal, de manière que sa partie supérieure vienne se confondre avec la partie postérieure du plan horizontal

Dans l'hypothèse des plans de projection perpendiculaires entre eux, le quadrilatère $aaa'A$ devient un rectangle, et par conséquent les distances $a\alpha$, $a'\alpha$, des projections à la ligne de terre, sont égales aux deux distances $a'A$, aA , du point A de l'espace aux deux plans de projection.

Ainsi, pour représenter un point en géométrie descriptive, on tirera (fig. 2) une ligne indéfinie XY, qui sera la ligne de terre. Deux points a et a' pris sur une même perpendiculaire à cette ligne seront les deux projections d'un point de l'espace, et les distances $a\alpha$, $a'\alpha$, de ces projections à la ligne de terre, exprimeront les distances du point de l'espace aux plans vertical et horizontal (**). Un point sera donc bien défini graphiquement par ses deux projections. Aussi le désignera-t-on dorénavant de cette manière, et on dira le point (a, a') .

(*) Ce sont effectivement les positions de plans qu'on sait déterminer dans l'espace au moyen d'instruments et de la direction du fil-à-plomb, et avec lesquelles on se familiarise très facilement.

(**) La méthode des projections se rapporte tout à fait à ce qui a lieu en analyse, où la position d'un point de l'espace est déterminée par ses distances à trois plans connus de position. Se donner, en effet, les deux projections d'un point, c'est connaître non seulement les distances du point de l'espace aux deux plans de projection, mais encore implicitement sa distance à un troisième plan fixe perpendiculaire à l'intersection commune des deux premiers.

Un point pourrait se rapporter à trois points ou à trois droites connus de position. Dans le premier cas, il serait donné par l'intersection de trois sphères dont les rayons seraient ses distances aux trois points fixes. Dans le second cas, il serait à l'intersection de trois cylindres à base circulaire, dont les rayons seraient les distances du point aux trois droites fixes. Mais ces deux manières de définir un point de l'espace conduiraient en géométrie descriptive à des constructions beaucoup plus compliquées, comme en analyse la détermination d'un point par rapport à trois plans est le mode le plus simple.

Un point situé dans un des plans de projection a sa projection sur l'autre plan sur la ligne de terre elle-même. C'est une conséquence de la perpendicularité de ces deux plans.

6. Un point de l'espace peut être placé dans un des quatre angles dièdres formés par les deux plans de projection. Après le rabattement de l'un de ces plans sur l'autre, la partie de la surface plane au-dessous de la ligne de terre XY représente en même temps la portion antérieure du plan horizontal et la portion inférieure du plan vertical, tandis que la partie au-dessus de XY est la portion postérieure du plan horizontal comme la portion supérieure du plan vertical. Il ne suffira donc pas de donner indistinctement les deux projections a et a' d'un point : il faudra encore énoncer si a est sa projection horizontale ou sa projection verticale, car ces deux suppositions peuvent être admises, et elles détermineraient dans l'espace deux points bien différents, situés dans les deux dièdres opposés par le sommet. Aussi est-on convenu de désigner par des lettres sans accent les projections horizontales des points, et par des lettres accentuées leurs projections verticales. Ainsi (a, a') désigne un point situé dans l'angle dièdre en avant du plan vertical et au-dessus du plan horizontal; (b, b') un point de l'angle dièdre en arrière du plan vertical et au-dessous du plan horizontal; (c, c') un point en avant du plan vertical et au-dessous du plan horizontal; enfin, (d, d') un point en arrière du plan vertical et au-dessus du plan horizontal.

7. Jusqu'ici on a supposé que les projections s'exécutaient au moyen de perpendiculaires aux plans de projection. Quelquefois pourtant on emploie des droites *obliques* à ces plans, mais toujours parallèles à deux directions données. Les différents plans qui contiennent le point de l'espace et ses deux projections, tels que $Aaxa'$ (fig. 1), étant tous parallèles, couperaient les

plans MN et PQ suivant des droites aussi parallèles, et qui, comme les lignes $a\alpha$, $a'\alpha$, partant des deux projections a et a' d'un même point de l'espace, viendraient aboutir au même point α de la ligne de terre. Sauf quelques positions exceptionnelles, les droites $a\alpha$, $a'\alpha$, feraient des angles aigus avec la ligne de terre, et aucun des angles du quadrilatère $Aa\alpha a'$ ne serait droit. Ainsi il faudrait se donner les directions Aa , Aa' , et en conclure celles de $a\alpha$, $a'\alpha$, dans les plans rabattus. Ce genre de projections, dit *projection oblique*, est moins simple, et sujet à moins de précision dans les constructions; aussi ne l'emploie-t-on que dans des cas fort rares.

Les projections dites *perspectives*, qu'on obtient par des droites partant d'un point unique, donneraient lieu à des observations semblables. A moins qu'il ne soit dit autrement, on emploiera la projection *orthogonale* qui a été exposée en premier lieu.

Une ligne est déterminée par ses deux projections.

8. La projection d'une ligne est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des différents points de la ligne sur le plan de projection. L'ensemble de ces perpendiculaires forme un cylindre *projetant*, et toutes les courbes tracées sur cette surface cylindrique auront même projection que la ligne donnée. Moyennant une seconde projection sur l'autre plan de projection, la ligne sera bien déterminée, puisque devant se trouver à la fois sur les deux surfaces cylindriques projetantes, elle ne sera autre que leur intersection.

Pour que deux projections appartiennent à une même ligne de l'espace, il faut que les points de l'une quelconque des projections se trouvent sur les perpendiculaires à la ligne de terre abaissées des différents points de l'autre projection.

La projection d'une ligne droite est une droite. C'est un point dans la position particulière d'une droite perpendiculaire au plan de projection.

9. Les perpendiculaires abaissées des différents points d'une ligne droite AB (fig. 3) sur le plan de projection sont toutes contenues dans le plan mené par l'une d'elles Aa et par la droite AB. La projection ab de

la ligne droite AB est donc l'intersection de ce plan projetant avec le plan de projection; c'est par conséquent une droite. Cependant quand la droite AB est perpendiculaire au plan de projection, toutes les perpendiculaires abaissées de ses différents points se confondent avec AB , et sa projection se réduit dans ce cas à un point qui est le pied de AB dans le plan de projection.

De ce que la projection d'une ligne est une droite, on ne peut pas conclure que cette ligne est elle-même une droite. En effet, toutes les courbes tracées dans le plan projetant passant par la projection donnée auront cette droite pour projection. C'est seulement un indice que la ligne de l'espace est plane.

Un point, s'il représente la projection d'une ligne, ne peut, au contraire, appartenir qu'à une droite perpendiculaire au plan de projection.

Puisque la projection d'une ligne droite est une droite, les projections de deux de ses points suffisent pour la déterminer.

10. Une droite AB (fig. 3) est déterminée par ses deux projections ab , $a'b'$. En effet, devant se trouver à la fois dans les deux plans menés successivement par ab et $a'b'$ perpendiculairement aux plans MN et PQ cette droite AB n'est autre que leur intersection. Ces deux plans perpendiculaires aux deux plans MN et PQ , qui se coupent, se rencontrent ordinairement. S'ils étaient parallèles, il s'ensuivrait que les plans MN et PQ , perpendiculaires chacun à l'un de ces deux plans parallèles, seraient perpendiculaires à tous les deux; leur intersection commune NP serait donc aussi perpendiculaire à ces deux plans parallèles, et, par conséquent, aux droites ab , $a'b'$, de ces plans. Les deux projections ab , $a'b'$, tracées dans les mêmes plans de projection que NP , sont donc, dans ce cas, perpendiculaires à cette ligne.

Une droite est déterminée par ses deux projections.

On peut prendre pour les projections d'une droite de l'espace deux droites tracées arbitrairement sur les plans de projection, pourvu que ni l'une ni l'autre de ces projections ne soit perpendiculaire à la ligne de terre, ou pourvu que les deux projections soient à la fois perpendiculaires à la ligne de terre en un même point de cette ligne. Encore dans ce dernier cas faut-il se donner les projections correspondantes à deux points, pour que la droite soit bien définie.

Effectivement on voit directement que, si les projections ab , $a'b'$, tombent à angle droit sur NP , le plan

mené par l'une d'elles ab , par exemple, perpendiculairement à MN , est aussi perpendiculaire à PQ , puisque ab est une perpendiculaire à ce dernier plan. Les deux plans projetants conduits par ab et $a'b'$ sont donc, dans ce cas particulier, parallèles entre eux.

Ainsi, il est bien prouvé que deux droites prises pour projections déterminent une droite de l'espace, pourvu toutefois que ces projections ne soient pas perpendiculaires à la ligne de terre. Encore, dans ce cas particulier, si les deux projections viennent aboutir au même point de cette ligne, les deux plans projetants, qui sont parallèles et qui ont un point commun, ne forment plus qu'un seul et même plan perpendiculaire à la ligne de terre. Toutes les lignes droites ou courbes (*) situées dans ce plan auront les deux mêmes projections, qui se réduisent à une perpendiculaire à la ligne de terre. Il y a donc indétermination pour la droite de l'espace, à moins qu'on ne donne sur cette perpendiculaire les deux projections correspondantes à deux points de la droite (**).

Si l'une des projections de la droite est perpendiculaire à la ligne de terre, l'autre projection doit nécessairement se confondre avec la première. En effet, le plan projetant mené par cette projection et qui contient la droite est, comme on l'a vu, perpendiculaire aux deux plans de projection et à la ligne de terre; il est donc aussi l'autre plan projetant de la droite, et son intersection ou la deuxième projection est la perpen-

(*) De ce que les deux projections d'une ligne sont droites on ne peut pas conclure que la ligne est elle-même une droite; il faut que ces deux projections ne soient pas dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

(**) Une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre n'est pas déterminée par ses deux projections. Pour bien définir la ligne, il faudrait se donner une troisième projection faite sur un autre plan vertical non parallèle au premier. Moyennant les projections de deux de ses points on saura construire cette troisième projection.

diculaire aboutissant au même point de la ligne de terre que la première.

On peut remarquer que la géométrie descriptive résout les cas de possibilité, d'impossibilité et d'indétermination, dans le choix des projections d'une droite, par cette simple condition déjà énoncée, savoir : pour que deux projections appartiennent à une même ligne de l'espace, il faut que les points de l'une quelconque des projections se trouvent sur les perpendiculaires à la ligne de terre abaissées des différents points de l'autre projection.

On désigne une droite par ses deux projections. Ainsi on dit la droite $(ab, a'b')$.

11. Il est essentiel de savoir distinguer *a priori* les projections de droites qui occupent des positions particulières par rapport aux deux plans de projection et à la ligne de terre.

Une droite située dans un des plans de projection est à elle-même sa projection dans ce plan, et sa projection sur l'autre plan est la ligne de terre, puisque les deux plans de projection sont rectangulaires.

La ligne de terre est à elle-même ses deux projections.

Quand une droite est parallèle à un des plans de projection, sa projection sur ce plan lui est parallèle. En effet, cette projection et la droite sont dans le même plan projetant, et cette dernière est parallèle au plan sur lequel est tracée cette projection.

La seconde projection de la droite est une parallèle à la ligne de terre. La droite et cette projection sont en effet dans un plan projetant parallèle au plan de projection. La projection et la ligne de terre, intersections de ces deux plans parallèles par l'autre plan de projection, sont donc parallèles. La direction de cette seconde projection est une conséquence de la perpendicularité des deux plans de projection.

Réciproquement, si une des deux projections d'une

Une droite située dans un des plans de projection a pour projection sur l'autre plan la ligne de terre.

Une parallèle à un plan de projection a pour projection sur ce plan une droite qui lui est parallèle, et sa projection sur l'autre plan est une parallèle à la ligne de terre.

Une parallèle à la ligne de terre a ses deux projections parallèles à cette ligne.

Une perpendiculaire à un des plans de projection a pour projection sur ce plan un point, et sa projection sur l'autre plan est une perpendiculaire abaissée de ce point sur la ligne de terre.

Les projections d'une perpendiculaire à la ligne de terre sont représentées par une seule et même perpendiculaire à cette ligne.

droite est parallèle à la ligne de terre, la droite est une parallèle à l'autre plan de projection. En effet, le plan projetant mené par cette projection est parallèle à l'autre plan de projection; la droite est donc parallèle à ce dernier plan, comme tracée dans un plan parallèle.

Une parallèle à la ligne de terre a ses deux projections parallèles à cette ligne. En effet, les deux plans projetants de la droite étant respectivement parallèles aux deux plans de projection, une projection de la droite et la ligne de terre sont les intersections de deux plans parallèles par l'autre plan de projection.

Réciproquement, si les deux projections d'une droite sont parallèles à la ligne de terre, la droite elle-même est parallèle à cette ligne. Car les deux plans projetants menés par ces deux projections sont parallèles à la fois à la ligne de terre, et déterminent, par leur intersection, une droite parallèle à cette ligne.

Une droite perpendiculaire à un plan de projection a pour projection sur ce plan un point. Quant à son autre projection, elle est perpendiculaire à la ligne de terre. Cela tient à ce que le plan projetant de la droite sur l'autre plan de projection est perpendiculaire à la fois aux deux plans de projection, et par conséquent à la ligne de terre. Donc la seconde projection, qui est une droite tracée dans ce plan projetant, est aussi perpendiculaire à cette ligne.

Les projections d'une droite perpendiculaire à la ligne de terre sont perpendiculaires à cette ligne au même point. En effet, la droite étant perpendiculaire à la ligne de terre est tout entière dans un plan perpendiculaire à cette ligne, et par conséquent aux deux plans de projection. Ce plan perpendiculaire à la ligne de terre se confond donc avec les deux plans projetants de la droite, et ses intersections avec les deux plans de projection sont les deux projections de la droite. Par conséquent ces deux projections sont perpendiculaires à la ligne de terre et au même point de cette ligne. Dans le rabattement, ces deux perpendiculaires ne formeront

qu'une seule et même perpendiculaire à la ligne de terre.

On a déjà vu que, réciproquement, quand les deux projections se confondent avec une perpendiculaire à la ligne de terre, la droite est située effectivement dans un plan perpendiculaire à cette ligne. Mais la droite ne sera définie qu'autant qu'on se donnera sur cette perpendiculaire les projections de deux points.

On dit tout simplement *une horizontale* ou *une verticale* pour désigner une droite parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection. Comme aussi un *plan horizontal* ou *vertical* est un plan parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection. Il faut bien remarquer qu'une parallèle au plan vertical n'est pas pour cela une verticale.

Il sera bon de se familiariser par un exercice à représenter les projections des droites placées dans des positions particulières.

12. Si on a pu croire un moment qu'une surface pouvait être représentée par les points qui lui appartiennent, on a été bien vite convaincu que ce procédé serait insuffisant et même impraticable. La multiplicité de points qu'il faudrait se donner, ne représenterait qu'imparfaitement la surface; encore faudrait-il joindre les deux projections d'un même point pour bien les distinguer, ce qui jetterait une confusion d'autant plus grande que la surface serait représentée avec plus d'exactitude. Mais comment parvenir à placer sur la même surface tous ces points qui ne sauraient être pris au hasard, comment construire au besoin des points intermédiaires, si ce n'est en se rattachant à sa génération particulière?

Une surface est représentée par les lignes qui constituent sa génération

Les surfaces sont assujetties à une génération au moyen de lignes connues de forme et de position. On a pensé qu'il suffirait de représenter ces lignes pour bien définir une surface; mais alors il faudra faire voir

comment, avec ces données, on pourra déterminer un point quelconque de la surface.

Un plan est déterminé par ses deux traces.

13. Le plan est engendré par une droite qui s'appuie constamment sur deux droites qui se coupent, ou qui se meut parallèlement à l'une d'elles en s'appuyant sur l'autre. Deux droites concourantes déterminent donc un plan. La position de ces deux droites est indifférente; il s'agit de les choisir de manière à simplifier les constructions, et c'est par cette raison que, pour indiquer la position d'un plan, on se donne ses intersections avec les deux plans de projection ou *ses deux traces*. Quand le plan n'est pas parallèle à la ligne de terre, il rencontre cette ligne en un point, qui est commun à ses deux traces.

La ligne de terre et les deux traces formant dans l'espace un trièdre, l'angle des deux traces dans l'espace est moindre que cet angle dans les plans de projection rabattus.

Une droite située dans un plan ne peut rencontrer les plans de projection que sur les traces mêmes du plan.

On verra plus tard comment avec les deux traces d'un plan on parvient à déterminer un point quelconque de cette surface.

Un plan se désigne par ses deux traces.

Un plan parallèle à l'un des plans de projection n'a pas de trace sur ce plan, et sa trace sur l'autre est une parallèle à la ligne de terre.

14. Il convient de savoir ce que deviennent les traces d'un plan qui occupe des positions particulières par rapport aux deux plans de projection et à la ligne de terre.

Un plan parallèle à l'un des plans de projection n'a pas de trace sur ce plan, et sa trace sur l'autre est une parallèle à la ligne de terre, puisque cette ligne et la trace sont les intersections de ces deux plans parallèles par l'autre plan de projection.

Un plan perpendiculaire à un des plans de projection a sa trace sur l'autre plan perpendiculaire à la ligne de terre.

traces parallèles à cette ligne. En effet, ces traces sont les intersections du plan donné par les deux plans de projection qui passent par la ligne de terre ou par une droite parallèle au premier plan.

Les deux traces d'un plan perpendiculaire à la ligne de terre sont représentées par une seule et même perpendiculaire à cette ligne.

Réciproquement, si les deux traces d'un plan sont parallèles à la ligne de terre, le plan est parallèle à cette ligne ; car ce plan passe par une droite parallèle à la ligne de terre, et, comme il a deux traces, ce plan n'est parallèle ni à l'un ni à l'autre des plans de projection.

Les deux traces d'un plan qui passe par la ligne de terre se réduisent à cette ligne. Le plan est alors indéterminé, et, pour le représenter, il faut se donner son autre trace sur un second plan vertical.

Un plan perpendiculaire à un des plans de projection a sa trace sur l'autre plan, perpendiculaire à la ligne de terre, car cette trace est l'intersection de deux plans perpendiculaires au même plan de projection : elle est donc perpendiculaire à ce dernier, et par conséquent à la ligne de terre, qui est une droite passant par son pied dans ce plan.

Réciproquement, si une des traces d'un plan est perpendiculaire à la ligne de terre, ce plan est perpendiculaire à l'autre plan de projection. En effet, les deux plans de projection étant rectangulaires, cette trace, qui est perpendiculaire à leur intersection et dans l'un de ces plans, est une perpendiculaire à l'autre. Donc le plan donné, qui passe par cette trace, est un plan perpendiculaire à cet autre plan de projection.

Il est bon de remarquer que les points d'un plan dont une des traces est perpendiculaire à la ligne de terre se projettent tous sur l'autre plan sur sa seconde trace.

Les deux traces d'un plan perpendiculaire à la ligne de terre sont représentées par une seule et même perpendiculaire à cette ligne : car, la ligne de terre étant perpendiculaire au plan, les deux traces, qui sont deux droites menées par son pied dans ce plan perpendicu-

laire, sont perpendiculaires à cette ligne, et dans le rabattement ces deux traces ne forment plus qu'une seule et même perpendiculaire à la ligne de terre.

Réciproquement, si les deux traces d'un plan ne forment qu'une seule et même perpendiculaire à la ligne de terre, le plan est perpendiculaire à cette ligne, puisqu'il passe par deux perpendiculaires à la ligne de terre.

Chaque trace du plan représente dans ce cas les projections de tous ses points sur chacun des plans de projection.

15. En géométrie, on a souvent besoin de considérer des droites et des plans parallèles ou perpendiculaires à des droites ou à des plans connus. Il s'agit de savoir comment, par la méthode des projections, on peut déterminer ces droites et ces plans.

Les projections de deux droites parallèles sont respectivement parallèles.

16. Les projections de deux droites parallèles sont respectivement parallèles. En effet, les plans projetants de ces deux droites sur le même plan de projection sont des plans parallèles, comme passant chacun par deux droites parallèles, les droites données et les perpendiculaires au plan de projection. Les intersections de ces deux plans parallèles par le plan de projection ou les projections des deux droites sont donc parallèles.

Réciproquement, si les projections de deux droites sont parallèles sur chacun des plans de projection, ces droites sont parallèles, sauf le cas où ces projections sont perpendiculaires à la ligne de terre : car ces droites sont les intersections de plans projetants parallèles entre eux, et les deux plans projetants de l'une des droites se coupent toujours quand les projections de la droite ne sont pas perpendiculaires à la ligne de terre. Dans ce cas particulier, les deux droites se trouveraient dans deux plans perpendiculaires à cette ligne, et leurs projections seraient parallèles, sans pour

cela que les droites le fussent, puisqu'on peut les tracer indistinctement dans ces deux plans sans changer leurs projections.

Quand deux droites ont une seule de leurs deux projections parallèle, l'une de ces droites est parallèle seulement au plan projetant de l'autre.

17. De ce qu'une droite est perpendiculaire à une autre, il ne faut pas conclure que les projections de ces deux droites doivent être perpendiculaires. En effet, en un même point d'une droite on peut lui élever une infinité de droites perpendiculaires, qui sont toutes situées dans un même plan perpendiculaire à la droite menée par ce point. Toutes ces perpendiculaires auront des projections différentes quand ce plan perpendiculaire ne sera pas en même temps perpendiculaire au plan de projection, ce qui exigerait que la droite fût parallèle à ce dernier plan. Une seule de cette infinité de perpendiculaires aura sa projection perpendiculaire à celle de la droite : ce sera celle contenue dans le plan projetant perpendiculaire à cette projection de la droite.

Les projections de deux droites perpendiculaires entre elles sont, en général, obliques. On sait seulement que la perpendiculaire à une droite est dans un plan perpendiculaire à cette droite.

Ainsi les projections de deux droites perpendiculaires entre elles sont, en général, obliques. Dans le cas seulement d'une droite parallèle à l'un des plans de projection, la projection sur ce plan de la perpendiculaire est perpendiculaire à la projection de la droite ; et quand la droite est parallèle aux deux plans de projection ou à la ligne de terre, alors seulement les deux projections de la perpendiculaire sont perpendiculaires à celle de la droite ou à la ligne de terre.

De ce qu'une droite est perpendiculaire à une autre on peut donc seulement conclure que cette dernière est dans un plan perpendiculaire à la première droite. Plus tard on apprendra à déterminer ce plan perpendiculaire.

18. Par un point on peut mener une infinité de

Les projections d'une

parallèle à un plan sont, en général, obliques par rapport aux traces de ce plan. On sait seulement que la parallèle est située dans un plan parallèle au plan donné.

droites parallèles à un plan. Ces parallèles sont toutes situées dans un même plan parallèle au premier et mené par le point. Toutes ces parallèles au plan donné auront des projections différentes tant que le plan parallèle, et par conséquent le plan donné, ne sera pas perpendiculaire au plan de projection. De cette infinité de parallèles, une seule a sa projection parallèle à la trace du plan donné : c'est la parallèle à la trace de ce plan ; car, dans ce cas, la parallèle dans l'espace est parallèle au plan de projection, et, par conséquent, à sa projection sur ce plan.

Ainsi les projections d'une droite parallèle à un plan sont, en général, obliques, par rapport aux traces de ce plan. La projection et la trace sur le même plan de projection ne sont parallèles que dans le cas seulement où le plan donné est perpendiculaire à ce plan de projection ; et quand le plan donné est perpendiculaire aux deux plans de projection ou à la ligne de terre, alors seulement les deux projections de la parallèle au plan sont parallèles à ses traces.

De ce qu'une droite est parallèle à un plan on peut donc seulement conclure que la droite est dans un plan parallèle au plan donné. Plus tard, on apprendra à déterminer ce plan parallèle.

Les projections d'une droite perpendiculaire à un plan sont respectivement perpendiculaires sur les traces de ce plan.

19. Une droite perpendiculaire à un plan a ses deux projections respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan. En effet, le plan perpendiculaire et le plan de projection sont deux plans perpendiculaires au plan projetant de la droite. L'intersection commune de ces deux premiers, ou la trace du plan perpendiculaire, est donc perpendiculaire au plan projetant de la droite, et, par conséquent, à la projection de cette droite, qui est menée par son pied dans ce plan.

Réciproquement, si les deux projections d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux traces d'un plan, le plan est perpendiculaire à la droite. En effet, il est évident que les deux traces du plan sont respec-

tivement perpendiculaires aux deux plans projetants de la droite. Par conséquent le plan donné, qui contient ces deux traces, est à la fois perpendiculaire à ces deux plans projetants, et, par suite, à leur intersection commune, qui n'est autre chose que la droite de l'espace. Comme les deux plans projetants ne se coupent pas quand les deux projections de la droite sont dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre, il s'ensuit que cette réciproque n'a pas lieu pour ce cas particulier de la position de la droite. De toutes les droites partant du même point et situées dans le plan perpendiculaire à la ligne de terre, une seule est perpendiculaire au plan, dont les traces seraient, dans ce cas particulier, des parallèles à la ligne de terre.

La proposition qu'on vient de démontrer est fondée uniquement sur ce que la projection est orthogonale. Ce genre de projection offre donc encore un avantage bien précieux pour les constructions géométriques.

20. Les traces de deux plans parallèles sont respectivement parallèles, puisque ces traces ne sont que les intersections de deux plans parallèles par un même plan de projection.

Les traces de deux plans parallèles sont respectivement parallèles.

Deux plans dont les traces respectivement parallèles rencontrent la ligne de terre sont eux-mêmes parallèles, puisque l'un des plans contient deux parallèles à deux droites de l'autre menées par un même point; mais si ces traces sont parallèles à la ligne de terre, c'est simplement un indice que ces plans se coupent suivant une parallèle à cette ligne. Pour que ces deux plans fussent parallèles, leurs traces sur un autre plan vertical de projection non parallèle au premier devraient être encore parallèles.

21. Tous les plans passant par une perpendiculaire à un plan donné étant perpendiculaires à ce plan, on ne peut rien conclure sur la direction des traces d'un plan perpendiculaire à un autre. Seulement, quand le

De ce qu'un plan est perpendiculaire à un plan donné, on sait seulement que ce premier plan passe par une perpendiculaire au plan donné.

plan donné est perpendiculaire à un des plans de projection, sa perpendiculaire est parallèle à ce dernier plan : alors cette perpendiculaire, sa projection, et la trace du plan conduit par la perpendiculaire, sont des droites parallèles entre elles, et par conséquent perpendiculaires à la trace du plan donné.

De ce qu'un plan est perpendiculaire à un autre, on peut seulement conclure que ce premier plan passe par une perpendiculaire à cet autre plan.

22. Dans le but de faciliter l'intelligence, et pour ainsi dire la lecture des figures, on a établi quelques conventions dans le mode de représentation des différentes parties qui les constituent.

23. La manière de représenter la projection soit horizontale, soit verticale, d'un objet, se déduit toujours de cette double hypothèse : 1° que l'œil de l'observateur est supposé placé au dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical, et à une distance infinie du plan sur lequel se fait la projection ; 2° que les parties de l'objet cachées à l'œil de l'observateur, soit par l'objet même, soit par les plans de projection, sont *invisibles*.

24. On distinguera dans une épure :

1° Les lignes **PRINCIPALES**, c'est-à-dire celles qui représentent *les données* et *les résultats* d'un problème ; elles seront marquées par un *trait plein et continu*, lorsqu'elles seront *visibles* ; elles seront *ponctuées*, c'est-à-dire tracées en points ronds, si elles sont *invisibles*.

2° Les lignes **AUXILIAIRES**, c'est-à-dire toutes celles qui ne rentreront pas dans la classe précédente, et qui ne seront employées que comme des moyens d'arriver à la solution du problème. Ces lignes seront toujours *pointillées* ou composées de petits traits interrompus, et autant que possible d'égale longueur, qu'elles soient visibles ou invisibles.

Lorsque, parmi ces lignes auxiliaires, il s'en trouvera quelqu'une qui offrira plus d'importance, et sur laquelle on voudra appeler l'attention d'une manière particulière, on pourra la représenter par *une ligne mixte*, composée de petits traits séparés par un ou plusieurs points ronds.

25. Toutes les fois que dans une épure il entrera un plan *indéfini*, on ne le regardera pas comme *existant réellement*, mais on supposera qu'on a voulu *seulement donner ou trouver ses traces*.

26. Maintenant qu'on sait représenter sur un plan unique les données d'un problème, il ne s'agit plus que d'énoncer les principes qui conduisent à sa solution, et d'exécuter sur ce plan les constructions indiquées pour arriver au résultat.

De la droite.

27. Les points particuliers où une droite perce les deux plans de projection sont dits *les traces* de la droite. *Etant données les projections d'une droite, trouver ses traces.* L'une d'elles est *la trace horizontale*, et l'autre *la trace verticale*. Il s'agit de trouver ces deux points quand les deux projections ab , $a'b'$, de la droite (fig. 4) sont données.

La trace horizontale de la droite étant un point situé sur le plan horizontal, sa projection sur le plan vertical se trouve sur la ligne de terre XY (5). Mais comme cette trace appartient à la droite, sa projection verticale doit se trouver aussi sur la projection verticale $a'b'$. Donc la projection verticale de cette trace horizontale sera le point h' intersection des deux droites XY et $a'b'$, sur lesquelles elle doit se trouver. La projection horizontale h de ce point de la droite, ou la trace elle-même, s'obtient en élevant au point h' la perpendiculaire à XY jusqu'à sa rencontre avec la projection horizontale ab .

On obtient de la même manière les deux projections v et v' de la trace verticale, en observant que la projection horizontale v de cette trace doit se trouver sur la ligne de terre et sur la projection horizontale ab , et que sa projection verticale est l'intersection de la perpendiculaire à XY élevée au point v et de la projection verticale $a'b'$.

Ainsi, pour avoir la trace d'une droite sur un des plans de projection, on prolonge sa projection sur l'autre plan jusqu'à la ligne de terre, et en ce point on élève une perpendiculaire à cette dernière ligne, qui, par sa rencontre avec l'autre projection, donne cette trace de la droite.

La construction indiquée ne donne pas les traces d'une droite (ab , $a'b'$) (fig. 5) située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et pourtant définie par deux de ses points (a , a'), (b , b'). Il faut, dans ce cas, rabattre le plan projetant de la droite ou sur le plan horizontal autour de la projection horizontale ab , ou sur le plan vertical autour de la projection verticale $a'b'$.

Dans le premier rabattement, les points A' , B' , de la droite, se trouvent sur deux perpendiculaires aA' , bB' , à ab , et à des distances aA' , bB' , de la charnière, respectivement égales aux distances aa' , bb' , de ces points au plan horizontal. Dans le second rabattement, les points A'' , B'' , de la droite, sont à des distances $a'A''$, $b'B''$, de la charnière $a'b'$, respectivement égales aux distances aa' , bb' , des points de la droite au plan vertical. Les constructions à faire pour trouver les points A' , B' , A'' , B'' , sont indiquées sur la figure. $A'B'$, $A''B''$, représentent donc la droite dans ces deux rabattements. Les points h et v de rencontre des deux droites $A'B'$, $A''B''$, avec les charnières ab , $a'b'$, seront les deux traces de la droite. En effet, ces deux points, quand on viendra à relever les plans rabattus, ne bougeront pas et ne cesseront pas d'appartenir à la droite et aux deux plans de projection, sur lesquels sont tracées les deux charnières ab , $a'b'$.

Il est bon de remarquer que la ligne XY représente l'intersection du plan projetant de la droite avec le

plan vertical dans le premier rabattement, et avec le plan horizontal dans le second. Par conséquent les points v' et h' d'intersection de XY avec $A'B'$ et $A''B''$ sont les deux points de rencontre de la droite avec les plans de projection. Les longueurs $\alpha v'$ et $\alpha h'$ expriment donc les distances des traces verticale et horizontale à ces mêmes plans. De sorte qu'en décrivant du point α comme centre les arcs de cercle $v'v$ et $h'h$, ces arcs doivent passer par les traces v et h . Un rabattement de la droite suffirait donc pour donner ses deux traces.

Quand une droite est parallèle à l'un des plans de projection, elle n'a pas de trace sur ce plan. C'est ce qu'indique la construction pour la trouver, puisque la projection de la droite sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre.

On fera bien de s'exercer à trouver les traces de droites diversement situées. Ces traces occupent, par rapport à la ligne de terre, différentes positions qu'il faut s'habituer à savoir interpréter pour fixer la position particulière de la droite.

28. Soient (a, a') , (b, b') (fig. 6), les deux points donnés. Il est évident que la projection horizontale de la droite cherchée doit passer par les points a et b , et la projection verticale par les points a' et b' . De plus, comme la projection d'une droite sur un plan est une droite (9), les droites indéfinies ab et $a'b'$ seront les projections de la droite cherchée, qui se trouvera complètement déterminée de position (10).

Construire la droite qui passerait par deux points donnés.

Cependant les quatre projections a, a', b, b' , pourraient se trouver sur la même perpendiculaire à la ligne de terre (fig. 7). Les lignes ab et $a'b'$ n'en seraient pas moins les projections de la droite; mais, pour qu'elle fût bien définie (10), il faudrait faire voir qu'on peut avec les données obtenir une autre projection de la droite, qui ne se confondrait pas avec les deux premières. Effectivement, les projections des deux points sur un nouveau plan vertical quelconque rabattu sur le

plan horizontal suivant la nouvelle ligne de terre $X'Y'$ se trouvent de même sur les perpendiculaires aa'' , bb'' , abaissées des projections a et b sur la nouvelle ligne de terre, et à des distances de $X'Y'$ respectivement égales aux distances de ces points au plan horizontal, ou à $\alpha a'$, $\alpha b'$. La droite indéfinie $a''b''$ sera la projection de la droite cherchée sur le nouveau plan vertical auxiliaire. Elle se trouvera alors bien déterminée par deux projections distinctes ab et $a''b''$.

La projection $a''b''$ servira même dans ce cas à trouver les deux projections d'un même point sur la droite (ab , $a'b'$). En effet, si c est la projection horizontale de ce point, $\beta c''$ exprime la distance du point au plan horizontal; de sorte qu'en prenant $\alpha c' = \beta c''$, le point c' sera la projection verticale du point de l'espace sur $a'b'$.

Quand on prend la droite $X'Y'$ perpendiculaire à XY , on indique cette construction du point c' par deux parallèles équidistantes à ces deux lignes de terre, partant du point c'' et réunies par un arc de cercle.

Les deux traces d'une droite suffisent pour déterminer cette droite, puisqu'on connaît les projections de chacun de ces deux points.

Trouver la longueur de la portion de droite comprise entre deux points donnés.

29. Une droite AB (fig. 8) de l'espace se trouve dans son plan vertical projetant $ABab$, et forme un trapèze avec les deux verticales Aa , Bb , menées de ses extrémités et avec sa projection ab . De plus, si par le point A on mène dans ce plan la parallèle AC à ab , $AC = ab$, et CB est la différence des hauteurs Aa et Bb des deux points A et B au dessus du plan horizontal. On peut donc dire que *la longueur d'une droite AB est l'hypothénuse d'un triangle rectangle ABC , dont un des côtés de l'angle droit est la projection de cette portion de droite, et dont l'autre côté est la différence des distances de ses deux extrémités au plan de projection.*

Dans le système des projections on a tous les éléments pour trouver cette longueur de la droite, il ne

s'agit plus que de faire voir comment on exécutera les constructions.

Soient $ab, a'b'$ (fig. 9), les deux projections de la droite terminée aux points $(a, a'), (b, b')$. On peut rabattre le plan projetant de la droite sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de ab comme charnière. Après le rabattement, les deux verticales seraient deux perpendiculaires aA', bB' à ab , respectivement égales aux distances $\alpha a', \beta b'$. Le quatrième côté $A'B'$ du trapèze exprime la véritable longueur de la droite. La parallèle $A'C'$ à ab détermine le triangle $A'B'C'$ correspondant au triangle ABC de la figure 8.

Il existe un autre mode de rabattement très usité. Il consiste à concevoir que le plan projetant tourne autour de sa verticale projetée en b , comme charnière, jusqu'à ce qu'il arrive dans la position parallèle au plan vertical de projection. Alors on le transporte parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il se confonde avec ce plan vertical, de manière que la verticale du point b vienne coïncider avec la verticale abaissée du point b' . Dans le premier mouvement du plan projetant, tous ses points décrivent des arcs de cercle situés dans des plans perpendiculaires à la charnière, ou parallèles au plan horizontal, et terminés à la parallèle bd à XY , qui représente la trace du plan parallèle au plan vertical de projection passant par l'axe de rotation. Ainsi, l'arc décrit par le point (a, a') se projette horizontalement en véritable grandeur suivant ad , et verticalement sur l'horizontale $a'A'''$. De sorte qu'après ce mouvement, les projections du point (a, a') seront d et A''' .

Dans le second mouvement de translation, chaque point du plan projetant se meut sur une perpendiculaire au plan vertical, c'est-à-dire que ce point s'applique sur la projection verticale qu'il avait après le premier mouvement, ou que la figure se projette en vraie grandeur sur le plan vertical. Ainsi, le point (a, a') , qui était devenu (d, A''') , est en A''' .

Par conséquent, le trapèze à construire est $\alpha'\beta b'A'''$ sur le plan vertical, et le triangle est représenté par $A'''C'''b'$.

Ce qu'on a dit du plan projetant de la droite sur le plan horizontal, on peut le répéter mot pour mot pour le plan projetant mené par sa projection verticale $a'b'$. La droite, sa projection $a'b'$, et les deux horizontales partant de ses extrémités, forment un trapèze; et *cette droite est également l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont la projection $a'b'$ et la différence des distances des extrémités de la droite au plan vertical sont les deux côtés de l'angle droit*. Ce trapèze et ce triangle sont représentés dans le plan projetant, rabattu autour de $a'b'$, par $a'b'B''A''$ et $A''B''C''$; et, dans l'autre mode de rabattement autour de l'horizontale projetée en a' , par $\alpha'\beta'B'''a$ et $aB'''C'''$.

Les quatre droites $A'B'$, $A'''b'$, $A''B''$, aB''' , représentant la longueur de la droite de l'espace, doivent être égales. Il ne faut pas non plus négliger sur cette épure la vérification des traces qui, dans les plans rabattus autour de ab et $a'b'$, sont données par le prolongement des droites $A'B'$, $A''B''$, jusqu'aux charnières, en h et v' . Ces points, qui restent sur les charnières et ne cessent pas d'appartenir à la droite quand on vient à relever les plans, représentent bien les traces de la droite sur les deux plans de la projection.

Si un des points donnés de la droite était une de ses traces, la construction n'en serait que simplifiée, car alors un des trapèzes à construire se réduit à un triangle.

Les constructions indiquées pour trouver la longueur d'une droite s'appliqueraient également à la position particulière d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et dont les extrémités seraient données.

Si la droite était parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan serait égale à la droite même : car le trapèze dans lequel la droite et sa projection sont deux côtés opposés, devient un rectangle.

Il n'y aurait donc pas de construction à faire pour trouver la longueur de cette droite.

30. Si on demandait de trouver sur une droite indéfinie, donnée par ses deux projections, un point situé à une distance donnée d'un autre point (a, a') de cette ligne, on ferait le rabattement $A' B'$ de la droite (fig. 9), puis on porterait de A' en D la longueur donnée. D serait dans le rabattement le point cherché, et la perpendiculaire Dd à la charnière donnerait sur ab la projection horizontale d de ce point, dont la projection verticale serait en d' , à la rencontre de la perpendiculaire dd' à la ligne de terre et de la projection verticale $a'b'$ de la droite.

31. Si on suppose qu'une droite de l'espace soit divisée en parties proportionnelles à des lignes données ou en parties égales, et que, par tous les points de division de la droite on abaisse des perpendiculaires sur un des plans de projection, ces perpendiculaires, la droite et sa projection, seront toutes dans le même plan projetant de la droite. Ces perpendiculaires étant parallèles, la droite et sa projection seront coupées en parties proportionnelles ou en parties égales par ces perpendiculaires. Donc, pour diviser une droite en parties proportionnelles à des lignes données ou en parties égales, il suffit de faire cette opération sur l'une des projections de la droite. Si on voulait, de plus, connaître ces parties de la droite elle-même, on rabattrait la droite et tous les points de division sur un des plans de projection.

Partager une droite en parties proportionnelles ou en parties égales.

Du plan.

32. Un plan est géométriquement défini par ses deux traces. Pour qu'il soit représenté d'une manière convenable, il faut faire voir qu'au moyen de ses traces on peut trouver un point quelconque de sa surface.

On peut déterminer un point quelconque d'un plan qui est donné par ses deux traces, c'est-à-dire qu'on peut trouver l'une des projections d'un point, d'une

droite, quand l'autre est donnée.

Soient MN et NP (fig. 10) les deux traces d'un plan. Dans cette position, un point quelconque o du plan horizontal peut représenter la projection horizontale d'un point de la surface indéfinie du plan. Il s'agit de trouver la projection verticale de ce point par la condition qu'il doit être dans le plan dont les traces sont MN et NP .

Une droite quelconque aob , tracée sur le plan horizontal par le point o , peut être également prise pour la projection horizontale d'une droite située dans le plan, et qui passerait par le point que l'on cherche. La droite étant dans le plan MNP , le point de rencontre a de ab avec MN est la trace horizontale de cette droite, puisque la trace MN du plan est *le lieu* de tous les points du plan sur le plan horizontal. Le point a' de la ligne de terre, situé sur la perpendiculaire abaissée du point a sur cette ligne, appartiendra donc à la projection verticale de la droite. Mais on sait que l'intersection b de la projection horizontale d'une droite avec la ligne de terre est la projection horizontale de sa trace verticale (27). Cette trace verticale b' doit donc être sur la perpendiculaire indéfinie bb' et sur la trace verticale NP du plan qui contient la droite. $a'b'$ est donc la projection verticale de la droite du plan, dont la projection horizontale est ab . Le point cherché du plan se trouvant sur cette droite, sa projection verticale sera le point o' , intersection de $a'b'$ et de la perpendiculaire oo' à la ligne de terre.

En un point d'un plan il existe dans ce plan une ligne remarquable: c'est son horizontale, ou l'intersection de ce plan par le plan horizontal passant par ce point; cette horizontale est nécessairement parallèle à la trace horizontale du plan: par conséquent sa projection horizontale est parallèle à cette trace (16), et sa projection verticale est, du reste, une parallèle à la ligne de terre (11).

L'horizontale d'un plan peut servir aussi à déterminer la projection verticale d'un point du plan, quand

on connaît sa projection horizontale o . En effet, la parallèle cod à MN est sa projection horizontale; d' est la trace de cette droite sur le plan vertical, et la parallèle $d'c'$ à la ligne de terre est sa projection verticale : de sorte que la projection verticale o' du point du plan est sur la verticale oo' , à son point de rencontre avec la projection verticale $d'c'$ de l'horizontale du plan.

La parallèle au plan vertical menée dans le plan par le point (o, o') , ou l'intersection de ce plan par un plan parallèle au plan vertical, est une parallèle à la trace verticale NP ; sa projection horizontale est la parallèle gof à la ligne de terre : g est sa trace sur le plan horizontal. La parallèle $g'f'$ à la trace NP est la projection verticale de cette droite : comme les autres lignes du plan, cette parallèle au plan vertical peut donc servir à déterminer la projection verticale o' .

Si le plan donné était perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, les projections horizontales des différents points du plan seraient sur la trace MN du plan (fig. 11), et tous les points de la verticale ab au point o pourraient représenter les projections verticales de ce point o de la trace du plan.

Si le plan était perpendiculaire à la ligne de terre, on pourrait prendre indistinctement deux points de ses traces pour les deux projections du point du plan.

Le cas des deux traces d'un plan parallèles à la ligne de terre ne change rien dans la détermination de la projection verticale o' du point du plan; seulement, quand on veut employer l'horizontale du plan et la parallèle au plan vertical, on a besoin d'un plan vertical auxiliaire, comme au n° 28, pour déterminer la seconde projection de ces deux droites.

Ce qu'on a dit de la projection horizontale o du point s'appliquerait exactement à sa projection verticale o' , si c'était celle-ci qui fût donnée.

53. On voit avec quelle facilité on peut trouver un point quelconque d'un plan au moyen de ses traces ; ce n'est pas le seul avantage qu'offrira ce mode de représentation de cette surface indéfinie : aussi, quand un plan est défini par d'autres conditions, la question est toujours ramenée à trouver les traces de ce plan.

Par un point donné faire passer un plan.

54. Un plan qui passe par un point peut prendre une infinité de positions. On peut se donner *arbitrairement* une de ses traces MN (fig. 10) sur l'un des plans de projection ; son autre trace NP est alors déterminée. En effet, ce plan devant contenir l'horizontale (cd , $c'd'$) menée dans le plan par le point donné (o , o'), sa trace verticale doit passer par la trace verticale d' de cette droite : donc NP est cette trace verticale du plan passant par le point (o , o'), dont on s'était donné arbitrairement la trace horizontale MN.

Par deux points donnés ou par une droite donnée faire passer un plan.

55. Un plan qui doit passer par deux points, ou par la droite qui joint ces deux points, est indéterminé ; on sait seulement que ses traces doivent passer par les traces a et b' (fig. 10) de la droite (ab , $a'b'$) contenue dans ce plan : de sorte qu'en menant *arbitrairement* par ces deux points deux droites MN et NP qui se coupent sur la ligne de terre, ou parallèles à cette ligne, le plan MNP sera un de ceux qui contiennent la droite, puisqu'il passe par les deux traces ou par deux points de cette ligne.

Si la droite donnée est une parallèle (cd , $c'd'$) à un des plans de projection, on peut prendre une droite quelconque NP passant par la trace verticale d' de la ligne pour la trace verticale du plan ; mais la trace horizontale de ce plan est la parallèle NM à la projection horizontale cd de la droite.

Si la droite donnée est une parallèle (ab , $a'b'$) à la ligne de terre (fig. 12), les traces d'un plan qui passe par cette droite sont des parallèles à la ligne de terre (14). On peut s'en donner une MN, et l'autre trace

$M'N'$ du plan est déterminée par la condition que, ce plan contenant la droite $(cd, c'd')$ qui joindrait un des points (a, a') de la droite et un point c de la trace MN , cette trace $M'N'$ passe par la trace verticale d' de cette droite $(cd, c'd')$.

56. Les droites qui joignent deux à deux les points donnés $(a, a'), (b, b'), (c, c')$, (fig. 13), sont contenues tout entières dans le plan cherché. La construction des traces horizontales d, g, f , et des traces verticales d', g', f' , de ces trois droites, donnera évidemment trois points de chacune des traces MN et NP du plan ; les trois points d'une même trace du plan devront être nécessairement en ligne droite, et seront plus que suffisants pour déterminer ces traces, qui, comme nouvelle vérification, devront aller rencontrer la ligne de terre en un même point N . La construction de deux des traces des droites sur un plan de projection, et d'une seule sur l'autre, suffirait à la détermination des traces du plan.

Construire le plan qui passerait par trois points donnés.

Si une des trois droites qui passent par les points donnés était parallèle à l'un des plans de projection, on n'aurait plus sur ce plan que deux points de la trace du plan cherché ; mais cette trace devrait être parallèle à la projection de la droite sur ce même plan de projection.

Si cette droite était parallèle à la ligne de terre, les deux traces du plan seraient parallèles à cette ligne, et une des deux autres droites servirait à déterminer deux points des traces du plan.

Si deux des droites qui joignent les trois points donnés étaient parallèles au même plan de projection, le plan cherché serait lui-même parallèle à ce dernier plan, et n'aurait par conséquent qu'une seule trace qui serait la parallèle à la ligne de terre qui joindrait les projections des trois points sur l'autre plan de projection.

Enfin, si les trois points donnés se trouvaient sur

une même perpendiculaire à la ligne de terre, cette perpendiculaire représenterait les deux traces du plan cherché.

Si un des points donnés était sur la ligne de terre, ce point serait le point de rencontre des traces du plan, et il suffirait de construire les deux traces de la droite passant par les deux autres points.

Si deux des points donnés se trouvaient sur la ligne de terre, les traces du plan à construire se confondraient avec cette ligne. Dans ce cas, il serait nécessaire de changer de plan vertical de projection, et de chercher sur le nouveau plan auxiliaire les traces des droites qui joignent les trois points donnés. On obtiendrait, de cette manière, une trace verticale du plan à construire, dont la trace horizontale ne cesse pas d'être la ligne de terre (*).

Quand dans ce problème on ne peut pas obtenir sur la feuille de dessin les traces des droites passant par les trois points donnés, on cherche les traces de droites qui s'appuient sur ces premières, et qu'on sait appartenir aux traces du plan à construire.

Il est bien entendu qu'il faut que les trois points donnés ne soient pas en ligne droite pour que le plan soit déterminé.

Construire le plan qui passerait par deux droites qui se coupent, ou par deux parallèles, ou par une droite et un point.

37. La construction des traces d'un plan qui passerait par deux droites qui se coupent ou par deux parallèles s'exécute de la même manière que lorsque trois points sont donnés. La position particulière des droites donnerait lieu aux mêmes observations qu'au numéro précédent. Si les deux droites données étaient parallèles à la ligne de terre, on obtiendrait un

(*) Quelquefois même on est conduit par une question à trouver la trace sur un nouveau plan vertical d'un plan donné par ses deux traces, et le problème se réduit toujours à construire sur le nouveau plan de projection la trace d'une droite du plan.

point de chaque trace au moyen d'une droite qui s'appuierait sur ces deux parallèles.

Le problème se simplifierait si une des droites données était sur un des plans de projection, car alors cette droite serait la trace même du plan sur ce plan de projection.

Quand le plan doit passer par une droite et un point, on ramène ce problème au précédent en joignant le point à un des points de la droite donnée, ou bien en menant par le point une parallèle à cette droite.

Des rabattements.

58. La représentation du plan au moyen de ses deux traces offre l'avantage bien précieux de pouvoir exécuter son rabattement sur l'un des plans de projection, absolument comme on l'a fait pour le plan vertical. Dans une foule de questions, il arrive que les constructions à faire dans l'espace sont renfermées dans un même plan, et que pourtant les propriétés géométriques qui lient entre elles les lignes à représenter sur ce plan n'établissent pas de relation précise entre les projections de ces lignes de l'espace. Or, du moment qu'on saura trouver sur ce plan rabattu un point, une droite, donnés par leurs projections, et réciproquement retrouver les projections d'un point, d'une droite du plan, donnés dans le rabattement, on ramènera tous les problèmes à exécuter dans ce plan à de simples constructions de la géométrie plane.

Le rabattement d'un plan sur un des plans de projection permet d'exécuter par les procédés de la géométrie plane toutes les constructions de l'espace qui doivent avoir lieu dans ce plan.

La méthode des rabattements devient, par cette raison, un complément de la géométrie descriptive, indispensable pour la solution des problèmes. Déjà il a fallu y avoir recours pour les quelques questions sur la droite et le plan qu'on a traitées précédemment.

La méthode des rabattements est fondée sur ce principe : qu'après le rabattement d'un plan autour d'une de ses traces, comme charnière, un point du plan se trouve sur la perpendiculaire abaissée de sa projection sur cette

trace, et à une distance de cette ligne égale à l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont la distance de la projection à la charnière et celle du point au plan de projection forment les deux côtés de l'angle droit. En effet, le plan vertical mené par le point perpendiculairement à la trace horizontale, par exemple, contient la projection de ce point. Les deux droites qui joignent le pied de la trace sur ce plan perpendiculaire sont deux perpendiculaires à la charnière en un même point de cette ligne, et forment, avec la portion de verticale comprise entre le point et sa projection, le triangle rectangle en question, dans lequel la distance du point à la charnière est l'hypothénuse. Dans le rabattement, cette perpendiculaire se confondra avec celle abaissée de la projection sur la charnière.

Quand le plan est perpendiculaire au plan de projection, la distance du point rabattu à la charnière est la hauteur même du point au dessus de ce plan de projection.

Il s'agit de résoudre la question des rabattements pour les trois positions particulières d'un plan par rapport aux deux plans de projection.

Etant données les projections d'un point, d'une droite, situés dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, trouver leur rabattement; et réciproquement, passer du rabattement aux projections.

59. Un point (a, a') (fig. 14) du plan MNP, perpendiculaire à la ligne de terre, se trouve dans le rabattement du plan autour de sa trace MN sur la perpendiculaire aA élevée sur cette trace par sa projection horizontale a ; et sa distance à la charnière est précisément celle $a'N$ du point au plan horizontal. Le point rabattu sur le plan horizontal est donc à l'intersection A de la perpendiculaire aA et d'une parallèle $a''A$ à MN, distante de cette ligne de $Na'' = a'N$.

Dans le rabattement du plan autour de sa trace verticale NP, le point rabattu serait en A' , à l'intersection de la perpendiculaire $a'A'$ à NP, et de la parallèle $a'''A'$ à NP, distante de cette ligne de $a'''N = aN$.

Réciproquement, si on donnait dans le rabattement sur le plan horizontal un point A du plan MNP

perpendiculaire à la ligne de terre, la projection horizontale a du point serait sur la perpendiculaire Aa à la charnière et sur la trace MN , et la projection verticale serait sur l'autre trace NP , à une distance $Na' = Aa$.

Au moyen des rabattements B et B' d'un second point (b, b') d'une droite du plan, on obtiendra les deux rabattements AB et $A'B'$ de cette droite sur les deux plans de projection. Dans l'un comme dans l'autre rabattement, la seconde trace du plan, qui est une droite perpendiculaire à la première, ou à la charnière au point N , se confondra avec la ligne de terre XY . Les points h et v , où la droite rabattue AB rencontre les deux traces du plan, seront les deux points des traces de la droite. Quand on viendra à relever le plan, le point h qui est sur la charnière ne bougera pas, et représentera par conséquent la trace horizontale de la droite; et le point v , qui décrira dans le plan vertical un arc de cercle vv' , dont le centre est en N , viendra se placer en v' sur la trace verticale NP du plan. v' sera donc la trace verticale de la droite. Quand on voudra trouver les deux projections d'une droite donnée dans le rabattement, la construction la plus simple consistera à relever les deux traces h et v de cette droite, et, à défaut de ces traces, deux points quelconques de la droite.

Le rabattement $A'B'$ de la droite sur le plan vertical donnera, par sa rencontre avec NP et XY , les points v' et h' . v' sera sa trace verticale, et devra se confondre avec le point obtenu pour cette trace dans le premier rabattement; et l'arc de cercle décrit du point N comme centre avec le rayon Nh' devra couper en h la trace MN .

40. Le rabattement sur le plan horizontal d'un point (a, a') (fig. 15) du plan MNP perpendiculaire à ce plan de projection se trouve, comme dans le problème précédent, à la rencontre A de la perpendiculaire aA et de

Etant données les projections d'un point, d'une droite, situées dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de pro-

jection, trouver leur rabattement; et réciproquement, passer du rabattement aux projections.

la parallèle à MN, distante de cette charnière de $a''N = a'\alpha$. On obtiendra donc, comme au n° 39, le rabattement AB d'une droite donnée par les projections de deux de ses points (a, a') , (b, b') .

La perpendiculaire NP' à MN sera, dans ce rabattement, la trace verticale du plan qui dans l'espace est perpendiculaire à MN. Les points de rencontre h et v de la droite AB avec les deux traces MN et NP' seront, le point h la trace horizontale même de la droite, et le point v sa trace verticale rabattue. De sorte qu'en rapportant ce point v sur la trace verticale NP par l'arc vv' , v' est cette trace verticale de la droite.

Si le point du plan était donné par son rabattement A, on obtiendrait sa projection horizontale a en abaissant du point A une perpendiculaire sur MN, et sa projection verticale a' se trouverait sur la perpendiculaire aa' à la ligne de terre, et à une distance $\alpha a'$ de cette ligne $= Aa$.

Dans le rabattement du plan MNP sur le plan vertical, le point (a, a') se trouve toujours sur la perpendiculaire $a'A'$ à la charnière NP; mais comme le plan est oblique par rapport au plan vertical, sa distance $a'''A'$ à la charnière est (37) l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont la distance $a'a'''$ de la projection du point à NP, et celle αa du point au plan de projection. Ce triangle est tout formé sur le plan horizontal en $N\alpha a$. $Na = a'''A'$ est donc cette distance du point rabattu A' à la charnière.

En faisant le rabattement B' d'un second point (b, b') du plan MNP, on construira une droite de ce plan rabattue en $A'B'$ sur le plan vertical. La ligne de terre XY représentera dans ce rabattement la trace horizontale MN. Le point de rencontre v' de $A'B'$ avec NP sera la trace verticale de la droite de l'espace, et le point h' sur $A'B'$ et sur XY donnera sa trace horizontale rabattue. L'arc décrit du point N avec hN pour rayon devra donc passer par le point h' .

Si les constructions sont bien faites, la projection

verticale $a'b'$ de la droite du plan MNP devra passer par le point v' , et le point h'' de $a'b'$ sur la ligne de terre devra se trouver sur la perpendiculaire abaissée du point h sur cette ligne.

Un point A' et le point h' donné par la projection $a'b'$ suffiraient pour obtenir le rabattement $A'B'$.

Quand on voudra passer du rabattement A' d'un point du plan MNP sur le plan vertical à ses deux projections a, a' , on saura que la projection verticale a' doit se trouver sur la perpendiculaire $A'a'''$ abaissée du point A' sur la charnière. Mais quand on vient à relever le plan pour le mettre dans sa véritable position MNP, le point A' décrit un arc dont le centre est en a''' , et dont le rayon est $a'''A'$. Cet arc de cercle, situé dans un plan perpendiculaire à la verticale NP, ou parallèle au plan horizontal, se projette en véritable grandeur sur le plan horizontal en $a'a$, et sur le plan vertical suivant la trace $A'a'''$ de son plan. La projection horizontale du point, devant se trouver à la fois sur cet arc de cercle et sur la trace MN, lieu des projections horizontales de tous les points du plan MNP, sera à leur intersection a , et sa projection verticale a' sera le point d'intersection de la perpendiculaire aa' à la ligne de terre et de la ligne $A'a'''$.

On aurait pu trouver directement la projection verticale a' du point, en observant que cette projection est dans le plan horizontal $a'''A'$, et que sa distance $a'''a'$ est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est la distance $A'a'''$ du point rabattu A' à la charnière, et dont l'angle aigu compris entre ces deux côtés est précisément l'angle du plan MNP avec le plan vertical, ou l'angle MNY. En prenant donc $Na \equiv A'a'''$, et abaissant la perpendiculaire ax sur NY, Nx sera cette distance de la projection verticale a' à la charnière. Donc cette projection sera sur cette perpendiculaire à sa rencontre en a' avec la ligne $A'a'''$, et sa projection horizontale sera l'intersection a de cette même perpendiculaire avec la trace MN du plan MNP.

Les projections d'une droite $A'B'$ rabattue sur le plan vertical s'obtiennent en relevant deux de ses points, ou plus simplement ses deux traces, quand on le peut.

Etant données les projections d'un point, d'une droite, situés dans un plan oblique aux deux plans de projection, trouver leur rabattement; et réciproquement, passer du rabattement aux projections.

41. En partant toujours du principe énoncé au n° 38, le rabattement A (fig. 16) sur le plan horizontal d'un point (a, a') du plan MNP est situé sur la perpendiculaire aA abaissée de la projection horizontale a sur la charnière MN , et à une distance $a'A$ égale à l'hypoténuse du triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit seraient les lignes aa'' et $a'\alpha$.

On peut construire ce triangle soit sur le plan vertical en $a\alpha m$, soit sur le plan horizontal en $aa''n$. En portant donc $a'm = a''n$ de a'' en A , A sera le point rabattu.

La construction du rabattement B d'un second point (b, b') d'une droite $(ab, a'b')$ située dans le plan MNP , fera connaître le rabattement AB de cette droite. On n'aura pas besoin de ce second point B si la trace horizontale h est connue, puisque AB doit passer par ce dernier point.

Comme cas particulier de ce problème, on peut se proposer de rabattre la trace verticale NP du plan. A cet effet, on construirait de la même manière le rabattement P' d'un point quelconque (v, v') de cette trace. NP' serait cette trace rabattue, et MNP' l'angle des deux traces dans l'espace. Comme vérification, on doit avoir $NP' = Nv'$.

On doit remarquer que les angles en m et a'' des triangles rectangles $a'\alpha m$ et $aa''n$, et de tous les triangles correspondants pour tous les points du plan, mesurent l'inclinaison du plan MNP sur le plan horizontal. C'est donc un élément de plus que l'on connaît dans le triangle rectangle qui lie la projection au point de l'espace.

Réciproquement, si on donnait le rabattement A d'un point du plan MNP , on abaisserait la perpendiculaire Aa sur la charnière, et on construirait le triangle rec-

tangle $au''n$ ou $a'am$ au moyen de leur hypoténuse, qui est égale à la distance Aa'' , et de l'angle aigu en m ou en a'' , qu'il faudrait construire préalablement. A cet effet, il peut arriver que le plan MNP soit donné ou par ses deux traces MN et NP , ou par sa trace horizontale MN et sa trace verticale rabattue NP' . Dans l'un comme dans l'autre cas on pourra construire le triangle rectangle vtr correspondant au rabattement d'un point de la trace verticale de ce plan. Car, quand les deux traces MN et NP sont données, on connaît les deux côtés tv et $vr=vv'$ de l'angle droit; et si on a dans le rabattement les deux traces MN et NP' , on a de ce triangle le côté tv et l'hypoténuse $tr=P't$. La construction du triangle $a''an$ donnera la projection horizontale a , et sa projection verticale a' sera sur la perpendiculaire aa' , à une distance $aa'=an$.

En relevant deux points A et B d'une droite rabattue AB , ou un seul point, si on peut avoir sa trace horizontale h , on obtient les deux projections ab et $a'b'$ de cette droite.

On résoudrait ces deux questions des rabattements sur le plan vertical autour de la trace NP , absolument de la même manière que pour le plan horizontal. Si on exécutait ces deux rabattements à la fois, il y aurait lieu à diverses vérifications pour les points des traces de la droite, qu'il serait facile de s'expliquer.

42. Il existe pour un plan perpendiculaire à un des plans de projection une autre espèce de rabattement. Il consiste à faire tourner ce plan autour d'une perpendiculaire à ce plan de projection pour le ramener dans la position parallèle à l'autre plan de projection, sur lequel on le transporte ensuite. Ce mode de rabattement a été suffisamment détaillé au n° 29, quand il a fallu trouver en vraie grandeur la longueur d'une droite.

Intersection de droites et de plans.

Manière de reconnaître
si deux droites se coupent.

43. Deux droites ne peuvent se couper que quand les deux intersections de leurs projections sur le même plan sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. En effet, le point commun à ces deux droites doit avoir ses projections sur celles de ces droites, et les deux projections d'un point de l'espace doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Si les deux droites étaient situées dans un même plan perpendiculaire à un des deux plans de projection, ou si elles avaient la même projection sur ce plan, il suffirait que les deux autres projections se rencontrassent pour qu'il y eût intersection.

Si les deux droites étaient situées dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre, ou si les projections des droites se confondaient, il faudrait construire les projections de ces droites sur un plan vertical auxiliaire; les droites se couperaient si les deux projections sur ce plan se rencontraient : cela revient à faire le rabattement du plan qui contient les deux droites.

Les deux projections d'une droite qui rencontre la ligne de terre doivent se couper en un même point de cette ligne; et réciproquement, si ces deux projections se coupent en un même point de la ligne de terre, la droite rencontre cette ligne en ce point.

Trouver l'intersection
de deux plans donnés
par leurs traces.

44. Les points de rencontre h et v' (fig. 17) des traces sur le même plan de projection, MN et QR , NP et RS , des deux plans donnés, sont des points communs à ces plans. Ces points appartiennent donc à leur intersection commune; ils en sont même les deux traces. Or ces deux points, situés l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical, se projettent sur l'autre

plan de projection en h' et v sur la ligne de terre ; hv et $h'v'$ seront donc les projections de la droite cherchée, intersection des deux plans.

Si deux des traces, comme NP et RS (fig. 18), se trouvaient parallèles, les traces des plans ne donneraient plus qu'un point h de cette intersection. Mais les deux plans donnés, passant alors par deux droites parallèles NP et RS, se coupent suivant une parallèle à ces droites, et, par conséquent, aussi parallèle au plan vertical. Donc les deux projections de l'intersection des deux plans seront la parallèle ha à la ligne de terre, et la parallèle $h'a'$ à NP, menées par les points h , h' . La construction générale pour trouver l'intersection de deux plans indique ce résultat. En effet, de ce que les deux traces NP et RS sont parallèles, la droite intersection des deux plans vient rencontrer le plan vertical sur ces deux traces en un point situé à l'infini ; c'est donc une parallèle à ce plan de projection située dans les deux plans donnés.

Si les deux traces SR et NP étaient perpendiculaires à la ligne de terre, les deux plans seraient perpendiculaires au plan vertical, et leur intersection serait une verticale.

Lorsque les deux traces d'un des plans, tout en se coupant sur la ligne de terre, sont respectivement parallèles aux traces de l'autre, les plans donnés sont évidemment parallèles entre eux ; il n'y a donc pas d'intersection. Mais si les quatre traces sont en même temps parallèles à la ligne de terre, les deux plans peuvent se couper suivant une parallèle à cette ligne.

Pour obtenir cette intersection, que ne peuvent plus donner les traces des plans, on coupe les plans donnés (MN, M'N'), (PQ, P'Q') (fig. 19) par un plan auxiliaire quelconque RST. On construit les deux intersections (cd , $c'd'$), (fg , $f'g'$) de ce plan avec les deux plans (MN, M'N'), (PQ, P'Q'). Le point de rencontre (m , m') de ces deux droites sera évidemment un point commun aux deux plans donnés, et, par conséquent,

ces plans auront pour intersection commune la droite $(ab, a'b')$, menée par ce point (m, m') parallèlement à la ligne de terre.

On aurait pu choisir pour plan auxiliaire un plan UVU' perpendiculaire à la ligne de terre. Ses intersections avec les plans donnés sont deux droites, dont les traces sont h et a' pour celle du plan $(MN, M'N')$, l et n' pour celle du plan $(PQ, P'Q')$. Dans le plan UVU' rabattu autour de sa trace horizontale, ces intersections sont les droites hp et lq (39); leur point de rencontre A est en projection a et a' . De sorte que les droites ab , $a'b'$, menées par ces points parallèlement à XY , représentent l'intersection des deux plans donnés.

Si les deux droites hp et lq étaient parallèles, les deux plans ne se rencontreraient pas, puisqu'ils passeraient par ces deux droites parallèles et une parallèle à la ligne de terre. Dans ce cas, les quatre segments Vh , Ve , Vn' , Vk' , forment une proportion, ainsi que le démontre la similitude des deux triangles hVp et lVq .

Si un des plans donnés était parallèle à un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, ce plan n'aurait qu'une seule trace $Q'R'$ (fig. 20), sur le plan vertical. L'intersection est alors une horizontale du second plan $(av, a'v')$, dont la trace verticale est le point de rencontre v' des traces verticales NP et $Q'R'$ des deux plans donnés. Mais si le second plan donné $(MN, M'N')$ (fig. 21) était, en outre, parallèle à la ligne de terre, on couperait les deux plans par un plan auxiliaire RST perpendiculaire à XY . On construirait, sur le rabattement de ce plan autour de sa trace verticale ST , les deux intersections $c'd'$ et $Q'R'$ avec les plans donnés. Leur point de rencontre A serait un point de l'intersection commune de ces deux plans dans le rabattement. a et a' seraient les deux projections de ce point; et les parallèles à la ligne de terre $Q'R'$ et ab représenteraient les deux projections de l'intersection cherchée.

Si les quatre traces des plans donnés MNP et QNR (fig. 22) se coupaient en un même point de la ligne de terre, leur intersection serait une droite qui passerait par le point de concours N de ces traces. Pour obtenir un second point de cette droite, on couperait ces deux plans par un plan auxiliaire ST, qu'on choisirait de préférence horizontal ou parallèle au plan vertical. Les intersections de ce plan avec les plans donnés seront, en projection horizontale, deux droites cd et fa menées par les points de rencontre c et f des traces verticales parallèlement aux traces horizontales MN et QN. Leur point de rencontre a sera la projection horizontale d'un point de l'intersection des deux plans donnés; sa projection verticale sera en a' , sur la trace verticale ST du plan horizontal auxiliaire, et a N, a' N, seront les deux projections de l'intersection cherchée.

Il pourrait se faire que, pour une position particulière du plan auxiliaire, les droites suivant lesquelles ce plan rencontrerait les plans donnés fussent parallèles. Puisque les plans donnés ont déjà un point commun sur la ligne de terre, ils se coupent réellement bien; seulement leur intersection est une parallèle aux deux droites qu'on aurait trouvées, et par lesquelles passent les deux plans donnés. Si le plan auxiliaire qui donnerait ces intersections parallèles entre elles était un plan perpendiculaire à la ligne de terre, on verrait, comme précédemment, que les quatre distances des traces des plans donnés à la ligne de terre, dans ce plan perpendiculaire, formeraient une proportion.

Les deux traces des plans donnés peuvent être telles, que dans le rabattement des deux plans de projection elles viennent, pour chacun d'eux, à se confondre. Soient (fig. 23) MN et NP les traces de l'un de ces plans, QR et RS celles de l'autre. Le point de rencontre a de ces traces, considéré comme appartenant aux deux traces horizontales MN et RQ prolongées en arrière de la ligne de terre, est un point de l'intersection des deux plans. Ce même point a de rencontre des traces verti-

cales NP et RS appartient également à cette intersection. Ce second point de l'espace, bien distinct du premier, vient se confondre avec lui après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal.

Quand on viendra à relever le plan vertical, ce second point se trouvera dans le plan TUV, mené par le point a perpendiculairement à la charnière XY, plan qui contient aussi le point de rencontre a des traces horizontales des plans donnés. L'intersection des deux plans est donc une droite située tout entière dans ce plan perpendiculaire à la ligne de terre, et ses traces horizontale et verticale sont en a . Cette intersection des deux plans est, par conséquent, bien déterminée. Dans le rabattement du plan TUV de cette droite autour de sa trace horizontale TU, la trace horizontale reste en a , et sa trace verticale vient en v . Cette intersection rabattue est donc la droite av du triangle rectangle isocèle Uav; et comme les angles aigus de ce triangle représentent l'inclinaison de cette intersection sur les deux plans de projection, on peut dire que cette intersection fait des angles de 45° avec chacun de ces plans.

Du reste, en coupant les deux plans donnés par un plan horizontal auxiliaire SP, la construction donnerait le point de l'intersection des deux plans en (b, b') sur la perpendiculaire VT, à cause de l'égalité des triangles $c'ab'$ et bcd , ce qui confirmerait le résultat qu'on vient de trouver.

Deux plans parallèles aux plans MNP et QRS, et dont les traces passeraient toutes par le point U, donneraient une intersection qui serait parallèle à celle de ces derniers plans, et qui passerait par le point U de la ligne de terre, résultat que confirmerait encore la section faite par un plan horizontal auxiliaire.

45. Il peut arriver que les traces verticales ou horizontales des deux plans dont on veut obtenir l'intersection ne se rencontrent pas sur la feuille de dessin. MNP et QRS (fig. 24) étant ces deux plans, le point de ren-

contre h de leurs traces horizontales sera la trace horizontale de l'intersection des deux plans. Ce point se projettera sur le plan vertical en h' sur la ligne de terre. Il restera à trouver un second point de l'intersection. A cet effet, on coupera les deux plans par un plan auxiliaire TU, horizontal par exemple. On cherchera le point d'intersection (d, d') des deux horizontales des deux plans donnés, situées dans ce plan TU. Les droites hd et $h'd'$ seront les projections de l'intersection des deux plans. On pourrait obtenir directement un point d' d'une parallèle $c'f'$ à NR, en observant que les trois concourantes au point v' divisent ces deux parallèles en parties proportionnelles : il faudrait donc diviser $c'f'$ en deux parties $c'd'$ et $d'f'$ proportionnelles à Nh' et $h'R$.

Il serait peut-être plus curieux qu'utile de savoir déterminer le point v de la projection horizontale hv , quand on a déjà obtenu un point (d, d') . Les traces verticales étant supposées prolongées jusqu'à leur rencontre en v' , et ayant imaginé la droite vv' , on a, à cause du parallélisme des droites vv' , cc' , ff' , et de celles NR et $c'f'$

$$\frac{Nv}{Ne} = \frac{Nv'}{Ne'} = \frac{Rv'}{Rf'} = \frac{Rv}{Rf},$$

d'où

$$\frac{Nv}{Rv} = \frac{Ne}{Rf};$$

c'est-à-dire que, pour avoir le point v , il faudrait diviser la droite NR en deux parties proportionnelles aux deux longueurs connues Ne et Rf .

Si les traces horizontales et verticales des plans ne se rencontreraient pas, il faudrait construire deux points de cette intersection au moyen de deux plans auxiliaires, absolument comme on vient de le faire pour trouver le point (d, d') de cette intersection.

On pourrait également obtenir les points des projections des traces sur la ligne de terre, du moment qu'on

aurait construit un point de l'intersection des deux plans, absolument comme on a fait pour le point v .

46. Dans le problème de l'intersection de deux plans, on a eu recours à un plan auxiliaire pour construire cette droite, toutes les fois qu'elle n'était pas connue directement par les traces des plans et par la position particulière de ces surfaces. On a cherché à choisir le plan auxiliaire qui donnait avec ces plans les intersections les plus faciles à construire.

C'est là un procédé général qui a de fréquentes applications en géométrie descriptive. Ainsi, quand on voudra obtenir les points communs à deux surfaces, on les coupera par une surface auxiliaire prise parmi celles qui donneront, avec ces premières, les intersections les plus simples et les plus commodes pour les constructions.

47. Le problème qui consiste à trouver l'intersection de deux plans conduit directement à la solution de cette question, qui a déjà été traitée au n° 32 : *Étant donnée une des projections d'un point, d'une droite, situés dans un plan donné, trouver l'autre projection.* En effet, il ne s'agira que de construire l'intersection du plan donné avec le plan projetant connu de la droite, ou avec un plan *quelconque* passant par la perpendiculaire au plan de projection menée par la projection donnée du point. Dans le premier cas, l'intersection des deux plans est la droite cherchée; dans le second cas, on obtient une droite sur laquelle est située l'autre projection du point, qui se trouve par conséquent bien déterminée.

Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan.

48. L'intersection d'une droite et d'un plan, étant un point commun à la droite et au plan, se trouve sur la droite et sur l'intersection du plan donné avec un plan *quelconque* passant par cette droite. Le problème consiste donc à faire passer par la droite un plan *quelconque*, et à construire son intersection avec le plan donné.

Le point de rencontre de cette ligne et de la droite donnée sera l'intersection cherchée.

Or, pour conduire par la droite $(ab, a'b')$ (fig. 25) un plan, il suffira de faire passer ses traces QR et RS par les deux traces a et b' de la droite (35). L'intersection du plan QRS avec le plan donné MNP est une droite $(cd, c'd')$ qu'on sait construire dans toutes les positions possibles des deux plans (44 et 45). Le point de rencontre (o, o') de cette droite avec $(ab, a'b')$ est l'intersection cherchée. Ces deux points o et o' doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Si la droite $(cd, c'd')$ était parallèle à la ligne $(ab, a'b')$, il n'y aurait pas d'intersection. Effectivement, dans ce cas, la droite donnée est parallèle au plan MNP.

Cette droite $(cd, c'd')$ se confondrait avec $(ab, a'b')$, si les traces a et b' étaient sur les traces MN et NP du plan. C'est que la droite donnée serait alors contenue dans le plan MNP.

Le choix du plan sécant qui passe par la droite donnée étant arbitraire, il est plus commode de se servir d'un des deux plans projetants de cette droite, et même de ces deux plans à la fois, ce qui donne une vérification, comme à la solution précédente. Le plan vertical qui projette la droite donnée suivant ab (fig. 26) a pour trace horizontale cette ligne ab , et sa trace verticale est la perpendiculaire QR sur la ligne de terre. Ce plan aQR coupe le plan donné MNP suivant une droite, dont la projection verticale est $c'd'$. Le point de rencontre o' de cette droite avec $a'b'$ est la projection verticale de l'intersection cherchée, et on aurait sa projection horizontale à la rencontre o de la perpendiculaire oo' et de la projection horizontale ab de la droite donnée.

Le second plan projetant $a'ST$ de la droite donnerait directement cette projection horizontale o . Car il est à la rencontre de la droite ab et de la projection horizontale fg de l'intersection du plan $a'ST$ avec le plan MNP. On exécute ordinairement ces deux constructions à la fois; et comme vérification, les deux points o et o' doi-

vent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

49. Quand la droite donnée ($a, a'b'$) (fig. 27) est perpendiculaire à un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, on choisit pour plan sécant, soit le plan vertical QRS dont la trace horizontale QaR est parallèle à la trace MN du plan donné, soit le plan TaU parallèle au plan vertical. Le premier de ces plans coupe le plan MNP suivant une horizontale, dont la projection verticale $c'd'$ coupe en o' la projection verticale de la droite donnée. Le second plan TU coupe le plan MNP suivant une parallèle au plan vertical, dont la projection verticale $f'g'$ est une parallèle à la trace NP du plan. Le point o' de rencontre de $f'g'$ et $a'b'$ est la projection verticale du point d'intersection de la droite et du plan, dont on avait, du reste, la projection horizontale en o , puisque la droite donnée est une verticale.

Quand on veut obtenir la projection verticale d'un point d'un plan, connaissant sa projection horizontale, on peut ramener la question à trouver l'intersection du plan donné avec la verticale élevée de cette projection. La construction indiquée est celle qu'il faudrait exécuter. Mais, en définitive, la solution de ce problème revient toujours à trouver l'intersection du plan donné et d'un plan vertical passant par le point, comme il a été dit au n° 47.

50. En général, toutes les fois qu'il s'agira de trouver l'intersection d'une ligne et d'une surface, on cherchera à placer cette ligne sur une autre surface auxiliaire, qui donnerait avec la surface donnée l'intersection la plus simple et la plus facile à construire, comme on l'a fait quand on a voulu trouver l'intersection d'une droite et d'un plan.

*Trouver l'intersection
de trois plans donnés.*

51. L'intersection de trois plans est en général un

point : c'est le point de rencontre de la droite, intersection de deux de ces plans, avec le troisième plan. Le point d'intersection des trois plans se trouve sur les trois droites, intersections de ces plans pris deux à deux. Ce problème est donc ramené à celui de l'intersection de deux plans, qu'on a appris à résoudre au n° 44 dans toutes les positions possibles des plans.

MNP, QRS et TUV (fig. 28), étant les trois plans donnés, on construira les intersections $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$, $(fg, f'g')$, de ces plans pris deux à deux (44). Ces trois droites devront se couper en un même point (o, o') . Il suffirait de construire deux de ces droites pour trouver l'intersection des trois plans.

Si deux des intersections des plans donnés, pris deux à deux, étaient parallèles, le plan sur lequel se trouvent ces deux droites parallèles serait alors parallèle à l'intersection des deux autres plans. Il n'y aurait pas d'intersection commune aux trois plans.

Si deux des intersections des plans donnés, pris deux à deux, se confondaient, l'intersection des trois plans serait cette droite même. C'est le cas de trois plans dont les deux traces se réduiraient pour chacun d'eux à une seule ligne, et dans la supposition que ces trois lignes des traces viendraient concourir en un même point.

Droites et plans parallèles.

52. Le point donné (c, c') (fig. 29) appartenant à la droite donnée, *Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée.* les projections de cette droite passeront par celles du point. Comme du reste on sait que les projections de deux droites parallèles sont respectivement parallèles (16), celles de la parallèle cherchée seront les droites $cd, c'd'$, menées parallèlement aux projections ab et $a'b'$ de la droite donnée.

53. Le plan parallèle qu'il s'agit de construire est indéterminé. On sait seulement qu'il doit passer par la droite donnée. *Par un point donné mener un plan parallèle à une droite donnée.*

droite menée par le point donné (c, c') (fig. 30) parallèlement à la droite donnée $(ab, a'b')$. Si donc on mène $cd, c'd'$, respectivement parallèles aux projections $ab, a'b'$, et si on cherche les deux traces h et v de cette droite $(cd, c'd')$, tout plan tel que MNP, qui passera par ces deux traces, sera parallèle à la droite donnée, et contiendra le point donné.

Par un point donné mener une droite parallèle à un plan donné.

34. Ce problème est indéterminé. On aura une parallèle au plan en menant par le point donné une parallèle à une droite quelconque du plan donné.

Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné.

35. Le plan parallèle à construire aura ses traces respectivement parallèles à celles du plan donné MNP (fig. 31) (20). On connaîtra donc les deux parallèles $(ab, a'b')$, $(ac, a'c')$, aux deux plans de projection, menées par le point donné (a, a') dans le plan cherché (32). Les traces c et a' de ces deux droites appartiendront aux traces de ce plan parallèle. De sorte qu'en menant par ces deux points les parallèles QR et SR aux traces MN et NP du plan donné, on aura les deux traces du plan cherché, qui devront se rencontrer en un même point R de la ligne de terre. Une seule des traces c et b' aurait suffi pour déterminer le plan parallèle.

On aurait pu construire d'une manière plus générale le plan QRS en menant par le point (a, a') une parallèle à une droite quelconque du plan MNP; les traces de cette parallèle auraient appartenu aux traces du plan cherché QRS. En effet, le plan parallèle est le lieu de toutes les parallèles au plan MNP, menées par le point donné.

Si le plan donné était perpendiculaire à la ligne de terre, les traces du plan parallèle se confondraient avec la perpendiculaire qui joint les deux projections du point donné.

Si le plan donné était parallèle à la ligne de terre, on ne pourrait pas faire usage de l'horizontale du plan, et il faudrait construire les traces d'une parallèle à une

droite quelconque du plan donné. Ces traces appartiendraient aux traces du plan cherché.

56. Le plan cherché est celui qui passerait par les deux droites menées par le point donné, respectivement parallèles aux deux droites données. *Par un point donné mener un plan parallèle à deux droites données.*

57. Il faut construire l'intersection des deux plans donnés (44). La parallèle à cette intersection, menée par le point donné, est la droite cherchée. *Par un point donné mener une droite parallèle à deux plans donnés.*

58. Le plan à construire, devant passer par une des droites données et être parallèle à l'autre, contiendra toutes les parallèles à cette dernière droite menées par les différents points de la première. Il suffira donc de prendre un point de la droite du plan, de mener par ce point une parallèle à l'autre droite (52), et de faire passer un plan par la première droite et cette parallèle (37). *Par une droite donnée mener un plan parallèle à une droite donnée.*

Ce problème est toujours possible, puisque les deux droites du plan se coupent. Mais il y aurait indétermination dans le cas seulement où les deux droites données seraient parallèles; et en effet, tout plan qui passerait par la première droite serait parallèle à l'autre.

Droites et plans perpendiculaires.

59. La perpendiculaire à un plan ayant ses projections respectivement perpendiculaires aux traces du plan (19), il suffira d'abaisser du point donné (o, o') de cette droite les perpendiculaires oa et $o'a'$ sur les traces MN et NP du plan, pour avoir les projections ab et $a'b'$ de cette perpendiculaire au plan. *Abaissier d'un point donné une perpendiculaire sur un plan, et déterminer le pied et la vraie grandeur de cette perpendiculaire.*

Le pied de la perpendiculaire, ou le point commun à la droite ($ab, a'b'$) et au plan MNP , s'obtiendra en construisant l'intersection ($ab, c'a'$) de ce plan avec le plan projetant aba' de la perpendiculaire (48). Le point (x, a')

commun à ces deux droites est le pied de la perpendiculaire.

La vraie grandeur de la portion de la perpendiculaire comprise entre le point (o, o') et le pied (a, a') se construira sur le plan vertical en $o'A$, ainsi qu'il est expliqué au n° 29.

Quand le plan donné est perpendiculaire à un des plans de projection, la projection du pied de la perpendiculaire sur ce dernier plan se trouve sur la trace même du plan donné, et la perpendiculaire s'y projette en vraie grandeur.

Si le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection, la projection du pied de la perpendiculaire sur l'autre plan de projection se trouve sur la trace du plan donné, et la perpendiculaire se projette en vraie grandeur sur ce second plan de projection.

Lorsque le plan donné est perpendiculaire à la ligne de terre, les deux projections du pied de la perpendiculaire sont sur les traces du plan, et la perpendiculaire se projette en vraie grandeur sur ces deux plans.

Quand le plan donné est parallèle à la ligne de terre, la perpendiculaire au plan est dans un plan perpendiculaire à cette ligne. Il faut alors faire le rabattement de ce dernier plan pour trouver le pied et la longueur de la perpendiculaire.

Si les traces du plan étaient en ligne droite, et le point donné sur la ligne de terre, les deux projections de la perpendiculaire se confondraient, mais on n'en obtiendrait pas moins par les procédés ordinaires le pied et la longueur de cette perpendiculaire.

Ce problème servira à trouver la distance d'un point à un plan.

Par un point donné mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.

60. Les directions des traces du plan perpendiculaire à la droite donnée $(ab, a'b')$ (fig. 33) doivent être respectivement perpendiculaires aux projections de cette ligne (19). On pourra donc construire les parallèles $(oc, o'c')$, $(od, o'd')$, aux deux plans de projection,

menées dans le plan perpendiculaire par le point donné (o , o') de ce plan, car on sait que les projections oc et $o'd'$ doivent être perpendiculaires aux projections ab et $a'b'$ de la droite comme les traces du plan cherché.

Les traces d et c' de ces deux droites appartiendront aux traces du plan perpendiculaire. De sorte qu'en menant de ces points les perpendiculaires Md et $c'P$ à ab et $a'b'$, ces droites représenteront les traces du plan à construire qui devront venir concourir en un même point N de la ligne de terre.

Si la droite donnée est perpendiculaire à l'un des plans de projection, le plan perpendiculaire est parallèle à ce plan, et sa trace unique est une parallèle à la ligne de terre, passant par la projection du point donné sur l'autre plan de projection.

Quand la droite donnée est parallèle à un des plans de projection, le plan à construire est perpendiculaire à ce plan, et sa trace sur ce plan passe par la projection du point donné.

Quand la droite donnée est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, les deux traces du plan perpendiculaire sont parallèles à cette dernière ligne; il faudra construire les traces du plan au moyen du rabattement du plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Si la droite donnée est parallèle à la ligne de terre, les deux traces du plan perpendiculaire se confondent avec la perpendiculaire qui joint les deux projections du point donné.

61. On mènera par le point donné un plan perpendiculaire à la droite donnée; on cherchera le pied de la droite dans ce plan. La ligne qui joint ce pied et le point donné sera la perpendiculaire demandée.

Par un point donné mener une droite perpendiculaire à une droite donnée.

La droite donnée et sa perpendiculaire étant dans le plan passant par la droite et le point donnés, on pourrait construire ce plan, le rabattre autour d'une de ses traces; dans ce plan rabattu, abaisser du point donné

la perpendiculaire à la droite donnée, et relever cette perpendiculaire. On n'aurait besoin, pour la solution, que de la seule trace du plan, autour de laquelle se fait le rabattement.

Par un point donné mener un plan perpendiculaire à deux plans donnés. **62.** Il faut chercher l'intersection des deux plans donnés (44). Puis on mènera, du point donné, un plan perpendiculaire à cette intersection : ce sera le plan demandé.

Par une droite donnée mener un plan perpendiculaire à un plan donné. **63.** D'un point de la droite donnée on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné. Le plan qui passera par cette perpendiculaire et par la droite donnée sera le plan demandé.

Angles de droites et de plans.

Trouver les angles qu'une droite donnée fait avec les plans de projection. **64.** L'angle d'une droite et d'un plan est, comme on sait, l'angle formé par cette droite et sa projection sur ce plan. L'angle d'une droite avec un des plans de projection est donc l'angle de deux droites situées dans son plan projetant, dont la trace sur le plan de projection est la projection elle-même de la droite donnée. Un simple rabattement du plan projetant en question conduira donc à la solution du problème.

L'angle d'une droite ($ab, a'b'$) (fig. 34) avec le plan horizontal s'obtiendra par le rabattement du plan qui projette cette droite suivant ab , soit autour de sa trace ab , soit autour d'une verticale aa' de ce plan, comme il a été expliqué (40).

Dans le premier rabattement, on construira la droite AB au moyen de deux quelconques de ses points (a, a'), (b, b'), ou mieux encore par ses deux traces h et v' , quand il est possible de les obtenir. Cette ligne AB formera avec ab un angle bhB , qui sera l'angle de la droite avec le plan horizontal. Cet angle serait donné par la droite AB et une parallèle à ab , si on ne pouvait pas

prolonger ces deux lignes jusqu'à leur point de concours.

Dans le rabattement du plan autour de sa verticale aa' , on construira la droite $a'B''$ au moyen d'un point, et $B''a'c$ sera aussi l'angle de la droite avec le plan horizontal. Quand on peut trouver les traces h et v' de la droite, la construction se simplifie en faisant tourner le plan autour de la verticale vv' . Il suffit alors de rabattre la trace horizontale en h'' , et $v'h''v$ est l'angle demandé.

Les trois angles $b'hB$, $B''a'c$ et $v'h''v$, qu'on a obtenus pour l'angle de la droite avec le plan horizontal, doivent être égaux.

L'angle de la droite avec le plan vertical s'obtiendra absolument de la même manière, au moyen des deux rabattements du plan qui projette la droite suivant $a'b'$. Cet angle est représenté en $a'v'A'$ dans le premier rabattement, et en $v'''h'h$ dans l'autre.

Quand la droite donnée est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, son angle avec ce plan est nul, et le plan qui projette la droite sur le plan vertical étant dans ce cas parallèle au plan horizontal, l'angle de la droite avec sa projection verticale est donné en vraie grandeur sur le plan horizontal : c'est l'angle de la ligne de terre avec la projection horizontale de la droite.

65. L'angle de deux plans est mesuré par l'angle des deux droites qu'on obtient en coupant ces deux plans par un plan perpendiculaire à leur intersection commune. Cette intersection est la trace même d'un des plans quand l'autre est le plan de projection ; et la perpendiculaire à cette trace dans ce dernier plan représente la trace du plan perpendiculaire, et aussi son intersection avec le plan de projection. Un simple rabattement du plan perpendiculaire en question conduira donc à la solution du problème.

Trouver les angles qu'un plan donné fait avec les plans de projection.

Soit MNP (fig. 35) le plan dont on demande les angles avec les plans de projection. Une perpendiculaire

quelconque ab à MN représentera la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à MN , qui aura pour trace verticale la perpendiculaire bb' à la ligne de terre. ab sera en même temps l'intersection de ce plan perpendiculaire avec le plan horizontal; et la droite qui passera par le point a et le point (b, b') sera son intersection avec le plan MN .

Le rabattement le plus simple de ce plan abb' est celui qui s'exécutera autour de sa verticale bb' . Il suffira de amener le point a en a'' sur le plan vertical. $a''b$ et $a''b'$ sont les deux intersections du plan perpendiculaire rabattues; de sorte que $ba''b'$ est l'angle que le plan MNP fait avec le plan horizontal.

S'il n'était pas possible d'obtenir la verticale bb' , on exécuterait le rabattement autour d'une autre verticale de ce plan perpendiculaire. On peut encore faire le rabattement de ce plan autour de sa trace horizontale ab .

Le rabattement du plan $c'd'd$, perpendiculaire à la trace verticale NP , autour de dd' comme charnière, conduirait à l'angle $d'c'd$ du plan MNP avec le plan vertical.

Quand le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection, l'angle qu'il forme avec l'autre est donné en vraie grandeur par l'angle que sa trace sur le premier plan de projection fait avec la ligne de terre.

Trouver l'angle de deux droites données.

66. L'angle de deux droites qui ne se rencontrent pas est l'angle formé par l'une d'elles avec la droite menée par un de ses points parallèlement à l'autre droite donnée. Ainsi, on ramènera toujours le problème à trouver l'angle de deux droites qui se coupent. La construction du plan de ces deux droites et son rabattement sur un des plans de projection conduiront donc à la solution demandée.

Soient $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ (fig. 36) les deux droites données. Par le point (b, b') de la première droite on mène $(bf, b'f')$ parallèle à $(cd, c'd')$, et on construit les deux traces horizontales a et f de $(ab, a'b')$, $(bf, b'f')$; af

est la trace horizontale du plan qui passe par ces deux droites. Pour rabattre ces deux droites, il suffira de construire le rabattement B de leur point de rencontre (b, b'). Ce point B est, comme on sait, sur la perpendiculaire abaissée de la projection b sur la charnière af , et à une distance gB égale à l'hypoténuse $b'g''$ du triangle rectangle $\beta b'g''$, dans lequel $\beta g'' = bg$ (39). Les deux droites rabattues seront donc aB et fB , et l'angle aBf sera l'angle des deux droites données.

S'il n'était pas possible d'obtenir la trace a de la droite donnée ($ab, a'b'$), on substituerait aux deux droites deux de leurs parallèles, menées par le même point de l'espace, dont les traces se trouveraient sur la feuille de dessin.

Le rabattement du plan des deux droites autour de sa trace verticale conduirait également à la solution, et donnerait par conséquent une vérification.

Quand les droites données occupent des positions particulières par rapport aux deux plans de projection, la construction des traces du plan des deux parallèles aux droites données se simplifie, ainsi que le rabattement de ces parallèles.

Si l'une des droites données était parallèle à l'un des plans de projection, la trace du plan des deux droites et cette droite rabattue seraient parallèles à la projection de la droite sur ce plan de projection (36).

Le cas de deux droites parallèles au même plan de projection n'exigerait aucune construction, puisque l'angle des deux projections est le même que celui des deux droites.

Si l'une des droites était parallèle au plan horizontal, et l'autre au plan vertical, on leur mènerait des parallèles par un point de la ligne de terre. Ces deux parallèles seraient les traces mêmes de leur plan. Ce cas particulier résout le problème qui consiste à trouver l'angle des deux traces d'un plan.

Si l'une des droites était parallèle à la ligne de terre, on mènerait les parallèles aux deux droites par un point

de la ligne de terre. Les traces du plan des deux parallèles seraient la ligne de terre elle-même.

Si l'une des droites données était perpendiculaire à l'un des plans de projection, c'est le plan qui projette l'autre droite sur ce plan de projection qu'il faudrait rabattre, pour obtenir l'angle des deux droites.

Si les deux droites étaient situées dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre, il suffirait de les concevoir toutes deux dans un de ces deux plans, et de rabattre ce plan sur un des plans de projection.

Si les projections des droites données offraient elles-mêmes des positions particulières, on n'éprouverait pas la moindre difficulté pour la solution du problème. Il faudrait chercher le procédé le plus simple pour trouver les traces du plan de ces deux droites ou de leurs parallèles, et pour exécuter leur rabattement.

Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.

67. Il est facile de voir que l'angle d'une droite et d'un plan, ou l'angle de cette droite avec sa projection sur ce plan, est le complément de l'angle que forme, avec la droite, la perpendiculaire abaissée d'un de ses points sur le plan. Puisqu'on sait construire la perpendiculaire à un plan, le problème est ramené à trouver l'angle de deux droites.

Soient $(ab, a'b')$ (fig. 37) la droite donnée, et MNP le plan donné. Les droites ac et $a'c'$ menées par le point (a, a') , respectivement perpendiculaires aux traces MN et NP, représenteront les projections de la perpendiculaire abaissée de ce point de la droite sur le plan MNP (59). En construisant les traces horizontales h et d des deux droites $(ab, a'b')$, $(ac, a'c')$, dh sera la trace horizontale du plan de ces deux droites. On construira, dans le rabattement de ce plan, en A, leur point commun (a, a') (36). $h\Delta d$ sera l'angle des deux droites, et l'angle $h\Delta E$ de $h\Delta$ avec une perpendiculaire AE à Ad sera l'angle de la droite et du plan donnés.

Des positions particulières du plan donné se déduisent celles de sa perpendiculaire. On ramènera donc la

discussion de tous les cas particuliers de ce problème à ceux donnés par la position de deux droites dans la question précédente.

Si la droite donnée était la ligne de terre, il suffirait de rabattre la perpendiculaire au plan autour de la ligne de terre, qui représente les traces du plan de ces deux droites.

On aurait pu construire directement la projection de la droite sur le plan donné et l'angle de ces deux droites; mais cette solution aurait été plus compliquée.

68. Un plan perpendiculaire à l'intersection de deux plans coupe ces deux plans suivant deux droites, dont l'angle mesure celui des deux plans. Pour trouver l'angle des deux plans, il faut donc construire leur intersection, les couper par un plan perpendiculaire à cette droite, et rabattre ce plan perpendiculaire et ses deux intersections avec les plans donnés. *Trouver l'angle de deux plans.*

Soient MNP et QRS (fig. 38) les deux plans donnés. On construira leur intersection $(ab, a'b')$ (44). Le plan perpendiculaire pouvant être mené en un point *quelconque* de cette ligne, on prendra une perpendiculaire TU à la projection horizontale ab pour la trace horizontale de ce plan. On pourrait mener sa trace verticale, et construire le point de rencontre de ce plan avec la droite $(ab, a'b')$, qui, joint aux traces horizontales d et f , donnerait les deux intersections avec les plans donnés. Mais on observe qu'on n'a besoin que du rabattement de ce point autour de la trace TU.

Or le point que l'on cherche, ou le sommet de l'angle, appartenant à l'intersection des deux plans donnés, sa projection horizontale est sur ab . Mais comme ab est perpendiculaire à la charnière TU, ce point se rabattra également sur ab . La droite qui joint le sommet de l'angle au point c , et qui exprime sa distance à la charnière, est perpendiculaire à l'intersection des deux plans comme droite du plan dont la trace horizontale est TU. Elle est de plus située dans le plan perpendiculaire à la

charnière dont la trace horizontale est ab , ou dans le plan projetant de l'intersection. Donc si on fait le rabattement de ce plan projetant autour de sa trace verticale bb' , et si on y construit l'intersection en $b'A$, la perpendiculaire $c'G$ abaissée de ce point, ramené en c' sur $b'A$, donnera la distance du point cherché à la charnière. Portant cette distance de c en G' sur ab , et tirant dG' et fG' , ces deux droites seront les rabattements des deux intersections du plan perpendiculaire TU avec les plans donnés, et par conséquent $dG'f$ sera l'angle de ces deux plans.

La projection verticale $a'b'$ de l'intersection des deux plans donnés est inutile pour trouver l'angle de ces deux plans. On pourra se dispenser de la construire, à moins qu'on ne veuille obtenir les projections du point G' de cette intersection. A cet effet, on ramènerait le plan projetant dans sa position. Le point G décrirait un arc de cercle, dont les projections sont l'arc gg'' et la parallèle Gg' à la ligne de terre; et leurs intersections avec ab et $a'b'$ donneraient les deux projections g et g' du sommet.

Le rabattement du plan projetant autour de sa trace horizontalé ab aurait également conduit à trouver la distance du sommet de l'angle au point c de la charnière.

On aurait pu faire l'opération pour trouver l'angle des deux plans, en rabattant le plan perpendiculaire à leur intersection autour de sa trace verticale.

Les deux perpendiculaires abaissées d'un point sur deux plans formant un angle supplémentaire de celui des deux plans, on pourrait ramener le problème de trouver l'angle de deux plans à celui des deux perpendiculaires; mais cette solution serait plus compliquée.

Comme on peut dans toutes les positions possibles des deux plans donnés trouver leur intersection (44), la solution de ce problème est complète. Seulement elle se simplifie dans quelques positions particulières de ces plans.

Quand un des plans donnés est parallèle à un des plans de projection, l'angle des deux plans est le même que celui que l'autre plan fait avec ce plan de projection.

Quand un des plans donnés est perpendiculaire à un des plans de projection, la projection de l'intersection des deux plans n'est pas à construire sur ce plan de projection, puisque c'est la trace même du plan qui lui est perpendiculaire.

Quand les deux plans sont perpendiculaires au même plan de projection, leurs traces sur ce plan donnent l'angle que l'on cherche.

Quand l'un des plans est parallèle à un des plans de projection, et que l'autre est perpendiculaire au second plan de projection, l'angle des deux plans donnés est représenté par l'angle aigu de la trace du plan perpendiculaire avec la ligne de terre.

Quand les deux plans donnés sont parallèles à la ligne de terre, leur intersection est parallèle à cette ligne. Un simple rabattement d'un plan perpendiculaire à la ligne de terre donnera l'angle des deux plans.

Quand l'un des plans donnés est perpendiculaire à la ligne de terre, l'intersection des deux plans est dans ce plan perpendiculaire; il faudra le rabattre autour d'une de ses traces pour obtenir la distance du sommet de l'angle à la charnière.

Quand les traces des plans donnés sur un même plan de projection sont parallèles, l'intersection est parallèle à ce plan de projection. La distance de cette parallèle au plan de projection exprime la distance du sommet de l'angle à la charnière.

Quand les deux traces de chacun des plans donnés sont en ligne droite, l'intersection des deux plans est dans le plan perpendiculaire à la ligne de terre mené par le point de rencontre des traces : c'est encore ce plan qu'il faut rabattre pour trouver la distance du sommet de l'angle à la charnière.

Construire la bissectrice de l'angle de deux droites.

69. La bissectrice de l'angle de deux droites est une droite de leur plan passant par le sommet de l'angle. Il suffira de trouver l'angle des deux droites dans le rabattement (66), d'y construire la bissectrice par les procédés de la géométrie plane, et de déterminer la trace de cette droite ou le point où elle rencontre la charnière. Ce point de la bissectrice et le sommet de l'angle serviront à trouver les projections de cette droite.

70. Si, au lieu de la bissectrice de l'angle, on demandait la ligne qui diviserait l'angle des deux droites dans un rapport donné, on construirait dans le rabattement la droite qui remplirait cette condition.

Construire le plan bissecteur de l'angle de deux plans.

71. Le plan bissecteur de l'angle de deux plans est un plan qui passe par leur intersection. Il suffira de trouver une seconde droite de ce plan. Or ce plan, devant diviser en deux parties égales l'angle des deux plans donnés, passera par la bissectrice de l'angle qui le mesure : il faudra donc chercher l'angle des deux plans dans le rabattement (68), puis y construire sa bissectrice par les procédés de la géométrie plane ; alors il ne s'agira plus que de faire passer un plan par cette bissectrice et par l'intersection des deux plans donnés.

Problèmes divers.

72. On ne fera qu'indiquer la solution de la plupart des problèmes qu'on va énoncer ; mais il est très essentiel d'en exécuter les constructions afin de se familiariser avec les procédés de la géométrie descriptive. Il sera même bon de faire toutes les suppositions possibles dans les données de chaque problème.

Définir la position d'u-

73. Les deux projections de chaque point de cette

droite se confondent ; or, comme la distance de la projection d'un point à la ligne de terre mesure la distance du point à l'autre plan de projection, il s'ensuit que chaque point de la droite est à égale distance des deux plans de projection. Tous ses points appartiennent donc au plan bissecteur des deux plans de projection. Donc la droite est située tout entière dans ce plan.

D'après cette propriété des points du plan bissecteur, on voit facilement que pour les droites de ce plan les deux projections doivent se confondre, ou faire un même angle avec la ligne de terre, sur laquelle elles doivent se rencontrer, ou bien les deux projections doivent être deux parallèles à la ligne de terre équidistantes.

74. Cela revient à résoudre pour chaque point de la droite le problème (32) : étant donnée une projection d'un point d'un plan, trouver l'autre. Les deux projections de la droite demandée seraient les deux droites qui joindraient les deux projections horizontales et les deux projections verticales des deux points.

ne droite dont les deux projections se confondent.

Construire la droite d'un plan qui passerait par deux points : l'un donné en projection horizontale et l'autre en projection verticale.

75. Soit le cercle oa (fig. 39) la projection horizontale de la courbe du plan MNP . On pourrait trouver successivement la projection verticale qui correspond à chaque point du cercle, par la condition que la courbe est dans le plan MNP . Mais on observe que, si on conçoit une suite de plans verticaux tels que QRS , dont la trace horizontale serait parallèle à la trace MN , ce plan vertical passera par les deux verticales élevées en a et b des points du cercle, et contiendra par conséquent deux points de la courbe. Mais ce plan vertical coupe le plan MNP suivant une parallèle aux traces MN et QR , ou suivant une horizontale ($ab, a'b'$), sur laquelle doivent se trouver aussi les deux points de la courbe. Donc les projections verticales de ces points seront en a' et b' .

Etant donnée la projection horizontale d'une courbe d'un plan, trouver sa projection verticale et sa vraie grandeur.

Une suite de plans coupants verticaux et parallèles à QRS donnera donc successivement les projections

verticales des points de la courbe situés sur la même horizontale. En faisant passer une courbe continue par tous ces points, on obtiendra la projection verticale de la courbe du plan. Cette manière de procéder pour construire la projection verticale de la courbe, outre qu'elle fait obtenir les points par la rencontre de deux perpendiculaires, ou par le procédé graphique le plus exact, conduit à des remarques qui aideront à connaître mieux sa forme. Ainsi les deux horizontales $(cd, c'd')$, $(fg, f'g')$, dont les projections horizontales touchent le cercle, donnent le point le plus bas et le point le plus haut de la courbe, et lui sont tangentes en c' et f' ; au diamètre hl correspond sur le plan vertical la corde $h''l''$, qui est la plus grande de toutes les parallèles à la ligne de terre; la droite $c'f'$ coupe en deux parties égales toutes les cordes horizontales; et bien d'autres observations encore accusent de la forme de la courbe.

Pour connaître la vraie grandeur de la courbe dans son plan, il suffirait de rabattre ce plan autour de sa trace MN , par exemple : sur chaque perpendiculaire à la charnière se trouveraient deux points de la courbe. On aurait occasion de faire sur ce rabattement de la courbe des observations analogues à celles qui ont eu lieu pour sa projection verticale.

Par un point donné mener une droite qui rencontre deux droites données.

76. La droite cherchée, devant passer par le point donné et s'appuyer sur les deux droites données, se trouve dans les deux plans menés par l'une de ces droites et par le point : elle est donc l'intersection de ces deux plans. Elle peut être aussi considérée comme la droite qui joint le point donné au point d'intersection de l'un de ces plans et de la seconde droite.

Le problème consiste donc à construire les deux plans indiqués et à chercher leur intersection, ou bien à construire seulement un de ces plans et à chercher son intersection avec la seconde droite. La droite qui joindra ce dernier point au point donné sera la droite cherchée.

Comme vérification du problème, la droite trouvée

doit passer par le point donné et rencontrer les deux droites données.

Il n'y aura en général qu'une seule solution. Quand les deux droites données et le point donné seront dans un même plan, il y en aura une infinité. Enfin il n'y aura pas de solution quand une des droites données sera parallèle au plan passant par l'autre et par le point.

77. On peut construire une des traces du plan qui passerait par la droite et le point. On ferait le rabattement de ce plan ; on y construirait la droite et le point. Cela fait, on abaisserait la perpendiculaire du point sur la droite. Sa longueur serait la distance cherchée. *Trouver la distance d'un point à une droite.*

On pourrait par le point mener un plan perpendiculaire à la droite donnée, chercher le pied de la droite dans ce plan, et ensuite construire la longueur de la droite qui joint ce pied de la perpendiculaire au point donné. Cette solution serait beaucoup plus longue que la première.

78. On construira une des traces du plan de ces deux parallèles. On fera le rabattement de ces deux parallèles autour de cette trace. On y élèvera une perpendiculaire à ces deux droites. La portion de cette perpendiculaire interceptée par les deux parallèles exprimera leur distance. *Trouver la distance de deux droites parallèles.*

Cette solution est plus simple que celle qui consisterait à mener un plan quelconque perpendiculaire aux deux parallèles, à chercher ses points de rencontre avec ces deux droites, et à construire la droite qui joindrait les deux points d'intersection.

79. On construira une des traces du plan de ces deux parallèles et le rabattement de ces deux droites autour de cette trace. Sur ce rabattement on mènera, par les procédés de la géométrie plane, la sécante qui, partant du point donné rabattu, satisferait à la question. La *Etant données deux parallèles, mener par un point de l'une d'elles une sécante telle que la partie interceptée par les deux parallèles soit égale à une longueur donnée.*

trace de cette sécante, si on pouvait l'obtenir, déterminerait avec le point donné la droite cherchée ; ou bien on relèverait le point de cette sécante placé sur la seconde parallèle, pour avoir un second point de la droite demandée.

Mener une parallèle à une distance donnée d'une droite située dans un plan donné.

80. Il faut rabattre le plan et la droite donnés sur un des plans de projection, dans ce rabattement mener à la droite une parallèle à la distance voulue, et construire les projections de cette parallèle, soit au moyen de sa trace, soit en relevant un de ses points.

Trouver la distance de deux plans parallèles.

81. La portion d'une perpendiculaire quelconque aux plans parallèles comprise entre ces deux plans, mesure leur distance. Pour simplifier les constructions on abaissera la perpendiculaire du point de rencontre des traces d'un des plans sur la ligne de terre. On cherchera l'intersection de cette perpendiculaire avec l'autre plan, et on construira la longueur de cette droite comprise entre ce point et le point de la ligne de terre duquel on a abaissé la perpendiculaire aux plans.

Mener à une distance donnée un plan parallèle à un plan donné.

82. Au point de rencontre des traces du plan sur la ligne de terre, on élèvera une perpendiculaire à ce plan. On cherchera sur cette perpendiculaire le point qui est à une distance donnée du premier (30). Il ne s'agira plus que de mener par ce point un plan parallèle au plan donné. (55). Il existe deux plans parallèles menés à une distance donnée d'un plan.

Etant donnés la projection horizontale et un point de la projection verticale d'une droite, la déterminer par la condition d'être parallèle à un plan donné.

83. Le plan qui projette la droite sur le plan horizontal, et qui est connu, coupera le plan donné suivant une droite qui est parallèle à la droite cherchée. Il suffira donc de construire ce plan vertical, son intersection avec le plan donné, et de mener par le point donné de la projection verticale une parallèle à la projection verticale de cette intersection. Ce sera la seconde projection de la droite cherchée.

84. Le point se trouve dans le plan mené parallèlement au plan connu à la distance donnée. On construira ce plan parallèle (82). Le problème sera ramené à trouver un point de ce plan, connaissant une de ses projections. Il y a deux solutions, puisqu'il y a deux plans parallèles menés à une distance donnée d'un plan.

On donne la projection horizontale d'un point et sa distance à un point connu : trouver la projection verticale de ce point.

85. Le plan perpendiculaire à la droite mené par le point donné sur cette droite, étant le lieu de toutes les perpendiculaires à cette ligne qui passeraient par ce point, contiendra la perpendiculaire cherchée. La droite qui joindra le point donné et le point où la seconde droite percera ce plan perpendiculaire sera la droite demandée. On sait construire ce plan perpendiculaire (60) et trouver son intersection avec la seconde droite (48).

Par un point pris sur une droite lui mener une perpendiculaire qui rencontre une droite donnée.

Si la seconde droite était située dans un plan perpendiculaire à la première, elle ne rencontrerait pas le plan perpendiculaire. Il n'y aurait pas de solution dans ce cas.

86. Il suffit de rabattre le point autour de la ligne de terre sur l'un des plans de projection : de construire la droite qui, passant par ce point rabattu, ferait l'angle donné avec la ligne de terre. En joignant les projections du point donné au point où la droite rencontre la ligne de terre, on obtiendra les deux projections de la droite cherchée. Quand il ne sera pas possible d'obtenir ce point, on relèvera un des points de la droite.

Par un point donné mener une droite qui fasse avec la ligne de terre un angle donné.

Ce problème comporte deux solutions, à moins que le sens de l'angle ne soit donné.

87. On rabattra le point autour de cette trace du plan. Dans ce rabattement, on mènera par le point la droite qui ferait avec la charnière l'angle donné. La trace de cette droite, ou, si l'on ne pouvait pas l'obtenir, un point de cette droite, qu'on relèverait,

Par un point d'un plan mener dans ce plan une droite qui fasse un angle donné avec une des traces.

déterminerait, avec le point donné, les deux projections de la droite cherchée.

Il y a deux solutions, qui se réduisent à une, quand le sens de l'angle est donné.

Par un point donné mener une droite qui fasse avec une autre droite donnée un angle donné.

88. On construira une des traces du plan passant par la droite et le point donnés. On fera le rabattement de la droite et du point autour de cette trace. On y mènera par le point la droite qui ferait avec la droite rabattue l'angle donné. On relèvera, par la construction la plus simple, un point de cette nouvelle droite, qui, avec le point donné, fera connaître les deux projections de la droite cherchée.

Si le plan de la droite et du point était donné d'avance, ou s'il s'agissait de *construire une droite d'un plan par la condition qu'elle devrait passer par un de ses points, et faire, avec une droite de ce plan, un angle donné*, la construction serait la même que la précédente, seulement on n'aurait pas à construire la trace du plan, qui est donnée.

Connaissant la projection et la trace horizontales d'une droite et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, construire la droite.

89. Soient ab (fig. 40) la projection horizontale de la droite, et a sa trace horizontale. a' sera un point de sa projection verticale. Il s'agira d'en déterminer un second point par la condition que la droite doit faire un angle donné α avec le plan horizontal ou avec sa projection horizontale ab .

Pour cela, il suffira de rabattre sur le plan vertical le plan projetant abb' , qui renferme la droite et sa projection, en faisant tourner ce plan autour de sa trace verticale bb' . Le point a viendra en A , et la droite Ab' qui fera l'angle α avec la projection horizontale, devenue la ligne de terre, sera dans ce rabattement la droite cherchée; b' sera sa trace verticale. Donc $a'b'$ sera la projection verticale de cette droite. Si le dessin ne donnait pas le point b' , on relèverait un point C , dont les projections c et c' se trouvent sur l'arc de cer-

cle (cc'' , Cc') situé dans le plan perpendiculaire à la charnière bb' ou dans le plan horizontal Cc' .

Si la trace verticale du plan projetant n'était pas connue, on ferait tourner ce plan autour d'une de ses verticales dd' (fig. 41); mais la construction serait absolument la même.

90. Soient $a'b'$ (fig. 42) la projection verticale, et (b, b') un point de la droite. La droite cherchée est située dans un plan vertical passant par le point (b, b') . C'est dans ce plan qu'elle doit faire avec le plan horizontal, ou avec sa projection horizontale, l'angle donné α . On imaginera que ce plan vienne à tourner autour de sa verticale bb' jusqu'à ce qu'il arrive dans la position ba'' parallèle au plan vertical de projection, pour le transporter ensuite parallèlement à lui-même sur ce plan vertical. Dans ce rabattement, la droite à construire sera $b'A$, faisant l'angle α avec la projection horizontale, devenue la ligne de terre.

Connaissant la projection verticale d'une droite, un de ses points, et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, construire la droite.

Quand on viendra à ramener ce plan de la droite dans sa position, le point A de sa trace horizontale se transportera d'abord en a'' ; puis il décrira sur le plan horizontal l'arc de cercle $a''a$, sur lequel cette trace devra se trouver. Mais la perpendiculaire $a'a$ à XY contient aussi cette trace, puisque $a'b'$ est la projection verticale de la droite cherchée. Cette trace sera donc en a intersection de l'arc de cercle et de cette perpendiculaire.

Si on ne pouvait pas obtenir sur le dessin le point A de la trace horizontale, on construirait les projections d'un autre point C de la droite. Sa projection verticale est en c' , sur une parallèle à la ligne de terre, et sa projection horizontale c est sur l'arc de cercle cc'' et sur la perpendiculaire $c'c$ à XY .

91. La droite cherchée est située dans un plan vertical passant par le point donné (o, o') (fig. 43). C'est dans ce plan qu'elle doit faire, avec sa projection horizontale un angle donné,

Par un point donné mener une droite qui fasse avec le plan horizontal un angle donné,

et qui rencontre une droite située dans ce plan.

horizontale, l'angle donné α , ou l'angle α' , complémentaire de α , avec la verticale oo' . On fera tourner ce plan autour de la verticale oo' , jusqu'à ce qu'il arrive dans la position oc , parallèle au plan vertical de projection, pour le transporter parallèlement à lui-même sur le plan vertical. Dans ce rabattement, la droite à construire sera $o'c'$, faisant l'angle α' avec la verticale oo' . Quand on viendra à remettre ce plan vertical dans sa position, la trace de $o'c'$ décrira, dans le plan horizontal, une circonférence oc ; et comme cette trace doit, d'après l'énoncé du problème, se trouver sur une droite ab donnée dans le plan horizontal, les points a et b , communs à ce cercle et à la droite ab , seront les traces horizontales mêmes de la droite cherchée. Les droites $(oa, o'a')$, $(ob, o'b')$ satisferont donc à la question.

Le problème dépendant de l'intersection de la circonférence oc et de la droite ab , il pourra y avoir une solution, deux solutions, ou il sera impossible.

Par un point mener une droite qui fasse avec un plan donné un angle donné, et qui rencontre une droite donnée dans ce plan.

92. La droite cherchée, sa projection sur le plan donné et la perpendiculaire abaissée du point donné sur ce plan, forment un triangle rectangle dont l'angle opposé au dernier côté est l'angle que doit faire la droite cherchée avec le plan. On connaîtra ce triangle en cherchant la distance du point au plan. On en déduira, par une construction faite à part, l'autre côté de l'angle droit ou la distance du pied de la perpendiculaire à la trace de la droite sur le plan donné. Pour obtenir cette trace, il suffira de rabattre le plan donné, d'y construire la droite et le point donnés et le pied de la perpendiculaire. Puis on y décrira, de ce dernier point comme centre, avec le rayon trouvé pour la distance du pied de la perpendiculaire à la trace, une circonférence, qui coupera en général la droite donnée en deux points, qui appartiendront aux deux droites cherchées. On construira les projections de ces deux points rabattus. En les joignant au point

donné, on obtiendra les deux solutions du problème.

Quand le cercle est tangent à la droite, il n'y a qu'une solution; et il n'y en a pas quand la circonférence ne coupe pas la droite donnée.

95. Pour résoudre ce problème, il suffira de construire la projection verticale du sommet de l'angle formé par les deux droites.

Soient ab et cd (fig. 44) les projections horizontales des deux droites, a et c leurs traces horizontales. ac sera la trace horizontale du plan des deux droites. Si on fait leur rabattement autour de ac comme charnière, le sommet de l'angle se trouvera sur la perpendiculaire dg à ac abaissée de la projection horizontale d . Mais les deux droites devant faire un angle donné, ce sommet se trouvera sur l'arc aDc capable de cet angle donné, décrit sur ac . Donc il sera en D , intersection de dg et de l'arc aDc .

Etant données les projections et les traces horizontales de deux droites, et l'angle qu'elles forment dans l'espace, trouver leurs projections verticales.

Or, dans l'espace, la droite qui joint le point à sa projection horizontale, et les deux perpendiculaires abaissées de ces deux points à la charnière, forment un triangle rectangle. De ce triangle on connaît les deux perpendiculaires dg et Dg à la charnière, dont l'une, Dg , est l'hypoténuse du triangle rectangle. On obtiendra l'autre côté gk de l'angle droit en portant Dg de d en k sur gc . gk exprimera la distance du point à sa projection horizontale ou au plan horizontal. En la portant donc de δ en d' sur la perpendiculaire dd' , on aura la projection verticale d' du sommet, et, par suite, les projections verticales $a'd'$ et $c'd'$ des deux droites.

La distance Dg du point de l'espace à la charnière, étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, doit être plus grande que la distance dg de la projection horizontale du point à cette charnière, qui en est un des côtés de l'angle droit. Ainsi, il n'y aura pas de solution quand l'arc capable viendra rencontrer la perpendiculaire dg entre d et g . Or il peut arriver que la perpendiculaire dg tombe entre les deux points a et c comme à la

figure 44. Alors l'angle donné de l'espace aDc doit être plus petit que la projection horizontale adc de cet angle.

Mais si la perpendiculaire dg tombait sur le prolongement de ac , comme à la figure 45, l'angle de l'espace pourrait être plus grand, plus petit, et même égal, à l'angle adc de la projection. En effet, si on décrit la circonférence passant par les trois points a , d et c , cette circonférence coupera en général la perpendiculaire dg en un second point D'' . Si l'arc capable de l'angle donné décrit sur ac coupe dg entre d et D'' , en un point D intérieur à cette circonférence, l'angle de l'espace sera plus grand que adc . S'il tombe en D' , en dehors de cette circonférence, il sera plus petit. Enfin, si ce point de l'arc capable se trouve être précisément le point D'' , l'angle de l'espace sera égal à celui de sa projection sur le plan horizontal.

On voit que, dans ce cas particulier de la position des droites, on pourrait résoudre ce problème : Etant données les projections et les traces horizontales de deux droites, les déterminer par la condition qu'elles fassent un angle plus grand ou plus petit que celui de leurs projections, ou égal à cet angle.

Construire un plan, connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal.

94. Le plan qu'il s'agit de construire doit passer par une droite située dans un plan QRS (fig. 46) perpendiculaire à sa trace horizontale MN , et faisant au point a de cette trace l'angle donné α avec QR . Si on rabat ce plan QRS sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace RS , le point a du sommet de l'angle viendra en a' ; et la droite $a'b'$ faisant l'angle α avec la ligne de terre serait le côté de l'angle compris dans le plan en construction; or la trace verticale de cette droite est en b' sur la charnière RS . Donc la trace verticale du plan cherché sera la droite $b'N$.

On pourrait obtenir de cette manière autant de points qu'on voudrait de la trace verticale du plan dans les différents plans perpendiculaires à MN . On serait obligé

d'en construire deux, si le point N de la trace horizontale n'était pas connu.

Quand MN est parallèle à la ligne de terre, on sait que l'autre trace doit être aussi parallèle à cette ligne.

93. Soit $(ab, a'b')$ (fig. 47) la droite donnée. Ses traces a et b' appartiendront aux traces du plan cherché. Il ne s'agira donc plus que de déterminer un second point c de la trace horizontale de ce plan par la condition qu'il doit faire un angle α avec le plan horizontal.

Par une droite donnée faire passer un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle égal à un angle donné.

Il est facile d'obtenir la distance bc de la projection b à la trace cherchée MN , en observant que, si on conçoit le plan $b'bc$ perpendiculaire à cette trace, mené par le point (b, b') du plan cherché, bc est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dans lequel bb' est l'autre côté, et α l'angle aigu opposé à bb' . On pourra donc construire ce triangle sur le plan vertical en $bb'c'$. bc' sera la distance du point b au point c de la trace du plan; de sorte que, pour obtenir le point c , le problème consistera à construire sur ab , comme hypoténuse, un triangle rectangle dont $bc = bc'$ sera le côté de l'angle droit, problème de géométrie plane qui s'exécutera, soit en menant du point a une tangente au cercle bc' , soit en cherchant les points d'intersection de cette circonférence avec celle qui serait décrite sur ab comme diamètre.

La construction donnera deux points c et d . En joignant a à c et à d , on aura les traces horizontales acN et aRd des plans qui satisferont à la question, et par suite les traces verticales $Nb'P$ et Rb' de ces plans. Il y aura donc en général deux solutions.

On aurait pu construire un point autre que c de la trace horizontale du plan, en cherchant, comme on l'a fait, la distance de cet autre point de la projection ab à cette trace.

Si la trace a de la droite donnée n'était pas connue, il faudrait construire les distances de deux des points

de la projection ab à la trace du plan, et la tangente aux deux cercles décrits de ces deux points comme centres avec ces distances pour rayons donnerait la trace du plan cherché.

Pour que le problème soit possible, il faut que bc , côté de l'angle droit, soit plus petit que ab , hypoténuse d'un même triangle rectangle, ou, si on reporte la droite donnée en Ab' sur le plan vertical, il faut que le point c'' de la circonférence bc tombe entre b et A . Cela aura lieu toutes les fois que l'angle α du plan avec le plan horizontal sera plus grand que l'angle β que fait la droite donnée avec le plan horizontal. Dans ce cas, il y aura toujours deux solutions. Si $\alpha = \beta$, le point c' viendra en A : il n'y aura qu'une seule solution, c'est la trace horizontale du plan menée par le point a perpendiculairement à ab . Quand $\alpha < \beta$, le point c' tombera au-delà de A , et le problème sera impossible.

Si la droite donnée était parallèle au plan horizontal, la trace horizontale du plan serait la tangente au cercle bc menée parallèlement à la projection horizontale de la droite.

Par une droite donnée faire passer un plan qui fasse avec un plan donné un angle égal à un angle donné.

96. La trace du plan cherché sur le plan donné est une droite que l'on peut construire. En effet, on peut trouver les distances des différents points de la projection de la droite donnée sur le plan donné à cette trace, comme on l'a fait dans le problème précédent.

Ainsi on chercherait la projection de la droite donnée sur le plan donné (44). On ferait le rabattement du plan donné sur le plan horizontal, on y tracerait celui de ladite projection, et on y construirait, comme au n° 95, la trace du plan, qui ferait avec le plan donné rabattu un angle égal à l'angle donné α . On chercherait les deux projections de cette trace (41). Le plan qui passerait par cette nouvelle droite et par la droite donnée déterminerait le plan cherché.

Si les traces de la nouvelle droite de ce plan étaient connues dans le rabattement, on serait dispensé de

chercher ses projections, qui sont inutiles pour la solution du problème : car on n'a besoin que d'obtenir les traces de cette droite, qui appartiennent aux traces du plan cherché.

97. Ce problème consiste à mener un plan perpendiculaire à la droite donnée, à construire l'intersection de ce plan avec le plan donné, à mener dans ce plan perpendiculaire une droite qui fasse avec cette intersection l'angle donné, à trouver les projections de cette droite, enfin à faire passer un plan par cette dernière droite et par la droite donnée.

Un plan étant donné, ainsi qu'une droite située dans ce plan, mener par cette droite un second plan qui fasse avec le premier un angle donné.

Il faudra, dans cette série de constructions, employer les procédés les plus simples pour obtenir ce qui est absolument indispensable pour la solution du problème.

Mais il existe une solution beaucoup plus simple, et qui est entièrement basée sur ce que l'on a fait pour trouver l'angle de deux plans (68). En effet, puisque la droite donnée ($ab, a'b'$) (fig. 48) du plan MNP représente l'intersection de ce plan avec le plan cherché, une droite QR perpendiculaire à ab sera la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à cette intersection. Ce plan perpendiculaire coupera les deux plans suivant deux droites qui devront faire l'angle donné α .

Il ne s'agit que de construire le sommet de cet angle. Or le sommet de cet angle se trouve dans le plan projetant ab et sur une perpendiculaire abaissée du point c de QR sur la droite ($ab, a'b'$). Si on rabat ce plan abb' autour de sa trace verticale, la droite viendra en Ab' , et le point c sera en c' sur la ligne de terre. De sorte que la distance du sommet à la charnière sera la perpendiculaire $c'D'$ à $b'A$.

En portant $c'D'$ de c en D sur ab , D sera le sommet rabattu autour de la trace horizontale QR du plan perpendiculaire, et fD sera le rabattement de l'intersection du plan perpendiculaire avec le plan MNP. En menant Dg qui fasse avec fD un angle $fDg = \alpha$, g sera la trace horizontale d'une droite par laquelle doit passer le plan

cherché; et comme les traces a et b' de la droite cherchée appartiennent aux traces de ce plan, ces deux traces seront les droites $SaTg$ et Tb' .

On pourrait obtenir les projections d et d' du sommet et les droites dg et $d'g'$ du plan; mais ces constructions ne seraient d'aucune utilité pour le problème.

Par un point donné faire passer un plan qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection.

98. Soit (a, a') (fig. 49) le point donné, qu'on suppose être sur le plan vertical. a' sera un point de la trace verticale du plan cherché. Si on conçoit par ce point un plan perpendiculaire à la trace horizontale du plan demandé, $a'a$ sera la trace verticale de ce plan perpendiculaire, qui coupera le plan horizontal et le plan cherché suivant deux droites perpendiculaires à la trace horizontale de ce dernier, partant des points a et a' , aboutissant au même point de cette trace horizontale, et faisant entre elles l'angle donné α du plan cherché avec le plan horizontal. Si on rabat ce plan autour de sa trace verticale aa' , l'une de ces droites sera la ligne de terre aB , et l'autre une droite $a'B$, faisant avec aB l'angle α . aB exprimera la distance du point a à la trace horizontale du plan cherché. Quand on viendra à relever ce plan, le point B décrira un arc de cercle Bb , auquel la trace horizontale du plan devra donc être tangente.

Mais si par le point a de la ligne de terre on conçoit un plan perpendiculaire à la trace verticale du plan cherché, sa trace horizontale sera af perpendiculaire à XY . Ce plan perpendiculaire coupera aussi le plan vertical et le plan cherché suivant deux droites partant du point a et d'un point inconnu f , aboutissant au même point de la trace verticale du plan cherché, et faisant entre elles le second angle donné β . Si on rabat également ce plan perpendiculaire autour de sa trace horizontale af , la droite du plan vertical viendra se confondre avec la ligne de terre aD , et l'autre sera une droite indéterminée de position, mais faisant avec aD un angle β , ou parallèle à Gg .

Mais on observe que les deux plans, respectivement perpendiculaires aux deux traces du plan cherché et par conséquent à ce plan, se coupent suivant une perpendiculaire à ce plan, passant par leur point commun a , et qui, dans le rabattement du premier de ces plans perpendiculaires, est en vraie grandeur la droite aC perpendiculaire à $a'B$ située dans le plan cherché. Cette même perpendiculaire, dans le rabattement du second plan, est perpendiculaire à son intersection avec le plan cherché, dont la direction est parallèle à Gg . De sorte qu'en menant aC' perpendiculaire à Gg , et prenant $aC' = aC$, le point C' sera comme le point C le pied de cette perpendiculaire, et appartiendra à cette intersection, qui sera par conséquent la parallèle $DC'f$ à Gg . Donc le point de rencontre f de cette droite avec la trace horizontale af du plan perpendiculaire sera un point de la trace horizontale du plan cherché, et aD exprimera la distance du point a à sa trace verticale. Cette trace verticale sera donc tangente à l'arc de cercle Dd' . En menant donc, des points f et a' de ces traces, des tangentes fb et $a'd'$ aux arcs de cercle Bb et Dd' , ces deux droites seront les deux traces du plan cherché, et elles devront concourir au point N de la ligne de terre.

Si le point donné ne se trouvait pas sur le plan vertical, on ferait la construction précédente pour un point de ce plan, et il ne s'agirait plus que de mener par le point donné un plan parallèle au plan MNP , qu'on aurait construit (55).

99. Un cercle est déterminé quand on connaît son plan, son centre et son rayon.

Par trois points donnés faire passer un cercle.

Le plan du cercle est celui qui passe par les trois points donnés. On sait le construire (36). On fera le rabattement de ce plan autour d'une de ses traces (41). On y déterminera les trois points; on exécutera, par les procédés de la géométrie plane, le problème qui consiste à faire passer un cercle par les trois points. Cette construction donnera le centre et le rayon du cercle.

On aura les projections du centre en relevant deux des trois droites qui joignent, dans le rabattement, ce point aux trois points donnés.

On pourrait obtenir les projections d'autant de points qu'on voudrait de cette circonférence. Pour faciliter ces constructions et mieux étudier les courbes qui représentent les projections du cercle, on suivrait les procédés indiqués au n° 75.

Trouver la plus courte distance d'un point à une sphère donnée par son centre et par son rayon.

100. La plus courte distance d'un point à une sphère est la portion de la droite qui joint ce point à son centre, comprise entre le point et la surface sphérique.

On aura les projections de la droite sur laquelle se mesure cette plus courte distance, en joignant les projections du point donné au centre de la sphère.

Le point de rencontre de cette droite avec la surface de la sphère se trouve dans l'un des deux plans projetants de la droite, à l'intersection de cette droite et du grand cercle suivant lequel ce plan projetant coupe la sphère.

On pourra, dans le rabattement de ce plan, obtenir la droite, le centre et le grand cercle de la sphère, et par conséquent la plus courte distance demandée. Il ne restera plus qu'à mettre en projection le point d'intersection de la droite et de la sphère.

Etant donnée une des projections d'un point d'une sphère connue par son centre et son rayon, trouver l'autre projection.

101. On peut avoir une projection du rayon de la sphère passant par le point donné. Dans le plan projetant connu de ce rayon, cette projection, les deux perpendiculaires au plan de projection menées par ses deux extrémités et ce rayon lui-même, forment un quadrilatère dans lequel on connaît le rayon, sa projection, une des perpendiculaires et les deux angles droits à la base. On pourra donc construire sur le rabattement de ce plan projetant ce quadrilatère, qui donnera l'autre perpendiculaire ou la distance de l'autre projection du point de la sphère à la ligne de terre. On aura cette projection en portant cette distance sur la perpendicu-

laire à la ligne de terre abaissée de la projection donnée.

Il y a deux solutions quand la projection connue de ce rayon est plus petite que le rayon donné de la sphère. Il n'y en a qu'une quand cette projection est parallèle à la ligne de terre et égale au rayon lui-même. Il n'y en a pas quand cette projection est plus grande que le rayon de la sphère.

102. Le centre de la sphère qui doit passer par les quatre points donnés A, B, C, D, est également distant de ces points. Il doit donc se trouver à la fois sur les plans perpendiculaires aux différentes droites qui joignent ces points, menés sur le milieu de ces lignes. Mais les deux plans perpendiculaires à AB et CD coupent le plan perpendiculaire à BC suivant deux droites perpendiculaires, la première au plan ABC, la seconde au plan BCD. Ces deux droites, situées dans un même plan, se rencontrent toutes les fois que les deux plans ABC et BCD ne se confondront pas, ou que les quatre points donnés ne se trouveront pas dans le même plan. Mais si ces deux plans n'en faisaient qu'un, les deux droites qui leur sont perpendiculaires, seraient parallèles. Alors le problème serait impossible, à moins toutefois que ces deux perpendiculaires ne vinssent à se confondre, ou que les quatre points donnés A, B, C, D, ne fussent sur la même circonférence. Dans ce cas toutes les sphères qui auraient leurs centres sur cette perpendiculaire au plan des quatre points satisferaient à la question.

Par quatre points donnés faire passer une sphère.

Quand on est libre de choisir les plans de projection, on prend pour plan horizontal le plan des trois points A, B, C, et pour plan vertical un plan parallèle à la droite AD. De cette manière on simplifie beaucoup les constructions qu'il faut faire pour trouver le centre de la sphère.

Trouver le lieu des points également distants de quatre points donnés est un énoncé plus général de la question proposée.

Le problème qui consiste à circoncrire une sphère à un tétraèdre en est un cas particulier. Il est toujours possible, puisque les quatre sommets de ce solide ne se trouvent pas sur le même plan.

Inscrire une sphère à un tétraèdre.

103. Les trois plans bissecteurs des trois angles dièdres formés à la base du tétraèdre se coupent au centre de la sphère inscrite. Son rayon est la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces du tétraèdre.

Pour la simplification des constructions on placera, si cela est permis, la base du tétraèdre sur le plan horizontal.

Etant donnés les quatre sommets d'un tétraèdre, calculer sa surface et son volume.

104. Pour trouver la surface du tétraèdre il faudrait construire ses quatre faces sur les rabattements de leurs plans. Pour obtenir son volume on aurait à construire en vraie grandeur la base du tétraèdre et la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base.

Les constructions de ce problème seraient bien simplifiées, s'il était permis de prendre pour plan horizontal le plan même de la base. Les données feraient connaître directement le volume de ce solide, et, par un rabattement du sommet, successivement autour des trois arêtes de la base, on obtiendrait les trois faces latérales du tétraèdre.

Etant donné le côté d'un tétraèdre régulier, ainsi que le plan d'une des faces qui passe par ce côté, construire cette figure.

105. On ferait le rabattement du plan donné, sur lequel on construirait le côté du tétraèdre régulier, et par suite la base du tétraèdre sur ce plan. On en déduirait les deux projections.

Le plan mené par le milieu du côté donné perpendiculairement à cette droite passe par le sommet opposé de la base, et contient le quatrième sommet du tétraèdre. Il se trouve à une distance de ce sommet de la base égale au côté du tétraèdre, et sur la perpendiculaire à la base partant du centre de gravité du triangle équilatéral. On fera les constructions indiquées

pour trouver ce quatrième sommet sur le rabattement de ce plan perpendiculaire, dont il faudra construire préalablement la trace horizontale. Le rabattement du quatrième sommet étant obtenu, on cherchera sa projection, et on tirera les arêtes partant de ce point.

S'il était permis de prendre le plan donné de la base pour plan horizontal, toutes ces constructions se simplifieraient beaucoup.

106. De toutes les lignes qui réunissent deux quelconques des points des deux droites données AB et CD (fig. 51), la plus courte, s'il en existe une, doit être une droite FG qui ne saurait être oblique ni à l'une ni à l'autre de ces deux droites. En effet, la perpendiculaire abaissée, soit du point F sur CD , soit du point G sur AB , serait une droite plus petite que FG et s'appuyant comme elle sur les deux droites données.

Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.

La droite cherchée FG est donc perpendiculaire aux deux plans parallèles MN et PQ menés respectivement par l'une des droites AB et CD parallèlement à l'autre; et comme FG doit en même temps s'appuyer sur AB et sur CD , elle est située dans les deux plans perpendiculaires au plan MN , menés par les deux droites AB et CD . FG est donc l'intersection de ces deux plans perpendiculaires.

Les deux plans perpendiculaires à MN conduits par AB et par CD se coupent nécessairement : car, s'ils étaient parallèles, la trace $C'D'$ du second sur MN serait parallèle à AB , et par conséquent les deux droites données, AB et CD , parallèles toutes deux à $C'D'$, seraient parallèles entre elles, ou situées dans un même plan, ce qui est contre l'hypothèse.

Reste à prouver que la perpendiculaire FG aux deux droites AB et CD est plus courte que toute autre droite HK , qui réunirait deux de leurs points. En effet, cette droite HK ne saurait être perpendiculaire à la fois aux deux droites AB et CD , et par conséquent au plan MN , en même temps que FG , sans en conclure que

les deux droites données seraient dans un même plan. HK est donc oblique au plan MN ; elle est, par conséquent, plus longue que la perpendiculaire KL au plan MN ou que son égale FG .

Quand les deux droites AB et CD se coupent, le plan MN est le plan même de ces deux droites, et la perpendiculaire FG au plan est celle qui passerait par leur point de concours. La plus courte distance est nulle dans ce cas, comme on le savait d'avance.

Quand les deux droites données sont parallèles, il y a indétermination pour le plan MN . Mais on sait que, dans ce cas, leur distance est partout la même, et que c'est la plus courte distance d'un point de l'une des droites à l'autre.

Dans la solution du problème de la plus courte distance de deux droites par la géométrie descriptive, on n'exécutera que les constructions indispensables pour trouver la position et la grandeur de cette plus courte distance. Ainsi on ne construira qu'un seul des deux plans MN et PQ . A ce plan MN on mènera par CD un plan perpendiculaire, qui coupera AB en un point F . La perpendiculaire FG au plan MN , située dans ce plan perpendiculaire et terminée à la droite CD , donnera la plus courte distance des deux droites données.

Soient $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ (fig. 52) les deux droites données, on construira le plan MNP , passant par $(ab, a'b')$ et par une parallèle $(fg, f'g')$ à $(cd, c'd')$ menée par le point (o, o') de la première droite (58). C'est le plan MN de la fig. 51.

Du plan perpendiculaire à MNP mené par la droite $(cd, c'd')$ on n'a besoin d'avoir que son point de rencontre avec la droite $(ab, a'b')$. Ce point se trouve sur l'intersection de ce nouveau plan avec le plan MNP . $(cd, c'd')$ étant parallèle au plan MNP , cette intersection est parallèle à cette droite. Or si on mène par un point (p, p') de la droite $(cd, c'd')$ une perpendiculaire $(ph, p'h')$ à MNP (59), et si on cherche le pied (h, h') de

cette perpendiculaire sur le plan MNP, ce point appartiendra à l'intersection des deux plans, et la parallèle $(hk, h'k')$ à la droite $(cd, c'd')$ sera cette intersection même. Le point (k, k') où cette droite $(hk, h'k')$ coupe $(ab, a'b')$ est le pied de la plus courte distance sur le plan MNP, point qui, dans la figure 51, était représenté par le point F.

La perpendiculaire $(kl, k'l')$ au plan MNP, ou la parallèle à (ph, ph') menée par le point (k, k') , et terminée au point (l, l') de la droite $(cd, c'd')$, donnera la plus courte distance, qu'il faudra construire en vraie grandeur en KL (29).

Si on ne voulait obtenir que la grandeur de la plus courte distance de deux droites, il suffirait de construire la vraie grandeur de la perpendiculaire (ph, ph') au plan MNP, qui lui est égale.

La position particulière des droites ne modifierait en rien la série des constructions qu'on aurait à faire pour trouver leur plus courte distance. Il pourrait seulement en résulter quelques simplifications.

Si l'une des droites était parallèle à la ligne de terre, les traces du plan conduit par l'une d'elles parallèlement à l'autre seraient parallèles à la ligne de terre, et la plus courte distance, qui est une perpendiculaire à ce plan, se trouverait dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Si l'une des droites était la ligne de terre elle-même, la plus courte distance passerait par le point de rencontre des traces du plan perpendiculaire à la ligne de terre dans lequel elle se trouve située.

Quand une des droites est perpendiculaire à un des plans de projection, le plan mené par l'une d'elles parallèlement à l'autre est perpendiculaire à ce plan de projection, et par suite la plus courte distance est parallèle à ce dernier plan, et elle est donnée par conséquent en vraie grandeur sur ce plan.

Quand les droites données se trouvent toutes deux dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre, le

plan conduit par l'une d'elles parallèlement à l'autre est le plan même de la première droite. La plus courte distance est parallèle à la ligne de terre. Sa vraie grandeur est la portion de la ligne de terre comprise entre les deux plans des droites données; et, si on veut sa position, il faut chercher son pied sur un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

*Réduire à l'horizon
l'angle de deux droites.*

107. Ce problème consiste à trouver l'angle BaC (fig. 53) formé par les projections horizontales de deux droites AB et AC , au moyen de l'angle $ABC = \alpha$ de l'espace, et des angles $B\Lambda a = \gamma$ et $C\Lambda a = \beta$ que font ces lignes avec la verticale Λa .

Pour simplifier les constructions on prendra la face aAC du trièdre formé par les deux droites et la verticale, pour le plan vertical de projection. $aAC = \beta$ (fig. 54) représentant cette face sur le plan vertical, aC sera la projection horizontale du côté AC de l'angle cherché. La projection horizontale de l'autre côté passera par celle a du sommet de l'angle. Il ne s'agira plus que d'obtenir un autre point de cette projection, par la condition que les deux autres angles plans du trièdre doivent être égaux à des angles connus α et γ .

Les rabattements de la troisième arête sur le plan vertical autour des charnières AC et Λa seront deux droites AB' et AB faisant des angles α et γ avec AC et Λa . Dans ces rabattements, les deux points B et B' , situés à égale distance de A , appartiennent au même point de l'espace. Il s'agit de trouver les deux projections de ce point. Or les points B' et B , ramenés dans leur véritable position pour ne former qu'un seul et même point de l'espace, décrivent des arcs de cercle situés dans des plans respectivement perpendiculaires aux charnières AC et Λa , ou perpendiculaires tous deux au plan vertical de projection. Les traces verticales de ces deux plans sont les perpendiculaires Bb' et $B'C$ à AC et à Λa . Ces deux plans se coupent suivant une perpendiculaire au plan vertical, dont la projection verticale est le point

de rencontre b' des deux traces verticales, et dont la projection horizontale est la perpendiculaire $b'b$ à la ligne de terre. Le point cherché est sur cette ligne ($b', b'b$) ; et comme d'ailleurs il doit se trouver sur l'arc de cercle décrit par le point B avec le rayon aB , arc de cercle qui se projette en véritable grandeur sur le plan horizontal en Bb , la projection horizontale du point de l'espace que l'on cherche est donc le point b , intersection du cercle Bb et de la droite $b'b$. Donc ab est la projection horizontale du second côté de l'angle, et baC est l'angle de l'espace réduit à l'horizon.

Quoique la construction de l'angle réduit à l'horizon ait été faite sur la figure 54 en cherchant la trace b du second côté de cet angle, le raisonnement ne s'applique pas moins à tout autre point de ce côté.

Ainsi, quand l'angle γ est droit (fig. 55), le second côté ne rencontre plus le plan horizontal. On construit de la même manière les projections (b', b) d'un point représenté en B' et B dans les deux rabattements de ce second côté autour des charnières AC et Aa. Les perpendiculaires $B'b'$ et BA aux charnières AC et Aa donnent la projection verticale b' du point de l'espace, et la projection horizontale b est le point de rencontre de l'arc de cercle $B''b$ décrit avec un rayon $aB''=AB$ et de la perpendiculaire $b'b$.

Quand la construction se fait au moyen de la trace b du second côté de l'angle, comme à la figure 54, il y a alors une vérification. La distance Cb des deux traces est donnée par la droite $B'C$ dans le rabattement autour de AC. Le point b doit donc se trouver sur l'arc $B'b$ décrit du point C comme centre avec un rayon CB' .

On ne peut pas se donner arbitrairement les trois angles plans d'un trièdre. Le plus grand de ces trois angles doit être moindre que la somme des deux autres. Les constructions géométriques vont faire ressortir les mêmes cas de possibilité et d'impossibilité du problème.

En effet, les deux perpendiculaires $B'b'$ et BC (fig.

54) aux deux concourantes AC et Aa se coupent toujours en un point b' (*); et la droite $b'b$ rencontrera la circonférence aB , si b' est un point intérieur de ce cercle, ou si $ab' < aD$. Or on peut toujours supposer que le rabattement ait été fait sur le plan de la plus grande des deux faces aAC et aAB . Si ab' était plus grand que aD , il s'ensuivrait que l'oblique $Ab' > AB$, ou $>$ que son égale AB' ; et par suite l'angle $b'AC > CAB'$. L'angle plan aAC du trièdre, ou $aAb' + b'AC$, serait plus grand que la somme des deux autres aAB et CAB , puisque, dans ce cas, on aurait à la fois $aAb' > aAB$ et $b'AC > AB'$.

Résolution de l'angle trièdre.

108. Des trois faces et des trois angles dièdres qui composent les six éléments d'un angle trièdre, trois suffisent pour sa détermination. La résolution de l'angle trièdre ne présentera donc que six cas bien distincts dans les données :

- 1° Les trois faces ou angles plans ;
- 2° Deux faces et l'angle dièdre compris ;
- 3° Deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles ;
- 4° Les trois angles dièdres ;
- 5° Deux angles dièdres et la face comprise ;
- 6° Deux angles dièdres et la face opposée à l'une d'elles.

Mais les trois derniers cas rentrent respectivement dans les trois premiers, puisqu'au trièdre on peut substituer l'angle trièdre supplémentaire, dont les faces

(*) On ne saurait admettre la supposition particulière que AC se confond avec Aa. Car alors l'un des côtés de l'angle est vertical, et il n'existe pas d'angle réduit à l'horizon.

sont supplémentaires des angles dièdres du premier, et dont les dièdres sont supplémentaires des faces de ce même trièdre.

109. On prendra pour plan horizontal le plan de la face ASB (fig. 55) de l'angle trièdre, et on supposera les deux autres faces rabattues sur ce plan en ASC' et ASC". *Etant données les trois faces d'un angle trièdre, trouver ses trois angles dièdres.*

Quand on vient à relever les deux faces ASC' et ASC" pour former le trièdre, deux points C' et C'', situés à égale distance du sommet S sur SC' et SC'', se réunissent en un même point de l'espace. Dans ce mouvement, ces points ne sortent pas des plans perpendiculaires aux charnières SA et SB, menés par C' et C'', et dont les traces horizontales sont les droites C'*c* et C''*c*, respectivement perpendiculaires à SA et à SB. Le point *c*, intersection des traces de ces deux plans verticaux, est donc la projection horizontale du point de l'espace dont C' et C'' sont les deux rabattements. Mais ces deux plans, étant précisément perpendiculaires aux arêtes SA et SB, coupent les deux faces adjacentes à chacune d'elles suivant deux perpendiculaires, dont l'angle mesure l'angle dièdre formé le long de cette arête. Ces deux perpendiculaires à la même arête partent du point D pour SA, du point F pour SB, et viennent aboutir, l'une au point de l'espace dont les rabattements sont en C' et C'', et l'autre à la projection horizontale *c* de ce point. Elles forment donc avec la verticale qui joint ce point et sa projection deux triangles rectangles, dans lesquels les deux angles qui mesurent les dièdres sont opposés à cette verticale.

On connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse de chacun de ces triangles. Ce sont, pour l'un les perpendiculaires *c*D et C'D à SA, pour l'autre celles *c*F et C''F à SB, données dans les faces du trièdre tracées sur le plan horizontal. Si donc on effectue les rabattements de ces deux triangles autour des traces ho-

horizontales $C'c$, $C''c'$ de leurs plans, la verticale en c prendra les directions cc' , cc'' , respectivement perpendiculaires à $C'c$, $C''c'$; et les arcs de cercle décrits des points D et F comme centres, avec des rayons DC' et FC'' , couperont les droites cc' , cc'' , en deux points c' et c'' , qui seront les nouveaux sommets de ces deux triangles. Tirant $c'D$ et $c''F$, ces deux triangles seront représentés en cDc' et cFc'' , et les angles dièdres le long des arêtes SA et SB seront mesurés par les deux angles plans cDc' , et cFc'' . Les deux verticales cc' et cc'' devront se trouver égales, comme représentant toutes deux la hauteur d'un même point de la troisième arête, dont la projection horizontale est en c .

Pour obtenir le troisième angle dièdre, on coupera le trièdre par un plan perpendiculaire à la troisième arête, mené par le point de cette arête qui est projeté en c , et dont les rabattements sont en C' et C'' . Les intersections de ce plan sécant avec les faces latérales seront les droites $C'G$ et $C''H$, respectivement perpendiculaires à SC' et SC'' , et GH sera la trace de ce plan sur le plan horizontal, et en même temps son intersection avec la face ASB . Les trois droites $C'G$, $C''H$ et GH , forment dans l'espace un triangle qui, rabattu en GKH , donne pour la mesure de l'angle dièdre l'angle GKH .

La trace GH du plan sécant doit être perpendiculaire à la projection horizontale Sc de l'arête à laquelle ce plan est perpendiculaire, et par conséquent le point rabattu K de cette arête doit se trouver sur cette perpendiculaire Sc .

Si les droites $C'G$ et $C''H$ ne rencontraient pas les arêtes SA et SB , il faudrait, pour trouver le troisième angle dièdre, effectuer sur une des faces ASC' et ASC'' les mêmes constructions que pour la face ASB .

Pour que le problème soit possible, il faut 1° que les trois angles plans fassent une somme moindre que quatre droits; 2° que le plus grand de ces angles soit moindre que la somme des deux autres. On verra fa-

cilement que, quand ces conditions sont remplies, les côtés cD et cF des triangles rectangles cDc' , cFc'' , sont respectivement plus petits que les hypoténuses $C'D$ et $C''F$, et que, par conséquent, les solutions graphiques sont aussi possibles; et que, lorsque ces deux conditions ne sont pas remplies, on trouve des hypoténuses plus petites que ces côtés.

Quand deux des trois faces données sont des angles droits, les deux dièdres opposés à ces faces sont droits, et le troisième dièdre est mesuré par l'angle même de la troisième face.

Si les trois faces sont des angles droits, les trois angles dièdres sont également droits.

110. On prendra pour plan horizontal le plan de la face ASB (fig. 56), et on supposera l'autre face donnée rabattue en ASC' .

Etant données deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre compris, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.

En faisant tourner la face ASC' autour de SA , jusqu'à ce qu'elle fasse avec ASB l'angle dièdre donné, le trièdre se trouvera formé dans l'espace. Or, dans ce mouvement, un point C' décrit, dans le plan vertical dont la trace horizontale est la perpendiculaire $C'c$ à SA , un arc de cercle dont le centre est en D et dont le rayon est DC' ; et ce point se trouve placé dans ce plan sur une droite partant du point D , et faisant avec Dc l'angle dièdre donné. Si donc on rabat ce plan suivant sa trace $C'c$, ce point C' sera sur ce rabattement en c' à la rencontre de l'arc de cercle $C'c'$ et de la droite Dc' , faisant avec Dc l'angle donné. La projection horizontale de ce point de l'arête sera en c sur la perpendiculaire cc' à Dc .

Il est facile maintenant de construire ce même point de l'arête dans son rabattement autour de SB . En effet, il se trouve sur la perpendiculaire cC'' à la charnière, et à une distance $SC'' = SC'$ du sommet. BSC'' sera la troisième face du trièdre. On aurait également pu déterminer C'' par la distance GC'' , qui est évidemment égale Gc' .

Les trois faces de l'angle trièdre étant connues, on sait trouver les autres inconnues de ce problème, qui est toujours possible.

Etant données deux faces d'un angle trièdre avec l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.

111. On prendra pour plan horizontal le plan de la face ASB (fig. 57), et on supposera l'autre face donnée rabattue en ASC'. Le plan de la troisième face passe par SB et par une droite qui, dans un plan perpendiculaire à cette arête, ferait, avec le plan horizontal, l'angle α de l'angle dièdre donné. En faisant tourner la face ASC' autour de SA, jusqu'à ce que SC' vienne se placer dans ce plan indéfini de la troisième face, on formera le trièdre cherché. Pendant ce mouvement de rotation, un point C' de l'arête mobile décrira, dans un plan C'D perpendiculaire à la charnière, un arc de cercle dont le centre est en F et dont le rayon est FC'. Le point où cet arc de cercle percera le plan de la troisième face, appartiendra à la position de l'arête SC' dans l'espace. Or ce point commun au plan vertical C'D et au plan de la troisième face se trouvera sur la droite intersection de ces deux plans. On peut construire cette intersection dans le plan C'D rabattu sur le plan horizontal : car les traces horizontales C'D et SD de ces plans donnent un point D de cette intersection ; et le point situé sur la verticale élevée en F se rabat sur FA en H, à une distance FH facile à trouver. En effet, ce point H, dont la projection horizontale est en F, appartenant au plan de la troisième face, FH est donné en FK par le triangle rectangle FGK formé sur la perpendiculaire FG à SB, et dans lequel l'angle $FGK = \alpha$. DH est donc cette intersection qui, par sa rencontre avec l'arc de cercle C'cc', décrit par le point C' dans le plan vertical C'D, détermine dans ce rabattement le point c de la troisième arête.

Ce rabattement donne en vraie grandeur la distance Dc du point de la troisième arête au point D de SB. On connaît donc ses deux distances SC' et Dc aux points S et D, de sorte que l'intersection C'' de deux arcs de

cercle décrits des points S et D comme centres, avec SC' et Dc pour rayons, sera un point de la troisième face rabattue, et par suite la face inconnue sera BSC'' .

Connaissant les trois faces du trièdre, on saura trouver les autres inconnues du problème.

La circonférence $C'cc'$ rencontrant en général la droite DH en deux points c et c' , on obtient deux solutions BSC'' et BSC''' pour la troisième face, et par suite deux angles trièdres formés avec les données. Encore faudrait-il rejeter de ces solutions celles pour lesquelles les points de rencontre se trouveraient placés sur le prolongement de HD , au-dessous du plan horizontal : car dans les trièdres qu'on formerait avec ces points, l'angle dièdre suivant SB serait supplémentaire de l'angle dièdre donné.

Quand la circonférence $C'cc'$ ne fera que toucher en P la droite DH , il n'y aura qu'une seule solution. On observera que dans ce cas la droite FP est perpendiculaire à DH , et que le plan qui passe par SA et par le point P est précisément le plan mené par SA perpendiculairement à la troisième face du trièdre.

Quand la circonférence ne rencontre pas DH , le problème est impossible. C'est qu'alors l'angle plan SAC' est plus petit que celui formé par le plan mené suivant SA perpendiculairement à la troisième face.

Enfin, en se rappelant que de tous les angles plans dont SA est un des côtés, et dont l'autre est une droite tracée sur le plan de la troisième face, le plus petit est celui du plan perpendiculaire à cette face, et que ces angles augmentent à mesure que leurs plans s'écartent de cette direction perpendiculaire, il sera facile de conclure : que 1° le problème ne sera possible qu'autant que l'angle ASC' sera plus grand que ce plus petit angle; 2° que, dans le cas de $ASC' > ASB$, il n'y aura qu'une solution; 3° que pour $ASC' < ASB$ il y aura deux solutions si l'angle dièdre donné est aigu, et il n'y en aura pas si cet angle dièdre est droit ou obtus.

Problèmes dont les solutions sont simplement indiquées.

112. Sur un plan perpendiculaire à la droite don-

Trouver le lieu des pieds de toutes les droites qui, partant d'un point d'une droite donnée, font avec elle un angle donné, 1° sur un plan perpendiculaire à cette droite, 2° sur un plan oblique.

née, ce lieu est un cercle, dont le centre est le pied de la droite sur le plan, et dont le rayon est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est la distance du point au plan, et dont l'un des angles aigus est l'angle donné. On construira ce cercle sur le rabattement du plan perpendiculaire, et on en déduira ses projections.

On obtiendra ce lieu sur un plan oblique à la droite en construisant le lieu des droites demandées sur un plan perpendiculaire, mais seulement sur le rabattement, puis en cherchant l'intersection des différentes droites du problème avec ce plan oblique.

113. Sur un plan perpendiculaire à la droite on

Par un point d'une droite faire passer une droite qui fasse avec la première un angle donné, et qui soit située dans un plan passant par le point donné, ou qui soit parallèle à un plan donné.

cherchera le lieu des pieds de toutes les droites qui font avec la droite donnée l'angle donné. Le point de la droite cherchée sur ce plan perpendiculaire se trouve également dans le plan qui, passant par le point donné, doit contenir la droite cherchée. Ce point est donc sur l'intersection de ces deux plans. On construira cette intersection sur le rabattement du plan perpendiculaire, et sa rencontre avec la circonférence, lieu des pieds des droites également inclinées sur la droite donnée, sera un second point de la droite cherchée. Il y aura, en général, une solution, deux solutions, ou pas de solution, suivant la grandeur de l'angle donné, comparé à celui que fait la droite donnée avec le plan donné.

Si la droite cherchée devait être parallèle à un plan donné, on mènerait par le point donné un plan parallèle au plan donné, et le problème serait ramené au précédent.

Le problème suivant : *Etant données les deux projections d'une droite, la projection verticale d'une autre, et*

l'angle que ces deux droites font entre elles, trouver l'autre projection de la seconde droite, n'est qu'un cas de ce problème. Il s'agit de trouver dans le plan projetant donné de la seconde droite une droite qui ferait avec la première droite donnée un angle donné.

114. La droite cherchée rabattue sur le plan des deux droites données autour de chacune de ces droites fera avec elles des angles α et β . Un point de la droite cherchée pris à égale distance du sommet sur ses deux rabattements décrira, quand on viendra à relever la droite pour la placer dans sa véritable position, deux circonférences dans des plans perpendiculaires aux droites données, lieux de tous les pieds des droites qui font des angles α et β avec les droites données. Le pied de la droite cherchée devra se trouver sur ces deux circonférences ou sur une d'elles, et sur la droite, intersection de ces deux plans perpendiculaires. Sur le rabattement d'un de ces plans perpendiculaires, on tracera cette circonférence et cette intersection qui, par leur rencontre, donneront un second point de la droite cherchée. Il peut y avoir deux solutions, une solution, ou pas de solution, suivant la grandeur des angles donnés α et β , comparés à l'angle des deux droites données.

Par le point de concours de deux droites données faire passer une droite qui fasse des angles α et β avec les deux droites données.

On simplifiera beaucoup les constructions graphiques en prenant pour plan horizontal le plan des deux droites données.

115. Par un point on mènera des parallèles aux deux droites données. On construira la droite qui, passant par ce point, ferait des angles α et β avec les deux parallèles (114). Par chacune des droites données on conduirait un plan parallèle à la droite ainsi obtenue; ces deux plans se couperaient suivant une droite parallèle à cette dernière, qui ferait, par conséquent, des angles α et β avec les droites données, et qui s'appuierait sur ces lignes.

Mener une droite qui s'appuie sur deux droites données, et qui fasse avec elles des angles α et β .

Comme dans le problème précédent, il peut y

avoir deux solutions, une solution, ou pas de solution.

Pour simplifier les constructions, on pourrait choisir pour plan horizontal celui des deux parallèles.

Le problème de la plus courte distance de deux droites n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

116. Ce lieu est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint le point donné au centre de la sphère, et dont le centre est sur cette droite. Il est facile de construire le rayon de ce cercle et la distance de son plan au point ou au centre de la sphère. Il suffit, pour cela, d'imaginer un des plans projetants de la droite qui joint le point au centre, rabattu sur un des plans de projection, et de mener dans ce rabattement par le point la tangente au cercle d'intersection de la sphère par ce plan. La perpendiculaire abaissée du point de contact sur cette droite est le rayon du cercle de contact, et la distance du pied de cette perpendiculaire au point exprime la distance du plan perpendiculaire au point donné.

Trouver le lieu des points de contact de toutes les tangentes qu'on peut mener par un point à une sphère donnée par son centre et son rayon.

117. La droite cherchée devra faire avec la droite qui joint le point donné au centre de la sphère un angle β , qu'il sera facile de trouver par le problème précédent. Alors ce problème se trouvera ramené à celui du n° 114.

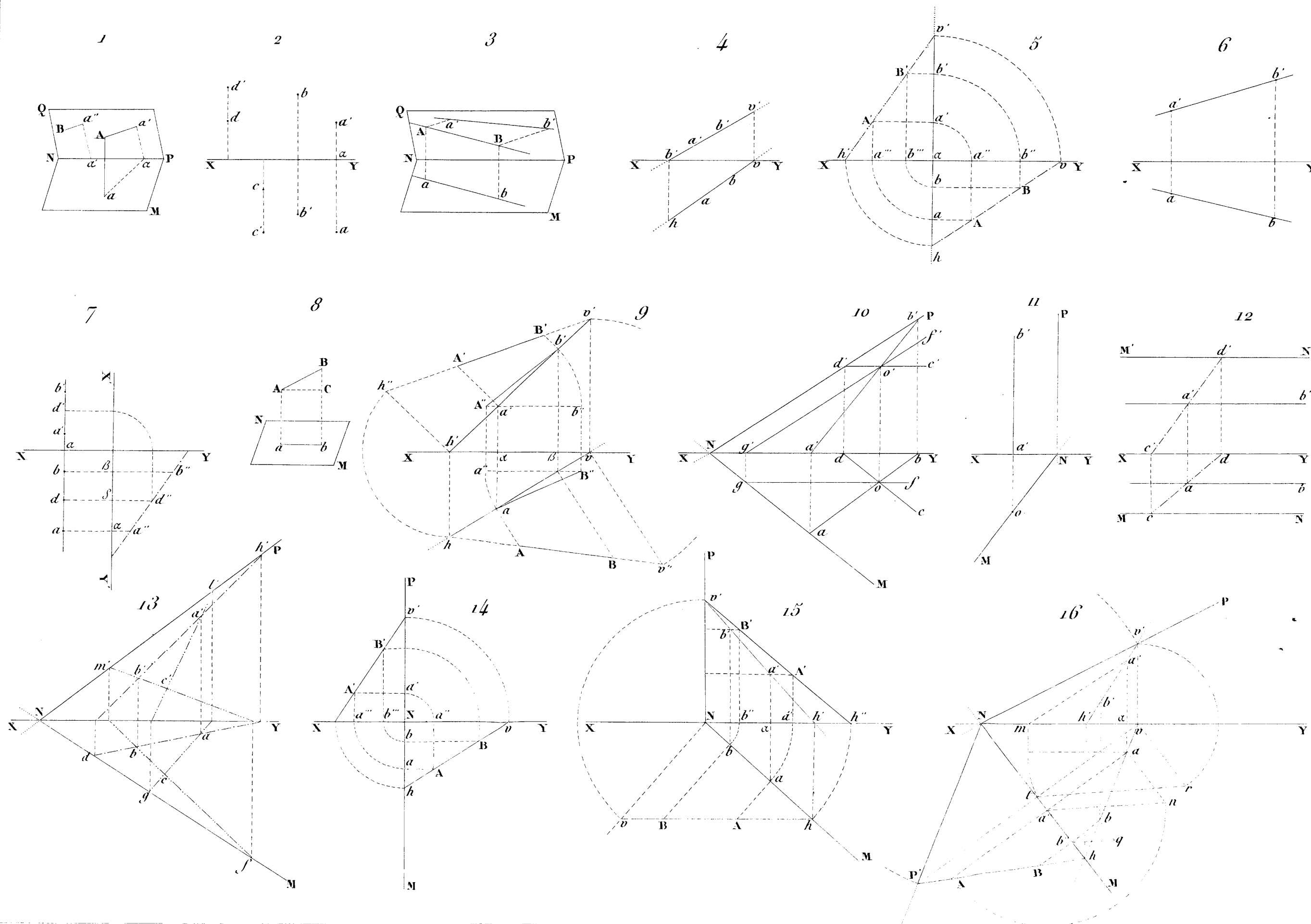
Par un point donné d'une droite mener une droite qui fasse avec la première un angle α et qui touche une sphère donnée.

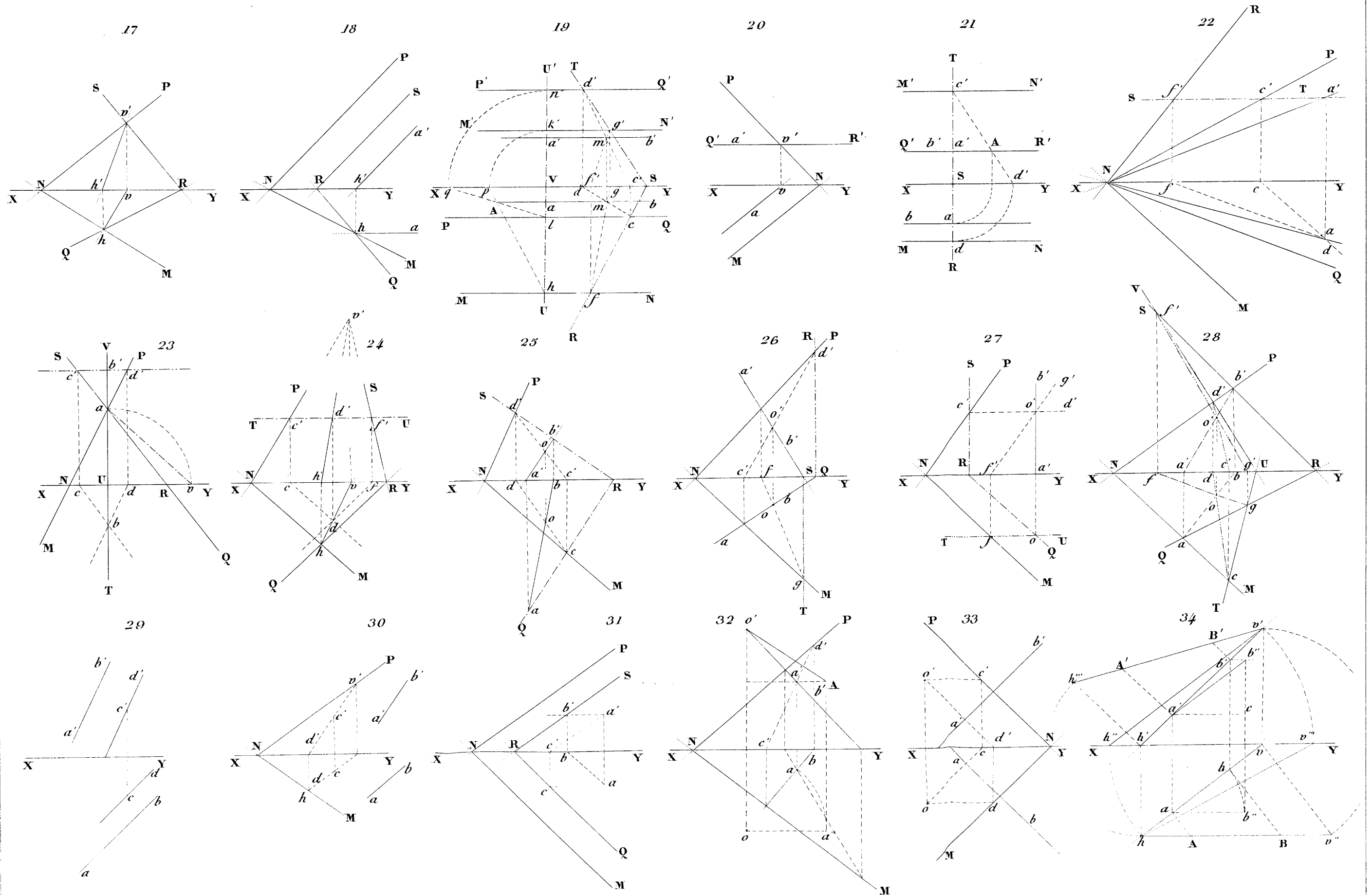
118. Les tangentes à chacune des sphères menées par le point donné doivent faire avec les deux droites qui joignent ce point aux centres des sphères des angles α et β , qu'il est facile de construire. Le problème se trouvera alors ramené à celui du n° 114.

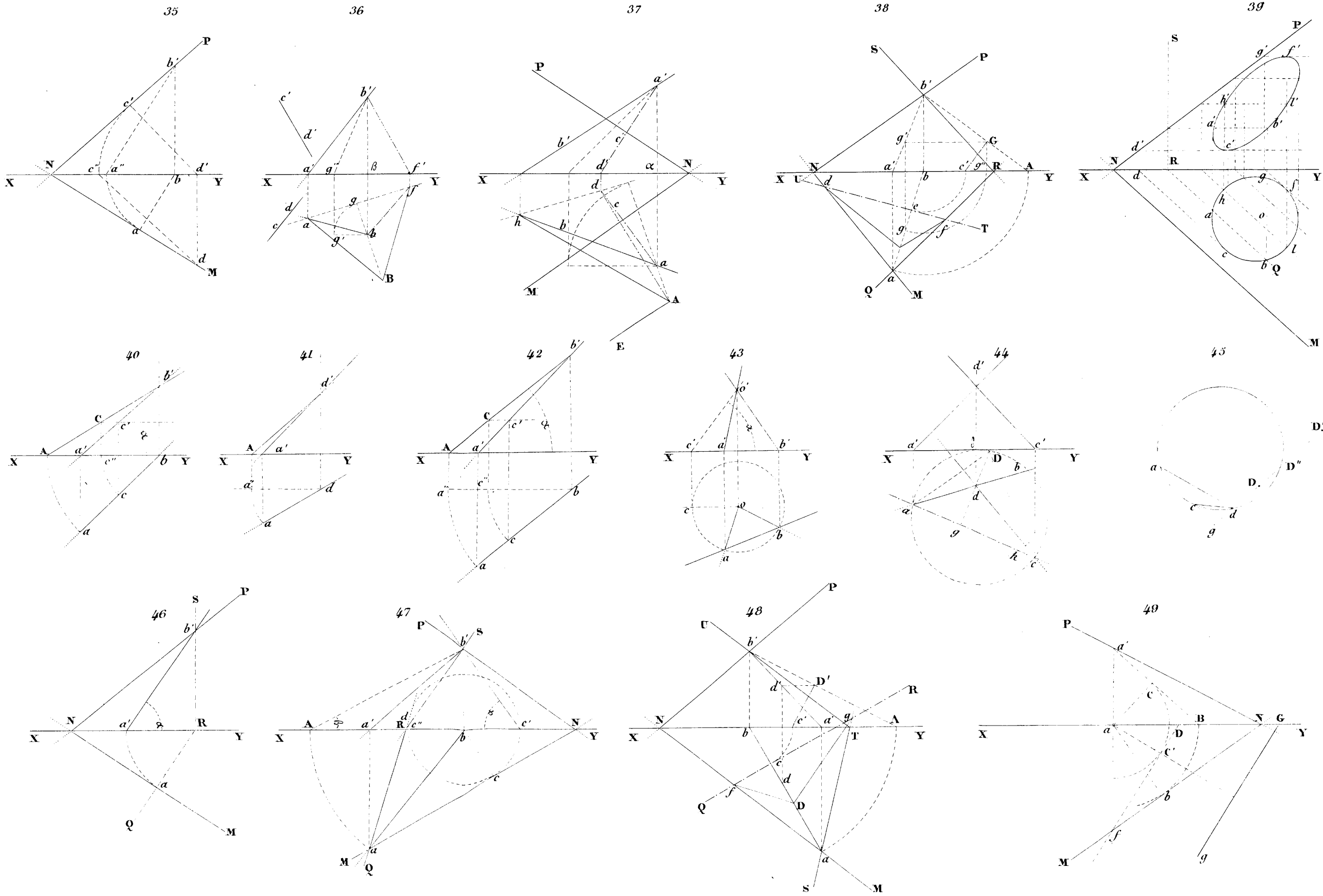
Par un point donné mener une droite qui touche deux sphères données.

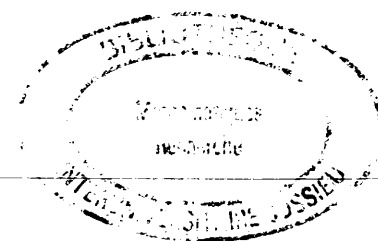
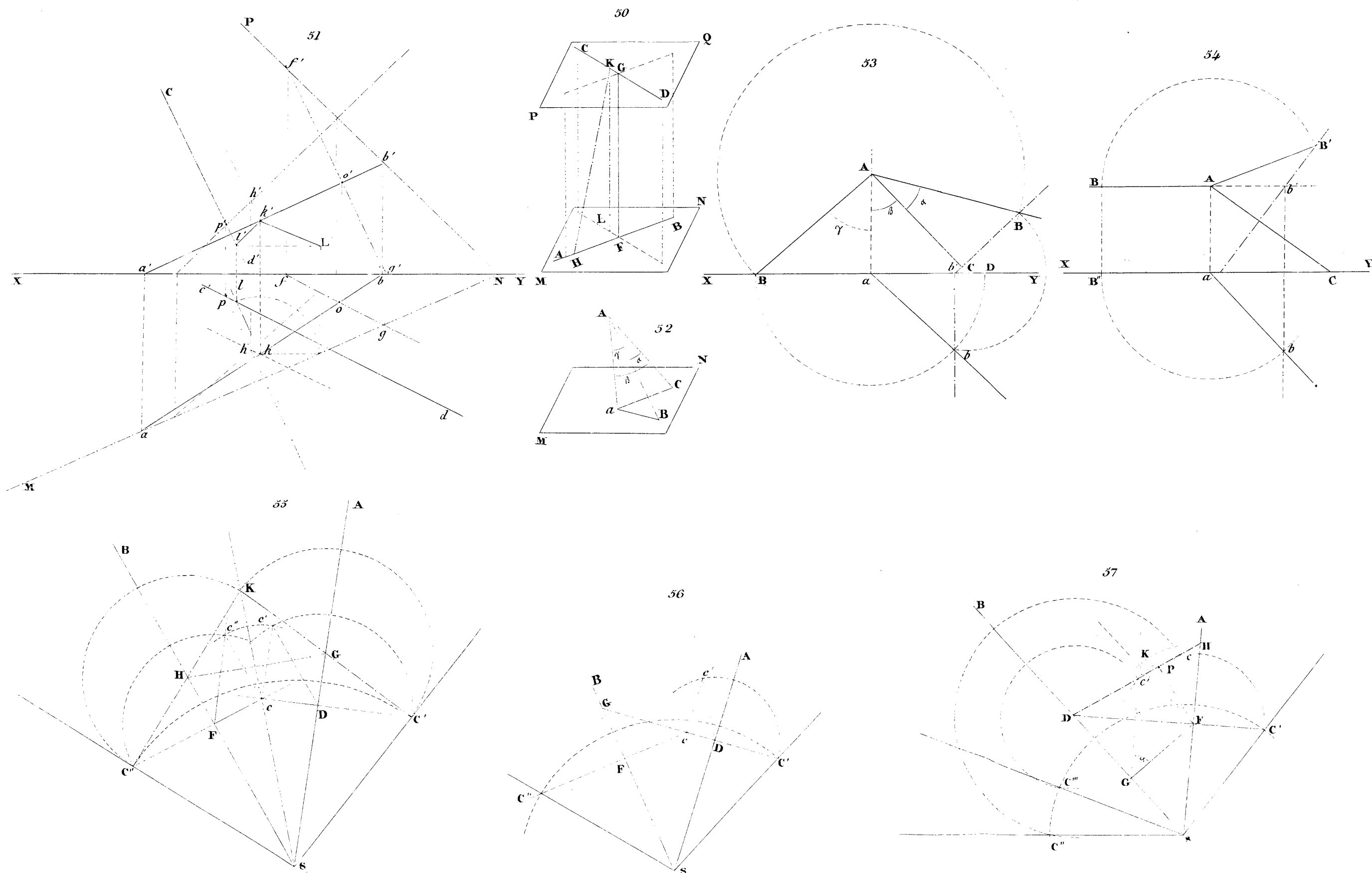
119. On construira le rabattement du plan conduit par la droite et le centre de la sphère; on y construira l'intersection de la droite donnée et du grand cercle de la sphère qui se trouve dans ce plan. On obtiendra les deux points cherchés, qu'on mettra en projection.

Trouver l'intersection d'une droite et d'une sphère connue par son centre et son rayon.









Lallemant Sculp.