H. Fu-f. 166.

N° D'ORDRE :
1485

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. A. BLONDEL,

Agrégé de mathématiques,
Aide astronome à l'Observatoire de Toulouse.

FACULTE des SCIENCES
BIBLIOTHEQUE
PARIS

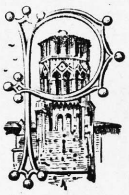
1re THÈSE. — Sur la théorie des marées dans un canal. Application a la mer rouge.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 15 juin 1912, devant la Commission d'examen.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM. G. DARBOUX, *Président.*
É. PICARD,
E. GOURSAT, *Examinateurs.*



TOULOUSE
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT
Librairie de l'Université
14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

1912

DONS
N° 55250.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

A MONSIEUR É. PICARD

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

SUR LA THÉORIE DES MARÉES

DANS UN CANAL,

APPLICATION A LA MER ROUGE,

PAR A. BLONDEL,

Agrégé de mathématiques,
Aide astronome à l'Observatoire de Toulouse.

INTRODUCTION.

La théorie des marées offre de nombreuses difficultés théoriques et d'application pratique. Les difficultés théoriques qui s'opposaient à l'intégration des équations des marées ont été surmontées, en grande partie, par M. Poincaré. Au point de vue pratique, les marées sont prédites avec une précision remarquable par l'analyse harmonique; mais les constantes qui entrent dans les formules de prédiction des marées sont déduites de l'observation, et la portée de l'analyse harmonique est beaucoup diminuée de ce fait.

Malgré les nombreux travaux sur les marées, l'application de la théorie à une mer réelle n'a pas encore été faite. M. Hough a étudié les oscillations propres et contraintes d'une mer de profondeur uniforme recouvrant le globe; on a étudié les marées dans un canal artificiel, en le supposant tracé suivant un petit cercle; mais, pour les mers réelles, on s'est borné à des assimilations grossières de mers avec des canaux.

Dans le présent travail, j'ai cherché à faire une application de la théorie à la mer Rouge; cette mer a une forme générale assez simple et peut être assimilée à un canal de largeur et de profondeur variables; dans sa *Théorie des marées*, M. Poincaré signale l'intérêt qu'il y aurait à faire une théorie complète des marées dans un golfe ou un détroit, afin d'avoir des renseignements sur le rôle encore peu connu du frottement; je trouve que dans le cas de la mer Rouge, le frottement joue un rôle consi-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

dérable. Avant d'appliquer à cette mer l'équation ordinaire des marées dans un canal, je me suis demandé si cette équation, établie pour une largeur infiniment petite, convenait à une mer de plus de 200 kilomètres de large; j'ai repris l'équation générale des marées et j'en ai déduit les modifications à apporter à l'équation classique dans le cas où le canal est trop large et dans le cas où, pour une raison quelconque, on a choisi un axe inégalement distant des deux bords. J'arrive aux mêmes résultats en partant de l'intégrale dont il faut annuler la variation pour obtenir l'équation des marées; de plus, je montre que les équations pour les canaux ne changent pas, qu'ils traversent ou non la latitude critique. Pour l'application numérique, j'ai employé la méthode de calcul de Ritz, qui m'a semblé beaucoup plus commode que la méthode de Fredholm; il est vrai que je n'en ai pas démontré la légitimité; mais j'ai remarqué qu'elle conduit, dans un cas particulier, au résultat exact; dans le cas actuel, la convergence des approximations successives ne fait aucun doute. Enfin, j'ai donné les formules qui permettent de calculer les oscillations propres d'un canal peu différent d'un canal régulier; malheureusement, la mer Rouge est trop irrégulière pour que ces formules lui soient applicables. Le rôle du frottement dans les marées de la mer Rouge est mis en évidence par ce travail; je me réserve de reprendre cette question, afin de trouver les valeurs numériques des coefficients que le frottement introduit dans les équations.

M. Picard m'a soutenu de ses encouragements et de ses conseils; je lui en exprime ici toute ma reconnaissance. Les nombreux calculs numériques qui ont été nécessaires pour étudier les marées de la mer Rouge m'ont été facilités par une machine à calculer, mise à ma disposition par M. Borel; je le remercie de m'avoir ainsi soulagé dans la partie la plus ingrate de ma tâche.

Attention —

Mlle Chandon a montré que c'est tout simplement une faute de calcul; et qu'il y a accord suffisant en calculant juste.

CR 12 Mars 1928

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

CHAPITRE PREMIER.

Théorie classique des marées dans un canal.

Dans la théorie classique, l'équation des marées se simplifie parce que l'on considère la largeur du canal comme infiniment petite et aussi à cause d'hypothèses supplémentaires. Prenons le raisonnement de M. Poincaré dans sa *Théorie des marées* (p. 205). Il part des équations du mouvement d'un fluide animé d'une rotation d'ensemble p, q, r; en appelant u, v, w les composantes du déplacement (supposé très petit), w est négligeable devant u et v si la profondeur est petite, ce que nous supposerons toujours. Si maintenant le canal est très étroit, *et si, de plus, sa largeur varie très lentement*, v sera aussi négligeable devant u; en effet, sur le bord, v sera très petit vis-à-vis de u à cause des conditions aux limites; comme les dérivées partielles de v sont supposées petites et que le canal est étroit, v sera partout négligeable. Mais supposons que le canal se termine par une paroi; le long de cette paroi, u sera nul et, dans une région voisine du bout du canal, u sera petit et comparable à v; nous ne sommes donc pas sûrs que dans cette région les équations subsistent; en particulier, il n'est pas évident que la force centrifuge composée n'ait pas d'influence.

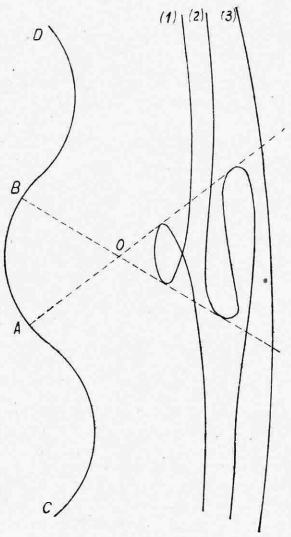
M. Maurice Levy donne une autre raison pour négliger la force centrifuge composée : il établit l'équation du mouvement en projetant sur une tangente à l'axe du canal toutes les forces qui s'exercent sur une molécule superficielle; or, la force centrifuge composée est perpendiculaire à la vitesse relative, laquelle est voisine de l'axe du canal; sa projection sur la droite considérée est donc très petite et peut être négligée. On voit qu'ici encore la largeur est supposée varier très lentement; de plus, la même critique que plus haut s'applique; tout au bout d'un canal qui se termine en cul-de-sac, rien n'autorise à croire que la vitesse relative est parallèle à l'axe du canal; elle est petite, mais dirigée n'importe comment.

Mais surtout, l'inconvénient de ces raisonnements est de ne pas indiquer le moins du monde jusqu'à quelle largeur on peut considérer un détroit comme un canal. Ainsi le canal de Suez a 54 mètres de largeur; la mer Rouge en a 200 kilomètres; les mêmes équations leur sont-elles applicables? Il est évident que l'erreur devient grande quan dla largeur du canal devient exagérée; nous verrons plus loin comment on peut dans chaque cas particulier juger si l'équation simple classique peut suffire.

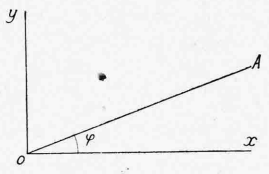
La notion de canal. — La forme la plus simple est celle d'un canal dont les deux rives sont parallèles, c'est-à-dire telles que les normales à l'une des rives soient aussi

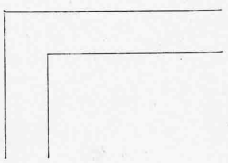
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

normales à l'autre; si le canal est étroit, on pourra confondre ces normales avec des droites; s'il est large, il faudra prendre les grands cercles normaux. Il existe alors une ligne, que nous appellerons l'*axe* du canal, et telle que si l'on porte sur ses normales, de part et d'autre, des longueurs égales à la demi-largeur du canal, on obtienne les deux rives. Plus généralement, si sur les normales à une ligne quelconque on porte de part et d'autre de la ligne deux longueurs variables, égales ou non, nous dirons que l'on obtient encore les rives d'un canal, dont la ligne primitive sera l'axe. Toutefois, nous exclurons des cas analogues aux suivants : Soit CABD l'axe; AO et BO les normales en A et B; si on porte sur les normales des longueurs supérieures à AO, nous pourrons obtenir des formes de rive telles que (1), (2), (3), (3) étant un cas particulier de (2), le cas où le repli se recouvre lui-même; nous exclurons de tels cas; autrement dit, nous n'admettrons les sinuosités brusques (à rayon de courbure petit) qu'aux endroits où le canal est étroit.



Si les longueurs portées de part et d'autre de l'axe sont égales, nous dirons que c'est un *axe principal*. Dans la pratique, on tracera par tâtonnements un axe principal. Cependant, il peut exister une infinité d'axes principaux, ou un seul, ou pas du tout. Ainsi, si les deux rives sont des droites formant un angle φ, on obtient toutes les courbes





$$\left(x\cos\frac{\varphi}{2}+y\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left(x\sin\frac{\varphi}{2}-y\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\text{Const.},$$

qui sont analogues à des hyperboles, et admettent pour asymptotes les bissectrices de xOA; on obtient de plus ces bissectrices elles-mêmes; naturellement, dans ce cas particulier, on prendrait pour axe principal la bissectrice intérieure. Si les deux rives sont des droites parallèles, le seul axe principal est la droite équidistante.

Enfin, si un canal à rives droites parallèles fait un coude, il n'existe pas d'axe principal. Mais cette question n'a pas d'importance pratique; il est facile dans les applications de trouver un axe qui soit à très peu près principal.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

CHAPITRE II.

Application de l'équation générale des marées au cas d'un canal.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Étant donnée une ligne L sur une sphère, il est possible de faire une carte de la sphèse où la ligne L soit représentée en vraie grandeur sur l'axe des x.

En effet, soit θ la colatitude, et φ la longitude d'un point; soient x et y les coordonnées du point correspondant sur la carte, x et y sont des fonctions de θ et φ qui satisfont toutes à l'équation

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=0; \tag{1}$$

le rapport de similitude est

$$k^2=\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2.$$

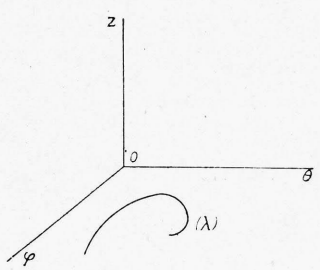
Il faudra donc prendre pour y une solution de l'équation (1) qui soit nulle tout le long de la courbe donnée, et qui, de plus, tout le long de cette courbe, satisfasse à

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2=1. \tag{2}$$

Cette solution une fois connue, x sera déterminé par les équations

$$\begin{cases}\sin\theta\dfrac{\partial x}{\partial\theta}=\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}=-\sin\theta\dfrac{\partial y}{\partial\theta}.\end{cases}$$

Il suffit donc de démontrer l'existence d'une solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions énoncées. Or, considérons trois axes $O\theta$, $O\varphi$, Oz; dans le plan θ, φ, la courbe L a pour image une courbe (λ). L'équation (2) définit $\frac{\partial y}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial y}{\partial\varphi}$ tout le long de (λ), puisque l'on a déjà, pour un déplacement sur cette courbe, $\frac{\partial y}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi=0$. Par suite, le problème revient à chercher une surface intégrale de l'équation (1) qui passe par (λ), et soit tangente le long de (λ) à une développable circonscrite.



Si la courbe (λ) est *analytique*, on sait qu'il existe une telle surface intégrale.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Dans ce qui suit, nous appliquerons ce lemme à *l'axe* du canal, qui n'est pas forcément une courbe analytique; mais on sait que l'on peut trouver une courbe analytique qui s'écarte d'aussi peu que l'on voudra d'une ligne donnée à l'avance, et même dont les tangentes fassent avec les tangentes aux points correspondants de la ligne donnée des angles aussi petits que l'on veut. Nous pourrons donc supposer que le théorème précédent s'applique.

Si la courbe Γ est un petit cercle $\theta = \theta_0$, la carte cherchée est une carte homothétique de la projection de Mercator, donnée par les formules

$$x = \varphi \sin\theta_0, \qquad y = \sin\theta_0 \operatorname{Log} \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

Car alors on a, pour $\theta = \theta_0$, $y = 0$, et, de plus,

$$ds^2 = \sin^2\theta_0 \left[d\varphi^2 + \frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} \right] = \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} [d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2] = \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} dS^2.$$

Donc, pour $\theta = \theta_0$, on a $\dfrac{dS}{ds} = 1$.

Pour un petit cercle quelconque, il suffit de prendre pour origine des colatitudes le pôle du petit cercle.

Soit maintenant un canal; traçons un axe et faisons une carte où cet axe soit représenté en vraie grandeur sur l'axe des x.

L'équation générale des marées est

$$h_1 \Delta\varphi + \frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{gk^2}(\lambda^2\varphi - W),$$

où les notations sont celles du *Traité des marées* de M. Poincaré :

x et y sont les coordonnées sur la carte du point correspondant à la longitude φ et à la colatitude θ.

W est une composante isochrone complexe du potentiel, de la forme $Ce^{\lambda t}$, où λ est une imaginaire pure.

k est le rapport d'un élément d'arc de la carte à l'élément correspondant de la sphère.

h est la profondeur de la mer, et on a posé

$$h_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta} h, \qquad h_2 = \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda} h_1,$$

où ω est la vitesse de rotation de la terre sur elle-même.

g est l'intensité de la pesanteur.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Enfin, en appelant ζ la hauteur de la marée, on a :

$$g\zeta = \lambda^2 \varphi - W.$$

La latitude critique est celle qui rend h_1 et h_2 infinis, c'est-à-dire celle qui annule $\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta$; cette quantité peut être nulle, puisque λ^2 est négatif et que $|\lambda|$ a des valeurs voisines de O, ω ou 2ω.

Nous supposerons que, dans toute la largeur du canal, la fonction φ peut se développer en série

$$\varphi = \varphi_0 + y\varphi_1 + y^2\varphi_2 + \dots,$$

les φ_i étant des fonctions de x.

Alors, *si le canal ne traverse pas la latitude critique*, on pourra aussi écrire :

$$\begin{aligned} h_1 &= h(a_0 + ya_1 + y^2 a_2 + \dots) \\ h_2 &= ih(b_0 + yb_1 + y^2 b_2 + \dots) \\ W &= w_0 + yw_1 + y^2 w_2 + \dots \\ \cos\theta &= \alpha_0 + y\alpha_1 + y^2\alpha_2 + \dots \\ \frac{1}{k^2} &= 1 + y\beta_1 + y^2\beta_2 + \dots ; \end{aligned}$$

les a_i, b_i, w_i, α_i, β_i sont des fonctions réelles de x.

Soient y_a et y_b les y des bords du canal correspondant à l'abscisse x; y_a et y_b sont aussi des fonctions de x. Nous poserons

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{y_a}^{y_b} h y^p dy = \sigma_p \\ h_b y_b^p y_b' - h_a y_a^p y_a' = \tau_p \\ h_b y_b^p - h_a y_a^p = \upsilon_p, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{y_b^{p+1} - y_a^{p+1}}{(p+1)g} = \mu_p$$

h_a et h_b étant les profondeurs aux bords.

Remplaçons dans l'équation générale des marées les fonctions qui y entrent par leur développement; multiplions ensuite par $y^m dy$ et intégrons de y_a à y_b. En remarquant que

$$\int_{y_a}^{y_b} \frac{\partial h}{\partial x} y^p dy = \sigma_p' - \tau_p$$

et

$$\int_{y_a}^{y_b} \frac{\partial h}{\partial y} y^p dy = -p\sigma_{p-1} + \upsilon_p,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

on arrive à l'équation suivante, qui sera notre équation fondamentale :

$$
\text{(A)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}[a_0\varphi_0'\sigma_m + (a_0\varphi_1' + a_1\varphi_0')\sigma_{m+1} + \ldots] \\
+ i\dfrac{d}{dx}[b_0\varphi_1\sigma_m + (2b_0\varphi_2 + b_1\varphi_1)\sigma_{m+1} + \ldots] \\
+ mi[b_0\varphi_0'\sigma_{m-1} + (b_0\varphi_1' + b_1\varphi_0')\sigma_m + (b_0\varphi_2' + b_1\varphi_1' + b_2\varphi_0')\sigma_{m+1} + \ldots] \\
- m[a_0\varphi_1\sigma_{m-1} + (2a_0\varphi_2 + a_1\varphi_1)\sigma_m + (3a_0\varphi_3 + 2a_1\varphi_2 + a_2\varphi_1)\sigma_{m+1} + \ldots] \\
+ (a_0\upsilon_m - ib_0\tau_m)\varphi_1 + [(a_1\upsilon_{m+1} - ib_1\tau_{m+1})\varphi_1 + (a_0\upsilon_{m+1} - ib_0\tau_{m+1})2\varphi_2] + \ldots \\
- (a_0\tau_m + ib_0\upsilon_m)\varphi_0' - [(a_1\tau_{m+1} + ib_1\upsilon_{m+1})\varphi_0' + (a_0\tau_{m+1} + ib_0\upsilon_{m+1})\varphi_1'] - \ldots \\
= \mu_m(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \mu_{m+1}[\beta_1(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + (\lambda^2\varphi_1 - w_1)] + \ldots.
\end{cases}
$$

Si le canal traverse la latitude critique, le calcul précédent ne subsiste pas, car on ne peut plus développer en série h_1 et h_2. Nous traiterons ce cas plus loin.

Choix de l'unité. — Dans ce qui suit, nous allons supposer que h, y_a, y_b sont petits; nous admettrons aussi que les fonctions φ_0, φ_1, φ_2, ... sont du même ordre de grandeur; mais cela suppose qu'on a choisi une unité de longueur, car φ_0 a pour dimensions $[L^2]$, φ_1 a pour dimensions $[L]$, etc. De même, nous admettrons que a_0, a_1, a_2, ... sont du même ordre de grandeur; même supposition pour b_0, b_1, b_2, ..., w_0, w_1, w_2, ... Ces dernières hypothèses montrent qu'il faudra prendre pour unité de longueur le rayon terrestre, car dans le calcul de b_1, b_2, w_1, w_2, etc., à côté de quantités ne dépendant pas de l'unité choisie, s'introduisent des quantités comme $\frac{d\theta}{dy}$, où θ est la colatitude. Le rayon terrestre sera aussi une bonne unité au point de vue dynamique, car il est comparable aux longueurs d'onde des ondes de marées, et par suite, si $\frac{h}{R}$, $\frac{y_a}{R}$ et $\frac{y_b}{R}$ sont petits, on pourra considérer h, y_a et y_b comme petits dans l'étude des marées. Enfin, quand, dans un cas particulier, on aura calculé φ_0, φ_1, φ_2, ..., on pourra s'assurer que ces quantités sont du même ordre de grandeur.

Ordre de grandeur des quantités σ_i, μ_i. — Dans ce qui suit, nous supposerons, à moins d'indication expresse, que la profondeur du canal est nulle aux deux bords : $h_a = h_b = 0$. Il en résulte que tous les τ_i et υ_i seront nuls.

Les σ d'indices pairs ne peuvent être nuls, étant donnée leur définition :

$$\sigma_p = \int_{y_a}^{y_b} h y^p dy.$$

On a

$$\sigma_{2p+1} = \int_{y_a}^{y_b} h y^{2p+1} dy = y_c \int_{y_a}^{y_b} h y^{2p} dy = y_c \sigma_{2p}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

y_c étant compris entre y_a et y_b. Il en résulte que σ_{2p+1} est petit devant σ_{2p}. De même, $\sigma_{2p+2} = y_c^2 \sigma_{2p}$. Donc, σ_{2p+2} est très petit devant σ_{2p}; mais on n'est pas sûr que σ_{2p+2} soit petit devant σ_{2p+1}, qui peut être nul. Ainsi, les σ d'indices pairs vont en décroissant rapidement et les σ d'indices impairs sont petits vis-à-vis de tous les σ d'indices pairs qui les précèdent.

Les μ d'indices pairs ne peuvent être nuls, puisque $\mu_p = \frac{y_b^{p+1} - y_a^{p+1}}{(p+1)g}$, et que y_b est > 0, y_a est < 0.

On a :

$$\frac{\mu_{2p+1}}{\mu_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+2} \frac{y_b^{2p+2} - y_a^{2p+2}}{y_b^{2p+1} - y_a^{2p+1}}.$$

Ce rapport est nul si l'on a $y_a + y_b = 0$; comme $y_a + y_b$ est toujours petit, on voit facilement que sa valeur approchée est $(2p+1)\frac{y_a + y_b}{2}$.

De même,

$$\frac{\mu_{2p+2}}{\mu_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+3} \frac{y_b^{2p+3} - y_a^{2p+3}}{y_b^{2p+1} - y_a^{2p+1}},$$

et sa valeur approchée est $\frac{2p+1}{2p+3} \frac{(y_b - y_a)^2}{4}$. Donc, les μ d'indices pairs vont en décroissant rapidement et les μ d'indices impairs sont petits vis-à-vis de tous les μ d'indices pairs qui les précèdent.

Comparons enfin les μ aux σ. On a

$$\sigma_{2p} = \int_{y_a}^{y_b} h y^{2p} dy = h_c \int_{y_a}^{y_b} y^{2p} dy = g h_c \mu_{2p},$$

h_c étant plus petit que la plus grande profondeur de la section considérée. Donc, μ_{2p} est grand devant σ_{2p}.

$g\mu_{2p+1}$ a pour valeur approchée $(y_a + y_b)\left(\frac{y_b - y_a}{2}\right)^{2p+1}$. D'autre part, σ_{2p} est égal à $h_c g \mu_{2p}$ et a pour valeur approchée $\frac{2h_c}{2p+1}\left(\frac{y_b - y_a}{2}\right)^{2p+1}$. Par suite, on aura

$$\frac{g\mu_{2p+1}}{\sigma_{2p}} = (2p+1)\frac{y_a + y_b}{2h_c}.$$

On ne peut donc rien dire *a priori* sur ce rapport; il ne pourra être petit que si l'axe choisi est presque principal; pour un axe principal, il est nul. Dans chaque cas particulier, il faudra comparer directement μ_{2p+1} à σ_{2p}. En particulier, on a

$$\frac{g\mu_1}{\sigma_0} = \frac{y_a + y_b}{2h_m},$$

h_m étant la profondeur moyenne de la section; donc $g\mu_1$ ne sera négligeable devant σ_0 que si la distance de l'axe choisi au milieu de la section considérée est petite vis-à-vis de la profondeur moyenne.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

De même $g\mu_{2p+2}$ a pour valeur approchée $\frac{2}{2p+3}\left(\frac{\gamma_b-\gamma_a}{2}\right)^{2p+3}$. Donc, on a approximativement $\frac{g\mu_{2p+2}}{\sigma_{2p}}=\frac{2p+1}{2p+3}\frac{1}{4}\frac{(\gamma_b-\gamma_a)^2}{h_c}$. On ne peut donc rien dire *a priori;* ce rapport ne pourra être petit que si le carré de la largeur est petit devant la profondeur moyenne, ou en d'autres termes, si le rapport de la largeur à la profondeur moyenne est petit devant le rapport du rayon terrestre à la largeur. Dans chaque cas particulier, il faudra comparer directement $g\mu_{2p+2}$ à σ_{2p}.

Ces considérations nous guideront quand nous chercherons à ne retenir que les termes principaux de l'équation fondamentale (A).

Les équations exactes. — Nous avons appelé γ_a et γ_b les y du bord du canal; mais si γ_a et γ_b sont des fonctions de x quelconques, l'équation (A) n'en subsiste pas moins. Prenons donc $\gamma_a=0$ et $\gamma_b=\rho$, ρ étant une constante. Les τ_p seront tous nuls, puisque $\gamma'_a=\gamma'_b=0$. Supposons que, depuis l'axe jusqu'au bord, la profondeur soit développable sous la forme

$$h=p_0+yp_1+y^2p_2+\cdots.$$

On trouve alors :

$$\sigma_m=\int_0^\rho hy^m\,dy=p_0\frac{\rho^{m+1}}{m+1}+p_1\frac{\rho^{m+2}}{m+2}+\cdots,$$

$$\upsilon_m=h_b\rho^m=p_0\rho^m+p_1\rho^{m+1}+\cdots,$$

$$g\mu_m=\frac{\rho^{m+1}}{m+1}.$$

En remplaçant dans l'équation (A), on obtient deux séries en ρ qui doivent être égales, quel que soit ρ (entre 0 et γ_b). Il faut donc égaler les coefficients des mêmes puissances de ρ. On obtient ainsi des équations qui ne dépendent pas de m; écrivons seulement les deux premières :

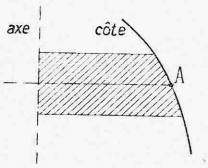
$$(1)\qquad \frac{d}{dx}[(a_0\varphi_0'+ib_0\varphi_1)p_0]+p_1(a_0\varphi_1-ib_0\varphi_0')+p_0(2a_0\varphi_2+a_1\varphi_1-ib_0\varphi_1'-ib_1\varphi_0')=\frac{1}{g}(\lambda^2\varphi_0-w_0),$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[(a_0\varphi_0'+ib_0\varphi_1)p_1+(a_0\varphi_1'+a_1\varphi_0'+2ib_0\varphi_2+ib_1\varphi_1)p_0]\\&+2p_2(a_0\varphi_1-ib_0\varphi_0')+2p_1[2a_0\varphi_2+a_1\varphi_1-ib_0\varphi_1'-ib_1\varphi_0']\\&+2p_0(3a_0\varphi_3+2a_1\varphi_2+a_2\varphi_1-ib_0\varphi_2'-ib_1\varphi_1'-ib_2\varphi_0')\\&=\frac{1}{g}[\beta_1(\lambda^2\varphi_0-w_0)+(\lambda^2\varphi_1-w_1)].\end{aligned}\right.$$

On voit que dans la première de ces équations s'introduisent les fonctions inconnues φ_0, φ_1, φ_2; dans la seconde, il y a en plus φ_3; dans la suivante, φ_4 s'introduirait, etc. Il y a donc toujours deux fonctions inconnues de plus que d'équations, ce qui n'est pas étonnant, puisqu'on n'a pas tenu compte des conditions aux limites.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Si on a calculé les fonctions φ_0 et φ_1 et qu'on veuille avoir la marée en un point particulier de la côte A, il suffira d'exprimer la profondeur sous forme d'un polynôme en y : $h = p_0 + p_1 y + \ldots + p_s y^s$ (les p_i étant des fonctions de x, qu'on pourra même supposer linéaires) dans une petite région entourant la section droite qui passe par A. Les équations exactes donneront φ_2, φ_3 et permettraient ainsi de calculer la marée en A avec une grande approximation, si on connaissait les fonctions φ_0 et φ_1 et leurs dérivées.



Remarque. — On aurait pu obtenir les équations exactes directement, en remplaçant dans l'équation générale des marées toutes les fonctions, y compris h, par leurs développements.

Les équations approchées. — Nous supposons la profondeur nulle aux deux bords et, de plus, que φ est développable en série dans toute la largeur du canal, ce qui tient compte des conditions aux limites sur les bords du canal. Nous confondrons la section $x = \text{Const.}$ avec la section droite du canal par un arc de grand cercle (ce qui serait rigoureux si l'axe du canal était un petit cercle). Alors σ_0 est la section du canal, σ_1 est le produit de σ_0 par l'y du centre de gravité de la section, etc. Divers cas peuvent se présenter, suivant le choix de l'axe et la largeur du canal :

1° μ_1 et μ_2 sont négligeables devant σ_0, ce qui revient à dire que le canal n'est pas trop large et que l'axe est presque principal.

Écrivons l'équation (A) pour $m = 0$, en négligeant σ_1, σ_2 et μ_1, μ_2 :

$$\frac{d}{dx}[(a_0\varphi_0' + ib_0\varphi_1)\sigma_0] = \mu_0(\lambda^2\varphi_0 - w_0). \tag{3}$$

La même équation donnera pour $m = 1$, dans les mêmes conditions,

$$ib_0\varphi_0' - a_0\varphi_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_1 = i\frac{b_0}{a_0}\varphi_0'. \tag{4}$$

En éliminant φ_1 entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi_0'\left(a_0 - \frac{b_0^2}{a_0}\right)\sigma_0\right] = \mu_0(\lambda^2\varphi_0 - w_0).$$

Or, d'après la définition des a_i et des b_i, on a :

$$a_0 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta_0} \qquad \text{et} \qquad ib_0 = \frac{2\omega\cos\theta_0}{\lambda}a_0,$$

d'où

$$a_0^2 - b_0^2 = a_0^2\left[1 + \frac{4\omega^2\cos^2\theta_0}{\lambda^2}\right] = a_0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

L'équation se réduit donc à

$$\frac{d}{dx}[\sigma_0 \varphi_0'] = \mu_0(\lambda^2\varphi_0 - w_0), \tag{5}$$

qui est l'équation classique. Cette équation sera applicable si μ_2 et μ_1 sont négligeables devant σ_0; la condition que $\frac{\mu_1}{\sigma_0}$ doit être petit restreint le choix de l'axe, et ceci est important, car la fonction $\sigma_0(x)$ peut varier notablement si l'on change l'axe, surtout si le canal est assez large. De plus, le calcul précédent donne la fonction φ_1.

2° μ_1 n'est pas négligeable, mais μ_2 est négligeable devant σ_0; c'est-à-dire que l'axe n'est pas principal, mais que le canal n'est pas trop large. L'équation (A) donnera alors pour $m = 0$ et $m = 1$ les deux équations

$$\frac{d}{dx}[(a_0\varphi_0' + ib_0\varphi_1)\sigma_0] = \mu_0(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \mu_1[\beta_1(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + (\lambda^2\varphi_1 - w_1)], \tag{3'}$$

$$(ib_0\varphi_0' - a_0\varphi_1)\sigma_0 = \mu_1(\lambda^2\varphi_0 - w_0), \tag{4'}$$

d'où

$$\varphi_1 = i\frac{b_0}{a_0}\varphi_0' - \frac{\mu_1}{a_0\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0).$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_0\varphi_0'' + \left[\sigma_0' - 2i\lambda^2\mu_1\frac{b_0}{a_0}\right]\varphi_0' + \left[\frac{\lambda^4\mu_1^2}{a_0\sigma_0} - i\lambda^2\frac{d}{dx}\frac{\mu_1 b_0}{a_0} - \lambda^2(\mu_0 + \beta_1\mu_1)\right]\varphi_0 \\ &\quad + i\frac{d}{dx}\left(\mu_1 w_0\frac{b_0}{a_0}\right) - \lambda^2\frac{\mu_1^2 w_0}{a_0\sigma_0} + (\mu_0 + \beta_1\mu_1)w_0 + \mu_1 w_1 = 0. \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

Cette dernière équation est plus compliquée que l'équation classique, mais elle est linéaire. On voit ici l'influence de la courbure de la terre, qui introduit α_0 et β_1, et de la force centrifuge composée, qui introduit b_0.

3° Si le canal est assez large pour que même μ_2 ne soit pas négligeable devant σ_0, on pourra encore traiter le problème; les équations (3) et (4) sont remplacées par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(a_0\varphi_0' + ib_0\varphi_1)\sigma_0] = {} & \mu_0(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \mu_1[\beta_1(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + (\lambda^2\varphi_1 - w_1)] \\ & + \mu_2[\beta_2(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \beta_1(\lambda^2\varphi_1 - w_1) + (\lambda^2\varphi_2 - w_2)] \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a_0\varphi_0' + ib_0\varphi_1)\sigma_0] = {} & [\mu_0 + \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2](\lambda_2\varphi_0 - w_0) \\ & + (\mu_1 + \mu_2\beta_1)(\lambda^2\varphi_1 - w_1) + \mu_2(\lambda^2\varphi_2 - w_2) \end{aligned}\right. \tag{3''}$$

et de même

$$(ib_0\varphi_0' - a_0\varphi_1)\sigma_0 = (\mu_1 + \mu_2\beta_1)(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \mu_2(\lambda^2\varphi_1 - w_1). \tag{4''}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Cette fois, nous avons introduit φ_2; nous écrirons donc une troisième équation en faisant dans (A) $m=2$. Mais alors il faut introduire σ_1, σ_2 et tenir compte de μ_3, μ_4. On obtient ainsi l'équation

$$(5'')\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx}[(a_0\varphi_0' + ib_0\varphi_1)\sigma_2] + 2(ib_0\varphi_0' - a_0\varphi_1)\sigma_1 + 2(ib_0\varphi_1' + ib_1\varphi_0' - 2a_0\varphi_2 - a_1\varphi_1)\sigma_2 \\ &\quad = \mu_2 + \beta_1\mu_3 + \beta_2\mu_4)(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + (\mu_3 + \beta_1\mu_4)(\lambda^2\varphi_1 - w_1) + \mu_4(\lambda^2\varphi_2 - w_2). \end{aligned} \right.$$

De (4''), on tire φ_1 en fonction linéaire de φ_0 et φ_0'; de (5''), on tire φ_2 en fonction linéaire de φ_0'', φ_0', φ_0, φ_1', φ_1, ou encore de φ_0'', φ_0', φ_0. En portant dans (3''), on obtient pour φ_0 une équation linéaire du second ordre. Ici la marée tout le long de l'axe du canal est sensiblement modifiée par la forme des sections, ce qui se traduit par l'introduction des quantités σ_1, σ_2.

Les conditions aux limites. — 1° Si le canal est fermé sur lui-même, tous les φ_i doivent être périodiques.

2° Si le canal débouche dans un océan, tous les φ_i sont donnés à l'entrée.

3° Le canal se termine par une paroi normale à l'axe. On sait que l'on doit avoir

$$\frac{d\varphi}{dn} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Or

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi_0' + y\varphi_1' + y^2\varphi_2' + \dots$$

$$-\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_1 + 2y\varphi_2 + 3y^2\varphi_3 + \dots$$

$$\cos\theta = \alpha_0 + y\alpha_1 + y^2\alpha_2 + \dots.$$

Comme la condition doit être vérifiée quel que soit y, on trouve une série de conditions aux limites

$$\varphi_0' + \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_1 = 0,$$

$$\varphi_1' + \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_1\varphi_1 + 2\alpha_0\varphi_2) = 0,$$

$$\varphi_2' + \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_2\varphi_1 + 2\alpha_1\varphi_2 + 3\alpha_0\varphi_3) = 0, \text{ etc.}$$

4° Le canal se termine en pointe, ou encore la profondeur devient nulle à son extrémité; alors σ_0 est nul et il faudra que les φ_i restent finis.

Nous examinerons en particulier le cas où le canal débouche d'un coté dans un océan et se termine de l'autre par une paroi normale à l'axe. Comment déterminerons-nous φ_0? Nous avons d'abord l'équation (5) ou l'équation (5'), puis φ_0 est connu

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

à une extrémité ; il faut une seconde condition aux limites, qui sera $\varphi_0' + \frac{2w}{\lambda}\alpha_0\varphi_1 = 0$. Cette condition contient φ_1, que nous remplacerons par sa valeur approchée tirée des équations (4) ou (4′). On obtient ainsi la seconde condition aux limites, qui est seulement approchée :

dans le cas de l'équation (5) :

$$\varphi_0' = 0 ;$$

dans le cas de l'équation (5′) :

$$\varphi_0' = \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\alpha_0\mu_1}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0).$$

La valeur approchée trouvée pour φ_1 prend, à l'embouchure du canal, la même valeur que $\frac{ib_0}{a_0}\varphi_0'$, laquelle semble n'avoir aucun rapport avec la *valeur donnée* de φ_1 à cette embouchure. Il s'élève donc un doute sur la question de savoir si $\frac{ib_0}{a_0}\varphi_0'$ est vraiment une valeur approchée de φ_1. Or, on se donne φ_1 pour une section voisine de l'embouchure : mais l'équation approchée $\varphi_1 = \frac{ib_0}{a_0}\varphi_0'$ est valable dans toute l'embouchure ; donc la *valeur donnée* ne peut pas être très différente de $\frac{ib_0}{a_0}\varphi_0'$, et il n'y a pas à s'en occuper. Remarquons encore que la véritable fonction φ_0 ne satisfait qu'approximativement à l'équation (5) et aux conditions aux limites énoncées ; nous admettons qu'elle est peu différente de la fonction trouvée, mais les dérivées de cette dernière peuvent-elles être considérées comme des approximations des dérivées de la véritable fonction φ_0 ? Cela semble moins probable ; nous l'admettrons encore pour les dérivées première et seconde, qui entrent dans l'équation (5), mais la dérivée seconde en particulier peut être beaucoup plus erronnée que la fonction elle-même, car dans l'équation (5) φ_0'' est multiplié par σ_0, qui est beaucoup plus petit que le multiplicateur $\lambda^2\mu_0$ de φ_0. La valeur donnée pour φ_2 par les équations exactes ne peut donc être qu'une approximation grossière ; celle que l'on trouverait pour φ_3 mériterait encore moins de confiance.

Nous allons étudier maintenant le cas où le canal traverse la latitude critique. Et d'abord, nous supposerons que l'axe du canal est le parallèle de latitude critique lui-même.

Les composantes du déplacement d'une molécule sur les axes de coordonnées sont données par les formules

$$u = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

$$v = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

L'équation générale des marées peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+h_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}-h_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\lambda^2\varphi-W}{gk^2}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu)+\frac{\partial}{\partial y}(hv)=\frac{\lambda^2\varphi-W}{gk^2}.$$

Nous admettrons que φ est encore développable sous la même forme que précédemment et qu'il en est de même de u et de v :

$$\varphi=\varphi_0+y\varphi_1+y^2\varphi_2+\ldots,$$
$$u=u_0+yu_1+y^2v_2+\ldots,$$
$$v=v_0+yv_1+y^2u_2+\ldots.$$

Nous obtiendrons les équations exactes en remplaçant dans l'équation φ, u, v par leurs développements, et aussi W, $\frac{1}{k^2}$ et h. On obtient ainsi :

$$(p_0u_0)'+p_0v_1+p_1v_0=\frac{1}{g}(\lambda^2\varphi_0-w_0)$$
$$(p_0u_1+p_1u_0)'+2(p_0v_2+p_1v_1+p_2v_0)=\frac{1}{g}[\beta_1(\lambda^2\varphi_0-w_0)+(\lambda^2\varphi_1-w_1)]$$
$$\text{etc.}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Écrivons l'équation générale sous la forme

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\lambda^2\varphi-W}{gk^2}.$$

En y remplaçant u, v, φ, W et $\frac{1}{k^2}$ par leurs développements, multipliant par $y^m dy$ et intégrant de y_a à y_b, nous obtiendrons l'équation fondamentale suivante :

$$\text{(A)}'\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dx}[\sigma_m u_0+\sigma_{m+1}u_1+\sigma_{m+2}u_2+\ldots]\\ -m[v_0\sigma_{m-1}+v_1\sigma_m+v_2\sigma_{m+1}+v_3\sigma_{m+2}+\ldots]\\ +(v_0\upsilon_m-u_0\tau_m)+(v_1\upsilon_{m+1}-u_1\tau_{m+1})+(v_2\upsilon_{m+2}-u_2\tau_{m+2})+\ldots\\ =\mu_m(\lambda^2\varphi_0-w_0)+\mu_{m+1}[\beta_1(\lambda^2\varphi_0-w_0)+(\lambda^2\varphi_1-w_1)]+\ldots.\end{cases}$$

De cette équation (A′) on pourrait déduire les équations exactes, comme on l'a fait pour l'équation (A); ces équations ont été obtenues directement plus haut. Les équations approchées seront :

1° Si μ_1 et μ_2 sont négligeables devant σ_0,

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}(\sigma_0u_0)=\mu_0(\lambda^2\varphi_0-w_0),\\ v_0=0;\end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

2° Si μ_1 n'est pas négligeable,

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}(\tau_0 u_0) = (\mu_0 + \mu_1\beta_1)(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \mu_1(\lambda^2\varphi_1 - w_1),\\ &v_0\tau_0 = -\mu_1(\lambda^2\varphi_0 - w_0);\end{aligned}\right.$$

et si μ_2 était comparable à τ_0, on procéderait comme il a été indiqué.

Il faut maintenant calculer les u_i et les v_i en fonction des quantités connues et des φ_i. Il suffit de se servir des équations

$$u\left(1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\theta\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{2\omega}{\lambda}\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$v\left(1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\theta\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{2\omega}{\lambda}\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Introduisons les nouvelles quantités r_i définies par

$$1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\theta = r_0 + yr_1 + y^2r_2 + \dots.$$

On aura :

$$r_0 = 1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0^2,$$

$$r_1 = \frac{4\omega^2}{\lambda^2}2\alpha_0\alpha_1,$$

$$r_2 = \frac{4\omega^2}{\lambda^2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2), \quad \text{etc.}\dots.$$

En identifiant terme à terme les équations précédentes, on obtient :

$$u_0r_0 = \varphi_0' + \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_1,$$

$$u_0r_1 + u_1r_0 = \varphi_1' + \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_1\varphi_1 + 2\alpha_0\varphi_2),$$

$$u_0r_2 + u_1r_1 + u_2r_0 = \varphi_2' + \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_2\varphi_1 + 2\alpha_1\varphi_2 + 3\alpha_0\varphi_3), \quad \text{etc.}\dots.$$

et de même

$$v_0r_0 = \varphi_1 - \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0',$$

$$v_0r_1 + v_1r_0 = 2\varphi_2 - \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0'),$$

$$v_0r_2 + v_1r_1 + v_2r_0 = 3\varphi_3 - \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_2' + \alpha_1\varphi_1' + \alpha_2\varphi_0'), \quad \text{etc.}\dots.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Or, nous avons supposé que l'axe du canal est le parallèle de latitude critique, ce qui donne $r_0 \equiv 0$. Mais le déplacement u_0, v_0 est fini; $u_0 r_0$ et $v_0 r_0$ sont donc identiquement nuls. Il en résulte que

$$\varphi_0' + \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 - \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0' = 0.$$

Ces deux équations se réduisent à une seule, puisque $1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0^2 \equiv 0$. On obtient ainsi, dans ce cas singulier, la même équation que dans le cas général. En résolvant par rapport aux u_i et v_i, on trouve :

$$u_0 r_1 = \varphi_1' + \frac{2\omega}{\lambda}(2\alpha_0\varphi_2 + \alpha_1\varphi_1),$$

$$u_1 r_1^2 = (r_1\varphi_2' - r_2\varphi_1') + \frac{2\omega}{\lambda}\Big[3r_1\alpha_0\varphi_3 + (r_1\alpha_1 - r_2\alpha_0)2\varphi_2 + (r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1)\varphi_1\Big],$$

$$u_2 r_1^3 = \Big[r_1^2\varphi_3' - r_1 r_2\varphi_2' + (r_2^2 - r_1 r_3)\varphi_1'\Big] + \frac{2\omega}{\lambda}\Big[r_1^2\alpha_0 4\varphi_4 + (r_1^2\alpha_1 - r_1 r_2\alpha_0)3\varphi_3$$
$$+ \big(r_1^2\alpha_2 - r_1 r_2\alpha_1 + (r_2^2 - r_1 r_3)\alpha_0\big)2\varphi_2 + \big(r_1^2\alpha_3 - r_1 r_2\alpha_2 + (r_2^2 - r_1 r_3)\alpha_1\big)\varphi_1\Big],$$

et de même

$$v_0 r_1 = 2\varphi_2 - \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0'),$$

$$v_1 r_1^2 = (3r_1\varphi_3 - 2r_2\varphi_2) - \frac{2\omega}{\lambda}\Big[r_1\alpha_0\varphi_2' + (r_1\alpha_1 - r_2\alpha_0)\varphi_1' + (r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1)\varphi_0'\Big],$$

$$v_2 r_1^3 = \Big[4r_1^2\varphi_4 - 3r_1 r_2\varphi_3 + 2(r_2^2 - r_1 r_3)\varphi_2\Big] - \frac{2\omega}{\lambda}\Big[r_1^2\alpha_0\varphi_3' + (r_1^2\alpha_1 - r_1 r_2\alpha_0)\varphi_2'$$
$$+ \big(r_1^2\alpha_2 - r_1 r_2\alpha_1 + (r_2^2 - r_1 r_3)\alpha_1\big)\varphi_1' + \big(r_1^2\alpha_3 - r_1 r_2\alpha_2 + (r_2^2 - r_1 r_3)\alpha_1\big)\varphi_0'\Big],$$
$$\text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Remplaçons maintenant les u_i et v_i par leurs valeurs dans les équations approchées trouvées, en tenant compte de $\varphi_1 = \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0'$. Dans le premier cas,

$$v_0 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 2\varphi_2 = \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0);$$

$$r_1 u_0 = \varphi_1' + \frac{2\omega}{\lambda}(2\alpha_0\varphi_2 + \alpha_1\varphi_1) = \varphi_1'\Big(1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0^2\Big) + \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_1\varphi_1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0\alpha_1\varphi_0',$$

et comme

$$1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0^2 = 0,$$

$$r_1 u_0 = \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_1\varphi_1 + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0\alpha_1\varphi_0' = \frac{4\omega^2}{\lambda^2}2\alpha_0\alpha_1\varphi_0' = r_1\varphi_0', \qquad \text{d'où} \qquad u_0 = \varphi_0'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Nous obtenons ainsi l'équation approchée

$$\frac{d}{dx}(\sigma_0\varphi_0') = \mu_0(\lambda^2\varphi_0 - w_0),$$

l'équation exacte

$$\varphi_1 = \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0'$$

et l'équation approchée

$$2\varphi_2 = \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0').$$

Comme conditions aux limites, φ_0 est donné à une extrémité, et à l'autre on doit avoir $u = 0$, et en particulier $u_0 = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{r_1}\left[\varphi_1' + \frac{2\omega}{\lambda}(2\alpha_0\varphi_2 + \alpha_1\varphi_1)\right] = \varphi_0' = 0.$$

Nous trouvons donc exactement les mêmes équations que précédemment.

Dans le second cas, où $\frac{\mu_1}{\sigma_0}$ n'est pas négligeable, on a

$$v_0 r_1\sigma_0 = \sigma_0\left[2\varphi_2 - \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0')\right] = -\mu_1 r_1(\lambda^2\varphi_0 - w_0)$$

et

$$\varphi_1 = \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0';$$

$$r_1 u_0 = \varphi_1' + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0^2\varphi_1' + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0\alpha_1\varphi_0' - \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\mu_1 r_1\alpha_0}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0\alpha_1\varphi_0'$$

$$= r_1\varphi_0' - \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\mu_1 r_1\alpha_0}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0),$$

d'où

$$u_0 = \varphi_0' - \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\mu_1\alpha_0}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0),$$

et on trouve cette fois l'équation

$$\frac{d}{dx}(\sigma_0\varphi_0') - \frac{2\omega\alpha_0}{\lambda}\frac{d}{dx}(\lambda^2\mu_1\varphi_0 - \mu_1 w_0) = (\mu_0 + \mu_1\beta_1)(\lambda^2\varphi_0 - w_0) + \mu_1(2\omega\lambda\alpha_0\varphi_0' - w_1)$$

où

$$\sigma_0\varphi_0'' + \varphi_0'(\sigma_0' - 4\omega\lambda\alpha_0\mu_1) - \varphi_0\left[\frac{2\omega}{\lambda}\frac{d}{dx}(\lambda^2\mu_1\alpha_0) + \lambda^2(\mu_0 + \mu_1\beta_1)\right] + \frac{2\omega}{\lambda}\frac{d}{dx}(\mu_1\alpha_0 w_0)$$
$$+ w_0(\mu_0 + \mu_1\beta_1) + w_1\mu_1 = 0;$$

les conditions aux limites sont : φ_0 donné à une extrémité, et à l'autre $u = 0$, en par-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

ticulier $u_0 = 0$ ou $\varphi_1' + \frac{2\omega}{\lambda}(2\alpha_0\varphi_2 + \alpha_1\varphi_1) = 0$, ce qui donne, en remplaçant φ_1 et φ_2 par leurs valeurs,

$$\varphi_0' = \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\alpha_0\mu_1}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0).$$

Nous trouvons donc encore les mêmes équations que précédemment, c'est-à-dire l'équation (5′) et les conditions aux limites correspondantes; il suffit de faire dans (5′) a_0 infini et de remplacer $\frac{ib_0}{a_0}$ par $\frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0$. Non seulement on trouvera les mêmes fonctions φ_0 et φ_1, mais il en sera de même pour φ_2; faisons la vérification seulement dans le cas le plus compliqué.

Dans le cas où le canal ne traverse pas la latitude critique, on déduit φ_2 de φ_0 et φ_1 par l'équation exacte (1) de la page 10. Remarquons que, par définition,

$$\frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots)(a_0 + a_1 y + \ldots) = i(b_0 + b_1 y + \ldots)$$

et que, par suite,

$$ib_0 = \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0 a_0; \qquad ib_1 = \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_0).$$

On a aussi $1 = (r_0 + r_1 y + \ldots)(a_0 + a_1 y + \ldots)$, et on en déduit que $\frac{a_1}{a_0^2} = -r_1$. Si dans l'équation exacte considérée on remplace φ_1 par la valeur trouvée

$$\varphi_1 = \frac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0' - \frac{\mu_1}{a_0\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0)$$

et si l'on divise par a_0, on trouve

$$p_0\left[2\varphi_2 - \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0') + \frac{\mu_1 r_1}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0)\right] + \frac{A}{a_0} = 0,$$

A représentant un ensemble de termes qui ne devient pas infini en même temps que a_0. Faisons maintenant a_0 infini; l'équation se réduit à

$$2\varphi_2 - \frac{2\omega}{\lambda}(\alpha_0\varphi_1' + \alpha_1\varphi_0') + \frac{\mu_1 r_1}{\sigma_0}(\lambda^2\varphi_0 - w_0) = 0$$

qui est justement l'équation approchée trouvée dans le cas singulier. Il y a donc ici une permutation entre une équation approchée et une équation exacte.

Supposons enfin que le canal traverse la latitude critique sans que son axe soit le parallèle critique. Les équations exactes et approchées trouvées plus haut, qui s'ex-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

priment au moyen de u_i et v_i, subsistent: ce sont seulement les expressions de u_i et v_i qui changent. En effet, r_0 n'étant plus identiquement nul, on aura :

$$\begin{cases} u_0 r_0 = \varphi_0' + \dfrac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_1, \\ u_1 r_0^2 = (r_0\varphi_1' - r_1\varphi_0') + \dfrac{2\omega}{\lambda}(2r_0\alpha_0\varphi_2 + (r_0\alpha_1 - r_1\alpha_0)\varphi_1], \qquad \text{etc...}, \end{cases}$$

et de même

$$\begin{cases} v_0 r_0 = \varphi_1 - \dfrac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0', \\ v_1 r_0^2 = (2r_0\varphi_2 - r_1\varphi_1) - \dfrac{2\omega}{\lambda}[r_0\alpha_0\varphi_1' + (r_0\alpha_1 - r_1\alpha_0)\varphi_0'], \qquad \text{etc....} \end{cases}$$

L'équation approchée $v_0 = 0$ donne toujours $\varphi_1 = \dfrac{2\omega}{\lambda}\alpha_0\varphi_0'$, quel que soit r_0. On en déduit toujours $u_0 r_0 = \varphi_0' + \dfrac{4\omega^2}{\lambda^2}\alpha_0^2\varphi_0' = \varphi_0' r_0$, d'où $u_0 = \varphi_0'$, et cette équation est vérifiée pour toutes les valeurs de r_0, même pour $r_0 = 0$. Il n'y a donc rien à changer dans les résultats précédents; le fait que le canal traverse la latitude critique n'a aucune influence sur les équations.

CHAPITRE III.

Intégration des équations.

M. Poincaré a montré que le problème des marées se ramène au calcul des variations. Je renverrai à son analyse du *Traité des marées*, page 299. Je la compléterai seulement sur un point : la formule subsiste même si la profondeur n'est pas nulle sur les bords et aussi si l'on se donne les valeurs de φ sur une partie du contour. Nous adopterons momentanément les notations employées à cet endroit par M. Poincaré, c'est-à-dire que nous poserons

$$\begin{aligned} h_2 &= i\eta_1, \\ \varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2, \\ \zeta &= \zeta_1 + i\zeta_2, \\ W &= W_1 + iW_2, \end{aligned}$$

en mettant en évidence les quantités réelles et les quantités imaginaires. Ici, φ_1 et φ_2 n'ont pas le même sens que dans le chapitre précédent, mais il n'y a pas de confusion

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

possible. De plus, comme il s'agit ici des marées d'un canal, nous négligeons Π'', potentiel du bourrelet liquide produit par les marées.

La supposition $h = 0$ sur le bord sert à se débarrasser des intégrales de ligne suivantes, provenant d'intégrations par parties :

$$\int \Sigma\left(h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,\delta\varphi_1\,dy\right) + \int \Sigma\left(h_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,\delta\varphi_2\,dy\right)$$
$$- \int \eta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\,\delta\varphi_1\,dy - \int \eta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,\delta\varphi_1\,dx + \int \eta_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\,\delta\varphi_2\,dy + \int \eta_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,\delta\varphi_2\,dx.$$

Prenons le terme en $\delta\varphi_1$; c'est

$$\int \left[h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,dy - h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\,dx - \eta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\,dy - \eta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,dx \right] \delta\varphi_1$$

ou encore

$$\int \delta\varphi_1 \left(h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \eta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) dy - \int \delta\varphi_1 \left(h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) dx. \tag{1}$$

Mais si h n'est pas nulle au bord ; on sait que $\frac{d\varphi}{dn} - \frac{2\omega \cos\theta}{\lambda} \frac{d\varphi}{ds} = 0$, qui peut s'écrire $h_1 \frac{d\varphi}{dn} - i\eta \frac{d\varphi}{ds} = 0$. et qui se décompose en

$$h_1 \frac{d\varphi_1}{dn} + \eta_1 \frac{d\varphi_2}{ds} = 0,$$
$$h_1 \frac{d\varphi_2}{dn} - \eta_1 \frac{d\varphi_1}{ds} = 0.$$

Or, l'expression (1) s'écrit

$$\int h_1 \delta\varphi_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) ds - \int \eta \delta\varphi_1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) ds$$
$$= - \int \delta\varphi_1 \left(h_1 \frac{d\varphi_1}{dn} + \eta_1 \frac{d\varphi_2}{ds} \right) ds = 0 ;$$

le terme en $\delta\varphi_1$ est donc identiquement nul, et il en est de même du terme en $\delta\varphi_2$. Si sur une portion du contour on se donne φ, $\delta\varphi_1$ et $\delta\varphi_2$ sont nuls, et les intégrales de ligne considérées le sont aussi.

L'intégrale J, dont il faut annuler la variation, est (en négligeant Π'')

$$J = \int d\sigma \left[- \sum \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^2}{\partial x} \right) - \eta_1 \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_1)}{\partial(x, y)} - \frac{\zeta_1 \varphi_1 + \zeta_2 \varphi_2}{k^2} \right.$$
$$\left. + g \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}{2\lambda^2 k^2} + \frac{\zeta_1 W_1 + \zeta_2 W_2}{\lambda^2 k^2} \right]$$

(il y a une faute de signe dans l'expression de δJ, à la page 302 de la *Théorie des*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

marées; il faut y changer η_1 de signe). Cette expression se simplifie facilement en tenant compte de $g\zeta_1 = \lambda^2\varphi_1 - W_1$ et $g\zeta_2 = \lambda^2\varphi_2 - W_2$. On obtient simplement :

$$J = -\int d\sigma \left[+ \sum \frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^2}{\partial x}\right) + \eta_1 \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_1)}{\partial(x, y)} + g\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2\lambda^2 k^2}\right].$$

Nous allons calculer cette intégrale J dans le cas d'un canal. Mais pour éviter les confusions, nous poserons désormais

$$\varphi = \Phi + i\overline{\Phi}, \qquad \zeta = Z + i\overline{Z},$$

et par suite

$$-J = \int d\sigma \left[\sum \frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial\Phi^2}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\Phi}^2}{\partial x}\right) + \eta_1 \frac{\partial(\overline{\Phi}, \Phi)}{\partial(x, y)} + g\frac{Z^2 + \overline{Z}^2}{2\lambda^2 k^2}\right],$$

φ étant supposé développable suivant les puissances de y, on aura :

$$\Phi = \Phi_0 + y\Phi_1 + y^2\Phi_2 + \ldots \qquad \text{et} \qquad \overline{\Phi} = \overline{\Phi}_0 + y\overline{\Phi}_1 + y^2\overline{\Phi}_2 + \ldots.$$

Nous poserons de même $w_0 = W_0 + i\overline{W}_0$, et, d'une manière générale :

$$w_p = W_p + i\overline{W}_p.$$

On aura alors $W = (W_0 + yW_1 + \ldots) + i(\overline{W}_0 + y\overline{W}_1 + \ldots)$.

Rappelons que, si le canal ne traverse pas la latitude critique, nous avons posé

$$h_1 = h(a_0 + ya_1 + \ldots) \qquad \text{et} \qquad h_2 = i\eta_1 = hi(b_0 + yb_1 + \ldots),$$

d'où

$$\eta_1 = h(b_0 + yb_1 + \ldots),$$

et enfin

$$\frac{1}{k^2} = 1 + y\rho_1 + y^2\rho_2 + \ldots,$$

$$g\zeta = \lambda^2\varphi - W, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} gZ = (\lambda^2\Phi_0 - W_0) + y(\lambda^2\Phi_1 - W_1) + \ldots, \\ g\overline{Z} = (\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0) + y(\lambda^2\overline{\Phi}_1 - \overline{W}_1) + \ldots; \end{cases}$$

en remplaçant dans J et effectuant l'intégration par rapport à y, on obtient

$$-J = \int dx \left[\begin{array}{l} \left[\frac{a_0}{2}(\Phi'^2_0 + \overline{\Phi}'^2_0 + \Phi_1^2 + \overline{\Phi}_1^2) + b_0(\Phi_1\overline{\Phi}'_0 - \overline{\Phi}_1\Phi'_0)\right]\sigma_0 + H_1\sigma_1 + H_2\sigma_2 + \ldots \\ + \frac{\nu_0}{2\lambda^2}\left[(\lambda^2\Phi_0 - W_0)^2 + (\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)^2\right] \\ + \frac{\nu_1}{2\lambda^2}\Big[[(\lambda^2\Phi_0 - W_0)^2 + (\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)^2]\beta_1 \\ \qquad + 2[(\lambda^2\Phi_0 - W_0)(\lambda^2\Phi_1 - W_1) + (\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)(\lambda^2\overline{\Phi}_1 - \overline{W}_1)]\Big] + K_2\nu_2 + \ldots \end{array} \right]$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

où H_1, H_2, K_2 sont des fonctions de x de forme compliquée; par exemple,

$$H_1 = a_0(\Phi_0'\Phi_1' + \overline{\Phi}_0'\overline{\Phi}_1' + 2\Phi_1\Phi_2 + 2\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2) + \frac{a_1}{2}(\Phi'^2_0 + \overline{\Phi}'^2_0 + \Phi_1^2 + \overline{\Phi}_1^2)$$
$$+ b_0(\Phi_1\overline{\Phi}_1' + 2\Phi_2\overline{\Phi}_0' - \overline{\Phi}_1\Phi_1' - 2\overline{\Phi}_2\Phi_0') + b_1(\Phi_1\overline{\Phi}_0' - \overline{\Phi}_1\Phi_0');$$

$$K_2 = \frac{\beta_1}{2\lambda^2}\left[(\lambda^2\Phi_0 - W_0)^2 + (\lambda_2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)^2\right]$$
$$+ \frac{\beta_1}{\lambda^2}\left[(\lambda^2\Phi_0 - W_0)(\lambda^2\Phi_1 - W_1) + (\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)(\lambda^2\overline{\Phi}_1 - \overline{W}_1)\right]$$
$$+ \frac{1}{2\lambda^2}\Big[2(\lambda^2\Phi_0 - W_0)(\lambda^2\Phi_2 - W_2)$$
$$+ (\lambda^2\Phi_1 - W_1)^2 + 2(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)(\lambda^2\overline{\Phi}_2 - \overline{W}_2) + (\lambda^2\overline{\Phi}_1 - \overline{W}_1)^2\Big] \text{ etc. ...}$$

Si on se borne aux termes en σ_0, μ_0 et μ_1, on obtient une valeur approchée de J, et les règles ordinaires du calcul des variations donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(a_0\Phi_0' - b_0\overline{\Phi}_1)\sigma_0\right] - (\mu_0 + \beta_1\mu_1)(\lambda_2\Phi_0 - W_0) - \mu_1(\lambda^2\Phi_1 - W_1) = 0, \\ \dfrac{d}{dx}\left[(a_0\overline{\Phi}_0' + b_0\Phi_1)\sigma_0\right] - (\mu_0 + \beta_1\mu_1)(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0) - \mu_1(\lambda^2\overline{\Phi}_1 - \overline{W}_1) = 0, \\ (a_0\Phi_1 + b_0\overline{\Phi}_0')\sigma_0 + \mu_1(\lambda^2\Phi_0 - W_0) = 0, \\ (a_0\overline{\Phi}_1 - b_0\Phi_0')\sigma_0 + \mu_1(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0) = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent Φ_1 et $\overline{\Phi}_1$ en fonction de Φ_0 et de $\overline{\Phi}_0$; en portant les valeurs obtenues dans les deux premières, on trouve

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma_0\Phi_0' + \mu_1\frac{b_0}{a_0}(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0)\right]$$
$$- (\mu_0 + \beta_1\mu_1)(\lambda^2\Phi_0 - W_0) + \frac{b_0}{a_0}\lambda^2\mu_1\overline{\Phi}_0' + \frac{\lambda^2\mu_1^2}{a_0\sigma_0}(\lambda^2\Phi_0 - W_0) + \mu_1 W_1 = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[\sigma_0\overline{\Phi}_0' - \mu_1\frac{b_0}{a_0}(\lambda^2\Phi_0 - W_0)\right]$$
$$- (\mu_0 + \beta_1\mu_1)(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0) - \frac{b_0}{a_0}\lambda^2\mu_1\Phi_0' + \frac{\lambda^2\mu_1^2}{a_0\sigma_0}(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0) + \mu_1\overline{W}_1 = 0.$$

En multipliant la seconde de ces équations par i et ajoutant à la première, on retrouve l'équation (5′) de la page 12; cette méthode nous donne donc les mêmes résultats que la première, mais, de plus, elle montre que l'équation (5′) s'obtient en annulant la première variation de l'intégrale J, où l'on conserve seulement les termes en σ_0, μ_1; dans l'expression ainsi obtenue, on peut remplacer Φ_1 et $\overline{\Phi}_1$ par leurs

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

valeurs en fonction de Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$, et on obtient ainsi l'expression approchée suivante de J :

$$-J=\int dx\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sigma_0}{2}(\Phi'^2_0+\overline{\Phi}'^2_0)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu_0+\beta_1\mu_1}{\lambda^2}-\dfrac{\mu_1^2}{a_0\sigma_0}\right)\left[(\lambda^2\Phi_0-W_0)^2+(\lambda^2\overline{\Phi}_0-\overline{W}_0)^2\right]\\ +\dfrac{\mu_1 b_0}{a_0}\left[\Phi_0'(\lambda^2\overline{\Phi}_0-\overline{W}_0)-\overline{\Phi}_0'(\lambda^2\Phi_0-W_0)\right]-\dfrac{\mu_1}{\lambda^2}W_1(\lambda^2\Phi_0-W_0)+\overline{W}_1(\lambda^2\overline{\Phi}_0-\overline{W}_0)\end{array}\right].$$

Si μ_1 est négligeable, on obtient une expression très simple :

$$J=J_0+\overline{J}_0$$

en posant

$$-2J_0=\int dx\left[\sigma_0\Phi'^2_0+\frac{\mu_0}{\lambda^2}(\lambda^2\Phi_0-W_0)^2\right]$$

$$-2\overline{J}_0=\int dx\left[\sigma_0\overline{\Phi}'^2_0+\frac{\mu_0}{\lambda^2}(\lambda^2\overline{\Phi}_0-\overline{W}_0)^2\right].$$

Nous avons donc vérifié directement que les équations du chapitre précédent proviennent de $\delta J=0$; comme ces équations sont valables dans tous les cas, même quand le canal traverse la latitude critique, l'équation $\delta J=0$ est aussi valable dans tous les cas. On aurait pu le voir directement en exprimant J au moyen du déplacement u, v. Posons

$$u=U+i\overline{U}\qquad\text{et}\qquad v=V+i\overline{V},$$

on obtient alors

$$\left(1+\frac{4\omega^2\cos^2\theta}{\lambda^2}\right)U=\frac{\partial\Phi}{dx}-\frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\frac{\partial\overline{\Phi}}{dy}$$

et des équations analogues pour $\overline{U}$, V et $\overline{V}$. Au moyen de ces équations, on peut voir que J se met sous la forme

$$-J=\int d\sigma\left[\frac{h}{2}(U^2+V^2+\overline{U}^2+\overline{V}^2)+\frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}h(U\overline{V}-V\overline{U})+\frac{g(Z^2+\overline{Z}^2)}{2\lambda^2h^2}\right]$$

où rien ne devient plus infini à la latitude critique.

Si maintenant on développe les composantes du déplacement

$$U=U_0+yU_1+\ldots,\qquad V=V_0+yV_1+\ldots,$$
$$\overline{U}=\overline{U}_0+y\overline{U}_1+\ldots,\qquad \overline{V}=\overline{V}_0+y\overline{V}_1+\ldots,$$

et si l'on prend dans J seulement les termes en σ_0, μ_0, μ_1, on obtient une intégrale simple, et en égalant sa variation à zéro, on trouve :

$$\frac{d}{dx}(\sigma_0U_0)=(\mu_0+\beta_1\mu_1)Z_0+\mu_1Z_1,$$
$$\frac{d}{dx}(\sigma_0\overline{U}_0)=(\mu_0+\beta_1\mu_1)\overline{Z}_0+\mu_1\overline{Z}_1,$$
$$\sigma_0V_0+\mu_1Z_0=0,$$
$$\sigma_0\overline{V}_0+\mu_1\overline{Z}_0=0.$$

Il suffit d'exprimer tout au moyen de Φ_0, Φ_1 pour parvenir aux mêmes équations différentielles et à la même expression de J que précédemment.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Les conditions aux limites pour Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$ se déduisent des conditions correspondantes pour φ_0. Par exemple, si le canal débouche dans un océan, Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$ sont donnés; s'il se termine en cul-de-sac, on devra avoir

$$\Phi_0' = -\frac{2\omega}{i\lambda}\frac{\alpha_0\mu_1}{\sigma_0}(\lambda^2\overline{\Phi}_0 - \overline{W}_0),$$

$$\overline{\Phi}_0' = \frac{2\omega}{i\lambda}\frac{\alpha_0\mu_1}{\sigma_0}(\lambda_2\Phi_0 - W_0).$$

Le problème des marées dans un canal se ramenant à un problème de calcul des variations, on pourra, pour trouver une solution approchée de l'équation du problème, employer la méthode de calcul de Ritz.

Ritz a exposé sa méthode d'une manière générale, mais a démontré seulement dans deux cas qu'elle conduit sûrement au résultat exact : dans le cas du problème des plaques encastrées et du problème de Dirichlet. Dans ces deux cas, la forme quadratique qui entre dans l'intégrale est *définie*, et il n'existe pas de *solutions fondamentales*. Mais Ritz remarque que sa méthode donne des résultats numériques exacts même dans des problèmes comme celui des cordes ou des plaques vibrantes. Le problème des marées est dans le même cas que ces derniers problèmes; nous nous bornerons à admettre que la méthode de Ritz s'applique ici. Pourtant, *dans un cas particulier*, nous montrerons comment elle se rattache à la solution donnée par E. Schmidt d'une équation de Fredholm, et aussi comment elle se justifie très simplement en adoptant pour le potentiel une forme approchée particulière.

Remarquons enfin que nous avons une intégrale J contenant deux fonctions inconnues Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$. Dans le cas d'un axe principal, ces fonctions se séparent, et on peut appliquer la méthode de Ritz telle quelle. Mais si l'axe n'est pas principal, il n'en est plus ainsi : les fonctions Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$ entrent par leurs produits sous le signe somme, et elles entrent aussi toutes deux dans chaque condition aux limites. Voici alors comment on pourrait conduire le calcul; on choisira des fonctions ψ_1, ψ_2 ... quelconques, mais telles que l'on suppose Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$ représentables sous la forme

$$\Phi_0 = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \ldots + \alpha_n\psi_n,$$
$$\overline{\Phi}_0 = \overline{\alpha}_1\psi_1 + \overline{\alpha}_2\psi_2 + \ldots + \overline{\alpha}_n\psi_n.$$

On remplacera Φ_0 et $\overline{\Phi}_0$ par ces expressions dans J, et on annulera δJ, *en assujettissant les* α_i *et* $\overline{\alpha}_i$ *à satisfaire aux conditions aux limites*. (Ce procédé ne marcherait plus du tout dans le cas de deux variables, parce qu'il y a alors une infinité de conditions aux limites.) Il est beaucoup plus simple de choisir l'axe de manière qu'il se termine juste au milieu de la paroi qui limite le canal; les conditions aux limites sont alors $\Phi_0' = \overline{\Phi}_0' = 0$; on choisira pour les ψ_i des fonctions satisfaisant aux conditions aux limites, et les α_i et $\overline{\alpha}_i$ ne seront liés par aucune condition.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

CHAPITRE IV.

Les marées de la mer Rouge.

Tous les renseignements numériques ont été tirés du *Manual of Tides* de M. Rollin A. Harris; le *Manual of Tides* est publié dans les *Report of the U. S. Coast and Geodetic Survey* de 1894, 1900, 1904, 1907.

J'ai commencé par dessiner une carte de la mer Rouge, en y traçant les lignes d'égales profondeurs de 100 en 100 fathoms (brasses anglaises) [un fathom égale $1^m 828767$]. J'avais d'abord craint que σ_4 ne soit trop grand et j'ai dessiné un axe non principal, mais passant à peu près par les centres de gravité des sections transversales; nous l'appellerons axe I. Puis, après avoir reconnu les avantages d'un axe principal, j'ai tracé l'axe principal de la mer Rouge, que nous appellerons axe II.

Remarquons que nous avons défini axe principal un axe à égale distance des deux bords *sur la carte spéciale;* j'ai tracé l'axe II à égale distance des deux bords sur une projection de Mercator, mais cela n'a pas d'importance. En effet, l'axe II correspond à une ligne à très peu près également distante des deux bords dans la réalité, comme on le voit facilement; d'autre part, une ligne également distante des deux bords est très voisine d'un axe principal; par exemple, supposons que cette ligne soit un petit cercle. Soit θ_0 la colatitude de ce petit cercle par rapport à son pôle et φ la longitude d'un point; nous avons vu que

$$x = \varphi \sin\theta_0, \qquad y = \sin\theta_0 \operatorname{Log} \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

On voit aisément que

$$\frac{dS}{ds} = \frac{1}{k} = 1 + y \operatorname{cotg}\theta_0 + y^2 \frac{1}{2\sin^2\theta_0} + \dots .$$

Soient l_a et l_b les distances de l'axe aux deux bords; on aura

$$l_a = y_a + \frac{y_a^2}{2}\operatorname{cotg}\theta_0 + \frac{y_a^3}{3}\frac{1}{2\sin^2\theta_0} + \dots ,$$

et de même pour $-l_b$. En appelant $2l$ la largeur du canal, on trouve

$$2l = (y_b - y_a)\left[1 + (y_a^2 + y_a y_b + y_b^2)\frac{1}{6\sin^2\theta_0} + \dots\right].$$

L'axe étant principal, $\qquad y_b = -y_a = \rho,$

d'où $\qquad 2l = 2\rho\left[1 + \frac{\rho^2}{6\sin^2\theta_0}\right].$

En posant $l_a - l_b = 2d$, on trouve

$$2d = \rho^2 \operatorname{cotg}\theta_0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{l} = \frac{\rho}{2}\operatorname{cotg}\theta_0\left(1 - \frac{\rho^2}{6\sin^2\theta_0}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Pour $l = 100$ kilom. et $\theta_0 = 50°$, par exemple, on a $\frac{d}{l} = 0{,}013$, c'est-à-dire que d est tout à fait négligeable. Ce résultat est certainement applicable à la mer Rouge, dont l'axe n'est pas très éloigné d'un petit cercle. — La meilleure raison pour justifier cette manière de faire est que les bords de la mer Rouge sont découpés et qu'il est impossible de tenir compte de tous les golfes et caps; par suite, on ne pourra jamais tracer un axe principal qu'approximativement.

Puis j'ai choisi sur chacun des axes I et II un certain nombre de points, où j'ai mené les sections droites : pour l'axe I j'avais mené 29 sections droites; pour l'axe II j'en ai tracé 18 seulement, m'étant aperçu que la forme de la mer Rouge était ainsi assez bien déterminée. Pour chacune des sections j'ai mesuré son abscisse, c'est-à-dire sa distance à Périm, comptée sur l'axe, la largeur, la profondeur moyenne; pour avoir cette dernière quantité, j'ai considéré toute la région comprise entre les lignes d'égale profondeur de 100 et 200 fathoms, par exemple comme ayant 150 fathoms de profondeur. Ce procédé aurait donné des résultats inexacts entre 0 et 100 fathoms, car il existe de très grandes étendues où la profondeur est très petite; aussi j'ai tracé la ligne d'égale profondeur de 50 fathoms et j'ai séparé la région comprise entre 0 et 100 fathoms en deux régions, que j'ai considérées comme ayant les profondeurs constantes 25 et 75 fathoms. J'ai mesuré aussi la longitude et la latitude des points choisis sur l'axe. Voici les résultats des mesures pour l'axe II seulement :

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	0,0000	0.0043	0,0000078	0,00000034	12°,65	43°.33
2	74	104	78	81	13	43,14
3	268	199	78	155	14	42,55
4	462	297	220	652	15	42,00
5	676	509	283	1439	16	41,23
6	881	527	393	2072	17	40,60
7	1076	453	518	2345	18	40,14
8	1279	459	487	2235	19	39,57
9	1409	420	487	2045	19.38	38,90
10	1551	422	911	3846	20	38,38
11	1727	337	1068	3596	21	38,18
12	1900	371	1037	3848	22	38,00
13	2094	402	974	3912	23	37,57
14	2355	342	974	3329	24	36,44
15	2537	339	895	3032	25	36,08
16	2734	308	942	2902	26	35,47
17	2925	278	911	2530	27	34,89
18	3095	209	518	1083	27,80	34,38

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

La colonne (1) contient les numéros d'ordre des sections ;

— (2) — l'abscisse,
— (3) — la largeur,
— (4) — la profondeur,
— (5) — la section,

exprimées en prenant pour unité de longueur le rayon terrestre (6 367 400 mètres) ;

— (6) — la latitude (Nord) ;
— (7) — la longitude (à l'Est de Greenwich).

Pour l'axe I, la longueur de la mer Rouge est 0,300 ou 1.910 kilomètres ; pour l'axe II, elle est 0,310 ou 1.975 kilomètres.

J'ai vérifié que, pour l'axe I, $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ est inférieur à 0,003 ; pour l'axe II, ce rapport ne dépasse certainement pas beaucoup 0,01, si même il atteint cette valeur : en tous cas $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ est négligeable.

$\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ pour l'axe I est inférieur à 0,0003, et pour l'axe II encore plus petit ou au moins du même ordre.

Comparons maintenant les μ_i à σ_0. Nous prendrons pour *unité de temps* l'heure moyenne ; avec cette unité, le coefficient λ^2 qui entre dans l'équation des marées a une valeur absolue voisine de $\frac{1}{4}$ ou de $\frac{1}{16}$, suivant qu'il s'agit de marées semi-diurnes ou diurnes. En prenant pour unités le mètre et la seconde de temps moyen, nous prendrons $g = 9{,}805$; avec les unités adoptées, nous aurons

$$g = 9{,}805 \times \frac{3600^2}{6\,367\,400} = 19{,}957.$$

Nous trouvons alors que, pour l'axe I, $\frac{\mu_1}{\sigma_0}$ est de l'ordre de grandeur de l'unité ; pour l'axe II, au contraire, ce rapport, s'il n'est pas absolument nul, sera négligeable.

$\frac{\mu_2}{\sigma_0}$, pour l'axe I, atteint la valeur 0,5 qui est une valeur exceptionnelle ; ce rapport a une valeur moyenne un peu plus grande que 0,1. Pour l'axe II, il est du même ordre et plutôt plus petit ; nous négligerons aussi μ_2 devant σ_0, de sorte que nous pourrons appliquer pour l'étude de la mer Rouge l'équation la plus simple.

Potentiel. — Les marées les plus importantes sont :

M_2 onde lunaire principale semi-diurne ;
S_2 onde solaire principale semi-diurne ;
N_2 onde lunaire elliptique majeure ;
K_1 onde luni-solaire diurne (surtout lunaire) ;
O_1 onde lunaire principole diurne ;
P_1 onde solaire diurne.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Le potentiel générateur d'une onde est de la forme

$$\frac{W}{g} = UGC\cos(ct + \alpha);$$

U est le coefficient universel $\frac{3}{2}\frac{M}{E}\left(\frac{a}{e}\right)^3 a$ et est égal à 0^m536.

G est un coefficient égal à $\cos^2\lambda$ pour les marées semi-diurnes, à $\sin 2\lambda$ pour les marées diurnes (λ étant la latitude).

C est le coefficient astronomique; l'onde correspondante est souvent désignée par la lettre C.

c est la vitesse angulaire de l'onde.

α est la phase au temps initial.

En comptant le temps en heures moyennes à partir d'un passage au méridien de Greenwich de la lune fictive correspondant à chaque onde, on a :

	$\frac{W}{g} =$	Valeurs moyennes.	Vitesses angulaires.
Pour M_2	$0^m536\, M_2 \cos^2\lambda \cos(m_2 t - 2\psi)$	$M_2 = 0.45426$	$m_2 = 28^\circ 9841042$
S_2	$0,536\, S_2 \cos^2\lambda \cos(s_2 t - 2\psi)$	$S_2 = 21137$	$s_2 = 30\ 0000000$
N_2	$0.536\, N_2 \cos^2\lambda \cos(n_2 t - 2\psi)$	$N_2 = 08796$	$n_2 = 28\ 4397296$
K_1	$0,536\, K_1 \sin 2\lambda \cos(k_1 t - \psi)$	$K_1 = 26522$	$k_1 = 15.0410686$
O_1	$0,536\, O_1 \sin 2\lambda \cos(o_1 t - \psi)$	$O_1 = 18856$	$o_1 = 13.9430356$
P_1	$0\ 536\, P_1 \sin 2\lambda \cos(p_1 t - \psi)$	$P_1 = 08775$	$p_1 = 14\ 9589314$

ψ étant la longitude comptée positivement à l'ouest de Greenwich. Il faut donc calculer les fonctions $\cos^2\lambda\cos 2\psi$, $\cos^2\lambda\sin 2\psi$ et $\sin 2\lambda\cos\psi$, $\sin 2\lambda\sin\psi$ tout le long de l'axe. Voici le tableau de ces valeurs pour l'axe II :

Nos	$\cos^2\lambda\sin 2\psi$	$\cos^2\lambda\cos 2\psi$	$\sin 2\lambda\sin\psi$	$\sin 2\lambda\cos\psi$	Nos	$\cos^2\lambda\sin 2\psi$	$\cos^2\lambda\cos 2\psi$	$\sin 2\lambda\sin\psi$	$\sin 2\lambda\cos\psi$
1	−0,950	0,055	−0,293	0,310	10	−0,860	0,202	−0,393	0,504
2	947	62	300	319	11	848	206	413	526
3	937	80	317	345	12	834	208	428	548
4	929	98	335	372	13	821	218	439	570
5	907	121	349	399	14	798	246	441	598
6	903	140	364	424	15	781	251	451	619
7	892	153	379	449	16	765	264	458	641
8	879	169	392	475	17	746	275	463	663
9	871	188	393	487	18	730	284	466	681

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

On constate que ces expressions peuvent se mettre sous la forme approchée $a + bx + cx^2$. Voici les valeurs de a, b, c pour chacune des quatre expressions et pour les axes I et II :

	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
$\cos^2\lambda \sin 2\psi$	— 0,9509	— 0,9400	+ 0,470	+ 0,275	+ 0,904	+ 1,362
$\cos^2\lambda \cos 2\psi$	0,0521	0,0607	+ 1,062	+ 0,928	— 0,989	— 0,658
$\sin 2\lambda \sin \psi$	— 0,2961	— 0,2855	— 0,897	— 1,019	+ 1,083	+ 1,431
$\sin 2\lambda \cos \psi$	0,3150	0,3182	+ 1,286	+ 1,182	— 0,187	+ 0,009

Les expressions précédentes sont très bien représentées par $a + bx + cx^2$; les résidus sont plus petits pour l'axe I que pour l'axe II, en tous cas ils sont toujours inférieurs à 0,01, qui est une valeur exceptionnelle. Il en résulte que $\frac{W}{g}$ pourra toujours se mettre sous forme d'une expression du second degré en x.

Les coefficients a, b, c ont été calculés par la méthode des moindres carrés; on voit qu'ils diffèrent assez sensiblement quand on passe d'un axe à l'autre.

Marées à Périm. — Pour étudier les marées dans la mer Rouge, il faut d'abord avoir les marées à Périm. Les seuls renseignements que j'aie trouvés sont les suivants :

L'*établissement*, à la pleine et à la nouvelle lune, est 8^h00^m, c'est-à-dire que la haute mer a lieu à 8 heures à ces époques. De plus, la mer *marne* de 6 $^1/_2$ à 7 $^1/_2$ pieds anglais en marée de vives eaux, et de 5 $^1/_2$ à 6 $^1/_4$ pieds en mortes eaux. Mais les ondes n'ont pas du tout été séparées.

On a des renseignements plus précis pour Aden et Djibouti. On connaît, pour chacune des ondes M_2, S_2, N_2, K_1, O_1, P_1, l'amplitude et le retard de la marée sur sa lune fictive. Voici les données numériques, l'amplitude étant exprimée en pieds anglais :

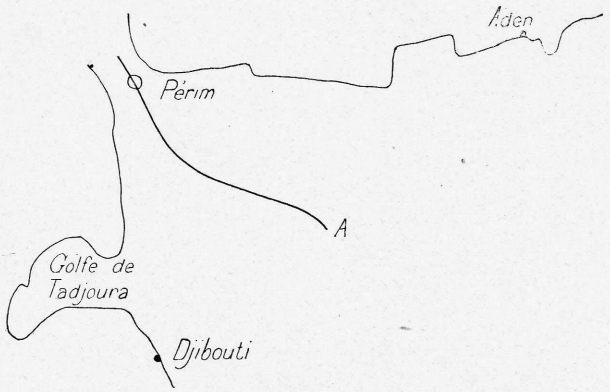
Pour Aden.	Longitude est, 44°59′.			Latitude nord, 12°47′.		
	M_2	S_2	N_2	K_1	O_1	P_1
Amplitude. . . .	1,57	0,69	0,43	1,30	0,66	0,39
Retard.	226°,5	246°	221°	35°	37°	31°

Pour Djibouti.	Longitude est, 43°12′.			Latitude nord, 11°35′.		
	M_2	S_2	N_2	K_1	O_1	P_1
Amplitude. . . .	1,74	0,75	»	1,34	0,66	0,43
Retard.	220°	239°	»	30°	35°	30°

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Les données pour Aden et Djibouti diffèrent très peu. Nous admettrons qu'au point A, situé à égale distance d'Aden et de Djibouti, les données sont les suivantes, moyennes arithmétiques des premières :

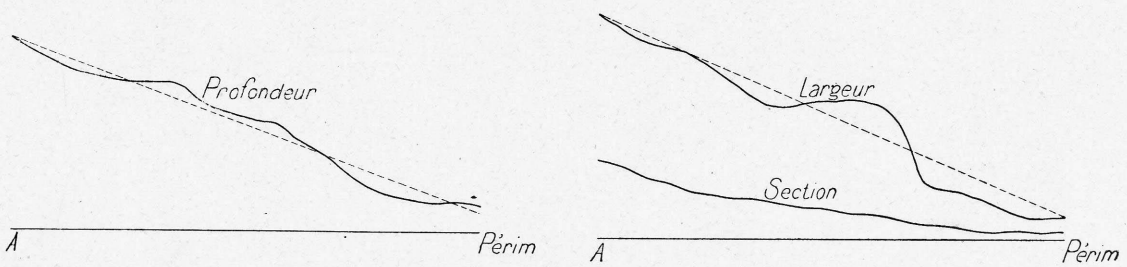
	M_2	S_2	N_2	K_1	O_1	P_1
Amplitude.....	1,65	0,72	0,43	1,32	0,66	0,41
Retard.....	223°	242°,5	221°	32°,5	36°	30°,5



Nous allons traiter la petite portion de mer comprise entre A et Périm comme un canal; un calcul grossier suffira, étant donnée la courte distance de A à Périm.

Prenons pour unité de longueur le rayon terrestre. En choisissant A pour origine des abcisses, on trouve que la largeur, la profondeur et la section sont suffisamment bien représentées par les formules :

$$l = 0{,}0385 - 2{,}1847x,$$
$$h = 0{,}000034 - 0{,}00191x,$$
$$\sigma = 0{,}0000013 - 0{,}000148x + 0{,}00417x^2.$$



Dans ces formules, le golfe de Tadjoura a été négligé.

Nous connaissons la marée au point A; mais à Périm, on ne peut donner aucune condition aux limites; en effet, la masse d'eau qui traverse les détroits de Bal-el-Mandeb dépend de la forme de la mer Rouge au delà de Périm. Mais cela est peu

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

important, parce que l'ouverture formée par les détroits est très étroite; la masse d'eau qui les traverse ne peut pas être très considérable, et par suite des conditions aux limites quelconques à Périm, donneront toujours à très peu près les mêmes résultats. Aussi, nous ne nous préoccuperons pas de ces conditions aux limites, et nous chercherons seulement à satisfaire le mieux possible à l'équation des marées, en adoptant pour la fonction inconnue Φ_0 la forme

$$\Phi_0 = A + Bx + Cx^2.$$

Il faut rendre minimum l'intégrale

$$J_0 = \int_0^{x_0} \left[\sigma \Phi_0'^2 + \frac{l}{g\lambda^2} (\lambda^2 \Phi_0 - W_0)^2 \right] dx,$$

W_0 étant la partie réelle d'une composante isochrone du potentiel. Si on appelle W la somme de cette composante et de la composante conjugée, somme qui est réelle, on aura

$$W_0 = \frac{1}{2} W.$$

La marée correspondant à W sera

$$\zeta = \frac{2\lambda^2 \Phi_0}{g} - \frac{W}{g}.$$

Nous appellerons $[\zeta]$ et $[W]$ la marée et le potentiel au point A.

La constante A sera déterminée par

$$2\lambda^2 A = g[\zeta] + [W].$$

Nous déterminerons ensuite B et C en annulant la première variation de J_0, ce qui donnera les deux équations linéaires suivantes :

$$B\left[\int_0^{x_0} \left(2\sigma + \frac{2l\lambda^2}{g} x^2\right) dx\right] + C\left[\int_0^{x_0} \left(4\sigma x + \frac{2l\lambda^2}{g} x^3\right) dx\right] + \int_0^{x_0} \left(\frac{2l\lambda^2}{g} Ax + \frac{lW}{g} x\right) dx = 0,$$

$$B\left[\int_0^{x_0} \left(4\sigma x + \frac{2l\lambda^2}{g} x^3\right) dx\right] + C\left[\int_0^{x_0} \left(8\sigma x^2 + \frac{2l\lambda^2}{g} x^4\right) dx\right] + \int_0^{x_0} \left(\frac{2l\lambda^2}{g} Ax^2 + \frac{lW}{g} x^2\right) dx = 0,$$

x_0 étant l'abscisse de Périm. On a $x_0 = 0{,}0157$ (environ 100 kilomètres).

Comptons les longitudes à partir du point A, positivement vers l'ouest, et le temps, pour chaque composante, à partir d'un passage au méridien de A de la lune fictive correspondante. On aura alors, pour l'onde M_2,

$$\frac{W}{g} = 0^m,536\, M_2 \cos^2\lambda \cos(m_2 t - 2\psi),$$

et de même pour toutes les autres ondes.

On constate que, du point A à Périm, $\cos^2\lambda \cos 2\psi$ varie de 0,956 à 0,951; $\cos^2\lambda \sin 2\psi$ varie de 0 à 0,023; $\sin 2\lambda \cos\psi$ varie de 0,410 à 0,427; $\sin 2\lambda \sin\psi$ varie de 0 à 0,005, et l'on peut poser :

$$\begin{cases} \cos^2\lambda \cos 2\psi = 0{,}954, \\ \cos^2\lambda \sin 2\psi = 1{,}46\, x. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2\lambda \cos\psi = 0{,}410 + 1{,}08\, x, \\ \sin 2\lambda \sin\psi = 0{,}003. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Au moyen de ces expressions, on peut mettre, pour chaque onde, $\frac{W}{g}$ sous la forme $\alpha + \beta x$. Les valeurs de α nous importent peu; celles de β sont de la forme $\beta_1 \cos ct + \beta_2 \sin ct$, et l'on constate que β_1 et β_2 sont inférieurs pour toutes les ondes à $10^{-10} \times 250$. Il est inutile d'écrire le tableau des valeurs de β, parce que nous verrons plus loin que β n'intervient pas dans le résultat.

La marée M_2 au point A est $1^{\text{pied}},65 \cos(m_2 t - 223°)$.

En prenant pour unité le rayon terrestre. on obtient :

	$[\zeta] = 10^{-10} \times$
Pour M_2	$790 \cos(m_2 t - 223°)$
S_2	$345 \cos(s_2 t - 242°,5)$
N_2	$206 \cos(n_2 t - 221°)$
K_1	$632 \cos(k_1 t - 32°,5)$
O_1	$316 \cos(o_1 t - 36°)$
P_1	$196 \cos(p_1 t - 30°,5)$

Dans les équations qui donnent B et C, remplaçons l et σ par leurs valeurs en fonction de x; en remarquant que $\frac{2\lambda^2}{g} A - \frac{[W]}{g} = [\zeta]$, on obtient :

$$\left[1508 + \frac{2\lambda^2}{g} 1648\right] B + \left[13,09 + \frac{2\lambda^2}{g} 16,8\right] C = -192880[\zeta] + 1648\beta,$$

$$\left[1309 + \frac{2\lambda^2}{g} 1680\right] B + \left[17,96 + \frac{2\lambda^2}{g} 18,92\right] C = -164810[\zeta] + 1680\beta.$$

On voit tout de suite que le terme en β est tout à fait négligeable devant le terme en $[\zeta]$, c'est-à-dire que tout se passe comme si le potentiel était constant dans toute la petite région considérée. Il suffit maintenant de remplacer λ^2 et $[\zeta]$ par leurs valeurs pour chaque onde considérée, et de résoudre les équations en B et C obtenues. En remarquant que $g = 19,957$ et que l'on a :

	$i\lambda =$	$-\frac{2\lambda^2}{g} =$
Pour M_2	0,50587	0,02565
S_2	52360	2748
N_2	49637	2469
K_1	26252	691
O_1	24335	593
P_1	26108	683

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

le calcul s'achève aisément, et l'on trouve les composantes suivantes de la marée à Périm :

Pour M_2	$0^m,53 \cos (m_2 t - 223^\circ)$
S_2	$0^m,23 \cos (s_2 t - 242^\circ,5)$
N_2	$0^m,14 \cos (n_2 t - 221^\circ)$
K_1	$0^m,41 \cos (k_1 t - 32^\circ,5)$
O_1	$0^m,20 \cos (o_1 t - 36^\circ)$
P_1	$0^m,13 \cos (p_1 t - 30^\circ,5)$

La longitude du point A par rapport à Greenwich est $-44^\circ,1$. En comptant le temps à partir du passage au méridien de Greenwich de la lune fictive relative à M_2, on aurait pour cette onde

$$0^m,53 \cos (m_2 t - 223^\circ + 88^\circ,2).$$

Origine du temps. — Comptons maintenant le temps à partir de *minuit moyen de Greenwich précédant janvier 1 de 1905;* une table de M. Harris donne pour toutes les années et pour toutes les composantes l'angle horaire des lunes fictives à minuit moyen précédant janvier 1; en faisant le changement d'origine du temps, on trouve les composantes suivantes :

Pour M_2	$0^m,53 \cos (m_2 t - 223^\circ + 88^\circ,2 + 124^\circ,7)$	$= 0^m,53 \cos (m_2 t - 10^\circ)$
S_2	$0,23 \cos (s_2 t - 242,5 + 88,2)$	$= 0,23 \cos (s_2 t - 154)$
N_2	$0,14 \cos (n_2 t - 221 + 88,2 + 85,4)$	$= 0,14 \cos (n_2 t - 47)$
K_1	$0,41 \cos (k_1 t - 32,5 + 44,1 + 5,3)$	$= 0,41 \cos (k_1 t + 17)$
O_1	$0,20 \cos (o_1 t - 36 + 44,1 + 122,0)$	$= 0,20 \cos (o_1 t + 130)$
P_1	$0,13 \cos (p_1 t - 30,5 + 44,1 + 350,0)$	$= 0,13 \cos (p_1 t + 4)$

Les résultats pour Périm sont donc très voisins de ceux d'Aden. Par suite, il est inutile de vérifier que les résultats trouvés donnent bien pour l'*établissement* et la hauteur des marées les nombres indiqués au début, car ces nombres sont très voisins pour Aden et Périm, la hauteur de la marée étant seulement un peu plus grande pour Périm.

Calcul de la marée M_2 *dans la mer Rouge en l'assimilant à un canal de largeur et de profondeur constantes.* — Nous choisissons pour axe l'axe II et nous adoptons pour origine du temps minuit précédant janvier 1 de 1905 (temps moyen de Greenwich).

Unité de longueur : rayon terrestre. — Unité de temps : heure moyenne.

La largeur moyenne de la mer Rouge est 0,03576 (228 kilomètres), et sa profondeur moyenne est 0,0000659 (420 mètres). Sa longueur totale est 0,31 (1.975 kilomètres). Nous avons vu que le potentiel générateur de la marée M_2 est

$$\frac{W}{g} = 0^m,536\, M_2 \cos^2 \lambda \cos (m_2 t - 2\psi + 124^\circ,72).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

La valeur moyenne de M_2 est 0,45426, et le facteur d'augmentation f est égal, pour l'origine du temps adopté, à 1,0356. Nous aurons donc

$$M_2 = 0{,}45426 \times 1{,}0356 = 0{,}47043.$$

Avec les unités adoptées, on aura :

$$\frac{W}{g} = 10^{-10}\,396\,[\cos^2\lambda \cos 2\psi \cos(m_2 t + 124^0{,}72) + \cos^2\lambda \sin 2\psi \sin(m_2 t + 124{,}72)].$$

D'autre part, nous avons exprimé $\cos^2\lambda \cos 2\psi$ et $\cos^2\lambda \sin 2\psi$ sous la forme $a + bx + cx^2$; nous obtiendrons donc $\frac{W}{g}$ sous cette forme en remplaçant

$$\cos(m_2 t + 124{,}72) = -0{,}5696 \cos m_2 t - 0{,}8219 \sin m_2 t,$$
$$\sin(m_2 t + 124{,}72) = \quad 0{,}8219 \cos m_2 t - 0{,}5696 \sin m_2 t,$$

et en effectuant les calculs

$$\frac{W}{g} = 10^{-10} \cos m_2 t(-319 - 120\,x + 592\,x^2) + 10^{-19} \sin m_2 t(192 - 364\,x - 93\,x^2).$$

Nous avons déjà vu que $g = 19{,}957$.

Pour l'onde M_2, on a $i\lambda = m_2 = 0{,}5058676$.

Nous avons à résoudre

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{gh}\varphi - \frac{W}{gh},$$

et φ étant déterminé, la marée est

$$\zeta = \frac{\lambda^2\varphi - W}{g}.$$

Posons

$$-\lambda^2 = gh\mu^2,$$

d'où l'on tire

$$\mu^2 = 194{,}587 \qquad \text{et} \qquad \mu = 13{,}95.$$

Alors

$$\zeta = -h\mu^2\varphi - \frac{W}{g} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\mu^2\varphi - \frac{W}{gh}.$$

Remplaçons dans cette équation φ en fonction de ζ; nous trouvons :

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \mu^2\zeta + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{W}{g}\right) = 0.$$

Ici, $\frac{W}{g} = A + Bx + Cx^2$, A, B, C étant des constantes connues. L'intégrale générale de l'équation en ζ est

$$\zeta = U \cos \mu x + V \sin \mu x - \frac{2C}{\mu^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Déterminons les constantes U et V par les conditions aux limites. Pour $x = 0$,

$$\zeta = [\zeta], \qquad \text{donc} \qquad U = \frac{2C}{\mu^2} + [\zeta].$$

Pour $x = x_0$, $\frac{d\varphi}{dx}$ est nul. Donc, $\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{W}{g}\right)$ est nul, ce qui donne

$$-U\mu \sin \mu x_0 + V\mu \cos \mu x_0 + (B + 2Cx_0) = 0.$$

On obtient ainsi l'expression suivante de ζ :

$$\zeta = [\zeta] \frac{\cos \mu(x_0 - x)}{\cos \mu x_0} + \frac{4C}{\mu^2 \cos \mu x_0} \sin \frac{\mu x}{2} \sin \mu \left(x_0 - \frac{x}{2}\right) - \frac{B + 2Cx_0}{\mu} \frac{\sin \mu x}{\cos \mu x_0}.$$

En partitulier, au fond de la mer Rouge, la marée sera

$$\zeta_0 = \frac{[\zeta]}{\cos \mu x_0} + \frac{4C \sin^2 \frac{\mu x_0}{2}}{\mu^2 \cos \mu x_0} - \frac{B + 2Cx_0}{\mu} \operatorname{tg} \mu x_0.$$

Effectuons les calculs numériques. On a :

$$B = 10^{-10}(-120 \cos m_2 t - 364 \sin m_2 t),$$
$$C = 10^{-10}(\ 592 \cos m_2 t - \ 93 \sin m_2 t)$$

et $\sin \mu x_0 = -0{,}9257$, $\cos \mu x_0 = -0{,}3782$, $\operatorname{tg} \mu x_0 = 2{,}4475$;

$$\zeta_0 = -2{,}644[\zeta] + 10^{-10}[-65{,}5 \cos m_2 t + 77{,}5 \sin m_2 t],$$

ou en exprimant ζ_0 et $[\zeta]$ en mètres :

$$\zeta_0 = -2{,}644[\zeta] - 0^m{,}042 \cos m_2 t + 0{,}049 \sin m_2 t.$$

Traitons maintenant le même problème par la méthode de Ritz. Il s'agit de rendre minimum l'intégrale

$$-2J_0 = \int_0^{x_0} \left[\sigma_0 \Phi_0'^2 + \frac{\mu_0}{\lambda_2} (\lambda^2 \Phi_0 - W_0)^2 \right] dx.$$

Ici, W_0 est la partie réelle d'une composante isochrone du potentiel; si nous appelons, comme précédemment, W la somme de deux composantes isochrones conjuguées, nous aurons $W_0 = \frac{1}{2} W$; de même, en appelant φ la somme des fonctions correspondant aux deux composantes conjuguées, $\Phi_0 = \frac{1}{2}\varphi$. Nous avons donc à rendre minimum l'intégrale

$$\int_0^{x_0} \left[\varphi'^2 - \frac{1}{g^2 h^2 \mu^2} [gh\mu^2 \varphi + W]^2 \right] dx,$$

où μ a la même signification que plus haut

$$(-\lambda^2 = gh\mu^2).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Posons maintenant

$$\varphi = \Delta + \psi,$$

Δ étant la valeur de φ pour $x = 0$, c'est à-dire

$$\Delta = -\frac{[\zeta]}{h\mu^2} - \frac{[W]}{gh\mu^2},$$

ψ devra rendre minimum l'intégrale

$$I = \int_0^{x_0} \left[\psi'^2 - \mu^2 \psi^2 - 2\left(\mu^2\Delta + \frac{W}{gh}\right)\psi \right] dx;$$

ψ s'annule pour $x = 0$; ψ' s'annule pour $x = x_0$. Nous connaissons une infinité de fonctions satisfaisant à ces conditions aux limites, fonctions qui correspondent aux oscillations propres de la mer Rouge; ce sont :

$$\psi_n = \sin \mu_n x = (-1)^n \cos \mu_n (x_0 - x) \qquad \text{en posant} \qquad \mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2x_0}.$$

Adoptons pour ψ la forme

$$\psi = \alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \ldots + \alpha_n\psi_n = \sum_0^n \alpha_i \psi_i.$$

En remplaçant dans l'intégrale I, on trouve

$$I = \sum_0^n \sum_0^n \alpha_i\alpha_k \int_0^{x_0} (\psi_i'\psi_k' - \mu^2\psi_i\psi_k)\, dx - 2\sum_0^n \alpha_i \int_0^{x_0} \left(\mu^2\Delta + \frac{W}{gh}\right)\psi_i\, dx.$$

Or,

$$\int_0^{x_0} \psi_i'\psi_k'\, dx = \int_0^{x_0} \psi_i\psi_k\, dx = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq k,$$

$$\int_0^{x_0} \psi_i^2\, dx = \frac{x_0}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{x_0} \psi_i'^2\, dx = \mu_i^2 \frac{x_0}{2},$$

$$\int_0^{x_0} \psi_i\, dx = \frac{1}{\mu_i},$$

$$\int_0^{x_0} x\psi_i\, dx = \frac{(-1)^i}{\mu_i^2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{x_0} x^2\psi_i\, dx = -\frac{2}{\mu_i^3} + (-1)^i \frac{2x_0}{\mu_i^2}.$$

Par suite,

$$I = \sum_0^n \alpha_i^2(\mu_i^2 - \mu^2) - 2\sum_0^n \alpha_i \int_0^{x_0} \left(\mu^2\Delta + \frac{W}{gh}\right)\psi_i\, dx.$$

Les valeurs des α qui rendront minimum I sont données par

$$\alpha_i(\mu_i^2 - \mu^2) - \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} \left(\mu^2\Delta + \frac{W}{gh}\right)\psi_i\, dx = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Or, $\frac{W}{g} = A + Bx + Cx^2$ (et par suite $[W] = gA$).

$$\int_0^{x_0} \left(\mu^2\Delta + \frac{W}{gh}\right)\psi_i\,dx = \left(\mu^2\Delta + \frac{A}{h}\right)\frac{1}{\mu_i} + (-1)^i\frac{B + 2Cx_0}{h\mu_i^2} - \frac{2C}{h\mu_i^3}.$$

On connaît donc les α_i; ψ étant connu, la marée sera

$$\zeta = [\zeta] - (Bx + Cx^2) + \frac{2\mu^2}{x_0}\sum_0^n \frac{\psi_i}{\mu_i^2 - \mu^2}\left[\frac{[\zeta]}{\mu_i} - (-1)^i\frac{B + 2Cx_0}{\mu_i^2} + \frac{2C}{\mu_i^3}\right].$$

Calculons la marée par cette formule pour $x = x_0$; on trouve

$$\zeta_0 = [\zeta]\left[1 + \frac{2\mu^2}{x_0}\sum_0^n \frac{(-1)^i}{\mu_i(\mu_i^2 - \mu^2)}\right] - Bx_0 - Cx_0^2$$
$$- (B + 2Cx_0)\frac{2\mu^2}{x_0}\sum_0^n \frac{1}{\mu_i^2(\mu_i^2 - \mu^2)} + \frac{4C\mu^2}{x_0}\sum_0^n \frac{(-1)^i}{\mu_i^3(\mu_i^2 - \mu^2)}.$$

Effectuons les calculs numériques. En faisant successivement $n = 1, 2, 3$, c'est-à-dire en prenant pour ψ les formes

$$\alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1, \qquad \alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2, \qquad \alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \alpha_3\psi_3,$$

on trouve les résultats suivants :

$$\zeta_0 = -2{,}730[\zeta] + 10^{-10}[-64{,}2\cos m_2 t + 73{,}8\sin m_2 t],$$
$$\text{ou } -2{,}619[\zeta] + 10^{-10}[-66{,}1\cos m_2 t + 76{,}6\sin m_2 t],$$
$$\text{ou } -2{,}652[\zeta] + 10^{-10}[-65{,}3\cos m_2 t + 77{,}0\sin m_2 t].$$

Si l'on compare ces résultats avec les résultats exacts, on voit qu'en prenant trois termes, on a déjà une bonne approximation, et en en prenant quatre, une très bonne.

Nous allons montrer que, dans le cas particulier actuel, les approximations successives de Ritz sont convergentes; pour cela, nous montrerons que le problème se ramène à une équation de Fredholm à noyau symétrique, et nous développerons la solution suivant les fonctions principales. Nous trouverons que la $n^{\text{ième}}$ approximation de Ritz n'est pas autre chose que la somme des n premiers termes du développement de la solution, ce qui établira la convergence.

La fonction inconnue φ satisfaisant à l'équation $\varphi'' = -\mu^2\varphi - \frac{W}{gh}$, $\psi = \varphi - \Delta$ (Δ étant défini comme précédemment) satisfera à

$$\psi'' = -\mu^2\psi + \frac{[\zeta]}{h} - \frac{Bx + Cx^2}{h}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

D'autre part, ψ est nul pour $x=0$, et ψ' est nul pour $x=x_0$. Or, si l'on a $\psi''=f(x)$, la solution de cette équation qui satisfait aux conditions aux limites indiquées est

$$\psi=\int_0^{x_0} G(x,y)f(y)dy,$$

en posant

$$G(x,y)=\begin{cases}-y & \text{pour } x>y,\\ -x & \text{pour } x<y.\end{cases}$$

En remplaçant $f(x)$ par le second membre de l'équation en ψ, on voit que ψ satisfait à l'équation suivante :

$$\psi(x)=-\mu^2\int_0^{x_0} G(x,y)\psi(y)dy+\frac{[\zeta]}{h}\int_0^{x_0} G(x,y)dy-\frac{1}{h}\int_0^{x_0} G(x,y)(By+Cy^2)dy.$$

Posons

$$\rho(x)=\frac{1}{h}\int_0^{x_0} G(x,y)\left[[\zeta]-By-Cy^2\right]dy$$

$$=\frac{1}{h}\left[-\frac{C}{12}x^4-\frac{B}{6}x^3+\frac{[\zeta]}{2}x^2+\left(\frac{C}{3}x_0^2+\frac{B}{2}x_0-[\zeta]\right)xx_0\right];$$

E. Schmidt a montré que la solution de l'équation intégrale peut se développer sous la forme

$$\psi(x)=\rho(x)-\frac{2\mu^2}{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n x}{\mu^2-\mu_n^2}\int_0^{x_0}\rho(x)\sin\mu_n x\,dx;$$

en effet, les fonctions principales normées relatives au noyau G sont justement les fonctions $\sqrt{\frac{2}{x_0}}\sin\mu_n x$, et les nombres principaux correspondants sont $-\mu_n^2$. D'autre part, $\rho(x)$ satisfait aux mêmes conditions aux limites que les fonctions $\sin\mu_n x$, et peut se développer sous la forme

$$\rho(x)=\frac{x_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\mu_n x\int_0^{x_0}\rho(x)\sin\mu_n x\,dx.$$

Il en résulte pour ψ l'expression

$$\psi(x)=\frac{2}{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n^2\sin\mu_n x}{\mu_n^2-\mu^2}\int_0^{x_0}\rho(x)\sin\mu_n x\,dx.$$

On peut facilement calculer les intégrales du second membre; on trouve

$$\int_0^{x_0}\rho(x)\sin\mu_n x\,dx=\frac{1}{h}\left[-\frac{2C}{\mu_n^5}+(-1)^n\frac{B+2Cx_0}{\mu_n^4}-\frac{[\zeta]}{\mu_n^3}\right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Or, dans l'application de la méthode de Ritz, nous avons justement trouvé que le coefficient de ψ_n, c'est-à-dire de sin $\mu_n x$, était égal à

$$\frac{1}{h}\frac{2}{x_0}\frac{1}{\mu_n^2-\mu^2}\left[-\frac{2C}{\mu_n^3}+(-1)^n\frac{B+2Cx_0}{\mu_n^2}-\frac{[\zeta]}{\mu_n}\right];$$

le résultat annoncé est donc vérifié.

Remarquons enfin que la méthode de Ritz, toujours dans le cas particulier actuel, se justifie très simplement de la manière suivante :

La fonction ψ satisfait à l'équation

$$\psi''=-\mu^2\psi+\frac{[\zeta]}{h}-\frac{Bx+Cx^2}{h}.$$

Or, cherchons à représenter d'une façon approchée l'expression du second membre $\left[[\zeta]-Bx-Cx^2\right]$ sous la forme $\sum_0^n A_i\psi_i$. Si nous prenons pour mesure de l'approximation l'intégrale du carré de l'écart, c'est-à-dire

$$\int_0^{x_0}\left[[\zeta]-Bx-Cx^2-\sum_0^n A_i\psi_i\right]^2 dx;$$

la meilleure façon de déterminer les A_i sera d'annuler la variation de cette intégrale, ce qui donne les équations

$$\int_0^{x_0}\psi_u\left[[\zeta]-Bx-Cx^2-\sum_0^n A_i\psi_i\right]dx=0$$

ou, puisque $\int_0^{x_0}\psi_i\psi_k dx$ est égal à 0 ou à $\frac{x_0}{2}$, suivant que $i\neq k$ ou que $i=k$:

$$A_i=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\psi_i\left[[\zeta]-Bx-Cx^2\right]dx$$
$$=\frac{2}{x_0}\left[\frac{[\zeta]}{\mu_i}-(-1)^i\frac{B+2Cx_0}{\mu_i^2}+\frac{2C}{\mu_i^3}\right].$$

Si la représentation de la fonction du second membre est jugée suffisamment bonne, on pourra remplacer l'équation en ψ par l'équation

$$\psi''=-\mu^2\psi+\frac{1}{h}\sum_0^n A_i\psi_i.$$

Il est alors évident que la solution cherchée de cette équation est de la forme

$$\psi=\sum_0^n\alpha_i\psi_i;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

en substituant, on trouve $h\alpha_i(\mu_i^2 - \mu^2) = -A_i$, c'est-à-dire justement la même valeur que précédemment.

Mais une objection se pose; ce mode de calcul revient à remplacer $[\zeta]$ par

$$[\zeta] \times \frac{2}{x_0} \sum_0^n \frac{\sin \mu_i x}{\mu_i}; \qquad Bx \text{ par } B \times \frac{2}{x_0} \sum_0^n \frac{(-1)^i \sin \mu_i x}{\mu_i^2}$$

$$\text{et } Cx^2 \text{ par } C\left[\frac{4}{x_0} \sum_0^n \frac{\sin \mu_i x}{\mu_i^3} - 4 \sum_0^n \frac{(-1)^i \sin \mu_i x}{\mu_i^2}\right]$$

ou encore à représenter 1, x, x^2 par une somme de termes de la forme $\alpha_i \sin \mu_i x$; pourra-t-on représenter ces fonctions suffisamment bien par des expressions de cette forme? Il semble d'abord que non, puisque 1, x, x_2 ne satisfont pas aux conditions aux limites auxquelles satisfont les $\sin \mu_i x$; mais il se produit ici quelque chose d'analogue à ce qui arrive lorsqu'on développe en série trigonométrique une fonction qui ne prend pas la même valeur pour $x = 0$ et $x = 2\pi$; le développement représente la fonction dans tout l'intervalle, sauf aux deux extrémités; de même ici les sommes $\Sigma \alpha_i \sin \mu_i x$ représentent assez bien les fonctions, sauf vers les extrémités. Supposons que l'on prenne seulement quatre termes pour représenter 1, x, x^2; voici les résultats numériques :

Nos	(1)	(1′)	(2)	(2′)	(3)	(3′)
1	1	0.00	0,000	0,000	0,0000	0,0000
2	1	18	7	6	1	1
3	1	65	27	26	7	5
4	1	99	46	45	21	16
5	1	117	68	66	46	40
6	1	116	88	89	78	80
7	1	107	108	115	116	168
8	1	95	128	130	164	176
9	1	91	141	142	199	204
10	1	89	155	155	241	240
11	1	86	173	170	298	280
12	1	98	190	194	361	340
13	1	105	209	214	438	424
14	1	109	236	245	555	568
15	1	106	254	265	644	676
16	1	99	273	285	747	780
17	1	95	293	298	856	848
18	1	92	309	300	976	860

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Les colonnes (1), (2), (3) donnent les valeurs des fonctions 1, x, x^2, et les colonnes (1)', (2)', (3)' les valeurs correspondantes des représentations approchées de ces fonctions. L'unité est assez bien représentée partout, sauf pour $x<0{,}03$; cela n'est pas étonnant, puisque l'unité satisfait bien à la même condition aux limites que $\sin \mu_i x$ pour $x = x_0$, mais pas du tout pour $x = 0$; au contraire, x et x^2 sont mieux représentés au commencement du canal qu'au fond (1).

Nous allons maintenant tenir compte des variations de largeur et de profondeur de la mer Rouge. Mais auparavant, remarquons que la rapide convergence des expressions approchées obtenues pour la marée est due à ce que les $\sin \mu_i x$ sont les fonctions principales relatives à l'équation fonctionnelle du problème. En particulier, μ_0 et μ_1 comprennent le nombre μ, et nous avons vu que les termes en $\sin \mu_0 x$ et $\sin \mu_1 x$ donnent déjà une bonne valeur pour la marée. Pour appliquer la méthode de Ritz, il serait bon d'avoir des valeurs approchées des oscillations propres de la mer Rouge, au moins des deux premières. On pourrait espérer y parvenir par la méthode suivante :

Soit un noyau symétrique $G(x, y)$; λ un nombre principal et $\varphi(x)$ la fonction principale normée correspondante, de sorte que

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{x_0} G(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Si G subit une variation δG, il en résultera pour λ et φ des variations $\delta\lambda$ et $\delta\varphi$ déterminées par les équations

$$\delta\lambda = -\lambda^2 \int_0^{x_0}\int_0^{x_0} \delta G\,\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy$$

et

$$\delta\varphi = \Phi(x) + \lambda \int_0^{x_0} \Psi(x, y)\Phi(y)\,dy$$

en posant

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^{x_0} \delta G\,\varphi(y)\,dy$$

et

$$\Psi(x, y) = \lambda \sum \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} - G(x, y),$$

les λ_i et φ_i étant les nombres principaux autres que λ et les fonctions principales correspondantes. Pour la dernière formule, on a admis que $G(x, y)$ est égal à

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\lambda} + \sum \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}.$$

(1) L'identité des trois résultats ne tient évidemment pas à la forme simplifiée adoptée pour W; il est facile de vérifier que le résultat subsiste, W étant quelconque.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Soit maintenant à résoudre l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = A(x)\frac{d\varphi}{dx} + B(x)\varphi + C(x),$$

avec, pour conditions aux limites, $\varphi(o) = o$ et $\varphi'(x_0) = o$.

En posant

$$G(x, y) = \begin{cases} -y & \text{pour} \quad x > y, \\ -x & \text{pour} \quad x < y, \end{cases}$$

comme à la page 39, la fonction cherchée satisfait à l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^{x_0} G(x, y)\left[A(y)\frac{d\varphi(y)}{dy} + B(y)\varphi(y) + C(y)\right]dy,$$

ou, après une intégration par parties,

$$\varphi(x) = \int_0^{x_0} K(x, y)\varphi(y)dy - A_0\varphi_0 x - \int_0^x xC(x)dx - x\int_x^{x_0} C(x)dx,$$

où

$$\varphi_0 = \varphi(x_0), \qquad A_0 = A(x_0) \qquad \text{et} \qquad K(x, y) = B(y)G(x, y) - \frac{d}{dy}[A(y)G(x, y)].$$

Faisons dans cette équation $x = x_0$; il vient

$$\varphi_0(1 + A_0x_0) = \int_0^{x_0} K(x_0, y)\varphi(y)dy - \int_0^{x_0} xC(x)dx.$$

Nous supposerons $1 + A_0x_0 \neq o$, et cette équation nous donnera φ_0; en portant dans l'équation précédente, nous trouverons une équation de Fredholm ordinaire :

$$\varphi(x) = \int_0^{x_0} F(x, y)\varphi(y)dy + \rho(x),$$

où $\rho(x)$ est une fonction connue de x, et où l'on a posé

$$F(x, y) = K(x, y) - \frac{A_0xK(x_0, y)}{1 + A_0x_0}.$$

Dans le cas des marées dans un canal, l'équation à résoudre est

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{l}{g}(\lambda^2\varphi - W),$$

et par suite,

$$\begin{cases} A = -\dfrac{d\,\mathrm{Log}\,\sigma}{dx}, \\ B = \dfrac{\lambda^2}{gh}, \\ C = -\dfrac{W}{gh}, \end{cases}$$

h étant la profondeur moyenne de la section d'abscisse x.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Dans le cas d'une largeur et d'une profondeur constante, le noyau est $\frac{\lambda^2}{gh_0}G(x, y)$, h_0 étant la profondeur moyenne totale du canal. On peut écrire

$$F(x, y) = \frac{\lambda^2}{gh_0} G(x, y) + \delta G_1 + \lambda^2 \delta G_2,$$

δG_1 et δG_2 étant des fonctions de x et de y ne dépendant pas de λ^2. Ces fonctions auront dans tout le canal de petites valeurs numériques, si la largeur et la profondeur sont presque constantes; on pourra donc appliquer les formules qui donnent les variations des nombres et des fonctions principales pour obtenir des valeurs approchées des oscillations propres. Faisons les calculs. On a :

$$\delta G_1 = \begin{cases} \dfrac{A_0 x}{1 + A_0 x_0} \dfrac{d}{dy}\left[y \dfrac{d \operatorname{Log} \sigma(y)}{dy}\right] - x \dfrac{d^2 \operatorname{Log} \sigma(y)}{dy^2} & \text{pour } x < y, \\ \dfrac{d}{dy}\left[y \dfrac{d \operatorname{Log} \sigma(y)}{dy}\right]\left[\dfrac{A_0 x}{1 + A_0 x_0} - 1\right] & \text{pour } x > y \end{cases}$$

et

$$\delta G_2 = \begin{cases} \dfrac{x}{gh(y)}\left[\dfrac{A_0 y}{1 + A_0 x_0} - 1\right] + \dfrac{x}{gh_0} & \text{pour } x < y, \\ \dfrac{y}{gh(y)}\left[\dfrac{A_0 x}{1 + A_0 x_0} - 1\right] + \dfrac{y}{gh_0} & \text{pour } x > y. \end{cases}$$

Dans le cas où δG_1 et δG_2 sont nuls, les nombres principaux sont $\lambda_n^2 = -gh_0 \mu_n^2$, les μ_n étant les nombres déjà vus précédemment $\left[\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2x_0}\right]$, et les fonctions principales normées correspondantes sont $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} \sin \mu_n x$.

On aura donc approximativement

$$\delta(\lambda_n^2) = -gh_0 \delta(\mu_n^2) = -\lambda_n^4 \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \left(\frac{\delta G_1}{\lambda_n^2} + \delta G_2\right) \varphi_n(x) \varphi_n(y)\, dx\, dy$$

ou

$$\frac{x_0}{2} \delta(\mu_n^2) = -\mu_n^2 \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \delta G_1 \sin \mu_n x \sin \mu_n y\, dx\, dy + gh_0 \mu_n^4 \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \delta G_2 \sin \mu_n x \sin \mu_n y\, dx\, dy.$$

Le calcul des deux intégrales qui se présentent ici est long, mais n'offre pas de difficultés. En se servant des identités

$$\int_0^{x_0} f(x)\left[\int_0^x \varphi(y) dy\right] dx = \int_0^{x_0} \varphi(y)\left[\int_y^{x_0} f(x) dx\right] dy$$

et

$$\int_0^{x_0} f(x)\left[\int_x^{x_0} \varphi(y) dy\right] dx = \int_0^{x_0} \varphi(y)\left[\int_0^y f(x) dx\right] dy$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

(la seconde est la même que la première, où on a permuté f et φ, x et y); on peut les mettre sous la forme suivante :

$$\int_0^{x_0}\int_0^{x_0} \delta G_1 \sin \mu_n x \sin \mu_n y\, dx\, dy = \frac{A_0}{(1+A_0x_0)\mu_n^2}\left[1+(-1)^n \mu_n \int_0^{x_0} \operatorname{Log}\sigma(x)\frac{d}{dx}(x\cos\mu_n x)\,dx\right]$$
$$-\int_0^{x_0}\operatorname{Log}\sigma(x)\cos 2\mu_n x\,dx,$$

$$\int_0^{x_0}\int_0^{x_0} \delta G_2 \sin \mu_n x \sin \mu_n y\, dx\, dy = \frac{x_0}{2gh_0}\frac{1}{\mu_n^2}+\frac{(-1)^n}{\mu_n^2}\frac{A_0}{1+A_0x_0}\int_0^{x_0}\frac{x\sin\mu_n x}{gh(x)}dx$$
$$-\frac{1}{\mu_n^2}\int_0^{x_0}\frac{\sin^2\mu_n x}{gh(x)}dx.$$

Pour calculer ces expressions, il faut calculer les intégrales simples

$$\int_0^{x_0}\operatorname{Log}\sigma(x)\,x\sin\mu_n x\,dx, \qquad \int_0^{x_0}\frac{x\sin\mu_n x}{h(x)}dx,$$
$$\int_0^{x_0}\operatorname{Log}\sigma(x)\cos\mu_n x\,dx, \qquad \text{et} \qquad \int_0^{x_0}\frac{\sin^2\mu_n x}{h(x)}dx.$$
$$\int_0^{x_0}\operatorname{Log}\sigma(x)\cos 2\mu_n x\,dx$$

Log désignant un logarithme népérien; ces intégrales peuvent être calculées par quadratures mécaniques.

D'autre part, la fonction $\Phi(x)$ définie précédemment est ici égale à

$$\Phi(x) = \lambda_n^2 \int_0^{x_0}\left(\frac{\delta G_1}{\lambda_n^2}+\delta G_2\right)\varphi_n(y)\,dy$$

ou

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{x_0}}\int_0^{x_0}\delta G_1 \sin\mu_n y\,dy - \sqrt{\frac{2}{x_0}}\,gh_0\mu_n^2\int_0^{x_0}\delta G_2\sin\mu_n y\,dy,$$

et la fonction $\Psi(x, y)$ est égale à

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{gh_0}\left[\frac{2\mu_n^2}{x_0}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_i x\sin\mu_i y}{\mu_i^2(\mu_n^2-\mu_i^2)} - G(x,y)\right].$$

La série $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_i x\sin\mu_i y}{\mu_i^2(\mu_n^2-\mu_i^2)}$ est rapidement convergente, surtout pour $n=0$ ou 1, et on peut se borner à un petit nombre de termes. Si on prend p termes, l'erreur est inférieure à $\left|\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2(\mu_n^2-\mu_i^2)}\right|$, qui est comparable à $\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^4}$ ou à $\left(\frac{x_0}{\pi}\right)^4\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; si l'on fait p égal successivement à 4, 5, 6, $\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ est inférieur à 0,0075, à 0,004,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

à 0,002. Dans le calcul de $\int_0^{x_0} \Psi(x, y)\,\Phi(y)\,dy$ s'introduisent des intégrales doubles que l'on ramènera à des intégrales simples par les identités écrites plus haut. On pourra donc calculer les valeurs numériques des variations des fonctions principales pour un certain nombre de points choisis arbitrairement tout le long de l'axe du canal; cela suffit ensuite pour l'application de la méthode de Ritz. La mer Rouge diffère trop d'un canal régulier pour que l'on puisse appliquer cette méthode; pourtant, j'ai fait les calculs, espérant avoir une indication grossière sur les périodes des oscillations propres; j'ai trouvé :

$$\int_0^{x_0} \operatorname{Log}\sigma(x)\, x \sin\mu_0 x\,dx = -0{,}496, \qquad \frac{1}{g}\int_0^{x_0} \frac{x\sin\mu_0 x}{h(x)}\,dx = 25{,}7,$$

$$\int_0^{x_0} \operatorname{Log}\sigma(x)\cos\mu_0 x\,dx = -2{,}67, \quad \text{et} \quad \frac{1}{g}\int_0^{x_0} \frac{\sin^2\mu_0 x}{h(x)}\,dx = 103{,}5.$$

$$\int_0^{x_0} \operatorname{Log}\sigma(x)\cos 2\mu_0 x\,dx = -0{,}14$$

Pour la mer Rouge, A_0 n'est pas bien déterminé, mais il est compris entre 50 et 100; entre ces limites, $\frac{A_0}{1 + A_0 x_0}$ ne varie presque pas, et on peut le prendre égal à 3,1. On trouve alors $\delta(\mu_0^2) = -6{,}8$.

Cette valeur semble raisonnable; mais si l'on fait le même calcul pour μ_1^2, on trouve $\delta(\mu_1^2) = -279$, valeur tout à fait inacceptable. Aussi nous bornerons-nous, dans ce qui suit, à chercher à représenter la fonction inconnue sous la forme $\sum \alpha_i \sin\mu_i x$.

Nous adopterons l'axe II, qui donne les équations les plus simples; il faut alors rendre minimum l'intégrale

$$\int_0^{x_0} \left[\sigma\varphi'^2 + \frac{l}{g\lambda^2}(\lambda^2\varphi - W)^2\right] dx$$

en posant comme précédemment $\varphi = \psi + \Delta \left[\Delta = \frac{g[\zeta] + [W]}{\lambda^2}\right]$, nous aurons à annuler la variation de

$$I = \int_0^{x_0} \left[\sigma\psi'^2 + \frac{l\lambda^2}{g}\psi^2 - 2\psi\left(l\frac{W}{g} - l\frac{\lambda^2\Delta}{g}\right)\right] dx,$$

et, puisque $\frac{W}{g} = A + Bx + Cx^2$,

$$\frac{W}{g} - \frac{\lambda^2\Delta}{g} = Bx + Cx^2 - [\zeta].$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Remplaçons dans l'expression sous le signe somme la fonction inconnue ψ par $\sum_{i=0} \alpha_i \sin \mu_i x$. L'expression devient

$$\sum\sum \alpha_i \alpha_k X_{ik} - 2 \sum \alpha_i Y_i$$

en posant

$$X_{ik} = \sigma \mu_i \mu_k \cos \mu_i x \cos \mu_k x + \frac{l\lambda^2}{g} \sin \mu_i x \sin \mu_k x$$

et

$$Y_i = l(Bx + Cx^2 - [\zeta]) \sin \mu_i x.$$

Pour calculer l'intégrale I, il faut donc calculer les expressions

$$\sigma_{ik} = \int_0^{x_0} \sigma(x) \cos \mu_i x \cos \mu_k x \, dx,$$

$$l_{ik} = \int_0^{x_0} l(x) \sin \mu_i x \sin \mu_k x \, dx,$$

$$l_i = \int_0^{x_0} l(x) \sin \mu_i x \, dx,$$

$$l_i' = \int_0^{x_0} l(x) x \sin \mu_i x \, dx,$$

$$l_i'' = \int_0^{x_0} l(x) x^2 \sin \mu_i x \, dx,$$

et cela, pour toutes les valeurs de i et de k qui entrent dans l'approximation adoptée. Le nombre des intégrales à calculer est un peu diminué en remarquant que

$$2 \cos \mu_i x \cos \mu_k x \, dx = \cos (i - k) \frac{\pi x}{x_0} + \cos (i + k + 1) \frac{\pi x}{x_0},$$

$$2 \sin \mu_i x \sin \mu_k x \, dx = \cos (i - k) \frac{\pi x}{x_0} - \cos (i + k + 1) \frac{\pi x}{x_0}.$$

J'ai adopté pour la fonction inconnue ψ la forme

$$\psi = \alpha_0 \sin \mu_0 x + \alpha_1 \sin \mu_1 x + \alpha_2 \sin \mu_2 x + \alpha_3 \sin \mu_3 x + \alpha_4 \sin \mu_4 x.$$

Il faut donc faire dans ce qui précède i et k égaux à 0, 1, 2, 3, 4. On a alors à calculer en tout trente-cinq intégrales qui caractériseront suffisamment la mer Rouge au point de vue des marées.

J'ai tracé les courbes représentatives des fonctions à intégrer sur du papier quadrillé à petits carrés; et pour avoir la valeur d'une intégrale, j'ai compté le nombre des carrés compris entre la courbe et l'axe des x, en évaluant les fractions de carrés traversés par la courbe. J'ai trouvé les résultats numériques suivants :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

$\int_0^{x_0} \sigma dx$	$= 10^{-9} \times$	730,5	$\int_0^{x_0} l dx$	$= 10^{-8} \times$	1108,5
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{\pi x}{x_0} dx$		−191	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{\pi x}{x_0} dx$		10
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{2\pi x}{x_0} dx$		−169	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{2\pi x}{x_0} dx$		−166
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{3\pi x}{x_0} dx$		32,5	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{3\pi x}{x_0} dx$		− 98
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{4\pi x}{x_0} dx$		− 42,6	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{4\pi x}{x_0} dx$		−126
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{5\pi x}{x_0} dx$		− 17	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{5\pi x}{x_0} dx$		− 18
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{6\pi x}{x_0} dx$		− 0,6	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{6\pi x}{x_0} dx$		− 7
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{7\pi x}{x_0} dx$		38	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{7\pi x}{x_0} dx$		7
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{8\pi x}{x_0} dx$		6	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{8\pi x}{x_0} dx$		16
$\int_0^{x_0} \sigma \cos \frac{9\pi x}{x_0} dx$		4	$\int_0^{x_0} l \cos \frac{9\pi x}{x_0} dx$		30

l_0	$= 10^{-5} \times$	721	l_0'	$= 10^{-6} \times$	1351	l_0''	$= 10^{-6} \times$ 290.5
l_1		357	l_1'		56	l_1''	− 75
l_2		120	l_2'		− 37	l_2''	2,4
l_3		62	l_3'		12	l_3''	− 2
l_4		− 33	l_4'		− 72	l_4''	− 8

On trouve alors :

l_{00}	$= 10^{-5} \times$	549	$\mu_0^2 \sigma_{00}$	$= 10^{-7} \times$	69
l_{01}		88	$\mu_0 \mu_1 \sigma_{01}$		− 139
l_{02}		− 34	$\mu_0 \mu_2 \sigma_{02}$		− 88
l_{03}		14	$\mu_0 \mu_3 \sigma_{03}$		− 9
l_{04}		− 54	$\mu_0 \mu_4 \sigma_{04}$		− 69
l_{11}		603	$\mu_1^2 \sigma_{11}$		882
l_{12}		68	$\mu_1 \mu_2 \sigma_{12}$		− 449
l_{13}		− 74	$\mu_1 \mu_3 \sigma_{13}$		− 50
l_{14}		− 45	$\mu_1 \mu_4 \sigma_{14}$		111
l_{22}		563	$\mu_2^2 \sigma_{22}$		2290
l_{23}		9	$\mu_2 \mu_3 \sigma_{23}$		− 860
l_{24}		− 86	$\mu_2 \mu_4 \sigma_{24}$		− 751
l_{33}		551	$\mu_3^2 \sigma_{33}$		4834
l_{34}		− 3	$\mu_3 \mu_4 \sigma_{34}$		− 1488
l_{44}		539	$\mu_4^2 \sigma_{44}$		7633

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Les équations qui déterminent les inconnues α_i sont :

$$\sum_k (\mu_i \mu_k \sigma_{ik} + \frac{\lambda^2}{g} l_{ik}) \alpha_k = - [\zeta] l_i + B l_i' + C l_i''.$$

Nous connaissons toutes les quantités qui entrent dans ces équations (nous avons donné plus haut le tableau des valeurs de $-\frac{2\lambda^2}{g}$ pour les différents ordres). Voici les valeurs obtenues pour les coefficients de ces équations pour les ondes M_2, S_2, N_2, K_1, O_1, P_1 (ces coefficients sont, dans l'ordre indiqué, ceux de α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 dans la première équation : puis ceux de α_1, α_2, α_3, α_4 dans la deuxième; puis ceux de α_2, α_3, α_4 dans la troisième, etc. On peut former avec ces coefficients un tableau triangulaire que l'on complétera par symétrie) :

M_2	S_2	N_2	K_1	O_1	P_1
— 635	— 685	— 609	— 121	— 94	— 119
— 252	— 260	— 248	— 169	— 165	— 169
— 44	— 41	— 46	— 76	— 78	— 76
— 27	— 28	— 26	— 14	— 13	— 14
0	5	— 2	— 50	— 53	— 51
108	53	137	674	703	676
— 536	— 542	— 533	— 472	— 469	— 472
45	52	41	— 24	— 28	— 25
169	173	167	127	124	126
1568	1516	1595	2095	2123	2098
— 871	— 872	— 870	— 863	— 863	— 863
— 641	— 633	— 645	— 721	— 726	— 722
4128	4077	4154	4644	4671	4646
— 1484	— 1484	— 1484	— 1487	— 1487	— 1487
6942	6893	6968	7447	7473	7449

Dans les seconds membres, les coefficients de $[\zeta]$, de B et de C sont les mêmes pour toutes les ondes; ce sont les valeurs des l_i, l_i', l_i'' multipliées par un facteur convenable :

	$[\zeta]$	B	C
1re équation.....	— 72100	13510	2905
2e —	— 35700	560	— 750
3e —	— 12000	— 370	24
4e —	— 6200	120	— 20
5e —	— 3300	— 720	— 80

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Prenons d'abord l'onde M_2. Si on prend pour la fonction inconnue ψ deux termes seulement, c'est-à-dire si on substitue dans l'intégrale dont il faut annuler la variation $\psi = \alpha_0 \sin \mu_0 x + \alpha_1 \sin \mu_1 x$, on trouve que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \quad 127[\zeta] - 12\,B - C, \\ \alpha_1 &= -\ 34[\zeta] - 23\,B - 9\,C. \end{aligned}$$

Avec trois termes ($\psi = \alpha_0 \sin \mu_0 x + \alpha_1 \sin \mu_1 x + \alpha_2 \sin \mu_2 x$), on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \quad 222[\zeta] + \ 39\,B + \ 18\,C, \\ \alpha_1 &= -257[\zeta] - 143\,B - \ 54\,C, \\ \alpha_2 &= -\ 89[\zeta] - \ 48\,B - \ 18\,C. \end{aligned}$$

Avec quatre termes :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \quad 304[\zeta] + \ 82\,B + \ 34\,C, \\ \alpha_1 &= -449(\zeta] - 242\,B - \ 90\,C, \\ \alpha_2 &= -170[\zeta] - \ 89\,B - \ 33\,C, \\ \alpha_3 &= -\ 30[\zeta] - \ 16\,B - \ \ 6\,C, \end{aligned}$$

et enfin avec cinq termes :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \quad 360[\zeta] + 109\,B + \ 44\,C, \\ \alpha_1 &= -577[\zeta] - 305\,B - 113\,C, \\ \alpha_2 &= -229[\zeta] - 119\,B - \ 44\,C, \\ \alpha_3 &= -\ 47[\zeta] - \ 24\,B - \ \ 9\,C, \\ \alpha_4 &= -\ 18[\zeta] - \ \ 9\,B - \ \ 3\,C. \end{aligned}$$

On voit que les approximations successives convergent lentement et que même, entre la quatrième et la cinquième, il y a encore un écart assez grand. Cela provient de ce qu'il y a presque résonance pour l'onde M_2, le cas de la résonance étant le plus défavorable possible; c'est pour cela qu'il y aurait eu avantage à avoir les premières oscillations propres de la mer Rouge : en remplaçant sin $\mu_0 x$ et sin $\mu_1 x$ par ces oscillations propres, la convergence aurait certainement été beaucoup plus rapide. Il est admissible que cinq termes suffisent pour M_2. Pour les autres ondes, la convergence est bien meilleure; voici, pour chacune, les valeurs des α quand on prend quatre termes (à gauche) et quand on prend cinq termes (à droite) :

Pour S_2.

	[ζ]	B	C		[ζ]	B	C
α_0	5	— 64	— 21	α_0	12	— 60	— 20
α_1	250	110	42	α_1	231	99	38
α_2	90	41	16	α_2	86	39	15
α_3	14	7	3	α_3	16	8	3
				α_4	5	3	1

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Pour N_2.

	$[\zeta]$	B	C		$[\zeta]$	B	C
α_0	185	19	10	α_0	192	22	11
α_1	— 151	— 93	— 34	α_1	— 168	— 101	— 37
α_2	— 59	— 34	— 12	α_2	— 68	— 39	— 14
α_3	— 11	— 6	— 2	α_3	— 15	— 8	— 3
				α_4	— 6	— 3	— 1

Pour K_1.

	$[\zeta]$	B	C		$[\zeta]$	B	C
α_0	456	— 77	— 14	α_0	452	— 73	— 14
α_1	85	— 21	— 6	α_1	84	— 24	— 6
α_2	33	— 9	— 2	α_2	36	— 10	— 2
α_3	7	— 2	0	α_3	9	— 3	— 1
				α_4	6	— 2	0

Pour O_1.

	$[\zeta]$	B	C		$[\zeta]$	B	C
α_0	547	— 88	— 17	α_0	540	— 86	— 17
α_1	105	— 27	— 7	α_1	105	— 27	— 7
α_2	41	— 10	— 2	α_2	45	— 11	— 2
α_3	8	— 2	— 1	α_3	12	— 3	— 1
				α_4	8	— 2	0

Pour P_1.

	$[\zeta]$	B	C		$[\zeta]$	B	C
α_0	462	— 74	— 14	α_0	457	— 72	— 14
α_1	86	— 24	— 6	α_1	86	— 24	— 6
α_2	33	— 9	— 2	α_2	36	— 10	— 2
α_3	7	— 2	0	α_3	9	— 3	— 1
				α_4	7	— 2	— 0

On voit que l'expression de ψ ne varie pas beaucoup de la quatrième à la cinquième approximation, ce qui est fort rassurant pour la convergence. Pour chacune des ondes, nous avons donné plus haut les valeurs de $[\zeta]$. Je les reproduis ici pour rassembler les éléments numériques nécessaires au calcul de la marée. En prenant pour

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

origine des temps l'instant d'un passage au méridien de Greenwich de la lune fictive de chaque onde, on a :

	$[\zeta] =$ (en mètres).
Pour M_2	$0^m,53 \cos (m_2 t - 135^\circ)$
S_2	$0,23 \cos (s_2 t - 154)$
N_2	$0,14 \cos (n_2 t - 133)$
K_1	$0,41 \cos (k_1 t + 11,5)$
O_1	$0,20 \cos (o_1 t + 8)$
P_1	$0,13 \cos (p_1 t + 13,5)$

Voici quelles sont les valeurs moyennes de B et de C, multipliées par le rayon terrestre R exprimé en mètres :

	BR	CR
Pour M_2	$0^m,236 \cos (m_2 t - 16^\circ,3)$	$0^m,368 \cos (m_2 t - 115^\circ,8)$
S_2	$0,110 \cos (s_2 t - 16,45)$	$0,171 \cos (s_2 t - 115,7)$
N_2	$0,046 \cos (n_2 t - 16,46)$	$0,071 \cos (n_2 t - 115,8)$
K_1	$0,197 \cos (k_1 t - 328,5)$	$0,203 \cos (k_1 t - 90)$
O_1	$0,187 \cos (o_1 t - 309,4)$	$0,145 \cos (o_1 t - 90)$
P_1	$0,074 \cos (p_1 t - 319,4)$	$0,067 \cos (p_1 t - 90)$

Pour avoir les valeurs de BR et de CR, il faut multiplier les valeurs précédentes par le facteur d'augmentation f; d'ailleurs les valeurs de $[\zeta]$ sont aussi très probablement des valeurs moyennes, qu'il faut aussi multiplier par f.

La marée est donnée par la formule

$$g\zeta = \lambda^2 \psi + g[\zeta] + [W] - W$$

ou en remplaçant ψ par $\Sigma \alpha_i \sin \mu_i x$, et posant :

$$\alpha_i = \delta_i [\zeta] + \beta_i B + \gamma_i C,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta = [\zeta] \left[1 + \frac{\lambda^2}{g} \sum \delta_i \sin \mu_i x \right] + B \left[-x + \frac{\lambda^2}{g} \sum \beta_i \sin \mu_i x \right] \\ + C \left[-x^2 + \frac{\lambda^2}{g} \sum \gamma_i \sin \mu_i x \right]. \end{aligned} \right.$$

Si on veut avoir la marée en mètres, il faut multiplier l'expression précédente par le rayon terrestre exprimé en mètres R. Si donc on suppose que $[\zeta]$ est exprimé en mètres, nous aurons la formule définitive

$$\frac{1}{f} \zeta = [\zeta] \left[1 + \frac{\lambda^2}{g} \sum \delta_i \sin \mu_i x \right] + BR \left[-x + \frac{\lambda^2}{g} \sum \beta_i \sin \mu_i x \right] + CR \left[-x^2 + \frac{\lambda^2}{g} \sum \gamma_i \sin \mu_i x \right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Pour chaque onde, nous connaissons β_i, γ_i, δ_i, $\frac{\lambda^2}{g}$, $[\zeta]$, BR et CR; nous avons donc tous les éléments numériques qui entrent dans la formule précédente. Cherchons quelle valeur cette formule donne pour la marée au fond de la mer Rouge; il faut y faire $x = x_0$ et, par suite, $\sin \mu_i x = (-1)^i$:

$$\frac{1}{f}\zeta = [\zeta]\left[1 + \frac{\lambda^2}{g}(\delta_0 - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4)\right] + \mathrm{BR}\left[-x_0 + \frac{\lambda^2}{g}(\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4)\right] + \mathrm{CR}\left[-x_0^2 + \frac{\lambda^2}{g}(\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4)\right].$$

On trouve les marées moyennes suivantes :

Pour l'onde M_2 :

$$\zeta = -8{,}580[\zeta] - 4{,}286\,\mathrm{BR} - 1{,}622\,\mathrm{CR}$$
$$= 4^m{,}75 \cos(m_2 t - 301°{,}8).$$

Pour l'onde S_2 :

$$\zeta = -2{,}979[\zeta] + 1{,}408\,\mathrm{BR} + 0{,}522\,\mathrm{CR}$$
$$= 0^m{,}66 \cos(s_2 t - 140°).$$

Pour l'onde N_2 :

$$\zeta = -2{,}716[\zeta] - 1{,}409\,\mathrm{BR} - 0{,}540\,\mathrm{CR}$$
$$= 0^m{,}39 \cos(n_2 t - 303°).$$

Pour l'onde K_1 :

$$\zeta = -0{,}385[\zeta] - 0{,}110\,\mathrm{BR} - 0{,}065\,\mathrm{CR}$$
$$= 0^m{,}18 \cos(k_1 t - 350°).$$

Pour l'onde O_1 :

$$\zeta = -0{,}411[\zeta] - 0{,}105\,\mathrm{BR} - 0{,}063\,\mathrm{CR}$$
$$= 0^m{,}10 \cos(o_1 t - 350°).$$

Pour l'onde P_1 :

$$\zeta = -0{,}385[\zeta] - 0{,}115\,\mathrm{BR} - 0{,}065\,\mathrm{CR}$$
$$= 0^m{,}06 \cos(p_1 t - 166°).$$

Remarquons d'abord que le calcul fait en assimilant la mer Rouge à un canal de largeur et de profondeur constantes donne un résultat très différent du précédent; en effet, pour l'onde M_2 nous avions trouvé que le coefficient de $[\zeta]$ est $-2{,}644$, tandis qu'ici nous trouvons $-8{,}580$; pour la mer Rouge réelle l'onde M_2 possède une résonance beaucoup plus parfaite que pour un canal régulier.

Dans les résultats précédents, c'est l'onde M_2 qui est de beaucoup prépondérante; l'heure cotidale de la marée est $\frac{301°{,}8}{30} = 10$ heures. Or, l'heure cotidale observée est 4 heures; de plus, l'amplitude de la marée réelle n'est pas du tout de l'ordre de 5 mètres, comme l'indiquerait la formule précédente. Il faut en conclure que, dans

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

le calcul de la marée, un élément important a été négligé, puisque nous obtenons une marée théorique n'ayant aucun rapport avec la marée réelle. A quoi peut tenir cette divergence? Elle ne tient certainement pas à la grande largeur de la mer Rouge, car, dans la première partie de ce travail, nous avons vu que cette largeur n'était pas exagérée : elle est à la limite où l'équation des marées dans un canal est encore applicable, pourvu que l'on choisisse un axe principal. Elle n'est pas due non plus à un défaut de convergence des approximations de Ritz; nous avons vu que ces approximations sont légitimes dans un cas particulier et, dans le cas réel, on voit la convergence se manifester dans les formules numériques. Il est évident que l'élément important négligé c'est le frottement, et il a ici d'autant plus d'importance que nous sommes plus près d'un cas de résonance. Nous avons vu que, dans le cas d'un canal régulier, on a :

$$\zeta = [\zeta]\frac{\cos\mu(x_0 - x)}{\cos\mu x_0} + \frac{4C}{\mu^2\cos\mu x_0}\sin\frac{\mu x}{2}\sin\mu\left(x_0 - \frac{x}{2}\right) - \frac{B + 2Cx_0}{\mu}\frac{\sin\mu x}{\cos\mu x_0}.$$

On voit que, si $\cos\mu x_0$ est voisin de zéro, la marée initiale $[\zeta]$ se trouve considérablement amplifiée, *même si le potentiel est presque constant:* ici, B et C ne sont pas très grands, de sorte que l'oscillation propre de la mer Rouge n'est pas très grande : au contraire, le terme $[\zeta]$ est multiplié par un grand facteur et masque l'oscillation propre. Dans la réalité, c'est le contraire qui se produit; M. Harris remarque que la mer Rouge, dans son ensemble, se comporte à peu près comme un canal fermé dont la longueur est une demi-longueur d'onde d'une onde lunaire se propageant à peu près avec la vitesse due à la profondeur. La marée semi-diurne qui existe sur la ligne nodale provient de la marée initiale; or, cette marée semi-diurne est très faible : c'est que la marée initiale a été en grande partie détruite par le frottement, dont l'influence est d'autant plus grande que la profondeur est plus petite entre Périm et le 15e degré de latitude.

M. Poincaré signale qu'il existe encore une autre inconnue : les marées de la croûte solide du globe. Mais ici il est peu probable qu'elles aient une influence sensible, car la marée initiale $[\zeta]$ est une marée observée; elles pourraient cependant influer sur l'oscillation propre.

Nous avons montré que le frottement a une importance considérable dans le phénomène des marées; il faut donc reprendre l'étude des marées de la mer Rouge en tenant compte du frottement. C'est ce que je me propose de faire dans un travail qui fera suite à celui-ci.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

APPENDICE.

Nous donnons en appendice une carte de la mer Rouge qui est la réduction (dans le rapport de 2 à 1) de celle qui a servi à faire toutes les mesures. Pour ne pas trop la charger, on n'a tracé les lignes d'égale profondeur que de 200 en 200 fathoms. Nous donnons aussi les tableaux de nombres qui ont servi à calculer les valeurs numériques, indiquées dans le texte, des intégrales

$$\int \sigma \cos p \frac{\pi x}{x_0} dx, \quad \int l \cos p \frac{\pi x}{x_0} dx, \quad \int l \sin \mu_n x \, dx.$$

Ces tableaux permettent de tracer facilement les courbes représentatives des fonctions entrant sous le signe $\int$, surtout en remarquant que l'on connaît *a priori* les zéros de $\cos p \frac{\pi x}{x_0}$ et de $\sin \mu_n x$, et aussi leurs max. et min.; pour ces dernières valeurs de x, la courbe est tangente à $y = \sigma(x)$ ou à $y = l(x)$.

Produits de $10^n . \sigma$ *par*

N^{os}	$\cos \frac{\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{2\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{3\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{4\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{5\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{6\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{7\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{8\pi x}{x_0}$	$\cos \frac{9\pi x}{x_0}$
1	34	34	34	34	34	34	34	34	34
2	81	80	79	77	75	73	70	67	63
3	149	133	106	72	33	— 9	— 51	— 88	— 119
4	583	387	108	— 194	— 454	— 617	— 645	— 537	— 312
5	1114	286	— 671	—1325	—1381	— 800	121	1002	1430
6	1299	— 441	—1854	—1883	— 510	1245	2070	1353	— 375
7	1083	—1344	—2326	— 807	1581	2268	514	—1792	—2169
8	606	—1906	—1638	1017	2193	172	—2099	—1310	1388
9	290	—1961	— 851	1720	1339	—1337	—1722	849	1963
10	— 4	—3846	12	3846	— 19	—3846	27	3846	— 31
11	— 644	—3369	1845	2711	—2808	—1705	3420	485	—3592
12	—1335	—2921	3367	581	—3771	2036	2359	—3671	192
13	—2050	—1764	3900	—2320	—1471	3857	—2574	—1162	3791
14	—2424	203	2131	—3306	2683	— 606	—1804	3229	—2903
15	—2553	1264	424	—1980	2905	—2911	1995	— 449	—1243
16	—2705	2139	—1283	250	813	—1779	2481	—2858	2847
17	—2490	2373	—2178	1920	—1596	1227	— 817	380	66
18	—1083	1083	—1083	1083	—1083	1082	—1082	1082	—1082

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Produits de $10^4.l$ par

Nos	$\cos\frac{\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{2\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{3\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{4\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{5\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{6\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{7\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{8\pi x}{x_0}$	$\cos\frac{9\pi x}{x_0}$
1	43	43	43	43	43	43	43	43	43
2	104	103	101	99	97	94	90	86	81
3	192	170	137	93	42	— 12	— 65	— 113	— 153
4	265	176	49	— 88	— 207	— 281	— 294	— 244	— 142
5	394	101	— 237	— 469	— 489	— 288	43	354	506
6	330	— 112	— 472	— 479	— 130	317	526	344	— 95
7	209	— 260	— 449	— 156	305	438	99	— 346	— 419
8	124	— 392	— 336	209	450	35	— 431	— 269	285
9	60	— 403	— 175	353	275	— 275	— 354	174	403
10	0	— 422	1	422	— 2	— 422	3	422	— 3
11	— 60	— 316	173	254	— 263	— 160	320	45	— 337
12	— 129	— 282	325	56	— 364	196	227	— 354	19
13	— 211	— 181	401	— 238	— 151	396	— 265	— 119	390
14	— 249	21	219	— 340	276	— 62	— 185	332	— 298
15	— 285	141	47	— 221	325	— 325	223	— 50	— 139
16	— 287	227	— 136	26	86	— 188	263	— 303	302
17	— 274	261	— 239	211	— 175	135	— 90	42	7
18	— 209	209	— 209	209	— 209	209	— 209	209	— 209

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

Nos	lx	lx^2
1	0,000000	0,000000
2	77	1
3	533	14
4	1372	63
5	3441	233
6	4643	409
7	4874	524
8	5871	751
9	5918	834
10	6967	1015
11	5820	1005
12	7049	1339
13	8418	1763
14	8054	1897
15	8600	2182
16	8421	2302
17	8132	2378
18	0,006469	0,002040

Nos	$27_{\mu_0 x}$	$lx \sin \mu_0 x$	$lx^2 \sin \mu_0 x$	$l \sin \mu_1 x$	$lx \sin \mu_1 x$	$lx^2 \sin \mu_1 x$
1	0,0000	0,000000	0,000000	0,0000	0,000000	0,000000
2	4	3	0	12	9	0
3	[illegible]	72	2	79	212	6
4	69	318	15	192	886	41
5	171	1156	78	440	2976	202
6	228	2006	177	513	4518	398
7	235	2530	272	452	4864	523
8	277	3546	454	427	5466	699
9	275	3876	546	354	4983	702
10	298	4926	718	298	4919	717
11	259	4470	772	166	2875	496
12	305	5787	1099	93	1769	336
13	351	7349	1539	— 17	— 354	— 74
14	318	7490	1764	— 145	— 3423	— 806
15	325	8247	2093	— 222	— 5642	— 1431
16	303	8278	2263	— 261	— 7149	— 1954
17	277	8099	2368	— 268	— 7847	— 2295
18	0,0209	0,006469	0,002040	—0,0209	—0,006469	—0,002040

Nos	$l \sin \mu_2 x$	$lx \sin \mu_2 x$	$lx^2 \sin \mu_2 x$	$l \sin \mu_3 x$	$lx \sin \mu_3 x$	$lx^2 \sin \mu_3 x$	$l \sin \mu_4 x$	$lx \sin \mu_4 x$	$lx^2 \sin \mu_4 x$
1	0,0000	0,000000	0,000000	0,0000	0,000000	0,000000	0,0000	0,000000	0,000000
2	19	14	0	27	20	0	34	25	0
3	125	335	9	162	434	11	187	501	13
4	274	1264	58	296	1369	63	255	1180	54
5	504	3407	231	345	2330	158	30	203	14
6	416	3663	323	8	74	7	— 405	— 3566	— 314
7	183	1969	212	— 283	— 3046	— 328	— 444	— 4781	— 514
8	— 45	— 581	— 74	— 452	— 5783	— 740	— 200	— 2554	— 327
9	— 175	— 2462	— 347	— 403	— 5675	— 800	60	840	118
10	— 299	— 4940	— 720	— 298	— 4912	— 716	300	4947	721
11	— 318	— 5494	— 949	— 53	— 908	— 157	337	5820	1005
12	— 369	— 7014	— 1332	163	3102	589	255	4850	921
13	— 333	— 6979	— 1462	366	7669	1606	— 50	— 1044	— 219
14	— 106	— 2505	— 590	300	7071	1666	— 331	— 7788	— 1834
15	49	1238	314	140	3552	901	— 285	— 7224	— 1833
16	185	5053	1381	— 83	— 2265	— 619	— 30	— 825	— 226
17	251	7343	2147	— 226	— 6611	— 1933	194	5676	1660
18	0,0209	0,006469	0,002040	—0,0209	—0,006469	—0,002040	0,0209	0,006469	0,002040

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ :

LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 1912.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

PAUL APPELL.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Paris, le 1912.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

Toulouse. — Imprimerie et Librairie ÉDOUARD PRIVAT, rue des Arts, 14. — 319.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 51 6