N° D'ORDRE
281.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

Par M. Louis-Victor TURQUAN,

PROFESSEUR AU LYCÉE IMPÉRIAL DU MANS.

THÈSE D'ALGÈBRE. — Résolution numérique sans élimination des équations a plusieurs inconnues.

THÈSE DE MÉCANIQUE. — Recherches sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

Soutenues le 29 ~~Octobre~~ 1866, devant la Commission d'Examen.

MM. CHASLES, *Président.*

PUISEUX, } *Examinateurs.*
SERRET, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1866

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	PONCELET.	
	LEFÉBURE DE FOURCY.	
PROFESSEURS	DUMAS	Chimie.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	CHASLES	Géométrie supérieure
	LE VERRIER	Astronomie.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT	Géologie.
	PUISEUX	Astronomie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	PAUL GERVAIS	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

À

M. Francisque BOUILLIER,

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT, INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'UNIVERSITÉ.

HOMMAGE D'UN ANCIEN CONDISCIPLE.

THÈSE D'ALGÈBRE.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

SANS ÉLIMINATION

DES ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES.

M. Gergonne, dans ses *Annales de Mathématiques* (t. III, années 1812 et 1813), a le premier appelé l'attention des géomètres sur ce sujet. Il disait que « l'élimination, de quelque manière qu'on y procède, est une opération à peu près impraticable, et qu'il serait à désirer que l'on pût déterminer tous les systèmes de valeurs des inconnues qui satisfont à des équations proposées, sans être obligé d'y avoir recours. » Il ajoutait : « C'est là un sujet tout à fait digne de fixer l'attention des géomètres. »

M. Sarrus, dans un Mémoire qui a été inséré dans le *Journal de M. Liouville*, a essayé de résoudre la question et a approché du but. Mais la méthode qu'il propose a l'inconvénient de laisser toujours le calculateur dans l'incertitude.

J'ai repris la question au point où l'avait laissée M. Sarrus, et, au moyen de considérations qui ne s'étaient pas présentées à son esprit, et de quelques théorèmes sur les racines égales des équations transcendantes que je crois nouveaux, je suis parvenu à lever toute incertitude, d'abord pour deux équations à deux inconnues, puis pour un système de n équations à n inconnues.

J'appelle solution de deux équations simultanées à deux inconnues,

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y) = 0,$$

tout système de valeurs de x et de y qui satisfait à la fois aux deux équations.

J'appelle solution de n équations à n inconnues tout système de valeurs de ces inconnues qui satisfait à la fois à toutes les équations proposées.

Je ne m'occuperai que des solutions réelles, je veux dire des solutions où il n'entre que des valeurs réelles pour chaque inconnue.

J'entends par séparer les solutions de n équations à n inconnues,

$$f(x, y, z, \ldots) = 0, \quad F(x, y, z, \ldots) = 0 \ldots,$$

trouver pour chaque valeur de x, de y et de $z, \ldots$, qui constituent une solution, deux limites x_1 et x_2 entre lesquelles la valeur de x soit seule comprise, deux limites y_1 et y_2 entre lesquelles la valeur de y soit seule comprise, deux limites z_1 et z_2 entre lesquelles la valeur de z soit seule comprise, etc.

Je prendrai d'abord deux équations à deux inconnues,

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y) = 0.$$

Si l'on ne considère que l'équation $f(x,y) = 0$, l'inconnue y est une fonction de x déterminée par l'équation elle-même, que je désigne par y, et dont on peut calculer la valeur, ainsi que celle de toutes ses dérivées, pour une valeur quelconque donnée à x. De même, si l'on ne considère que l'équation $F(x, y) = 0$, l'inconnue y est une fonction de x, que je désigne par Y, et dont on peut calculer la valeur, ainsi que celle de toutes ses dérivées, pour une valeur quelconque donnée à x.

Les solutions des deux équations proposées sont évidemment les valeurs de x et de y qui rendent

$$y - Y = 0,$$

de sorte que le problème se réduit à séparer les racines d'une équation qui a pour premier membre la différence de deux fonctions dont on ne peut obtenir la forme explicite, mais dont on peut calculer les valeurs et celles de toutes ses dérivées, correspondantes à une valeur quelconque de x. Pour séparer les racines de cette équation, on peut donc employer la méthode de Fourier, telle que le docteur Stern l'a étendue aux équations transcendantes.

Mais cette méthode a été, dans certains cas, jugée insuffisante. D'ailleurs Fourier suppose que les équations qu'il traite sont débarrassées de leurs racines égales, tandis que celles que je considère ne peuvent subir une semblable préparation. Il m'a donc fallu chercher d'abord des caractères auxquels on puisse reconnaître si une équation $fx = 0$, algébrique ou transcendante, ou même dont on ne peut obtenir la forme explicite du premier membre, a ou n'a pas de racines égales entre deux limites données.

Cette recherche forme la première Partie de ma Thèse.

Dans une seconde Partie, j'expose comment je parviens à séparer les racines de $y - Y = 0$.

Une troisième Partie est consacrée à l'application de cette théorie à quelques exemples.

Enfin, dans une quatrième Partie, j'étends ces procédés à des équations à trois et à un plus grand nombre d'inconnues.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit $fx = 0$ une équation transcendante ou non, fx étant une fonction *bien déterminée;* formons les dérivées successives $f'x$, $f''x$, $f'''x,\ldots$, $f^i x$ de son premier membre; admettons que la dernière $f^i x$ reste finie et continue, et ne change pas de signe lorsque x varie depuis a jusqu'à b, a et b étant deux nombres réels, et a étant plus petit que b; formons les suites que Fourier appelle la *suite* $[a]$ et la *suite* $[b]$, et supposons qu'elles soient terminées ainsi qu'il suit :

	$f^i x \ldots$	$f''x$	$f'x$	fx
$[a]$	$\pm \ldots$	$+$	$-$	$+$
$[b]$	$\pm \ldots$	$+$	$+$	$+$

le nombre des variations étant le même dans l'une et dans l'autre quand on fait abstraction des deux derniers signes (ceux que donnent $f'x$ et fx); on voit que $f''x = 0$ n'a aucune racine entre a et b, que $f'x = 0$ en a une et n'en a qu'une seule, et qu'entre les mêmes limites $fx = 0$ peut en avoir deux ou n'en avoir aucune, ou même avoir deux racines réelles et égales. Il s'agit de reconnaître lequel de ces trois cas a lieu.

Je ferai voir d'abord que, α désignant la racine de $f'x = 0$ qui se trouve entre a et b, le rapport $\frac{(f'a)^2}{fa}$, si les deux racines de $fx = 0$ sont réelles et égales, tend vers $2f''\alpha$ lorsque la limite a se rapproche indéfiniment de α. On a, en effet, en faisant $\varepsilon = \alpha - a$,

$$\frac{(f'a)^2}{fa} = \frac{(f'\overline{\alpha - \varepsilon})^2}{f\overline{\alpha - \varepsilon}} = \frac{f'\alpha^2 - 2\varepsilon f'\alpha f''\alpha + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\left[2(f''\overline{\alpha - \theta\varepsilon})^2 + 2f'\overline{\alpha - \theta\varepsilon}.f'''\overline{\alpha - \theta\varepsilon}\right]}{f\alpha - \varepsilon f'\alpha + \frac{\varepsilon^2}{1.2}f''\overline{\alpha.\theta\varepsilon}};$$

et, comme α est à la fois racine de $fx = 0$ et de $f'x = 0$,

$$\frac{(f'a)^2}{fa} = \frac{2(f''\alpha - \theta\varepsilon)^2 + 2f'\overline{\alpha - \theta\varepsilon}.f'''\overline{\alpha - \theta\varepsilon}}{f''\overline{\alpha - \theta\varepsilon}};$$

or, le second membre de cette égalité, quand a se rapproche indéfiniment de α, ou, ce qui est la même chose, quand ε se rapproche indéfiniment de zéro, tend vers $\frac{2(f''\alpha)^2}{f''\alpha}$ ou vers $2f''\alpha$; ce qu'il fallait démontrer.

Il est évident, en outre, que la limite a se rapprochant indéfiniment de α, le même rapport tend vers zéro, si $fx = 0$ n'a aucune racine entre a et b, tandis que si $fx = 0$ a deux racines réelles c et d (c étant plus petit que d), comprises entre a et b, le même rapport tendra vers l'infini quand a se rapprochera de c, et deviendra négatif quand a, ayant dépassé c, se trouvera entre c et d.

Mais il ne sera pas nécessaire d'attendre que $\frac{(f'a)^2}{fa}$ soit devenu nul, infini ou égal à $2f''\alpha$, pour reconnaître la nature des racines qu'on cherche à séparer. En effet, admettons que les deux limites a et b soient assez rapprochées pour que $f''x$ soit constamment croissante ou décroissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, et soient M et m le plus grand et le plus petit des deux nombres $f''a$ et $f''b$, je démontrerai :

2. Théorème I. — *Si* $\frac{(f'a)^2}{fa} > 2M$, *l'équation* $fx = 0$ *a entre* a *et* b *deux racines réelles et inégales.*

En effet, de ce que $\frac{(f'a)^2}{fa} > 2\mathrm{M}$, on a aussi $\frac{(f'a)^2}{fa} > 2f''a$; par conséquent,

$$2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa} < 0,$$

et

$$\frac{f'a}{fa}\left[2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa}\right] > 0,$$

parce que $\frac{f'a}{fa}$ est négatif, et, comme le premier membre de cette inégalité est la dérivée de $\frac{(f'a)^2}{fa}$, ce rapport est croissant.

Je dis maintenant que la fraction $\frac{(f'a)^2}{fa}$ continuera à croître sans passer par un maximum; en effet, s'il existait entre a et α une valeur ξ de a pour laquelle $\frac{(f'a)^2}{fa}$ serait un maximum, on aurait

$$\frac{f'\xi}{f\xi}\left[2f''\xi - \frac{(f'\xi)^2}{f\xi}\right] = 0,$$

d'où

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} = 2f''\xi,$$

et comme ξ est entre a et α, et que $f''a$ est constamment croissante ou décroissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, il en résulterait

$$2f''\xi < 2\mathrm{M}$$

et

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} < 2\mathrm{M};$$

mais cela est impossible, car $\frac{(f'x)^2}{fx}$ étant croissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = \xi$, on doit avoir

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} > \frac{(f'a)^2}{fa}$$

et

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} > 2\mathrm{M}.$$

Ainsi, a croissant depuis a jusqu'à α, $\frac{(f'a)^2}{fa}$ ne peut passer par un maximum. Cette quantité restera donc plus grande que $2M$; donc elle croîtra jusqu'à l'infini, et, par suite, $fx = 0$ a deux racines réelles et inégales entre a et b.

On peut encore donner une démonstration directe de ce théorème. Soient a, a', a'',... des valeurs successives de a et croissant par degrés insensibles :

$\frac{(f'a')^2}{fa'}$ sera plus grand que $\frac{(f'a)^2}{fa} > 2M$, et par suite croissant;

$\frac{(f'a'')^2}{fa''}$ sera plus grand que $\frac{(f'a')^2}{fa'} > 2M$, et par suite croissant.

. . . . ; et ainsi de suite.

Donc $\frac{(f'a)^2}{fa}$ tend vers une limite plus grande que $2M$, et qui ne peut être que l'infini; donc, etc.

3. THÉORÈME II. — *Lorsque* $\frac{(f'a)^2}{fa} < 2m$, *l'équation* $fx = 0$ *n'a aucune racine entre a et b.*

En effet, de ce que $\frac{(f'a)^2}{fa} < 2m$, on a aussi $\frac{(f'a)^2}{fa} < 2f''a$; par conséquent,

$$2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa} > 0$$

et

$$\frac{f'a}{fa}\left[2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa}\right] < 0,$$

et, comme le premier membre de cette inégalité est la dérivée de $\frac{(f'a)^2}{fa}$, cette dernière fonction est décroissante.

Je dis maintenant que a croissant jusqu'à une certaine valeur aussi rapprochée de α qu'on voudra, $\frac{(f'a)^2}{fa}$ ne peut passer par un minimum; car, s'il en était ainsi, on aurait pour la valeur ξ de a, pour laquelle $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est minimum,

$$\frac{f'\xi}{f\xi}\left[2f''\xi - \frac{(f'\xi)^2}{f\xi}\right] = 0,$$

d'où

$$2f''\xi = \frac{(f'\xi)^2}{f\xi},$$

et, comme $f''x$ est constamment croissante ou décroissante depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, $2f''\xi > 2m$; donc aussi

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} > 2m.$$

Mais cela est impossible, car $\frac{(f'a)^2}{fa}$ étant décroissante depuis $a=a$ jusqu'à $a=\xi$, on a

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} < \frac{(f'a)^2}{fa}$$

et

$$\frac{(f'\xi)^2}{f\xi} < 2m.$$

Ainsi, $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est constamment décroissante depuis $x=a$ jusqu'à $x=\alpha$, et, comme elle est déjà moindre que $2m$, elle doit rester constamment moindre que $2f''\alpha$, et, par conséquent, elle doit tendre vers zéro. Donc $fx=0$ n'a aucune racine entre a et b.

On peut aussi donner de ce théorème une démonstration directe, semblable à celle du numéro précédent.

4. Avant de démontrer les théorèmes suivants, j'expliquerai ce que j'entends en disant que les deux limites a et b, comprenant une racine de l'équation $fx=0$, sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul approché de cette racine.

Soit α la racine de $fx=0$ comprise entre a et b, et faisons $\alpha=a+i$, il en résulte

$$0=f(a+i)=+fa+if'a+\frac{i^2}{2}f''(a+\theta i),$$

d'où

$$i=-\frac{fa}{f'a}-\frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\theta i)}{f'a}.$$

Soit $\frac{1}{10^k}$ l'unité décimale égale ou immédiatement supérieure au quotient qu'on obtient en divisant la plus grande valeur de $f''a$, quand x varie depuis a jusqu'à b, par le plus petit des deux nombres $f'a$ et $f'b$ (l'exposant k pouvant être positif, nul ou négatif); soit aussi $\frac{1}{10^n}$ l'unité décimale égale ou immédiatement supérieure à $b-a$: alors, si $n>k$, en sorte que

$\frac{1}{10^{2n+k}} < \frac{1}{10^n}$, on sait que, si l'on calcule $-\frac{f'a}{fa}$ à moins de $\frac{1}{10^{2n+k}}$, et i avec le même degré d'approximation et dans le même sens, on aura

$$-\frac{fa}{f'a} = i,$$

ce qui revient à prendre $if'a$ pour $-fa$, ou à négliger $if''(a+\theta i)$ devant $f'a$.

C'est lorsque n sera plus grand que $-k$ que je dirai que les limites a et b sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul approché de $fx = 0$, comprise entre a et b.

5. Théorème III. — *Si, a et b étant assez rapprochés pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine α de $f'x = 0$, comprise entre ces deux limites, $fx = 0$ a deux racines réelles inégales entre a et b, le rapport $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est plus grand que* $2M$.

Soit c la plus petite des deux racines de $fx = 0$: on a d'abord $c < \alpha$. Je fais

$$a = \alpha - i, \quad a = c - h, \quad i - h = \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad c = \alpha - \varepsilon,$$

et, par suite,

$$\frac{(f'a)^2}{fa} = \frac{\left[-if''\alpha + \frac{i^2}{2}f'''(\alpha - \theta i)\right]^2}{-hf'c + \frac{h^2}{2}f''c - \frac{h^3}{6}f'''(c - \theta' h)},$$

et, parce qu'on peut négliger $if''\alpha$ devant $f''\alpha$,

$$\frac{(f'a)^2}{fa} = \frac{i^2(f''\alpha)^2}{-hf'c + \frac{h^2}{2}f''c}.$$

Je puis considérer a et h comme des fonctions de i telles, que $\frac{da}{di} = -1$ et $\frac{dh}{di} = 1$; alors les dérivées des deux membres de l'égalité précédente prises par rapport à i seront égales. Or, on a pour celle du second

$$\frac{2i(f''\alpha)^2\left(-hf'c + \frac{h^2}{2}f''c\right) - i^2(f''\alpha)^2(-f'c + hf''c)}{\left(-hf'c + \frac{h^2}{2}f''c\right)^2};$$

qu'on peut transformer comme il suit, à cause de

$$f'c = -\varepsilon f''\alpha \quad \text{et} \quad f''c = f''\alpha,$$

$$\frac{2i(f''\alpha)^3\left(h\varepsilon + \frac{h^2}{2}\right) - i^2(f''\alpha)^3(\varepsilon + h)}{\left(h\varepsilon + \frac{h^2}{2}\right)^2 (f''\alpha)^2},$$

$$\frac{2ih\varepsilon + ih^2 - i^2\varepsilon - i^2 h}{\left(h\varepsilon + \frac{h^2}{2}\right)^2} f''\alpha,$$

$$\frac{-4i\varepsilon^2}{(i^2-\varepsilon^2)^2} f''\alpha.$$

Cette dérivée étant négative, celle du premier membre doit l'être aussi; donc

$$\frac{f'a}{fa}\left[2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa}\right]\frac{da}{di} < 0,$$

et comme $\frac{f'a}{fa}$ et $\frac{da}{di}$ sont négatifs,

$$2f''\alpha - \frac{(f'a)^2}{fa} < 0,$$

d'où

$$\frac{(f'a)^2}{fa} > 2f''a.$$

Donc, dans le cas où $2f''x$ est décroissante de $x=a$ jusqu'à $x=b$, le théorème est démontré.

Il est vrai aussi quand $f''x$ est croissante, car si l'on donne à a dans $\frac{(f'a)^2}{fa}$ et dans $2f''a$ un accroissement négatif $-\varepsilon' = \frac{(i^2-\varepsilon^2)^2}{i\varepsilon^2}\frac{f''a - f''b}{f''\alpha}$, le rapport diminuera d'une quantité àgale à $4f''b - 4f''a$, tandis que $2f''a$ diminuera d'une quantité très-petite par rapport à $2f''b - 2f''a$.

En effet, on aura, en développant $\frac{[f'(a-\varepsilon')]^2}{f(a-\varepsilon')}$ par la formule de Taylor,

$$\frac{(f'a)^2}{fa} - \frac{d}{d\varepsilon'}\frac{(f'a)}{fa}\varepsilon' + \frac{d^2}{d\varepsilon'^2}\frac{[f'(a-\theta\varepsilon')]^2}{f(a-\theta\varepsilon')}\frac{\varepsilon'^2}{2}.$$

Le coefficient de la première puissance de ε' est égal, d'après ce qui pré-

2

cède, à $\frac{4i\varepsilon^2}{(i^2-\varepsilon^2)^2}f''\alpha$; donc on a pour la valeur numérique du terme en ε'

$$4(f''b - f''a) = 4(b-a)f'''a.$$

Quant au terme complémentaire, sa valeur ne s'éloigne pas beaucoup de $\frac{2(3i^2+\varepsilon^2)(i^2-\varepsilon^2)}{i^2\varepsilon^2}(b-a)^2\frac{(f''\alpha)^2}{f''\alpha}$, quantité négligeable devant

$$4f''b - 4f''a = 4(b-a)f'''a.$$

Par conséquent, si $\frac{(f'a)^2}{fa}$ n'est pas supérieur à $2f''b$, $\frac{[f'(a-\varepsilon')]^2}{f'(a-\varepsilon')}$ sera inférieur à $2f''(a-\varepsilon')$; et $fx = 0$, d'après le second théorème, n'aurait aucune racine entre $a-\varepsilon'$ et b, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\frac{(f'a)^2}{fa}$ doit être supérieur à $2f''b$; ce qu'il fallait démontrer.

6. Théorème IV. — *Si, les limites a et b étant assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine α de $f'x = 0$, comprise entre ces limites, l'équation $fx = 0$ n'a aucune racine entre a et b; le rapport $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est plus petit que $2m$.*

On a en effet, dans ce cas,

$$\frac{(f'a)^2}{fa} = \frac{i^2(f''\alpha)^2}{f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha},$$

et les dérivées des deux membres de cette égalité, prises par rapport à i, doivent être égales. Or on a pour celle du second

$$\frac{2i(f''\alpha)^2\left(f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha\right) - i^3(f''\alpha)^3}{\left(f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha\right)^2},$$

ou

$$\frac{2if\alpha(f''\alpha)^2}{\left(f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha\right)^2}.$$

La dérivée du premier membre doit donc être aussi positive; donc

$$\frac{f'a}{fa}\left(2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa}\right)\frac{da}{di} > 0,$$

et comme $\frac{da}{di}$ et $\frac{f'a}{fa}$ sont négatifs,

$$2f''a - \frac{(f'a)^2}{fa} > 0,$$

ou

$$\frac{(f'a)^2}{fa} < 2f''a.$$

Ainsi, dans le cas où $f''x$ sera croissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, le théorème est démontré.

Pour faire voir qu'il est vrai aussi dans le cas où $f''x$ est décroissante, nous remarquerons d'abord que nous admettons que $\frac{(f'a)^2}{fa}$ peut être supérieur à $2f''b$, et que dès lors nous regardons cette fraction comme un nombre fini de même ordre que $2f''b$. $(f'a)^2$ et fa sont donc des quantités de même ordre; de plus, comme on a $f'a = if''a$, on voit que $f'a$ est une quantité de même ordre que i: donc $(f'a^2)$ et fa sont des quantités de même ordre que i^2; il en est donc de même de $f\alpha$.

Ainsi on pourra désigner $\frac{\frac{i}{2}f\alpha f''\alpha}{\left(f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha\right)^2}$ par $\frac{1}{k}$, k étant une quantité de même ordre que i, et la dérivée de $\frac{i^2(f''\alpha)^2}{f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha}$ pourra s'écrire $\frac{4f''\alpha}{k}$.

Donnons maintenant à a dans $\frac{(f'a)^2}{fa}$ et dans $2f''a$ un accroissement négatif $-\varepsilon' = \frac{k(f''b - f''a)}{f''\alpha}$, le rapport augmentera de $4(f''b - f''a)$, tandis que $2f''a$ augmentera seulement d'une quantité très-petite par rapport à $2f''a - 2f''b$.

En effet, si l'on développe $\frac{[f'(a-\varepsilon')]^2}{f(a-\varepsilon')}$ d'après la formule de Taylor, on aura

$$\frac{(f'a)^2}{fa} - \frac{d}{d\varepsilon'}\frac{(f'a)^2}{fa}\varepsilon' + \frac{d^2}{d\varepsilon'^2}\frac{[f'(a-\theta\varepsilon')]^2}{f(a-\varepsilon')}\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Le coefficient du terme en ε' est $\frac{2if\alpha(f''\alpha)^2}{\left(f'\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha\right)^2}$. Par suite, ce terme se réduit à

$$4(f''b - f''a) = 4(b-a)f'''a.$$

Quant au terme complémentaire, il a une valeur numérique à très-peu près égale à

$$\frac{2(2f\alpha - 3i^2 f''a)\left(f\alpha + \frac{i^2}{2}f''\alpha\right)}{i^2 f\alpha (f''\alpha)^2}(b-a)^2(f'''a)^2,$$

quantité négligeable vis-à-vis de $4(f''b - f''a) = 4(b-a)f'''a$.

Donc, si $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est plus grand que $2f''b$, $\frac{[f'(a-\varepsilon')]^2}{f(a-\varepsilon')}$ sera plus grand que $2f''(a-\varepsilon')$. Mais alors, en vertu du théorème premier, $fx = 0$ aurait deux racines réelles entre a et b, ce qui est impossible. Donc $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est moindre que $2f''b$, et le théorème énoncé est complétement démontré.

7. Théorème V. — *Lorsque les limites a et b sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul approché de la racine α de $f'x = 0$, si $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est compris entre $2f''a$ et $2f''b$, l'équation $fx = 0$ a entre a et b deux racines réelles et égales.*

Ce théoreme est un corollaire évident des deux précédents.

8. *Remarque.* — Tout ce que nous avons dit du rapport $\frac{(f'a)^2}{fa}$ est vrai aussi de $\frac{(f'b)^2}{fb}$. Ainsi :

$\frac{(f'b)^2}{fb}$ tend vers $2f''\alpha$ lorsque, $fx = 0$ ayant deux racines réelles et égales, b s'approche indéfiniment de α.

Si, $f''x$ étant constamment croissante et décroissante de $x = a$ jusqu'à $x = b$, $\frac{(f'b)^2}{fb}$ est plus grand que $2M$, $fx = 0$ a entre a et b deux racines réelles et inégales.

Si, $f''x$ étant constamment croissante ou décroissante de $x = a$ jusqu'à $x = b$, $\frac{(f'b)^2}{fb}$ est plus petit que $2m$, $fx = 0$ n'a aucune racine entre a et b.

Lorsque les limites a et b sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine α de $f'x = 0$, si $fx = 0$

a deux racines réelles entre a et b, $\frac{(f'b)^2}{fb}$ est plus grand que $2M$, et si $fx = 0$ n'a aucune racine réelle entre a et b, $\frac{(f'b)^2}{fb}$ est plus petit que $2m$.

Et dans les mêmes circonstances, si $\frac{(f'b)^2}{fb}$ est compris entre $2M$ et $2m$, $fx = 0$ a entre a et b deux racines réelles et égales.

9. Les suites [a] et [b] pourraient encore être terminées de la manière suivante :

	$f''x$,	$f'x$,	fx
[a]	$-$	$+$	$-$
[b]	$-$	$-$	$-$

Mais on ramène immédiatement ce cas au précédent, en changeant le signe de fx et de ses dérivées.

10. Voici encore un cas que Fourier n'avait pas examiné, parce qu'il ne s'occupait que des équations algébriques, et qu'on ne peut laisser de côté, quand il s'agit d'équations transcendantes, puisqu'elles ne peuvent être débarrassées de leurs racines égales. C'est le cas où, les limites a et b étant déjà très-rapprochées, la suite [a] à partir d'une certaine fonction $f^n x$ ne présenterait que des variations, et la suite [b] à partir de la même fonction ne présenterait que des permanences. Il peut se faire en effet alors que $fx = 0$ ait, entre a et b, n racines égales, ou aucune racine réelle, ou des racines réelles très-rapprochées.

Je ferai voir d'abord que si une équation $fx = 0$ a n racines égales à α comprises entre a et b, le rapport $\frac{f'x\,f^{n-1}x}{fx}$ tend vers $nf^n\alpha$ lorsque x croît depuis a jusqu'à α.

En effet, si $fx = 0$ a n racines égales à α, on aura par définition

$$f\alpha = 0,\quad f'\alpha = 0, \ldots, f^{n-1}\alpha = 0,\quad \text{et}\quad f^n\alpha \gtrless 0.$$

De plus, x désignant un nombre assez rapproché de α pour que, entre x et α, il n'y ait aucune racine de $fx = 0$, et φx désignant le produit $f'x f^{n-1}x$, on a

$$\varphi x = \varphi(\alpha - \varepsilon) = \varphi\alpha - \varepsilon\varphi'\alpha + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''\alpha - \ldots \pm \frac{\varepsilon^n}{1.2\,..n}\varphi^n\alpha$$
$$\pm \frac{\varepsilon^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(\alpha - \theta\varepsilon);$$

et comme

$$\begin{aligned}
\varphi x &= f'x f^{n-1} x,\\
\varphi' x &= f'' x f^{n-1} x + f' x f^n x,\\
\varphi'' x &= f''' x f^{n-1} x + 2 f'' x f^n x + f' x f^{n+1} x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi^{n-1} x &= f^n x f^{n-1} x + (n-1) f^{n-1} x f^n x + \ldots + f' x f^{2n-2} x,\\
\varphi^n x &= f^{n+1} x f^{n-1} x + n f^n x f^n x + \ldots + f' x f^{2n-1} x,
\end{aligned}$$

on voit que

$$\varphi\alpha = 0, \quad \varphi'\alpha = 0, \quad \varphi''\alpha = 0, \ldots, \quad \varphi^n \alpha = n f^n \alpha f^n \alpha;$$

on a aussi

$$fx = f(\alpha - \varepsilon) = f\alpha - \varepsilon f'\alpha + \frac{\varepsilon^2}{1.2} f''\alpha + \ldots$$
$$\pm \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} f^n \alpha \mp \frac{\varepsilon^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(\alpha - \theta\varepsilon).$$

Donc

$$\frac{f'xf^{n-1}x}{fx} = \frac{\pm \dfrac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} n f^n \alpha f^n \alpha \mp \dfrac{\varepsilon^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \varphi^{n+1}(\alpha - \theta\varepsilon)}{\pm \dfrac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} f^n \alpha \mp \dfrac{\varepsilon^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(\alpha - \theta\varepsilon)}$$

$$= \frac{n f^n \alpha f^n \alpha \mp \dfrac{\varepsilon}{n+1} \varphi^{n+1}(\alpha - \theta\varepsilon)}{f^n \alpha \mp \dfrac{\varepsilon}{n+1} f^{n+1}(\alpha - \theta\varepsilon)},$$

et quand $x = \alpha$,

$$\frac{f'xf^{n-1}x}{fx} = n f^n \alpha.$$

11. Admettons maintenant que, n étant impair, l'équation $f'x = 0$ ait, entre a et b, $n-1$ racines égales et aucune autre racine réelle, et que fa et fb aient des signes différents, en sorte que les deux suites $[a]$ et $[b]$ soient terminées d'une des quatre manières suivantes.

Si n est impair,

		$f^n x$	$f^{n-1} x \ldots$	$f'' x$	$f' x$	fx
(1)	$[a]$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$[b]$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

		$f^n x$	$f^{n-1} x \ldots$	$f'' x$	$f' x$	$f x$
(2)	$[a]$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
	$[b]$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

et si n est pair,

		$f^n x$	$f^{n-1} x \ldots$	$f'' x$	$f' x$	$f x$
(3)	$[a]$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$[b]$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

		$f^n x$	$f^{n-1} x \ldots$	$f'' x$	$f' x$	$f x$
(4)	$[a]$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$[b]$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Mais le second cas se ramène au premier, et le quatrième au troisième par le changement du signe de fx, ce qui n'influera en rien sur le nombre, ni la nature, ni la valeur des racines de $fx = 0$. Il suffira donc d'examiner le premier et le troisième cas.

On voit que si n est impair, $fx = 0$ peut avoir n racines réelles et égales, ou une seule racine réelle comprise soit entre a et α, soit entre α et b; et que, si n est pair, cette équation pourra avoir ou n racines réelles et égales, ou deux racines réelles ou inégales dont une entre a et α, et l'autre en α et b, ou bien encore n'avoir aucune racine entre a et b.

12. On remarquera d'abord que α désignant la racine multiple de $f'x = 0$, si $f'x = 0$ a n racines égales entre a et b, ces racines auront pour valeur commune α, et que le rapport $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$, à mesure que a se rapprochera de α, tendra vers $nf^n\alpha$; que si $fx = 0$ a une racine réelle entre a et α, ce même rapport tendra vers l'infini, tandis que si $fx = 0$ n'a point de racine entre a et α, il tendra vers zéro à mesure que a se rapprochera de α.

On peut être averti de toutes ces circonstances avant que $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$ ait pris une valeur infinie, nulle ou égale à $nf^n\alpha$.

En effet, j'admettrai d'abord comme démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que $f'x = 0$ ait $n - 1$ racines égales entre a et b ($f^n x$ étant constamment croissante ou décroissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, et M et m désignant le plus grand et le plus petit des deux nombres $f^n a$ et $f^n b$) soit que

$$2m < \frac{f^{n-1}af^{n-1}a}{f^{n-2}a} < 2\text{M},$$

$$3m < \frac{f^{n-2}af^{n-1}a}{f^{n-3}a} < 3\text{M},$$

$$3m < \frac{f^{n-2}af^{n-1}a}{f^{n-3}a} < 3\text{M},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-2)m < \frac{f'''af^{n-1}a}{f''a} < (n-2)\text{M},$$

$$(n-1) < \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} < (n-1)\text{M},$$

et je démontrerai que :

15. Théorème VI. — *Si* $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$ *est plus grand que* nM, *l'équation* $fx = 0$ *a entre a et b deux racines réelles et inégales, si n est pair, ou une seule racine réelle qui se trouve entre a et* α, *si n est impair.*

De ce que

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} > n\text{M},$$

ou de ce que

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} > (n-1)\text{M} + \text{M},$$

on tire

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} > \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} + f^n a;$$

car, d'après ce que nous avons admis, $\frac{f''af^{n-1}a}{f'a}$ est moindre que $(n-1)$M. Donc aussi

$$\frac{f''af^{n-1}a}{f'a} + f^n a - \frac{f'af^{n-1}a}{fa} < 0,$$

ou

$$\frac{f'afa\left(\frac{f''af^{n-1}a}{f'a} + f^n a - \frac{f'af^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2} > 0,$$

parce que $f'a$ est négative ; or, le premier membre de cette dernière inégalité est la dérivée première de $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$; donc cette fraction est croissante.

Je dis de plus que x croissant depuis a jusqu'à une certaine valeur comprise entre a et α, la fraction $\dfrac{f'af^{n-1}a}{fa}$ ne pourra pas passer par un maximum ; car, s'il en était ainsi, on aurait, pour la valeur ξ de x pour laquelle le maximum a lieu,

$$\frac{f'\xi f^{n-1}\xi}{f\xi} = \frac{f''\xi f^{n-1}\xi}{f'\xi} + f^n\xi;$$

et comme $\dfrac{f''\xi f^{n-1}\xi}{f'\xi}$ est comprise entre $(n-1)\mathrm{M}$ et $(n-1)m$, que $f^n\xi$ est comprise aussi entre M et m,

$$\frac{f'\xi f^{n-1}\xi}{f\xi} < n\mathrm{M};$$

mais cela est impossible, car $\dfrac{f'xf^{n-1}x}{fx}$ étant croissante de $x=a$ jusqu'à $x=\xi$, on doit avoir aussi

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} < \frac{f'\xi f^{n-1}\xi}{f\xi};$$

donc, à plus forte raison,

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} < n\mathrm{M},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On pourrait encore donner la démonstration directe suivante :

Soient a, a', a'',... des valeurs successives de la limite a, et croissant par degrés insensibles ; on aura

$$\frac{f'a'f^{n-1}a'}{fa'} > \frac{f'af^{n-1}a}{fa} > n\mathrm{M}, \quad \text{par suite,} \quad \frac{f'a'f^{n-1}a'}{fa'} \quad \text{est croissante;}$$

$$\frac{f'a''f^{n-1}a''}{fa''} > \frac{f'a'f^{n-1}a'}{fa'} > n\mathrm{M}, \quad \text{par suite,} \quad \frac{f'a''f^{n-1}a''}{fa''} \quad \text{est croissante;}$$

. . . .

Par conséquent, $\dfrac{f'af^{n-1}a}{fa}$ croît sans cesse et tend vers une limite supérieure à $n\mathrm{M}$, qui, d'après ce qui précède, ne peut être que l'infini.

Donc, si n est pair, $fx=0$ a deux racines réelles et inégales; et si n est impair, $fx=0$ a une racine comprise entre a et b, et qui se trouve entre a et α.

14. Théorème VII. — *Dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire si a et b étant toujours assez rapprochés, pour que de $x = a$ jusqu'à $x = b$ $f''x$ soit constamment croissante ou décroissante, $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$ est plus petit que nm, l'équation $fx = 0$ n'a aucune racine entre a et b, si n est pair; et si n est impair, elle a une racine réelle entre α et b, et n'en a point entre a et α.*

La démonstration est semblable à celle du théorème précédent.

15. Théorème VIII. — *Si les limites a et b sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine α de $f^{n-1}x = 0$, comprise entre ces limites, et que $fx = 0$ ait une racine réelle entre a et α, $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$ est plus grand que nM.*

En effet, en désignant par c la racine de $fx = 0$ qui se trouve entre a et α, et faisant

$$a = \alpha - i,\quad a = c - h,\quad i - h = \varepsilon,\quad \text{d'où}\quad c = \alpha - \varepsilon,$$

on a, si n est pair,

$$f'a = -\frac{i^{n-1}f^n\alpha}{1.2\ldots(n-1)},\ldots,\quad f^{n-1}a = -if^n\alpha,$$

$$fa = -hf'c + \frac{h^2}{1.2}f''c - \frac{h^3}{1.2.3}f'''c\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^nc,$$

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} = \frac{\frac{i^n}{1.2\ldots(n-1)}(f^n\alpha)^2}{-hf'c + \frac{h^2}{2}f''c\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^nc}.$$

Et comme

$$f'c = -\frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n\alpha,\quad f''c = \frac{\varepsilon^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^n\alpha,$$

$$f'''c = -\frac{\varepsilon^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)}f^n\alpha\ldots f^{n-1}c = -\varepsilon f^n\alpha,\quad f^nc = f^n\alpha,$$

la dérivée du second membre prise par rapport à i, en considérant h comme une fonction de i telle que $\frac{dh}{di} = 1$, deviendra, après quelques réductions faciles à apercevoir,

$$-\frac{n^2i^{n-1}\varepsilon^nf^n\alpha}{(i^n - \varepsilon^n)^2}.$$

Si n est impair, on a

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} = \frac{\frac{i^n}{1.2\ldots n}(f^n\alpha)^2}{hf'c - \frac{h^2}{2}f''c + \frac{h^3}{1.2.3}f'''c - \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^nc};$$

et comme, dans ce cas,

$$f'c = \frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n\alpha, \quad f''c = -\frac{\varepsilon^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^n\alpha,$$

$$f^{n-1}c = -\varepsilon f^n\alpha, \qquad f^nc = f^n\alpha,$$

la dérivée du second membre prise par rapport à i sera encore

$$-\frac{n^2 i^{n-1}\varepsilon^n f^n\alpha}{(i^n - \varepsilon^n)^2}.$$

La dérivée du second membre est donc négative dans les deux cas; donc celle du premier membre prise en considérant a comme une fonction de i, telle que $\frac{da}{di} = -1$, doit être négative aussi; donc

$$\frac{fa f'a\left(f^na + \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'af^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2}\frac{da}{di} < 0,$$

et comme fa et $f'a$ ont des signes différents et que $\frac{da}{di} < 0$,

$$f^na + \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'af^{n-1}a}{fa} < 0.$$

$\frac{f''af^{n-1}a}{fa}$ étant compris entre nm et nM, on voit que si $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$ n'est pas plus grand que nM, il doit être compris entre nm et nM.

Nous remarquerons maintenant que l'inégalité

$$\frac{fa f'a\left(f^na + \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'af^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2}\frac{da}{di} < 0$$

entraîne la suivante

$$\frac{fa f'a\left(f^na + \frac{f''af^{n-}a}{f'a} - \frac{f'af^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2} > 0,$$

qui signifie que $\frac{f'a f^{n-1}a}{fa}$ croît ou décroît en même temps que a (nos **13** et **14**); par conséquent, si nous donnons à a dans $\frac{f'a f^{n-1}a}{fa}$ et dans $nM - nm$ l'accroissement négatif très-petit $-\varepsilon' = \frac{(i^n - \varepsilon^n)^2}{i^{n-1}\varepsilon^n}\frac{m - M}{f''\alpha}$, le rapport diminuera de $n^2(M - m)$, tandis que la différence $nM - nm$ variera d'une quantité très-petite par rapport à $f^n a$ elle-même.

En effet, on aura, en développant $\frac{f'(a-\varepsilon')f^{n-1}(a-\varepsilon')}{f(a-\varepsilon')}$ par la formule de Taylor,

$$\frac{f'a f^{n-1}a}{fa} - \frac{d}{d\varepsilon'}\frac{f'a f^{n-1}a}{fa}\varepsilon' + \frac{d^2}{d\varepsilon'^2}\frac{f'(a-\theta\varepsilon')f^{n-1}(a-\theta\varepsilon')}{f(a-\theta\varepsilon')}\frac{\varepsilon'^2}{2}.$$

Le coefficient de la première puissance de ε' est égal à $\frac{n^2 i^{n-1}\varepsilon^n}{(i^n - \varepsilon^n)^2}$, donc le terme en ε' a pour valeur numérique

$$n^2(M - m) = n^2(b - a)f^{n+1}a.$$

Quant au terme complémentaire, il est à peu près égal à

$$\frac{n^2[(n+1)i^n + (n-1)\varepsilon^n](i^n - \varepsilon^n)}{i^n\varepsilon^n}\frac{(b-a)^2}{2}\frac{(f^{n+1}a)^2}{f^n a},$$

quantité négligeable devant $n^2(M - m) = n^2(b - a)f^{n+1}a$.

Donc, si $\frac{f'a f^{n-1}a}{fa}$ était plus petit que nM, il deviendrait par là moindre que nm, et $fx = 0$, en vertu du théorème précédent, n'aurait point de racine entre $a - \varepsilon'$ et α, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le rapport $\frac{f'a f^{n-1}a}{fa}$ ne peut donc pas être moindre que nM, et le théorème est démontré.

16. THÉORÈME IX. — *Si les limites a et b sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine α de $f^{n-1}x = 0$, et que $fx = 0$ n'ait aucune racine réelle entre a et α, $\frac{f'a f^{n-1}a}{fa}$ est moindre que nm.*

En effet, en faisant

$$a = \alpha - i,$$

on a dans ce cas, si n est pair,

(1)
$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} = \frac{\frac{i^n}{1.2\ldots n}(f^n\alpha)^2}{f\alpha + \frac{i^n}{1.2\ldots n}f^n\alpha}$$

et si n est impair,

(2)
$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} = \frac{-\frac{i^n}{1.2\ldots(n-1)}(f^n\alpha)^2}{f\alpha - \frac{i^n}{1.2\ldots n}f''\alpha}.$$

La dérivée du second membre de l'équation (1) de ce numéro est

$$\frac{\frac{ni^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f\alpha(f^n\alpha)^2}{\left(f\alpha + \frac{i^n}{1.2\ldots n}f^n\alpha\right)^2},$$

et elle est positive, parce que dans le cas de n pair $f\alpha > 0$.

La dérivée du second membre de l'équation (2) de ce même numéro est

$$\frac{-\frac{ni^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f\alpha(f^n\alpha)^2}{\left(f\alpha - \frac{i^n}{1.2\ldots n}f^n\alpha\right)^2},$$

et elle est positive aussi, parce que, dans le cas de n impair, $f\alpha < 0$.

Donc la dérivée de $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$, prise en regardant a comme une fonction de i, telle que $\frac{da}{di} = -1$, doit être positive dans tous les cas. Donc

$$\frac{faf'a\left(f^na + \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'af^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2}\frac{da}{di} > 0,$$

d'où

$$f^na + \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'af^{n-1}a}{fa} > 0$$

et

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa} < f^na + \frac{f''af^{n-1}a}{fa}.$$

Comme $\frac{f''a\,f^{n-1}a}{f'a}$ est compris entre $(n-1)m$ et $(n-1)\mathrm{M}$, on voit que si $\frac{f'a\,f^{n-1}a}{fa}$ n'est pas plus petit que nm, il est compris entre nm et $n\mathrm{M}$.

Remarquons aussi que l'inégalité

$$\frac{fa\,f'a\left(f^n a + \frac{f''af^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'a\,f^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2}\frac{da}{di} > 0$$

entraîne la suivante,

$$\frac{fa\,f'a\left(f^n a + \frac{f''a\,f^{n-1}a}{f'a} - \frac{f'a\,f^{n-1}a}{fa}\right)}{(fa)^2} < 0,$$

qui signifie que $\frac{f'a\,f^{n-1}a}{fa}$ décroît quand a augmente, ou croît quand a diminue (n^{os} **13** et **14**).

Remarquons encore que le rapport $\frac{f'a\,f^{n-1}a}{fa}$ étant un nombre fini de même ordre que $n\mathrm{M}$ et nm, le numérateur et le dénominateur sont des quantités de même ordre (du même ordre que i^n); et que par suite, k désignant une quantité du même ordre que i, on peut poser

$$\frac{\frac{\pm i^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)n}fa\,f^n a}{\left(fa \pm \frac{i^n}{1.2\ldots n}\right)^2} = \frac{1}{k},$$

et la dérivée de

$$\frac{\frac{\pm i^n}{1.2\ldots(n-1)}(f^n\alpha)^2}{f\alpha \pm \frac{i^n}{1.2\ldots n}f^n\alpha}$$

pourra s'écrire $\frac{n^2 f^n\alpha}{k}$.

Donnons maintenant à a dans $\frac{f'a\,f^{n-1}a}{fa}$ et dans $n\mathrm{M} - nm$ un accroissement négatif $-\varepsilon' = \frac{k(m-\mathrm{M})}{f^n\alpha}$, le rapport augmentera de $n^2(\mathrm{M}-m)$, et la différence $n\mathrm{M} - nm$ variera d'une quantité très-petite par rapport à elle-même.

En effet, on aura, en développant $\dfrac{f'(a-\varepsilon')f^{n-1}(a-\varepsilon')}{f(a-\varepsilon')}$ par la formule de Taylor,

$$\frac{f'af^{n-1}a}{fa}-\frac{d}{d\varepsilon'}\frac{f'af^{n-1}a}{fa}\varepsilon'+\frac{d^2}{d\varepsilon'^2}\frac{f'(a-\theta\varepsilon')f^{n-1}(a-\theta\varepsilon')}{f(a-\theta\varepsilon')};$$

et le coefficient du terme en ε' est

$$\frac{-\dfrac{ni^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f\alpha(f^n\alpha)^2}{\left(f\alpha+\dfrac{i^n}{1.2\ldots n}f^n\alpha\right)^2};$$

par suite, ce terme se réduit à

$$n^2(f^nb-f^na)=n^2(b-a)f^{n+1}a.$$

Quant au terme complémentaire, il a une valeur à très-peu près égale à

$$\frac{\left[(n-1)f\alpha-\dfrac{n+1}{1.2\ldots n}i^nf^n\alpha\right]\left[f\alpha+\dfrac{i^n}{1.2\ldots n}f^n\alpha\right]}{\dfrac{1}{n^2}f\alpha}\frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{f^{n+1}a}{f^n\alpha}\right)^2,$$

quantité négligeable devant $n^2(b-a)f^{n+1}a=n^2(\mathrm{M}-m)$.

Donc, si $\dfrac{f'af^{n-1}a}{fa}$ est plus grand que nm, $\dfrac{f'(a-\varepsilon')f^{n-1}(a-\varepsilon')}{f(a-\varepsilon')}$ sera plus grand que $n\mathrm{M}$. Mais alors, en vertu du théorème VI, $fx=0$ aurait une racine réelle comprise entre a et α, ce qui est impossible. Donc $\dfrac{f'af^{n-1}a}{fa}$ est moindre que nm, et le théorème est démontré.

17. Théorème X. — *Si les limites a et b sont assez rapprochées pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine α de $f^{n-1}x=0$, et que le rapport $\dfrac{f'af^{n-1}a}{fa}$ soit compris entre nm et $n\mathrm{M}$, l'équation $fx=0$ a entre a et b n racines réelles et égales.*

Ce théorème est une conséquence évidente des deux précédents.

18. Les cinq théorèmes précédents ne sont vrais qu'autant qu'on admet les conditions énoncées dans le n° **12**.

Mais elles sont remplies quand $n = 3$,
Elles le sont donc aussi quand $n = 4$,
Et quand . . . . $n = 5$;
Et ainsi de suite.

Donc tous ces théorèmes sont vrais quel que soit n.

19. *Remarque.* — Tout ce que nous avons dit du rapport $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$ est vrai aussi du rapport $\frac{f'bf^{n-1}b}{fb}$, et je regarderai comme démontrés pour ce rapport tous les théorèmes que nous venons d'établir relativement à $\frac{f'af^{n-1}a}{fa}$, à la seule condition de changer b en a dans leur énoncé.

20. *Remarque.* — Si, le nombre $n - i - 1$ étant pair, on avait

$$\frac{f^{n-i}af^{n-1}a}{f^{n-i-1}a} < (i+1)m,$$

et en même temps

$$im < \frac{f^{n-i+1}af^{n-1}a}{f^{n-i}a} < iM,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2m < \frac{f^{n-1}af^{n-1}a}{f^{n-2}a} < 2M,$$

l'équation $f^{n-i-1}x = 0$ n'aurait aucune racine réelle entre a et b, et $fx = 0$ ne pourrait plus avoir que $n - i - 1$ racines entre a et b. Pour reconnaître si ces racines sont égales, ou pour les séparer si elles sont inégales, on fera commencer les suites [a] et [b] à $f^{n-i-1}x$.

Si on avait $\frac{f^{n-i}af^{n-1}a}{f^{n-i-1}a} > (i+1)M$, ce nombre $n - i - 1$ étant toujours pair, et les rapports $\frac{f^{n-i+1}af^{n-1}a}{f^{n-i}a}, \ldots, \frac{f^{n-1}af^{n-1}a}{f^{n-2}a}$ étant toujours compris, le premier entre im et iM,..., et le dernier entre $2m$ et $2M$, l'équation $f^{n-i-1}x = 0$ aurait deux racines réelles et inégales entre a et b; on les séparerait, et en désignant par c un nombre compris entre ces deux racines, on chercherait combien $fx = 0$ peut avoir de racines réelles entre a et c, puis entre c et b. Pour cela on ferait commencer les suites [a], [c], [b] à $f^{n-i}x$.

Enfin, si on avait $\frac{f^{n-i}a\, f^{n-1}a}{f^{n-i-1}a} > (i+1)\mathrm{M}$, ou $< (i+1)m$, le nombre $n-i-1$ étant impair, et les rapports

$$\frac{f^{n-i+1}a\, f^{n-1}a}{f^{n-i}a}, \ldots, \quad \text{et} \quad \frac{f^{n-1}a\, f^{n-1}a}{f^{n-2}a}$$

étant toujours compris entre les limites im et $i\mathrm{M}$,..., $2m$ et $2\mathrm{M}$, l'équation $f^{n-i-1}x = 0$ n'aurait qu'une racine réelle entre a et b, et $fx = 0$ ne pourrait plus avoir que $n-i$ racines réelles et égales entre ces limites. Pour le reconnaître, on prendra de nouvelles limites a' et b' plus rapprochées que a et b, et telles qu'elles comprennent toujours la racine de $f^{n-i-1}x = 0$, sans en comprendre aucune de $f^{n-i}x = 0$; on fera commencer les suites $[a']$ et $[b']$ à $f^{n-i}x$, et on appliquera les règles précédentes.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

I. — *Exposé sommaire de la méthode de M. Sarrus.*

21. Sarrus désigne par L, M, N,..., des fonctions quelconques de x, y, z,...; par x', y', z',... des valeurs quelconques respectivement moindres que x, y, z,..., et par x'', y'', z'',... d'autres quantités respectivement plus grandes.

Il suppose que dans toute l'étendue des limites x', y', z',... et x'', y'', z'',..., les valeurs de L, M, N,... restent finies et continues, et fait abstraction des autres valeurs de ces fonctions.

Il appelle *limite inférieure* et *limite supérieure* de L, des quantités L′ et L″ telles, que dans toute l'étendue des limites x', y', z',... et x'', y'', z'',..., la valeur de L soit plus grande que L′ et plus petite que L″; et que, de plus, en faisant varier les limites x', y', z', ..., x'', y'', z'',... de manière que les différences positives $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, ..., et $x'' - x$, $y'' - y$, $z'' - z$,... décroissant indéfiniment, les différences également positives $L - L'$ et $L'' - L$ finissent par devenir moindres que toute quantité donnée.

M' et M'', N' et N'',... désignent des quantités qui sont, par rapport à M et N, ce que L' et L'' sont par rapport à L.

Lorsque la limite inférieure des valeurs d'une fonction est positive, les autres valeurs sont aussi et à plus forte raison positives ; et par conséquent aucune d'elles ne peut être nulle.

Lorsque la limite supérieure des valeurs d'une fonction est négative, ces différentes valeurs sont donc aussi à plus forte raison négatives ; et par conséquent aucune d'elles ne peut être nulle.

Réciproquement, si les limites x', y', z',... et x'', y'', z'',... sont suffisamment rapprochées, et si néanmoins aucune des valeurs de cette fonction calculées dans toute l'étendue de ces limites n'est égale à zéro, il arrivera :

Ou que la limite inférieure de cette fonction sera positive, ou que la limite supérieure sera négative.

Par suite, si la limite inférieure des valeurs d'une fonction est négative, et si la limite supérieure est en même temps positive, il faut, ou que cette fonction devienne nulle, pour des valeurs convenables de x, y, z,..., comprises entre les limites x', y', z',... et x'', y'', z'',..., ou bien que ces limites soient trop écartées.

22. Toutes les fois que l'on sait trouver la plus petite et la plus grande des valeurs de L qui peuvent avoir lieu dans l'étendue des limites des valeurs de x, y, z,..., on peut prendre la plus petite de ces valeurs pour la limite inférieure de toutes les autres, et la plus grande pour leur limite supérieure.

C'est ainsi que l'on trouvera les limites inférieure et supérieure des fonctions simples

$$x^m, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \log x, \ldots$$

S'il s'agit d'un produit de la forme

$$k x^\alpha y^\beta z^\gamma, \ldots$$

dans lequel k, α, β, γ,... expriment des nombres positifs quelconques, et que les limites x', y', z',... et x'', y'', z'',... des valeurs de x, y, z,... soient toutes positives, les deux limites de ce produit seront alors

$$k x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma, \ldots, \quad \text{et} \quad k x''^\alpha y''^\beta z''^\gamma, \ldots.$$

Pour obtenir la limite inférieure d'une somme algébrique de plusieurs fonctions P, Q, R,..., T, U, V,..., il faut ajouter les limites inférieures de celles qui ont le signe $+$, et retrancher de la somme les limites supérieures de celles qui ont le signe $-$.

Ainsi, si

$$L = P + Q + R + \ldots - T - U - V - \ldots,$$

on a

$$L' = P' + Q' + R' + \ldots - T'' - U'' - V'' - \ldots$$
$$L'' = P'' + Q'' + R'' + \ldots - T' - U' - V' - \ldots$$

Donc, lorsqu'un polynôme ne contient que des puissances positives des variables $x, y, z, \ldots$, et que, de plus, les limites $x', y', z', \ldots, x'', y'', z'', \ldots$ de ces variables sont toutes positives, on aura une limite inférieure des valeurs de ce polynôme, en remplaçant $x, y, z, \ldots$ par leurs limites inférieures dans ceux des termes de ce polynôme qui sont positifs, et par leurs limites supérieures dans ceux qui sont négatifs.

On aura une limite supérieure des mêmes valeurs en remplaçant $x, y, z, \ldots$ par leurs limites supérieures dans ceux des termes du polynôme qui sont positifs, et par leurs limites inférieures dans ceux qui sont négatifs.

Si on a

$$L = PQR \ldots TUV \ldots$$

et que les limites de PQR soient positives, mais que celles de TUV soient négatives, on prendra le plus petit des deux produits

$$P'Q'R' \ldots T''U''V'' \ldots \quad \text{et} \quad P''Q''R'' \ldots T'U'V' \ldots$$

pour la limite inférieure L' et le plus grand pour la limite supérieure L''.

25. Soient, maintenant, une ou plusieurs équations de forme quelconque,

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

à une ou plusieurs inconnues, dont le nombre peut être différent de celui des équations; étant donné en outre un système de limites des valeurs des inconnues, proposons-nous de trouver toutes les valeurs de ces inconnues qui peuvent être comprises entre les limites données, et satisfaire en même temps aux équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots.$$

Nous chercherons les limites inférieures des valeurs que peuvent recevoir les fonctions L, M, N,... quand on fait varier x, y, z,... entre les limites données, puis les limites supérieures des valeurs de ces mêmes fonctions.

S'il arrive qu'une des limites inférieures soit positive, la fonction qui aura donné lieu à cette limite positive ne pourra devenir nulle tant que les valeurs de x, y, z,... sont comprises entre les limites données, et par conséquent la question proposée n'a pas de solution proprement dite.

La même chose a lieu lorsqu'une des limites supérieures est négative.

Lorsque toutes les limites inférieures des valeurs L, M, N,... sont négatives, et leurs limites supérieures positives, ou les limites données renferment des solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, ou bien ces limites sont trop écartées.

Après cela, nous subdiviserons les systèmes de limites données des valeurs de x, y, z,... en plusieurs autres systèmes de limites plus rapprochées, dont l'ensemble embrassera la même étendue que le système de limites primitives.

Nous recommencerons avec chacun de ces nouveaux systèmes de limites, comme nous avons déjà opéré avec le système primitif.

De cette manière, nous pourrons être conduits à exclure quelques-uns des nouveaux systèmes de limites comme ne pouvant renfermer de solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$. Quant aux autres, nous les subdiviserons à leur tour en d'autres systèmes que nous traiterons de la même manière.

En opérant ainsi, nous finirons par exclure tous les nombres qui, étant compris entre les limites données pour les inconnues $x, y, z, \ldots$, ne peuvent pas satisfaire aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$.

Les systèmes de limites qui n'auront pas été exclus nous feront connaître, avec tel degré d'approximation que l'on peut vouloir, toutes les solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ qui peuvent être comprises entre les limites données.

24. Mais la méthode de M. Sarrus a l'inconvénient de laisser toujours le calculateur dans l'incertitude, car lorsqu'il aura trouvé que pour des limites même très-rapprochées, x', y', $z' \ldots$ et x'', y'', $z'' \ldots$, des inconnues $x, y, z, \ldots$, toutes les limites inférieures des premiers membres des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

sont négatives, et toutes les limites supérieures positives, il ne saura pas si, entre ces limites des inconnues, il y a réellement des solutions ou s'il n'y en a pas, ni combien il y en a; et, par suite, il ne peut savoir s'il doit continuer ou arrêter ses calculs.

Mais quand, au moyen de cette méthode, on aura convenablement rapproché les limites des inconnues, la théorie que je vais exposer lèvera toute incertitude.

II. — *Résolution de deux équations à deux inconnues.*

25. Je prends les deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,$$

et je chercherai combien elles peuvent avoir de solutions entre deux limites données x_1 et x_2 de la variable x, et entre deux limites y_m et y_n de la variable y; et j'admettrai que, si on fait varier x depuis x_1 jusqu'à x_2, l'équation $f(x, y) = 0$ ni l'équation $F(x, y) = 0$ ne détermineront une valeur infinie de y; et que, y variant depuis y_m jusqu'à y_n, aucune des valeurs de x déterminées par $f(x, y) = 0$ et $F(x, y) = 0$ ne soit infinie.

On obtiendra facilement de semblables limites lorsque les deux équations proposées sont algébriques, car alors elles pourront se mettre sous la forme

$$Ay^m + By^{m-1} + \ldots + Ty + U = 0,$$

les lettres A, B, C, ..., T, U désignant des coefficients numériques ou des polynômes en x. Or, les valeurs infinies de y répondent aux valeurs de x qui rendent $A = 0$. On résoudra donc $A = 0$, et si a_1 et a_2 sont deux racines consécutives de cette équation, en prenant pour limites de x $x_1 = a_1 + \varepsilon$ et $x_2 = a_2 - \varepsilon$ (ε étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra), aux valeurs de x comprises entre x_1 et x_2 ne répondra aucune valeur infinie de y.

L'équation $f(x, y) = 0$ pourra aussi se mettre sous la forme

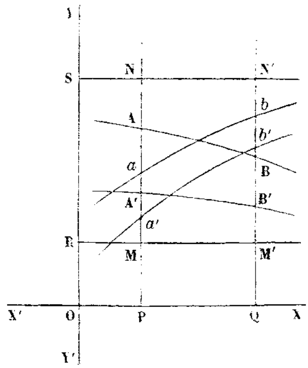
$$A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + \ldots + T'x + U' = 0,$$

$A', B', \ldots, T', U'$ étant des coefficients numériques ou des fonctions de y; et il suffira de résoudre $A' = 0$ pour connaître les valeurs de y qui rendent x infinie; et si b_1 et b_2 sont deux racines consécutives de cette équation, on sera sûr qu'en prenant pour limites $y_m = b_1 + \varepsilon$ et $y_n = b_2 - \varepsilon$ (ε étant toujours un nombre positif aussi petit qu'on voudra), à aucune valeur de y comprise entre ces limites ne correspondra une valeur infinie de x.

26. Soient donc x_1 et x_2 les deux limites données de la variable x, et y_m et y_n les deux limites données de la variable y; je suppose que les limites inférieures de f et de F soient négatives, et les deux limites supérieures positives.

L'équation $f(x,y)=0$ représente une courbe qu'on peut supposer rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires; de même, l'équation $F(x,y)=0$ représente une autre courbe qu'on peut supposer rapportée aux mêmes axes que la première.

Je prends, sur l'axe OX, les distances $OP=x_1$ et $OQ=x_2$, et, par les points P et Q, je mène des parallèles à l'axe OY; je prends sur OY les lon-



gueurs $OR=y_1$, $OS=y_2$, et, par les points R et S, je mène des parallèles à l'axe OX. Ces droites, en se coupant, forment un rectangle MNM'N'. Ce rectangle est traversé par une ou plusieurs branches ab, $a'b'$ de f, et par une ou plusieurs branches AB, A'B' de F; et les coordonnées des points de rencontre sont les solutions comprises entre les limites données.

Il s'agit donc de savoir déterminer les points d'intersection d'un des arcs de f et d'un des arcs de F, de ab et de AB, par exemple.

Je ferai, dans $f(x,y)=0$, $x=x_1$; je transformerai cette équation en une autre à une seule inconnue, qui me fera connaître les valeurs de y correspondantes à x_1, et comprises entre y_m et y_n. Soit y_1 une de ces valeurs, et admettons qu'elle ne soit pas une racine multiple de $f(x_1,y)=0$; x_1 et y_1 sont les coordonnées d'un point de la courbe f situé sur la droite PMN. Je suppose que ce soit le point a. x_2 étant un nombre plus grand que x_1, je ferai dans la même équation $f(x,y)=0$, $x=x_2$; je la changerai en une autre qui me fera connaître les valeurs de y correspondantes à x_2, et comprises entre y_m et y_n; et si y_2 est l'une de ces valeurs et n'est pas une racine multiple de $f(x_2, y) = 0$, et si, de plus, x_2 et y_2 sont les coordonnées d'un même point de l'arc passant par a, y_2 devra être donné aussi par la série

$$y_2 = y_1 + y'_1 \frac{h}{1} + y''_1 \frac{h^2}{1.2} + \ldots + y^n_1 \frac{h^n}{1.2\ldots n} + y^{n-1}_{x_1+\theta h} \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

dans laquelle h désigne la différence $x_2 - x_1$, et où y'_1, $y''_1, \ldots$, y^n_1 désignent les valeurs que prennent les dérivées y', $y'', \ldots$, y^n quand on fait $x = x_1$ et $y = y_1$, et où enfin $y^{n+1}_{x_1+\theta h} \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ désigne le terme complémentaire.

Or, ces valeurs s'obtiendront facilement au moyen des équations

$$(') \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0,$$

$$('') \quad \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy} y' + \frac{d^2f}{dy^2} y'^2 + \frac{df}{dy} y'' = 0,$$

$$(''') \quad \frac{d^3f}{dx^3} + 3\frac{d^3f}{dx^2\,dy} y' + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2} y'^2 + \frac{d^3f}{dy^3} y'^3 + 3\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dy^2} y'\right) y'' + \frac{df}{dy} y''' = 0,$$

. . . .

de la manière suivante :

On remplacera dans (') x par x_1 et y par y_1, ce qui fait connaître y'_1;

On remplacera dans ('') x par x_1, y par y_1 et y' par y'_1 et l'on obtiendra y''_1;

On remplacera dans (''') x par x_1, y par y_1, y' par y'_1 et y'' par $y_{''}$, et l'on pourra ensuite calculer y'''_1;

Et ainsi de suite.

Quant à la série

$$y_1 + y'_1 \frac{h}{1} + y''_1 \frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

on voit qu'elle doit être convergente; mais il est toujours possible de la rendre telle, en prenant x_2 assez voisin de x_1.

Il sera peut-être plus avantageux de composer d'abord, au moyen de cette série, la valeur de y_2, et de vérifier si elle satisfait à l'équation $f(x_2, y) = 0$. La série ne fera pas connaître exactement la valeur de y_2, mais pourra en donner une valeur approchée, que l'on rectifiera en se servant de cette première approximation pour calculer par la méthode de Newton la racine y_2.

Je ferai ensuite, dans l'équation $F(x, y) = 0$, $x = x_1$, et j'en tirerai une valeur Y_1 de y comprise entre y_m et y_n; j'aurai ainsi les coordonnées d'un point $A(x_1, Y_1)$ d'une branche de la courbe F, puis je déterminerai l'ordonnée Y_2 du point B, où cette branche rencontre la droite QM'N', par des calculs semblables à ceux qui nous ont fait connaître y_2.

27. Je remarque maintenant que l'ordonnée d'un point quelconque de l'arc *ab* est une fonction de x (que je désignerai par y), et dont je puis calculer la valeur, ainsi que celles de toutes ses dérivées qui correspondent à la valeur x_1 et à la valeur x_2 de x;

Que l'ordonnée d'un point quelconque de l'arc AB est une fonction de x (que je désigne par Y), et dont je sais calculer la valeur, ainsi que celles de toutes ses dérivées qui correspondent aux valeurs x_1 et x_2 de x;

Que les coordonnées des points de rencontre de ces deux arcs sont les valeurs de x et de y qui satisfont à l'équation

$$y - Y = 0.$$

On admet d'ailleurs que l'arc *ab* et l'arc AB n'ont aucun point pour lequel $\frac{df}{dx} = 0$ ni $\frac{df}{dy} = 0$.

Si donc on calcule les valeurs des fonctions

$$y - Y, \quad y' - Y', \quad y'' - Y'', \ldots, \quad y^i - Y^i,$$

qui répondent à $x = x_1$ et à $x = x_2$, et si la dernière $y^i - Y^i$ ne change pas de signe quand x varie de $x = x_1$ à $x = x_2$, j'aurai deux suites de nombres que j'appelle la suite $[x_1]$ et la suite $[x_2]$, et, en vertu de la règle de Fourier, autant la suite $[x_2]$ aura de variations de moins que la suite $[x_1]$, autant l'équation $y - Y = 0$ aura de racines au plus entre $x = x_1$ et $x = x_2$.

28. Il reste à reconnaître comment $y^i - Y^i$ ne changera pas de signe depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$.

y^i est une fonction de x, y, y', ..., y^{i-1}; comme on connaît les valeurs de x_1 et x_2, y_1 et y_2, de y'_1 et y'_2, ..., de y_1^{i-1} et de y_2^{i-1}, on pourra calculer la limite inférieure et la limite supérieure de y^i.

De même, comme Y^i est une fonction de x, Y, Y'_1, ..., Y^{i-1}, et que l'on connaît les valeurs de x_1 et x_2, de Y_1 et Y_2, de Y'_1 et Y'_2, ..., et de Y_1^{i-1} et Y_2^{i-1}, on pourra calculer la limite inférieure et la limite supérieure de Y^i, et, par suite, la limite inférieure et la limite supérieure de $y^i - Y^i$; et si ces deux limites ont le même signe, on est sûr que cette fonction restera toujours positive ou toujours négative quand x variera de x_1 à x_2.

29. Alors, si la suite $[x_1]$ et la suite $[x_2]$ ont le même nombre de variations, l'équation $y - Y = 0$ n'a point de racines comprises entre x_1 et x_2, et les deux arcs ab et AB ne se rencontrent pas.

Si la suite $[x_2]$ a une variation de moins que la suite $[x_1]$, les deux arcs ab et AB se rencontrent en un point, et en un point seulement.

Si la suite $[x_2]$ a plusieurs variations de moins que la suite $[x_1]$, les deux arcs ab et AB peuvent se rencontrer en un ou plusieurs points. On rapprochera alors les limites x_1 et x_2, c'est-à-dire que x_1, a, b,..., c, x_2 étant des nombres rangés par ordre de grandeur, on cherchera les racines de $y - Y = 0$ comprises entre x_1 et a, entre a et b,..., entre c et x_2, au moyen des suites $[x_1]$, $[a]$, $[b]$,..., $[c]$, $[x_2]$.

Si une de ces suites, la suite $[b]$, par exemple, a autant de variations ou une variation de moins que celle qui la précède, il n'y aura point de rencontre entre a et b, ou il y en aura une seule; s'il n'en est pas ainsi, il y aura incertitude, et l'on rapprochera encore les limites a et b.

Et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on soit arrivé à des suites telles, que chacune d'elles ait le même nombre de variations ou une variation de moins que celle qui la précède.

30. Si, pour les limites données x_1 et x_2 de la variable x, et y_1 et y_2 de la variable y, les limites inférieure et supérieure de la fonction $y^i - Y^i$ n'ont pas le même signe, et qu'on ne puisse pas savoir par d'autres considérations qu'elle ne change pas de signe lorsque x et y varient entre les limites données, il faudra rapprocher encore les limites x_1 et x_2 jusqu'à ce que l'on soit retombé dans le cas que nous venons d'examiner. On pourrait aussi prendre des dérivées d'un ordre plus élevé que i.

31. Si la valeur de y_2 donnée par

$$y_1 + y'_1 \frac{h}{1} + y''_1 \frac{h^2}{1.2} + y'''_1 \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

n'était pas comprise entre y_m et y_n, l'arc ab ne rencontrerait pas la droite QM'N' entre les parallèles RMM' et SNN' à l'axe OX. On chercherait alors en quel point il rencontre, soit RMM', soit SNN', en calculant les racines de l'équation $f(x, y_1) = 0$ ou $f(x, y_2) = 0$, comprises entre x_1 et x_2;

on aurait ainsi une valeur de x comprise entre les deux nombres très-rapprochés α_1 et α_2, et, au lieu des limites x_1 et x_2, on prendrait x_1 et α_1.

On agirait de même si l'arc ab ne rencontrait pas PMN ou ne rencontrait aucune des droites PMN et QM'N' entre RMM' et SNN'.

32. Il pourrait se faire que les limites x_1 et x_2 étant très rapprochées, les suites $[x_1]$ et $[x_2]$ soient ainsi terminées :

	$y''-\mathrm{Y}''$	$y'-\mathrm{Y}'$	$y-\mathrm{Y}$,
$[x_1]$	$+$	$-$	$+$
$[x_2]$	$+$	$+$	$+$

ou bien

	$y''-\mathrm{Y}''$	$y'-\mathrm{Y}'$	$y-\mathrm{Y}$,
$[x_1]$	$-$	$+$	$-$
$[x_2]$	$-$	$-$	$-$

le nombre des variations étant le même dans chacune d'elles jusqu'à la fonction $y''-\mathrm{Y}''$, c'est-à dire lorsqu'on fait abstraction des signes que donnent dans chaque suite $y'-\mathrm{Y}'$ et $y-\mathrm{Y}$.

On aura recours dans ce cas aux théorèmes démontrés dans la première partie (n^os^ **2**, **3** et **7**), et les limites x_1 et x_2 étant déjà assez rapprochées pour que $y''-\mathrm{Y}''$ ne change pas de signe depuis $x=x_1$ jusqu'à $x=x_2$, on examinera le rapport $\frac{(y'_1-\mathrm{Y}'_1)^2}{y_1-\mathrm{Y}_1}$: désignons par M et m le plus grand et le plus petit des deux nombres $(y''_1-\mathrm{Y}''_1)$ et $(y''_2-\mathrm{Y}''_2)$:

Si $\frac{(y'_1-\mathrm{Y}'_1)^2}{y_1-\mathrm{Y}_1}>2\mathrm{M}$, l'équation $y-\mathrm{Y}=0$ a deux racines réelles et inégales comprises entre x_1 et x_2, et par suite les deux arcs ab et AB se rencontrent en deux points.

Si $\frac{(y'_1-\mathrm{Y}'_1)^2}{y_1-\mathrm{Y}_1}<2m$, $y-\mathrm{Y}=0$ n'a aucune racine réelle entre x_1 et x_2, et par suite les deux arcs ab et AB n'ont aucun point commun.

Si $\frac{(y'_1-\mathrm{Y}'_1)^2}{y_1-\mathrm{Y}_1}$ est compris entre $2m$ et $2\mathrm{M}$, l'équation $y-\mathrm{Y}=0$ a deux racines réelles et égales entre x_1 et x_2, et les deux arcs ab et AB se touchent en un point dont l'abscisse est entre x_1 et x_2. Nous dirons dans ce cas que les équations proposées ont une solution double.

33. Il peut se faire encore que les limites x_1 et x_2 étant déjà assez rapprochées pour que $y^n - Y^n$ ne change pas de signe depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, la suite $[x_1]$ ne présente plus que des variations, et la suite $[x_2]$ ne présente plus que des permanences à partir de cette même dérivée $y^n - Y^n$, comme par exemple

	$y^n - Y^n$	$y^{n-1} - Y^{n-1}\ldots$		$y'' - Y''$	$y' - Y'$	$y - Y$
$[x_1]$	$+$	$-$	$\ldots$	$+$	$-$	$+$
$[x_2]$	$+$	$+$	$\ldots$	$+$	$+$	$+$

Alors, si $y^n - Y^n$ est constamment croissante ou décroissante de $x = x_1$ à $x = x_2$, et la méthode de Newton pouvant s'appliquer au calcul de la racine de $y^{n-1} - Y^{n-1} = 0$ comprise entre x_1 et x_2, on désignera par M et m le plus grand et le plus petit des deux nombres $(y^n_1 - Y^n_1)$ et $(y^n_2 - Y^n_2)$, et si

$$2m < \frac{(y_1^{n-1} - Y_1^{n-1})(y_1^{n-1} - Y_1^{n-1})}{y_1^{n-2} - Y_1^{n-2}} < 2M,$$

$$3m < \frac{(y_1^{n-2} - Y_1^{n-2})(y_1^{n-1} - Y_1^{n-1})}{y_1^{n-3} - Y_1^{n-3}} < 3M,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n-1)m < \frac{(y''_1 - Y''_1)(y_1^{n-1} - Y_1^{n-1})}{y'_1 - Y'_1} < (n-1)M,$$

$$nm < \frac{(y'_1 - Y'_1)(y_1^{n-1} - Y_1^{n-1})}{y - Y} < nM,$$

l'équation $y - Y = 0$ a entre x_1 et x_2 n racines réelles et égales et les arcs ab et AB ont un contact de l'ordre $n - 1$ en un point dont l'abscisse est comprise entre x_1 et x_2. Nous dirons que les équations $f(x, y) = 0$ et $F(x, y) = 0$ ont une solution multiple du $n^{\text{ième}}$ ordre.

34. Si toutes ces conditions étaient remplies, jusqu'au rapport $\frac{(y_1^{n-i} - Y_1^{n-i})(y_1^{n-1} - Y_1^{n-1})}{y_1^{n-i-1} - Y_1^{n-i-1}}$ qui serait plus grand que $(i+1)M$, ou plus petit que $(i+1)m$, on reconnaîtrait le nombre et la nature des racines de $y - Y = 0$, de la même manière qu'au n° **20**, nous avons reconnu la nature et le nombre des racines d'une équation à une seule inconnue $fx = 0$, et on en conclurait le nombre des points de rencontre ou de contact des deux arcs ab et AB.

35. Si une des quantités y, y', y'',..., y^i, ou Y, Y', Y'',..., Y^i devenait infinie pour une valeur de x comprise entre x_1 et x_2, on chercherait deux nombres α_1 et α_2 très-approchés de cette valeur de x, l'un par excès, l'autre par défaut, et on prendrait pour limites de x, x_1 et α_1, puis α_2 et x_2.

36. Prenons maintenant trois équations à deux inconnues,

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

et cherchons à reconnaître si deux valeurs de x et de y, qui composent une solution des deux premières $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$, et qui ne sont connues qu'approximativement, c'est-à-dire dont l'une x est comprise entre les limites connues x_1 et x_2, et l'autre y entre les limites connues aussi y_1 et y_2, satisfont à la troisième $\varphi(x, y) = 0$.

Nous remarquerons qu'en représentant par $y = \psi x$ une fonction de x déterminée par $f(x, y) = 0$, si les trois équations $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ ont une solution commune entre x_1 et x_2 et entre y_1 et y_2, il faudra que $F(x, \psi x) = 0$ et $\varphi(x, \psi x) = 0$ aient une racine commune entre $x = x_1$ et $x = x_2$; et réciproquement, si ces deux dernières équations ont une racine commune entre x_1 et x_2, les trois équations proposées auront une solution commune comprise entre $x = x_1$ et $x = x_2$, et entre $y = y_1$ et $y = y_2$.

Or, pour que les deux équations $F(x, \psi x) = 0$ et $\varphi(x, \psi x) = 0$ aient une racine commune entre x_1 et x_2, il est nécessaire et suffisant que

$$[F(x, \psi x)]^2 + [\varphi(x, \psi x)]^2 = \Phi x = 0$$

ait une racine double comprise entre ces limites.

Il faudra donc que Φx_1 et Φx_2 aient le même signe (à savoir le signe $+$);

que $\quad 2F'(x_1, \psi x_1) . F(x_1, \psi x_1) + 2\varphi'(x_1, \psi x_1) . \varphi(x_1, \psi x_1) = \Phi' x_1$,

et $\quad 2F'(x_2, \psi x_2) . F(x_2, \psi x_2) + 2\varphi'(x_2, \psi x_2) . \varphi(x_2, \psi x_2) = \Phi' x_2$

aient des signes contraires;

que $\quad 2F''(x_1, \psi x_1) F(x_1, \psi x_1) + 2[F'(x_1, \psi x_1)]^2 + 2\varphi''(x_1, \psi x_1) . \varphi(x_1, \psi x_1) + 2[\varphi'(x_1, \psi x_1)]^2 = \Phi'' x_1$,

et $\quad 2F''(x_2, \psi x_2) F(x_2, \psi x_2) + 2[F'(x_2, \psi x_2)]^2 + 2\varphi''(x_2, \psi x_2) . \varphi(x_2, \psi x_2) + 2[\varphi'(x_2, \psi x_2)]^2 = \Phi'' x_2$

aient le signe $+$ et soient constamment croissantes ou décroissantes de $x = x_1$ à $x = x_2$; et de plus, que $\frac{(\Phi' x_1)^2}{\Phi x_1}$ soit compris entre $2\Phi'' x_1$ et $2\Phi'' x_2$.

Or, ces conditions pourront être vérifiées facilement, car la valeur y_1 de ψx quand $x = x_1$, et celle y_2 de la même fonction quand $x = x_2$, sont des valeurs approchées des racines de $f(x_1, y) = 0$ et de $f(x_2, y) = 0$. De plus,

$$[\mathrm{F}(x_1, \psi x_1)]^2 + [\varphi(x_1, \psi x_1)]^2 = [\mathrm{F}(x_1, y_1)]^2 + [\varphi(x_1, y_1)]^2,$$
$$[\mathrm{F}(x_2, \psi x_2)]^2 + [\varphi(x_2, \psi x_2)]^2 = [\mathrm{F}(x_2, y_2)]^2 + [\varphi(x_2, y_2)]^2,$$

$$\Phi' x_1 = 2\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx_1} + \frac{d\mathrm{F}}{dx_1} y'_1\right) \mathrm{F}(x_1, y_1) + 2\left(\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dy_1} y'_1\right) \varphi(x_1, y_1),$$

$$\Phi' x_2 = 2\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx_2} + \frac{d\mathrm{F}}{dy_2} y'_2\right) \mathrm{F}(x_2, y_2) + 2\left(\frac{d\varphi}{dx_2} + \frac{d\varphi}{dy_2} y'_2\right) \varphi(x_2, y_2),$$

$$\Phi'' x_1 = 2\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx_1^2} + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx_1 dy_1} y'_1 + \frac{d^2\mathrm{F}}{dy_1^2} y'^2_1 + \frac{d\mathrm{F}}{dy_1} y''_1\right) \mathrm{F}(x_1, y_1) + 2\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx_1} + \frac{d\mathrm{F}}{dy_1} y'_1\right)^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2\varphi}{dx_1^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dx_1 dy_1} y'_1 + \frac{d^2\varphi}{dy_1^2} y'^2_1 + \frac{d\varphi}{dy_1} y''_1\right) \varphi(x_1, y_1) + 2\left(\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dy_1} y'_1\right)^2,$$

$$\Phi'' x_2 = 2\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx_2^2} + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx_2 dy_2} y'_2 + \frac{d^2\mathrm{F}}{dy_2^2} y'^2_2 + \frac{d\mathrm{F}}{dy_2} y''_2\right) \mathrm{F}(x_2, y_2) + 2\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx_2} + \frac{d\mathrm{F}}{dy_2} y'_2\right)^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2\varphi}{dx_2} + 2\frac{d\varphi^2}{dx_2 dy_2} y'_2 + \frac{d^2\varphi}{dy_2^2} y'^2_2 + \frac{d\varphi}{dy_2} y''_2\right) \varphi(x_2, y_2) + 2\left(\frac{d\varphi}{dx_2} + \frac{d\varphi}{dy_2} y'_2\right)^2.$$

37. Si l'on avait n équations entre deux inconnues x et y, savoir :

$$\mathrm{F}_1(x, y) = 0, \quad \mathrm{F}_2(x, y) = 0, \ldots, \quad \mathrm{F}_n(x, y) = 0,$$

il faudra, pour que ces n équations aient une solution commune comprise entre des limites très-rapprochées, x_1 et x_2 pour la variable x, y_1, y_2 pour la variable y, que, ψx désignant une fonction y de x déterminée par l'équation $\mathrm{F}_1(x, y) = 0$, les $n - 1$ équations $\mathrm{F}_2(x, \psi x) = 0, \ldots, \mathrm{F}_n(x, \psi x) = 0$ aient une racine commune entre x_1 et x_2, ou que

$$[\mathrm{F}_2(x, \psi x)]^2 + \ldots + [\mathrm{F}_n(x, \psi x)]^2 = 0$$

aient une racine double entre les mêmes limites, ce dont il sera facile de s'assurer.

III. — *De quelques cas exceptionnels.*

38. *Des contacts de deux courbes planes.* — On dit que deux courbes planes données par les équations $y = fx$, $\mathrm{Y} = \mathrm{F}x$, ont un contact de l'ordre n au point (x_1, y_1), lorsque pour $x = x_1$ on a

$$y - Y = 0, \quad \frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2Y}{dx^2} = 0, \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} - \frac{d^nY}{dx^n} = 0,$$

$$\text{et} \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}Y}{dx^{n+1}} \lesseqgtr 0.$$

Or, ce sont là les conditions pour que l'équation $fx - Fx = 0$ ait $n+1$ racines égales à x_1. Si donc on désigne par a et b deux nombres très-rapprochés de x_1, et tels que $a < x_1 < b$, ces conditions pourront être remplacées par les suivantes :

1° Il faudra qu'en formant les suites $[a]$ et $[b]$, et les faisant commencer à $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}Y}{dx^{n+1}}$, la suite $[a]$ ne présente que des variations, et la suite $[b]$ ne présente que des permanences ;

2° Que x croissant depuis a jusqu'à b, $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}Y}{dx^{n+1}}$ soit constamment croissante ou décroissante ;

3° Que les nombres a et b soient assez rapprochés pour qu'on puisse appliquer la méthode de Newton au calcul de la racine de $\frac{d^ny}{dx^n} - \frac{d^nY}{dx^n} = 0$ comprise entre a et b ;

4° Que M et m désignant le plus grand et le plus petit des deux nombres $\frac{d^{n+1}y}{da^{n+1}} - \frac{d^{n+1}Y}{da^{n+1}}$ et $\frac{d^{n+1}y}{db^{n+1}} - \frac{d^{n+1}Y}{db^{n+1}}$, on ait

$$(n+1)m < \frac{\left(\frac{d^ny}{da^n} - \frac{d^nY}{da^n}\right)\left(\frac{dy}{da} - \frac{dY}{da}\right)}{ya - Ya} < (n+1)\text{M},$$

$$nm < \frac{\left(\frac{d^ny}{da^n} - \frac{d^nY}{da^n}\right)\left(\frac{d^2y}{da^2} - \frac{d^2Y}{da^2}\right)}{\frac{dy}{da} - \frac{dY}{da}} < n\text{M},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$3m < \frac{\left(\frac{d^ny}{da^n} - \frac{d^nY}{da^n}\right)\left(\frac{d^{n-1}y}{da^{n-1}} - \frac{d^{n-1}Y}{da^{n-1}}\right)}{\frac{d^{n-2}y}{da^{n-2}} - \frac{d^{n-2}Y}{da^{n-2}}} < 3\text{M},$$

$$2m < \frac{\left(\frac{d^ny}{da^n} - \frac{d^nY}{da^n}\right)\left(\frac{d^ny}{da^n} - \frac{d^nY}{da^n}\right)}{\frac{d^{n-1}y}{da^{n-1}} - \frac{d^{n-1}Y}{da^{n-1}}} < 2\text{M}.$$

Ces nouvelles conditions, en apparence plus compliquées, sont cependant, dans la pratique, plus faciles à vérifier que les premières, qui ne peuvent être considérées que comme la définition analytique du contact du $n^{ième}$ ordre entre deux courbes données. Car, dans la plupart des cas, x_1 et les valeurs de fx_1 et de Fx_1, et celles des dérivées de ces deux fonctions, ne peuvent être connues qu'approximativement, et dès lors il est impossible de s'assurer si les quantités $y_1 - Y_1$, $\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dY_1}{dx_1}$, $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} - \frac{d^2Y_1}{dx_1^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{dx_1^n} - \frac{d^nY}{dx^n}$ sont réellement nulles ou seulement très-petites.

Lorsque les deux courbes sont données par des équations non résolues, telles que $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, les conditions du contact du $n^{ième}$ ordre sont encore les mêmes, mais les valeurs des fonctions y et Y, et celles des dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$, relatives à une même abscisse, doivent être calculées comme il a été dit au nº **26**.

39. *Des points singuliers.* — Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe qui a un point singulier dont les coordonnées sont ξ et η; et soient x_1 et x_2 deux abscisses très-rapprochées et qui comprennent ξ; on sait que ξ et η doivent satisfaire à la fois aux trois équations

$$f(x,y)=0,\quad \frac{df}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}=0.$$

Si donc on tire de $\frac{df}{dx}=0$ la valeur de y en fonction de x, savoir $\mathfrak{Y}=\varphi x$, et de $\frac{df}{dy}=0$ la valeur de y en fonction de x, savoir $Y=\psi x$, il faudra que chacune des équations en x

$$f(x,\varphi x)=0,\quad f(x,\psi x)=0$$

ait une racine double entre x_1 et x_2, et que cette racine soit la même pour l'une et pour l'autre.

Donc il faudra que

$$[f(x,\varphi x)]^2+[f(x,\psi x)]^2=0$$

ait une racine quadruple entre x_1 et x_2.

Donc, Fx désignant la fonction $[f(x,\varphi x)]^2+[f(x,\psi x)]^2$, il faudra d'abord qu'on ait les suites de signes

	$F^{IV}x$	$F'''x$	$F''x$	$F'x$	Fx
$[x_1]$	+	−	+	−	+
$[x_2]$	+	+	+	+	+

$F^{IV}x$ ne changeant point de signe, et étant toujours croissante ou décroissante de $x = x_1$ à $x = x_2$; et que, de plus, M et m désignant la plus grande et la plus petite des deux quantités $F^{IV}x_1$ et $F^{IV}x_2$, on ait

$$2m < \frac{(F'''x_1)^2}{F''x_1} < 2M,$$

$$3m < \frac{F''x_1 F'''x_1}{F'x_1} < 3M,$$

$$4m < \frac{F'x_1 F'''x_1}{Fx_1} < 4M.$$

Quant aux quantités Fx_1, Fx_2, $F'x_1$, $F'x_2$, ..., elles s'obtiendront facilement de la manière suivante :

Dans Fx et dans ses dérivées, on remplacera φx et ψx par $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Y}_2$ et par Y_1 et Y_2, $\varphi' x$ et $\psi' x$ par $\mathfrak{Y}'_1$ et $\mathfrak{Y}'_2$ et par Y'_1 et Y'_2, $\varphi'' x$ et $\psi'' x$ par ..., les quantités $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Y}_2$, puis Y_1 et Y_2 étant tirées des équations

$$\frac{df(x_1, y)}{dx} = 0, \quad \frac{df(x_2, y)}{dx} = 0, \quad \frac{df(x_1, y)}{dy} = 0, \quad \frac{df(x_2, y)}{dy} = 0;$$

de même, $\mathfrak{Y}'_1$ et $\mathfrak{Y}'_2$, puis Y'_1 et Y'_2, étant déterminées par les équations

$$\frac{d^2f(x_1, y_1)}{dx_1^2} + \frac{d^2f(x_1, y_1)}{dx_1 dy_1}\mathfrak{Y}'_1 = 0, \quad \frac{d^2f(x_2, y_2)}{dx_2^2} + \frac{d^2f(x_2, y_2)}{dx_2 dy_2}\mathfrak{Y}'_2 = 0,$$

$$\frac{d^2f(x_1, y_1)}{dx_1 dy_1} + \frac{d^2f(x_1, y_1)}{dy_1^2} Y'_1 = 0, \quad \frac{d^2f(x_2, y_2)}{dx_2 dy_2} + \frac{d^2f(x_2, y_2)}{dy_2^2} Y'_2 = 0,$$

et ainsi de suite.

Après avoir constaté l'existence d'un point singulier entre les abscisses x_1 et x_2, il sera facile de distinguer la nature du point singulier qu'on a rencontré.

40. Lorsqu'il s'agira d'un point multiple, par intersection ou par contact, on pourra, pour en déterminer l'existence et la nature, employer avec avantage la méthode suivante :

Soient ξ et η les coordonnées d'un point singulier résultant de l'intersection ou du contact de deux branches d'une même courbe $f(x, y) = 0$, x_1 et x_2 deux abscisses très-voisines de ξ, et telles que $x_1 < \xi < x_2$; y_1 et Y_1 les ordonnées correspondantes à x_1 pour l'une et l'autre branche, et y_2 et Y_2 les coordonnées de ces deux mêmes branches correspondantes à x_2 : si $y_1 - Y_1$ et $y_2 - Y_2$ ont des signes différents, et que la dérivée $y' - Y'$ soit finie et continue et ne change pas de signe depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, la courbe aura un point double par intersection dont l'abscisse est comprise entre x_1 et x_2.

Si $y_1 - Y_1$ et $y_2 - Y_2$ ont le même signe, et que $y'_1 - Y'_1$ et $y'_2 - Y'_2$ aient des signes contraires, et que $y'' - Y''$ soit finie et continue et ne change pas de signe depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, et que, de plus, cette différence soit constamment croissante ou décroissante entre ces deux limites, M et m étant la plus grande et la plus petite valeur de $y'' - Y''$, les deux branches de courbe se rencontrent en deux points, si

$$\frac{(y'_1 - Y'_1)^2}{y_1 - Y_1} > 2M,$$

et il y a deux points doubles dont les abscisses sont comprises entre x_1 et x_2.

Si

$$\frac{(y'_1 - Y'_1)^2}{y_1 - Y_1} < 2m,$$

les deux branches ne se rencontrent pas, et il n'y a aucun point multiple dont l'abscisse est comprise entre x_1 et x_2.

Si

$$2m < \frac{(y'_1 - Y'_1)^2}{y_1 - Y_1} < 2M,$$

les deux branches se touchent en un point dont l'abscisse est comprise entre x_1 et x_2.

Les deux branches de courbe pourront avoir un contact d'ordre supérieur ; on le reconnaîtra au moyen des différences des ordonnées de points voisins du point singulier pris sur l'une et l'autre branche et de part et d'autre de ce point, et des dérivées de ces différences, comme s'il s'agissait de deux courbes distinctes, comme il a été expliqué au n° **38**.

Si trois branches d'une même courbe passent par un même point (ξ, η), et si l'on désigne par y, y', y'' les ordonnées de la première, de la seconde et de la troisième branche, correspondantes à une abscisse quelconque α

comprise entre x_1 et x_2, x_1 et x_2 étant deux abscisses voisines telles que $x_1 < \xi < x_2$, il faudra que l'équation

$$(y - y')^2 + (y - y'')^2 = 0$$

ait une racine double comprise entre x_1 et x_2, ce qui se reconnaîtra aisément.

De même, y', y'', ..., y^n étant les ordonnées de n branches différentes d'une même courbe, qui passent par un point dont l'abscisse ξ est comprise entre les deux nombres très-rapprochés x_1 et x_2, il faudra que l'équation

$$(y' - y'')^2 + (y' - y''')^2 + \ldots + (y' - y^n)^2 = 0$$

ait deux racines réelles et égales entre x_1 et x_2.

Si trois branches d'une même courbe passaient par un même point, deux étant tangentes entre elles et la troisième coupant les deux premières ; y', y'' et y''' étant les ordonnées de points pris sur chacune d'elles, et répondant à la même abscisse quelconque x ; x_1 et x_2 étant deux nombres très-voisins qui comprennent entre eux l'abscisse du point multiple, il faudrait que l'équation

$$(y' - y'')^2 + (y' - y''')^4 = 0$$

eût quatre racines réelles et égales comprises entre x_1 et x_2.

Et ainsi de suite.

41. Lorsqu'il s'agira d'un point conjugué, on pourra employer les considérations suivantes :

Un point isolé ou conjugué d'une courbe algébrique est l'intersection de deux branches de courbe imaginaires, dont les ordonnées correspondantes à une valeur réelle x de l'abscisse sont de la forme

$$y = \varphi x + \psi x \sqrt{-1}, \quad Y = \varphi x - \psi x \sqrt{-1},$$

la fonction ψx devenant nulle pour le point conjugué. Pour un pareil point, on aura

$$\begin{aligned} y - Y &= 2\psi\, x\sqrt{-1}, \\ y' - Y' &= 2\psi' x\sqrt{-1}, \\ y'' - Y'' &= 2\psi'' x\sqrt{-1}, \\ y''' - Y''' &= 2\psi''' x\sqrt{-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour reconnaître si ψx s'évanouit par une valeur de x comprise entre x_1 et x_2, on pourra supprimer le facteur $\sqrt{-1}$, et si $2\psi x_1$ et $2\psi x_2$ ont des signes contraires, et que $2\psi' x$ soit finie et continue et conserve le même signe depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, ψx devient nulle pour une valeur de x comprise entre $x = x_1$ et $x = x_2$, et il y a un point isolé.

Si $2\psi x_1$ et $2\psi x_2$ ont le même signe, et que $2\psi' x_1$ et $2\psi' x_2$ aient des signes contraires, et que $2\psi'' x$ soit finie et continue et ne change point de signe et soit constamment croissante ou décroissante depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, M et m désignant la plus grande et la plus petite valeur de $2\psi'' x$, quand x varie entre ces deux limites :

Si

$$\frac{(2\psi' x_1)^2}{2\psi x_1} > 2m,$$

il y a deux points conjugués.

Si

$$\frac{(2\psi' x_1)^2}{2\psi x_1} \text{ est compris entre } 2m \text{ et } 2\mathrm{M},$$

il y a un point conjugué, et la courbe a une tangente en ce point.

Si

$$\frac{(2\psi' x_1)^2}{2\psi x_1} < 2m,$$

la courbe n'a pas de point conjugué entre $x = x_1$ et $x = x_2$.

Si la courbe est donnée par une équation algébrique non résolue $f(x, y) = 0$, x_1 et x_2 étant deux abscisses très-rapprochées et comprenant un point conjugué, on aura pour la différence des ordonnées de deux points de ces branches correspondants aux abscisses x_1 et x_2

$$y_1 - \mathrm{Y}_1 = 2\beta_1\sqrt{-1}, \quad y'_1 - \mathrm{Y}'_1 = 2\beta'_1\sqrt{-1}, \quad y''_1 - \mathrm{Y}''_1 = 2\beta''_1\sqrt{-1}, \ldots,$$
$$y_2 - \mathrm{Y}_2 = 2\beta_2\sqrt{-1}, \quad y'_2 - \mathrm{Y}'_2 = 2\beta'_2\sqrt{-1}, \quad y''_2 - \mathrm{Y}''_2 = 2\beta''_2\sqrt{-1}, \ldots,$$

et, au moyen des signes de ces quantités et des théorèmes de la première Partie, que nous avons appliqués si souvent, on reconnaîtra si les deux branches imaginaires se coupent en un ou deux points, ou si elles ont un simple contact ou un contact d'un ordre plus élevé, ou si elles ne se rencontrent point.

42. *Condition pour qu'une branche de la courbe $f(x, y) = 0$ passe par* *un point double par intersection d'une autre courbe* $F(x, y) = 0$. — x_1 et x_2 étant deux abscisses très rapprochées qui comprennent le point double de $F(x, y) = 0$; y, Y et $\mathfrak{Y}$ étant les ordonnées de la branche de f et des deux branches de F qui passent par ce point double, il faudra que l'équation

$$(y - Y)^2 + (Y - \mathfrak{Y})^2 = 0$$

ait deux racines réelles et égales entre x_1 et x_2.

43. *Condition pour qu'une branche de la courbe* $f(x, y) = 0$ *passe par un point double par contact de la courbe* $F(x, y) = 0$. — x_1 et x_2 étant deux abscisses qui comprennent le point double, y, Y, $\mathfrak{Y}$ étant les ordonnées de la branche de f et des deux branches de F qui passent par le point singulier, il faudra encore que l'équation

$$(y - Y)^2 + (y - \mathfrak{Y})^2 = 0$$

ait deux racines réelles et égales entre x_1 et x_2.

44. *Condition pour que la courbe* $f(x, y) = 0$ *ait un point double par intersection, coïncidant avec un point double par intersection de la courbe* $F(x, y) = 0$. — x_1 et x_2 étant toujours deux abscisses très-rapprochées, comprenant le point double commun aux deux courbes, y et η désignant les ordonnées des deux branches de f, et Y et $\mathfrak{Y}$ les ordonnées des deux branches de F, il faudra que l'équation

$$(y - \eta)^2 + (\eta - Y)^2 + (Y - \mathfrak{Y})^2 = 0$$

ait deux racines réelles et égales entre $x = x_1$ et $x = x_2$.

45. *Condition pour que la courbe* $f(x, y) = 0$ *ait un point double par contact coïncidant avec un point double par contact d'une autre courbe* $F(x, y) = 0$. — Il faut, en conservant les notations du numéro précédent, que

$$(y - \eta)^2 + (\eta - Y)^2 + (Y - \mathfrak{Y})^2 = 0$$

ait quatre racines réelles et égales comprises entre x_1 et x_2. On voit facilement ce qu'il y aurait à faire, pour reconnaître :

Si une branche de $f(x, y) = 0$ passe par un point triple par intersection ou par contact d'une autre courbe $F(x, y) = 0$;

Si un point double ou triple coïncide avec un point triple d'une autre courbe;

Et ainsi de suite.

46. *Condition pour qu'une branche d'une courbe $f(x, y) = 0$ passe par un point isolé d'une autre courbe* $F(x, y) = 0$.

Si la courbe est algébrique, x_1 et x_2 étant deux abscisses très-rapprochées qui comprennent celle du point isolé, Y et $\mathfrak{Y}$ étant les ordonnées de deux branches imaginaires de $F(x, y) = 0$, correspondantes à une même abscisse, y l'ordonnée correspondante à la même abscisse de la branche de $f(x, y) = 0$ qui passe par le point isolé, il faudra que l'équation

$$(y - Y)^2 + (y - \mathfrak{Y})^2 = 0$$

ait deux racines réelles et égales entre $x = x_1$ et $x = x_2$, pourvu que le point isolé résulte d'une simple intersection des deux branches imaginaires de F.

47. La méthode suivante conviendra à un plus grand nombre de courbes.

$F(x, y) = 0$ étant l'équation de la courbe qui a un point isolé, et $f(x, y) = 0$ étant l'équation de l'autre courbe, on prendra les équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Soit $y = \varphi x$ la valeur de y en x tirée de $\frac{dF}{dx} = 0$, et $y = \psi x$ la valeur de y en x tirée de $\frac{dF}{dy} = 0$, il faudra que l'équation

$$[f(x, \varphi x)]^4 + [f(x, \psi x)]^4 + [F(x, \varphi x)]^2 + [F(x, \psi x)]^2 = 0$$

ait quatre racines réelles et égales entre x_1 et x_2.

Quant aux quantités φx_1 et φx_2, $\varphi' x_1$ et $\varphi' x_2, \ldots, \psi x_1$ et $\psi x_2, \ldots$, il a été expliqué aux n^os **36** et **39** comment on peut les obtenir.

C'est de la même manière qu'on reconnaîtra qu'une branche d'une courbe passe par un point de rebroussement d'une autre courbe.

On voit encore comment on pourra reconnaître qu'un point conjugué d'une courbe coïncide avec un point conjugué ou un point de rebroussement d'une autre courbe, et que deux points de rebroussement de deux courbes différentes coïncident.

48. La méthode exposée au second paragraphe se trouvera en défaut lorsqu'une branche d'une courbe $f(x, y) = 0$ passe par un point d'une autre courbe $F(x, y) = 0$, pour lequel la tangente est perpendiculaire à l'axe des x, ou pour lequel $y' = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$ est infinie.

x_1 et x_2 étant deux abscisses très-rapprochées comprenant le point de $F(x, y) = 0$ pour lequel y' devient infinie, $F(x_1, y) = 0$ déterminera généralement entre les limites y_1 et y_2 de la variable y deux valeurs très-rapprochées de cette inconnue, tandis que $F(x_2, y) = 0$ ne déterminera aucune valeur de y entre y_1 et y_2.

Alors les dérivées des deux valeurs de y correspondantes à $x = x_1$ seront très-grandes, et d'ailleurs les deux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0$$

n'auront point de solution commune entre x_1 et x_2.

On prendra alors y pour la variable et x pour la fonction dans les deux équations $f(x, y) = 0$ et $F(x, y) = 0$, et la difficulté disparaitra.

Cependant, si les deux courbes $f(x, y) = 0$ et $F(x, y) = 0$ se coupent à angle droit, de telle sorte que l'y' du point de rencontre soit infinie pour la courbe f et nulle pour la courbe F; en prenant x pour la fonction et y pour la variable, l'x' du point de rencontre serait encore nulle pour l'une des courbes et infinie pour l'autre, et la difficulté subsisterait toujours.

On pourra alors changer les axes des coordonnées en les faisant tourner de 45 degrés autour de l'origine, et remplacer

$$x \text{ par } \frac{1}{2}(u - v)\sqrt{2},$$

$$y \text{ par } \frac{1}{2}(u + v)\sqrt{2}.$$

Il sera alors facile de calculer les valeurs de u et de v relatives au point de rencontre des deux courbes, et d'en tirer ensuite l'abscisse x et l'ordonnée y.

49. Il peut encore se faire que $f(x_1, y) = 0$ ait entre y_m et y_n (*voir* les n^{os} **25** et **26**) une racine multiple. Alors il passe par le point de rencontre de la courbe F et de la droite PMN deux ou plusieurs branches de cette courbe; et il pourra devenir difficile de suivre le cours de chacune de ces branches entre les deux parallèles PMN et QM'N'. Mais l'abscisse x_1 est comprise entre deux autres x_0 et x_2; alors soient ξ_1 et ξ_2 deux autres abscisses telles, que $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$; et l'on pourra prendre pour limites de x d'abord x_0 et ξ_1, puis ξ_1 et ξ_2, et ensuite ξ_2 et x_2, et l'on retombera dans des cas précédemment résolus.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A QUELQUES EXEMPLES.

PREMIER EXEMPLE.

50. Je prends pour premier exemple les deux équations

$$f = 9x^4 + 5x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 - 4y^4 - x^3 - y^3 - 2x^2 - 4xy - 3y^2 + 2x + 3y - 11 = 0,$$

$$F = x^3 - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 2x + 3y - 13 = 0.$$

Soient

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = 5$$

les deux limites de la variable x;

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = 5$$

les limites de la variable y.

Il en résultera :

limite supérieure de $f > 0$,
limite supérieure de $F > 0$,
limite inférieure de $f < 0$,
limite inférieure de $F < 0$.

Il peut donc y avoir une ou plusieurs racines dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 5$ d'une part, et de $y = 0$ à $y = 5$ d'autre part.

Je prendrai maintenant pour limites de x, $x = 0$ et $x = 1$, et successivement pour limites de y, $y = 0$ et $y = 1$, $y = 1$ et $y_2, \ldots$, puis $y = 4$ et $y = 5$.

Je calculerai dans chaque cas les limites supérieures et inférieures de f et les limites supérieures et inférieures de F. Quand les deux limites supérieures seront positives, et qu'en même temps les deux limites inférieures seront négatives, il pourra y avoir des solutions dans l'intervalle considéré ; mais quand une des deux limites supérieures sera négative ou quand une des deux limites inférieures sera positive, il n'y aura point de solution.

Les résultats que j'ai obtenus sont consignés dans le tableau suivant, dont la disposition se comprend aisément :

De $x = 0$ à $x = 1$	et de $y = 0$ à $y = 1$......	Point de solution.
	de $y = 1$ à $y = 2$......	Une solution.
	de $y = 2$ à $y = 3$......	Point de solution.
	de $y = 3$ à $y = 4$......	Id.
	de $y = 4$ à $y = 5$......	Id.

En prenant pour limites de x, $x = 1$ et $x = 2$, et pour celles de y successivement $y = 0$ et $y = 1$, $y = 1$ et $y = 2, \ldots$, $y = 4$ et $y = 5$; puis, pour limites de x, $x = 2$ et $x = 3$, et pour celles de y, $y = 0$ et $y = 1$, $y = 1$ et $y = 2, \ldots$, $y = 4$ et $y = 5$, on trouvera les résultats consignés dans les tableaux suivants :

De $x = 1$ à $x = 2$	et de $y = 0$ à $y = 1$......	Une solution.
	de $y = 1$ à $y = 2$......	Id.
	de $y = 2$ à $y = 3$......	Id.
	de $y = 3$ à $y = 4$......	Id.
	de $y = 4$ à $y = 5$......	Point de solution.
De $x = 2$ à $x = 3$	et de $y = 0$ à $y = 1$......	Point de solution
	de $y = 1$ à $y = 2$......	Id.
	de $y = 2$ à $y = 3$......	Une solution.
	de $y = 3$ à $y = 4$......	Point de solution.
	de $y = 4$ à $y = 5$......	Id.
De $x = 3$ à $x = 4$	et de $y = 0$ à $y = 1$......	Point de solution.
	de $y = 1$ à $y = 2$......	Id.
	de $y = 2$ à $y = 3$......	Id.
	de $y = 3$ à $y = 4$......	Une solution.
	de $y = 4$ à $y = 5$......	Id.

De $x=4$ à $x=5$	et de $y=0$ à $y=1$	Point de solution.
	de $y=1$ à $y=2$......	Id.
	de $y=2$ à $y=3$......	Id.
	de $y=3$ à $y=4$......	Id.
	de $y=4$ à $y=5$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $x=0$, $x=1$ et entre $y=1$, $y=2$. — J'entends par analyser un intervalle, le décomposer en d'autres plus petits ou dont les limites sont plus rapprochées.

De $y=1$ à $y=2$	et de $x=0$ à $x=0{,}1$...	Point de solution.
	de $x=0{,}1$ à $x=0{,}2$...	Id.
	de $x=0{,}2$ à $x=0{,}3$...	Id.
	de $x=0{,}3$ à $x=0{,}4$...	Id.
	de $x=0{,}4$ à $x=0{,}5$...	Id.
	de $x=0{,}5$ à $x=0{,}6$...	Id.
	de $x=0{,}6$ à $x=0{,}7$...	Id.
	de $x=0{,}7$ à $x=0{,}8$...	Une solution.
	de $x=0{,}8$ à $x=0{,}9$...	Point de solution.
	de $x=0{,}9$ à $x=1{,}0$...	Id.

Une solution est donc possible entre $x=0{,}7$, $x=0{,}8$ et $y=1$, $y=2$. Mais si l'on décompose cet intervalle en dix autres compris entre $x=0{,}7$ et $x=0{,}8$ d'une part, et entre $y=1$, $y=1{,}1$, puis entre $y=1{,}1$ et $y=1{,}2$, puis entre $y=1{,}2$ $y=1{,}3$, etc., d'autre part, on verra qu'il n'y a point de solution dans ces sous-intervalles.

Ainsi, entre $x=0$ et $x=1$ et $y=1$, $y=2$, point de solution.

La décomposition de l'intervalle compris entre $x=1$ et $x=2$, d'une part, et entre $y=0$, $y=1$, d'autre part, en d'autres intervalles compris entre des valeurs de x distantes d'un dixième et des valeurs de y distantes d'un dixième, fera voir qu'il n'y a aucune solution comprise entre $x=1$, $x=2$ et $y=0$, $y=1$.

Analyse de l'intervalle compris entre $y = 1$, $y = 2$ et $x = 1$, $x = 2$.

De $y = 1$ à $y = 2$	et de $x = 1,0$ à $x = 1,1$...	Une solution.
	de $x = 1,1$ à $x = 1,2$...	Id.
	de $x = 1,2$ à $x = 1,3$...	Id.
	de $x = 1,3$ à $x = 1,4$...	Id.
	de $x = 1,4$ à $x = 1,5$...	Id.
	de $x = 1,5$ à $x = 1,6$. .	Id.
	de $x = 1,6$ à $x = 1,7$...	Id.
	de $x = 1,7$ à $x = 1,8$...	Point de solution.
	de $x = 1,8$ à $x = 1,9$...	Id.
	de $x = 1,9$ à $x = 2,0$...	Id.

Analyse des trois intervalles compris entre $y = 1$, $y = 2$, *d'une part, et* $x = 1,0$, $x = 1,1$, *puis* $x = 1,1$, $x = 1,2$, *puis* $x = 1,2$, $x = 1,3$, *d'autre part.*

De $x = 1$ à $x = 1,1$ De $x = 1,1$ à $x = 1,2$ De $x = 1,2$ à $x = 1,3$	et de $y = 1,0$ à $y = 1,1$......	Point de solution.
	de $y = 1,1$ à $y = 1,2$......	Id.
	de $y = 1,2$ à $y = 1,3$......	Id.
	de $y = 1,3$ à $y = 1,4$......	Id.
	de $y = 1,4$ à $y = 1,5$......	Id.
	de $y = 1,5$ à $y = 1,6$......	Id.
	de $y = 1,6$ à $y = 1,7$... ..	Id.
	de $y = 1,7$ à $y = 1,8$......	Id.
	de $y = 1,8$ à $y = 1,9$......	Id.
	de $y = 1,9$ à $y = 2,0$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $x = 1,3$, $x = 1,4$ *et* $y = 1$, $y = 2$.

De $x = 1,3$ à $x = 1,4$	et de $y = 1,0$ à $y = 1,1$......	Point de solution.
	de $y = 1,1$ à $y = 1,2$......	Id.
	de $y = 1,2$ à $y = 1,3$......	Id.
	de $y = 1,3$ à $y = 1,4$......	Id.
	de $y = 1,4$ à $y = 1,5$......	Id.
	de $y = 1,5$ à $y = 1,6$......	Id.
	de $y = 1,6$ à $y = 1,7$......	Id.
	de $y = 1,7$ à $y = 1,8$......	Une solution.
	de $y = 1,8$ à $y = 1,9$	Point de solution.
	de $y = 1,9$ à $y = 2,0$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $x = 1,4$, $x = 1,5$ et $y = 1$, $y = 2$.

De $x = 1,4$ à $x = 1,5$	et de $y = 1,0$ à $y = 1,1$......	Point de solution.
	de $y = 1,1$ à $y = 1,2$......	Id.
	de $y = 1,2$ à $y = 1,3$......	Id.
	de $y = 1,3$ à $y = 1,4$......	Id.
	de $y = 1,4$ à $y = 1,5$......	Id.
	de $y = 1,5$ à $y = 1,6$......	Id.
	de $y = 1,6$ à $y = 1,7$......	Id.
	de $y = 1,7$ à $y = 1,8$......	Une solution.
	de $y = 1,8$ à $y = 1,9$......	Id.
	de $y = 1,9$ à $y = 2,0$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $x = 1,5$, $x = 1,6$ et $y = 1$, $y = 2$.

De $x = 1,5$ à $x = 1,6$	et de $y = 1,0$ à $y = 1,1$......	Point de solution.
	de $y = 1,1$ à $y = 1,2$......	Id.
	de $y = 1,2$ à $y = 1,3$......	Id.
	de $y = 1,3$ à $y = 1,4$......	Id.
	de $y = 1,4$ à $y = 1,5$......	Id.
	de $y = 1,5$ à $y = 1,6$......	Id.
	de $y = 1,6$ à $y = 1,7$......	Id.
	de $y = 1,7$ à $y = 1,8$......	Une solution.
	de $y = 1,8$ à $y = 1,9$......	Id.
	de $y = 1,9$ à $y = 2,0$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $x = 1,6$, $x = 1,7$ et $y = 1$, $y = 2$.

De $x = 1,6$ à $x = 1,7$	et de $y = 1,0$ à $y = 1,1$......	Point de solution.
	de $y = 1,1$ à $y = 1,2$......	Id.
	de $y = 1,2$ à $y = 1,3$......	Id.
	de $y = 1,3$ à $y = 1,4$......	Id.
	de $y = 1,4$ à $y = 1,5$......	Id.
	de $y = 1,5$ à $y = 1,6$......	Id.
	de $y = 1,6$ à $y = 1,7$......	Id.
	de $y = 1,7$ à $y = 1,8$......	Id.
	de $y = 1,8$ à $y = 1,9$......	Id.
	de $y = 1,9$ à $y = 2,0$......	Une solution.

7..

Analyse de l'intervalle compris entre $x = 1$, $x = 2$ et $y = 2$ et $y = 3$.

De $y = 2$ à $y = 3$	et de $x = 1,0$ à $x = 1,1$.......	Point de solution.
	de $x = 1,1$ à $x = 1,2$.......	Id.
	de $x = 1,2$ à $x = 1,3$.......	Une solution.
	de $x = 1,3$ à $x = 1,4$.......	Id.
	de $x = 1,4$ à $x = 1,5$.......	Id.
	de $x = 1,5$ à $x = 1,6$.......	Id.
	de $x = 1,6$ à $x = 1,7$.......	Id.
	de $x = 1,7$ à $x = 1,8$.......	Id.
	de $x = 1,8$ à $x = 1,9$.......	Id.
	de $x = 1,9$ à $x = 2,0$.......	Id.

Analyse des intervalles compris entre $y = 2$, $y = 3$, d'une part, et successivement d'autre part $x = 1,0$, $x = 1,1$; $x = 1,1$, $x = 1,2$; $x = 1,2$, $x = 1,3$; $x = 1,3$, $x = 1,4$; $x = 1,4$, $x = 1,5$.

De $x = 1,0$ à $x = 1,1$ De $x = 1,1$ à $x = 1,2$ De $x = 1,2$ à $x = 1,3$ De $x = 1,3$ à $x = 1,4$ De $x = 1,4$ à $x = 1,5$	et de $y = 2,0$ à $y = 2,1$......	Point de solution.
	de $y = 2,1$ à $y = 2,2$......	Id.
	de $y = 2,2$ à $y = 2,3$......	Id.
	de $y = 2,3$ à $y = 2,4$......	Id.
	de $y = 2,4$ à $y = 2,5$......	Id.
	de $y = 2,5$ à $y = 2,6$......	Id.
	de $y = 2,6$ à $y = 2,7$......	Id.
	de $y = 2,7$ à $y = 2,8$......	Id.
	de $y = 2,8$ à $y = 2,9$......	Id.
	de $y = 2,9$ à $y = 3,0$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $x = 1,5$, $x = 1,6$ et $y = 2$, $y = 3$.

De $x = 1,5$ à $x = 1,6$	et de $y = 2,0$ à $y = 2,1$......	Une solution.
	de $y = 2,1$ à $y = 2,2$......	Point de solution.
	de $y = 2,2$ à $y = 2,3$......	Id.
	de $y = 2,3$ à $y = 2,4$......	Id.
	de $y = 2,4$ à $y = 2,5$......	Id.
	de $y = 2,5$ à $y = 2,6$......	Id.
	de $y = 2,6$ à $y = 2,7$......	Id.
	de $y = 2,7$ à $y = 2,8$......	Id.
	de $y = 2,8$ à $y = 2,9$......	Id.
	de $y = 2,9$ à $y = 3,0$......	Id.

Analyse de l'intervalle compris entre $y=2$, $y=3$ *et* $x=1{,}6$, $x=1{,}7$.

De $x=1{,}6$ à $x=1{,}7$	et de $y=2{,}0$ à $y=2{,}1$......	Une solution.
	de $y=2{,}1$ à $y=2{,}2$......	Id.
	de $y=2{,}2$ à $y=2{,}3$......	Id.
	de $y=2{,}3$ à $y=2{,}4$......	Id.
	de $y=2{,}4$ à $y=2{,}5$......	Point de solution.
	de $y=2{,}5$ à $y=2{,}6$......	Id.
	de $y=2{,}6$ à $y=2{,}7$......	Id.
	de $y=2{,}7$ à $y=2{,}8$......	Id.
	de $y=2{,}8$ à $y=2{,}9$......	Id.
	de $y=2{,}9$ à $y=3{,}0$......	Id.

....

En résumé, nous avons trouvé qu'il peut y avoir des solutions :

1° Entre $x=1{,}3$, $x=1{,}4$ et $y=1{,}7$, $y=1{,}8$,

2° Entre $x=1{,}4$, $x=1{,}5$ et $y=1{,}7$, $y=2{,}0$,

3° Entre $x=1{,}5$, $x=1{,}6$ et $y=1{,}7$, $y=2{,}0$,

4° Entre $x=1{,}6$, $x=1{,}7$ et $y=1{,}9$, $y=2{,}3$,

5° Entre $x=1{,}5$, $x=1{,}6$ et $y=2{,}0$, $y=2{,}1$.

....

Je vais maintenant chercher à découvrir, au moyen de la méthode exposée dans la seconde Partie, si ces racines existent et quel est leur nombre.

31. *Recherche des racines comprises entre* $x=1{,}3$, $x=1{,}4$ *et* $y=1{,}7$, $y=1{,}8$. — Dans l'équation $F=0$, on fait $x=1{,}3$; elle devient

$$y^3-0{,}9y^2+3y-10{,}023=0.$$

Dans le premier membre et dans ses dérivées, on fait successivement $y=1{,}7$ et $y=1{,}8$; on obtient les signes suivants :

	F'''	F''	F'	F
$[y=1{,}7]$	+	+	+	—
$[y=1{,}8]$	+	+	+	—

Point de variations de perdues.

La courbe F ne rencontre point la droite $x = 1,3$ entre $y = 1,7$ et $y = 1,8$.
Dans la même équation on fait $x = 1,4$, elle devient

$$y^3 - 1,2y^2 + 3y - 9,136 = 0;$$

et dans le premier membre et dans ses dérivées, on fait alternativement $y = 1,7$ et $y = 1,8$; on obtient les signes suivants :

	F'''	F''	F'	F
[$y = 1,7$]	+	+	+	—
[$y = 1,8$]	+	+	+	—

Aucune variation perdue.

Donc la courbe F ne rencontre pas non plus la droite $x = 1,4$ entre $y = 1,7$ et $y = 1,8$.

Je fais dans $F = 0$, $y = 1,7$; j'obtiens

$$x^3 + 2x^2 - 8,67x + 3,683 = 0.$$

Je remplace dans le premier membre et dans ses dérivées x par 1,3, puis par 1,4; je trouve les suites de signes

	F'''	F''	F'	F
[$x = 1,3$]	+	+	+	—
[$x = 1,4$]	+	+	+	—

Point de variations perdues.

Je fais dans la même équation $y = 1,8$, d'où

$$x^3 + 2x^2 - 14,96x + 20,952 = 0,$$

et la substitution de 1,3 et 1,4 en place de x dans le premier membre et ses dérivées donnera les suites de signes

	F'''	F''	F'	F
[$x = 1,3$]	+	+	—	+
[$x = 1,4$]	+	+	—	+

Point de variations perdues.

Donc, la courbe F ne coupe point les droites $y=1,7$ et $y=1,8$ entre $x=1,3$ et $x=1,4$.

Donc cette courbe n'a aucun point dans l'intervalle que nous considérons, à moins qu'il n'y ait un point isolé.

Mais pour que cette courbe $F=0$ ait un point isolé dans l'espace que nous considérons, il faut que les deux courbes données par les équations $\frac{dF}{dx}=0$, et $\frac{dF}{dy}=0$, traversent cet espace et s'y coupent. Or, si dans $\frac{dF}{dx}=0$ on fait alternativement $x=1,3$ et $x=1,4$, les équations en y qu'on obtient ont leurs racines inférieures à $1,7$. Et si, dans la même équation $\frac{dF}{dx}=0$, on fait alternativement $y=1,7$ et $y=1,8$, on obtient des équations dont les racines sont imaginaires ; donc la courbe $\frac{dF}{dx}$ ne traverse pas l'intervalle en question. Donc la courbe $F=0$ n'a pas de point isolé dans cet intervalle.

Donc cet intervalle ne contient aucune solution.

52. *Recherche des solutions comprises entre* $x=1,4$, $x=1,5$, *et* $y=1,7$, $y=2,0$. — Si dans l'équation $F=0$ on fait $y=1,7$, et que dans le résultat on remplace x par $1,4$, puis par $1,5$, on aura les deux suites de signes

	F'''	F''	F'	F
$[x=1,4]$	$+$	$+$	$+$	$-$
$[x=1,5]$	$+$	$+$	$+$	$-$

La courbe F ne traverse pas la droite $y=1,7$ entre $x=1,4$ et $x=1,5$.

Si dans la même équation $F=0$, on fait $y=2$, puis dans l'équation résultante $x=1,4$, puis $x=1,5$, on trouve les suites de signes

	F'''	F''	F'	F
$[x=1,4]$	$+$	$+$	$-$	$+$
$[x=1,5]$	$+$	$+$	$-$	$-$

La courbe F traverse la droite $y=2$ en un point qui est situé entre $x=1,4$ et $x=1,5$.

Dans $F=0$, faisons alternativement $x=1,4$ et $x=1,5$, on trouvera les résultats suivants :

	$F'''(y, 1{,}4)$	$F''(y, 1{,}4)$	$F'(y, 1{,}4)$	$F(y, 1{,}4)$
$[y = 1{,}7]$	+	+	+	—
$[y = 2]$	+	+	+	+

	$F'''(y, 1{,}5)$	$F''(y, 1{,}5)$	$F'(y, 1{,}5)$	$F(y, 1{,}5)$
$[y = 1{,}7]$	+	+	+	—
$[y = 2]$	+	+	+	—

La courbe F ne rencontre pas la droite $x = 1{,}5$ entre $y = 1{,}7$ et $y = 2$, mais rencontre la droite $x = 1{,}4$ en un point compris entre ces mêmes ordonnées. L'équation $F(y, 1{,}4) = 0$ fournira l'ordonnée Y_1 de ce point avec autant d'approximation qu'on voudra. On trouvera

$$1{,}99 < Y_1 < 2{,}00.$$

On peut rapprocher les limites de la racine de

$$F(x, 2) = x^3 + 2x^2 - 14x + 13 = 0,$$

et on aura

$$1{,}42 < x < 1{,}43.$$

Et si on fait dans $F = 0$, $x = 1{,}43$, on aura

$$y^3 - 1{,}29y^2 + 3y - 8{,}845993 = 0.$$

équation qui a une racine Y_2 comprise entre $2{,}0006$ et $2{,}0007$.

On voit par là que la courbe F ne traverse pas l'intervalle $(x = 1{,}4, x = 1{,}5)$ et $(y = 1{,}7, y = 2)$ entre les parallèles $x = 1{,}43$ et $x = 1{,}5$ à l'axe des y.

Je prendrai ensuite l'équation $f = 0$, j'y ferai $x = 1{,}4$, puis $x = 1{,}43$; j'aurai

$$4y^4 + 3{,}8y^3 - 4{,}84y^2 - 11{,}12y - 21{,}6104 = 0;$$

d'où

$$1{,}7281 < y < 1{,}7282.$$

Puis

$$4y^4 + 3{,}86y^3 - 5{,}1796y^2 - 12{,}621035y - 26{,}57033709 = 0,$$

d'où

$$1,8155 < y_2 < 1,8156.$$

On conclut de tout ce qui précède

$$y_1 - Y_1 < 0 \quad \text{et} \quad y_2 - Y_2 < 0.$$

De l'équation $F = 0$, on tire

$$y' = \frac{3x^2 - 3y^2 + 4x - 2}{6xy - 3y^2 - 3},$$

et on aura Y'_1 et Y'_2 en remplaçant, dans cette formule, x par $1,4$, et y par $1,99$; puis x par $1,43$ et y par $2,0006$.

De l'équation

$$9x^4 + 5x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 - 4y^4 - x^3 - y^3 - 2x^2 - 4xy \\ - 3y^2 + 2x + 3y - 11 = 0,$$

on tire

$$y' = -\frac{36x^3 + 15x^2y + 8xy^2 - 2y^3 - 3x^2 - 4x - 4y + 2}{5x^3 + 8x^2y - 6xy^2 - 16y^3 - 3y^2 - 4x - 6y + 3};$$

et on aura y'_1 et y'_2 en remplaçant dans cette dernière formule x par $1,4$ et y par $1,7281$; puis x par $1,43$, et y par $1,8155$.

Or, si on cherche les limites supérieures et inférieures que peuvent prendre ces deux formules quand on y fait varier x de $1,4$ à $1,43$, et y de $1,7$ à $2,0007$, on trouvera :

Que les deux limites de Y' sont positives;

Que les deux limites de y' sont positives;

Que la limite supérieure de Y' est moindre que la limite inférieure de y'.

Donc $y' - Y'$ ne change pas de signe dans l'intervalle $x = 1,4$, $x = 1,43$, et $y = 1,7$, $y = 2,0$.

Donc l'équation $y - Y = 0$ n'a point de racines entre $x = 1,4$ et $x = 1,43$; donc les deux équations $f = 0$ et $F = 0$ n'ont point de solutions dans l'intervalle que nous considérons.

53. *Recherche des solutions comprises dans l'intervalle* $x = 1,5$, $x = 1,6$, *et* $y = 1,8$, $y = 2,0$. — Si dans l'équation $F = 0$ on fait alternativement

$x = 1,5$ et $x = 1,6$, on trouve

$$y^3 - 1,5y^2 + 3y - 8,125 = 0,$$
$$y^3 - 1,8y^2 + 3y - 6,984 = 0,$$

équations qui n'ont aucune racine entre $y = 1,8$ et $y = 2,0$.

Si on fait, dans la même équation $F = 0$, alternativement $y = 1,8$ et $y = 2,0$, on trouve

$$x^3 + 2x^2 - 11,72x + 7,952 = 0,$$
$$x^3 + 2x^2 - 14x + 13 = 0,$$

équations qui n'ont aucune racine entre $x = 1,5$ et $x = 1,6$.

La courbe $F = 0$ ne traverse donc pas l'intervalle que nous considérons; cet intervalle ne contient donc aucune solution.

34. *Recherche des solutions comprises dans l'intervalle* $x = 1,5$, $x = 1,6$, *et* $y = 2$, $y = 2,1$. — En faisant successivement, dans $F = 0$, $x = 1,5$, $x = 1,6$, on a

$$y^3 - 1,5y^2 + 3y - 8,125 = 0,$$
$$y^3 - 1,8y^2 + 3y - 6,984 = 0.$$

La première a une racine Y_1 comprise entre $y = 2,01$ et $y = 2,02$. La seconde a une racine Y_2 comprise entre $y = 2,0245$ et $y = 2,0246$.

En faisant, dans $f = 0$, $x = 1,5$ et $x = 1,6$, on trouve

$$4y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 13,875y - 29,6875 = 0,$$
$$4y^4 + 4,2y^3 - 7,84y^2 - 17,080y - 41,9664 = 0.$$

La première a une racine y_1 comprise entre 1,89 et 1,90.

La seconde a une racine y_2 comprise entre 2,04 et 2,05.

Donc

$$y_1 - Y_1 < 0 \quad \text{et} \quad y_2 - Y_2 > 0.$$

On a d'ailleurs :

$$\text{limite supérieure de } y' = \frac{234,812}{105,295},$$

$$\text{limite inférieure de } y' = \frac{192,754}{115,334},$$

$$\text{limite supérieure de } Y' = \frac{1,912}{10,9689},$$

$$\text{limite inférieure de } Y' = \frac{0,043}{15,1092}.$$

Ainsi, la limite inférieure de y' est plus grande que la limite supérieure de Y'; donc $y' - Y'$ reste positif quand x varie de $x = 1,5$ à $x = 1,6$, et y depuis $y = 2$ jusqu'à $y = 2,1$; et l'équation $y - Y = 0$ a une racine et une seule entre ces valeurs de x et de y.

Donc les deux équations proposées ont une solution comprise entre $x = 1,5$, $x = 1,6$, et $y = 2$, $y = 2,1$.

Et ainsi de suite.

On voit comment on trouvera les autres solutions des deux équations proposées. Je passe à d'autres exemples.

DEUXIÈME EXEMPLE.

55. Je prends les deux équations

$$f = y^3 - xy\sqrt{3} + x^3 = 0,$$
$$F = (y^2 + x^2)^2 - 3xy = 0.$$

En prenant pour limites de x, $x = 0$ et $x = 1$, et pour celles de y, $y = 0$ et $y = 1$, on trouve qu'il peut y avoir une solution dans l'intervalle $x = 0$ et $x = 1$, et $y = 0$, $y = 1$.

En faisant croître ensuite x par degrés égaux à 0,1 depuis zéro jusqu'à 1, on trouve qu'il peut aussi y avoir une solution dans l'intervalle $x = 0,8$, $x = 0,9$ et $y = 0$, $y = 1$.

Faisant croître ensuite x par degrés égaux à 0,01 depuis $x = 0,8$ jusqu'à $x = 0,9$, on trouvera qu'il peut y avoir une solution dans l'intervalle $x = 0,86$, $x = 0,87$, et $y = 0$, $y = 1$.

Remplaçant maintenant x par 0,86 dans $f = 0$, nous aurons

$$y^3 - 0,86\sqrt{3}y + 0,636056 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles, car le premier membre est positif pour $y = 0$ et pour $y = 1$, et négatif pour $y = 0,5$. Si on cherche la racine comprise entre 0,5 et 1, on la trouve égale à $y_1 = 0,87173282\ldots$

Examinons la fonction de x déterminée par $f = 0$, et qui devient égale à y_1 quand $x = 0,86$ (fonction que je désigne par y), et cherchons la valeur qu'elle prend quand $x = 0,87$. On aura, d'après la formule de Taylor,

$$y_2 = y_1 + y'_1 \frac{h}{1} + y''_1 \frac{h^2}{1.2} + y'''_1 \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

en désignant par h l'accroissement 0,01, et par $y'_1, y''_1, y'''_1, \ldots$, les valeurs que prennent les dérivées de la fonction y, quand on y fait $x = 0,86$.

Comme

$$y' = -\frac{3x^2 - y\sqrt{3}}{3y^2 - x\sqrt{3}},$$

en mettant dans cette formule 0,86 en place de x, et 0,8717328 en place de y, on aura

$$y'_1 = -\frac{0,708913}{0,790191} = -0,8971414.$$

De même, comme on a

$$y'' = -\frac{6x - 2\sqrt{3}y' + 6yy'^2}{3y^2 - x\sqrt{3}},$$

en mettant dans cette formule 0,86 en place de x, et 0,8711328 en place de y, et $-0,89714$ en place de y', on aura

$$y''_1 = -\frac{12,47753}{0,790291} = -15,7905.$$

Enfin, comme

$$y''' = -\frac{6 + 6y'^3 + 3(-\sqrt{3} + 6y')\,y''}{3y^2 - x\sqrt{3}},$$

en faisant dans cette formule $x = 0,86$, $y = 0,87173$, $y' = -0,89714$ et $y'' = -15,7905$, on aura

$$y'''_1 = -\frac{306,360}{0,790191} = -387,70,$$

et ainsi de suite.

Ainsi,

$$y'_1\frac{h}{1} = -0,00897141,$$

$$y''_1\frac{h^2}{1.2} = -0,00078952,$$

$$y'''_1\frac{h^3}{1.2.3} = -0,00006461,$$

d'où $$y_2 - y_1 = -0,00982554,$$

et $$y_2 = 0,86190828.$$

Enfin, rectifions cette valeur au moyen de l'équation

$$y^3 - 0{,}87\sqrt{3}\,y + 0{,}658503 = 0,$$

qui provient de $f = 0$ dans laquelle on a remplacé x par $0{,}87$; on aura

$$y^2 = 0{,}86189927;$$

on trouvera ensuite facilement

$$y'_2 = -\,1{,}077768,$$
$$y''_2 = -\,20{,}72887.$$

Je prends maintenant l'équation

$$F = (y^2 + x^2)^2 - 3\,xy = 0,$$

qui devient, par suite de la substitution de 0,86 en place de x,

$$(y^2 + 0{,}7396)^2 - 2{,}58\,y = 0.$$

Cette dernière a deux racines comprises entre 0 et 1, car son premier nombre (si on le développe et qu'on l'ordonne par rapport aux puissances décroissantes de y) a deux variations, et il est positif quand $y = 0$ et $y = 1$, et négatif pour $y = 0{,}6$. La plus grande Y_1 de ces deux racines a pour valeur

$$Y_1 = 0{,}87192759.$$

J'appelle Y la fonction de x qui, satisfaisant à $F = 0$, devient égale à $Y_1 = 0{,}8719\ldots$ quand $x = 0{,}86$; la valeur que prend cette fonction quand $x = 0{,}87$ est donnée par la formule

$$Y_2 = Y_1 + Y'_1\,\frac{h}{1} + Y''_1\,\frac{h^2}{1.2} + Y'''_1\,\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

dans laquelle h représente 0,01, et Y_1, Y'_1, $Y''_1\ldots$, les valeurs que prennent Y et ses dérivées quand on fait $x = 0{,}86$. Or, pour $x = 0{,}86$ et $y = 0{,}8719\ldots$, on trouvera que

$$Y'_1 = -\,\frac{4x\,(y^2 + x^2) - 3y}{4y\,(y^2 + x^2) - 3x}$$

devient

$$-\frac{2,543726}{2,651068}=-0,9595104;$$

que

$$Y''_1=-\frac{4(y^2+x^2)+8x^2+2(8xy-3)y'+(4(y^2+x^2)+8y^2)y'^2}{4y(y^2+x^2)-3x}$$

devient

$$Y'_1=-\frac{17,28427}{2,651068}=-6,5197,$$

et

$$Y'''_1=-\frac{24x+24yy'+24xy'^2+24yy'^3+3\{[(8xy-3)+4(y^2+x^2)+8y^2]y'\}y''}{4y(y^2+x^2)-3x}$$

devient

$$Y'''_1=-\frac{17,80324}{2,561752}=-6,9496.$$

Ainsi

$$Y'_1\,\frac{h}{1}=-0,00959510,$$

$$Y''_1\,\frac{h^2}{1.2}=-0,00032598,$$

$$Y'''_1\,\frac{h^3}{1.2.3}=-0,00000116,$$

$$Y_2-Y_1=-0,00992224,$$

et

$$Y_2=0,86200535.$$

En rectifiant cette valeur de Y_2 au moyen de l'équation

$$(y^2+0,7569)^2-2,61y=0,$$

qui résulte de la substitution de $0,87$ en place de x dans $F=0$, on trouvera

$$Y_2=0,86199534\ldots;$$

on aura ensuite, au moyen des formules qui nous ont servi à calculer Y'_1, Y''_1, Y'''_1, ...,

$$Y'_2=-\frac{2,633780}{2,561752}=-1,028156,$$

$$Y''_2=-\frac{18,33062}{2,561752}=-7,15550.$$

Considérons maintenant la fonction $Y - y$, et ses dérivées $Y' - y'$, $Y'' - y''$,..., nous aurons, pour

$$x = 0{,}86, \quad Y_1 - y_1 = 0{,}00019477, \quad Y'_1 - y'_1 = -\ 0{,}0623890,$$
$$Y''_2 - y''_2 = 9{,}2708,$$
$$x = 0{,}87, \quad Y_2 - y_2 = 0{,}00009607, \quad Y'_2 - y'_2 = 0{,}049612,$$
$$Y''_2 - y''_2 = 13{,}57337.$$

D'ailleurs, la limite inférieure des valeurs que peut prendre $Y'' - y''$, quand x varie de 0,86 jusqu'à 0,87, est positive; donc cette fonction ne change pas de signe entre ces deux valeurs de x. Par conséquent, les suites de signes

	$Y'' - y''$	$Y' - y'$	$Y - y$
$[x = 0{,}86]$	+	−	+
$[x = 0{,}87]$	+	+	+

font voir que l'équation $Y - y$ peut avoir entre $x = 0{,}86$ et $x = 0{,}87$ ou deux racines réelles et inégales, ou deux racines réelles et égales, ou aucune racine. Mais

$$\frac{(Y'_1 - y'_1)^2}{Y_1 - y_1} = 19{,}984, \quad \frac{(Y'_2 - y'_2)^2}{Y_2 - y_2} = 23{,}645.$$

et

$$2(Y''_1 - y''_1) = 18{,}5416, \quad 2(Y''_2 - y''_2) = 27{,}1467.$$

Donc, les deux rapports

$$\frac{(Y'_1 - y'_1)^2}{Y_1 - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{(Y'_2 - y'_2)^2}{Y_2 - y_2}$$

sont compris entre

$$2(Y''_1 - y''_1) \quad \text{et} \quad 2(Y''_2 - y''_2).$$

D'ailleurs, la valeur $x = 0{,}86$ de la racine de l'équation $Y' - y' = 0$ est assez approchée pour qu'on puisse employer la méthode de Newton au calcul de cette racine, car

$$Y'''_1 - y'''_1 = 8{,}8409,$$
$$Y''_1 - y''_1 = 9{,}2708;$$

donc

$$\frac{Y'''_1 - y'''_1}{Y''_1 - y''_1} = \frac{8{,}8409}{9{,}2708} < 1.$$

Par suite, on a $k = -1$, et comme $n = 2$, on a bien $n > -k$.

Donc l'équation $Y - y = 0$ a une racine double comprise entre 0,86 et 0,87 ;

Et par suite, les deux équations proposées ont une solution double entre $x = 0,86$, $x = 0,87$ et $y = 0,8717$, $y = 8618$.

TROISIÈME EXEMPLE.

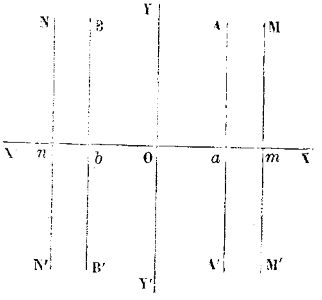
36. Lorsqu'on peut discuter facilement les courbes représentées par les deux équations proposées, les calculs marchent plus rapidement encore ; pour le faire voir, je résoudrai encore les deux équations suivantes :

$$f = (x^4 + x^2 - 4)\,y^4 - 4x(4 - x^2)\,y^3 - 6x^2(4 - x^2)\,y^2 \\ - 4x^3(4 - x^2)\,y - x^4(4 - x^2) = 0,$$

$$F = y^4 + xy^3 - 2x^2y - x^3 = 0,$$

et je chercherai d'abord les solutions positives, je veux dire les valeurs positives de x et de y qui satisfont à ces deux équations.

Cela revient à déterminer les points de rencontre des deux courbes (f)



et (F) qui se trouvent dans l'angle YOX, en les supposant rapportées à un même système d'axes de coordonnées rectangulaires.

La courbe f a deux asymptotes parallèles à l'axe des y, et qu'on obtient en égalant à zéro le coefficient de y^4,

$$x^4 + x^2 - 4 = 0.$$

Ces deux asymptotes sont données par les deux équations

$$x = +\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}}, \quad x = -\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}},$$

et elles sont situées de part et d'autre de OY à des distances de l'origine égales à $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Soient AA′ et BB′ ces deux asymptotes.

On voit que si on donne à x des valeurs moindres que $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, tous les termes de f seront négatifs, et qu'ainsi à ces valeurs de x ne peut répondre aucune valeur positive de y, et que la courbe n'a aucun point dans l'espace YOaA.

L'équation f peut se mettre sous la forme

$$x^4y^4-(4-x^2)(y+x)^4=0,$$

et l'on voit alors que si on donne à x une valeur supérieure à 2 ou inférieure à -2, les deux produits x^4y^4 et $-(4-x^2)(y+x)^4$ sont positifs pour toute valeur réelle donnée à y, et que par conséquent si on prend Om = On = 2, et que par les points m et n on mène les perpendiculaires à l'axe des x, MM′ et NN′, la courbe n'aura aucun point à droite de MM′ ni à gauche de NN′.

Mais si on donne à x une valeur comprise en $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et 2, le premier terme x^4y^4 sera positif, tandis que $-(4-x^2)(y+x)^4$ sera négatif; donc, à chacune de ces valeurs de x répond une valeur positive de y et une seule. D'ailleurs, pour $x=2$, $y=0$, et pour $x=\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, y est infinie; donc la courbe f a dans l'angle YOX une branche et une seule, et cette branche est tout entière dans l'espace rectangulaire infini AamM. Elle part de l'infini, se rapproche de l'axe des x à mesure que x augmente, et vient enfin rencontrer cet axe au point m, quand $x=2$.

La seconde courbe F a aussi une seule branche dans l'angle YOX, car le premier membre de l'équation $F=0$ n'ayant qu'une variation quand on donne à x une valeur positive, à chacune de ces valeurs de x répond une valeur positive de y et une seule. Pour $x=0$ on a $y=0$, pour $x=\infty$ on a $y=\infty$; cette branche commence donc à l'origine et s'étend indéfiniment à droite de l'axe OY et au-dessus de l'axe OX.

Désignons maintenant par y l'ordonnée de la courbe f, et par Y l'ordonnée de la courbe F.

Pour $x=\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, on a

$$y=\infty,$$

tandis que Y prend une valeur finie; pour $x = 2$, Y prend aussi une valeur finie et non nulle, tandis que $y = 0$. Donc :

Pour $x = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$,

$$y - Y > 0;$$

Pour $x = 2$,

$$y - Y < 0.$$

Le nombre des points de rencontre entre $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et 2 est donc impair.

Je prends les dérivées de f par rapport à x et par rapport à y; j'ai

$$\frac{df}{dx} = 4x^3y^4 - 4(4-x^2)(y+x)^3 + 2x(y+x)^4,$$

$$\frac{df}{dy} = 4x^4y^3 - 4(4-x^2)(y+x)^3,$$

et en remplaçant x^3y^4 par $\frac{(4-x^2)(y+x)^4}{x}$ et x^4y^3 par $\frac{(4-x^2)(y+x)^4}{y}$,

$$\frac{df}{dx} = 4(4-x^2)(y+x)^3\frac{y}{x} + 2x(y+x)^4,$$

$$\frac{df}{dy} = 4(4-x^2)(y+x)^3\frac{x}{y},$$

d'où nous voyons que $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ seront toujours positifs pour tout point de la branche de f que nous considérons, et qu'ainsi y' est toujours négatif.

Je prends les dérivées de F par rapport à y et par rapport à x. J'ai

$$\frac{dF}{dx} = 4y^3 + 3xy^2 - 2x^2,$$

$$\frac{dF}{dy} = y^3 - 4xy - 3x^2;$$

d'où

$$Y' = -\frac{4y^3 + 3xy^2 - 2x^2}{y^3 - 4xy - 3x^2},$$

et je vais chercher la limite inférieure et la limite supérieure de Y', quand x varie de $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ à 2.

Au lieu de $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et 2, on pourra prendre 1,2 et 2 pour les limites de x; et comme, en remplaçant x par 1,2 dans $F=0$, on a une équation

$$y^4 + 1,2y^3 - 2,88y - 1,728 = 0,$$

dont la racine est supérieure à 1,3, et qu'en remplaçant x par 2 dans $F=0$ on a une équation

$$y^4 + 2y^3 - 8y - 8 = 0,$$

dont la racine est inférieure à 2, on pourra prendre pour les limites de y 1,3 et 2.

D'après cela, la limite inférieure de $4y^3 + 3xy^2 - 2x^2$ est positive, la limite supérieure de $y^3 - 4xy - 3x^2$ est négative. Donc la limite inférieure Y' est positive.

Donc, $y' - Y'$ restera négatif et ne changera pas de signe depuis $x = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ jusqu'à $x = 2$. Donc il n'y a qu'un point de rencontre dans l'angle YOX, ou, en d'autres termes, les deux équations proposées n'ont qu'une solution composée d'une valeur positive de x et d'une valeur positive de y.

57. Pour avoir les solutions composées d'une valeur négative de x et d'une valeur positive de y, on changera x en $-x$ dans les deux équations proposées, qui deviennent par là

$$(f) \qquad x^4y^4 - (4-x^2)(y-x)^4 = 0,$$

$$(F) \qquad y^4 - xy^3 - 2x^2y + x^3 = 0.$$

Soit a une valeur de x comprise entre 0 et 2, l'équation (f) deviendra

$$a^4y^4 - (4-a^2)(y-a)^4 = 0,$$

$$ay = \pm\sqrt[4]{4-a^2}\,(y-a).$$

Je prends d'abord le radical avec le signe + et j'ai

$$y = a\,\frac{-\sqrt[4]{4-a^2}}{a-\sqrt[4]{4-a^2}}.$$

y devant être positive, il faut que le dénominateur soit négatif, ou

$$a < \sqrt[4]{4 - a^2},$$
$$a^4 + a^2 - 4 < 0.$$

Il faut donc que a soit compris entre o et $+\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$; on doit encore remarquer que dans ce cas y est toujours plus grand que a.

Je prends le radical avec le signe $-$, j'aurai

$$y = a\frac{\sqrt[4]{4-a^2}}{a+\sqrt[4]{4-a^2}},$$

et les valeurs de y toujours positives seront moindres que a.

Je vois qu'à chaque valeur de x moindre que $+\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ répondent deux valeurs positives de y et deux seulement, tandis qu'à chaque valeur de x comprise entre $+\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et 2, répond une valeur de y et une seule.

Si donc je prends à gauche du point O la longueur $On = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, et que par le point N je mène NN′ parallèle à OY, la courbe aura deux branches situées dans l'espace YObB; pour l'une de ces branches, que j'appelle la branche inférieure, on a toujours $y < x$, tandis que pour l'autre, que j'appelle la branche supérieure, y est plus grand que x. La courbe a encore une branche et une seule dans l'espace BbnN, qui est la continuation de la branche inférieure située dans YObB, et pour laquelle on a $y < x$. Elle n'a aucun point dans l'angle NnX′.

La courbe F a aussi deux branches dans l'angle YOX′, car si, dans l'équation

$$y^4 - xy^3 - 2x^2y + x^3 = 0,$$

on suppose $x = a$:

Le premier membre est positif quand $y = 0$;

Le premier membre est négatif quand $y = \frac{a}{2}$, et quand $y = a$;

Le premier membre est positif quand $y = \infty$.

A chaque valeur de x répondent deux valeurs positives de y, et deux seulement, parce que le premier membre de F n'a que deux variations.

Pour une de ces branches, l'ordonnée est toujours plus grande que l'abscisse. Je l'appellerai la *branche supérieure;* pour l'autre branche, que j'appellerai la *branche inférieure*, l'ordonnée est plus petite que la moitié de l'abscisse.

58. *Recherche du point de rencontre de la branche inférieure de f et de la branche inférieure de* F. — Pour $x=0$, les deux branches de f font avec l'axe des x un angle de 45 degrés; car, en divisant par x^4 l'équation

$$x^4 y^4 - (4-x^2)(y-x)^4 = 0,$$

ou

$$(x^4+x^2-4)y^4 + 4x(4-x^2)y^3 - 6x^2(4-x^2)y^2 \\ + 4x^3(4-x^2)y - x^4(4-x^2) = 0,$$

on a

$$(x^4+x^2+4)\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 4(4-x^2)\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 6(4-x^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ + 4(4-x^2)\frac{y}{x} - (4+x^2) = 0,$$

et la limite du rapport $\frac{y}{x}$, quand $x=0$, est donnée par

$$-4\left(\lim\frac{y}{x}\right)^4 + 4.4\left(\lim\frac{y}{x}\right)^3 - 6.4\left(\lim\frac{y}{x}\right)^2 + 4.4\left(\lim\frac{y}{x}\right) - 4 = 0,$$

ou

$$\left(\lim\frac{y}{x}\right)^4 - 4\left(\lim\frac{y}{x}\right)^3 + 6\left(\lim\frac{y}{x}\right)^2 - \lim\frac{y}{x} + 1 = 0,$$

$$\left(\lim\frac{y}{x} - 1\right)^4 = 0,$$

$$\lim\frac{y}{x} = 1.$$

Pour la courbe F, au contraire, la tangente à la branche inférieure fait à l'origine avec l'axe des x un angle moindre que 45 degrés; car si l'on divise l'équation F par x^3, on obtient

$$y\left(\frac{y}{x}\right)^3 - y\left(\frac{y}{x}\right) - 2\frac{y}{x} + 1 = 0;$$

donc la limite du rapport $\frac{y}{x}$, quand $x = 0$, est donnée par l'équation

$$-2\left(\lim \frac{y}{x}\right) + 1 = 0,$$

d'où

$$\lim \frac{y}{x} = \frac{1}{2}.$$

Si l'on fait $y = \frac{x}{2}$ dans le premier membre de $f = 0$, on le transforme en

$$(x^4 + 4x^2 - 4)\frac{x^2}{16},$$

et cette quantité est négative, nulle ou positive, suivant que x est inférieure, égale ou supérieure à $\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}}$.

Par conséquent, pour tout point de la branche inférieure de f compris dans l'espace YObB, cette branche est constamment au-dessus de la branche inférieure de F; il n'y a donc pas de rencontre dans l'espace YObB.

Mais dans l'espace BbnN, comme pour $x = \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}}$, l'ordonnée y_1 de f est égale à $\frac{x}{2}$, tandis que l'ordonnée Y_1 de F est $< \frac{x}{2}$, d'où $y_1 - Y_1 > 0$, et que, pour $x = 2$, l'ordonnée y_2 de f est égale à zéro, tandis que l'ordonnée Y_2 de F est plus grande que zéro, on voit qu'il y a au moins une rencontre. Je vais faire voir qu'il n'y en a qu'une.

En effet, si, dans l'équation $F = 0$, on fait $y = mx$, on a

$$m^4x^4 - m^3x^4 - 2mx^3 + x^3 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{2m - 1}{m^3(m - 1)};$$

et, pour avoir la branche qui nous occupe, il faudra faire croître m depuis zéro jusqu'à $\frac{1}{2}$. Pour $m = 0$, x sera infini, et, pour $m = \frac{1}{2}$, x sera nul.

On a aussi

$$y = \frac{2m - 1}{m^2(m - 1)},$$

et l'on voit que la valeur de y augmente sans cesse depuis zéro jusqu'à l'infini quand m décroît depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro.

En prenant les dérivées de x et de y par rapport à m, on aura

$$\frac{dx}{dm} = -\frac{6m^2 - 8m + 3}{m^4(m-1)^2},$$

$$\frac{dy}{dm} = -\frac{4m^2 - 5m + 2}{m^3(m-1)^2},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4m^2 - 5m + 2)m}{4m^2 - 8m + 3},$$

et, comme le numérateur et le dénominateur restent positifs pour toute valeur réelle et positive donnée à m, on voit que, pour toute valeur de x comprise entre $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et 2, la quantité $\frac{dy}{dx} = \mathrm{Y}'$ sera positive.

Pour la branche de la courbe f donnée par

$$y = a\frac{\sqrt[4]{4-a^2}}{a + \sqrt[4]{4-a^2}},$$

on a aussi

$$\frac{dy}{da} = \frac{\left[(4-a^2)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}a^2(4-a^2)^{-\frac{3}{4}}\right]\left[a + (4-a^2)^{\frac{1}{4}}\right] - a(4-a^2)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{2}a(4-a^2)^{-\frac{3}{4}}\right]}{(a + \sqrt[4]{4-a^2})^2},$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{\dfrac{-\frac{1}{2}a^3}{(4-a^2)^{\frac{3}{4}}} + (4-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(a + \sqrt[4]{4-a^2})^2},$$

et comme de $a = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ jusqu'à $a = 2$ le nombre a^2 est plus grand que 2, on voit que $\frac{dy}{da} = y'$ est négatif entre ces limites.

Donc $y' - \mathrm{Y}'$ ne change pas de signe quand x varie entre les limites considérées, et, par suite, les deux branches inférieures de f et F n'ont qu'un seul point de rencontre.

On continuera cette discussion avec la même facilité et l'on trouvera :

Que la branche inférieure de f et la branche supérieure de F ne se rencontrent pas non plus;

Que la branche supérieure de f et la branche supérieure de F ont un point de rencontre et n'en ont qu'un seul.

Pour avoir les solutions qui se composent d'une valeur négative de y et d'une valeur positive de x, on changera y en $-y$ dans les deux équations proposées, qui deviendront

$$(f) \qquad x^4y^4-(4-x^2)(y-x)^4=0,$$
$$(\mathrm{F}) \qquad y^4-xy^3+2x^2y-x^3=0,$$

et l'on cherchera les solutions positives de ces équations.

La discussion fera voir que F a une seule branche qui s'étend depuis l'origine jusqu'à l'infini;

Que f a deux branches qui se rencontrent à l'origine, et dont l'une est constamment au-dessous de l'autre;

Que la branche de F ne rencontre pas la branche inférieure de f, mais rencontre la branche supérieure en un seul point.

Il n'y a pas lieu de chercher les solutions composées d'une valeur négative de x et d'une valeur négative de y, parce que la courbe F n'a aucun point dans l'angle Y'OX'.

39. *Remarque*. — On se sert quelquefois de deux courbes tracées grossièrement pour déterminer le nombre des racines d'une équation. Les conséquences que l'on déduit de ces constructions n'ont rien de rigoureux; mais, au moyen de la méthode exposée dans la seconde partie, on peut rectifier ce que le tracé graphique a laissé d'incertain et rendre toute leur rigueur à ces conséquences.

Ainsi, pour résoudre l'équation

$$x-\operatorname{tang}x=0,$$

on pourra regarder ses racines comme données par les abscisses des points d'intersection des deux courbes

$$y=x,$$
$$y=\operatorname{tang}x,$$

dont l'une est une ligne droite et l'autre une ligne tangentoïde.

De même, au lieu de l'équation

$$x^4-5x^3+1=0,$$

on peut considérer les deux suivantes :

$$y = x^3,$$
$$y(x - 5) + 1 = 0,$$

dont l'une représente une parabole cubique et l'autre une hyperbole,

On rencontre dans la théorie des vibrations d'une sphère élastique l'équation suivante :

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0,$$

ou

$$\cot x = \frac{4 - 3x^2}{4x}.$$

On peut la remplacer par les deux suivantes :

$$y = \frac{4 - 3x^2}{4x},$$
$$y = \cot x,$$

dont l'une représente une hyperbole et l'autre une tangentoïde.

QUATRIÈME PARTIE.

EXTENSION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE A DES ÉQUATIONS AYANT PLUS DE DEUX INCONNUES.

I. — *Équations à trois inconnues.*

60. Soient les trois équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Il s'agit de trouver les solutions comprises entre deux valeurs données de x, deux valeurs données de y, et deux valeurs données de z.

On emploiera d'abord la méthode de M. Sarrus, et on subdivisera le système de limites données en plusieurs autres systèmes de limites plus rapprochées, dont les unes ne contiendront pas de solutions, et dont les autres pourront en contenir une ou plusieurs. C'est un de ces derniers que je m'en vais examiner.

Soient z, Z et ζ des fonctions de x et de y, déterminées par les équations $f=0$, $F=0$, $\varphi=0$; x_0 et x_1, y_0 et y_1, z_0 et z_1 les valeurs inférieures et supérieures de x, de y et de z. Si x_0+h et y_0+k sont des valeurs de x et de y qui appartiennent à une solution, on pourra écrire :

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k\right)_0 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k\right)_0^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k\right)_0^3 + \ldots + \rho_1,$$

$$Z = z_0 + \left(\frac{dZ}{dx}h + \frac{dZ}{dy}k\right)_0 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{dZ}{dx}h + \frac{dZ}{dy}k\right)_0^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{dZ}{dx}h + \frac{dZ}{dy}k\right)_0^3 + \ldots + \rho_2,$$

$$\zeta = z_0 + \left(\frac{d\zeta}{dx}h + \frac{d\zeta}{dy}k\right)_0 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d\zeta}{dx}h + \frac{d\zeta}{dy}k\right)_0^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d\zeta}{dx}h + \frac{d\zeta}{dy}k\right)_0^3 + \ldots + \rho_3.$$

Les notations

$$\left(\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k\right)_0^i, \quad \left(\frac{dZ}{dx}h + \frac{dZ}{dy}k\right)_0^i, \quad \left(\frac{d\zeta}{dx}h + \frac{d\zeta}{dy}k\right)_0^i,$$

étant les représentations symboliques des polynômes

$$\frac{d^iz}{dx^i}h^i + i\frac{d^iz}{dx^{i-1}dy}h^{i-1}k + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{d^iz}{dx^{i-2}dy^2}h^{i-2}k^2 + \ldots + \frac{d^iz}{dy^i}k^i,$$

$$\frac{d^iZ}{dx^i}h^i + i\frac{d^iZ}{dx^{i-1}dy}h^{i-1}k + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{d^iZ}{dx^{i-2}dy^2}h^{i-2}k^2 + \ldots + \frac{d^iZ}{dy^i}k^i,$$

$$\frac{d^i\zeta}{dx^i}h^i + i\frac{d^i\zeta}{dx^{i-1}dy}h^{i-1}k + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{d^i\zeta}{dx^{i-2}dy^2}h^{i-2}k^2 + \ldots + \frac{d^i\zeta}{dy^i}k^i,$$

dans lesquels on a remplacé x et y par x_0 et y_0.

Les quantités $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots$, sont données, comme on le sait, par les formules

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dy}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dy\,dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{d^2f}{dy\,dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2} + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les quantités $\frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{dy}, \frac{d^2Z}{dx^2}, \ldots, \frac{d\zeta}{dx}, \frac{d\zeta}{dy}, \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \ldots$, par des formules semblables.

Quant aux restes ρ_1, ρ_2, ρ_3, ce sont les quantités

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}h^n + \frac{n}{1}\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2 + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n Z}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d^n Z}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^n Z}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2 + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n \zeta}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d^n \zeta}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^n \zeta}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2 + \ldots\right),$$

dans lesquelles on a remplacé x et y par $x_0 + \theta h$ et $y_0 + \theta' h$; θ et θ' étant des nombres positifs compris entre o et 1.

On voit que ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des fonctions de h et de k, et que si $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2f}{dx\,dy}, \frac{d^2f}{dx\,dz}, \ldots$, et $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}, \frac{d^2F}{dx^2}, \frac{dx\,dy}{d^2F}, \frac{d^2F}{dx\,dz}, \ldots$, et $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \ldots$ restent finies et continues pour les valeurs des variables comprises entre x_0 et x_1, y_0 et y_1, ces fonctions s'annulent pour $h = 0$ et $k = 0$, et deviennent infiniment petites en même temps que h et k.

Or, pour que $x_0 + h$, $y_0 + k$ et z constituent une solution de $f = 0$, $F = 0$, $\varphi = 0$, il est nécessaire et suffisant que

$$z - \zeta = 0, \tag{1}$$
$$Z - \zeta = 0; \tag{2}$$

on aura ainsi deux équations à deux inconnues, qui pourront servir à déterminer h et k.

61. Pour résoudre ces deux équations, je supprimerai les restes ρ_1, ρ_2 et ρ_3, et je les réduirai à

$$(z - \rho_1) - (\zeta - \rho_3) = \psi(h, k) = 0, \tag{3}$$
$$(Z - \rho_1) - (\zeta - \rho_3) = \Psi(h, k) = 0; \tag{4}$$

et je chercherai les valeurs de h et k qui satisfont à ces équations (3) et (4), et qui sont comprises entre $h = 0$ et $h = x_1 - x_0 = h_1$, et entre $k = 0$ et $k = y_1 - y_0 = k_1$.

Je ferai $h = 0$ dans (3) : il en résultera une équation à une inconnue

$\psi(o, k) = o$. Soit $\varkappa$ une des racines de cette équation comprise entre o et k, et $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ deux nombres très-rapprochés qui comprennent cette racine, en sorte que $\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2$.

Je chercherai ensuite les limites supérieure et inférieure que peut prendre $\rho_1 - \rho_3 = \omega_1$ lorsque $h = o$ et que k varie depuis $\varkappa_1$ jusqu'à $\varkappa_2$, et θ' depuis o jusqu'à 1. Et si ces limites sont très-petites et peuvent être négligées devant la somme des termes du polynôme $(z - \rho_1) - (\zeta - \rho_3)$, $\varkappa_1$ sera aussi une racine approchée de l'équation en k qu'on obtient en faisant $h = o$ dans $z - \zeta = o$.

La dérivée de cette racine sera donnée par l'équation

$$\frac{d(z-\zeta)}{dh} + \frac{d(z-\zeta)}{dk}\frac{dk}{dh} = o, \tag{5}$$

mais on pourra l'obtenir encore, approximativement du moins, au moyen de

$$\frac{d(z-\zeta-\omega_1)}{dh} + \frac{d(z-\zeta-\omega_1)}{dk}\frac{dk}{dh} = o,$$

ou

$$\frac{d(z-\zeta)}{dh} - \frac{d\omega_1}{dh} + \left(\frac{d(z-\zeta)}{dk} - \frac{d\omega}{dk}\right)\frac{dk}{dh} = o; \tag{6}$$

car la fonction ω_1 est finie et continue pour toutes les valeurs de h, de k et de $\theta' k$ qui sont comprises entre o et h_1, $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ ou 1 ; de plus, elle reste toujours très-petite, lorsque h varie depuis o jusqu'à h, et k depuis $\varkappa_1$ jusqu'à $\varkappa_2$, et θ' depuis o jusqu'à 1. Donc $d\omega_1$ est une quantité très-petite par rapport à ω_1, et $\frac{d\omega_1}{dh}$ ainsi que $\frac{d\omega_1}{dk}$ sont des quantités du même ordre que ω_1 et peuvent être négligées.

Il en résulte donc que les quantités

$$\frac{d(z-\zeta)}{dh} \quad \text{et} \quad \frac{d(z-\zeta-\omega_1)}{dh}$$

diffèrent peu l'une de l'autre, et qu'il en est de même de

$$\frac{d(z-\zeta)}{dk} \quad \text{et} \quad \frac{d(z-\zeta-\omega_1)}{dk}.$$

Donc la valeur approchée de $\varkappa'_1$, qu'on obtient en faisant dans (6)

$h = 0$ et $k = \varkappa_1$, est aussi une valeur approchée de la dérivée $\varkappa'_1$ qu'on obtiendrait en faisant aussi $h = 0$ et $k = \varkappa_1$ dans (5).

Ces détails suffisent pour faire voir comment on pourra aussi calculer approximativement $\varkappa''_1$, $\varkappa'''_1$,....

On verrait encore que si dans la même équation (3) on fait $h = h_1$, et qu'on désigne par $\varkappa_3$ la valeur que prend pour $h = h_1$ la fonction k de h qui se réduit à $\varkappa$ quand $h = 0$, on pourra calculer approximativement et $\varkappa_3$ et ses dérivées $\varkappa'_3$, $\varkappa''_3$,..; et qu'on obtiendra en même temps les valeurs approchées que prennent, quand $h = h_1$, la fonction k de h et ses dérivées donnée par l'équation (1).

Enfin, on voit que si on désigne par K une fonction de h qui satisfait à l'équation (2), et qui se réduit à K_1 lorsqu'on fait $h = 0$ (K_1 étant compris entre 0 et k_1), on pourra au moyen de l'équation (4) obtenir des valeurs approchées de K_1 et de ses dérivées, et que K_3 étant la valeur que prend cette même fonction K quand $h = h_1$, on pourra obtenir au moyen de la même équation (4) les valeurs de K_3 et de ses dérivées.

Alors, connaissant les différences

$$\begin{array}{ccc} k_1 - K_1 & \text{et} & k_3 - K_3, \\ k'_1 - K'_1 & \text{et} & k'_3 - K'_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

on pourra reconnaître au moyen des théorèmes exposés dans la première Partie, et dont nous avons fait si souvent usage, combien les équations

$$z - \zeta = 0 \quad \text{et} \quad Z - \zeta = 0$$

ont de solutions entre 0 et h, et 0 et k.

62. Si les limites supérieure et inférieure de ω_1 ne peuvent pas être négligées, il faudra rapprocher les limites, ou, ce qui sera nécessaire plus souvent encore, prendre un plus grand nombre de termes dans les développements de z, Z et ζ.

63. Quand on aura séparé les solutions des équations proposées, on pourra approcher indéfiniment des valeurs de x, y, z, qui composent une solution, au moyen d'une extension connue de la méthode de Newton.

64. Si on avait quatre équations entre les trois inconnues x, y, z,

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0, \quad F_4(x, y, z) = 0,$$

on résoudrait d'abord le système formé par les trois premières, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$; pour cela on déterminerait, comme il a été expliqué tout à l'heure, une valeur de $x = x_0 + h$ et une valeur de $y = y_0 + k$, qui entrent dans une solution, au moyen d'équations semblables à celles qui ont été désignées par (1) et par (2) au n° **60**, puis on déterminerait la troisième inconnue au moyen d'une des trois séries qui donnent z ou Z ou ζ.

Cela posé, nous remarquerons que y et z sont des fonctions de x, $y = \varphi x$, $z = \psi x$, déterminées par les équations

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

et que, si l'on remplace y et z par φx et ψx dans F_3 et dans F_4, on obtiendra deux équations en x,

$$F_3(x, \varphi x, \psi x) = 0, \quad F_4(x, \varphi x, \psi x) = 0,$$

qui devront avoir une racine commune comprise entre x_0 et x_1, si les quatre équations proposées ont une solution commune entre les limites x_0 et x_1, y_0 et y_1, et z_0 et z_1.

Donc l'équation

$$[F_3(x, \varphi x, \psi x)]^2 + [F_4(x, \varphi x, \psi x)]^2 = 0$$

doit avoir une racine double entre x_0 et x_1.

On aura besoin, pour reconnaître l'existence de cette racine double, d'employer les quantités φx_0 et φx_1, $\varphi' x_0$ et $\varphi' x_1$, $\varphi'' x_0$ et $\varphi'' x_1$, et aussi ψx_0 et ψx_1 et $\psi' x_0$ et $\psi' x_1$, $\psi'' x_0$ et $\psi'' x_1$. On pourra les obtenir ainsi qu'il suit :

h_0 et h_1 étant les deux limites de h, k_0 et k_1 étant les valeurs de k correspondantes à h_0 et h_1, et données par les équations (1) et (2), on aura $\varphi x_0 = y_0 + k_0$ et $\varphi x_1 = y_0 + k_1$; $\frac{dk_0}{dh_0}$ et $\frac{dk_1}{dh_1}$, $\frac{d^2 k_0}{dh_0^2}$ et $\frac{d^2 k_1}{dh_1^2}$ seront les valeurs de $\varphi' x_0$ et $\varphi' x_1$, et de $\varphi'' x_0$ et de $\varphi'' x_1$.

Les valeurs de z, tirées de $z - \zeta = 0$, et qui répondent à $h = h_0$, $k = k_0$, et à $h = h_1$, $k = k_1$, donneront ψx_0 et ψx_1; les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{d^2 z}{dx^2}$, tirées des mêmes équations, et qui répondent à $h = h_0$ et $k = k_0$, puis à $h = h_1$ et $k = k_1$, seront les valeurs de $\psi' x_0$, $\psi' x_1$, et de $\psi'' x_0$, $\psi'' x_1$.

63. Ce problème, qui vient de nous occuper dans le numéro précédent, est celui qu'il faudrait résoudre pour chercher les points d'intersection ou les points de contact de deux courbes à double courbure.

La recherche des points multiples par intersection ou par contact d'une courbe à double courbure est encore un problème du même genre et qui se résoudrait d'après les mêmes principes, mais sur lequel il est inutile d'insister davantage, après les détails qui ont été donnés dans ce qui précède.

II. — *Résolution d'un nombre quelconque d'équations à plusieurs inconnues.*

66. Soient $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0, \ldots$, n équations à n inconnues, x, y, $z, \ldots$, w. Il s'agit de déterminer les solutions comprises entre deux valeurs données de x, deux valeurs données de $y, \ldots$, deux valeurs données de w. On resserrera d'abord les limites d'après la méthode de M. Sarrus, et, quand elles seront suffisamment rapprochées, on pourra écrire, en appelant w_m, w_n, w_p, $w_q, \ldots$ les fonctions de x, $y, \ldots$, v déterminées isolément par $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0, \ldots$,

$$w_m = w_0 + \left(\frac{dw_m}{dx} i + \frac{dw_m}{dy} h + \ldots\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{dw_m}{dx} i + \frac{dw_m}{dy} h + \ldots\right)^2 + \ldots + \rho_1,$$

$$w_m = w_0 + \left(\frac{dw_n}{dx} i + \frac{dw_n}{dy} h + \ldots\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{dw_n}{dx} i + \frac{dw_n}{dy} h + \ldots\right)^2 + \ldots + \rho_2,$$

$$w_m = w_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_m = w_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourra même supprimer les restes ρ_1, ρ_2, $\rho_3, \ldots$, si les limites des inconnues sont suffisamment rapprochées.

En égalant ensuite les valeurs de w_m à chacune des suivantes, on aura un système de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues, qui détermineront i, $h, \ldots$.

On passera de la même manière, de ce système de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues, à un autre système de $n - 2$ équations à $n - 2$ inconnues, et ainsi de suite.

Et on arrivera à un système de deux équations à deux inconnues, qu'on pourra résoudre.

Après quoi on calculera de proche en proche les valeurs des autres inconnues.

Ces calculs seront assez simples, parce qu'ordinairement, dans les développements de w_m, w_n, ..., on pourra s'arrêter aux termes du premier ou du second degré; et le travail deviendra alors semblable à celui de la résolution d'un nombre donné d'équations du premier degré à un même nombre d'inconnues.

67. Admettons que les limites des inconnues soient assez rapprochées, et que, dans les développements de w_m, w_n, ..., on puisse négliger les termes en seconde dimension de i, h, k,...; alors x_0 et x_1, y_0 et y_1, ..., w_0 et w_1 étant les limites des inconnues; M_0, N_0, P_0, Q_0, ... les valeurs que prennent les premiers membres des équations $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, ..., lorsqu'on y remplace $x, y, z, \ldots$ par $x_0, y_0, z_0, \ldots$; et $x_0 + i, y_0 + h, z_0 + k, \ldots$ étant les valeurs des inconnues qui composent une solution, on pourra, aux équations proposées, substituer les suivantes :

$$\begin{aligned}
0 &= M_0 + \frac{dM}{dx_0} i + \frac{dM}{dy_0} h + \frac{dM}{dz_0} k + \ldots,\\
0 &= N_0 + \frac{dN}{dx_0} i + \frac{dN}{dy_0} h + \frac{dN}{dz_0} k + \ldots,\\
0 &= P_0 + \frac{dP}{dx_0} i + \frac{dP}{dy_0} h + \frac{dP}{dz_0} k + \ldots,\\
0 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Et si toutes ces équations sont distinctes, et si aucune n'est incompatible avec les autres, on pourra, par les procédés de l'Algèbre élémentaire, obtenir deux équations en i et h, telles que

$$\begin{aligned}
A + Bi + Ch &= 0,\\
A' + B'i + C'h &= 0.
\end{aligned}$$

De ces deux équations on tirera (h étant la fonction de i déterminée par la première, et H la fonction de i déterminée par la seconde)

$$CC'(h - H) = CA' - AC + (CB' - BC')i,$$

et on voit qu'il y a une valeur I de i qui rend $h - H = 0$ et une seule; donc i_0 et i_1 étant deux nombres l'un inférieur et l'autre supérieur à I, les différences $h_0 - H_0$ et $h_1 - H_1$ auront des signes contraires, tandis que la dérivée de $\frac{d(h - H)}{di}$ sera constante.

Donc il y a dans ce cas une solution et une seule des deux équations

$$A + Bi + Ch = 0, \quad \text{et} \quad A' + B'i + C'h = 0;$$

et par suite il y a entre x_0 et x_1, entre y_0 et $y_1, \ldots,$ entre w_0 et w_1, un système de valeurs des inconnues, $x, y, z, \ldots, w$, et un seul, qui satisfait aux équations proposées.

Ainsi, lorsque, par la méthode de M. Sarrus, on aura reconnu que les équations proposées peuvent avoir une solution entre deux limites données de x, deux limites données de $y, \ldots,$ si ces limites des inconnues sont assez rapprochées pour qu'on puisse, dans le développement de M, N,..., suivant les puissances des différences de ces limites, négliger les termes de l'ordre des carrés et des puissances supérieures de ces différences, ces équations ont entre les limites données une solution et une seule, pourvu cependant que les équations du premier degré qui résultent de ces développements ne rentrent pas les unes dans les autres, et ne soient pas incompatibles entre elles.

68. On peut encore résoudre de la manière suivante la question que j'ai traitée dans cette thèse.

J'en ai eu l'idée quand j'avais écrit ce Mémoire, et pour éviter des redites, je ne ferai que l'indiquer sommairement.

Soient $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = 0$ deux équations à deux inconnues. Soient aussi x_0 et x_1, et y_0 et y_1 des limites suffisamment rapprochées des inconnues x et y.

Admettons que $F_1(x_0, y) = 0$ ait une racine réelle comprise entre y_0 et y_1 et soit $\mathfrak{Y}_0$ cette racine.

Admettons aussi que $F_1(x_1, y) = 0$ ait une racine réelle comprise entre y_0 et y_1 et soit $\mathfrak{Y}_1$ cette racine, et supposons enfin que $\mathfrak{Y}_1$ satisfasse à la série

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Y}'_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \mathfrak{Y}''_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots.$$

[Cette série d'ailleurs peut servir à calculer approximativement $\mathfrak{Y}_1$, et l'on pourra rectifier ensuite le résultat obtenu, en déterminant par la méthode de Newton la racine $\mathfrak{Y}_1$ de $F_1(x_1, y) = 0$.]

On voit que si on représente par $y = \varphi x$ une fonction de x qui satisfasse à $F_1(x, \varphi x) = 0$ et qui se réduise à $\mathfrak{Y}_0$ quand $x = x_0$, et à $\mathfrak{Y}_1$ quand $x = x_1$, la recherche des solutions des deux équations proposées, et qui sont comprises entre les limites données, se réduira à la détermination des racines de

$$F_2(x, \varphi x) = 0$$

qui se trouvent comprises entre $x = x_0$ et $x = x_1$.

On pourra donc, au moyen des signes des quantités

$$\begin{array}{ll} F_2(x_0, \varphi x_0), \ldots, & F_2(x_1, \varphi x_1), \\ F'_2(x_0, \varphi x_0), \ldots, & F'_2(x_1, \varphi x_1), \\ F''_2(x_0, \varphi x_0), \ldots, & F''_2(x_1, \varphi x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array}$$

et à l'aide des théorèmes démontrés dans la première Partie, déterminer le nombre de ces racines et les séparer.

Car il suffira pour cela de connaître approximativement les valeurs de

$$\begin{array}{lcl} \varphi x_0, \ldots, & \text{et} & \varphi x_1, \\ \varphi' x_0, \ldots, & \text{et} & \varphi' x_1, \\ \varphi'' x_0, \ldots, & \text{et} & \varphi'' x_1, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

et elles sont données par $F_1(x_0, y) = 0$, $F_1(x_1, y) = 0$,

$$\frac{dF_1}{dx_0} + \frac{dF_1}{dy_0}\varphi' x_0 = 0, \qquad \frac{dF_1}{dx_1} + \frac{dF_1}{dy_1}\varphi' x_1 = 0,$$

$$\frac{d^2F_1}{dx_0^2} + 2\frac{d^2F_1}{dx_0\,dy_0}\varphi' x_0 + \frac{d^2F_1}{dy_0^2}(\varphi' x_0)^2 + \frac{dF_1}{dy_0}\varphi'' x_0 = 0,$$

$$\frac{d^2F_1}{dx_1^2} + 2\frac{d^2F_1}{dx_1\,dy_1}\varphi' x_1 + \frac{d^2F_1}{dy_1^2}(\varphi' x_1)^2 + \frac{dF_1}{dy_1}\varphi'' x_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

69. Supposons qu'on ait trois équations à trois inconnues

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0;$$

il s'agit de déterminer les solutions comprises entre des limites déjà suffisamment rapprochées x_0 et x_1 pour l'inconnue x, y_0 et y_1 pour l'inconnue y, z_0 et z_1 pour l'inconnue z.

Je ferai dans les deux premières équations $x = x_0$, je les transformerai en deux équations à deux inconnues, savoir :

$$F_1(x_0, y, z) = 0, \quad F_2(x_0, y, z) = 0,$$

dont je déterminerai les solutions comprises entre y_0 et y_1, et entre z_0 et z_1.

Admettons que ces solutions aient été séparées, et que $\mathfrak{Y}_0$ et $\mathfrak{Z}_0$ soient les deux valeurs de y et de z qui composent l'une d'elles.

Désignons aussi par $y = \varphi x$ et par $z = \psi x$ deux fonctions de x qui satisfont aux équations

$$F_1(x, \varphi x, \psi x) = 0, \quad F_2(x, \varphi x, \psi x) = 0,$$

et qui se réduisent à $\mathfrak{Y}_0$ et à $\mathfrak{Z}_0$ quand $x = x_0$, on pourra calculer les valeurs des dérivées de ces deux fonctions $\varphi' x_0$ et $\psi' x_0$, $\varphi'' x_0$ et $\psi'' x_0, \ldots$, qui répondent à $x = x_0$, au moyen de

$$\frac{dF_1}{dx_0} + \frac{dF_1}{dy_0}\varphi' x_0 + \frac{dF_1}{dz_0}\psi' x_0 = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx_0} + \frac{dF_2}{dy_0}\varphi' x_0 + \frac{dF_2}{dz_0}\psi' x_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Je ferai encore, dans les deux premières équations, $x = x_1$, et soient $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$ les valeurs que prennent φx et ψx quand $x = x_1$; on pourra calculer approximativement $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$ au moyen des séries

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Y}'_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \mathfrak{Y}''_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}'_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \mathfrak{Z}''_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

et rectifier ces valeurs au moyen des équations

$$F_1(x_1, Y, Z) = 0, \quad F_2(x_1, Y, Z) = 0;$$

car, en représentant par Y_1 et Z_1 les valeurs approchées de $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$, on pourra faire $\mathfrak{Y}_1 = Y_1 + h$ et $\mathfrak{Z}_1 = Z_1 + k$, et on déterminera h et k par les équations du premier degré

$$F_1(x_1, Y_1, Z_1) + \frac{dF_1(x_1, Y_1, Z_1)}{dY_1} h + \frac{dF_1(x_1, Y_1, Z_1)}{dZ_1} k = 0,$$

$$F_2(x_1, Y_1, Z_1) + \frac{dF_2(x_1, Y_1, Z_1)}{dY_1} h + \frac{dF_1(x_1, Y_1, Z_1)}{dZ_1} k = 0;$$

11..

après quoi on pourra obtenir $\varphi' x_1$ et $\psi' x_1$, puis $\varphi'' x_1$ et $\psi'' x_1, \ldots$, par des procédés semblables à ceux qui ont donné $\varphi' x_0$ et $\psi' x_0$, puis $\varphi'' x_0$ et $\psi'' x_0, \ldots$.

On voit maintenant qu'il ne s'agit plus que de séparer les racines de l'équation à une inconnue

$$F_3(x, \varphi x, \psi x) = 0$$

qui se trouvent comprises entre x_0 et x_1, et c'est ce qu'on pourra faire au moyen des signes de

$$\begin{array}{ll} F_3(x_0, \varphi x_0, \psi x_0), & F_3(x_1, \varphi x_1, \psi x_1), \\ F'_3(x_0, \varphi x_0, \psi x_0), & F'_3(x_1, \varphi x_1, \psi x_1), \\ F''_3(x_0, \varphi x_0, \psi x_0), & F''_3(x_1, \varphi x_1, \psi x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

parce qu'on connaît les valeurs et les signes de φx_0 et ψx_0, de $\varphi' x_0$ et $\psi' x_0$, de $\varphi'' x_0$ et $\psi'' x_0, \ldots$, de φx_1 et ψx_1, de $\varphi' x_1$ et $\psi' x_1$, de $\varphi'' x_1$ et $\psi'' x_1, \ldots$.

Ce procédé s'étend facilement à quatre équations à quatre inconnues, puis à cinq équations à cinq inconnues,..., et ainsi de suite.

Vu et approuvé.

Le 4 juillet 1866.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 4 juillet 1866.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

RECHERCHES

SUR LA

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

La plus ancienne théorie de la stabilité de l'équilibre des corps flottants est celle du métacentre. Elle a été donnée par Bouguer vers l'année 1750. Considérons un corps flottant en équilibre, et nommons *axe primitif* la verticale qui passe par le centre de gravité du corps et celui du volume de liquide déplacé. Si le corps est dérangé de sa position d'équilibre par une cause quelconque, l'axe principal se déplace avec lui et la résultante de la poussée du liquide vient le rencontrer en un point qu'on appelle *métacentre.* Suivant que ce point est au-dessus ou au-dessous du centre de gravité du corps, les forces tendent à ramener le corps à sa position primitive ou à l'en éloigner. L'équilibre est stable dans le premier cas, il est instable dans le second.

L'application du calcul différentiel et du calcul intégral aux problèmes de la Mécanique avait permis de traiter aussi la question par l'analyse, et l'on avait trouvé ainsi les mêmes conditions que par la considération du métacentre.

En 1832, M. Duhamel, dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences, a fait voir que la position du métacentre est indéterminée, qu'elle dépend à la fois du déplacement du centre de gravité du corps et de l'inclinaison donnée à l'axe primitif. De sorte que le corps peut être dérangé infiniment peu, de manière que le métacentre se trouve, à volonté, au-dessus ou au-dessous du centre de gravité du corps. Cette remarque montre combien est insuffisante la théorie du métacentre.

On trouve dans les *Traités de Mécanique* de Poisson et de M. Duhamel une théorie de la stabilité de l'équilibre fondée sur la considération des forces vives. On fait voir que la somme des forces vives du corps flottant restera toujours très-petite si son centre de gravité est plus bas que celui du volume de liquide déplacé, ou, lorsqu'il n'en est pas ainsi, si la distance de ces deux centres est moindre que le plus petit moment d'inertie de la section à fleur d'eau divisé par le volume immergé du corps.

Mais, par cette théorie, on voit seulement que ces conditions sont suffisantes; il faudrait encore faire voir qu'elles sont nécessaires.

Un géomètre allemand, M. Clebsch, dans un Mémoire qui a été inséré dans le *Journal de Crelle* (année 1859), a montré que pour avoir une théorie rigoureuse, il faut avoir égard aux variations de la pression du liquide, provenant des petites ondulations que le mouvement du corps lui communique. Il chercha à résoudre la question en étudiant les petits mouvements simultanés du corps et du liquide. Mais la difficulté du problème ne lui a pas permis de traiter à fond un cas spécial, et encore moins d'indiquer une règle générale simple.

L'Académie des Sciences a proposé pour le grand prix de Mathématiques de 1864, d'établir une théorie complète et rigoureuse de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. J'ai essayé de résoudre la question, et quoique deux Mémoires aient été couronnés par l'Académie, comme ils ne sont pas encore publiés, j'ai cru pouvoir présenter mon travail comme sujet de Thèse à la Faculté des Sciences de Paris.

Je forme les équations de tous les petits mouvements que peut prendre le corps; j'obtiens des équations linéaires à coefficients constants, et je fais voir que leurs intégrales ne pourront être périodiques qu'autant que les conditions que fait connaître l'analyse de Poisson et de M. Duhamel sont remplies.

J'étudie ensuite l'influence des petits mouvements du liquide. Pour cela, je forme les équations des petits mouvements que le corps peut lui communiquer; j'obtiens ainsi les variations qu'ils produisent sur la poussée du liquide. Par là les équations du mouvement du corps prennent des seconds membres qui sont des sommes de sinus et de cosinus d'arcs multiples du temps, et où les multiplicateurs de t sont tels, que l'intégration ne peut amener aucun terme ayant t pour facteur. Par conséquent, les petits mouvements du liquide ne modifient point les conditions de la stabilité de l'équilibre.

En considérant la solution trouvée par cette analyse comme une première approximation, et cherchant à tenir compte des termes du second ordre par la méthode des approximations successives, j'ai trouvé que leur influence est absolument nulle.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DU CORPS.

1. Soit M le corps flottant dans sa position d'équilibre. Le niveau de l'eau, prolongé dans son intérieur, y trace une section ABCD, que je suppose fixe dans le corps.

Soit G le centre de gravité du corps;

H celui du volume de liquide déplacé.

La droite GH est verticale.

Par le point O de l'espace où se trouve le centre G, j'imagine trois droites rectangulaires entre elles, l'une Oz dirigée dans le sens de la pesanteur, qui sera l'axe des z positives, et les deux autres Ox et Oy situées dans un plan horizontal.

J'écarte le corps de sa position d'équilibre en l'élevant ou en l'abaissant d'une petite quantité, et en écartant aussi infiniment peu la droite GH de la verticale; en outre, je lui imprime une vitesse très-petite dans une direction quelconque.

Le corps prendra deux espèces de mouvement : un mouvement de translation qui se décomposera en trois autres dirigés suivant les troix axes Ox, Oy, Oz, et un mouvement de rotation autour d'un axe passant constamment par le centre de gravité, et qui se décomposera aussi en trois autres, s'effectuant autour de trois axes fixes dans le corps GX', GY', GZ'. Je supposerai que dans la position d'équilibre, GX', GY', GZ' coïncident avec Ox, Oy, Oz. J'appellerai p, q, r les composantes de la vitesse de rotation suivant ces trois axes.

Par le point G je mène des droites GX, GY, GZ parallèles à Ox, Oy, Oz. Soient ξ, η, ζ les coordonnées de G par rapport à Ox, Oy, Oz; x, y, z, celles d'un point quelconque par rapport à GX, GY, GZ; x', y', z' celles du même point par rapport à GX', GY', GZ'. Ces coordonnées sont liées par les relations suivantes :

$$x = \xi + ax' + by' + cz',$$
$$y = \eta + a'x' + b'y' + c'z',$$
$$z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'.$$

Soit GN l'intersection des deux plans XGY et X'GY', θ l'angle qu'ils font entre eux, φ l'angle X'GN et ψ l'angle XGN. Les neuf cosinus a, b,..., b'', c'', s'expriment en fonction des angles φ, θ, ψ, au moyen des formules suivantes :

$$a = \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi,$$
$$b = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi,$$
$$c = \sin\theta \sin\varphi,$$
$$a' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,$$
$$b' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,$$
$$c' = \sin\theta \cos\psi,$$
$$a'' = -\sin\theta \sin\varphi,$$
$$b'' = -\sin\theta \cos\varphi,$$
$$c'' = \cos\theta.$$

Les composantes p, q, r s'expriment aussi au moyen des mêmes angles, par les formules suivantes :

$$p = \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$
$$q = \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$
$$r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

2. La pression supportée par une molécule quelconque du liquide où le corps se trouve plongé est $\mathfrak{P}_0 + g\rho(z - z_0)$, à l'état d'équilibre, $\mathfrak{P}_0$ représentant la pression atmosphérique, et z_0 l'ordonnée verticale d'un point de la surface libre. Par suite des mouvements du corps, la pression du liquide éprouve des variations dont on doit tenir compte. On aura donc, en désignant par ϖ une fonction indéterminée de x, y, z et t, et par $\mathfrak{P}$ la pression totale,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + g\rho(z - z_0) + \varpi$$

(ρ est la densité du liquide).

Les forces qui sollicitent le corps sont de trois sortes : son propre poids égal à Mg (M désignant la masse du corps); la poussée du liquide égale à $- g\rho$V (V étant la partie immergée du volume du corps à un instant quelconque) : les composantes horizontales de ces deux forces sont nulles; enfin la pression ϖ, qui s'exerce suivant la normale extérieure à la surface du corps.

Si donc λ, μ, ν sont les angles que fait la normale, en un élément ds de la surface, avec les axes GX, GY, GZ, les équations du mouvement de translation seront

$$\mathrm{M}\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\int\int \varpi \cos\lambda . ds,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\int\int \varpi \cos\mu . ds,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mathrm{M}g - g\rho\mathrm{V} - \int\int \varpi \cos\nu . ds.$$

3. Je représente par $p'dt$, $q'dt$, $r'dt$ les accroissements de la vitesse de rotation pendant un instant infiniment petit, et estimés suivant les axes GX', GY', GZ'; par X, Y, Z les composantes du poids du corps et de la poussée du liquide suivant les mêmes axes : les équations du mouvement de rotation seront

$$\int\int\int [(\mathrm{Z} - r')y' - (\mathrm{Y} - q')z']\,dm = \int\int \varpi(y'\cos\nu' - z'\cos\mu')\,ds,$$

$$\int\int\int [(\mathrm{X} - p')z' - (\mathrm{Z} - r')x']\,dm = \int\int \varpi(z'\cos\lambda' - x'\cos\nu')\,ds,$$

$$\int\int\int [(\mathrm{Y} - q')x' - (\mathrm{X} - p')y']\,dm = \int\int \varpi(x'\cos\mu' - y'\cos\lambda')\,ds;$$

$\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ sont les cosinus des angles que la normale à l'élément ds fait avec les axes GX', GY', GZ'. Les intégrales des premiers membres s'étendent à toute la masse du volume immergé, et celles des seconds membres à la surface immergée.

Or,

$$p' = z'\frac{dq}{dt} - y'\frac{dr}{dt} + (py' - qx')q + (pz' - rx')r,$$

$$q' = x'\frac{dr}{dt} - z'\frac{dp}{dt} + (qz' - ry')r + (qx' - py')p,$$

$$r' = y'\frac{dp}{dt} - x'\frac{dq}{dt} + (rx' - pz')p + (ry' - qz')q.$$

Si donc on fait

$$\iiint (\mathrm{Y}x' - \mathrm{X}y')\,dm = \mathrm{R},\quad \iiint (\mathrm{X}z' - \mathrm{Z}x')\,dm = \mathrm{Q},\quad \iiint (\mathrm{Z}y' - \mathrm{Y}z')\,dm = \mathrm{P},$$

$$\iiint (y'^2 + z'^2)\,dm = \mathrm{A}',\quad \iiint (z'^2 + x'^2)\,dm = \mathrm{B}',\quad \iiint (x'^2 + y'^2)\,dm = \mathrm{C}',$$

$$\iiint y'z'\,dm = \mathrm{A}'',\quad \iiint z'x'\,dm = \mathrm{B}'',\quad \iiint x'y'\,dm = \mathrm{C}'',$$

les équations du mouvement de rotation deviendront

$$\mathrm{A}'\frac{dp}{dt} - \mathrm{C}''\frac{dq}{dt} - \mathrm{B}''\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B}' - \mathrm{C}')qr + \mathrm{A}''(q^2 - r^2) + \mathrm{B}''pq - \mathrm{C}''pr$$
$$= \mathrm{P} + \iint \varpi(y'\cos\nu' - z'\cos\mu')\,ds,$$

$$\mathrm{B}'\frac{dq}{dt} - \mathrm{A}''\frac{dr}{dt} - \mathrm{C}''\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}' - \mathrm{A}')pr + \mathrm{B}''(r^2 - p^2) + \mathrm{C}''qr - \mathrm{A}''pq$$
$$= \mathrm{Q} + \iint \varpi(z'\cos\lambda' - x'\cos\nu')\,ds,$$

$$\mathrm{C}'\frac{dr}{dt} - \mathrm{B}''\frac{dp}{dt} - \mathrm{A}''\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A}' - \mathrm{B}')pq + \mathrm{C}''(p^2 - q^2) + \mathrm{A}''pr - \mathrm{B}''qr$$
$$= \mathrm{R} + \iint \varpi(x'\cos\mu' - y'\cos\lambda')\,ds.$$

4. Le volume immergé V, à un instant quelconque, est une fonction des quantités très-petites ζ et θ. On peut donc poser

$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_0 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{d\zeta}\right)_0 \zeta + \left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)_0 \theta + \varepsilon,$$

V_0 étant le volume de la partie immergée du corps à l'état d'équilibre, et $\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)_0 \theta$ et $\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\zeta}\right)_0 \zeta$ les variations de volume qu'on obtiendrait en faisant varier tantôt θ et tantôt ζ isolément. ε est l'ensemble des termes du second ordre.

On aura de même

$$P = P_0 + \left(\frac{dP}{d\zeta}\right)_0 \zeta + \left(\frac{dP}{d\theta}\right)_0 \theta + \varepsilon',$$

$$Q = Q_0 + \left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)_0 \zeta + \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_0 \theta + \varepsilon'',$$

$$R = R_0 + \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)_0 \zeta + \left(\frac{dR}{d\theta}\right)_0 \theta + \varepsilon''',$$

P_0, Q_0, R_0 désignant les parties des moments P, Q, R dues à la poussée du liquide sur le volume V_0; $\left(\frac{dP}{d\zeta}\right)_0 \zeta$, $\left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)_0 \zeta$, $\left(\frac{dR}{d\zeta}\right)_0 \zeta$, et $\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_0 \theta$, $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_0 \theta$, $\left(\frac{dR}{d\theta}\right)_0 \theta$ les parties de ces mêmes moments dues respectivement aux variations de volume $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)_0 \zeta$ et $\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 \theta$.

5. L'accroissement de volume $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)_0 \zeta$ peut être assimilé à un cylindre droit ayant pour base l'aire $\mathcal{A}$ de la section ABCD, et pour hauteur ζ. Il est égal à $\mathcal{A}\zeta$.

L'accroissement $\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 \theta$ est celui qui aurait lieu si ζ était nulle. Il peut se décomposer en une infinité de petits cylindres ayant pour base un élément $d\lambda$ de la section ABCD, et pour hauteur la partie ζ' de la parallèle à GZ' comprise entre $d\lambda$ et le niveau du liquide. J'abaisse de $d\lambda$ une perpendiculaire l' sur la parallèle à GN menée par le point ω où GZ' rencontre la section ABCD; j'aurai $\zeta' = l' \operatorname{tang}\theta$. Menant par ω des parallèles $\omega x'$ et $\omega y'$ à GX' et GY', et rapportant le point $d\lambda$ aux axes $\omega x'$ et $\omega y'$ par les coordonnées x' et y', j'aurai

$$l' = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Enfin, appelant f et h les distances à $\omega x'$ et $\omega y'$ du centre de gravité de ABCD, on trouvera sans peine

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 \theta = \int\!\!\int \zeta' d\lambda = \int\!\!\int l' \operatorname{tang}\theta = \theta\cos\varphi \int\!\!\int y' d\lambda + \theta \sin\varphi \int\!\!\int x' d\lambda$$
$$= \mathcal{A} f \theta_1 + \mathcal{A} h \theta_2.$$

(On fait $\theta\cos\varphi = \theta_1$ et $\theta\sin\varphi = \theta_2$.)

6. Pour les trois moments P_0, Q_0, R_0, on a

$$P_0 = g\rho V_0(-y'\cos\theta - z'\sin\theta\cos\varphi),$$
$$Q_0 = g\rho V_0(z'\sin\theta\sin\varphi + x'\cos\theta),$$
$$R_0 = -g\rho V_0(x'\sin\theta\cos\varphi - y'\sin\theta\sin\varphi),$$

x', y', z' étant les coordonnées du point H. Mais $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \mp\gamma$, le signe $-$ ou le signe $+$ devant être pris suivant que le point H est au-dessus ou au-dessous de G.

Alors, en remplaçant $\sin\theta$ par θ, et $\theta\cos\varphi$, $\theta\sin\varphi$ par θ_1 et θ_2, il viendra

$$P_0 = \pm g\rho V_0\gamma\theta_1,$$
$$Q_0 = \mp g\rho V_0\gamma\theta_2,$$
$$R_0 = 0.$$

Les moments $\left(\frac{dP}{d\zeta}\right)_0\zeta$, $\left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)_0\zeta$ sont donnés par les intégrales

$$\left(\frac{dP}{d\zeta}\right)_0\zeta = g\rho\int\int\int(-y'\cos\theta - z'\sin\theta\cos\varphi)dv,$$
$$\left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)_0\zeta = g\rho\int\int\int(z'\sin\theta\cos\varphi + x'\cos\theta)dv,$$
$$\left(\frac{dR}{d\zeta}\right)_0\zeta = g\rho\int\int\int(x'\sin\theta\cos\varphi - y'\sin\theta\sin\varphi)dv,$$

qu'il faut étendre à tout le volume $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)_0\zeta$.

On peut faire $dv = d\lambda dz'$ et effectuer les intégrations par rapport à z', depuis $z' = -z_0 - \zeta$ jusqu'à $z' = -z_0$. Après quoi, en négligeant les quantités très-petites du second ordre, on aura

$$\left(\frac{dP}{d\zeta}\right)_0\zeta = g\rho\zeta\int\int y'\,d\lambda = g\rho\mathcal{A}f\zeta,$$
$$\left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)_0\zeta = -g\rho\zeta\int\int x'\,d\lambda = -g\rho\mathcal{A}h\zeta,$$
$$\left(\frac{dR}{d\zeta}\right)_0\zeta = 0.$$

Les moments $\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_0\theta$, $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_0\theta$, $\left(\frac{dR}{d\theta}\right)_0\theta$ sont donnés, comme les précédents, par les intégrales triples

$$\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_0 \theta = g\rho \int\int\int (-y'\cos\theta - z'\sin\theta\cos\varphi)\,dv,$$

$$\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_0 \theta = g\rho \int\int\int (z'\sin\theta\sin\varphi + x'\cos\theta)\,dv,$$

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)_0 \theta = g\rho \int\int\int (x'\sin\theta\cos\varphi - y'\sin\theta\sin\varphi)\,dv.$$

On prendra $d\lambda dz'$ pour l'élément de volume dv; on pourra effectuer les intégrations par rapport à z', depuis $-\zeta_1 - \zeta'$ jusqu'à $-\zeta_1$ (ζ_1 étant la distance du plan X'GY' au plan ABCD); on remplacera ensuite, dans les résultats obtenus, ζ' par $l'\theta$, et l' par $y'\cos\varphi + x'\sin\varphi$, et l'on aura

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_0 \theta &= g\rho\theta\cos\varphi \int\int y'^2 d\lambda + g\rho\theta\sin\varphi \int\int x'y'\,d\lambda \\
&= g\rho \mathcal{A} l^2\theta_1 + g\rho\mathcal{A} m^2\theta_2, \\
\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_0 \theta &= -g\rho\theta\cos\varphi \int\int x'y'\,d\lambda - g\rho\theta\sin\varphi \int\int x'^2\,d\lambda \\
&= -g\rho\mathcal{A} k^2\theta_2 - g\rho\mathcal{A} m^2\theta_1, \\
\left(\frac{dR}{d\theta}\right)_0 \theta &= 0,
\end{aligned}$$

en faisant $\int\int y'^2\,d\lambda = \mathcal{A} l^2$, $\int\int x'^2 d\lambda = \mathcal{A} k^2$ et $\int\int x'y'\,d\lambda = \mathcal{A} m^2$.

7. Je remarque maintenant que les équations qui donnent p, q, r en fonction des angles φ, θ, ψ, et dont nous avons fait mention au n° **1**, si on y réduit $\sin\theta$ à θ, et $\cos\theta$ à l'unité, deviennent

$$p = \theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}.$$

On en tire, par l'élimination de $\frac{d\psi}{dt}$ et en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$p = -\frac{d\theta_1}{dt} - r\theta_2,$$

$$q = \frac{d\theta_2}{dt} - r\theta_1,$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - \frac{d(r\theta_2)}{dt},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - \frac{d(r\theta_1)}{dt}.$$

J'éliminerai ensuite $\frac{dr}{dt}$ entre les trois équations du mouvement de rotation, puis, dans le résultat obtenu, je remplacerai $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ par les valeurs que je viens de trouver; j'aurai ainsi

$$(b)\left\{\begin{aligned}&\left(A' - \frac{B''^2}{C'}\right)\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \left(\frac{A''B''}{C'} + C''\right)\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \left(A' - \frac{B''^2}{C'}\right)\frac{dr\theta_2}{dt} - \left(\frac{A''B''}{C'} + C''\right)\frac{dr\theta_1}{dt}\\ &\quad + Dpq + Epr + Eqr + Gp^2 + Hq^2 + Ir^2 + g\rho(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)\theta_1\\ &\quad + g\rho\mathcal{A}m^2\theta_2 + g\rho\mathcal{A}f\zeta + \frac{B''}{C''}\varepsilon''' + \varepsilon'\\ &= \iint \varpi(y'\cos\nu' - z'\cos\mu')ds - \frac{B''}{C'}\iint(x'\cos\mu' - y'\cos\lambda')\varpi\, ds,\end{aligned}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{aligned}&\left(B' - \frac{A''^2}{C'}\right)\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \left(\frac{A''B''}{C'} + C''\right)\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - \left(B' - \frac{A''^2}{C'}\right)\frac{dr\theta_1}{dt} + \left(\frac{A''B''}{C'} + C''\right)\frac{dr\theta_2}{dt}\\ &\quad + D_1pq + E_1pr + F_1qr + G_1p^2 + H_1q^2 + I_1r^2 + g\rho(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)\theta_2\\ &\quad + g\rho\mathcal{A}m^2\theta_1 + g\rho\mathcal{A}h\zeta + \frac{A''}{C'}\varepsilon''' + \varepsilon''\\ &= \iint \varpi(z'\cos\lambda' - x'\cos\nu')ds - \frac{A''}{C'}\iint\varpi(x'\cos\mu' - y'\cos\lambda')ds,\end{aligned}\right.$$

les lettres D, E, F,..., D_1,..., I_1 désignant des coefficients dont l'élimination de $\frac{dr}{dt}$ fait connaître la composition, mais qu'il est inutile de déterminer.

L'équation du mouvement vertical du centre de gravité du corps devient aussi

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g\mathcal{A}}{V_0}\zeta + \frac{g\mathcal{A}f}{V_0}\theta_1 + \frac{g\mathcal{A}h}{V_0}\theta_2 = -\frac{1}{V_0}\iint\varpi\cos\nu\, ds - \frac{\varepsilon}{V_0}.$$

8. J'appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque par rapport aux axes d'inertie principaux du corps, que je désigne par GA, GB, GC

J'aurai

$$
\begin{aligned}
x' &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1,\\
y' &= a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'_1 z_1,\\
z' &= a''_1 x_1 + b''_1 y_1 + c''_1 z_1.
\end{aligned}
$$

Soient A, B, C les trois moments d'inertie principaux du corps, savoir :

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int (x_1^2 + y_1^2)\, dm &= \mathrm{A},\\
\int\!\!\int\!\!\int (x_1^2 + z_1^2)\, dm &= \mathrm{B},\\
\int\!\!\int\!\!\int (x_1^2 + y_1^2)\, dm &= \mathrm{C};
\end{aligned}
$$

on sait qu'on a

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int x_1^2\, dm &= \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2},\\
\int\!\!\int\!\!\int y_1^2\, dm &= \frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2},\\
\int\!\!\int\!\!\int z_1^2\, dm &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.
\end{aligned}
$$

On obtiendra, par des calculs faciles, les résultats suivants, qu'il suffit de mentionner :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}'' &= -a_1 a'_1 \mathrm{A} - b_1 b'_1 \mathrm{B} - c_1 c'_1 \mathrm{C},\\
\mathrm{B}'' &= -a_1 a''_1 \mathrm{A} - b_1 b''_1 \mathrm{B} - c_1 c''_1 \mathrm{C},\\
\mathrm{A}'' &= -a'_1 a''_1 \mathrm{A} - b'_1 b''_1 \mathrm{B} - c'_1 c''_1 \mathrm{C};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= a_1^2 \mathrm{A} + b_1^2 \mathrm{B} + c_1^2 \mathrm{C},\\
\mathrm{B}' &= a_1'^2 \mathrm{A} + b_1'^2 \mathrm{B} + c_1'^2 \mathrm{C},\\
\mathrm{C}' &= a_1''^2 \mathrm{A} + b_1''^2 \mathrm{B} + c_1''^2 \mathrm{C};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}' - \mathrm{B}''^2}{\mathrm{C}'} &= \frac{\mathrm{AB}c_1'^2 + \mathrm{AC}b_1'^2 + \mathrm{BC}a_1'^2}{\mathrm{A}a_1''^2 + \mathrm{B}b_1''^2 + \mathrm{C}c_1''^2},\\
\frac{\mathrm{B}'\mathrm{C}' - \mathrm{A}''^2}{\mathrm{C}'} &= \frac{\mathrm{AB}c_1^2 + \mathrm{AC}b_1^2 + \mathrm{BC}a_1^2}{\mathrm{A}a_1''^2 + \mathrm{B}b_1''^2 + \mathrm{C}c_1''^2},\\
\frac{\mathrm{A}''\mathrm{B}'' + \mathrm{C}'\mathrm{C}''}{\mathrm{C}'} &= \frac{\mathrm{AB}c_1 c'_1 + \mathrm{AC}b_1 b'_1 + \mathrm{BC}a_1 a'_1}{\mathrm{A}a_1''^2 + \mathrm{B}b_1''^2 + \mathrm{C}c_1''^2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, les deux quantités $\mathrm{A}' - \frac{\mathrm{B}''^2}{\mathrm{C}'}$ et $\mathrm{B}' - \frac{\mathrm{A}''^2}{\mathrm{C}'}$ sont positives; je les désignerai par A_1 et B_1.

Soient GN_1 l'intersection des plans $X'GY'$ et AGB, θ' l'angle de ces deux plans, φ' l'angle AGN, et ψ' l'angle $X'GN$. En remplaçant, dans $ABc_1c'_1 + ACb_1b'_1 + BCa_1a'_1$, les cosinus a_1 et a'_1, b_1 et b'_1, c_1 et c'_1 par leurs expressions connues en fonctions de φ', θ' et ψ', faisant ensuite $\tang \psi' = x$, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{1+x^2}(A-B)C\cos\theta'\sin\varphi'\cos\varphi' \\
&\quad + \frac{x^2}{1+x^2}\left[(B\sin^2\varphi' + A\cos^2\varphi')C\cos^2\theta - (B\cos^2\varphi' + A\sin^2\varphi')C + AB\sin^2\theta'\right] \\
&\quad + \frac{B-A}{1+x^2}C\cos\theta'\sin\varphi'\cos\varphi'.
\end{aligned}$$

Si donc on égale cette expression à zéro, on aura une équation du second degré, dont les deux racines sont réelles.

Donc on peut choisir l'axe GX', et par suite l'axe Ox, de manière que $\frac{A''B''}{C'} + C'' = 0$.

9. Avant de commencer la discussion des équations du mouvement, il ne sera pas inutile de rappeler l'énoncé de quelques propositions sur les moments d'inertie d'une surface plane.

On peut tracer sur la surface, et par un quelconque O de ses points, deux axes rectangulaires entre eux, et pour lesquels l'intégrale $\int\int x'y'd\lambda = 0$. Ce sont les axes principaux de la surface relatifs au point O.

De tous les moments d'inertie relatifs à des axes tracés sur la surface et passant par un même point, le plus grand et le plus petit sont ceux qui se rapportent aux axes principaux passant par ce point.

Si, par le centre de gravité G' de la surface, on mène deux axes $G'x'$ et $G'y'$ parallèles à deux axes rectangulaires, passant par un même point O, savoir Ox et Oy, et tracés sur la surface, et que f et h soient les distances de O à $G'x'$ et $G'y'$, les moments d'inertie pris par rapport aux axes Ox et Oy sont respectivement égaux aux moments d'inertie pris par rapport à $G'x'$ et $G'y'$, augmentés de $\mathcal{A}f^2$ ou de $\mathcal{A}h^2$. De sorte que $\mathcal{A}$ étant l'aire de la surface plane, $\mathcal{A}l^2$ et $\mathcal{A}k^2$ les moments d'inertie par rapport à Ox et à Oy, et $\mathcal{A}L^2$ et $\mathcal{A}K^2$ les moments d'inertie par rapport à $G'x'$ et $G'y'$, on a

$$\mathcal{A}l^2 = \mathcal{A}L^2 - \mathcal{A}f^2,$$
$$\mathcal{A}k^2 = \mathcal{A}K^2 - \mathcal{A}h^2;$$

d'où

$$l^2 - f^2 > 0, \quad k^2 - h^2 > 0.$$

Le plus petit moment d'inertie d'une surface plane, pris par rapport aux axes passant par son centre de gravité, est le plus petit de tous les moments d'inertie de la surface.

DEUXIÈME PARTIE.

CONDITIONS DE LA STABILITÉ QUAND ON FAIT ABSTRACTION DES PETITS MOUVEMENTS DU LIQUIDE.

10. Je ferai d'abord abstraction des termes du second ordre et des termes provenant des petits mouvements du liquide. Je choisirai aussi les axes de manière que $\frac{A''B''}{C'} + C'' = 0$. Cela réduira les équations du problème à

$$(\zeta) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g\mathcal{A}}{V_0}\zeta + \frac{g\mathcal{A}f}{V_0}\theta_1 + \frac{g\mathcal{A}h}{V_0}\theta_2 = 0,$$

$$(\theta_1) \qquad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{g\rho(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)}{A_1}\theta_1 + \frac{g\rho\mathcal{A}m^2}{A_1}\theta_2 + \frac{g\rho\mathcal{A}f}{A_1}\zeta = 0,$$

$$(\theta_2) \qquad \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{g\rho(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{B_1}\theta_2 + \frac{g\rho\mathcal{A}m^2}{B_1}\theta_1 + \frac{g\rho\mathcal{A}h}{B_1}\zeta = 0.$$

Je pose

$$\zeta = e^{\mu t}, \quad \theta_1 = Xe^{\mu t}, \quad \theta_2 = Ye^{\mu t};$$

je porte ces valeurs dans (ζ), (θ_1) et (θ_2). J'obtiens ainsi trois équations, entre lesquelles j'éliminerai X et Y, ce qui me conduit à l'équation du sixième degré,

$$(\mu) \qquad \mu^6 + P\mu^4 + Q\mu^2 + R = 0,$$

qu'on réduit au troisième degré en posant $\mu^2 = \lambda$, savoir :

$$(\lambda) \qquad \lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0.$$

Les valeurs des coefficients P, Q, R, sont :

$$P = \frac{g\mathcal{A}}{V_0} + \frac{g\rho(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)}{A_1} + \frac{g\rho(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{B_1},$$

$$Q = \frac{g^2\rho\mathcal{A}(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)}{A_1V_0} - \frac{g^2\rho\mathcal{A}^2f^2}{A_1V_0} + \frac{g^2\rho\mathcal{A}(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{B_1V_0} - \frac{g^2\rho\mathcal{A}^2h^2}{B_1V_0}$$
$$+ \frac{g^2\rho^2(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^3m^4}{A_1B_1}.$$

$$R = \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1V_0} + \frac{2g^3\rho^2\mathcal{A}^3fhm^2}{A_1B_1V_0} - \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}^3m^4}{A_1B_1V_0}$$
$$- \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}^2f^2(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1V_0} - \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}^2h^2(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1V_0}.$$

Pour la stabilité de l'équilibre, il sera nécessaire et suffisant que l'équation (λ) ait ses trois racines réelles, inégales et négatives.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que les trois coefficients P, Q, R soient positifs.

11. Le coefficient R peut se mettre sous la forme

$$\frac{g^3\rho^2\mathcal{A}}{A_1B_1V_0}\big[\mathcal{A}^2(l^2 - f^2)(k^2 - h^2) - \mathcal{A}^2(m^2 - fh)^2$$
$$\pm \mathcal{A}(l^2 - f^2 + k^2 - h^2)V_0\gamma + V_0^2\gamma^2\big].$$

Exprimons les moments d'inertie $\mathcal{A}l^2$ et $\mathcal{A}k^2$, pris par rapport aux axes $\omega x'$ et $\omega y'$ tracés dans la section ABCD, en fonctions des moments d'inertie $\mathcal{A}L^2$ et $\mathcal{A}K^2$, pris par rapport à des axes parallèles à ceux-là, et passant par le centre de gravité G' de ABCD, et remarquons que par rapport à ces derniers axes $\iint x'y'\,d\lambda = \mathcal{A}(m^2 - fh)$, et faisons $\mathcal{A}(m^2 - fh) = \mathcal{A}M^2$, nous aurons

$$R = \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}}{A_1B_1V_0}\big[\mathcal{A}^2(L^2K^2 - M^4) \pm \mathcal{A}(L^2 + K^2)V_0\gamma + V_0^2\gamma^2\big].$$

Enfin, exprimons $\mathcal{A}L^2$, $\mathcal{A}K^2$ et $\mathcal{A}M^2$ en fonctions des moments d'inertie maximum et minimum, $\mathcal{A}L'^2$ et $\mathcal{A}K'^2$ relatifs aux axes qui passent par le centre de gravité de ABCD, et soit $\mathcal{A}L'^2 > \mathcal{A}K'^2$; nous trouverons

$$R = \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}}{A_1B_1V_0}(\mathcal{A}L'^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}K'^2 \pm V_0\gamma).$$

On voit que R sera positif toutes les fois que le centre de gravité du corps flottant sera au-dessous du centre de gravité du volume de liquide qu'il déplace, c'est-à-dire quand $V_0\gamma$ a le signe $+$.

R sera encore positif quand $V_0\gamma$, ayant le signe $-$, est numériquement moindre que $\mathcal{A}K'^2$, ou numériquement plus grand que $\mathcal{A}L'^2$.

12 Les deux coefficients P et Q seront positifs aussi quand $V_0\gamma$ aura le signe $+$. Cela est évident pour P. On le reconnaîtra facilement pour Q en remarquant que $\mathcal{A}l^2 - \mathcal{A}f^2 > 0$, que $\mathcal{A}k^2 - \mathcal{A}h^2 > 0$, et que $\mathcal{A}l'^2$ et $\mathcal{A}k'^2$, désignant les deux moments d'inertie principaux de la section à fleur d'eau, relativement aux axes passant par ω, les deux termes

$$\frac{g^2\rho^2(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2m^4}{A_1B_1}$$

se transforment en

$$\frac{g^2\rho^2(\mathcal{A}l'^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}k'^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1}.$$

13. Quand $V_0\gamma$ aura le signe $-$, le coefficient P ne pourra être positif qu'autant que $V_0\gamma$ sera moindre que $\left(\frac{\mathcal{A}}{\rho V_0} + \frac{\mathcal{A}l^2}{A_1} + \frac{\mathcal{A}k^2}{B_1}\right)\frac{A_1B_1}{A_1+B_1}$.

Lorsque $V_0\gamma$ a le signe $-$, le coefficient Q peut se mettre sous la forme

$$Q = g^2\rho\mathcal{A}\left[\frac{\mathcal{A}(l^2-f^2) - V_0\gamma}{A_1V_0} + \frac{\mathcal{A}(k^2-h^2) - V_0\gamma}{B_1V_0} + \frac{g^2\rho^2}{A_1B_1}(\mathcal{A}l'^2 - V_0\gamma)(\mathcal{A}k'^2 - V_0\gamma)\right].$$

On voit alors facilement qu'il est positif, quand $V_0\gamma = \mathcal{A}K'^2$.

Si on y remplace $V_0\gamma$ par $\left(\frac{\mathcal{A}}{\rho V_0} + \frac{\mathcal{A}l^2}{A_1} + \frac{\mathcal{A}k^2}{B_1}\right)\frac{A_1B_1}{A_1+B_1}$, on trouvera, après quelques développements et quelques réductions,

$$Q = -\frac{g^2\rho^2\mathcal{A}(l^2-k^2)^2}{(A_1+B_1)^2} - \frac{g^2\rho\mathcal{A}^2(A_1-B_1)(l^2-k^2)}{(A_1+B_1)^2V_0} - \frac{g^2\mathcal{A}^2(A^2+B^2+AB)}{(A_1+B_1)^2V_0^2} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2f^2}{A_1V_0} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2h^2}{B_1V_0} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2m^4}{A_1B_1},$$

ou bien

$$Q = -\left[\frac{g\rho\mathcal{A}(l^2-k^2)^2}{A_1+B_1} + \frac{g\mathcal{A}(A_1-B_1)}{(A_1+B_1)V_0}\right]^2 + \frac{g^2\rho\mathcal{A}^2(A_1-B_1)(l^2-k^2)}{(A_1+B_1)^2V_0} - \frac{3g^2\mathcal{A}^2A_1B_1}{(A_1+B_1)^2V_0^2} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2f^2}{A_1V_0} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2h^2}{B_1V_0} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2m^4}{A_1B_1};$$

et la première forme fait voir que Q est négatif si $(A_1 - B_1)(l^2 - k^2)$ est positif, et la seconde que Q est encore négatif quand même $(A_1 - B_1)(l^2 - k^2)$ est négatif.

En rapportant la première partie de l'expression de Q, savoir :

$$g^2 \rho \mathcal{A} \left[\frac{\mathcal{A}(l^2 - f^2) - V_0 \gamma}{A_1 V_0} + \frac{\mathcal{A}(k^2 - h^2) - V_0 \gamma}{B_1 V_0} \right],$$

à des axes parallèles à $\omega x'$ et $\omega y'$, menés par le centre de gravité de ABCD, et l'autre partie aux axes principaux de la surface relativement à ce centre, désignant aussi par f' et h' les distances de ω à ces axes principaux, on trouvera

$$Q = \frac{g^2 \rho \mathcal{A}(\mathcal{A} L^2 - V_0 \gamma)}{A_1 V_0} + \frac{g^2 \rho \mathcal{A}(\mathcal{A} K^2 - V_0 \gamma)}{B_1 V_0} + \frac{g^2 \rho^2}{A_1 B_1}(\mathcal{A} L'^2 - V_0 \gamma)(\mathcal{A} K'^2 - V_0 \gamma)$$
$$+ \frac{g^2 \rho^2 \mathcal{A}^2}{A_1 B_1}(L'^2 h'^2 + K'^2 f'^2) - \frac{g^2 \rho^2 \mathcal{A}}{A_1 A_1}(h'^2 + f'^2) V_0 \gamma.$$

Alors il sera facile de voir que Q devient négatif, si $V_0 \gamma = A L'^2$. Or, le polynôme Q est du second degré par rapport à $V_0 \gamma$; il est positif pour $V_0 \gamma = \mathcal{A} K'^2$, négatif pour $V_0 \gamma = \mathcal{A} L'^2$ et $V_0 = \left(\frac{\mathcal{A}}{\rho V_0} + \frac{\mathcal{A} l^2}{A_1} + \frac{\mathcal{A} k^2}{B_1} \right) \frac{A_1 B_1}{A_1 + B_1}$, et positif quand $V_0 \gamma = \infty$. Donc Q est positif aussi pour toute valeur de $V_0 \gamma$ moindre que $\mathcal{A} K'^2$.

D'ailleurs P est positif aussi pour $V_0 \gamma = \mathcal{A} K'^2$.

14. On voit donc que P et Q ne peuvent être positifs simultanément qu'autant que $V_0 \gamma$ est moindre que la plus petite des deux quantités $\mathcal{A} L'^2$ et $\left(\frac{\mathcal{A}}{\rho V_0} + \frac{\mathcal{A} l^2}{A_1} + \frac{\mathcal{A} k^2}{B_1} \right) \frac{A_1 B_1}{A_1 + B_1}$: mais alors R ne peut être positif que si $V_0 \gamma$ est moindre que $\mathcal{A} K'^2$.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que P, Q, R soient tous les trois positifs, c'est $V_0 \gamma < \mathcal{A} K'^2$.

15. Je dis maintenant que, quand ces trois coefficients sont positifs, l'équation (λ) a ses trois racines réelles, inégales et négatives.

En effet, remarquons d'abord que les deux quantités

$$\lambda' = -\frac{g\rho}{2} \left(\frac{\mathcal{A} l^2 \pm V_0 \gamma}{A_1} + \frac{\mathcal{A} k^2 \pm V_0 \gamma}{B_1} \right) - \frac{g\rho}{2} \sqrt{\left(\frac{\mathcal{A} l^2 \pm V_0 \gamma}{A_1} - \frac{\mathcal{A} k^2 \pm V_0 \gamma}{B_1} \right)^2 + \frac{4 \mathcal{A}^2 m^4}{A_1 B_1}},$$

$$\lambda'' = -\frac{g\rho}{2} \left(\frac{\mathcal{A} l^2 \pm V_0 \gamma}{A_1} + \frac{\mathcal{A} k^2 \pm V_0 \gamma}{B_1} \right) + \frac{g\rho}{2} \sqrt{\left(\frac{\mathcal{A} l^2 \pm V_0 \gamma}{A_1} - \frac{\mathcal{A} k^2 \pm V_0 \gamma}{B_1} \right)^2 + \frac{4 \mathcal{A}^2 m^4}{A_1 B_1}},$$

quand $V_0\gamma$ a le signe + ou quand $V_0\gamma$ ayant le signe − est moindre que $\mathcal{A}K'^2$, sont toutes deux réelles et négatives.

Faisons ensuite

$$Q_1 = \frac{g^2\rho\mathcal{A}(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)}{A_1V_0} + \frac{g^2\rho\mathcal{A}(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{B_1V_0} + \frac{g^2\rho^2(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1} - \frac{g^2\rho^2\mathcal{A}^2m^4}{A_1B_1},$$

$$R_1 = \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}(\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma)(\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma)}{A_1B_1V_0} - \frac{g^3\rho^2\mathcal{A}^3m^4}{A_1B_1V_0},$$

et posons l'équation

$$(x) \qquad x^3 + Px^2 + Q_1x + R_1 = 0.$$

P est la somme changée de signe des trois quantités λ', λ'' et $-\frac{g\mathcal{A}}{V_0}$. Q_1 est la somme de leurs produits deux à deux, et R_1 leur produit changé de signe, de sorte que l'équation (x) a pour racines λ', λ'' et $-\frac{g\mathcal{A}}{V_0}$.

Si, dans l'équation (λ), nous mettons, en place de l'inconnue λ, alternativement λ' et λ'', nous trouverons, en tenant compte des relations,

$$\lambda'^3 + P\lambda'^2 + Q_1\lambda' + R_1 = 0,$$
$$\lambda''^3 + P\lambda''^2 + Q_1\lambda'' + R_1 = 0,$$

et après quelques transformations,

$$\frac{g^3\rho^2\mathcal{A}^2}{2V_0}\left[\left(\frac{f^2}{A_1} - \frac{h^2}{B_1}\right)\left(\frac{\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma}{A_1} - \frac{\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma}{B_1}\right) + \frac{4\mathcal{A}fhm^2}{A_1B_1}\right.$$
$$\left.\pm\left(\frac{h^2}{B_1} + \frac{f^2}{A_1}\right)\sqrt{\left(\frac{\mathcal{A}l^2 \pm V_0\gamma}{A_1} - \frac{\mathcal{A}k^2 \pm V_0\gamma}{B_1}\right)^2 + \frac{4\mathcal{A}^2m^4}{A_1B_1}}\right].$$

Or, il est clair que les trois racines de l'équation (λ) seront réelles, inégales et négatives, si, R étant positif, le résultat de la substitution de λ' est positif et celui de la substitution de λ'' négatif.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la valeur numérique de la partie rationnelle soit moindre que la valeur numérique de la partie irrationnelle, de sorte que l'excès du carré de la partie irrationnelle sur le carré de la partie rationnelle doit être positif.

Si on fait ces calculs, on trouvera un polynôme composé de trois espèces de termes :

Des termes en m^4, qui se réduisent à

$$\left(\frac{f^2}{A_1} - \frac{h^2}{B_1}\right)^2 \frac{\mathcal{A}^2m^4}{A_1B_1};$$

des termes en m^2, qui se réduisent à

$$2fh\left(\frac{A_0 l^2 \pm V_0 \gamma}{A_1} - \frac{A_0 k^2 \pm V_0 \gamma}{B_1}\right)\left(\frac{f^2}{A_1} - \frac{h^2}{B_1}\right)\frac{A_0 m^2}{A_1 B_1};$$

et des termes indépendants de m, qui se réduisent à

$$\frac{h^2 f^2}{A_1 B_1}\left(\frac{A_0 l^2 \pm V_0 \gamma}{A_1} - \frac{A_0 k^2 \pm V_0 \gamma}{B_1}\right)^2.$$

Cet excès est donc un carré parfait et par conséquent positif.

16. Concluons donc.

Pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, il faut et il suffit :

Ou que son centre de gravité soit plus bas que le centre de gravité du volume de liquide qu'il déplace;

Ou, si son centre de gravité est au-dessus de celui du volume de liquide qu'il déplace, que la distance de ces deux centres soit moindre que le plus petit moment d'inertie de la surface de la section à fleur d'eau, divisé par le volume de la partie immergée.

En raison de l'étendue de ce travail, nous avons cru devoir réserver pour une publication ultérieure les résultats qui devaient faire l'objet de la troisième et de la quatrième Partie.

Vu et approuvé.
Le 4 juillet 1866.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.
Le 4 juillet 1866.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

ERRATA.

Page 8, ligne 8, *au lieu de* de $fx = 0$, *lisez* de la racine de $fx = 0$.

Page 14, ligne 18, *au lieu de* que, n étant impair, l'équation, *lisez* que l'équation.

Page 22, ligne 13, *au lieu de* $\dfrac{\dfrac{\pm i^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)n} fa f^n a}{\left(fa \pm \dfrac{i^n}{1.2\ldots n}\right)^2}$, *lisez* $\dfrac{\dfrac{\pm i^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)n} f\alpha f^n \alpha}{\left(f\alpha \pm \dfrac{i^n}{1.2\ldots n} f^n\alpha\right)^2}$.

Page 23, ligne 5, *au lieu de* $\dfrac{-\dfrac{ni^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f\alpha (f^n\alpha)^2}{\left(f\alpha + \dfrac{i^n}{1.2\ldots n} f^n\alpha\right)^2}$; *lisez* $\dfrac{\dfrac{\pm ni^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f\alpha (f^n\alpha)^2}{\left(f\alpha \pm \dfrac{i^n}{1.2\ldots n} f^n\alpha\right)^2}$.

Page 23, *au lieu de la formule de la ligne* 9, *lisez*

$$\frac{n^2\left[(n-1)f\alpha \mp \dfrac{n+1}{1.2\ldots n} i^n f^n\alpha\right]\left(\pm f\alpha + \dfrac{i^n}{1.2\ldots n} f^n\alpha\right)}{\dfrac{i^n f\alpha}{1.2\ldots n}} \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{f^{n+1}a}{f^n\alpha}\right)^2.$$

Page 30, ligne 13, *au lieu de* $\mathrm{OR} = y_1$, $\mathrm{OS} = y_2$, *lisez* $\mathrm{OR} = y_m$, $\mathrm{OS} = y_n$.

Page 75, ligne 7, *au lieu de* $y_0 + \theta' h$, *lisez* $y_0 + \theta' k$.

Page 76, ligne 18, *au lieu de* x_2 ou 1, *lisez* x_2, 0 et 1.

Page 79, lignes 18, 19 et 20,

au lieu de $\varpi_m = \ldots$; $\varpi_m = \ldots$; $\varpi_m = \ldots$, *lisez* $\varpi'_n = \ldots$; $\varpi'_p = \ldots$, $\varpi'_q = \ldots$.

Page 88, ligne 14, *au lieu de* $\sin\theta \sin\varphi$, *lisez* $\sin\theta \sin\psi$.

Page 96, ligne 7, *au lieu de* $\dfrac{x^2}{1+x^2}$, *lisez* $\dfrac{x}{1+x^2}$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.