# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES.

# THÈSE DE MÉCANIQUE,

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR A. BLAVETTE,

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, ASPIRANT AU DOCTORAT ÈS-SCIENCES.



PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, N° 12, DERRIÈRE L'ÉCOLE DE MÉDECINE.

1839

# THÈSE

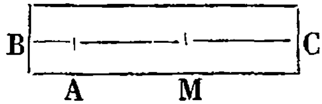
# DE MÉCANIQUE.

## *Sur les mouvements vibratoires d'une verge élastique.*

1. On entend par *verge élastique* une verge droite ou courbe qui reprend d'elle-même sa forme naturelle dès que les forces qui l'en avaient écartée cessent d'agir sur elle et que tout mouvement a cessé. Une verge élastique pourra changer de forme soit parce que les différents filets longitudinaux dont elle se compose seront allongés ou raccourcis, soit parce qu'ils seront infléchis, soit parce qu'ils seront tordus, soit enfin parce qu'ils seront dilatés ou contractés dans le sens de leur section normale : mais l'expérience nous apprend qu'un corps que l'on a écarté de sa forme naturelle au moyen de la flexion ne peut être parfaitement élastique qu'autant que son épaisseur n'est pas trop petite; autrement, ce corps deviendrait parfaitement flexible, c'est-à-dire ne conserverait plus aucune tendance à reprendre son état naturel.

2. Nous avons dit que la courbure de la verge élastique pouvait être quelconque dans l'état naturel; mais dans tout ce qui suivra, il ne s'agira que d'une verge naturellement droite; nous supposerons aussi sa longueur considérable par rapport à son épaisseur; enfin elle sera parfaitement homogène, et parfaitement prismatique ou cylindrique. On pourra toujours décomposer, par la pensée, une pareille verge en un nombre infini de filets longitudinaux; il y en aura un qui passera par les centres de gravité de

toutes les sections parallèles aux bases de la verge : nous l'appellerons *filet moyen.*



3. Considérons une pareille verge, dont BC sera le filet moyen; prenons sur BC un point A que nous supposerons fixe, appelons $\gamma$ la densité de la verge, $\omega$ l'aire d'une section normale; supposons l'axe des $x$ positifs dans la direction AC de A vers C. Si l'on prend sur BC un point quelconque M placé à une distance $x$ de l'origine, le point M′ infiniment voisin et à droite de M sera à une distance de l'origine marquée par $x+dx$, et si l'on considère la masse infiniment petite comprise entre les deux sections normales qui correspondent aux points M et M′, cette masse sera $\gamma\omega dx$. Si nous supposons maintenant que des forces particulières viennent agir sur les différents points de cette verge dans le sens de l'axe des $x$, alors les différents filets longitudinaux éprouveront un allongement ou se raccourciront; le point M que nous avons considéré aura pour abscisse $x+u$, $u$ étant une quantité positive ou négative selon que le point M se sera éloigné ou rapproché du point A. Nous supposerons enfin que tous les points qui se trouvaient primitivement dans une même section normale s'y trouvent encore quand les forces dont nous avons parlé sont appliquées à la verge.

4. La résistance que la verge oppose au rapprochement ou à l'écartement de ses molécules est une force qui s'exerce normalement aux sections de la verge perpendiculaires au filet moyen, et si l'on appelle T cette force rapportée à la section normale qui correspond à l'élément $\gamma\omega dx$, elle sera $T+\frac{dT}{dx}dx$ sur la section normale correspondant à l'autre extrémité du petit cylindre dont la hauteur est $dx$; et si nous appelons X la force appliquée à l'unité de masse de la verge au point $x$, il faudra pour l'équilibre de la

tranche infiniment mince comprise entre les deux points, que l'on ait

$$\frac{dT}{dx} + \gamma\omega X = 0.$$

5. Il est facile de passer de l'équation d'équilibre à celle du mouvement. Le point M dont l'abscisse est $x$ dans l'état naturel de la verge a pour abscisse $x + u$ dans l'état de mouvement et au bout du temps $t$; sa vitesse est donc $\frac{du}{dt}$; la force accélératrice perdue pendant l'instant $dt$ est $X - \frac{d^2u}{dt^2}$. Si $p$ est le poids de la verge, et $l$ sa longueur, $\frac{pdx}{lg}$ sera égal à $\gamma\omega dx$. Enfin la tension T est proportionnelle au rapport de l'allongement $du$ à la longueur primitive $dx$ de l'élément, ainsi que le fait voir l'expérience. Nous pouvons donc poser $T = \varpi \frac{du}{dx}$, $\varpi$ étant une tension donnée qui dépendra de la nature de la verge. En substituant ces différentes quantités dans l'équation d'équilibre, et faisant

$$\frac{gl\varpi}{p} = a^2 \quad \text{et} \quad X = 0,$$

on trouve pour l'équation du mouvement dans le sens de l'axe des $x$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2} \dots \quad (1)$$

Quand on aura intégré cette équation, on aura $u$ en fonction de $x$ et de $t$, on en tirera $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du}{dx}$, ce qui donnera T, et si l'on a déterminé tout ce qu'il y a d'arbitraire dans la valeur de $u$ donnée par l'intégration, le problème sera complétement résolu.

6. Quoique l'on sache intégrer cette équation sous forme finie, il sera plus commode pour découvrir les circonstances différentes du mouvement d'en chercher l'intégrale en séries. Or si l'on

fait

$$u = \mathrm{P}e^{\alpha t} + \mathrm{P}'e^{\alpha' t} + \text{etc.}\ldots \quad (a)$$

P, P'... étant des fonctions de $x$ et $\alpha$, $\alpha'$... des constantes, on aura une série qui, bien qu'elle ne contienne pas de fonctions arbitraires, ne sera pas moins générale que l'intégrale sous forme finie, si l'on détermine P, P',... $\alpha$, $\alpha'$... de la manière la plus générale. Cette même série peut être transformée en une autre,

$$u = p\cos mt + p'\cos m't \ldots + q\sin mt + q'\sin m't + \text{etc.},$$

en déterminant $p$, $p'$,... $q$, $q'$,... $m$, $m'$... de la manière la plus générale. Cette dernière forme, qui se déduit de la précédente en changeant les exponentielles en lignes trigonométriques, sera plus commode dans le cas dont il s'agit maintenant.

7. Je tire de l'équation $(a)$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -pm^2\cos mt - p'm'^2\cos m't \ldots - qm^2\sin mt - q'm'^2\sin m't,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2p}{dx^2}\cos mt + \frac{d^2p'}{dx^2}\cos m't \ldots + \frac{d^2q}{dx^2}\sin mt + \frac{d^2q'}{dx^2}\sin m't \ldots$$

Je porte ces valeurs dans l'équation (1):

$$pm^2\cos mt + p'm'^2\cos m't \ldots + qm^2\sin mt + q'm'^2\sin m't$$
$$= a^2\left(\frac{d^2p}{dx^2}\cos mt + \frac{d^2p'}{dx^2}\cos m't \ldots + \frac{d^2q}{dx^2}\sin mt + \text{etc.}\right)$$

Puisque cette équation a lieu quel que soit $t$, on trouve, en identifiant,

$$a\,\frac{d^2p}{dx^2} + pm^2 = 0, \quad a\,\frac{d^2p'}{dx^2} + p'm'^2 = 0\ldots$$
$$a\,\frac{d^2q}{dx^2} + qm^2 = 0, \quad a\,\frac{d^2q'}{dx^2} + q'm'^2 = 0\ldots$$

En intégrant ces équations, on a pour les deux premières

$$p = \mathrm{A}\cos\frac{mx}{a} + \mathrm{B}\sin\frac{mx}{a}, \quad q = \mathrm{C}\cos\frac{mx}{a} + \mathrm{D}\sin\frac{mx}{a},$$

et ainsi des autres. Et comme A, B, C, D sont des constantes tout-à-fait arbitraires, et que les constantes $m$, $m'$... sont aussi quelconques, on peut écrire la formule ($a$) plus simplement sous cette forme

$$u = \Sigma\left(A\cos\frac{mx}{a} + B\sin\frac{mx}{a}\right)\cos mt + \Sigma\left(C\cos\frac{mx}{a} + D\sin\frac{mx}{a}\right)\sin mt \ldots (b)$$

les sommes $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles réelles ou imaginaires des constantes A, B, C, D, $m$.

Je vais maintenant déterminer ces constantes d'après les conditions auxquelles la verge est assujétie pendant son mouvement, et aussi d'après son état initial.

8. Si les extrémités sont fixes, et que l'origine des coordonnées soit placée à un des bouts de la verge, $u$ sera constamment égal à zéro pour $x = 0$ et $x = l$, $l$ étant la longueur de la verge dans son état naturel. La première de ces conditions donne $\Sigma A = 0$, $\Sigma C = 0$, et comme chacun des termes de la somme $\Sigma$ se détermine indépendamment des autres dans l'équation ($b$), puisque chacun des termes dont $u$ est la somme est une intégrale particulière de l'équation (1), chacun des termes de la somme $\Sigma A$ sera nul ; il en sera de même des termes de la série $\Sigma C$.

De la seconde condition résulte :

$$\Sigma B \sin\frac{ml}{a} = 0, \quad \Sigma D \sin\frac{ml}{a} = 0;$$

on y satisfera en faisant $\sin\frac{ml}{a} = 0$, d'où $\frac{ml}{a} = i\pi$, $i$ étant un nombre entier positif ou négatif, mais réel. La formule ($b$) prend donc la forme

$$u = \Sigma \sin\frac{i\pi x}{l}\left(B\cos\frac{i\pi at}{l} + D\sin\frac{i\pi at}{l}\right) \ldots (c)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes B et D soumises au signe $\Sigma$ : on y parviendra en considérant l'état initial de la verge.

9. Pour cela, soient $u = \varphi x$ et $\frac{du}{dt} = \varphi' x$ les valeurs initiales de $u$ et de $\frac{du}{dt}$: ces fonctions $\varphi$ et $\varphi'$ seront données arbitrairement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$; cependant elles doivent être nulles pour ces mêmes valeurs de $x$, afin qu'il n'y ait pas incompatibilité dans les données de la question. Cela posé, je multiplie l'équation (1) par $\sin \frac{i'\pi x}{l} dx$ que j'appelle $\mathrm{X}dx$ pour abréger, et j'intègre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$. Le résultat s'écrira ainsi :

$$\int_0^l \mathrm{X} \frac{d^2u}{dt^2} dx = a^2 \int_0^l \mathrm{X} \frac{d^2u}{dx^2} dx;$$

mais en intégrant par parties

$$\int \mathrm{X} \frac{d^2u}{dx^2} dx = \mathrm{X} \frac{du}{dx} - u \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \int u \frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} dx,$$

les quantités délivrées du signe $\int$ sont nulles aux limites, et $\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} = -\frac{i'^2\pi^2}{l^2} \sin \frac{i'\pi x}{l}$, et l'équation précédente pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{d^2 \int_0^l u \sin \frac{i'\pi x}{l} dx}{dt^2} + \frac{a^2 i'^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l u \sin \frac{i'\pi x}{l} dx = 0;$$

on trouve par l'intégration

$$\int_0^l u \sin \frac{i'\pi x}{l} dx = \mathrm{E} \cos \frac{i'\pi at}{l} + \mathrm{F} \sin \frac{i'\pi at}{l},$$ E et F étant arbitraires.

Cette équation ayant lieu pour toutes les valeurs de $t$, j'y fais $t = 0$, ainsi que dans sa différentielle par rapport à $t$, et j'observe que l'on a par hypothèse $t = 0$, $u = \varphi x$, $\frac{du}{dt} = \varphi' x$ à l'origine du mouvement. Il en résulte

$$\mathrm{E} = \int_0^l \varphi x \sin \frac{i'\pi x}{l} dx, \quad \mathrm{F} = \frac{l}{i' a\pi} \int_0^l \varphi' x \sin \frac{i'\pi x}{l} dx.$$

Je remplace dans l'équation ci-dessus E et F par leurs valeurs, et $u$ par sa valeur tirée de l'équation $(c)$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^l \sin\frac{i'\pi x}{l}dx.\Sigma\sin\frac{i\pi x}{l}\left(\mathrm{B}\cos\frac{i\pi at}{l}+\mathrm{D}\sin\frac{i\pi at}{l}\right)\\ &=\left(\int_0^l \varphi x\sin\frac{i'\pi x}{l}dx\right)\cos\frac{i'\pi at}{l}+\frac{l}{i'a\pi}\left(\int_0^l \varphi x\sin\frac{i'\pi x}{l}dx\right)\sin\frac{i'\pi at}{l}\end{aligned}\right\}\ldots(d)$$

Mais $\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i'\pi x}{l}dx = 0$ toutes les fois que $i$ et $i'$ ne sont pas égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires. Les termes de la série $\Sigma$ se réduisent donc à deux quand on donne à $i'$ une valeur particulière, alors cette équation ne suffira pas pour déterminer la constante B et la constante D pour une valeur particulière de $i$, et il n'y a rien dans la question qui puisse servir à les déterminer. Mais si l'on convenait de représenter par B et par D la somme des coefficients de $\cos\frac{i\pi at}{l}$ et de $\sin\frac{i\pi at}{l}$ dans la première parenthèse de l'équation $(d)$ pour une même valeur positive et négative de $i$, alors ces coefficients seront déterminés; car on n'étendra plus dans la formule $(c)$ les valeurs de $i$ que depuis zéro jusqu'à l'infini; on fera $i=i'$ dans l'équation $(d)$, ce qui est maintenant permis, puis on observera que $\int_0^l \sin^2\frac{i\pi x}{l}dx=\frac{l}{2}$, et l'on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{B}\cos\frac{i\pi at}{l}+\mathrm{D}\sin\frac{i\pi at}{l}&=\frac{2}{l}\left(\int_0^l \varphi x\sin\frac{i\pi x}{l}dx\right)\cos\frac{i\pi at}{l}\\ &+\frac{2}{ai\pi}\left(\int_0^l \varphi' x\sin\frac{i\pi x}{l}dx\right)\sin\frac{i\pi at}{l}.\end{aligned}$$

Je porte ces valeurs dans l'équation $(c)$ et je trouve enfin

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi x\sin\frac{i\pi x}{l}dx\right)\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}\\ &+\frac{2}{a\pi}\Sigma\left(\int_0^l \varphi' x\sin\frac{i\pi x}{l}dx\right)\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l}.\end{aligned}\right\}\quad(e)$$

On tirera de cette équation la valeur de $\frac{du}{dt}$ et celle de $\frac{du}{dx}$, et l'on aura la vitesse $v$ et la tension T d'un point quelconque de la verge à un instant quelconque, ce qui est la solution complète du problème.

Si l'on fait $t=0$ dans cette équation et dans son équation différentielle par rapport à $t$, et que l'on ait égard aux valeurs initiales de $u$ et de $\frac{du}{dt}$, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} \varphi x = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi x \sin\frac{i\pi x}{l}\,dx\right)\sin\frac{i\pi x}{l}, \\ \varphi' x = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi' x \sin\frac{i\pi x}{l}\,dx\right)\sin\frac{i\pi x}{l}. \end{array}\right\}\ldots \quad (A)$$

Ces deux formules parfaitement semblables n'en font réellement qu'une. La première, par exemple, donne toutes les valeurs d'une fonction quelconque de $x$ continue ou discontinue entre les limites $x=0$ et $x=l$ : et bien que cette formule ne soit pas démontrée directement, on ne saurait néanmoins en contester l'exactitude. Cependant, comme nous en ferons usage par la suite, nous allons la démontrer directement.

10. Je considère la fraction rationnelle par rapport à $h$

$$\frac{1-h^2}{1-2h\cos\theta+h^2}, \ldots \quad (1)$$

dans laquelle $\theta$ désignera un angle réel. Je divise son numérateur par son dénominateur, et je trouve après quelques réductions évidentes

$$\frac{1-h^2}{1-2h\cos\theta+h^2} = 1+2h\cos\theta+2h^2\cos 2\theta+2h^3\cos 3\theta+\ldots$$
$$+2h^n\cos n\theta+\frac{2h^{n+1}\cos(n+1)\theta-2h^{n+2}\cos n\theta}{1-2h\cos\theta+h^2}.$$

Si $n$ est infini, le terme complémentaire de la série est nul dans l'hypothèse de $h$ plus petit que l'unité, et dans ce cas, on aura en toute rigueur,

$$\frac{1-h^2}{1-2h\cos\theta+h^2} = 1+2\Sigma h^n\cos n\theta; \quad . \quad (2)$$

en étendant la somme $\Sigma$ à toutes les valeurs entières et positives de $n$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$.

En désignant par $\alpha$ une constante réelle, et par $f\theta$ une fonction arbitraire de $\theta$, on a encore :

$$\int_0^\pi f\theta d\theta + 2\Sigma h^n \int_0^\pi \cos n(\theta-\alpha) f\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{(1-h)^2 f\theta d\theta}{(1-h)^2+4h\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\alpha)} \dots (3)$$

J'appelle $\mu$ une quantité positive et infiniment petite ; je fais $h=1-\mu$. Il en résulte $h^n=(1-\mu)^n=1$ pour des valeurs finies de $n$. Comme l'équation (3) a lieu pour des valeurs de $h$ plus petites que l'unité, on pourra mettre $1-\mu$ à la place de $h$ et l'unité par conséquent pour toutes les valeurs de $n$ qui ne sont pas infinies. Pour savoir si l'on peut encore mettre l'unité à la place de $h$ pour les valeurs infinies de $n$, on intégrera par parties et l'on trouvera

$$\int \cos n(\theta-\alpha) f\theta d\theta = \frac{f\theta}{n}\sin n(\theta-\alpha) - \frac{1}{n}\int \sin n(\theta-\alpha)\frac{df\theta}{d\theta}d\theta;$$

et si $f\theta$, ni son coefficient différentiel $\frac{df\theta}{d\theta}$ ne passent pas par l'infini entre les limites $\theta=0$, $\theta=\pi$ ni pour ces limites, l'intégrale deviendra nulle pour $n=\infty$. Ainsi l'on pourra, dans tous les cas, substituer l'unité à $h$ dans le premier membre de l'équation (3) ; et en négligeant $\mu^2$ par rapport à $2\mu$, elle prend la forme

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta d\theta + \Sigma\int_0^\pi \cos n(\theta-\alpha) f\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\mu f\theta d\theta}{\mu^2+4\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\alpha)} \dots \quad (4)$$

Cette dernière intégrale ne peut avoir de valeur qu'autant que $\theta-\alpha$ est infiniment petit. Donc, si $\alpha$ n'est pas compris entre les limites $0$ et $\pi$, et s'il n'est égal ni à l'une ni à l'autre de ces limites, il faudra que l'on ait

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta\, d\theta + \Sigma\int_0^\pi \cos n(\theta-\alpha) f\theta\, d\theta = 0 \dots \quad (5)$$

Si au contraire $\alpha$ est plus grand que zéro et plus petit que $\pi$, on fera $\theta-\alpha=z$, $z$ étant une variable positive ou négative, mais qui devra rester infiniment petite tant que l'intégrale du second membre de l'équation (4) ne s'évanouira pas. Je fais $\sin \frac{1}{2}(\theta - \alpha) = \frac{1}{2} z$, $f\theta = f(\alpha)$, et j'intègre depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ce qui est sans inconvénient d'après l'observation précédente. La valeur de cette intégrale est $\pi f\alpha$, et l'équation (4) devient

$$\frac{1}{2}\int f\theta\, d\theta + \Sigma \int_0^\pi \cos n(\theta - \alpha) f\theta d\theta = \pi f\alpha. \qquad (6)$$

Je fais $\theta = \frac{\pi x'}{a}$ et $f\theta = \varphi x'$; je porte ensuite ces valeurs dans les équations (5) et (6); je fais $\alpha = -\frac{\pi x}{a}$ dans la première et $\alpha = \frac{\pi x}{a}$ dans la seconde; les limites des intégrales relatives à $\theta$ se trouvent changées et les équations (5) et (6) deviennent

$$\frac{1}{2a}\int_0^a \varphi x'\, dx' + \frac{1}{a}\Sigma \int_0^a \varphi x' \cos \frac{n\pi(x'+x)}{a}\, dx' = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^a \varphi x'\, dx' + \frac{1}{a}\Sigma \int_0^a \varphi x' \cos \frac{n\pi(x'-x)}{a}\, dx' = \varphi x. \qquad (8)$$

Ces équations, retranchées l'une de l'autre, donnent précisément la formule qu'il s'agissait de démontrer,

$$\varphi x = \frac{2}{a}\Sigma \left(\int_0^a \varphi x' \sin \frac{n\pi x'}{a}\, dx'\right) \sin \frac{n\pi x}{a}, \qquad (9)$$

formule dont le second membre représente toutes les valeurs de la fonction arbitraire $\varphi$ entre les limites 0 et $a$ ; et c'est ce que nous nous proposions encore de démontrer.

11 Je reviens à la formule ($e$). On voit à son inspection que la valeur de $u$ redeviendra la même toutes les fois que $t$ augmentera d'un multiple quelconque de $\frac{2l}{a}$ ; il en sera de même des valeurs de $v$ et de T. Donc, si l'on fait $\tau = \frac{2l}{a}$, le temps d'une vibration sera représenté par $\tau$, et si l'on met dans la valeur de $\tau$, au lieu de $a$, sa valeur $\sqrt{\frac{gl\varpi}{p}}$, on aura $\tau = 2\sqrt{\frac{lp}{g\varpi}}$ ; et si l'on divise

l'unité par $\tau$, et que l'on représente le quotient par $n$, on trouve $n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\varpi}{pl}}$. Ce nombre $n$ est le nombre de vibrations que fait la verge dans l'unité de temps, et il fera connaître immédiatement le *ton* donné par la verge.

12. Supposons que l'une des extrémités soit libre, par exemple, l'extrémité correspondant à $x = l$, et que l'autre extrémité correspondant à $x = 0$ soit fixe. L'équation différentielle du mouvement sera encore la même que précédemment, mais il faudra déterminer les constantes d'une autre manière, puisque l'on n'aura plus $u = 0$ pour $x = l$. Mais on remarquera qu'à l'extrémité libre, la tension T est nulle, par conséquent $\frac{du}{dx} = 0$ pour ce point et pendant tout le mouvement, et l'on aura toujours $u = 0$ pour $x = 0$. Cette dernière condition, introduite dans l'intégrale générale qui est l'équation (6) du n° 7, donne, comme on l'a expliqué au n° 8,

$$u = \Sigma \mathrm{B} \sin \frac{mx}{a} \cos mt + \Sigma \mathrm{D} \sin \frac{mx}{a} \sin mt.$$

Si l'on différentie cette équation pour avoir $\frac{du}{dx}$, que l'on égale le premier membre à zéro, que l'on mette $l$ à la place de $x$ dans le second, et que l'on observe que cette équation aura lieu quel que soit $t$, on y satisfera en faisant $\cos \frac{ml}{a} = 0$, ce qui exige que $m = \frac{(2i-1)\pi a}{2l}$. De cette manière, $u$ prend la forme suivante :

$$u = \Sigma \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2l}\left[\mathrm{B} \cos \frac{(2i-1)\pi at}{2l} + \mathrm{D} \sin \frac{(2i-1)\pi at}{2l}\right].$$

Je suivrai, pour déterminer les constantes B et D, une marche analogue à celle que j'ai suivie dans le n° 9. En représentant

$\sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}$ par X pour abréger, on a l'équation

$$\int_0^l X\frac{d^2u}{dt^2}dx = a^2\int_0^l X\frac{d^2u}{dx^2}dx,$$

et en intégrant par parties, on trouve

$$\int X\frac{d^2u}{dx^2}dx = X\frac{du}{dx} - u\frac{dX}{dx} + \int u\frac{d^2X}{dx^2}dx.$$

Ce qui est hors du signe $\int$ est nul aux limites par hypothèse et d'ailleurs $\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{(2i'-1)^2\pi^2}{4l^2}X$. On peut écrire l'équation précédente ainsi qu'il suit :

$$\frac{d^2\int_0^l uXdx}{dt^2} + \frac{(2i'-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\int_0^l uXdx = 0;$$

d'ou

$$\int_0^l Xudx = H\cos\frac{2i'-1}{2l}\pi at + H_1\sin\frac{2i'-1}{2l}\pi at.$$

Je détermine H et H' en faisant $t=0$ dans cette équation et dans sa différentielle par rapport à $t$, et j'observe que pour $t=0$ on a $u=\varphi x$ et $\frac{du}{dt}=\varphi' x$, $\varphi$ et $\varphi'$ étant des fonctions données depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$ et qui satisfont aux conditions auxquelles sont assujéties les extrémités de la verge. Les valeurs de ces constantes sont :

$$H = \int_0^l \varphi x\sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}dx,\quad H' = \frac{2l}{(2i'-1)a\pi}\int_0^l \varphi' x\sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}dx.$$

Je remplace dans l'équation précédente H et H', $u$ et X par leurs valeurs

$$\int_0^l \sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}dx\,\Sigma\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\left[B\cos\frac{(2i-1)\pi at}{2l} + D\sin\frac{(2i-1)\pi at}{2l}\right]$$
$$= \left[\int_0^l \varphi x\sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}dx\right]\cos\frac{(2i'-1)\pi at}{2l}$$
$$+\frac{2l}{(2i'-1)a\pi}\left[\int_0^l \varphi' x\sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}dx\right]\sin\frac{(2i'-1)\pi at}{2l}.$$

Mais

$$\int_0^l \sin\frac{(2i'-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\,dx = 0,$$

quand $i$ et $i'$ ne sont pas égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires; et si l'on a réuni dans la somme $\Sigma$ que contient $u$, sous un même coefficient B les deux termes qui correspondent à $\cos\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}$ et à $\cos -\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}$, et de même pour les sinus, ainsi que cela a été expliqué au n° 9, on n'étendra les valeurs de $i$ dans la somme $\Sigma$ que depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$; on fera $i=i'$ dans l'équation précédente, et comme

$$\int_0^l \sin^2\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\,dx = \frac{l}{2},$$

il en résulte

$$\mathrm{B} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi x \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\,dx,$$

et

$$\mathrm{D} = \frac{4}{(2i-1)a\pi}\int_0^l \varphi' x \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\,dx.$$

La valeur de $u$ sera ainsi complétement déterminée, et l'on aura

$$u=\frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \varphi x \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}dx\right]\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}$$
$$+\frac{4}{a\pi}\Sigma\left[\int_0^l \varphi' x \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}dx\right]\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}.$$

En faisant $t=0$ on en tire

$$\varphi x = \frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \varphi x \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\,dx\right]\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}; \qquad \text{(B)}$$

on tirerait une formule tout-à-fait pareille en différentiant la valeur de $u$ par rapport à $t$ et faisant $t=0$ dans le résultat.

Cette série peut encore se tirer des formules (7) et (8) du n° 10;

nous la démontrerons bientôt directement, et elle satisfait, comme cela doit être, aux conditions $\varphi x = 0$ pour $x = 0$ et $\frac{d\varphi x}{dx} = 0$ pour $x = l$.

Toutes les fois que $t$ augmentera d'un multiple quelconque de $\frac{4l}{a}$, l'état de la verge redeviendra le même qu'il était: le ton fondamental sera donc une octave au-dessous de ce qu'il était dans le cas précédent, puisque le nombre des vibrations, ainsi qu'on peut s'en assurer, sera deux fois moindre dans l'unité de temps.

13. Examinons enfin le cas où la verge est libre dans toute sa longueur. La tension est nulle aux extrémités, il faudra donc que l'on ait $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et $x = l$. Ces conditions introduites dans l'intégrale générale qui est l'équation (6) du n° 7, donnent

$$B = 0,\ D = 0,\ \frac{ml}{a} = i\pi,$$

et par conséquent

$$u = \Sigma \cos \frac{i\pi x}{l}\left(A \cos \frac{i\pi at}{l} + C \sin \frac{i\pi at}{l}\right),$$

formule dans laquelle nous pourrons supposer $i$ entier et positif, pourvu que l'on ait réuni en un seul les deux termes qui correspondent à une même valeur de $i$ pris positivement et négativement. Je multiplie l'équation fondamentale $\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$ par... $\cos \frac{i'\pi x}{l} dx$ et j'intègre les deux membres depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, exactement comme dans les deux cas précédents; puis je détermine aussi, comme précédemment, les constantes amenées par l'intégration, et je trouve, tout calcul fait:

$$\int_0^l \cos \frac{i'\pi x}{l}\, dx\, \Sigma \cos \frac{i\pi x}{l}\left(A \cos \frac{i\pi at}{l} + C \sin \frac{i\pi at}{l}\right)$$
$$= \left(\int_0^l \cos \frac{i'\pi x}{l}\, \varphi x\, dx\right) \cos \frac{i'\pi at}{l} + \frac{l}{i'\pi a}\left(\int_0^l \cos \frac{i'\pi x}{l}\, \varphi' x\, dx\right) \sin \frac{i'\pi at}{l},$$

or

$$\int_0^l \cos\frac{i'\pi x}{l}\cos\frac{i\pi x}{l}\,dx = 0,$$

quand $i$ et $i'$ sont inégaux; et quand $i = i'$ cette intégrale a pour valeur $\frac{l}{2}$, d'où il est facile de tirer

$$\mathrm{A} = \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{i\pi x}{l}\,\varphi x dx,$$

et

$$\mathrm{C} = \frac{2}{i\pi a}\int_0^l \cos\frac{i\pi x}{l}\,\varphi' x dx.$$

Il est évident que l'on doit faire aussi $i = 0$ dans la valeur de $u$; dans ce cas, les cosinus deviennent égaux à l'unité et les sinus égaux à zéro. L'intégrale définie

$$\int_0^l \cos^2\frac{i\pi x}{l}\,dx = l, \quad \mathrm{A} = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi x dx.$$

Mais $\mathrm{C}\sin\frac{i\pi at}{l}$ prend une forme illusoire, puisque C est infini, et le sinus égal à zéro. On trouvera la valeur véritable de $\frac{\left(\int_0^l \varphi' x dx\right)\sin\frac{i\pi at}{l}}{i\pi a}$ dans ce cas particulier par les règles ordinaires du calcul différentiel, ou en développant le sinus en série par la formule connue, divisant toute la série et le dénominateur $i\pi a$ par $i$, et faisant ensuite $i = 0$. D'une manière comme de l'autre, on trouvera que la vraie valeur de cette expression est $\frac{t}{l}\int_0^l \varphi' x dx$; on connaîtra donc complétement la valeur de $u$. Cette valeur est

$$u = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi x dx + \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi x\cos\frac{i\pi x}{l}dx\right)\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}$$
$$+ \frac{t}{l}\int_0^l \varphi' x dx + \frac{2}{a\pi}\left(\int_0^l \varphi' x\cos\frac{i\pi x}{l}dx\right)\frac{1}{i}\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l}.$$

On donnera dans cette formule à $i$ toutes les valeurs entières, depuis l'unité jusqu'à l'infini positif. Pour $t = 0$ on trouve

$$\varphi x = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi x dx + \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi x\cos\frac{i\pi x}{l}dx\right)\cos\frac{i\pi x}{l}; \qquad \text{(C)}$$

une formule toute semblable se déduirait de la différentielle de $u$ par rapport à $t$ en y faisant $t=0$.

Avant que d'aller plus loin, je vais démontrer directement cette formule, et celle qui est à la fin du n° 11.

14. Reprenons les formules 7 et 8 du n° 10, ajoutons-les d'abord et retranchons ensuite la première de la seconde, mettons $x+l$ à la place de $x$, ce qui changera les limites des intégrales que l'on prendra dans ce cas depuis $-l$ jusqu'à $+l$. et cela fait, mettons $\varphi x$ à la place de $\varphi(x+l)$. On trouve les deux formules suivantes

$$\varphi x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi x' dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x' \cos\frac{n\pi(x'+l)}{2l}dx'\right)\cos\frac{n\pi(x+l)}{2l},$$

$$\varphi x = \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x' \sin\frac{n\pi(x'+l)}{2l}dx'\right)\sin\frac{n\pi(x+l)}{2l}.$$

Dans ces formules on doit donner à $n$ toutes les valeurs entières, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$.

Considérons successivement dans ces deux séries les termes qui répondent aux valeurs paires et aux valeurs impaires de $n$, et, pour cela, faisons y $n=2i$ et $n=2i-1$; chaque série $\Sigma$ se partagera en deux autres, et si l'on se rappelle que

$$\cos\frac{2i\pi(x+l)}{2l} = (-1)^i\cos\frac{i\pi x}{l},\quad \cos\frac{(2i-1)\pi(x+l)}{2l} = (-1)^i\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l},$$

$$\sin\frac{2i\pi(x+l)}{2l} = (-1)^i\sin\frac{i\pi x}{l},\quad \sin\frac{(2i-1)\pi(x+l)}{2l} = -(-1)^i\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l},$$

les deux formules précédentes pourront s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi x &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi x' dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x' \cos\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l}\\
&\quad + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l},\\
\varphi x &= \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l}\\
&\quad + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x' \cos\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}dx'\right)\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l}.
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Dans ces deux formules $i$ prendra toutes les valeurs entières et positives depuis 1 jusqu'à l'infini, et ces mêmes formules serviront entre les limites $x=-l$ et $x=l$. Si nous supposons maintenant que $\varphi(-x)=-\varphi x$, les éléments de l'intégrale $\int_{-l}^{l}\varphi x dx$ se détruiront deux à deux et cette intégrale sera nulle. Il en sera de même des autres $\int_{-l}^{l}\varphi x\cos\frac{i\pi x}{l}dx$ et $\int_{-l}^{l}\varphi x\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l}dx$. Au contraire, les éléments de l'intégrale $\int_{-l}^{l}\varphi x\sin\frac{i\pi x}{l}dx$ étant égaux pour deux valeurs égales et de signes contraires de $x$, on pourra prendre cette intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$ et doubler le résultat. Il en sera de même de l'intégrale... $\int_{-l}^{l}\varphi x\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}dx$. En apportant ces modifications dans les deux équations (1), on trouve que la seconde se réduit précisément à l'équation (9) du n° 10, laquelle convient à une fonction quelconque de $x$, $x$ étant compris entre les limites 0 et $l$, sauf la restriction dont il a été question quand on a démontré la formule. Quant à la première formule, elle se réduit à

$$\varphi x=\frac{2}{l}\Sigma\left[\int_{0}^{l}\varphi x'\sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}dx'\right]\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}. \quad (2)$$

Cette formule coïncide précisément avec l'équation (B) du n° 11.

Supposons maintenant que l'on ait $\varphi x=\varphi(-x)$, en introduisant cette hypothèse dans les formules $i$, et en supprimant, comme nous venons de le faire, les intégrales dont tous les éléments se détruisent deux à deux, et observant que les autres peuvent se prendre depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$ en doublant le résultat; la seconde équation (1) rentrera dans l'équation (2) en substituant dans celle-ci $x-l$ à la place de $x$ et ensuite $\varphi x$ à la place de $\varphi(x-l)$. La première formule (1) donnera

$$\varphi x=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\varphi x'dx'+\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_{0}^{l}\varphi x'\cos\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l} \quad (3)$$

Cette dernière coïncide avec la formule (C) du n° 12, et c'est ce quə nous nous proposions de démontrer.

15. La valeur de $u$ du n° 12 contient, indépendamment des séries, deux termes $\frac{1}{l}\int_0^l \varphi x dx$ et $\frac{t}{l}\int_0^l \varphi' x dx$. Ce qui nous montre que si les deux intégrales qu'ils contiennent ne sont pas nulles, la verge aura, outre son mouvement vibratoire, un mouvement de translation commun à tous ses points. Abstraction faite de ce mouvement progressif, l'état de la verge redeviendra le même toutes les fois que $t$ augmentera d'un multiple quelconque de $\frac{2l}{a}$, ce qui prouve que le ton sera le même que si la verge était fixe à ses deux extrémités.

16. Il importe de remarquer que dans les trois cas qui viennent d'être exposés, on aura une intégrale de l'équation différentielle du mouvement, intégrale qui satisfera aux conditions qui assujétissent les points extrêmes et à l'état initial de la verge, si l'on donne à $i$ une valeur particulière dans chacune des trois formules qui déterminent $u$. Je supposerai pour fixer les idées, qu'il s'agisse de la valeur de $u$ que nous avons trouvée dans le troisième cas de la verge vibrante, et, comme il n'est ici question que du ton donné par la verge, c'est-à-dire du nombre des vibrations d'un quelconque de ses points dans l'unité de temps, nous pouvons y supposer $\int_0^l \varphi x dx = 0$ et $\int_0^l \varphi' x dx = 0$. Cela posé, si nous faisons $i = 1$ et si nous supprimons les signes $\Sigma$ qui se trouvent dans cette valeur de $u$, le second membre de l'équation sera encore une valeur de $u$ satisfaisant à toutes les conditions de la question, et la valeur de $u$ ne redeviendra la même que quand le temps augmentera d'un multiple quelconque de $\frac{2l}{a}$; mais si l'on fait $i = 2$ et que l'on fasse toujours abstraction de tous les autres termes, la valeur de $u$ redeviendra la même toutes les fois que $t$ augmentera d'un multiple

quelconque de $\frac{l}{a}$; le nombre des vibrations sera doublé dans l'unité de temps, et le son correspondant à ce mode de vibrations sera à l'octave aiguë du précédent. On voit donc que pour chaque valeur de $i$ on trouvera que la verge produit un son particulier; il y en aura une infinité qui coexisteront, et si l'on appelle 1 le son fondamental, les autres seront 2, 3, 4, 5, etc.

17. Cette conséquence ne pourrait être infirmée que dans les cas où les intégrales $\int_0^l \varphi x \cos \frac{i\pi x}{l}\,dx$ et $\int_0^l \varphi' x \cos \frac{i\pi x}{l}\,dx$ deviendraient l'une et l'autre égales à zéro pour certaines valeurs de $i$. Les modes de vibration correspondant à ces valeurs de $i$ n'existeraient pas. Et si ces mêmes intégrales étaient nulles pour toutes les valeurs de $i$ qui ne seraient pas un multiple d'un nombre entier $m$, la valeur de $u$ ne contiendrait plus que des sinus et cosinus d'arcs multiples de $\frac{m\pi x}{l}$ et $\frac{m\pi at}{l}$; la valeur de $u$ redeviendrait la même toutes les fois que $t$ augmenterait d'un multiple de $\frac{2l}{am}$, ce qui élèvera le ton fondamental de la verge dans le rapport de 1 à $m$; mais il y aura sur la longueur de la verge $m - 1$ points également espacés qui ne vibreront pas, et l'inspection de $\frac{du}{dt}$ montre qu'ils n'ont reçu aucune vitesse à l'origine du mouvement.

## *Vibrations longitudinales occasionnées par le choc.*

A C D B

18. On peut appliquer les formules précédentes au cas de deux ou d'un plus grand nombre de verges élastiques homogènes, ayant même section normale, et dont les filets moyens viendraient à se choquer. En effet, soient AC, DB, les filets moyens de deux verges; si les deux points C et D viennent à la rencontre l'un de l'autre ou

s'ils se meuvent dans le même sens, mais que le point C qui est derrière ait la plus grande vitesse, de manière que le choc ait lieu, les différents points des deux verges éprouveront une certaine tension, et le mouvement vibratoire qui en résultera produira un son qu'il s'agit de déterminer. Si à un instant donné la tension redevenait nulle après le choc, et si à ce même instant tous les points de la verge DB étaient animés d'une vitesse commune et plus grande que la vitesse du point C, le choc serait évidemment terminé. Si, au contraire, ces deux circonstances ne peuvent pas se présenter à la fois, les deux verges ne se sépareront pas.

19. A la vérité, les intensités des forces moléculaires en fonction de la distance n'étant pas connues, on ne connaîtra pas non plus les vitesses imprimées par ces forces aux points qui se trouvent pour la lame DB dans la sphère d'activité de l'extrémité C, et de même pour tous les points qui se trouvent sur la première verge dans la sphère d'activité du point D : mais ces points ne sont qu'à des distances insensibles de C et de D, et l'équation du mouvement trouvée au n° 6, sera applicable à tous les autres points des deux verges; quant aux points qui ne se trouvent pas compris dans l'équation du mouvement, leurs vitesses pourront différer de beaucoup des vitesses des autres points des deux verges; toutefois, les tensions des points extrêmes qui se trouvent sous l'influence des forces dont il est question, doivent être sensiblement les mêmes, sans quoi la différence des tensions $T' - T$ de ces points extrêmes qui sollicite la masse insensible soumise à ces forces correspondrait à une force accélératrice immense et comme infinie, ce qui est inadmissible.

20. Si tous les points de la verge AC ont une même vitesse $v$ avant le choc, et si tous les points de la verge DB ont aussi une même vitesse $v'$ avant le choc, la tension T sera zéro pour tous les points des deux verges au commencement du choc, et si $\lambda$ et $\lambda'$ sont les longueurs des parties des deux verges qui se trouvent hors du rayon d'activité des points C et D, ces deux parties ne différe-

ront pas sensiblement des verges entières auxquelles elles appartiennent, et l'on pourra écrire sans erreur sensible $\lambda + \lambda' = l$, $l$ étant la somme des longueurs des verges. L'équation différentielle du mouvement des deux parties $\lambda$ et $\lambda'$ sera toujours

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

et la valeur de $u$ se tirera des formules précédentes.

Comme la tension est nulle pour tous les points des deux verges au commencement du choc, on aura $\varphi x = 0$, et d'après les notations que nous venons d'indiquer, on aura encore

$$\int_0^l \varphi' x \cos \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{l}{i\pi}(v - v') \sin \frac{i\pi\lambda}{l};$$

alors si les deux verges sont libres, on introduira ces modifications dans la valeur de $u$ du n° 13, et l'on trouvera

$$u = \frac{\lambda v + \lambda' v'}{l} t + \frac{2l}{\pi^2 a}(v - v') \Sigma \frac{1}{i^2} \sin \frac{i\pi\lambda}{l} \cos \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi a t}{l}.$$

On tirera de là la vitesse et la tension d'un point quelconque,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\lambda v + \lambda' v'}{l} + \frac{2}{\pi}(v - v') \Sigma \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi\lambda}{l} \cos \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi a t}{l} \quad \ldots, \quad (1)$$

$$\mathrm{T} = \varpi \frac{du}{dx} = -\frac{2\varpi}{\pi a}(v - v') \Sigma \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi\lambda}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi a t}{l} \quad \ldots; \quad (2)$$

ce qui est la solution complète du problème, puisque l'on connaît maintenant la vitesse et la tension d'un point quelconque des deux verges pour un instant donné. On peut remarquer que si $v = v'$ la tension sera nulle pour tous les points, et la vitesse commune $\frac{du}{dt}$ se réduira à $v$, ce qui est évident *à priori*.

21. Les formules démontrées précédemment servent à trouver les sommes comprises sous le signe $\Sigma$ dans les équations (1) et (2). En effet, si dans la formule (C) du n° 13, je mets $x^2$ au lieu de

$\varphi x$, je trouve

$$x^2 = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l x^2 \cos\frac{i\pi x}{l}dx\right)\cos\frac{i\pi x}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l x^2 dx;$$

je différentie par rapport à $x$, et il vient

$$x = -\frac{1}{l}\Sigma\left(\int_0^l x^2 \cos\frac{i\pi x}{l}\cdot\frac{i\pi dx}{l}\right)\sin\frac{i\pi x}{l},$$

équation qui a lieu pour toute valeur de $x$ comprise entre $-l$ et $+l$. On trouve en intégrant

$$\int_0^l x^2 \cos\frac{i\pi x}{l}\cdot\frac{i\pi dx}{l} = (-1)^i\frac{2l^2}{i\pi},$$

d'où

$$\frac{\pi x}{2l} = -\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi x}{l};$$

faisons ensuite $\frac{\pi x}{l} = \theta$, il vient

$$\frac{\theta}{2} = -\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin i\theta, \qquad (3)$$

formule dans laquelle $\theta$ peut avoir toutes les valeurs comprises entre $-\pi$ et $\pi$. Ainsi, par exemple, si l'on veut avoir la valeur de la vitesse $\frac{du}{dt}$ pour un point quelconque d'une des verges à un instant donné, on transformera l'expression $\sin\frac{i\pi\lambda}{l}\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}$ en une somme de sinus par les formules ordinaires de la trigonométrie. Ces formules montrent que l'on peut écrire la valeur de $\frac{du}{dt}$ de la manière suivante

$$\frac{du}{dt} = \frac{\lambda v + \lambda' v'}{l} + \frac{1}{2\pi}(v - v')\Big[\Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{l}(\lambda + x + at) + \Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{l}(\lambda + x - at)$$
$$+ \Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{l}(\lambda - x + at) + \Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{l}(\lambda - x - at)\Big], \qquad (4)$$

formule dans laquelle il faut déterminer les sommes $\Sigma$ pour toutes les valeurs de $x$, depuis zéro jusqu'à $l$ et pour toutes les valeurs de $t$ depuis o jusqu'à l'infini.

Le procédé à employer sera le même pour les quatre séries de sinus; nous allons l'indiquer pour la première seulement. Soit donc la série $\Sigma \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi}{l}(\lambda + x + at)$ dont il s'agit de déterminer la valeur au moyen de la formule (3). Je remarque d'abord que

$$l = \lambda + \lambda',$$

et par conséquent

$$\sin \frac{i\pi}{l}(\lambda + x + at) = \sin \frac{i\pi}{l}(l - \lambda' + x + at) = (-1)^i \sin \frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda').$$

Mais la formule (3) donne

$$\Sigma \frac{(-1)^i}{i} \sin \frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda') = - \frac{\pi(x + at - \lambda')}{2l}.$$

Mais cette formule ne servira qu'entre les limites $x + at = 0$ et $x + at = l + \lambda'$. Si $x + at$ dépasse cette dernière valeur, on remarquera que

$$\sin \frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda') = \sin\left[\frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda') - 2i\pi\right] = \sin \frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda' - 2l),$$

et en faisant dans la formule (3)

$$\frac{\pi}{l}(x + at - \lambda' - 2l) = \theta,$$

on trouvera la valeur de $x + at$ entre les limites $x + at = l + \lambda$ et $x + at = 3l + \lambda'$ ; puis, substituant au lieu de.......... $\sin \frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda' - 2l)$ son équivalent $\sin \frac{i\pi}{l}(x + at - \lambda' - 4l)$ et faisant $\frac{\pi}{l}(x + at - \lambda' - 4l) = \theta$, cette valeur de $\theta$ mise dans la formule (3) donnera la valeur de la série entre les limites....... $x + at = \lambda' + 3l$ et $x + at = \lambda' + 5l$, et ainsi de suite, jusqu'à telle valeur de $x + at$ que l'on voudra assigner; les trois autres séries se calculeront d'une manière analogue, et l'on calculerait encore de même la valeur de T pour les différentes valeurs de $x$ et de $t$.

Si dans les quatre séries de l'équation (4) on fait $t=0$, on doit retrouver la valeur initiale de la vitesse, et c'est ce que l'on vérifiera aisément. En effet, on a dans ce cas,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\lambda v+\lambda' v'}{l}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{l}(\lambda+x)+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{l}(\lambda-x),$$

et par des transformations pareilles à celles que nous venons d'indiquer, on trouvera $\frac{du}{dt}=v$ quand le point considéré appartiendra à la partie $\lambda$ de la première verge, et $\frac{du}{dt}=v'$ quand le point appartiendra à la partie $\lambda'$ de la seconde verge; et si le mouvement vibratoire des deux verges dure un temps suffisant, ces vitesses initiales reviennent les mêmes pour les mêmes points toutes les fois que $t$ est un multiple pair de $\frac{l}{a}$.

Quant à la tension T, elle est nulle pour tous les points quand $t$ est un multiple quelconque de $\frac{l}{a}$; elle est donc toujours nulle quand les deux verges reprennent leurs vitesses initiales, et dans le cas où le mouvement vibratoire aurait duré pendant un temps égal à $\frac{2l}{a}$, les choses se retrouveraient dans le même état qu'au commencement du choc : mêmes vitesses pour les mêmes points; tension nulle pour tous les points, les mêmes phénomènes se reproduiraient sous l'influence des mêmes causes, et le mouvement vibratoire se perpétuerait indéfiniment.

22. Examinons dans quel état se trouvent les deux verges quand le temps est égal à $\frac{l}{a}$ ou à un multiple impair de cette quantité. D'abord la tension est nulle pour tous leurs points, ainsi que nous venons de le voir; mais il faut connaître les vitesses de leurs différents points. C'est ce que l'on trouvera facilement par la même formule (3) du n° 19 qui nous a servi précédemment, et par la for-

mule (1) du n° 16 en y faisant $\cos\frac{i\pi at}{l} = (-1)^i$, et par un calcul tout-à-fait semblable aux précédents, on en conclura que $\frac{du}{dt} = v'$ pour tous les points dont l'abscisse est moindre que $\lambda$, et que $\frac{du}{dt} = v$ pour tous les points dont l'abscisse est plus grande que $\lambda$. Donc si sur les deux lames on prend un point M tel que $AM = \lambda$ et $BM = \lambda'$ ou en diffère infiniment peu, tous les points de AM auront la même vitesse $v'$, et tous ceux de BM la même vitesse $v$ au bout du temps $\frac{l}{a}$.

Cela posé, il pourra se présenter plusieurs cas : ou bien les deux verges auront des longueurs égales, et par conséquent des masses égales, ou bien ce sera le contraire qui aura lieu. Dans la première hypothèse, comme les extrémités contiguës des deux verges n'éprouvent aucune tension, que l'on a nécessairement $v > v'$, puisque le choc a eu lieu, ces deux extrémités ont des vitesses inégales, et celle qui va devant a la plus grande vitesse; donc le choc est terminé et les verges vont se séparer après avoir fait échange de leurs vitesses, ce qui est conforme au théorème connu sur le choc des corps parfaitement élastiques et de masses égales. Mais si les deux verges n'ont pas même longueur, la vitesse sera toujours la même aux extrémités contiguës quand la tension y sera nulle, ce qui empêchera les verges de se jamais séparer; alors elles vibreront ensemble comme une seule verge d'une longueur égale à leur somme, et elles feront entendre les mêmes sons que celle-ci.

Supposons le point M situé sur la verge DB, et la verge DB composée elle-même de deux parties séparées au point M, mais ayant une vitesse commune au commencement du choc. Il est évident qu'au bout du temps $t = \frac{l}{a}$ les deux parties contiguës de la verge DB vont se séparer au point M, puisque l'une de ces parties a une vitesse différente de l'autre, que celle qui a la plus grande vitesse va devant, et que la tension est nulle partout. Le

4..

reste DM de la verge ayant dans tous ses points la même vitesse $v'$ que tous les points de la verge AC, la tension étant nulle pour tous les points depuis A jusqu'à M, il n'y aura plus de mouvement vibratoire, et le mouvement uniforme de translation subsistera seul.

23. Enfin, le point A pourrait être tout-à-fait fixe, la seconde verge ayant pour tous ses points une même vitesse négative $-v$ au commencement du choc. Nous prendrons pour ce cas la valeur de $u$ déterminée au n° 12; nous y ferons $\varphi' x = 0$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \lambda$, et $\varphi' x = -v$ depuis $x = \lambda$ jusqu'à $x = l$; d'ailleurs on a $u = 0$ pour $t = 0$, ce qui fait disparaître $\varphi x$, et la formule se réduit dans le cas présent à

$$u = -\frac{8lv}{\pi^2 a}\Sigma \frac{1}{(2i-1)^2}\cos\frac{(2i-1)\pi\lambda}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi a t}{2l};$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dt} = -\frac{4v}{\pi}\Sigma\frac{1}{2i-1}\cos\frac{2i-1}{2l}\pi\lambda\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}, \quad (5)$$

$$\mathrm{T} = \varpi\frac{du}{dx} = -\frac{4v\varpi}{a\pi}\Sigma\frac{1}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi\lambda}{2l}\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}. \quad (6)$$

Ces formules sont la solution complète du problème, et, comme dans le cas précédent, on pourra, au moyen d'une formule que nous allons démontrer, calculer les séries contenues dans les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et de T pour toutes les valeurs de $x$ et de $t$.

Je mets dans la formule (B) du n° 11, $x$ au lieu de $\varphi x$, et je trouve

$$x = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l x\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}dx\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}.$$

Cette formule a lieu pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $-l$ et $+l$.

Je la différentie par rapport à $x$, ce qui donne

$$1 = \frac{\pi}{l^2}\Sigma\left(\int_0^l x\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}.(2i-1)dx\right)\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l}$$

La valeur de l'intégrale définie contenue dans cette formule est, comme on peut s'en assurer, $-\frac{4l^2}{\pi^2(2i-1)}(-1)^i$. Si on la substitue dans la formule et que l'on fasse $\frac{\pi x}{2l}=\theta$, on trouve

$$\frac{\pi}{4}=-\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos(2i-1)\theta, \qquad (7)$$

formule qui a lieu pour toutes les valeurs de $\theta$ entre $\theta=-\frac{\pi}{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Pour appliquer ces formules à la sommation des séries qui entrent dans $\frac{du}{dt}$ et T, je change les produits des lignes trigonométriques soumis aux signes $\Sigma$ en sommes de sinus par les formules ordinaires, et je trouve que $\frac{du}{dt}$ par exemple devient

$$\frac{du}{dt}=-\frac{v}{\pi}\Sigma\frac{1}{2i-1}\Big[\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at+\lambda)+\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x-at+\lambda)$$
$$+\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at-\lambda)+\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x-at-\lambda)\Big];$$

ce qui fait quatre séries que l'on calculera toutes par la formule précédente. Je choisis pour exemple la première série, je substitue $l-\lambda'$ à $\lambda$ et je trouve

$$\Sigma\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at+\lambda)=-\frac{(-1)^i}{2i-1}\Sigma\cos\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at-\lambda'),$$

et si l'on met le second membre de cette équation dans la formule (7), en changeant $\theta$ en $\frac{\pi}{2l}(x+at-\lambda')$, on aura la valeur de la série, mais non pour toutes les valeurs de $x$ et de $t$, mais pour toutes les valeurs de $x+at$, depuis zéro jusqu'à $l+\lambda'$. Si $x+at$ dépasse cette limite, on aura toujours

$$\cos\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at-\lambda')=-\cos\Big[\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at-\lambda')-(2i-1)\pi\Big]$$
$$=-\cos\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+at-\lambda'-2l),$$

et en faisant

$$\theta = \frac{\pi}{2l}(x + at - \lambda' - 2l),$$

la formule (7) donnera la somme $\Sigma$ pour toutes les valeurs de $x + at$ entre les limites $\lambda' + l$ et $\lambda' + 3l$, et ainsi de suite pour toutes les valeurs plus élevées de $x + at$. On trouverait d'une manière tout-à-fait semblable les sommes des trois autres séries.

24. Il sera intéressant d'examiner les formules (5) et (6), dans le cas où $t$ est zéro ou un multiple pair de $\frac{2l}{a}$. D'abord il est évident qu'à toutes ces époques la tension T sera nulle pour tous les points. Quant à la valeur de $\frac{du}{dt}$, cherchons-la d'abord quand $t$ est zéro, ou un multiple pair de $\frac{2l}{a}$; car elle sera la même à toutes ces époques. Je fais $t = 0$ dans les quatre séries qui entrent dans la valeur de $\frac{du}{dt}$; elles se réduisent à deux, et l'on a

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2\nu}{\pi}\Sigma\frac{1}{2i-1}\left[\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+\lambda) + \sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x-\lambda)\right].$$

je calcule ces deux séries par les moyens déjà indiqués, et je trouve

$$\Sigma\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+\lambda) = \Sigma - \frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x-\lambda') = \frac{\pi}{4},$$

$$\Sigma\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x-\lambda) = \Sigma\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+\lambda') = -\frac{\pi}{4}.$$

Mais dans cette seconde série $x$ ne pourra pas surpasser $\lambda$. Dans cette hypothèse, on trouve $\frac{du}{dt} = 0$, pour tous les points de la verge fixe.

Si $x$ surpasse $\lambda$ on trouve par la transformation que j'ai indiquée dans le cas le plus général

$$\Sigma\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x-\lambda) = \frac{\pi}{4}.$$

Cette valeur et celle de l'autre série mises dans $\frac{du}{dt}$ réduisent la vitesse à $-v$, ce à quoi l'on devait s'attendre.

Enfin la valeur de $\frac{du}{dt}$ montre que quand $t$ est un multiple impair de $\frac{2l}{a}$, les vitesses sont égales et de signes contraires à celles qui ont lieu quand $t$ est un multiple pair de cette quantité. Il en résulte que les verges se sépareront au bout d'un temps $t = \frac{2l}{a}$.

En effet, la verge fixe n'aura aucune vitesse; celle de devant a une vitesse $+v$ qui l'éloigne de la verge fixe; la tension est nulle pour tous les points, la séparation est donc devenue nécessaire; le mouvement vibratoire est détruit, et le corps parfaitement élastique a échangé sa vitesse $-v$ en une autre égale et contraire $+v$.

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans de nouveaux détails, on voit que l'on trouverait par la méthode uniforme qui a été exposée précédemment, et au moyen de la formule (7) du n° 21, la valeur de la tension T, quels que soient $x$ et $t$ : le problème peut donc être considéré comme complétement résolu.

**FIN.**

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,
27 juin 1839,
Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,
l'Inspecteur général des études, chargé de l'administration
de l'Académie de Paris,
ROUSSELLE.

# PROGRAMME

D'UNE

# THÈSE D'ASTRONOMIE.

## I.

Lois de Kléper.

Conséquences qui s'en déduisent immédiatement.

Démonstration d'une formule au moyen de laquelle on trouve le rayon vecteur et l'équation du centre en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de l'excentricité.

Autre méthode souvent plus commode pour trouver les mêmes quantités en séries ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples croissants du moyen mouvement.

Détermination de la vitesse de la planète en fonction du rayon vecteur.

Calcul de la force accélératrice qui sollicite chaque planète.

Conséquences de la troisième loi de Képler.

## II.

Mouvement d'une planète attirée par le soleil. Remarque sur la troisième loi de Képler.

Les équations du mouvement doivent donner six intégrales premières.

Méthode par laquelle on trouve sept intégrales premières. On démontre que deux de ces intégrales rentrent dans les cinq autres : elles suffisent néanmoins pour montrer que la trajectoire est une section conique et pour en déterminer les dimensions et la position par rapport à un plan fixe.

## III.

Mouvement elliptique troublé, équations de ce mouvement, en supposant la planète sous l'influence de masses perturbatrices.

Principe de la variation des constantes arbitraires pour passer des intégrales des équations du mouvement non troublé aux équations du mouvement troublé.

Détermination des éléments et de la position de l'ellipse variable.

Application de ces principes au mouvement troublé par la résistance d'un milieu très peu résistant.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,
20 juillet 1839,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,
L'inspecteur général des études, chargé de l'administration

ROUSSELLE.