N° D'ORDRE

977.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. RENÉ BAIRE,

Professeur au Lycée de Bar-le-Duc.

1re THÈSE. — SUR LES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES.

2me THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 mars 1899 devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*
APPELL, } *Examinateurs.*
PICARD, }

MILAN,

IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.

Rue Rovello, 14.

1899

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE	HERMITE.	
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS	Anatomie, Zoologie, Physiologie comparée.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Evolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie physique.
	KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	PELLAT	Physique.
	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

3464-98 MILAN. — IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.

A

MONSIEUR DINI.

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE PISE.

A

MONSIEUR VOLTERRA.

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE TURIN.

PREMIÈRE THÈSE

Sur les fonctions de variables réelles

INTRODUCTION.

Le mot *fonction*, qui a servi primitivement à désigner les différentes puissances d' une même quantité, a pris une signification de plus en plus étendue, jusqu'à ce que Dirichlet ait donné à ce mot le sens qu'on lui attribue aujourd'hui.

Il y a *fonction*, dès qu'on imagine une correspondance entre des nombres, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable y, avec d'autres nombres, tous distincts, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable x. On ne s'occupe pas, dans cette définition, de rechercher par quels moyens la correspondance peut être effectivement établie; on ne cherche même pas s'il est possible de l'établir. La notion de fonction, entendue de cette manière, est entièrement contenue dans la notion de *détermination*; ce point de vue s'oppose à celui qui consiste à partir de certaines fonctions simples, et à considérer des expressions composées avec ces fonctions simples, en réservant le mot de fonction aux expressions ainsi obtenues.

Après avoir défini, d'après Dirichlet, la fonction la plus générale, on est conduit à distinguer les fonctions en différentes catégories, suivant qu'elles possèdent ou ne possèdent pas telle ou telle propriété; c'est ainsi, par exemple, qu'une fonction peut être continue ou discontinue, ponctuellement ou totalement discontinue, intégrable ou non intégrable, posséder ou non une dérivée, etc.... Chacune de ces distinctions conduit à une étude particulière, et toutes ces études présentent le caractère suivant: on recherche si le fait d'imposer à la fonction la plus générale telle ou telle restriction s'exprimant par une définition simple entraîne d'autres conséquences simples.

Par exemple, on a reconnu, contrairement à ce qui avait été longtemps admis, qu'il existe des fonctions continues n'admettant pas de dérivée. Ce résultat doit être entendu de la manière suivante: le fait d'imposer à une fonction la continuité n'entraîne pas comme conséquence l'existence d'une dérivée; il en résulte que les fonctions continues qui admettent une dérivée ne forment qu'une classe particulière dans l'ensemble des fonctions continues; autrement dit, *c'est par exception qu'une fonction continue admet une dérivée.*

Indiquons un autre exemple: on démontre qu'une fonction *continue* est *uniformément continue*; ces deux propriétés, la continuité et la continuité uniforme, sont définies d'une manière différente l'une de l'autre; on pouvait croire *à priori* que l'une n'entraîne pas l'autre, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions continues, mais non uniformément continues; le théorème que je rappelle montre que cela n'est pas.

D'une manière générale, étant donné un ensemble de propriétés bien définies qu'on impose à une fonction, il y a lieu d'étudier aussi complètement que possible les propriétés qui sont des conséquences nécessaires des premières. C'est, à ce qu'il me semble, la manière la plus nette d'interpréter les résultats des différents travaux entrepris sur les fonctions de variables réelles; parmi ces travaux, qui sont nombreux, je me contenterai de citer le mémoire de M. Darboux: « Sur les fonctions discontinues », et l'ouvrage de M. Dini: « Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali ».

Le présent travail est conçu dans cet ordre d'idées; je vais indiquer brièvement la nature des questions que je me suis proposé de résoudre.

Après avoir, dans le premier chapitre, exposé quelques considérations générales qui s'appliquent à toutes les fonctions, et donné des définitions dont j'ai besoin dans la suite du travail, j'aborde, dans le chapitre II, l'étude des deux problèmes suivants:

1. Une fonction de deux variables x et y etant assujettie à être continue par rapport à chacune d'elles, les valeurs qu'elle prend sur une ligne quelconque forment une fonction d'une variable qui peut être discontinue: je me propose d'en déterminer la nature.

2. Quelles sont les fonctions discontinues qu'il est possible de représenter par des séries dont les termes sont des fonctions continues?

Je suis parvenu à résoudre complètement ces deux problèmes, qui se trouvent admettre la même solution, ce qui m'a conduit à les traiter simultanément: il existe une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue puisse être obtenue, soit dans les conditions du premier problème, soit dans les conditions du second; le chapitre II est tout entier consacré à l'établissement de cette condition, que j'ai été conduit à énoncer ainsi: *il* *faut et il suffit que la fonction donnée soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.*

Les questions traitées dans les deux chapitres suivants, qui sont des généralisations en divers sens des questions précédentes, sont loin d'être résolues d'une manière aussi complète. Dans le chapitre III, où il ne s'agit que de fonctions d'une seule variable, je définis, en particulier, les *fonctions développables en séries doubles de fonctions continues*; n'étant pas parvenu, en ce qui concerne ces fonctions, à trouver une condition caractéristique aussi complète que celle du chapitre II, je me suis contenté d'exposer les résultats partiels que j'ai obtenus sur la question. Dans le chapitre IV, je donne quelques propriétés des fonctions de plusieurs variables, continues par rapport à chacune d'elles.

Enfin j'étudie, dans le chapitre V, une question en apparence assez distincte de celles qui précédent. Je fais remarquer tout d'abord que les raisonnements par lesquels on intègre les équations aux dérivées partielles les plus simples, par exemple l'équation: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, introduisent l'hypothèse de la continuité des dérivées qu'on emploie. Il est donc légitime de se proposer le problème suivant: rechercher toutes les fonctions assujetties seulement aux conditions indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation donnée aient un sens et vérifient cette équation. Par exemple, en ce qui concerne l'équation: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, on sait que, si l'on assujettit une fonction à être continue ainsi que ses dérivées, et à satisfaire à l'équation, elle doit être constante sur chaque droite: $x - y =$ Constante; il s'agit de savoir si, lorsqu'on supprime l'hypothèse de la continuité des dérivées, le résultat subsiste ou non.

D'une manière générale, il arrive très souvent qu'une question d'analyse étant posée, on introduit, pour traiter cette question, des hypothèses plus restrictives qu'elle n'en comporte par elle-même; on peut donc dire qu'on laisse inachevée une partie du problème; il s'agirait de traiter, au moins dans quelques cas simples, cette partie de la question qu'on a, pour ainsi dire, abandonnée en chemin; c'est ce que j'ai essayé de faire pour l'exemple traité dans le chapitre V; je suis arrivé, comme on le verra, à résoudre en partie la question.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances du 8 novembre 1897, du 21 mars, des 6 et 13 juin 1898.

CHAPITRE I.

Généralités sur les fonctions de n variables.

1. Considérons une fonction *quelconque* des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$; cela veut dire que, dans un certain domaine D de l'espace à n dimensions, nous supposons qu'à chaque système $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0$, appartenant au domaine D correspond un nombre, que nous désignons par $f((x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0)$.

Soit un point P du domaine D, de coordonnées $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0$; considérons la sphère à n dimensions de centre P et de rayon ρ_1, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels on a:

$$[x_1 - (x_1)_0]^2 + [x_2 - (x_2)_0]^2 + \cdots + [x_n - (x_n)_0]^2 \leqq \rho_1^2.$$

L'ensemble des valeurs de la fonction en tous les points dont les coordonnées satisfont à cette condition a une limite supérieure (ou maximum) M_1. Prenons une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers 0. Soit:

$$\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_p > \cdots$$

On prendra successivement les sphères de centre P et de rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_p, \ldots$; soient $M_1, M_2, \ldots M_p, \ldots$ les limites supérieures de f dans ces sphères; chaque sphère étant comprise dans la précédente, on a évidemment la suite d'inégalités:

$$M_1 \geqq M_2 \geqq \cdots \geqq M_p \geqq \cdots \tag{1}$$

La quantité M_p, qui ne croît jamais, a une limite déterminée quand p croît indéfiniment; je désignerai par $M[(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0]$ ou M_0 cette limite, et je dirai que M_0 est le *maximum de la fonction au point P.*

2. On sera conduit au même nombre M_0, si au lieu d'une suite de sphères, on considère une suite de domaines de forme quelconque $D_1, D_2, \ldots D_q, \ldots$ pourvu qu'ils satisfassent aux conditions suivantes:

1.° Le point P est intérieur à chacun de ces domaines, en entendant par là qu'il existe une sphère de centre P et de rayon positif dont tous les points intérieurs font partie du domaine.

2.° La plus grande dimension de D_q tend vers 0, en entendant par là que, si petit que soit ρ, il existe une valeur de q telle que D_q est contenu tout entier à l'intérieur de la sphère de centre P et de rayon ρ.

Supposons en effet ces deux conditions remplies, et soient M'_1, $M'_2, \ldots M'_q, \ldots$ les limites supérieures de la fonction dans D_1, $D_2, \ldots D_q, \ldots$ En vertu des deux propriétés précédentes, il existe pour tout nombre M'_q deux nombres $M_{p'}$, $M_{p''}$ de la suite (1) tels que l'on a:

$$M_{p'} \geqq M'_q \geqq M_{p''},$$

et de plus, p', et par suite p'', croissent indéfiniment avec q. Donc M'_q a pour limite M_0.

3. Les propriétés fondamentales du nombre M_0, qui résultent immédiatement de sa définition, sont les suivantes:

1.° Si petit que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif ρ tel que, dans la sphère de centre P et de rayon ρ, on a en tout point:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) < M_0 + \varepsilon.$$

2.° Si petits que soient ε et ρ, il existe dans la sphère de rayon ρ au moins un point pour lequel on a:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) > M_0 - \varepsilon.$$

4. Etant donnée une fonction f, j'aurai souvent besoin de considérer simultanément, d'une part la limite supérieure de f dans un certain domaine continu à n dimensions, d'autre part le *maximum en un point*, tel que je viens de le définir. Je préciserai, lorsque cela sera nécessaire, en désignant par $M[f, D]$ le maximum de f dans le domaine D, et par $M[f, P]$ le maximum de f au point P.

Remarquons que, d'après nos définitions, si un point P est *à l'intérieur* d'un domaine D (c'est-à-dire s'il existe une sphère de centre P contenue dans D), on a certainement:

$$M[f, P] \leqq M[f, D].$$

5. J'appelle l'attention sur un cas particulier intéressant. Supposons qu'en un point P on ait:

$$M[f, P] = f.$$

Alors, si petit que soit le nombre positif ε, on peut trouver un nombre ρ tel que, dans la sphère de centre P et de rayon ρ, on ait en tout point:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) < f((x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0) + \varepsilon.$$

La fonction possède donc au point P l'une des deux propriétés dont l'ensemble constitue la continuité; l'autre serait exprimée par la condition:

$$f(x_1 x_2, \dots x_n) > f((x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0) - \varepsilon.$$

Nous conviendrons de dire que la fonction possède au point P la *semi-continuité supérieure.* Si la propriété a lieu pour tous les points d'un domaine, nous dirons que la fonction, dans ce domaine, est *semi-continue supérieurement.* On peut dire aussi qu'elle est toujours *égale à son maximum.*

6. Pour donner tout de suite des exemples de fonctions possédant la propriété précédente, partons d'une fonction *quelconque* $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, et appelons $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ la fonction qui a pour valeur en chaque point le *maximum en ce point* de f.

La première des propriétés indiquées au § 3, peut s'exprimer de la manière suivante:

Etant donné ε, on peut trouver un domaine D entourant le point P_0, et tel que:

$$M[f, D] \leqq M[f, P_0] + \varepsilon.$$

Si maintenant nous prenons dans D un point quelconque P, on a en ce point:

$$M[f, P] \leqq M[f, D],$$

et par suite:

$$M[f, P] \leqq M[f, P_0] + \varepsilon,$$

ce qui s'écrit:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq \varphi((x_1)_0, (x_2)_0, \dots (x_n)_0) + \varepsilon.$$

C'est la propriété qui caractérise les fonctions que j'ai appelées *semi-continues supérieurement.*

On peut faire la démonstration d'une manière un peu différente. J'énonce d'abord quelques remarques sur les domaines à n dimensions.

Etant donné, par exemple, une sphère de centre P_0, je considère, d'une part, l'ensemble S des points pour lesquels:

$$\Sigma [x_1 - (x_1)_0]^2 \leqq \rho^2,$$

d'autre part l'ensemble S' des points pour lesquels:

$$\Sigma [x_1 - (x_1)_0] < \rho^2.$$

Je dirai que S est une sphère fermée, S' une sphère ouverte. La différence essentielle entre ces deux ensembles réside dans le fait suivant:

Etant donné un point *quelconque* de S', il existe une sphère ayant ce point pour centre et de rayon positif, dont tous les points font partie de S'. J'appelle d'une manière générale *domaine ouvert à n dimensions* tout ensemble de points possédant cette propriété. On voit que l'ensemble S ne rentre pas dans cette catégorie de domaines.

Cela posé, je dis que, dans tout domaine ouvert, les deux fonctions f et φ ont même limite supérieure; cela tient à ce que, λ étant un nombre quelconque, si l'une des deux fonctions peut dépasser dans le domaine la valeur $\lambda - \varepsilon$, quel que soit ε, cela est également vrai pour l'autre fonction. (On voit aisément que le raisonnement ne s'applique plus si le domaine n'est pas ouvert.)

Ce point étant établi, pour définir le maximum en un point de f et de φ, nous pouvons employer une suite de domaines ouverts D_1, $D_2, \ldots$ $D_q, \ldots$; les limites supérieures de f et φ dans chacun de ces domaines sont égales; par suite, les maxima de f et φ au point P sont définis comme limites de suites identiques; il sont donc égaux. Ainsi, on a, en tout point P:

$$M[\varphi, P] = M[f, P],$$

et comme, par définition, on a:

$$\varphi(P) = M[f, P),$$

on voit que:

$$M[\varphi, P] = \varphi(P),$$

c'est-à-dire que la fonction φ est égale à son maximum, autrement dit, elle est semi-continue supérieurement.

7. De même que nous avons défini $M[f]$, nous définirons, en chaque point P, le minimum m de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$; m sera la limite vers laquelle tend le minimum de f dans un domaine entourant P, lorsque la plus grande dimension de ce domaine tend vers 0.

Si en un point P on a:

$$m[f, P] = f(P),$$

on dira qu'en ce point la fonction possède la *semi-continuité inférieure.*

En partant d'une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, et en appelant $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ la fonction qui a pour valeur en chaque point le minimum de f, on reconnaît que ψ est semi-continue inférieurement.

8. Remarquons tout de suite que si une fonction ψ est semi-continue inférieurement, la fonction $-\psi$ est semi-continue supérieurement; à toute propriété de l'une correspond évidemment une propriété de l'autre; il nous suffira donc d'étudier les fonctions de l'une de ces catégories.

Donnons, à titre d'exemple, quelques propriétés simples de ces fonctions.

La somme de plusieurs fonctions semi-continues supérieurement, est une fonction semi-continue supérieurement.

Si, dans un certain domaine, une fonction semi-continue supérieurement a pour limite supérieure λ, elle atteint, en un certain point du domaine, la valeur λ. Il suffit, pour s'en rendre compte, de reprendre le raisonnement qu'on emploie lorsqu'on suppose la fonction continue: on divise le domaine donné en un nombre fini de domaines partiels; dans l'un au moins de ces domaines la limite supérieure est λ; on démontre ainsi l'existence d'un point où le maximum de la fonction est λ, et où par suite la fonction est elle-même égale à λ.

Indiquons enfin une propriété qui est, en un certain sens, la propriété caractéristique des fonctions semi-continues supérieurement.

Soit P_0 un point limite de points $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$; supposons que la suite $f(P_1), f(P_2), \ldots f(P_n), \ldots$ ait une limite α, ou, plus généralement, soit α un nombre tel que, si petit que soit ε supposé positif, les quantités de la suite précédente surpassent, à partir d'un certain rang, $\alpha - \varepsilon$; on peut affirmer que l'on a:

$$f(P_0) \geqq \alpha,$$

car si l'on avait $f(P_0) < \alpha$, la fonction ne possèderait pas au point P_0 la semi-continuité supérieure.

Sous une autre forme, nous pourrons dire que *si une fonction f est semi-continue supérieurement, l'ensemble des points où l'on a $f \geqq \alpha$ est toujours un ensemble fermé, c'est-à-dire un ensemble contenant son dérivé.*

De même, *si une fonction est semi-continue inférieurement, l'ensemble des points où $f \leqq \alpha$ est essentiellement fermé.*

9. Soit f une fonction *quelconque*, φ son maximum, ψ son minimum, et soit g une fonction *continue*. Je dis que la fonction $f+g$ a pour maximum $\varphi + g$ et pour minimum $\psi + g$.

Démontrons par exemple que $f+g$ a, au point P_0, son maximum égal à $\varphi_0 + g_0$. En effet, si on se donne un nombre positif ε, on peut déterminer autour de P_0 un domaine en tout point duquel on aura à la fois:

$$f < \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{2},$$

et:

$$g < g_0 + \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite :

$$f+g<\varphi_0+g_0+\varepsilon.$$

Il est donc certain qu'on a :

$$M\,[f+g,\ P_0] \leqq \varphi_0+g_0.$$

En second lieu, on peut trouver un domaine autour de P_0 où l'on aura partout :

$$g>g_0-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans ce domaine, il y a *au moins un point* où l'on a :

$$f>\varphi_0-\frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite :

$$f+g>\varphi_0+g_0-\varepsilon.$$

ce qui montre que l'on a :

$$M\,[f+g,\ P_0]=\varphi_0+g_0.$$

10. Continuons à employer les notations f, φ, ψ pour désigner respectivement une fonction quelconque, son maximum et son minimum. On a, en tout point :

$$\varphi \geqq f \geqq \psi.$$

Chacune des deux fonctions $\varphi-f$, $f-\psi$ est positive ou nulle.

Je dis que, dans tout domaine à n dimensions, $\varphi-f$ a pour limite inférieure 0. Je peux toujours, dans le domaine donné, prendre un domaine ouvert; il me suffit donc de démontrer la chose pour un domaine ouvert. Supposons donc que la limite inférieure de $\varphi-f$ dans le domaine ouvert D puisse être un nombre positif λ. On aurait, en chaque point de ce domaine:

$$\varphi-f \geqq \lambda,$$

ou :

$$\varphi \geqq f+\lambda.$$

On pourrait en conclure :

$$M\,[\varphi,\ D] \geqq M\,[f+\lambda,\ D],$$

et d'après le § 9, on a :

$$M\,[f+\lambda,\ D]=M\,[f,\ D]+\lambda.$$

Donc on aurait :

$$M[\varphi, D] \geqq M[f, D] + \lambda,$$

ce qui n'est pas possible, puisque nous savons qu'on a :

$$M[\varphi, D] = M[f, D].$$

On reconnaît de même que $f - \psi$ a pour minimum 0 dans tout domaine à n dimensions.

On peut aussi conclure de là que chacune des deux fonctions $\varphi - f$, $f - \psi$, a pour minimum 0 en tout point.

11. En chaque point P je pose :

$$\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

et je conviens d'appeler ω *l'oscillation au point* P; c'est aussi, comme on le voit, la limite de l'oscillation de la fonction dans un domaine contenant P à son intérieur et dont la plus grande dimension tend vers 0.

Comme pour M et m, nous emploierons les notations $\omega[f, D]$ et $\omega[f, P]$ pour désigner l'oscillation de f dans le domaine D et l'oscillation au point P.

De par sa nature même, la fonction ω est positive ou nulle. En un point où elle est nulle, la fonction f est continue; au contraire, en un point où elle est positive, il y a une discontinuité pour f. On peut dire, en quelque sorte, que la fonction $\omega[f]$ relative à la fonction f *caractérise le degré de discontinuité* de f aux différents points.

Je dis que $\omega[f]$ est semi-continue supérieurement. En effet, si on se donne un nombre positif ε, on peut trouver autour de tout point P_0 un domaine où l'on aura partout :

$$\varphi < \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

et :

$$\psi > \psi_0 - \frac{\varepsilon}{2},$$

inégalités d'où l'on conclut, par soustraction :

$$\omega < \omega_0 + \varepsilon.$$

On pourrait d'ailleurs démontrer la chose directement, en employant un raisonnement analogue à celui du § 6.

Enonçons la remarque suivante, qui résulte immédiatement de ce qui précède : *Etant donnée une fonction quelconque, l'ensemble des points où l'oscillation de cette fonction est* $\geqq \sigma$ *est fermé.*

12. Je vais considérer une catégorie particulière de fonctions, celles pour lesquelles l'oscillation ω a son minimum nul dans tout domaine à n dimensions, et par suite en tout point. La considération de ces fonctions s'introduit d'une manière naturelle; on peut dire en effet que, pour une fonction de cette nature, il y a, dans tout domaine, des points où elle *se rapproche autant qu'on veut d'une fonction continue.* Mais nous allons préciser cette idée un peu vague, en montrant qu'il existe effectivement dans tout domaine des points où la fonction est continue.

Je vais d'abord établir un théorème qui me sera souvent utile dans la suite.

Si une fonction χ est semi-continue supérieurement, et si elle a en tout point son minimum nul, il existe, dans tout domaine, des points où χ est nul.

En effet, prenons un domaine D quelconque. Puisque, dans ce domaine, χ a son minimum nul, si on se donne un nombre positif ε, on peut trouver un point P à l'intérieur de D où l'on a :

$$\chi(P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, à cause de la semi-continuité supérieure, on peut trouver un domaine D_1 entourant P où l'on aura partout :

$$\chi < \chi(P) + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\chi < \varepsilon.$$

Nous voyons ainsi que, dans tout domaine D, et quel que soit ε, on peut trouver un domaine D_1 où l'on a partout :

$$\chi < \varepsilon.$$

Prenons maintenant une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \cdots \frac{\varepsilon}{2^n}, \cdots$

Dans D_1 nous trouverons un domaine D_2 où l'on aura partout :

$$\chi < \frac{\varepsilon}{2},$$

dans D_2 un domaine D_3 où l'on aura :

$$\chi < \frac{\varepsilon}{2^2},$$

etc.

Les domaines $D_1, D_2, \ldots D_n, \ldots$ étant tels que chacun d'eux est contenu dans le précédent, il existe au moins un point limite contenu à l'intérieur de tous les D_n. On doit avoir, en ce point, $\omega < \frac{\varepsilon}{2^n}$, quel que soit n, c'est-à-dire $\omega = 0$, ce qui démontre le théorème.

Il n'est pas inutile de remarquer que les deux conditions données dans l'énoncé du théorème sont indispensables. En effet, il est bien évident d'une part qu'une fonction peut avoir en tout point son minimum nul, sans jamais atteindre la valeur 0; citons, par exemple, la fonction $f(x)$ qui est égale à 1 pour x irrationnel, et à $\frac{1}{q}$ pour les valeurs de la forme $x = \frac{p}{q}$. D'autre part, une fonction assujettie à être semi-continue supérieurement, peut ne jamais atteindre la valeur 0, et cependant avoir son minimum nul en un point, ou même en tous les points d'un certain domaine à $n-1$ dimensions, s'il s'agit d'une fonction de n variables; pour former un tel exemple, prenons dans le plan un arc de courbe AB, et formons une fonction continue ayant la valeur 0 aux points de cet arc, une valeur positive aux autres points du plan; remplaçons ensuite les valeurs aux points de l'arc AB par une succession continue de valeurs positives; la nouvelle fonction est semi-continue supérieurement en tout point; elle a, en chaque point de AB, son minimum nul, et cependant n'atteint jamais la valeur 0.

Je vais maintenant tirer une conséquence du théorème que je viens de démontrer, ou, pour mieux dire, énoncer ce théorème sous une autre forme. Nous reconnaissons que si χ est semi-continue supérieurement, et si l'on a partout:

$$\chi > 0,$$

les points où le minimum de χ est nul ne peuvent pas former un domaine continu à n dimensions, car alors il existerait, d'après la démonstration que nous venons d'exposer, des points où l'on aurait $\chi = 0$. L'ensemble de ces points est d'ailleurs fermé; il ne peut donc pas être dense (*) par rapport à un domaine à n dimensions; je déduis de cette remarque l'énoncé suivant, qui est une transformation de celui de tout à l'heure:

Si une fonction χ est semi-continue supérieurement et est toujours positive, il existe dans tout domaine à n dimensions un domaine de même nature dans lequel χ a son minimum positif.

(*) On dit qu'un ensemble est *dense* par rapport à un domaine si son ensemble dérivé contient tous les points de ce domaine. Voir, par exemple: Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, page 38.

Revenons aux fonctions pour lesquelles ω a son minimum nul en tout point; d'après ce que nous venons de voir, il existe dans tout domaine à n dimensions (autrement dit, au voisinage de tout point) des points en chacun desquels on a $\omega = 0$, et où par suite la fonction est continue.

Une telle fonction est dite *ponctuellement discontinue*; toute fonction qui n'est pas ponctuellement discontinue est dite *totalement discontinue*. On voit que, si une fonction est totalement discontinue, il existe nécessairement un domaine à n dimensions dans lequel *l'oscillation en chaque point* de cette fonction a son minimum positif.

Les fonctions ponctuellement discontinues sont caractérisées par ce fait que, en tout point, et dans tout domaine, le minimum de ω est nul. On peut encore dire que l'ensemble des points où $\omega \geqq \sigma$, σ étant un nombre positif, n'est dense dans aucun domaine à n dimensions.

Montrons qu'une fonction semi-continue, supérieurement par exemple, rentre dans cette catégorie de fonctions. Soit en effet f la fonction considérée; en reprenant les notations déjà employées aux § 9 et 10, on a, dans le cas actuel:

$$\varphi = f,$$

et par suite:

$$\omega = \varphi - \psi = f - \psi,$$

or, nous avons montré que, dans tous les cas, $f - \psi$ a son minimum nul partout. Donc ω a son minimum nul en tout point, et f est ponctuellement discontinue.

13. Pour terminer ce chapitre, je vais donner un théorème sur les fonctions quelconques, qui comprendra comme cas particulier le théorème connu relatif aux fonctions continues: *La continuité est uniforme.*

Soit $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une fonction quelconque. Considérons un point P, et une sphère à n dimensions de centre P et de rayon ρ; dans cette sphère (considérons la sphère fermée, par exemple), la fonction a une oscillation déterminée ω; si je fais varier ρ, je pourrai considérer ω comme une fonction de ρ définie pour les valeurs positives de ρ. Pour $\rho = 0$, j'attribuerai à la fonction ω la valeur limite des valeurs qu'elle prend lorsqu'on fait tendre ρ vers 0, c'est-à-dire ce que j'ai appelé *l'oscillation au point P*.

Cela posé, donnons-nous un nombre positif λ; le seul fait que ω est une fonction de ρ non décroissante suffit pour qu'on soit assuré de l'existence d'un nombre r parfaitement déterminé, tel que:

$$\text{pour} \quad 0 \leqq \rho < r \quad \text{on a:} \quad \omega(\rho) \leqq \lambda$$
$$\text{pour} \quad \rho > r \quad \text{on a:} \quad \omega(\rho) > \lambda.$$

Pour $\rho = r$, on peut avoir, soit $\omega(r) < \lambda$, soit $\omega(r) = \lambda$, soit $\omega(r) > \lambda$. Nous pouvons définir r comme *la limite supérieure des nombres* ρ *pour lesquels on a*: $\omega(\rho) \leqq \lambda$.

On peut être conduit, par la définition précédente, à attribuer à r la valeur $+\infty$; cela ne créera, d'ailleurs, aucune difficulté dans les applications.

On reconnaît tout de suite que si l'on avait pris des sphères ouvertes au lieu de sphères fermées, on aurait trouvé le même nombre limite r; il suffit de remarquer que toute sphère ouverte de rayon $< r$ est contenue dans une sphère fermée de rayon $< r$, tandis que toute sphère ouverte de rayon $> r$ contient une sphère fermée de rayon $> r$.

Au lieu de considérer des sphères de centre P et de rayon variable, on pourrait considérer des domaines de forme quelconque, mais assujettis aux conditions suivantes: l'ensemble des points qui constituent le domaine variable est déterminé par la valeur d'un paramètre unique ρ, qui prend les valeurs positives et nulle; si l'on a $\rho' < \rho''$, le domaine D' qui correspond à ρ' est contenu tout entier dans le domaine D'' qui correspond à ρ''; enfin, si ρ tend vers 0, la plus grande dimension du domaine tend vers 0. Dans ces conditions, le raisonnement précédent est applicable, il existe un nombre r tel que, pour $\rho < r$, l'oscillation dans le domaine correspondant à ρ est $\leqq \lambda$, tandis que pour $\rho > r$, cette oscillation est $> \lambda$.

Reprenons le cas où les domaines considérés sont des sphères, et soit λ un nombre positif déterminé, que nous laissons fixe, tandis que nous faisons varier le point P; r devient alors une fonction du point P; je vais démontrer que *cette fonction est continue*; il suffira, pour s'en rendre compte, de reprendre un raisonnement employé par M. Lüroth dans le cas où f est une fonction continue (*Math. Annalen*, Bd. VI).

Il s'agit de démontrer que, au voisinage de P_0, $r(P)$ est aussi voisin qu'on veut de $r(P_0) = r_0$. Pour cela, considérons la sphère Σ_0 de centre P_0 et de rayon r_0; en supposant d'abord r_0 positif, prenons un point P à l'intérieur de Σ_0, et soit $P_0 P = \delta$. Décrivons de P comme centre les sphères S_1 et S_2 de rayons respectifs $r_0 - \delta$ et $r_0 + \delta$; tous les points de S_1 appartiennent à Σ_0, et tous les points de Σ_0 appartiennent à S_2.

Considérons maintenant toutes les sphères S décrites de P comme centre, avec le rayon variable ρ. Si $\rho < r_0 - \delta$, la sphère S est comprise *à l'intérieur* de S_1, et par suite *à l'intérieur* d'une certaine sphère Σ_1 de centre P_0 et de rayon *inférieur* à r_0; donc l'oscillation dans S est $\leqq \lambda$. On déduit de là :

$$r(P) \geqq r_0 - \delta.$$

Si l'on a $\rho > r_0 + \delta$, la sphère S contient *à son intérieur* S_2; par suite elle contient aussi *à son intérieur* une sphère Σ_2 de rayon *supérieur* à r_0; l'oscillation dans S est donc $> \lambda$. On a par suite :

$$r(P) \leqq r_0 + \delta.$$

En réunissant ces deux résultats, on voit que si on se donne un nombre positif ε quelconque, il suffit de prendre P à l'intérieur de la sphère de centre P_0 et de rayon ε pour que l'on ait :

$$|r(P) - r(P_0)| < \varepsilon.$$

Dans le cas où l'on aurait $r(P_0) = 0$, il suffirait d'appliquer la seconde partie du raisonnement pour voir que la conclusion reste la même.

En résumé, $r(P)$ est une fonction continue du point P. Donnons une application de cette propriété.

Etant donnée la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, nous avons défini la fonction $\omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$ qui représente en chaque point l'oscillation de f. Soit D un certain domaine; appelons λ le maximum de ω dans ce domaine, et prenons un nombre λ' supérieur à λ.

Puisque, en chaque point, on a $\omega < \lambda'$, la fonction r relative à λ' a en chaque point une valeur positive (jamais nulle). Ainsi r est une fonction continue dans le domaine, toujours positive; son minimum dans le domaine est donc un certain nombre positif α. Nous déduisons de là le résultat suivant:

Si λ' est un nombre supérieur au maximum de ω dans le domaine, il existe un nombre positif α tel que, dans toute sphère de rayon égal ou inférieur à α, l'oscillation est inférieure ou égale à λ'.

Sous une autre forme, on peut dire qu'*il existe un nombre positif β tel que, si deux points P et Q sont à une distance $\leqq \beta$ l'un de l'autre, on a:*

$$|f(P) - f(Q)| \leqq \lambda'.$$

Ce théorème doit être considéré comme la généralisation du théorème: La continuité est uniforme. En effet, appliquons notre résultat à une fonction continue; il suffira de faire $\lambda = 0$, $\lambda' = \varepsilon$; on voit qu'on retrouve l'énoncé connu.

14. J'ajoute, pour terminer ce premier chapitre, que beaucoup des résultats qui précédent peuvent s'étendre au cas où l'on étend encore la notion de fonction, en considérant des fonctions multiformes.

Supposons qu'au lieu de considérer un seul nombre $f((x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0)$ attaché au point $[(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0]$, on en considère plusieurs, ou même une infinité pouvant former un ensemble d'une nature absolument quelconque. Le seul point essentiel que nous avons besoin d'admettre est que la question suivante ait un sens précis: Un nombre donné y_0 est-il, oui ou non, une valeur de la fonction f au point $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots (x_n)_0$?

Pour une fonction de cette nature, on peut définir, comme pour une fonction uniforme, les limites supérieure et inférieure dans un domaine, puis en partant de là le maximum, le minimum, l'oscillation en un point. Les fonctions φ, ψ, ω, qui représentent respectivement ces trois quantités en chaque point, possédent les propriétés que nous avons étudiées dans ce chapitre, en supposant qu'on etait parti d'une fonction uniforme. Enfin, les résultats du § 13 sont applicables aux nouvelles fonctions que nous considérons maintenant. J'aurai occasion, dans la suite, de faire usage de cette remarque.

CHAPITRE II.

Fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues.

I. Enoncé des problèmes.

15. Quand on considère, au point de vue de la continuité, une fonction de plusieurs variables, il y a lieu de distinguer la continuité par rapport à l'ensemble de ces variables et la continuité par rapport à ces variables considérées séparément. On sait, en effet, qu'une fonction des deux variables réelles x et y peut être, en tout point, continue par rapport à chacune d'elles, sans être toujours continue par rapport à leur ensemble; cette remarque est énoncée depuis longtemps par M. Dini dans ses cours à l'Université de Pise.

Citons, comme exemple, la fonction qui est égale à 0 pour l'origine, et à $\frac{xy}{x^2+y^2}$ pour les autres points du plan; on voit qu'en tout point distinct de l'origine, la fonction est continue, au sens ordinaire; à l'origine, elle est encore continue par rapport à x et par rapport à y, puisqu'elle est nulle sur chacun de ces deux axes; mais elle éprouve une discontinuité si on déplace le point de coordonnées (x, y) suivant une direction oblique; suivant la direction $x = y$, par exemple, elle saute brusquement de la valeur 0 à la valeur $\frac{1}{2}$.

En partant de cet exemple ou d'autres exemples analogues, on peut former une fonction qui sera toujours continue par rapport à chacune des deux variables, et telle cependant qu'il n'existe aucune aire où elle soit toujours continue par rapport à leur ensemble. Pour cela, rangeons tous les points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles en une suite simplement infinie (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \dots (\alpha_n, \beta_n), \dots$ ce qui peut se faire, puisque ces points forment un ensemble dénombrable. Soit u_{α_n, β_n} une fonction telle que la précédente, discontinue par rapport à l'ensemble (x, y) au seul point (α_n, β_n), où elle est continue par rapport à x et par rapport à y, et de plus, inférieure en valeur absolue à un nombre fixe. Si $\Sigma\, a_n$ est une série absolument convergente, $\Sigma\, a_n u_{\alpha_n, \beta_n}$ sera une fonction possédant les propriétés indiquées : elle sera partout continue par rapport à chacune des variables, et dans toute aire il existera des points de discontinuité par rapport à l'ensemble (x, y).

16. On est ainsi conduit à se poser les questions suivantes. En premier lieu, si l'on assujettit une fonction de deux variables à être continue par rapport à chacune d'elles, cette condition entraîne-t-elle des conséquences simples relativement à la manière d'être de la fonction ? En particulier, et c'est l'une des questions qui feront l'objet de ce chapitre, la succession de valeurs prises par la fonction sur une courbe du plan, par exemple sur la droite $x = y$, constitue une fonction d'une variable qui, nous venons de le voir, n'est pas nécessairement continue ; cette fonction est-elle assujettie à des conditions, et quelles sont ces conditions ?

En se plaçant au point de vue en quelque sorte réciproque du précédent, on se donnera *a priori* une succession de valeurs sur $x = y$, et l'on cherchera s'il est possible ou non de former une fonction de x et y, toujours continue par rapport à chacune de ces deux variables, et prenant sur la droite $x = y$ les valeurs données. Ce sera le problème I.

17. Indiquons maintenant une autre question d'analyse dont le rapport avec la précédente est très étroit.

Supposons qu'on ait une fonction continue par rapport à (x, y) *à l'intérieur* d'une aire A limitée par un contour C, et supposons qu'en chaque point de C il y ait *continuité suivant la normale* ; j'entends par là que, lorsque le point M se rapproche indéfiniment du point M_0 de C en suivant la normale

3

à C en M_0, la fonction $f(M)$ tend vers une limite déterminée, qui est égale à $f(M_0)$. La succession des valeurs $f(M_0)$ prises par la fonction sur la courbe C peut être discontinue, comme on en trouve des exemples dans des questions classiques d'Analyse; nous nous proposons d'examiner si cette succession de valeurs est assujettie à certaines lois.

Je fais remarquer tout de suite que nous n'enleverons évidemment rien à la généralité de la question en supposant que le contour C est constitué par une portion de l'axe $0x$. Nous supposerons donc que, dans le rectangle:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$0 \leqq y \leqq \gamma,$$

on a une fonction continue par rapport à l'ensemble (x, y) en tout point sauf aux points de $0x$, où elle est seulement continue par rapport à y. Il s'agira de savoir ce qu'est la fonction sur $0x$. Ce sera le problème II.

18. Nous verrons dans la suite qu'il y a lieu de traiter simultanément les deux problèmes I et II. Montrons d'abord qu'on peut les considérer tous deux comme cas particuliers d'un troisième problème, dans lequel les conditions imposées à la fonction sont un peu plus générales.

Supposons une fonction $f(x, y)$ définie dans le rectangle:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq y \leqq \delta,$$

en tout point, il y a continuité par rapport à y; en ce qui concerne l'autre variable x, nous supposons seulement que, entre deux droites parallèles à $0x$, $y = y_1$, $y = y_2$, il existe toujours une droite $y = y_3$ sur laquelle il y a continuité par rapport à x; en d'autres termes, il y a un ensemble de parallèles à $0x$ sur chacune desquelles la fonction est continue par rapport à x, et cet ensemble est dense par rapport à l'ensemble de toutes les parallèles à $0x$. On se propose de voir ce qu'est la fonction sur une courbe du plan. Ce sera le problème III.

Il est bien évident que les conditions des problèmes I et II rentrent dans les conditions du problème III.

19. Passons maintenant à un autre ordre de questions, relatives à la théorie des séries.

Reprenons le cas du problème II, indiqué au § 17, où l'on suppose que la fonction $f(x, y)$ n'a de discontinuités qu'aux points de $0x$; il y a, en chacun de ces points, continuité par rapport à la variable y.

Prenons une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0; soit $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$, et traçons dans le plan les parallèles à $0x$ ayant pour ordonnées ces nombres $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ Chacune des fonctions de x: $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \ldots f(x, y_n), \ldots$ est une fonction continue de x, tandis qu'au contraire la fonction $f(x, 0)$ peut être discontinue. D'autre part, si on donne à x une valeur fixe, la suite $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \ldots f(x, y_n), \ldots$ a pour limite $f(x, 0)$.

D'une manière générale, nous dirons qu'*une fonction $f(x)$ est la limite de la suite de fonctions $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$ dans un certain champ de variation de x, si, pour chaque valeur x_0 appartenant à ce champ, la suite de quantités $f_1(x_0)$, $f_2(x_0), \ldots f_n(x_0), \ldots$ a pour limite $f(x_0)$.*

On voit, d'après cette définition, que dans la question précédente, la fonction discontinue $f(x, 0)$ est la *limite de la suite de fonctions continues* $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \ldots f(x, y_n) \ldots$ ou, ce qui revient au même, *la somme de la série de fonctions continues :*

$$f(x, y_1) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)],$$

série qui est convergente pour toute valeur de x, au moins dans un certain intervalle de variation.

Ces remarques nous conduisent tout naturellement à étudier le problème suivant. Etant donnée une série, dont les termes sont des fonctions continues de x, et que nous supposons convergente pour chaque valeur de x (dans un certain intervalle de variation), la somme de cette série est une fonction déterminée de x; on sait que, lorsque la convergence est uniforme (ou même uniforme simplement, au sens donné à cette expression par M. Dini (*)), cette fonction est continue; mais si on suppose seulement la convergence, la fonction peut être discontinue, comme la théorie des séries trigonométriques en fournit des exemples; il y a donc lieu de rechercher quelle est la nature de cette fonction; en d'autres termes, existe-t-il un critérium précis, caractérisant *les fonctions qui peuvent être représentées par des séries de fonctions continues?*

20. Je veux montrer ici comment ce problème se ramène complètement au problème II (§ 17). Soit la série :

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

Posons :

$$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$$

$$S(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

$S(x)$ est la limite de $S_n(x)$.

(*) U. Dini, *Fondamenti*, etc., page 103.

Prenons, comme plus haut, une suite décroissante tendant vers 0: y_1, $y_2, \ldots y_n, \ldots$ et traçons dans le plan les droites: $y = y_1$, $y = y_2, \ldots y = y_n, \ldots$ En supposant que la série soit convergente quand x varie de α à β, considérons le rectangle $A B A_1 B_1$ limité par les droites $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = 0$, $y = y_1$ (fig. 1); appelons $A_2 B_2$, etc..., $A_n B_n, \ldots$ les droites $y = y_2, \ldots$ $y = y_n, \ldots$ Je définirai dans cette région une fonction $f(x, y)$ de la manière suivante.

Sur chacune des droites $y = y_n$, je pose:

$$f(x, y_n) = S_n(x),$$

et sur l'axe $0x$:

$$f(x, 0) = S(x).$$

Cela fait, chacun des points où la fonction n'est pas encore définie se trouve

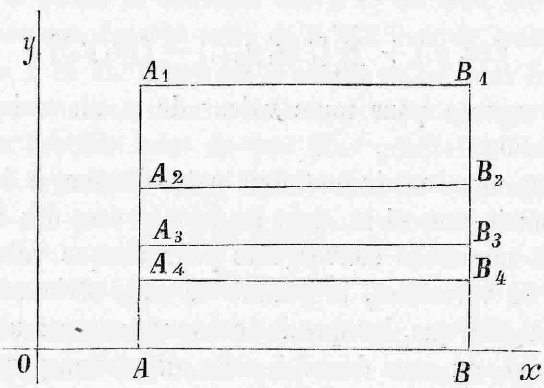

Fig. 1.

situé entre deux droites $y = y_p$ et $y = y_{p+1}$. Soit (x, y) un tel point. En supposant:

$$y_p > y > y_{p+1},$$

je poserai:

$$f(x, y) = \frac{y_p - y}{y_p - y_{p+1}} f(x, y_{p+1}) + \frac{y - y_{p+1}}{y_p - y_{p+1}} f(x, y_p), \qquad (1)$$

c'est-à-dire que, sur le segment parallèle à $0y$ qui joint les deux points (x, y_p) et (x, y_{p+1}) je fais varier la fonction linéairement.

D'après cette définition, la fonction sera continue par rapport à l'ensemble (x, y) dans chacun des rectangles partiels tels que $A_1 B_1 A_2 B_2$,

$A_2 B_2 A_3 B_3$, etc.... En effet, les différents termes qui figurent dans le second membre de la formule (1) sont des fonctions continues de l'ensemble (x, y).

J'énonce à ce sujet une remarque. J'aurai souvent occasion, dans la suite, de définir une fonction continue dans une aire A limitée par un contour C, en supposant que, sur C ou sur certaines portions de C, la fonction doive prendre des valeurs formant une succession continue donnée; il est bien évident que la chose peut toujours se faire; j'ajoute qu'on peut s'assujettir à ce que les limites supérieure et inférieure de la fonction dans A soient les mêmes que les limites supérieure et inférieure de la fonction donnée sur C. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour chacun des rectangles partiels $A_1 B_1 A_2 B_2$, etc.... d'après la manière dont nous avons défini $f(x, y)$.

Je dis que $f(x, y)$, qui se trouve définie maintenant dans tout le rectangle $A B A_1 B_1$, satisfait aux conditions du problème II. D'abord, en tout point pour lequel $y > 0$, il y a continuité par rapport à l'ensemble (x, y), d'après ce que nous venons de voir. Si maintenant nous considérons un point de l'axe $0x$, je dis qu'il y a en ce point continuité par rapport à y. D'une part en effet, la suite $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)\ldots$ $f(x, y_n)\ldots$ tend vers $f(x, 0)$; d'autre part la quantité $f(x, y)$, lorsque y est compris entre y_n et y_{n+1}, est comprise entre $f(x, y_n)$ et $f(x, y_{n+1})$; il en résulte que, quelle que soit la manière dont y tende vers 0, $f(x, y)$ a pour limite $f(x, 0)$.

21. Nous voyons en résumé qu'il y a identité complète entre les fonctions discontinues qu'on peut obtenir comme fonctions limites, dans les conditions du problème II, et celles qu'on peut représenter par des séries de fonctions continues.

Nous reconnaîtrons que ces fonctions sont aussi celles qu'on peut obtenir sur la droite $x = y$, quand on suppose une fonction continue par rapport à chacune des variables, comme dans le problème I.

Je m'occuperai d'abord de trouver des propriétés générales que possèdent les fonctions assujetties aux conditions du problème III et *a fortiori* les fonctions assujetties aux conditions des problèmes I et II; nous obtiendrons ainsi des conditions nécessaires; nous démontrerons ensuite que ces conditions sont suffisantes; nous aurons alors complétement caractérisé ces fonctions.

II. Conditions nécessaires.

22. Je suppose donc une fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions du problème III, c'est-à-dire qu'elle est partout continue par rapport à y, et que, entre deux droites parallèles à $0x$, il en existe toujours une troisième sur laquelle la fonction est continue par rapport à x. Nous pourrons énoncer cette seconde condition de la manière suivante: si on représente chaque parallèle à $0x$ par son point d'intersection avec $0y$, il existe sur $0y$ un ensemble de points, *dense dans toute portion de* $0y$, tel que, y' étant l'ordonnée d'un de ces points, la fonction, en tout point de coordonnées (x, y'), est continue par rapport à x. J'appellerai E l'ensemble des points qui appartiennent aux droites $y = y'$; ainsi, en tout point de E, il y a continuité par rapport à x.

Je vais définir, en chaque point, une fonction qui jouera un rôle important dans l'étude que je me propose de faire.

Pour cela, prenons un point A, de coordonnées (x_0, y_0), et considérons, sur la droite $x = x_0$, un segment BC dont le milieu soit A, et de longueur variable 2ρ; soit donc $BA = AC = \rho$.

Appelons $\omega(\rho)$ l'oscillation de la fonction dans le segment BC; c'est une fonction non décroissante de ρ; de plus, puisque la fonction, considérée sur la droite $x = x_0$, est continue, on a:

$$\omega(0) = 0$$

on peut remarquer en outre que $\omega(\rho)$ est fonction continue de ρ.

Soit maintenant σ un nombre positif; j'appelle α_σ *la limite supérieure des valeurs de* ρ *telles que* $\omega(\rho) \leqq \sigma$. Le nombre α_σ est ainsi complétement caractérisé par ce fait que:

$$\text{pour} \quad \rho \leqq \alpha_\sigma \quad \text{on a} \quad \omega(\rho) \leqq \sigma$$
$$\text{pour} \quad \rho > \alpha_\sigma \quad \text{on a} \quad \omega(\rho) > \sigma.$$

Si dans la première de ces inégalités je peux écrire $\rho \leqq \alpha_\sigma$ et non pas seulement $\rho < \alpha_\sigma$ (*), c'est à cause de la continuité de $\omega(\rho)$ par rapport à ρ, qui provient elle-même de la continuité de la fonction sur $x = x_0$.

En supposant la définition précedente faite pour chaque point du plan, nous aurons ainsi défini une fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ parfaitement déterminée, et qui,

(*) Cf. § 13.

d'après l'hypothèse de la continuité par rapport à y, a en chaque point une valeur *positive.* Je vais démontrer, en faisant usage de l'autre condition imposée à $f(x, y)$, que $\alpha_\sigma(x, y)$ est *semi-continue supérieurement par rapport à l'ensemble* (x, y).

23. Il faut montrer pour cela que, si je considère un point quelconque $A_0[x_0, y_0]$, et si je prends un nombre positif quelconque ε, je peux déterminer autour de A_0 une aire assez petite pour que, $A[x, y]$ étant un point quelconque de cette aire, on ait:

$$\alpha_\sigma(x, y) < \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$$

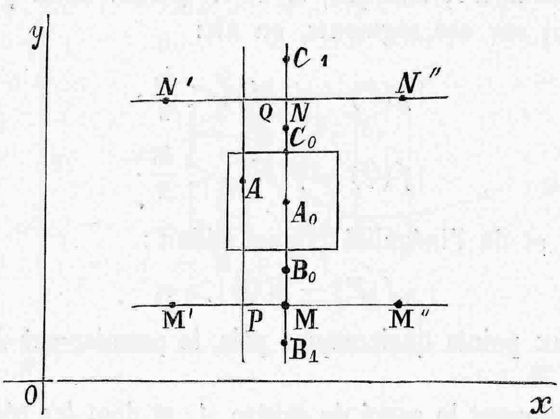

Fig. 2.

Prenons (fig. 2):

$$B_0 A_0 = A_0 C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0),$$

prenons ensuite:

$$B_1 A_0 = A_0 C_1 = \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après la signification de $\alpha_\sigma(x_0, y_0)$, l'oscillation de la fonction, dans le segment $B_1 C_1$, est un nombre supérieur à σ; je peux le représenter par $\sigma + k$. Si je prends un nombre positif k_1 inférieur à k, je peux certainement trouver, entre B_1 et C_1, deux points M et N tels que l'on ait:

$$|f(M) - f(N)| > \sigma + k_1 \tag{1}$$

De plus, je peux supposer que ces points M et N sont situés sur deux parallèles à $0x$ sur lesquelles il y a continuité par rapport à x, autrement dit font partie de l'ensemble E. Nous savons en effet que E est dense dans toute portion de $B_1 C_1$; si donc le point M de l'inégalité (1) ne fait pas partie de E, je peux le remplacer par un point M_1 faisant partie de E et suffisamment voisin de M pour qu'on ait encore:

$$|f(M_1) - f(N)| > \sigma + k_1.$$

Je suppose donc que dans (1), les deux points M et N soient des points de E; considérons maintenant les parallèles à $0x$ menées par ces points M et N; la fonction étant continue sur chacune de ces droites, on peut déterminer deux segments $M' M''$, $N' N''$, parallèles à $0x$, ayant pour milieux M et N, et de même longueur 2δ, tels que, si P et Q sont deux points quelconques pris respectivement sur ces segments, on ait:

$$|f(P) - f(M)| < \frac{k_1}{2},$$

$$|f(Q) - f(N)| < \frac{k_1}{2}.$$

De ces inégalités et de l'inégalité (1) on déduit:

$$|f(P) - f(Q)| > \sigma, \tag{2}$$

P et Q étant deux points quelconques pris, le premier sur $M' M''$, le second sur $N' N''$.

Prenons maintenant le carré de centre A_0 et dont les côtés parallèles aux axes sont à une distance de A_0 égale à η, η étant inférieur au plus petit des nombres $\frac{\varepsilon}{2}$ et δ. Dans ces conditions, si A est un point quelconque pris dans ce carré, la distance de A à chacune des droites $M' M''$, $N' N''$ est moindre que $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$. Menons alors par A la parallèle à $0y$, et prenons sur cette droite le segment dont A est milieu et dont la demi-longueur est $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$; ce segment *traversera* $M' M''$ et $N' N''$; il contiendra donc un couple de points P et Q satisfaisant à l'inégalité (2); par suite, l'oscillation dans ce segment est supérieure à σ; donc la fonction α_σ relative au point A est inférieure à $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$; c'est-à-dire que $\alpha_\sigma(x, y)$ est *semi-continue supérieurement par rapport à* (x, y); c'est la propriété que je voulais établir.

24. Je vais maintenant tirer des conséquences du résultat précédent.

Considérons une courbe quelconque C coupant toutes les parallèles à $0y$, ou, avec précision, l'ensemble des points représentés par l'équation: $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction continue quelconque définie dans un certain intervalle. En chacun des points de cette courbe, α_σ a une valeur déterminée; je considère α_σ comme fonction du point variable de la courbe C; cette fonction a, en chaque point, un *minimum par rapport à la courbe*; on peut dire aussi que, dans les conditions où nous nous plaçons, α_σ est une fonction de x; je considère en chaque point le minimum de cette fonction, tel que je l'ai défini au § 7.

En premier lieu, je dis que, si en un point $A_0(x_0, y_0)$ de C, la fonction α_σ a son minimum par rapport à C positif, l'oscillation de $f(x, y)$ en ce point par rapport à l'ensemble (x, y) est $\leqq 2\sigma$. Soit en effet γ ce minimum et soit γ_1

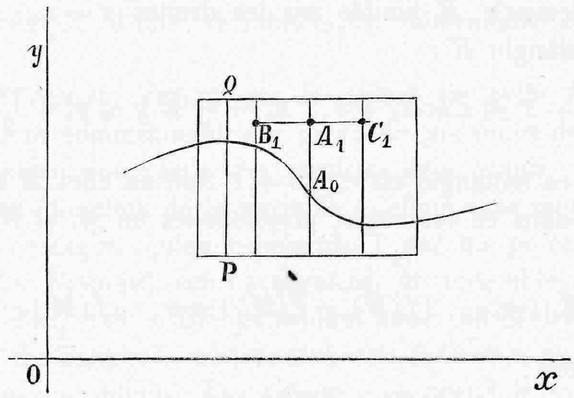

Fig. 3.

un nombre positif inférieur à γ. Je prends d'abord, autour de x_0, un intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ assez petit pour qu'on ait dans cet intervalle :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\gamma_1}{2},$$

je réduis ensuite cet intervalle, s'il le faut, de manière que, en tous les points de C correspondant aux valeurs de x qui s'y trouvent, on ait :

$$\alpha_\sigma > \gamma_1.$$

La chose est possible, puisque j'ai choisi γ_1 inférieur au *minimum de* α_σ *au point* A_0 *relativement à* C.

Prenons alors (fig. 3) le rectangle R :

$$x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta, \quad y_0 - \frac{\gamma_1}{2} \leqq y \leqq y_0 + \frac{\gamma_1}{2}.$$

Sur tout segment tel que PQ, parallèle à $0y$, et joignant les deux bases du rectangle, l'oscillation de la fonction est $\leqq \sigma$, car il y a sur ce segment un point A de la courbe C, et le segment de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(A) > \gamma_1$ contient tout le segment PQ.

Je dis maintenant qu'étant donné ε, on peut trouver une aire autour de A_0 dans laquelle l'oscillation soit $\leqq 2\sigma + \varepsilon$. Je prends pour cela, sur l'ordonnée de A_0 et dans le rectangle R, un point $A_1(x_0, y_1)$ où il y ait continuité par rapport à x; puis, sur la droite $y = y_1$, un segment $B_1 C_1 [x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, où l'oscillation soit $< \varepsilon$, en prenant, de plus: $\delta' \leqq \delta$. Si on considère la portion du rectangle R limitée par les droites $x = x_0 - \delta'$, $x = x_0 + \delta'$, c'est-à-dire le rectangle R':

$$x_0 - \delta' \leqq x \leqq x_0 + \delta', \quad y_0 - \frac{\gamma_1}{2} \leqq y \leqq y_0 + \frac{\gamma_1}{2},$$

l'oscillation dans ce rectangle est $< 2\sigma + \varepsilon$. Soit en effet M et N deux points quelconques pris dans ce rectangle, projetons-les en M_1 et N_1 sur $B_1 C_1$, on aura:

$$|f(M) - f(M_1)| \leqq \sigma, \quad |f(N) - f(N_1)| \leqq \sigma, \quad |f(M_1) - f(N_1)| < \varepsilon,$$

d'où nous déduisons:

$$|f(M) - f(N)| < 2\sigma + \varepsilon.$$

Comme le raisonnement s'applique, quel que soit ε, on voit qu'au point A_0 l'oscillation par rapport à (x, y) est $\leqq 2\sigma$. J'emploierai ce résultat, soit sous la forme que je lui ai donnée plus haut, soit sous la forme suivante. *Si au point A_0 l'oscillation est $> 2\sigma$, on peut affirmer qu'en ce point le minimum de α_σ par rapport à C est nul.*

25. Rapprochons les deux propriétés de la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ considérée sur la courbe C, d'être positive et d'être semi-continue supérieurement. D'après le § 12, il existe dans tout arc D de la courbe C un arc D_1 où α_σ a son minimum positif.

Prenons maintenant une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0; soit $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \ldots$ Dans l'arc D_1 il existe un arc D_2 sur lequel α_{σ_1} a son minimum positif, dans D_2 un arc D_3 où α_{σ_2} a son minimum positif, etc.... On voit de cette manière que, dans l'arc D, et par suite dans toute portion de la courbe C, il existe un point où α_σ a son minimum positif par rapport à la courbe, *si petit que soit σ.* En ce point, l'oscillation par rapport à (x, y) ne peut être que 0, puisqu'elle doit être inférieure ou égale à 2σ, quel que soit σ; on a donc là un point de continuité par rapport à (x, y), et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Dans toute portion de courbe représentable par une équation de la forme $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ *étant fonction continue, il existe des points où* $f(x, y)$ *est continue par rapport à l'ensemble* (x, y).

On peut dire, *a fortiori*, que, *dans toute aire*, il existe des points de continuité, c'est-à-dire que la fonction $f(x, y)$ est *ponctuellement discontinue*.

En ayant plus spécialement égard aux valeurs prises par la fonction sur la courbe considérée, ce qui est mon principal objet en ce moment, on voit aussi que la fonction d'une variable ainsi déterminée est *ponctuellement discontinue*.

C'est là un premier résultat sur la nature de cette fonction. Pour en obtenir d'autres, je commencerai par poser de nouvelles définitions, qui me permettront d'étendre une partie des résultats déjà acquis.

26. Soit une fonction de la variable t définie dans un certain intervalle; comme toujours, j'imagine qu'on représente t par un point variable sur un segment de droite. Prenons, sur ce segment, un ensemble de points E, que je supposerai *parfait*, c'est-à-dire coïncidant avec son dérivé E'. Considérons une portion BC du segment, contenant *à son intérieur* au moins un point de E, et par suite une infinité. Les valeurs que prend la fonction en tous les points de E qui font partie de BC ont une limite supérieure M, une limite inférieure m, et une oscillation $\omega = M - m$. Soit maintenant $A\,[t_0]$ un point quelconque de E; l'intervalle $(t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha)$, si petit que soit α, contient des points de E; les trois nombres précédents relatifs à l'intervalle $(t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha)$, quand α tend vers 0, tendent vers des limites déterminées, que j'appellerai le *maximum*, le *minimum*, l'*oscillation* de la fonction en A *relativement à l'ensemble parfait* E.

On voit que ces définitions sont toutes semblables à celles que nous avons données dans le premier chapitre; la seule différence consiste en ce que nous nous occupons seulement des valeurs de la fonction en certains points, négligeant complètement les autres points. Il est bien évident d'ailleurs que ces mêmes notions peuvent être définies pour un ensemble E absolument quelconque; si je ne considère que des ensembles parfaits, c'est parce que c'est seulement dans ce cas que ces notions me seront utiles.

Lorsqu'il y aura lieu de préciser, je désignerai par $M\,[f(t),\ E,\ \alpha\beta]$ le maximum de $f(x)$ aux différents points de E contenus dans l'intervalle $\alpha\beta$, et par $M\,[f(t),\ E,\ P]$ le maximum en P de $f(t)$ relativement à E.

27. Nous pouvons, grâce aux définitions précédentes, définir la *continuité et la discontinuité relativement à l'ensemble E.*

Je dirai qu'en un point A où l'on a $\omega = 0$, ω étant l'oscillation en ce point par rapport à E, la fonction est *continue par rapport à E*; si au contraire on a $\omega > 0$, nous dirons qu'il y a *discontinuité par rapport à cet ensemble.*

D'une manière générale, trois cas sont possibles:

1.° On a, en tout point de E (dans l'intervalle qu'on considère): $\omega = 0$; dans ce cas il y a continuité en chaque point; nous dirons alors que la fonction est *continue relativement à E.*

2.° Il existe des points où l'on a $\omega > 0$; mais, dans tout intervalle $\alpha\beta$ contenant à son intérieur des points de E (autrement dit, au voisinage de tout point de E), il existe des points de E pour lesquels $\omega = 0$. Par analogie avec une notion que nous avons déjà étudiée, nous sommes conduits à dire que, dans ce cas, la fonction est *ponctuellement discontinue relativement à E.*

3.° Si l'on ne se trouve pas dans l'un des deux cas précédents, c'est qu'il existe un intervalle $\alpha\beta$ contenant à son intérieur des points de E, ω étant positif en chacun de ces points; nous dirons alors que la fonction est *totalement discontinue relativement à E.*

J'emploierai également la notion de fonction *semi-continue sur un ensemble parfait.*

28. Ces nouvelles notions étant acquises, nous pouvons généraliser un certain nombre de résultats précédemment obtenus. Je commencerai par le suivant, démontré au § 12: Une fonction positive, semi-continue supérieurement, ne peut pas avoir son minimum nul en tous les points d'un segment.

Cet énoncé va devenir un cas particulier du suivant: *Une fonction, définie aux points d'un ensemble parfait E, positive et semi-continue supérieurement, ne peut pas avoir son minimum (par rapport à E) nul en tous les points de E.* Il me suffira de reprendre, avec quelques modifications, la démonstration du théorème qui précède.

Supposons d'abord une fonction définie sur E, positive ou nulle, semi-continue supérieurement, et ayant, en tous les points de E (au moins entre deux limites déterminées), son minimum nul. Je conviendrai, pour abréger, de dire qu'un intervalle est *relatif à E* s'il contient *à son intérieur* des points de E; dans ce qui suit, je considère exclusivement des intervalles satisfaisant à cette condition. D'après la dernière hypothèse faite sur notre fonction, on voit que, dans tout intervalle α relatif à E, et si petit que soit ε, il existe un point A de E où l'on a :

$$f(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'hypothèse de la semi-continuité supérieure, on peut déterminer autour de A un intervalle α_1 où l'on aura partout, c'est-à-dire pour tous les points de E contenus dans α_1 :

$$f < f(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On peut donc trouver, dans tout intervalle α un autre intervalle α_1 où l'on aura partout :

$$f < \varepsilon,$$

dans α_1 on trouvera α_2 où l'on aura :

$$f < \frac{\varepsilon}{2},$$

et ainsi de suite; chacun des intervalles α_n étant contenu dans le précédent, et l'ensemble E contenant tous ses points limites, il existe au moins un point de E contenu dans tous ces intervalles; on a nécessairement en ce point :

$$f = 0.$$

On déduit de là que *si une fonction définie sur E est positive* (jamais nulle) *et semi-continue supérieurement, l'ensemble des points où cette fonction a son minimum nul*, ensemble qui est essentiellement fermé, *ne peut coïncider avec l'ensemble E dans aucune portion du segment.*

29. Ceci nous amène à poser quelques nouvelles définitions au sujet des ensembles.

Nous dirons qu'un ensemble F contenu dans un ensemble parfait E est *dense par rapport à E*, dans une certaine portion de droite, si le dérivé de F comprend tous les points de E situés sur cette portion de droite. Si cette condition n'est remplie pour aucune portion du segment considéré, c'est que, dans tout intervalle relatif à E, on peut trouver un intervalle relatif à E ne contenant aucun point de F; dans ces conditions, nous dirons que F n'est dense nulle part par rapport à E, ou plus brièvement que F est *non dense par rapport à E.*

On peut dire que *si une fonction est positive et semi-continue supérieurement sur l'ensemble E, l'ensemble des points où le minimum de la fonction* *est nul est un ensemble non dense par rapport à E*; sous une forme différente, nous dirons que, *dans tout intervalle relatif à E, il existe un intervalle relatif à E, dans lequel le minimum de la fonction par rapport à E est positif.*

Comme application immédiate de ce théorème, on reconnait que si une fonction est totalement discontinue par rapport à un ensemble parfait, il existe certainement un intervalle relatif à cet ensemble, dans lequel ω a son minimum positif.

30. Reprenons maintenant la fonction $f(x, y)$, assujettie toujours aux conditions du problème III; soit une courbe $y = \varphi(x)$; prenons un ensemble parfait E de points sur cette courbe, ou, ce qui revient au même, un ensemble parfait de valeurs de x.

Remarquons d'abord que, en un point de E où α_σ a son minimum par rapport à E positif, l'oscillation de la fonction par rapport à E est $\leqq 2\sigma$. Il suffit, pour le voir, d'appliquer le raisonnement du § 24, en considérant seulement les parallèles à $0y$ sur lesquelles se trouvent des points de E.

Cela posé, d'après les propriétés de α_σ, on peut trouver dans tout intervalle relatif à E un autre intervalle où α_σ a son minimum positif, dans celui-ci un autre où $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum positif, etc.; on démontre ainsi l'existence d'un point de E où α_σ a son minimum positif par rapport à E, *quel que soit σ*, et où par suite l'oscillation par rapport à E est 0. Ainsi, il existe, au voisinage de tout point de E, des points de continuité par rapport à E; en d'autres termes, la fonction est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait E.*

Ce résultat comprend évidemment comme cas particulier celui du § 25, qu'on obtiendra en supposant que E est une portion de courbe continue. On voit, que, dans les raisonnements que nous avons employés, les propriétés essentielles du continu sur lesquelles nous avons raisonné, sont celles qui appartiennent aux ensembles parfaits en général: le continu n'est qu'une espèce particulière d'ensemble parfait.

Tous les résultats obtenus jusqu'à présent sur la question qui fait l'objet essentiel de ce chapitre peuvent se résumer de la manière suivante:

Une fonction qui peut être obtenue dans les conditions du problème III (et *a fortiori* dans les conditions des problèmes I et II) est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.*

III. Conditions suffisantes.

31. Je vais suivre maintenant la marche inverse de celle que j'ai suivie jusqu'ici. Je me propose d'étudier la nature de la condition que nous venons de trouver, et de montrer que toute fonction qui la remplit, c'est-à-dire qui est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait*, peut être obtenue dans les conditions des problèmes I et II. Pour cela, je m'occuperai d'abord de construire *a priori* une catégorie de fonctions présentant des discontinuités de plus en plus compliquées, mais satisfaisant à la condition précédente, et je démontrerai pour ces fonctions la possibilité des problèmes. J'aborderai ensuite le cas général, que je parviendrai à traiter complètement en le ramenant à celui des fonctions de cette catégorie particulière. En outre, la méthode que je suivrai nous permettra de transformer la condition fondamentale, et nous donnera un moyen en quelque sorte pratique de reconnaître si une fonction donnée satisfait ou non à cette condition.

Je rappelle que les problèmes à étudier sont les suivants:

Problème I. Que doit être la fonction $\varphi(x)$ définie pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$, pour qu'il soit possible de déterminer une fonction $f(x, y)$ définie dans le carré: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$, continue en tout point par rapport à x et par rapport à y, et égale sur $x = y$ à $\varphi(x)$?

Je conviendrai de dire qu'une fonction $\varphi(x)$ est *représentable* dans les conditions du problème I, si le problème précédent est possible pour cette fonction. J'énonce tout de suite à ce sujet une remarque qui me sera souvent utile.

Supposons $\varphi(x)$ représentable. Si $f(x, y)$ est une solution, on en aura d'autres en ajoutant à $f(x, y)$ une fonction $f_1(x, y)$ continue partout par rapport à (x, y), et égale à 0 sur $x = y$. On peut évidemment choisir f_1 de manière que $f + f_1$ prenne sur le *périmètre* du carré une succession de valeurs continue *donnée à l'avance*, assujettie seulement aux conditions: $f_1(\alpha, \alpha) = 0$, $f_1(\beta, \beta) = 0$.

Problème II. Que doit être $\varphi(x)$ définie pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$, pour qu'il existe une fonction $f(x, y)$ définie dans le rectangle: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $0 \leqq y \leqq y_0$, continue par rapport à (x, y) en tout point pour lequel $y > 0$, continue par rapport à y aux points de $y = 0$, et égale sur $0x$ à $\varphi(x)$?

Nous dirons que $\varphi(x)$ est représentable dans les conditions du problème II, si ce problème a une solution.

Remarquons, comme dans le cas précédent, que si cela a lieu, on peut se donner arbitrairement les valeurs de $f(x, y)$ sur le périmètre du rectangle, moins le côté $y = 0$.

32. Je vais, comme je l'ai dit plus haut, former *a priori* des fonctions discontinues représentables. Pour prendre d'abord le cas le plus simple, je considère une fonction $\varphi(x)$ définie pour $O \leqq x \leqq 1$, et qui n'a de discontinuité qu'au point $x = 0$. Je rappelle à ce propos qu'une telle discontinuité est dite de première ou de seconde espèce (*) suivant que $\varphi(x)$ a ou non une limite déterminée quand x tend vers 0; mais il n'y aura pas lieu, dans la question dont je m'occupe en ce moment, d'insister davantage sur cette distinction.

Considérons d'abord le problème I. Je prends le carré $O\,A\,B\,C$ (fig. 4): $O \leqq x \leqq 1$, $O \leqq y \leqq 1$.

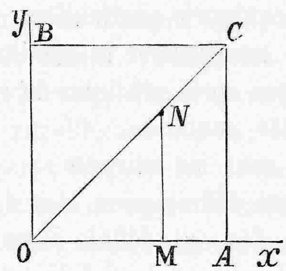

Fig. 4.

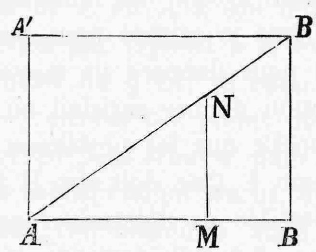

Fig. 5.

Je définis d'abord la fonction sur la diagonale $O\,C$ par la condition:

$$f(x,\ x) = \varphi(x).$$

Sur l'axe $0\,x$, c'est-à-dire sur $O\,A$, je place une fonction continue quelconque, assujettie seulement à la condition d'être égale à $\varphi(0)$ pour $x = 0$.

Pour les points du triangle $O\,A\,C$, on a: $y < x$; je prendrai en ces points:

$$f(x,\ y) = f(x,\ 0) + \frac{y}{x}\,[f(x,\ x) - f(x,\ 0)].$$

Autrement dit, sur tout segment $M\,N$ parallèle à $0\,y$ et reliant les droites $O\,A$ et $O\,C$, je fais varier linéairement $f(x,\ y)$. Enfin, je complète la définition de $f(x,\ y)$ par symétrie autour de $x = y$. Il est évident que $f(x,\ y)$ satisfait aux conditions du problème.

La solution du problème II est analogue. Soit (fig. 5) $A\,B\,A'\,B'$ le rectangle où il s'agit de définir la fonction $f(x,\ y)$. On a, sur $A\,B$, une fonction

(*) Cf. Dini, *Fondamenti,* etc.

continue en tout point, sauf au point A. Je trace dans ce rectangle une courbe quelconque partant de A, par exemple la diagonale $A B'$; je définis, dans l'aire $A' A B'$, une fonction continue de (x, y), la seule condition imposée étant que cette fonction prenne en A la valeur donnée; cela fait, sur chaque segment MN reliant AB et AB', je fais varier la fonction linéairement de $f(M)$ à $f(N)$; $f(x, y)$ est alors partout définie, et cette fonction constitue une solution du problème.

33. On conçoit tout de suite que le résultat s'étend à une fonction qui présente un nombre fini quelconque de discontinuités. Je donne à ce sujet le théorème général suivant:

Une fonction étant définie dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$, si on peut partager cet intervalle en n portions par des points de division $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, de

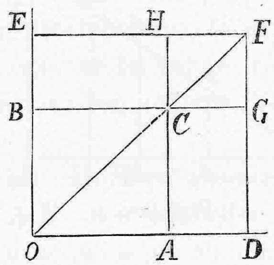

Fig. 6.

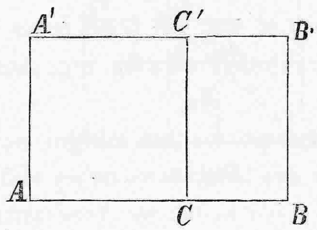

Fig. 7.

telle sorte que, sur chaque portion $\alpha_i \leqq x \leqq \alpha_{i+1}$, la fonction soit représentable, la fonction, considérée dans l'intervalle entier, est représentable.

Il suffira évidemment de vérifier ce théorème dans le cas de $n = 2$.

S'il s'agit du problème I, considérons la fig. 6.

On suppose que, sur chacun des segments OC, CF, la fonction est représentable; on peut donc définir dans chacun des carrés $OACB$, $CGFH$, une fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions du problème; il suffit alors de définir dans $ADGC$ une fonction continue prenant sur AC et CG une succession continue de valeurs, qui se trouve déterminée par la définition précédente; il en est de même pour $BCHE$. On voit alors que *la fonction donnée, considérée sur OF, est représentable.*

Dans le cas du problème II, je considère la fig. 7. Le problème est supposé possible, si on considère la fonction, seulement sur AC, ou seulement sur CB. Donnons-nous sur CC' une succession continue de valeurs arbitraire. D'après l'hypothèse et d'après une remarque faite au § 31, on peut achever la définition de $f(x, y)$ dans $A\,C\,C'\,A'$ et dans $C\,B\,B'\,C'$, de manière que, dans chacun de ces deux rectangles, les conditions fondamentales soient vérifiées; considérons alors la fonction qui se trouve définie dans tout le rectangle $A\,B\,B'\,A'$; elle constitue une solution du problème proposé.

En résumé, nous connaissons, jusqu'à présent, comme fonctions représentables, toutes les fonctions dont *les discontinuités sont en nombre fini.*

34. Pour passer au cas où les discontinuités peuvent être en nombre infini, je vais démontrer un autre théorème général.

Supposons qu'on ait, sur le segment où la fonction est définie, une suite de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ d'abscisses $x_1 > x_2 \ldots > x_n \ldots$, ayant pour limite un point A, de telle sorte que, sur chaque portion $A_n\,A_{n-1}$, la fonc-

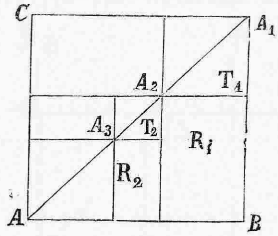

Fig. 8.

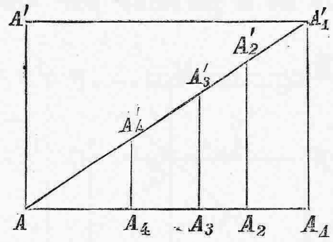

Fig. 9.

tion soit représentable; je dis qu'elle sera représentable sur le segment total $A\,A_1$.

Problème I. Soit $A\,B\,A_1\,C$ le carré où il faut définir $f(x, y)$ (fig. 8); à cause de la symétrie par rapport à $x = y$, je considérerai seulement le triangle $A\,B\,A_1$. La fonction est donnée sur $A\,A_1$; je me donne sur $A\,B$ une fonction continue; puis, je définis $f(x, y)$ successivement dans les aires suivantes: triangle T_1, rectangle R_1, triangle T_2, rectangle R_2, etc. Je peux définir $f(x, y)$ dans chacun des triangles T_1, T_2, etc...., en observant, bien entendu, les conditions de continuité, parce que, d'après les hypothèses, la fonction donnée est représentable sur chacun des segments $A_1\,A_2$, $A_2\,A_3$, etc. Si on imagine l'opération prolongée indéfiniment, la fonction $f(x, y)$ se trouve définie en tous les points du carré et satisfait à toutes les conditions du problème.

Problème II. Considérons la fig. 9. Je définis d'abord la fonction dans le triangle $A\,A'\,A'_1$, puis je mène les droites $A_2\,A'_2$, $A_3\,A'_3$, etc...., qui relient $A\,A_1$ et $A\,A'_1$, et je définis la fonction successivement dans chacun des trapèzes formés: $A_1\,A'_1\,A_2\,A'_2$, $A_2\,A'_2\,A_3\,A'_3, \ldots$ etc.... Il est évident que chacune de ces opérations est possible, puisque, sur chacun des segments $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, etc., la fonction est représentable. En tout point qui n'est pas sur le côté $A A_1$, il y aura continuité par rapport à (x, y), et en tout point de ce côté, il y aura continuité par rapport à y.

35. Le théorème est donc démontré; je vais en transformer l'énoncé de la manière suivante. Supposons que nous prenions sur $A A_1$ un point A' différent de A, mais aussi voisin que nous voulons de A; si nous considérons alors le segment $A' A_1$, le théorème du § 33 suffit pour nous apprendre que la fonction est représentable sur ce segment, car il est décomposable en un nombre fini de portions sur chacune desquelles la fonction est représentable. On voit alors que nous pouvons donner au théorème que nous venons d'établir la forme suivante:

Si une fonction est représentable dans tout segment $A' B'$ intérieur à $A B$, elle est représentable sur le segment $A B$.

Enfin, en combinant ce résultat avec celui du § 33 que je viens de rappeler à l'instant, on obtient l'énoncé suivant, qui résume l'étude que je viens de faire:

Théorème I. *Etant donnée une fonction définie sur un segment $A B$, s'il existe sur $A B$ un nombre fini de points, tels qu'en entourant ces points d'intervalles aussi petits qu'on veut et en retranchant ces intervalles de $A B$, la fonction, sur chacun des segments qui restent, est représentable, elle est représentable sur le segment $A B$.*

36. Nous pouvons déjà, à l'aide de ce théorème, obtenir une catégorie étendue de fonctions discontinues représentables.

Supposons d'abord que $\varphi(x)$ ait des discontinuités en nombre infini, mais que l'ensemble P des points où ces discontinuités ont lieu n'ait qu'un nombre fini de points limites; en adoptant pour les ensembles dérivés les notations de MM. Cantor et Bendixson (*), nous dirons que P' se compose d'un nombre fini de points. Dans ces conditions, si nous entourons ces points de P' d'intervalles très petits que nous retranchons de l'intervalle total, la fonction, sur chacun des segments qui restent, n'a qu'un nombre fini de discontinuités, et est par suite représentable; donc, d'après le théorème I, elle est représentable sur le segment total.

On voit tout de suite comment, en appliquant de nouveau le théorème I, on passera du cas que nous venons d'examiner au cas où il existe un en-

(*) *Acta Mathematica*, Tome II.

semble P'' composé d'un nombre fini de points, puis au cas où il existe pour P des ensembles dérivés d'ordre $3, 4, \ldots n$, etc....

Pour voir exactement jusqu'où nous pouvons aller dans cette voie, rappelons brièvement les définitions de M. Cantor relatives aux ensembles dérivés d'ordre supérieur (*). Si un ensemble P est de telle nature que le dérivé d'ordre n, P^n, existe, quel que soit n, il y a des points qui appartiennent à P^n, quel que soit n; on désigne l'ensemble de ces points par P^ω, et l'on convient de dire que P^ω est l'ensemble dérivé de P d'ordre ω. On désigne les ensembles dérivés successifs de P^ω par la notation $P^{\omega+1}, P^{\omega+2}, \ldots P^{\omega+n}, \ldots$; s'il en existe, quel que soit n, les points qui appartiennent à tous ces ensembles forment un nouvel ensemble qu'on appelle $P^{2\omega}$, etc.; on est ainsi conduit à la notion d'ensemble dérivé d'ordre α, α étant un quelconque des symboles définis par M. Cantor et qu'il appelle nombres de la deuxième classe.

Je ferai remarquer à ce sujet, une fois pour toutes, que nous n'aurons jamais à nous préoccuper des difficultés que peut comporter en soi la notion abstraite de *nombre transfini*, bien que cette expression puisse être employée par nous dans la suite de ce travail. Dans le cas actuel, par exemple, l'ensemble P^α, α étant un nombre déterminé de la deuxième classe de nombres, représente quelque chose de parfaitement déterminé, indépendamment de toute considération abstraite relative aux symboles de M. Cantor; il n'y a donc, dans l'usage que nous pourrons faire de la locution *nombre transfini*, rien de plus que l'emploi d'un langage commode. Il en sera toujours de même dans la suite.

Rappelons encore quelques résultats. Il existe des nombres transfinis de deux espèces différentes; α est un nombre de première ou de seconde espèce, suivant qu'il existe ou non un nombre qui le précède immédiatement. Au point de vue des ensembles dérivés, qui nous intéresse ici, on peut dire que, si α est de première espèce, P^α est l'ensemble dérivé de $P^{\alpha-1}$; si α est de seconde espèce, P^α est par définition l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles $P^{\alpha'}$, α' étant un quelconque des nombres inférieurs à α. Si α est de seconde espèce, et si P^α est nul, il existe certainement un nombre α' de première espèce, inférieur à α, et tel que $P^{\alpha'}$ est nul.

Nous pouvons maintenant étendre les résultats obtenus sur les fonctions représentables. Je dis que, en appelant P l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction et α un nombre quelconque de la première ou de la

(*) Voir *Acta*, Tome II.

deuxième classe, s'il est démontré que toute fonction pour laquelle $P^\alpha = 0$ est représentable, une fonction pour laquelle P^α se compose d'un nombre fini de points est aussi représentable. En effet, j'entoure les points de P^α d'intervalles très petits que je retranche de l'intervalle total; dans chaque portion qui reste, on a $P^\alpha = 0$, la fonction est donc représentable dans cette portion; comme les intervalles retranchés peuvent être pris aussi petits qu'on veut, la fonction, d'après le théorème I, est représentable sur tout l'intervalle donné.

Nous savons déjà qu'une fonction est représentable si, en appelant α le plus petit nombre pour lequel $P^\alpha = 0$, on a: $\alpha = 1$, ou $\alpha = 2$. Le théorème qui précède montre que le résultat subsiste si l'on a $\alpha = 3, 4, \ldots n, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots 2\omega, \ldots$ etc., de sorte qu'on peut énoncer le résultat suivant:

Toute fonction pour laquelle P^α est nul, α étant un nombre quelconque de la première ou de la deuxième classe, est représentable.

Il est bon de faire voir qu'il existe effectivement des fonctions représentables pour lesquelles P^α existe, α étant un nombre donné arbitrairement. Il suffit de rappeler qu'on sait former un ensemble P pour lequel P^α existe (*); si on prend une fonction égale à 1 aux points de P, à 0 en tous les autres points, les points de discontinuité de cette fonction sont les points de P'; on a donc là un exemple d'une fonction représentable pour laquelle P^α existe.

On peut dire que les fonctions représentables que nous connaissons jusqu'à présent sont celles pour lesquelles *l'ensemble P des points de discontinuité a son dérivé P' dénombrable,* autrement dit est un *ensemble réductible.*

37. Nous allons chercher maintenant à construire des exemples de fonctions représentables pour lesquelles l'ensemble des points de discontinuité ne sera pas dénombrable. J'aurai besoin de rappeler d'abord quelques résultats sur les *ensembles parfaits linéaires qui ne sont denses dans aucun intervalle.*

Soit donc P un *ensemble parfait non dense par rapport au continu;* cela veut dire que, dans toute portion de segment, on peut trouver une autre portion qui ne contienne aucun point de P. Soit M un point ne faisant pas partie de P; il n'est pas non plus point-limite de P, puisque P est parfait; donc on peut trouver un intervalle contenant M à son intérieur, et dont aucun point *intérieur* ne fait partie de P; si les points extrêmes de cet intervalle ne sont pas des points de P, on peut reculer les limites de l'intervalle d'une longueur finie; on voit donc qu'on peut attribuer un sens précis à l'expression:

(*) Voir Cantor, *Acta Mathematica*, Tome II, page 360.

prendre l'intervalle précédent aussi grand que possible; ce sera déterminer un intervalle AB contenant M, et ne contenant aucun point de P si ce n'est A et B, qui devront être des points de cet ensemble.

On reconnaît ainsi que l'ensemble parfait P peut être défini de la manière suivante: Il existe, sur le segment de droite qu'on considère, une infinité dénombrable d'intervalles $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots A_n B_n, \ldots$ tels que deux quelconques de ces intervalles n'ont aucun point commun, et tels que toute portion de droite contient un de ces intervalles ou fait partie de l'un deux; l'ensemble complémentaire de P est constitué par les points *intérieurs* aux intervalles; l'ensemble P comprend des points de deux espèces distinctes: en premier lieu, les points A_1, $A_2, \ldots A_n, \ldots B_1$, $B_2, \ldots B_n, \ldots$ qui sont les extrémités des intervalles précédents, et qui forment un ensemble dénombrable; en second lieu, l'ensemble non dénombrable des points C tels que chacun d'eux est extérieur à tous les intervalles $A_n B_n$.

Etant donné un *ensemble parfait non dense,* nous imaginerons que les intervalles $A_n B_n$ dont nous venons de rappeler la définition, et qu'on peut appeler intervalles *contigus* à P, sont rangés dans un ordre déterminé, par exemple dans un ordre tel que chacun d'eux ne surpasse en longueur aucun de ceux qui le précèdent. Concevons que, de l'intervalle total, on retranche successivement $A_1 B_1$, puis $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, etc....; au bout de n opérations, l'intervalle total se trouve partagé en intervalles partiels, les uns retranchés, ce sont précisément $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots A_n B_n$, les autres conservés; soit λ_n la plus grande longueur d'un segment conservé; je dis que, si n croît indéfiniment, λ_n tend vers 0; si en effet cela n'était pas, λ_n aurait une limite positive λ; on démontrerait l'existence d'une portion de droite de longueur λ dans laquelle il n'y aurait jamais de segments à retrancher, par suite dont tous les points feraient partie de P; cela est impossible, puisque P est *non dense.*

Remarquons aussi que, si l'on effectue l'opération précédente, les points de P de la deuxième espèce sont ceux qui se trouvent, quel que soit n, à *l'intérieur* d'un intervalle conservé.

Comme type d'ensemble parfait non dense, citons celui qui est obtenu comme il suit: on retranche de l'intervalle (0, 1) l'intervalle $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, puis on opère sur chacun des deux intervalles restants comme on vient d'opérer sur (0, 1), c'est-à-dire qu'on retranche $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}, \frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)$, et d'une manière générale, après un nombre quelconque d'opérations analogues, on opère sur chacun des intervalles conservés comme on a opéré sur (0, 1). Tous les points de l'ensemble P ainsi défini sont ceux qui correspondent à une valeur de x donnée par la formule :

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_n}{3^n} + \cdots$$

le nombre des fractions étant fini ou infini, et chaque quantité c pouvant prendre l'une des valeurs 0 ou 2.

38. Ces notions étant rappelées, considérons un ensemble parfait non dense P situé sur un segment $A\,B$, en supposant, pour plus de commodité, que A et B appartiennent à cet ensemble. Imaginons une fonction définie sur $A\,B$ et satisfaisant aux deux conditions suivantes: d'une part, les discontinuités n'ont lieu qu'en des points faisant partie de P; d'autre part, la fonction, considérée sur l'ensemble P, est continue. Un exemple de ce cas nous sera fourni par la fonction qui est égale à 1 aux points de P, à 0 aux autres points. Je me propose de montrer qu'une fonction qui satisfait aux deux conditions précédentes est représentable. Cela résultera, comme cas particulier, du théorème général suivant:

Theorème II. *S'il existe un ensemble parfait non dense P sur lequel la fonction est continue, et si, sur tout segment contigu à P, la fonction est représentable, elle est représentable sur l'intervalle total.*

Je ferai une remarque générale très simple au sujet de la notion de fonction continue relativement à un ensemble parfait non dense. Soit $\varphi(x)$ une telle fonction, que nous supposons continue sur P. Je dis qu'on peut trouver une fonction $\psi(x)$, définie en tous les points de l'intervalle, égale à $\varphi(x)$ aux points de P, et partout continue.

Il s'agit de définir $\psi(x)$ aux points qui n'appartiennent pas à P, c'est-à dire aux points qui sont situés *à l'intérieur* des segments $A_n\,B_n$ contigus à P. Il suffira par exemple d'adopter la loi suivante: dans chaque segment $A_n\,B_n$, on fera varier linéairement $\psi(x)$ depuis $\psi(A_n)$ jusqu'à $\psi(B_n)$. Je dis que, dans ces conditions, la fonction $\psi(x)$ est continue; la chose est évidente pour les points qui ne font pas partie de P; soit maintenant $M\,[x_0]$ un point de P. D'après l'hypothèse faite sur $\varphi(x)$, à tout nombre ε correspond un nombre α tel que, en tous les points de P compris dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on a :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Diminuons, s'il y a lieu, cet intervalle, de manière que ses points extrêmes fassent partie de P. Si alors nous considérons dans cet intervalle un point H

quelconque, il se trouve sur un segment $A_n B_n$ *contigu* à P, et $\psi(H)$ est compris entre $\psi(A_n)$ et $\psi(B_n)$, c'est-à-dire entre $\varphi(A_n)$ et $\varphi(B_n)$. On a donc, pour tous les points de l'intervalle:

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon,$$

ce qui exprime la continuité de $\psi(x)$.

Reprenons maintenant la fonction assujettie aux conditions du théorème II qu'il s'agit d'établir; soit $\varphi(x)$ cette fonction; nous pouvons, d'après ce qui précède, définir une fonction $\psi(x)$ continue partout, et égale à $\varphi(x)$ aux points de P. Posons alors:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

La fonction $\varphi_1(x)$ sera dans les mêmes conditions que $\varphi(x)$; car, puisqu'elle

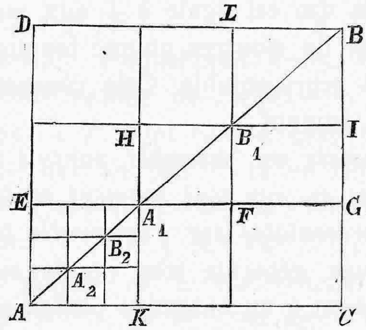

Fig. 10.

ne diffère de φ que d'une fonction continue, elle est représentable sur tout segment *contigu* à P; mais elle présente cette particularité d'avoir la valeur 0 en tous les points de P.

Le théorème II sera démontré pour $\varphi(x)$, si nous le démontrons pour $\varphi_1(x)$, qui n'en diffère que par une fonction continue; le fait que φ_1 est nul aux points de P rendra plus claires nos démonstrations.

39. Je me place donc dans les hypothèses suivantes: Sur AB on a un ensemble parfait non dense P, dont A et B font partie; on a une fonction $\varphi(x)$ égale à 0 aux points de P, et qui, sur chacun des segments $A_n B_n$ *contigus* à P, est représentable; il faut montrer que $\varphi(x)$, considérée sur AB, est représentable.

Problème I. Soit $ACBD$ le carré où il s'agit de définir $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions du problème I (fig. 10). La fonction a, en A et B, la valeur 0; je lui attribue la valeur 0 sur tout le périmètre $ACBD$.

Je suppose, comme plus haut, que les segments $A_n B_n$ *contigus* à P sont rangés dans un ordre déterminé; soit $A_1 B_1$ le premier d'entre eux. Menons par A_1 et B_1 les parallèles à $0x$ et à $0y$; nous divisons ainsi le carré donné en plusieurs aires partielles, que je distingue en trois catégories:

1.° Le carré $A_1 F B_1 H$, qui a pour diagonale $A_1 B_1$; sur le périmètre de ce carré je donne à la fonction la valeur 0, et je définis, à l'intérieur, une fonction continue par rapport à chaque variable, ce qui est possible, puisque d'après l'hypothèse la fonction est représentable sur $A_1 B_1$.

2.° Les carrés $A K A_1 E$, $B_1 I B L$, qui ont pour diagonales $A A_1$ et $B_1 B$; pour le moment, je me borne à définir la fonction sur le contour de chacun de ces carrés: je lui attribue la valeur 0.

3.° Il reste les deux aires $D E A_1 H B_1 L$, $A_1 K C I B_1 F$; sur chacun des deux contours de ces aires, la fonction a la valeur 0; je lui attribue la valeur 0 en tous les points intérieurs.

Cette première opération étant effectuée, la fonction se trouve définie partout, sauf à l'intérieur des carrés qui ont pour diagonales $A A_1$ et $B_1 B$; et on reconnaît que chacun de ces carrés se trouve exactement dans les mêmes conditions que le carré primitif $A C B D$.

Supposons que le second segment *contigu* à P, $A_2 B_2$, se trouve sur la portion $A A_1$. On répétera l'opération précédente, $A_2 B_2$ jouant dans le carré de diagonale $A A_1$ le même rôle que $A_1 B_1$ dans le carré $A C B D$. On continuera ensuite de la même manière, en opérant successivement sur $A_3 B_3, \ldots$ $A_n B_n, \ldots$ Quand on a enlevé de $A B$ les segments $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots$ $A_n B_n$, il reste sur $A B$ des segments conservés; les seuls points où la fonction ne se trouve pas définie sont ceux qui sont à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment conservé. Il résulte de là qu'en répétant l'opération précèdente indéfiniment, la fonction se trouvera définie en tous les points qui ne se trouvent pas sur la diagonale $A B$; en effet, la distance d'un tel point à $A B$ est un nombre positif λ, et il existe un entier n tel que, après n opérations, la plus grande longueur des segments conservés est inférieure à 2λ; à ce moment, il est certain que la fonction se trouve définie au point considéré. D'autre part la fonction est donnée sur $A B$; elle est donc définie dans toute la région $A C B D$.

Démontrons maintenant que les conditions de continuité sont remplies. La chose est évidente pour tous les points situés en dehors de $A B$, car la fonction est définie en un quelconque de ces points au bout d'un nombre fini d'opérations; et d'après la construction, elle est continue par rapport a x et

6

par rapport à y. Pour un point de AB ne faisant pas partie de P, le fait est aussi certain, car un tel point se trouve à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment $A_n B_n$.

Il reste à étudier les points de P. Remarquons que, d'après la construction, les seuls points où la fonction n'a pas la valeur 0 sont ceux qui sont à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment $A_n B_n$. Si donc M est un point de P, et si l'on mène par M les parallèles à $0x$ et à $0y$, la fonction a, en tous les points de ces droites, la valeur 0; il y a donc continuité en M par rapport à x et à y, ce qui achève de démontrer la proposition.

On peut résumer la construction de $f(x, y)$ dans le carré $ACBD$ de la manière suivante: on prend les carrés $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$ qui ont pour diago-

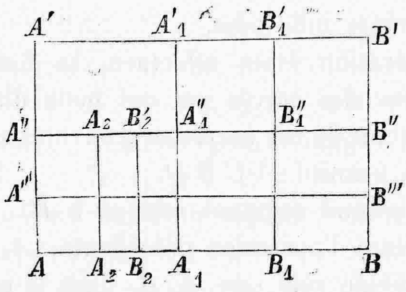

Fig. 11.

nales les segments $A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots A_n B_n, \ldots$; sur les périmètres de ces carrés, on pose $f = 0$, et on définit f à l'intérieur de chacun d'eux en observant les conditions de continuité; enfin, en tous les autres points du carré $ACBD$, on pose $f = 0$.

Problème II. Soit (fig. 11) le rectangle $ABA'B'$: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $0 \leqq y \leqq y_0$. Imaginons qu'on trace toutes les parallèles à $0y$ menées par les points de P; sur chacune de ces droites, j'attribue à la fonction la valeur 0, ainsi que sur $A'B'$; de cette manière, il y aura certainement, en tout point de P, continuité par rapport à y.

Considérons le rectangle $A_1 B_1 A'_1 B'_1$, correspondant au segment $A_1 B_1$; puisque, par hypothèse, la fonction donnée $\varphi(x)$ est représentable sur $A_1 B_1$, je peux, dans ce rectangle, définir $f(x, y)$ continue par rapport à (x, y) en tout point, sauf en ceux de $A_1 B_1$, où il y aura seulement continuité par rapport à y.

Traçons maintenant la droite $A'' B'' : y = \frac{y_0}{2}$; si nous considérons le rectangle $A' B' A'' B''$, la fonction se trouve actuellement définie, d'une part dans la portion $A'_1 B'_1 A''_1 B''_1$, d'autre part sur toutes les parallèles à $0 y$ dont le point d'intersection avec $A B$ est un point de P; j'achève la définition de $f(x, y)$ dans ce rectangle, en donnant à f la valeur 0 en tous les points où elle n'est pas encore définie; on voit alors que f aura la valeur 0 en tous les points de chacun des deux rectangles $A' A'_1 A'' A''_1$, $B'_1 B' B''_1 B''$; et, dans tout le rectangle $A' B' A'' B''$, ce sera une fonction continue.

Prenons maintenant le segment $A_2 B_2$, supposons qu'il soit sur $A A_1$, par exemple; considérons le rectangle $A_2 B_2 A'_2 B'_2$, limité supérieurement à la droite : $y = \frac{y_0}{2}$; dans ce rectangle, je peux définir $f(x, y)$, puisque la fonction $\varphi(x)$ est représentable sur $A_2 B_2$; je trace ensuite la droite $A''' B''' : y = \frac{y_0}{4}$, et j'achève la définition de $f(x, y)$ dans le rectangle $A'' B'' A''' B'''$, en donnant à f la valeur 0 en tous les points où elle ne se trouve pas encore définie. On voit aisément comment le procédé de définition se généralise pour ce qui concerne les segments $A_3 B_3, \ldots, A_n B_n, \ldots$ En tout point où l'on a $y > 0$, la fonction se trouve définie au bout d'un nombre fini d'opérations, et par conséquent, d'après la construction de f, il y a continuité en ce point par rapport à (x, y); nous avons remarqué en commençant qu'aux points de P il y avait continuité par rapport à y; il reste à considérer les points de $A B$ qui ne font pas partie de P: chacun d'eux est intérieur à un segment $A_n B_n$; d'après la construction précédente, il y a encore, en un tel point, continuité par rapport à y.

En résumé, le théorème II est établi d'une manière complète; on voit que c'est pour une simple raison de commodité que j'ai ramené le cas général à celui de la fonction qui est nulle en tous les points de P; on aurait pu faire la démonstration directement pour le cas général.

40. Appelons toujours P l'ensemble des points de discontinuité de la fonction donnée $\varphi(x)$; je supposerai toujours, dans ce qui suit, que P est un ensemble fermé; si cela n'était pas, il suffirait d'adjoindre à P ses points limites; autrement dit, on remplacerait la considération de P par la considération de l'ensemble formé par la réunion de P et de P'.

Il résulte des raisonnements de M. Bendixson exposés dans les *Acta Mathematica* (Tome II) que, si P est un ensemble *fermé non dense*, il peut se présenter deux cas :

1.° P est dénombrable; alors il existe un nombre α de la première ou de la deuxième classe, tel que $P^{\alpha} = 0$.

2.° P n'est pas dénombrable; la condition précédente n'est remplie pour aucun nombre α; mais il existe un nombre α tel que:

$$P^{\alpha} = P^{\alpha+1} = \dots$$

On est conduit à dire qu'il existe dans tous les cas un ensemble P^{Ω}, dérivé d'ordre Ω de P, Ω représentant le premier nombre transfini de la troisième classe de nombres; dans le premier cas, on a $P^{\Omega} = 0$; dans le second:

$$P^{\alpha} = P^{\alpha+1} = \dots = P^{\Omega}.$$

L'équation $P^{\Omega} = 0$ caractérise les ensembles pour lesquels P est dénombrable; on dit encore dans ce cas que P est *réductible.*

Dans le second cas, P^{Ω} est un ensemble parfait, et P est constitué de la manière suivante: dans chaque intervalle *contigu à* P^{Ω}, P forme un ensemble réductible (*).

Nous avons appris jusqu'ici à former des fonctions discontinues représentables de deux sortes: celles pour lesquelles P est *réductible*, et celles pour lesquelles P est *parfait*, la fonction étant *continue sur* P; nous pouvons tout de suite en former une troisième catégorie, comprenant les deux premières. Supposons que P soit un ensemble non dense, et qu'il existe un dérivé d'ordre Ω, P^{Ω}; nous prendrons une fonction *continue sur* P^{Ω}, et, dans chaque intervalle *contigu à* P^{Ω}, nous définirons la fonction de manière qu'il y ait des discontinuités aux points de P (qui forment, dans un tel intervalle, un ensemble réductible). Le théorème II montre que la fonction ainsi définie sera représentable, car elle est continue sur l'ensemble parfait P^{Ω}, et elle est représentable sur tout segment contigu à P^{Ω}.

41. Nous sommes conduits à une extension des remarques faites au § 37 sur les ensembles. Etant donné sur AB un ensemble P *fermé* et *non dense*, il existe sur AB des intervalles parfaitement déterminés, dont les points extrêmes sont des points de P, et dont aucun point intérieur ne fait partie de P; deux quelconques de ces segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, mais ils peuvent avoir une extrémité commune; comme cas particulier, on voit que si cette dernière condition n'est jamais remplie, l'ensemble P est

(*) Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans le Mémoire de M. Bendixson (*Acta*, T. II). J'aurai d'ailleurs occasion plus loin (§ 47), d'établir sur les ensembles des théorèmes qui comprendront ceux-ci comme cas particuliers.

parfait; au contraire, si un quelconque des segments en touche deux autres par ses points extrêmes, l'ensemble P est réductible.

Réciproquement, si, par un moyen quelconque, on arrive à définir sur une droite une infinité dénombrable d'intervalles, dont deux quelconques n'empiètent jamais l'un sur l'autre, et tels que, dans toute portion de la droite, il y ait des points appartenant à ces segments, l'ensemble P formé par leurs extrémités et par les points limites de ces extrémités est un ensemble fermé non dense. Nous dirons encore que chacun de ces intervalles est *contigu à P*.

Le dernier résultat obtenu sur les fonctions représentables est celui du § 40, qu'on peut énoncer ainsi: S'il existe un ensemble P fermé et non dense, tel que la fonction est continue sur P^{Ω} et continue dans tout segment *intérieur* à un segment contigu à P, elle est représentable.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'un théorème général, qui sera une combinaison des théorèmes I et II et qui résumera tout ce qui précède.

Généralisons d'abord les résultats obtenus au § 36; nous y avons reconnu que si, en dehors de tout point d'un ensemble P pour lequel $P^{\alpha} = 0$, la fonction est continue, elle est représentable. Cet énoncé peut être considéré comme cas particulier du suivant: *Si, dans tout segment contigu à P* (en supposant P réductible, c'est-à-dire $P^{\alpha} = 0$ pour une certaine valeur de α), *la fonction est représentable, elle est représentable dans tout le segment.* La démonstration est identique à celle du § 36; le théorème a déjà été démontré pour le cas de $\alpha = 1$, $\alpha = 2$; on a, dans ces cas, les propositions des § 33 et 34. Il suffit de montrer que si le théorème est vrai quand P est de telle nature que $P^{\alpha} = 0$, il est encore vrai si P^{α} comprend un nombre fini de points; en effet, si on entoure ces points d'intervalles très petits qu'on retranche de l'intervalle total, la fonction, dans chaque intervalle restant, où l'on a $P^{\alpha} = 0$, est représentable; le théorème I montre alors qu'elle est représentable sur tout le segment.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème général suivant:

Théorème III. *S'il existe un ensemble P, fermé et non dense, tel que la fonction est continue sur P^{Ω} et est représentable sur tout segment contigu à P, elle est représentable sur le segment total.*

En effet, dans tout intervalle contigu à P^{Ω}, la fonction est représentable, d'après ce que nous venons de voir; le théorème II nous montre qu'elle l'est sur l'intervalle total.

Pour que le théorème III résume tout ce qui a été démontré jusqu'ici, nous conviendrons de faire rentrer le cas de $P^{\Omega} = 0$ dans celui où, P^{Ω} existant effectivement, la fonction est continue sur cet ensemble.

42. Grâce au théorème III, nous allons pouvoir donner une extension considérable aux résultats acquis. Supposons que l'ensemble des points de discontinuité P (complété, s'il y a lieu, par ses points-limites) soit non dense, contienne un ensemble P^{Ω}, mais qu'il existe sur P^{Ω} un nombre *fini* de points qui soient points de discontinuité *par rapport à* P^{Ω}; le théorème I suffit pour montrer que la fonction est représentable, car en isolant ces points de discontinuité par de petits intervalles, la fonction est représentable sur chaque portion restante. Nous avons donc là un nouvel exemple de fonction représentable que nous n'avions pas obtenu jusqu'ici; mais on peut tout de suite donner à cette remarque toute sa portée, en introduisant d'une manière systématique la considération des points de discontinuité par rapport à P^{Ω}.

J'appellerai d'une manière générale P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} qui sont points de discontinuité par rapport à P^{Ω}, ou qui sont points limites de points de discontinuité, de telle sorte que P_1 sera essentiellement fermé. Nous venons de voir que si P_1 est fini, la fonction est représentable. D'une manière plus générale, supposons que P_1 soit, ou bien un ensemble réductible, ou bien un ensemble non réductible, mais tel que, sur P_1^{Ω} (dérivé d'ordre Ω de P_1) la fonction soit continue. Nous pouvons, dans ces conditions, appliquer le théorème III, en faisant jouer à l'ensemble P_1 que nous venons de définir le rôle de l'ensemble P dont il est parlé dans ce théorème; en effet, P_1, d'après sa définition même, est d'une nature telle que, dans tout intervalle *contigu à* P_1, la fonction est représentable, puisque, si dans cet intervalle il existe une portion de P^{Ω}, il y a, en chaque point de P^{Ω} *intérieur* à l'intervalle, continuité par rapport à P^{Ω}. On reconnaît ainsi que le théorème III est applicable à l'ensemble P_1; il en résulte que la fonction est représentable.

Montrons comment on pourra effectivement former des exemples de fonctions pour lesquelles P_1 existe. Prenons un point A, juxtaposons des segments qui auront ce point pour limite, soient $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots$, $A_{n-1} A_n, \ldots$; dans chacun des segments de rang impair, je placerai un ensemble parfait, où je donnerai à φ la valeur 1, tandis que je donnerai à φ la valeur 0 aux autres points du segment; au contraire, dans chacun des segments de rang pair, je donnerai à φ la valeur 0 aux points d'un certain ensemble parfait, et la valeur 1 aux autres points; en chacun des points A_1, $A_2, \ldots A_n, \ldots$, A, je donne arbitrairement à la fonction l'une des valeurs 0 ou 1. On voit que, dans un tel exemple, il y a pour la fonction des points de discontinuité formant un ensemble parfait P, identique à P^{Ω}; de plus, il y a des points de P^{Ω} qui sont *points de discontinuité par rapport à* P^{Ω}: ce sont les points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots, A$; dans le cas actuel, P_1 se compose donc d'une infinité de points ayant un point limite.

On conçoit tout de suite comment, en partant des mêmes principes, on pourra construire des exemples où P_1 aura des ensembles dérivés jusqu'à l'ordre $2, 3, \ldots n, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots 2\omega, \ldots \alpha, \ldots,$ en d'autres termes, sera un ensemble réductible quelconque. Enfin, pour former un exemple où P_1^{Ω} existe, prenons *a priori* un ensemble parfait, qui sera P_1^{Ω}; dans chacun des intervalles *contigus à* P_1^{Ω}, plaçons une fonction de la catégorie précédente, en ayant soin que les points extrêmes de ces intervalles soient effectivement des points limites de points de discontinuité relatifs à P^{Ω}; de plus, prenons la fonction continue sur P_1^{Ω}: on aura ainsi une fonction représentable.

Il est utile de remarquer que, dans tous ces exemples, l'ensemble P_1 est *non dense par rapport à* P^{Ω}.

43. Les notions nouvelles introduites par la considération de P_1 se prêtent à une généralisation immédiate. Etant donnée une fonction $\varphi(x)$, nous appellerons P_2 l'ensemble des points de P_1^{Ω} qui sont, *par rapport à* P_1^{Ω}, points de discontinuité ou points limites de tels points. Nous définirons ainsi successivement $P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots,$ chacun de ces ensembles se déduisant du précèdent exactement comme P_1 se déduit de P. Nous serons conduit à dire que, si P_{n-1} est réductible, ou bien si P_{n-1}^{Ω}, son dérivé d'ordre Ω, existe, mais si la fonction est continue sur P_{n-1}^{Ω}, on a $P_n = 0$.

L'application du théorème III montre que toute fonction pour laquelle un nombre entier n existe, tel que $P_n = 0$, est représentable. On reconnaîtra d'ailleurs facilement qu'il existe des fonctions pour lesquelles P_n comprend effectivement des points.

Je conviendrai d'appeler fonctions représentables d'ordre n, celles pour lesquelles P_{n-1} existe, tandis que P_n est nul. Par exemple, les fonctions dont nous nous sommes occupés en premier lieu, celles pour lesquelles P est réductible, ou bien pour lesquelles P^{Ω} existe, la fonction étant continue sur cet ensemble, seront des fonctions d'ordre 1.

44. Imaginons maintenant que la formation des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ puisse se prolonger indéfiniment, sans qu'on rencontre jamais d'ensemble nul. On est conduit à introduire une notion analogue à celle que M. Cantor a introduite dans la considération des ensembles dérivés, sous le nom d'ensemble dérivé d'ordre ω.

Nous avons une suite d'ensembles fermés, tels que:

$$P_1 > P_2 > \cdots > P_n > \cdots$$

j'exprime, par cette suite d'inégalités, que chaque ensemble est tout entier contenu dans le précédent. Je dis qu'il existe au moins un point appartenant à tous les P_n; en effet, si on décompose le segment donné en plusieurs portions, il y a au moins un de ces segments partiels dans lequel P_n renferme des points, quel que soit n; prenons l'un d'eux, décomposons-le à son tour, et répétons cette opération indéfiniment en faisant tendre vers 0 la dimension du segment, nous avons ainsi une suite de segments dont chacun est contenu dans le précédent et contient des points de P_n, quel que soit n; il y a un point intérieur à tous ces segments, il est donc point limite de P_n, et par suite fait partie de P_n, quel que soit n.

Pour conserver les analogies avec la théorie des ensembles dérivés, nous appellerons P_ω l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles P_n; P_ω est un ensemble fermé.

On peut former une fonction pour lequelle P_ω se composera d'un point A donné d'avance; je prendrai une suite de points A_1, $A_2, \ldots A_n, \ldots$ tendant vers A, et dans le segment $A_n A_{n+1}$ je placerai une fonction d'ordre n. Dans ces conditions, il existe, quel que soit n, un ensemble P_n, qui comprend toujours le point A. Cette fonction sera évidemment représentable.

45. On définira de même l'ensemble $P_{\omega+1}$, déduit de P_ω comme P_1 de P, puis les ensembles $P_{\omega+2}, \ldots P_{\omega+n}, \ldots P_{2\omega}, \ldots P_\alpha, \ldots$ D'une manière générale, soit α un nombre de la première ou de la deuxième classe de nombres. Si α est de première espèce, c'est-à-dire si $\alpha - 1$ existe, P_α sera l'ensemble des *points de discontinuité de* $P^{\Omega}_{\alpha-1}$ *par rapport à* $P^{\Omega}_{\alpha-1}$ (complété par ses points limites); dans le cas où $P^{\Omega}_{\alpha-1}$ n'existe pas, ou dans le cas où la fonction est continue sur cet ensemble, nous dirons que P_α est nul. Si α est de seconde espèce, P_α est par définition l'ensemble de tous les points communs à tous les ensembles $P_{\alpha'}$, α' représentant un nombre quelconque inférieur à α; si l'on a $P_\alpha = 0$, il existe certainement un nombre α' inférieur à α, et de première espèce, pour lequel on a $P_{\alpha'} = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante: *S'il est démontré qu'une fonction pour laquelle $P_{\alpha-1}$ est nul est représentable, la chose est encore vraie d'une fonction pour laquelle P_α est nul.* En effet, puisque P_α est nul, c'est que, ou bien $P_{\alpha-1}$ est réductible, ou bien $P^{\Omega}_{\alpha-1}$ existe, mais la fonction est continue sur cet ensemble; de plus, si on considère un intervalle contigu à $P_{\alpha-1}$, comme il n'y a aucun point de $P_{\alpha-1}$ à l'intérieur de cet intervalle, la fonction, d'après l'hypothèse, est représentable dans tout segment contenu à l'intérieur de cet intervalle, et par suite dans cet intervalle lui-même; on peut donc appliquer le théorème III, ce qui montre que la fonction est représentable encore dans le cas où P_α est nul.

On conclut de là que, en formant pour une fonction $\varphi(x)$ la suite d'ensembles :

$$P, P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots, P_\omega, \ldots P_{2\omega}, \ldots P_\alpha, \ldots$$

si, pour un certain nombre α de la première ou de la deuxième classe, on a $P_\alpha = 0$, on peut affirmer que la fonction est représentable.

46. Nous avons, dans ce qui précède, obtenu une première catégorie de résultats dans la voie que nous nous étions tracée, en ce sens que nous avons démontré, pour certaines fonctions, la possibilité d'être représentées dans les conditions des problèmes I et II. Notre but, est, je le rappelle, de démontrer que toute fonction qui est *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait*, est représentable. Avant d'aborder le cas général, je commencerai par traiter complètement un cas particulier; on pourra se rendre compte d'une manière nette sur ce cas particulier de la méthode que j'emploierai et qui est fondée sur la considération des ensembles à indices inférieurs, définis précédemment.

Ce cas particulier est le suivant : on considère une fonction $\varphi(x)$ qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1. Il s'agit de savoir quelles sont les fonctions de cette nature qui sont représentables, de sorte que la question pourrait se poser dans les termes suivants : Décomposer le continu en deux ensembles, de telle sorte qu'en attribuant à une fonction la valeur 0 aux points de l'un, la valeur 1 aux points de l'autre, cette fonction soit représentable.

D'après la nature même de la fonction $\varphi(x)$, l'oscillation en chaque point (par rapport au continu, ou par rapport à un ensemble parfait quelconque), ne peut être que l'un des deux nombres 0 ou 1; si, dans un intervalle continu, la fonction est continue, elle est nécessairement constante dans cet intervalle.

Une première condition que doit remplir $\varphi(x)$ est d'être ponctuellement discontinue; dans le cas général, cela veut dire que l'ensemble des points où l'oscillation est $\geqq \sigma$ est *non dense*, σ étant un nombre *positif* quelconque; dans le cas actuel, cela veut dire que l'ensemble de *tous les points de discontinuité* est non dense. On reconnaît, par exemple, qu'une fonction égale à 0 pour x rationnel, à 1 pour x irrationnel, n'est pas représentable, car en tout point l'oscillation est égale à 1: la fonction est totalement discontinue.

Supposons donc que $\varphi(x)$ remplisse cette première condition, et soit P l'ensemble des points de discontinuité. Formons, s'il y a lieu, P^{Ω}, et soit P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} qui sont *points de discontinuité par rapport à* P^{Ω}. L'ensemble P_1, comme P, est essentiellement fermé, car en chacun de ses points l'oscillation par rapport à P^{Ω} est égale à 1. Si, dans un certain intervalle, P_1 est *dense par rapport à* P^{Ω} (par suite coïncide avec P^{Ω}), la fonction n'est pas représentable, car alors elle est *totalement discontinue relativement à* P^{Ω}, puisque, dans l'intervalle considéré, en chaque point de P^{Ω} l'*oscillation par rapport à* P^{Ω} est 1. Construisons un exemple où cela a lieu: pour cela, prenons un ensemble parfait non dense P; les points de P sont de trois sortes: 1.° les points A, extrémités gauches des intervalles contigus à P; 2.° les points B, extrémités droites des mêmes intervalles; 3.° les points C, points extérieurs à tous ces intervalles; chaque point de l'ensemble, qu'il soit A, B, ou C, est point limite de points des trois catégories; nous attribuons à $\varphi(x)$ la valeur 0 en tout point, sauf aux points A où nous lui attribuons la valeur 1; dans ces conditions, la fonction est discontinue en tous les points de P, et de plus, si on considère cet ensemble, chaque point de P est point de discontinuité par rapport à P, l'oscillation étant 1; la fonction est donc *totalement discontinue sur* P.

On voit donc que, pour que $\varphi(x)$ soit représentable, il est nécessaire que P_1 soit *non dense par rapport à* P^{Ω}. D'une manière générale, appelons, comme plus haut, $P_{\alpha+1}$ l'ensemble des points de discontinuité de P_{α}^{Ω} par rapport à P_{α}^{Ω}; nous reconnaissons que si la fonction est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, $P_{\alpha+1}$ est *non dense par rapport à* P_{α}^{Ω}. Bien entendu, si α est un nombre de seconde espèce, P_{α} se compose des points qui appartiennent à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ dont l'indice est inférieur à α, de sorte qu'on peut écrire:

$$P_{\alpha} = \underset{\alpha' < \alpha}{D}\,[\ldots, P_{\alpha'}, \ldots].$$

47. Je vais démontrer que, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ (égale à 0 ou 1) qu'on considère, il existe un nombre α de la première ou de la deuxième classe de nombres pour lequel on a $P_{\alpha} = P_{\alpha+1}$. Les raisonnements que je ferai sont imités de ceux que M. Bendixson a employés pour démontrer ses théorèmes relatifs aux ensembles dérivés d'ordre quelconque (*Acta*, Tome II).

D'une manière générale, supposons qu'on ait des ensembles correspondants aux différents nombres de la première et de la deuxième classe,

$$P_1,\ P_2, \dots\ P_n, \dots\ P_\omega, \dots\ P_{2\omega}, \dots\ P_\alpha, \dots$$

satisfaisants aux conditions suivantes:

1.° Chacun de ces ensembles est fermé.

2.° Si $\alpha_1 < \alpha_2$, tous les points de P_{α_2} appartiennent à P_{α_1}.

3.° Si un ensemble ne comprend qu'un nombre fini de points, l'ensemble suivant est nul.

Ces conditions, qui se trouvent évidemment remplies par les ensembles dérivés d'un ensemble donné, suffisent pour qu'on puisse appliquer les raisonnements de M. Bendixson, que je reprends ici, avec quelques modifications de détail.

Il est d'abord évident que deux cas seulement peuvent se présenter: ou bien il existe un nombre α tel que $P_\alpha = 0$, et alors, tous les ensembles qui suivent sont également nuls; ou bien, quel que soit α pris dans la deuxième classe de nombres, P_α contient des points. Dans le premier cas, on a évidemment $P_\alpha = P_{\alpha+1}$; il suffit donc d'examiner le second cas.

Nous supposons donc que, dans le segment AB, l'ensemble P_α renferme des points, quel que soit α; on en conclut aisément, par un procédé que j'ai déjà eu l'occasion d'employer, qu'il existe dans AB au moins un point M possédant la propriété suivante: dans tout intervalle contenant M à son intérieur, si petit qu'il soit, l'ensemble P_α renferme des points, quel que soit α; ce point M fait donc partie de tous les P_α, puisque ce sont des ensembles fermés. Nous avons ainsi démontré qu'il existe des points appartenant à tous les P_α; il est naturel de désigner l'ensemble de ces points par P_Ω; nous savons déjà que P_Ω comprend un point au moins.

Je vais démontrer que P_Ω ne contient pas de points isolés. Remarquons d'abord que si un intervalle ne contient pas de points de P_Ω (en comptant les points extrêmes), il existe un nombre α tel que $P_\alpha = 0$ dans l'intervalle; en effet, si cela n'avait lieu pour aucune valeur de α, d'après ce que nous venons de voir, P_Ω contiendrait au moins un point dans l'intervalle. Supposons pour un instant que A soit un point isolé de P_Ω; soit BC un intervalle contenant A *à son intérieur* et ne contenant pas d'autre point de P_Ω; dans BC, prenons, à droite de A, une suite de points $A_1, A_2, \dots\ A_n, \dots$ tendant vers A; dans chacun des segments $A_n A_{n+1}$, comme il n'y a aucun point de P_Ω, il existe un nombre α_n tel que P_{α_n} est nul dans ce segment.

On peut de même déterminer à gauche de A une suite de segments $A'_1 A'_2, \ldots, A'_n A'_{n+1}, \ldots$ tendant vers A; il y a, pour chacun d'eux, un nombre α'_n tel que $P_{\alpha'_n}$ est nul dans $A'_n A'_{n+1}$. Servons-nous maintenant du théorème de M. Cantor: *Une suite dénombrable de nombres appartenant à l'une des classes 1 ou 2 a une limite supérieure, qui est un nombre appartenant à l'une de ces mêmes classes* (*). On voit alors que les nombres α_n et α'_n ont une limite supérieure α; dans l'intervalle $B\,C$, l'ensemble P_α ne peut pas contenir d'autre point que A; par suite, $P_{\alpha+1}$ est nul, le point A ne peut donc pas faire partie de P_Ω. La démonstration fait voir en outre que, si $B\,C$ est un intervalle ne contenant *à son intérieur* aucun point de P_Ω, *les points extrêmes pouvant faire partie de* P_Ω, il existe un α tel que $P_\alpha = 0$ dans l'*intérieur* de l'intervalle.

Il résulte de là que P_Ω, qui ne peut pas contenir de points *isolés*, est un ensemble *dense en lui-même*; il est d'ailleurs *fermé*, car si un point est limite d'une suite de points dont chacun appartient à tous les P_α, il a lui-même cette propriété. En résumé, l'ensemble P_Ω est *parfait*. Considérons alors un intervalle *contigu* à P_Ω (dont aucun point intérieur n'appartient à P_Ω, les points extrêmes seuls en faisant partie). Dans cet intervalle, il existe un nombre β tel que P_β ne contient aucun point *intérieur* à l'intervalle. Il y a une infinité *dénombrable* d'intervalles analogues, et les points *intérieurs* à ces intervalles forment l'ensemble complémentaire de P_Ω; les différents nombres β qui correspondent à tous ces intervalles ont une limite supérieure α, qui est un nombre de la première ou de la deuxième classe, et l'on voit que l'ensemble P_α ne peut pas contenir d'autres points que ceux de P_Ω; il les contient d'ailleurs tous, de sorte qu'on a:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \cdots\cdots = P_\Omega\,,$$

et cet ensemble est essentiellement parfait.

48. Revenons maintenant à la fonction $\varphi(x)$, qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1; imaginons qu'on forme les ensembles P, P_1, $P_2, \ldots\ P_\alpha, \ldots$ que nous avons définis. Il ne peut se présenter que deux cas:

Ou bien il existe un ensemble P_α qui est nul. Dans ce cas, la fonction est représentable, d'après la conclusion qui termine le § 45.

Ou bien il n'existe pas d'ensemble de cette nature. Alors il existe un nombre α tel qu'on a:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1}\,,$$

(*) *Acta*, Tome II, page 388.

d'où je déduis, comme on a toujours: $P_\alpha \geqq P_\alpha^\Omega \geqq P_{\alpha+1}$:

$$P_{\alpha+1} = P_\alpha^\Omega,$$

ce qui exprime que tous les points de l'ensemble parfait P_α^Ω sont points de discontinuité par rapport à cet ensemble, l'oscillation étant égale à 1; autrement dit, la fonction est *totalement discontinue par rapport à l'ensemble parfait* P_α^Ω. Elle n'est donc pas représentable.

On peut exprimer le résultat d'une manière différente; convenons d'appeler, dans tous les cas, P_Ω l'ensemble des points qui appartiennent à tous les P_α. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $\varphi(x)$ *soit représentable est que:*

$$P_\Omega = 0.$$

Le problème que nous nous sommes proposé est ainsi complètement résolu dans le cas particulier que nous venons d'examiner.

49. Pour passer à l'étude du cas général, j'aurai besoin de quelques théorèmes auxiliaires sur les fonctions discontinues d'une variable.

Soit une fonction $\varphi(x)$ définie sur le segment AB, les extrêmes compris; supposons que le maximum de l'oscillation de $f(x)$ en chaque point, dans cet intervalle, soit λ, et prenons $\lambda' > \lambda$. Je dis qu'on peut poser:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$g(x)$ étant une fonction continue, et $\psi(x)$ une fonction dont la valeur en chaque point est comprise entre 0 et λ'.

D'après ce que nous avons vu au § 13, puisque l'oscillation en chaque point est inférieure à λ', on peut trouver un nombre ρ tel que, dans toute portion du segment dont la longueur ne surpasse pas ρ, l'oscillation relative à cette portion soit $\leqq \lambda'$. Partageons le segment en portions dont chacune ait une longueur inférieure à $\frac{\rho}{2}$; soit $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \ldots$ la suite de points de division ainsi obtenue, à partir de l'extrémité A, que je désigne par A_1.

Considérons d'abord les segments suivants: $A_1 A_3$, $A_3 A_5$, $A_5 A_7, \ldots$ La longueur de chacun de ces segments étant inférieure à ρ, on peut certainement, dans chacun d'eux, déterminer un nombre m tel que la fonction soit, dans toute l'étendue du segment partiel considéré, comprise entre m et $m + \lambda'$; on peut par exemple prendre pour m le minimum de la fonction dans l'intervalle; (mais il n'est pas toujours indispensable de choisir m de cette manière). Soient $m_1, m_3, m_5, \ldots$ les quantités ainsi choisies, relatives aux segments $A_1 A_3$, $A_3 A_5$, $A_5 A_7, \ldots$ Je représenterai géométriquement les choses en traçant dans le plan xy (fig. 12) les segments $B_1 B_3$, $B'_1 B'_3$, d'ordonnées m_1 et $m_1 + \lambda'$ et correspondant à $A_1 A_3$, les segments $C_3 C_5$, $C'_3 C'_5$, d'ordonnées m_3 et $m_3 + \lambda'$, correspondant à $A_3 A_5$, etc....

Je prends maintenant les segments $A_2 A_4$, $A_4 A_6$,... dont chacun empiète sur deux des précédents. Considérons, par exemple, $A_2 A_4$; si nous supposons, pour fixer les idées, $m_1 < m_3$, comme dans le cas de la figure, on peut trouver m_2 compris entre m_1 et m_3, et tel que, dans $A_2 A_4$, la fonction

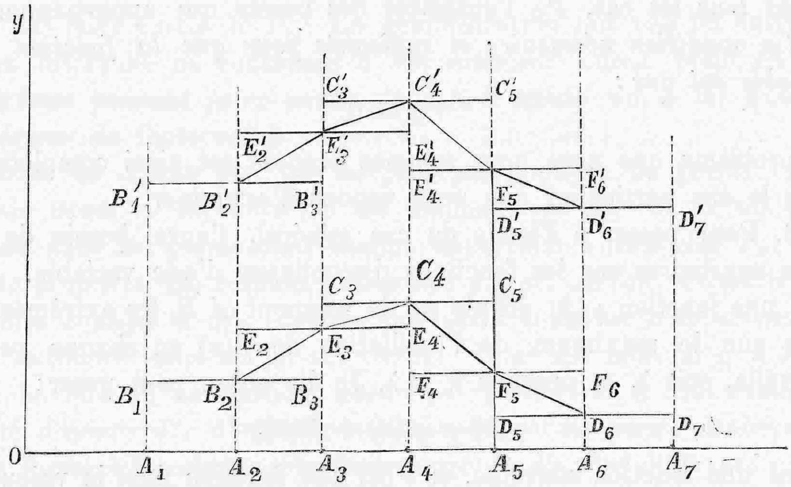

Fig. 12.

soit comprise entre m_2 et $m_2 + \lambda'$. Soient $E_2 E_4$, $E'_2 E'_4$ les segments correspondant à $A_2 A_4$, d'ordonnées m_2 et $m_2 + \lambda'$.

Traçons maintenant les lignes brisées parallèles: $B_2 E_3 C_4$, $B'_2 E'_3 C'_4$; je désignerai par $g(x)$ la fonction continue qui est représentée par la ligne $B_1 B_2 E_3 C_4$, et qui est ainsi définie jusqu'à prèsent de A_1 à A_4; la ligne brisée $B'_1 B'_2 E'_3 C'_4$ représente évidemment la fonction $g(x) + \lambda'$. Dans le segment $A_2 A_3$, la fonction donnée est comprise, d'une part entre m_1 et $m_1 + \lambda'$, d'autre part entre m_2 et $m_2 + \lambda'$, par suite entre m_2 et $m_1 + \lambda'$, représentés par les segments $E_2 E_3$, $B'_2 B'_3$; elle est donc *a fortiori* comprise entre les fonctions représentées par $B_2 E_3$ et $B'_2 E'_3$, c'est-à-dire entre $g(x)$ et $g(x) + \lambda'$. On voit de même que, dans le segment $A_3 A_4$, elle est comprise aussi entre $g(x)$ et $g(x) + \lambda'$, qui sont représentés par $E_3 C_4$, $E'_3 C'_4$.

Pour prolonger la fonction $g(x)$ au délà de A_4, on prendra le segment $A_4 A_6$, qui empiète sur $A_3 A_5$ et sur $A_5 A_7$, on opérera sur lui comme on vient d'opérer sur $A_2 A_4$; la fonction $g(x)$ sera, dans ce segment, représentée par une ligne brisée telle que $C_4 F_5 D_6$; on continuera l'application de la méthode jusqu'à ce que $g(x)$ se trouve définie dans tout l'intervalle donné; nous aurons alors, en tout point:

$$g(x) \leqq \varphi(x) \leqq g(x) + \lambda',$$

ce qui démontre qu'on peut poser:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

avec la condition:

$$0 \leqq \psi(x) \leqq \lambda'.$$

50. Dans le cas que je viens d'examiner, j'ai supposé la fonction définie sur tout un segment, les extrêmes compris. J'ai maintenant besoin d'examiner le cas où l'on considère la fonction seulement pour les points *intérieurs* au segment. On voit tout de suite qu'il y a une différence essentielle avec le cas qui précède: si l'on sait que, en chaque point *intérieur* à AB, l'oscillation est inférieure à λ', on ne peut pas en déduire la possibilité de la division en un nombre fini de segments partiels, dans chacun desquels l'oscillation serait inférieure à λ'; citons, par exemple, la fonction $\sin \frac{1}{x}$ définie pour $x > 0$; en chaque point où $x > 0$ la fonction est continue, mais, dans un intervalle comprenant le point $x = 0$, la continuité n'est pas uniforme.

Voici comment il convient de modifier la méthode précédente, dans le cas où le point A, par exemple, est exclu. Si on remplaçait le point A par un point A' voisin, si petit que soit AA', les raisonnements que nous avons faits s'appliqueraient au segment $A'B$. Il résulte de là qu'on peut déterminer une suite infinie de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ tendant vers A, et tels que dans tout segment $A_n A_{n+2}$ l'oscillation de la fonction soit inférieure à λ'. En imaginant que la méthode indiquée dans le numéro précédent soit appliquée à $A_2 A_4, A_4 A_6, \ldots$ indéfiniment, on définira ainsi une fonction $g(x)$, en tous les points *intérieurs* au segment considéré, qui sera continue en chacun de ces points, et l'on aura:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant compris entre 0 et λ' (en chaque point intérieur).

51. Ces résultats suffiraient pour les applications que je me propose de faire; mais il n'est pas sans intérêt de montrer qu'on peut aller plus loin, et s'arranger de manière que, dans la décomposition de φ en $g + \psi$, la fonction ψ soit toujours comprise entre 0 et λ.

Soit donc $\varphi(x)$ la fonction donnée, définie, soit sur tout le segment AB comme au § 49, soit seulement aux points *intérieurs,* comme au § 50; les raisonnements seront les mêmes dans les deux cas; si λ est le maximum de l'oscillation en chaque point, je prends $\lambda' = \lambda + \sigma$; d'après ce que nous venons de voir, on peut poser:

$$\varphi(x) = g_0(x) + \psi_0(x).$$

$g_0(x)$ est continue en tout point où $\varphi(x)$ est définie, et l'on a:

$$0 \leqq \psi_0(x) \leqq \lambda + \sigma.$$

Je vais maintenant appliquer de nouveau la méthode, en mettant la fonction $\psi_0(x)$ à la place de $f(x)$, et en remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}\cdot$ Faisons ici une remarque: la fonction ψ_0, qui ne diffère de $\varphi(x)$ que par une fonction continue, a, en tout point, son oscillation $\leqq \lambda$; de plus, elle ne dépasse en aucun point la valeur $\lambda + \sigma$. Je peux donc, en appliquant à $\psi_0(x)$ la méthode précédente, m'astreindre à prendre tous les nombres m_1, m_2, m_3, etc...., positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à $\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{2}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{\sigma}{2}\cdot$ J'arriverai ainsi à mettre $\psi(x)$ sous la forme:

$$\psi_0(x) = g_1(x) + \psi_1(x),$$

$g_1(x)$ étant une fonction continue, et $\psi_1(x)$ étant compris entre 0 et $\lambda + \frac{\sigma}{2}\cdot$ On voit en outre que $g_1(x)$, qui reste toujours compris entre les valeurs extrêmes des quantités m_1, m_2, m_3,..., est compris entre 0 et $\frac{\sigma}{2}\cdot$

J'appliquerai ensuite la méthode à $\psi_1(x)$ en remplaçant $\frac{\sigma}{2}$ par $\frac{\sigma}{4}$, et j'aurai:

$$\psi_1(x) = g_2(x) + \psi_2(x),$$

$g_2(x)$ étant continue; de plus on a:

$$0 \leqq g_2(x) \leqq \frac{\sigma}{4},$$

$$0 \leqq \psi_2(x) \leqq \lambda + \frac{\sigma}{4}\cdot$$

On voit qu'au bout de n opérations analogues, on a l'identité:

$$\varphi(x) - [g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)] = \psi_n(x). \qquad (1)$$

Imaginons qu'on répète l'opération indéfiniment; la série de fonctions continues :

$$g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x) + \cdots$$

est uniformément convergente, puisque les termes, à partir du second, sont positifs et respectivement inférieurs à ceux de la série :

$$\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{4}, \cdots \frac{\sigma}{2^n}, \cdots$$

cette série représente donc une fonction continue $g(x)$.

Posons :

$$\varphi(x) - g(x) = \psi(x).$$

Il est facile de déduire de l'égalité (1) que, pour chaque valeur de x, on a, quel que soit n :

$$0 \leqq \psi(x) \leqq \psi_n(x).$$

Par suite, $\psi(x)$ est une fonction déterminée de x qui est comprise entre 0 et $\lambda + \frac{\sigma}{2^n}$, quel que soit n, par suite entre 0 et λ.

Il est ainsi démontré qu'on peut effectuer la décomposition :

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$g(x)$ étant continue, et $f(x)$ compris entre 0 et λ.

52. Ajoutons une remarque. Si, au lieu de supposer une fonction définie pour tous les points d'un intervalle continu (les extrêmes étant compris ou non), on suppose qu'elle n'est définie que pour les points d'un certain *ensemble parfait* (les points extrêmes pouvant être exceptés), des considérations analogues aux précédentes s'appliquent, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Si λ est le maximum de l'oscillation en un point de la fonction par rapport à l'ensemble, on peut poser :

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

g étant une fonction continue relativement à l'ensemble donné, du moins en tout point où φ est définie, et ψ étant compris entre 0 et λ.

On peut d'ailleurs ramener cette question à la précédente; soit φ la fonction, donnée seulement aux points de l'ensemble parfait P; je compléterai la définition de φ aux points du continu qui ne font pas partie de P de la manière suivante : sur tout intervalle *contigu* à P, tel que $A_n B_n$, je fais varier linéairement φ depuis $\varphi(A_n)$ jusqu'à $\varphi(B_n)$. Il est facile de vérifier que pour la fonction ainsi définie, l'oscillation en chaque point (par rapport au continu) est $\leqq \lambda$; on en déduit immédiatement le théorème.

Enfin, pour terminer cette étude, je ferai remarquer que les raisonnements que nous avons faits s'appliquent encore si $\varphi(x)$ est une fonction *multiforme;* nous donnerons alors à l'expression: *oscillation en un point* le sens défini au § 14; on pourra écrire:

$$\varphi(x) = g(x) + \psi(x),$$

$g(x)$ étant une fonction continue, et $\psi(x)$ une fonction *multiforme* comprise entre 0 et λ.

53. Abordons maintenant la question qui fait l'objet essentiel de ce chapitre: *Si une fonction est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, elle est représentable.*

Je commencerai par démontrer le théorème suivant: *Si une fonction* $\varphi(x)$ *est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, et si* σ *est un nombre positif quelconque, on peut poser:*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x),$$

$\varphi_0(x)$ *étant une fonction dont nous pourrons affirmer qu'elle est représentable, d'après les théorèmes donnés dans la première partie de cette étude, et* $\psi(x)$ *étant compris entre 0 et* σ.

Soit P l'ensemble des points où l'oscillation de $\varphi(x)$ est $\geqq \sigma$; formons P^{Ω}; soit P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} où l'oscillation par rapport à P^{Ω} est $\geqq \sigma$. D'une manière générale, soit $P_{\alpha+1}$ l'ensemble des points de P_{α}^{Ω} où *l'oscillation par rapport à* P_{α}^{Ω} est $\geqq \sigma$; si *maintenant* α est un nombre de seconde espèce, P_{α} sera par définition l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles $P_{\alpha'}$, dont l'ordre α' est $< \alpha$.

Puisque, par hypothèse, $\varphi(x)$ est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, il en résulte que, quel que soit α, l'ensemble $P_{\alpha+1}$ (qui est d'ailleurs fermé) est *non dense par rapport à* P_{α}^{Ω}; *a fortiori* cet ensemble ne peut pas coïncider avec P_{α}, à moins que P_{α} ne soit nul. Il existe donc, d'après le § 47, un nombre β de la première ou de la deuxième classe, tel que $P_{\beta} = 0$.

Cela posé, pour définir φ_0 et ψ de manière à satisfaire aux conditions imposées, je procéderai de la manière suivante.

Considérons d'abord l'ensemble P. Dans tout intervalle *contigu* à P, l'oscillation en chaque point *intérieur* est un nombre $< \sigma$. D'après le théorème du

§ 51, on peut, dans chacun de ces intervalles, effectuer la décomposition:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x).$$

φ_0 et ψ seront ainsi définis en tous les points du continu, que je représente par E, sauf en ceux de P, autrement dit aux points de $E - P$. En tout point de $E - P$, φ_0 est continue, et ψ a une valeur comprise entre 0 et σ.

Il reste à définir φ_0 et ψ aux points de P. Considérons, en supposant que P ne soit pas réductible, l'ensemble $P - P^{\Omega}$; cet ensemble est constitué par les points de P qui sont *à l'intérieur* des intervalles *contigus à l'ensemble parfait* P^{Ω}; aux points de $P - P^{\Omega}$ je pose:

$$\varphi_0(x) = \varphi(x)$$
$$\psi(x) = 0.$$

Si AB est l'un quelconque des intervalles *contigus* à P^{Ω}, P forme dans cet intervalle un ensemble *réductible;* il en résulte que φ_0, qui, dans chaque intervalle *contigu* à P, est représentable, sera représentable dans toute l'étendue de l'intervalle AB, (ou, plus exactement, dans tout intervalle compris dans AB, puisque φ_0 n'est pas encore définie aux points A et B).

La définition de φ_0 et ψ est maintenant faite partout, sauf aux points de P^{Ω}; j'ai appelé P_1 l'ensemble des points de P^{Ω} où *l'oscillation par rapport à* P^{Ω} *est* $\geqq \sigma$; P_1 est *non dense par rapport à* P^{Ω}. Soit AB un intervalle *contigu* à P_1; cet intervalle peut contenir à son intérieur des points de P^{Ω}, mais nous savons qu'en chacun de ces points, l'oscillation par rapport à P^{Ω} est $< \sigma$. Il en résulte que, dans l'intérieur de l'intervalle, nous pourrons définir φ_0 et ψ aux points de P^{Ω} qui s'y trouvent, de manière qu'on ait en tous ces points: $\varphi = \varphi_0 + \psi$, que φ_0 soit continue par rapport à P^{Ω}, et que ψ soit compris entre 0 et σ. Nous aurons, par cette opération supposée effectuée dans chacun des intervalles *contigus* à P_1, défini φ_0 et ψ dans l'ensemble $P^{\Omega} - P_1$. Il ne restera plus à les définir que sur P_1, et, dans tout intervalle *contigu* à P_1, φ_0 sera représentable.

On voit que la marche à suivre est la suivante: on effectue la décomposition de φ en $\varphi_0 + \psi$ successivement dans les ensembles:

$$E - P,\ P - P^{\Omega},\ P^{\Omega} - P_1,\ P_1 - P_1^{\Omega}, \ldots,\ P_{n-1}^{\Omega} - P_n,\ P_n - P_n^{\Omega}, \ldots$$

Si on suppose cette suite d'opérations prolongée indéfiniment, la décomposition se trouvera effectuée en tous les points de E, sauf en ceux de P_{ω}, qui est l'ensemble des points communs à tous les P_n; de plus, dans tout intervalle *contigu* à P_ω, la fonction φ_0 sera représentable. On continuera ensuite de la même manière, c'est-à-dire qu'on définira φ_0 et ψ sur $P_\omega - P_\omega^\Omega$, puis sur $P_\omega^\Omega - P_{\omega+1}$, etc....; après avoir appliqué cette méthode une infinité de fois, on aura défini φ_0 et ψ sur $E - P_{2\omega}$.

Pour justifier d'une manière complète et rigoureuse ce que je viens de dire, je suppose, d'une manière générale, que la décomposition soit effectuée sur l'ensemble $E - P_{\alpha-1}$, et que, dans chaque intervalle *contigu* à $P_{\alpha-1}$, la fonction φ_0 soit représentable. Considérons l'ensemble $P_{\alpha-1}^\Omega$; dans tout intervalle *contigu* à $P_{\alpha-1}^\Omega$, l'ensemble des points de $P_{\alpha-1}$ qui s'y trouvent est réductible; en ces points je pose:

$$\varphi_0(x) = \varphi(x)$$

$$\psi(x) = 0.$$

la fonction φ_0, qui par hypothèse est représentable dans chaque intervalle *contigu* à $P_{\alpha-1}$, est encore représentable dans tout segment *contigu* à $P_{\alpha-1}^\Omega$. Prenons maintenant P_α, qui est l'ensemble des points de $P_{\alpha-1}^\Omega$ où l'oscillation par rapport à cet ensemble est $\geqq \sigma$. Dans un intervalle *contigu* à P_α, on peut, aux points de $P_{\alpha-1}^\Omega$ qui s'y trouvent, effectuer la décomposition, de manière que φ_0 soit représentable dans tout cet intervalle.

Il est ainsi démontré que, si φ_0 et ψ sont définies sur l'ensemble $E - P_{\alpha-1}$, elles peuvent être définies sur l'ensemble $E - P_\alpha$, les conditions fondamentales étant encore observées.

Si maintenant α est un nombre de deuxième espèce, on peut toujours le considérer comme la limite supérieure d'une suite dénombrable de nombres:

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n, \ldots$$

de telle sorte que α joue par rapport à cette suite le même rôle que ω par rapport à la suite:

$$1, 2, \ldots n, \ldots$$

Imaginons qu'il soit possible de définir φ_0 et ψ sur $E - P_{\alpha'_1}$, sur $E - P_{\alpha'_2}, \ldots$ et généralement sur $E - P_{\alpha'_n}$; si on suppose cette suite d'opérations prolongée indéfiniment, la décomposition se trouvera effectuée sur tout l'ensemble $E - P_\alpha$. Dans toute portion contenue à l'intérieur d'un intervalle *contigu* à P_α, il existe un nombre n déterminé tel que $P_{\alpha'_n}$ est nul dans cette portion; φ_0 est donc représentable dans cette portion, et par suite, dans tout intervalle *contigu* à P_α.

On voit ainsi que, quel que soit α, il est possible d'effectuer la décomposition sur l'ensemble $E - P_\alpha$, de telle sorte que sur tout intervalle *contigu* à P_α la fonction φ_0 soit représentable. Or, il existe un nombre β tel que P_β est nul. Quand la décomposition se trouvera effectuée sur $E - P_\beta$, qui est identique à E, *on aura, en tous les points du segment donné :*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x), \tag{2}$$

$\varphi_0(x)$ étant représentable dans toute l'étendue du segment, et $\psi(x)$ ayant en chaque point une valeur comprise entre 0 *et* σ.

54. J'arrive maintenant à la démonstration du théorème général. En supposant $\varphi(x)$ *ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait*, et en prenant arbitrairement un nombre positif σ, nous venons d'obtenir l'égalité (2). Appliquons maintenant la même méthode à la fonction $\psi(x)$ de cette égalité, en remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}$; remarquons en outre que, comme on a : $0 \leqq \psi \leqq \sigma$, on peut, en définissant φ_1 et ψ_1 de manière que :

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x),$$

s'arranger de façon qu'en tout point on ait :

$$0 \leqq \varphi_1(x) \leqq \frac{\sigma}{2},$$

$$0 \leqq \psi_1(x) \leqq \frac{\sigma}{2}.$$

Cela résulte d'une remarque énoncée au § 51; bien entendu, $\varphi_1(x)$ est une fonction représentable.

On posera ensuite :

$$\psi_1(x) = \varphi_2(x) + \psi_2(x),$$

avec les conditions :

$$0 \leqq \varphi_2(x) \leqq \frac{\sigma}{4},$$

$$0 \leqq \psi_2(x) \leqq \frac{\sigma}{4}.$$

D'une manière générale, on aura :

$$\psi_{n-1}(x) = \varphi_n(x) + \psi_n(x),$$

avec :

$$0 \leqq \varphi_n(x) \leqq \frac{\sigma}{2^n},$$

$$0 \leqq \psi_n(x) \leqq \frac{\sigma}{2^n},$$

et $\varphi_n(x)$ étant une fonction représentable.

Quand n croît indéfiniment, la fonction $\psi_n(x)$ tend uniformément vers 0; on peut donc écrire :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots \tag{3}$$

la série étant uniformément convergente.

Chacune des fonctions qui figurent dans le second membre de l'égalité (3) est représentable dans les conditions des problèmes I et II. Considérons, pour fixer les idées, le problème I; il correspond à $\varphi_n(x)$ une fonction $f_n(x, y)$, continue en tout point par rapport à chacune des variables, et égale sur $x = y$ à $\varphi_n(x)$; cela résulte de ce que $\varphi_n(x)$ fait partie de la catégorie de fonctions que nous avons appris à construire dans les § 33 à 45; ce qui distingue ces fonctions, c'est que l'ensemble de *tous les points* de discontinuité relatifs à un ensemble parfait quelconque est non dense par rapport à cet ensemble. On reconnaît aisément que, dans tous les théorèmes qui ont été démontrés pour établir que ces fonctions sont représentables, on peut s'astreindre à ce que la fonction $f(x, y)$ que l'on définit, ait pour limites supérieure et inférieure dans toute l'aire les limites supérieure et inférieure de $\varphi(x)$.

Nous supposerons donc que la fonction $f_n(x, y)$ qui correspond à $\varphi_n(x)$ compris entre 0 et $\frac{\sigma}{2^n}$, est elle-même comprise entre 0 et $\frac{\sigma}{2^n}$. Nous pouvons alors poser :

$$f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + \cdots + f_n(x, y) + \cdots$$

le second membre est une série uniformément convergente. Il en résulte que $f(x, y)$ est une fonction parfaitement déterminée, qui possède tous les caractères de continuité des fonctions $f_n(x, y)$, et qui, pour $x = y$, se réduit à $\varphi(x)$. Il est ainsi démontré que $\varphi(x)$ est une fonction représentable dans les conditions du problème I. La démonstration est évidemment analogue pour le problème II.

En résumé, nous avons prouvé que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable, est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.*

Nous avons aussi donné un moyen de reconnaître si cette condition est remplie ou non. Etant donné un nombre positif σ, on forme la suite d'ensembles P, P_1, $P_2, \ldots$ $P_n, \ldots$ $P_\omega, \ldots$ $P_{2\omega}, \ldots$ $P_\alpha, \ldots$ correspondant à cette valeur de σ. Soit P_Ω l'ensemble des points qui appartiennent à tous les P_α.

Il faut et il suffit, pour que la fonction soit représentable, qu'on ait, quel que soit σ:

$$P_\Omega = 0.$$

Si, pour une certaine valeur de σ, *on a* $P_\Omega > 0$, *la fonction est totalement discontinue sur cet ensemble parfait, et par suite n'est pas représentable.*

IV. Propriétés générales.

55. Nous avons, dans ce qui précède, caractérisé une catégorie parfaitement déterminée de fonctions discontinues, qui, entre autres propriétés, possèdent la suivante: *Une quelconque de ces fonctions est représentable par une série qui a pour termes des fonctions continues, et qui est convergente pour chaque valeur de x.* Nous avons déjà fait observer que cet énoncé revenait au suivant: *la fonction est limite d'une suite de fonctions continues.*

Servons-nous maintenant du théorème de Weierstrass (*): si une fonction est continue, et si on se donne un nombre ε, aussi petit qu'on veut, il est possible de trouver un polynôme qui diffère de la fonction en chaque point de moins de ε.

Soit $f(x)$ une fonction discontinue limite d'une suite de fonctions continues $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ $f_n(x), \ldots$ Prenons une suite de quantités tendants vers 0: ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$ $\varepsilon_n, \ldots$ Nous pouvons, d'une manière générale, faire correspondre à la fonction $f_i(x)$ un polynôme $\varphi_i(x)$ qui en diffère de moins de ε_i. Dans ces conditions, la suite de polynômes:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots\ \varphi_n(x), \ldots$$

a pour limite $f(x)$, comme la suite des fonctions $f_i(x)$. Ainsi, une fonction qui est limite d'une suite de fonctions continues peut aussi être considérée comme limite d'une suite de polynômes, et par suite peut être développée en série de polynômes. Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

(*) Une démonstration très simple du théorème de Weierstrass a été donnée par M. Lebesgue dans une Note: *Sur l'approximation des fonctions.* (Bulletin des sciences mathématiques, novembre 1898.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série convergente de polynômes est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.

56. Indiquons quelques exemples de fonctions *représentables;* je dis que toute fonction *semi-continue* est *représentable;* nous avons vu au § 12 qu'une fonction qui possède en tout point la semi-continuité supérieure, par exemple, est ponctuellement discontinue; on démontrera par la même méthode cet énoncé plus général: *une fonction semi-continue par rapport à un ensemble parfait, est ponctuellement discontinue sur cet ensemble.* Il résulte de là que *toute fonction semi-continue* satisfait à la condition d'être ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, et par suite *peut être considérée comme limite d'une suite de fonctions continues, ou de polynômes.*

57. Donnons une autre application dans un ordre d'idées différent. Supposons qu'une fonction continue $f(x)$ ait en tout point une dérivée déterminée $f'(x)$. Cela veut dire que la quantité:

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y},$$

lorsque y tend vers 0, tend vers une limite déterminée, qui est $f'(x)$. Considérons alors la fonction $\varphi(x, y)$ définie de la manière suivante:

$$\text{pour} \quad y \gtrless 0 \quad \text{on a:} \quad \varphi(x, y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{y},$$
$$\text{pour} \quad y = 0 \quad \text{on a:} \quad \varphi(x, 0) = f'(x).$$

Cette fonction des deux variables réelles x et y est une fonction continue de l'ensemble (x, y) en tous les points du plan qui n'appartiennent pas à $0x$; de plus, en chaque point de $0x$, elle est continue par rapport à y. Donc *la fonction dérivée $f'(x)$ est une fonction représentable par une série de fonctions continues.*

On peut même remarquer que si l'on suppose seulement pour la fonction $f(x)$ l'existence en chaque point d'une *dérivée à droite* déterminée, $f_d(x)$, le raisonnement qui précède s'applique à cette fonction $f_d(x)$, qui est, par suite, une fonction représentable.

58. Je me propose maintenant d'approfondir la nature des fonctions représentables, en tirant des conséquences de la condition fondamentale qui les caractérise.

Considérons d'abord une fonction $f(x)$ que nous supposons ponctuellement discontinue. La propriété caractéristique est que, dans tout intervalle, il existe au moins un point où la fonction est continue; nous en avons déduit que l'ensemble des points où l'oscillation est $\geqq \sigma$, est un ensemble non dense. Prenons maintenant une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple :

$$\sigma, \frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2^2}, \dots \frac{\sigma}{2^n}, \dots$$

J'appelle d'une manière générale P_n l'ensemble des points où l'oscillation ω est $\geqq \frac{\sigma}{2^n}\cdot$ Si A est un point de discontinuité pour $f(x)$, il existe un entier p tel que A fait partie de l'ensemble P_n, dès que n est égal ou supérieur à p. En appelant P l'ensemble de tous les points de discontinuité, nous sommes conduits à dire que *P est limite de l'ensemble P_n*, quand n croît indéfiniment. L'ensemble P peut évidemment être d'une nature tout à fait différente de celle des ensembles P_n; en particulier, il peut être *dense dans tout un intervalle;* de plus, il n'est pas nécessairement *fermé*, car ses points limites peuvent être des points de continuité pour la fonction.

59. Mais on voit que ces remarques conduisent tout naturellement à étudier les propriétés d'un ensemble linéaire P satisfaisant à la condition suivante : Il existe une infinité dénombrable d'ensembles P_1, P_2,... P_n,... dont chacun est non dense, et tels que tout point de P fait partie de l'un au moins des ensembles P_1, P_2,... P_n,... Je dirai qu'un ensemble de cette nature est de *première catégorie.* Tout ensemble qui ne possède pas cette propriété sera dit de *deuxième catégorie.*

Je commence par démontrer la proposition suivante : Si P est un ensemble de première catégorie, il existe, dans toute portion $\alpha\beta$ du segment sur lequel il est défini, au moins un point (et par suite une infinité) n'appartenant pas à P. En effet, d'après les hypothèses, on peut déterminer dans $\alpha\beta$ un intervalle fini $\alpha_1\beta_1$ ne contenant aucun point de P_1; dans $\alpha_1\beta_1$, un intervalle $\alpha_2\beta_2$ ne contenant aucun point de P_2, etc....; dans $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$, un intervalle $\alpha_n\beta_n$ ne contenant aucun point des n premiers ensembles P_1, P_2,... P_n; il existe au moins un point M compris à l'intérieur de tous les segments $\alpha_n\beta_n$; ce point M ne fait partie d'aucun ensemble P_n et par suite ne fait pas partie de P.

Il résulte immédiatement de là que *le continu constitue un ensemble de deuxième catégorie;* nous venons en effet de démontrer qu'on ne peut pas obtenir tous les points d'un intervalle continu au moyen d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses.

L'ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est encore un ensemble de première catégorie; cela résulte de la définition même.

Le continu, dont on a retranché un ensemble de première catégorie, autrement dit, l'ensemble complémentaire d'un ensemble de première catégorie, est de seconde catégorie.

Si on a, d'une part, un ensemble $E - P$, complémentaire par rapport au continu E d'un ensemble de première catégorie, et d'autre part un ensemble Q qu'on sait être de deuxième catégorie, on peut affirmer que $E - P$ et Q ont des points communs. Si en effet cela n'était pas, c'est que tous les points de Q appartiendraient à P, et Q serait alors de première catégorie.

On voit la différence profonde qui existe entre les ensembles des deux catégories; cette différence ne réside, ni dans la dénombrabilité, ni dans la condensation dans un intervalle continu, puisqu'un ensemble de première catégorie peut avoir la puissance du continu, et peut aussi être dense dans toute l'étendue du segment qu'on considère; mais elle est en quelque sorte une combinaison des deux notions précédentes.

60. Revenons aux fonctions ponctuellement discontinues; on voit que, pour une telle fonction, l'ensemble des points de discontinuité est de première catégorie, tandis que l'ensemble des points de continuité est au contraire de deuxième catégorie.

Je déduis maintenant de l'étude précédente un théorème donné par M. Volterra en 1881 (*). Considérons un nombre fini, ou même une infinité dénombrable de fonctions ponctuellement discontinues, définies dans un même intervalle de variation de x. L'ensemble P des points où l'une au moins des fonctions est discontinue, est formé par la réunion des ensembles P_1, P_2,... P_n,..., P_n étant l'ensemble des points de discontinuité de $f_n(x)$. Donc, d'après ce que nous avons vu, P est un ensemble de première catégorie. On en déduit que, *dans tout intervalle, il y a des points où toutes les fonctions considérées sont continues.*

Tirons une conséquence de la proposition qui précède. Supposons qu'une suite de fonctions ponctuellement discontinues $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$,..., tende *uniformément* vers une limite $f(x)$, c'est-à-dire que $|f(x) - f_n(x)|$ devienne inférieur à ε, si petit que soit ε, indépendamment de x, quand n est suffi-

(*) Volterra, *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* (Giornale di Battaglini, 1881.)

samment grand. Dans ces conditions, je dis que $f(x)$ est ponctuellement discontinue; il suffit de montrer que si $A\ [x_0]$ est un point de continuité commun à tous les $f_n(x)$, c'est encore un point de continuité pour $f(x)$. En effet, ε étant donné, prenons d'abord n assez grand pour qu'on ait en tout point:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura en particulier:

$$|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puis, prenons autour de A un intervalle assez petit pour qu'on ait dans cet intervalle:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On déduit de ces inégalités:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $f(x)$ est continue au point A.

61. Je fais remarquer maintenant qu'on peut généraliser les notions indiquées au § 59, en prenant pour base un ensemble parfait, au lieu du continu.

Soit G un ensemble parfait quelconque; je ne considère dans ce qui suit que des ensembles qui ne contiennent que des points de G. Si P est formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles P_1, P_2,... P_n,..., dont chacun est non dense par rapport à G, je dirai que P est *de première catégorie par rapport à* G. On peut tirer de cette définition des conséquences en tout point analogues à celles que nous avons indiquées au § 59.

On reconnaît de même que si l'on a une infinité dénombrable de fonctions définies sur un ensemble parfait G, et si chacune d'elles est ponctuellement discontinue sur cet ensemble, il existe, au voisinage de tout point de G, des points de G où toutes les fonctions sont continues. Si elles tendent *uniformément* vers une fonction limite $f(x)$, un point de continuité commun à toutes ces fonctions sera aussi point de continuité pour $f(x)$.

Supposons à présent qu'on ait une suite de fonctions *représentables*: $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$,..., tendant *uniformément* vers une fonction limite $f(x)$. Si on considère un ensemble parfait quelconque, d'après ce que nous venons de voir, la fonction $f(x)$ sera, comme chacune des fonctions $f_n(x)$, ponctuellement discontinue sur cet ensemble parfait; il en résulte que $f(x)$ est représentable.

Nous obtenons donc ainsi un résultat qui est à rapprocher du théorème connu : *Une série uniformément convergente de fonctions continues représente une fonction continue*, et qu'on peut énoncer sous la forme suivante :

Une série uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions représentables, est une fonction représentable.

CHAPITRE III.

Fonctions discontinues développables en séries multiples de fonctions continues.

I. Définition de ces fonctions.

62. Je me propose de définir et d'étudier dans ce chapitre, certaines catégories de fonctions discontinues, dont on peut dire qu'elles se rattachent, en un certain sens, aux fonctions continues. Je prendrai pour point de départ la notion de fonction limite d'une suite de fonctions. Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, qu'il y a des fonctions discontinues d'une variable réelle qu'on peut obtenir comme limites de fonctions continues, et nous avons déterminé la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction possède cette propriété.

Je conviendrai de dire que les fonctions continues forment la classe 0, et que les fonctions discontinues limites de fonctions continues forment la classe 1. D'après cela, les fonctions de la première classe sont les fonctions discontinues qui sont représentables par des séries convergentes de fonctions continues, et par suite, comme nous l'avons montré, par des séries convergentes de polynômes.

63. Supposons maintenant qu'on ait une suite de fonctions appartenant aux classes 0 ou 1, et possédant une fonction limite n'appartenant à aucune de ces deux classes. Je dirai que cette fonction limite est une fonction de la seconde classe, et l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut obtenir de cette manière formera la classe 2. On voit d'après cela qu'une fonction de la classe 2 est développable en une série, convergente pour chaque valeur de x, et dont tous les termes sont des fonctions de classe 1; en remplaçant

chacun de ces termes par la série de polynômes qui le représente, on reconnaît qu'une fonction de classe 2 peut être représentée par une série double dont les termes sont des polynômes.

J'indique tout de suite un exemple simple de fonction de classe 2. Il suffit de considérer la fonction $\varphi(x)$ qui, dans un certain intervalle, $0 \leqq x \leqq 1$ par exemple, prend la valeur 0 quand x est rationnel et la valeur 1 quand x est irrationnel. En effet, considérons la fonction $\varphi_n(x)$ définie de la manière suivante: pour $x = \frac{p}{q}$, si $q \leqq n$ et si $\frac{p}{q}$ est irréductible, on a $\varphi_n(x) = 0$; pour toutes les autres valeurs de x, on a $\varphi_n(x) = 1$. On voit que $\varphi(x)$ est la limite de $\varphi_n(x)$ quand n croît indéfiniment; d'autre part, $\varphi_n(x)$, n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités, est de la première classe; il en résulte que $\varphi(x)$ est de classe 2. Cela nous montre qu'il existe une série double:

$$\sum_\alpha \sum_\beta P_{\alpha,\beta}(x) \qquad \begin{matrix} (\alpha = 1,\ 2, \dots\ n, \dots) \\ (\beta = 1,\ 2, \dots\ n, \dots) \end{matrix}$$

les $P_{\alpha,\beta}$ étant tous des polynômes, qui est convergente pour chaque valeur de x comprise entre 0 et 1, à condition que la sommation soit effectuée d'abord par rapport à β, puis par rapport à α, et dont la somme est 0 quand x est rationnel, 1 quand x est irrationnel.

64. De même que nous avons défini les fonctions des classes 1 et 2, nous pourrons définir les fonctions de classe $3,\ 4, \dots\ n, \dots$

Une fonction sera dite de classe n, si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant aux classes $0,\ 1,\ 2, \dots, n-1$, et si elle n'appartient pas elle-même à l'une de ces classes. Une telle fonction, s'il en existe, pourra se représenter par une série d'ordre n, dont les termes seront des polynômes:

$$\sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_n} P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n}(x).$$

On peut aller plus loin, en suivant une marche analogue à celle par laquelle M. Cantor arrive à définir les ensembles dérivés d'ordre α d'un ensemble donné, α étant un nombre transfini. Supposons qu'on ait une suite de fonctions dont chacune appartienne à l'une des classes $0,\ 1,\ 2, \dots\ n, \dots$, et qu'il existe une fonction limite ne faisant partie d'aucune de ces classes; nous conviendrons de dire que cette fonction limite appartient à la classe ω. Nous concevons de même l'existence possible de fonctions qu'on sera conduit à considérer comme faisant partie des classes $\omega + 1,\ \omega + 2, \dots,\ 2\,\omega, \dots$

Pour donner une définition générale, supposons qu'on ait défini les classes de fonctions marquées par tous les nombres α' inférieurs à un nombre α. Si une suite de fonctions dont chacune appartient à une classe marquée par un nombre α' a une limite, et si cette fonction limite n'appartient à aucune de ces classes, nous dirons qu'elle appartient à la classe α.

65. Il est naturel de chercher à voir jusqu'où peut s'étendre cette formation, ou tout au moins cette conception logique de fonctions discontinues de plus en plus compliquées, mais pourtant se rattachant toujours d'une manière très précise aux fonctions continues. Nous allons tout de suite montrer que le procédé précédent s'applique seulement pour les nombres transfinis de la première et de la deuxième classe; cela résultera du théorème suivant:

Considérons l'ensemble E des fonctions appartenant aux classes marquées par un nombre de la première ou de la deuxième classe de nombres. Si une suite de fonctions appartenant à l'ensemble E a une limite, cette fonction limite appartient aussi à l'ensemble E.

La démonstration de ce théorème résulte très simplement du théorème de M. Cantor dont j'ai déjà eu l'occasion de me servir: Une suite dénombrable de nombres de la première ou de la deuxième classe a une limite supérieure, qui est un nombre appartenant à l'une de ces mêmes classes.

Soit: $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$,... la suite de fonctions; soient:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$$

les nombres qui marquent les classes auxquelles elles appartiennent; d'après le théorème de M. Cantor, il existe un nombre β, de la première ou de la deuxième classe, tel qu'on a, pour toute valeur de n:

$$\alpha_n < \beta.$$

Donc, d'après la définition des fonctions de classe β, la fonction $f(x)$, limite de $f_n(x)$, appartient certainement, soit à la classe β, soit à une classe inférieure; c'est donc une fonction faisant partie de l'ensemble E.

Nous sommes ainsi parvenus à la définition logique d'un ensemble E de fonctions *qui contient toutes ses fonctions limites*, propriété que l'ensemble des fonctions continues, par exemple, ne possède pas. Ajoutons que chacune des fonctions qui font partie de l'ensemble E peut être définie par une infinité dénombrable de conditions (*); en effet, une fonction de première classe, par

(*) Voir à ce sujet: Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions*, Notes I et III.

exemple, est définie si on connaît la suite dénombrable de fonctions continues qui l'admet pour limite, et chacune de ces fonctions continues est définie au moyen d'une infinité dénombrable de conditions. Le théorème s'étend facilement, par voie de récurrence, à toutes les fonctions de E. Il résulte également de là que l'ensemble E a la puissance du continu; on sait d'autre part que l'ensemble de toutes les fonctions discontinues a une puissance supérieure; on voit donc que l'ensemble de fonctions E, tout en étant beaucoup plus étendu que l'ensemble des fonctions continues, ne forme qu'une catégorie très particulière par rapport à l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut concevoir.

Il serait intéressant d'arriver à démontrer l'existence effective de fonctions appartenant aux différentes classes que nous avons définies logiquement, et de caractériser chacune de ces classes, comme nous sommes parvenus, dans le chapitre précédent, à caractériser les fonctions de classe 1. Les difficultés deviennent très grandes dès qu'on aborde l'étude des fonctions de classe 2; je vais exposer les résultats obtenus en ce qui concerne les fonctions de cette classe.

II. Fonctions de la deuxième classe.

66. Il me sera utile, pour étudier les fonctions de deuxième classe, d'énoncer quelques remarques au sujet des fonctions de première classe; ces remarques résultent immédiatement des théorèmes généraux qui nous ont permis, dans le chapitre précédent, de caractériser complètement ces fonctions.

Supposons que le segment $A\,B$ puisse être divisé en un nombre fini de segments sur chacun desquels la fonction soit de première classe; elle est alors de première classe sur $A\,B$.

Si l'on sait que, sur tout segment $A'\,B'$ intérieur à $A\,B$, si voisins que soient A' et B' de A et B, la fonction est de première classe, elle l'est encore sur $A\,B$.

Il est bien évident que ces énoncés subsistent, si l'on y remplace l'expression: fonction de première classe, par celle-ci: fonction de deuxième classe.

Si une fonction est de première classe, on peut changer ses valeurs en un nombre fini de points d'une manière arbitraire, sans qu'elle cesse d'être de première classe; on peut de même modifier d'une manière absolument quelconque les valeurs de la fonction aux points d'un ensemble *réductible.*

67. Indiquons maintenant un moyen d'obtenir une catégorie étendue de fonctions de deuxième classe.

Partons d'une fonction de première classe, et remplaçons par des valeurs arbitraires les valeurs de cette fonction aux points d'un certain ensemble E dénombrable: je dis que la fonction ainsi obtenue est de deuxième classe au plus.

Soit en effet $f(x)$ la fonction primitive, $\varphi(x)$ la fonction modifiée; nous supposons que $\varphi(x)$ ne diffère de $f(x)$ qu'aux points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ Définissons une suite de fonctions de la manière suivante:

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{sauf en} \quad A_1 \qquad \text{où} \quad f_1(x) = \varphi(x)$$
$$f_2(x) = f(x) \quad \text{sauf en} \quad A_1, A_2 \qquad \text{où} \quad f_2(x) = \varphi(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x) = f(x) \quad \text{sauf en} \quad A_1, A_2, \ldots, A_n \quad \text{où} \quad f_n(x) = \varphi(x).$$

Chaque fonction $f_n(x)$ ne différant de $f(x)$ qu'en un nombre fini de points, est de première classe, comme $f(x)$. D'ailleurs il est évident que $f_n(x)$ a pour limite $\varphi(x)$; donc $\varphi(x)$ est de la deuxième classe.

Je vais m'occuper en premier lieu de cette catégorie particulière de fonctions, et je vais poser de nouvelles définitions qui me permettront de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ne diffère d'une fonction de première classe qu'en un ensemble dénombrable de points.

68. Considérons une fonction quelconque; soit $\alpha\beta$ une portion de l'intervalle dans lequel cette fonction est définie; je désignerai par $M_0(\alpha\beta)$ et $m_0(\alpha\beta)$ les limites supérieure et inférieure de la fonction dans $\alpha\beta$.

Soit λ un nombre quelconque inférieur à M_0; il existe dans $\alpha\beta$ un ensemble bien déterminé de points où l'on a: $f(x) \geqq \lambda$, cet ensemble contenant au moins un point; il peut se présenter deux cas: ou bien cet ensemble est dénombrable (ou fini), et alors la même chose a lieu pour tous les nombres compris entre λ et M_0; ou bien au contraire cet ensemble est non dénombrable, et la chose est vraie pour tous les nombres inférieurs à λ.

Cela suffit pour qu'on soit assuré de l'existence d'un nombre que je désignerai par $M_1(\alpha\beta)$, qui sépare les nombres en deux catégories de telle manière que:

si $\lambda > M_1$, l'ensemble des points où l'on a $f(x) \geqq \lambda$ (ou $f(x) > \lambda$) cet dénombrable;

si $\lambda < M_1$, l'ensemble des points où $f(x) \geqq \lambda$ (ou $f(x) > \lambda$) n'est pas dénombrable.

Il y a d'ailleurs doute pour $\lambda = M_1$. On peut dire que $M_1(\alpha\beta)$ est la *limite supérieure des nombres λ tels que les points où $f(x) \geqq \lambda$ forment un* *ensemble non dénombrable,* et la *limite inférieure des nombres* λ *tels que ces points forment un ensemble dénombrable.*

De la même manière, nous appellerons $m_1(\alpha\beta)$ la *limite inférieure des nombres* λ *tels que les points où* $f(x) \leqq \lambda$ *forment un ensemble non dénombrable.*

Il résulte de ces définitions qu'on a certainement :

$$M_0(\alpha\beta) \geqq M_1(\alpha\beta) \geqq m_1(\alpha\beta) \geqq m_0(\alpha\beta).$$

Pour montrer qu'on a : $M_1(\alpha\beta) \geqq m_1(\alpha\beta)$, il suffit de faire voir que tout nombre qui est supérieur à M_1 est aussi supérieur à m_1 ; soit donc $\lambda > M_1$; l'ensemble des points où $f(x) > \lambda$ est dénombrable, d'après la définition de M_1 ; par suite, l'ensemble des points où $f(x) \leqq \lambda$, qui est le complémentaire du précédent, est non dénombrable ; donc, d'après la définition de m_1, on a $m_1 \leqq \lambda$.

Faisons une remarque importante. Si E est un ensemble *dénombrable* quelconque, mais déterminé, on peut, pour définir $M_1(\alpha\beta)$ et $m_1(\alpha\beta)$, faire complètement abstraction des valeurs de la fonction aux points de E ; cela résulte de la propriété fondamentale qui caractérise ces nombres.

Je poserai :

$$\omega_1(\alpha\beta) = M_1(\alpha\beta) - m_1(\alpha\beta),$$

et je dirai que $M_1(\alpha\beta)$, $m_1(\alpha\beta)$, $\omega_1(\alpha\beta)$, sont respectivement le maximum, le minimum, l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $\alpha\beta$, *quand on néglige les ensembles dénombrables.*

Si maintenant, au lieu de considérer un intervalle fini, nous considérons un point x_0, nous commencerons par prendre un intervalle autour de ce point, soit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; prenons, dans cet intervalle, les trois nombres que je viens de définir, et désignons-les par $M_1(\delta)$, $m_1(\delta)$, $\omega_1(\delta)$; lorsque δ tend vers 0, ces nombres tendent vers des limites déterminées, que j'appelle :

$$M_1(x_0), \; m_1(x_0), \; \omega_1(x_0).$$

Ces nombres seront dits *le maximum, le minimum, l'oscillation au point* x_0, *en négligeant les ensembles dénombrables.* On a : $\omega_1(x_0) = M_1(x_0) - m_1(x_0)$.

J'énonce les propriétés fondamentales du nombre $M_1(x_0)$:

1.° Si petit que soit ε supposé positif, on peut déterminer un intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dans lequel les points où $f(x) > M_1(x_0) + \varepsilon$ forment un ensemble dénombrable.

2.° Si petits que soient ε et δ, dans l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, les points où $f(x) > M_1(x_0) - \varepsilon$ forment un ensemble non dénombrable.

On aurait des propositions analogues pour $m_1(x_0)$ et $\omega_1(x_0)$; l'analogie des nouveaux nombres avec les quantités M_0, m_0, ω_0, est évidente; citons encore une propriété qui nous sera utile.

La fonction $M_1(x)$ est semi-continue supérieurement. Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord que si un point x se trouve à l'intérieur d'un intervalle $\alpha\beta$, on a certainement :

$$M_1(x) \leqq M_1(\alpha\beta).$$

Cela posé, si on considère un point x_0, et si on se donne un nombre ε, on peut trouver autour de x_0 un intervalle $\alpha\beta$ dans lequel on aura :

$$M_1(\alpha\beta) < M_1(x_0) + \varepsilon.$$

si x est un point quelconque de cet intervalle, on aura :

$$M_1(x) < M_1(x_0) + \varepsilon,$$

ce qui exprime la proposition.

On voit de même que $m_1(x)$ est semi-continue inférieurement, $\omega_1(x)$ semi-continue supérieurement.

Enfin, des notions en tout point analogues à celle que nous venons d'établir peuvent être définies, si on part d'un ensemble parfait quelconque G; dans un intervalle $\alpha\beta$ contenant des points de cet ensemble, on définira les quantités :

$$M_1[f(x),\ G,\ \alpha\beta],\quad m_1[f(x),\ G,\ \alpha\beta],\quad \omega_1[f(x),\ G,\ \alpha\beta],$$

puis, en chaque point x_0 de G, les quantités :

$$M_1[f(x),\ G,\ x_0],\quad m_1[f(x),\ G,\ x_0],\quad \omega_1[f(x),\ G,\ x_0].$$

69. Considérons maintenant une fonction $f(x)$ obtenue en modifiant d'une manière arbitraire les valeurs d'une fonction de première classe $\varphi(x)$ aux points d'un ensemble dénombrable. D'après les remarques que nous avons faites, la fonction ω_1 relative à $f(x)$ sera en tout point identique à la fonction ω_1 relative à $\varphi(x)$, car on peut, dans la définition de ω_1, faire abstraction des points où les deux fonctions ne sont pas égales, puisque ces points forment un ensemble dénombrable.

On a donc:

$$\omega_1[f(x)] = \omega_1(\varphi(x)].$$

D'ailleurs on a, pour $\varphi(x)$:

$$\omega_1[\varphi(x)] \leqq \omega_0[\varphi(x)].$$

Comme, par hypothèse, $\varphi(x)$ est de première classe, c'est-à-dire développable en série de fonctions continues, elle est ponctuellement discontinue, ce qu'on peut exprimer en disant que la fonction $\omega_0[\varphi(x)]$ a son minimum nul en tout point; la fonction $\omega_1[\varphi(x)]$, égale ou inférieure à la précédente, possède *a fortiori* la même propriété; on peut donc dire que $f(x)$ est une fonction telle que $\omega_1[f(x)]$ a son minimum nul en tout point.

Le raisonnement est valable, soit quand ω_1 est relatif au continu, soit quand ω_1 est relatif à un ensemble parfait quelconque. Ainsi on peut dire que, G étant un ensemble parfait, la quantité $\omega_1[f(x), G]$ a son minimum nul en tout point de G.

70. Je me propose de démontrer la réciproque de ce théorème, c'est-à-dire que si $\omega_1[f(x), G]$ a son minimum nul en tout point de G, quel que soit l'ensemble parfait G, la fonction $f(x)$ peut être obtenue en modifiant les valeurs d'une fonction de première classe aux points d'un ensemble dénombrable.

Je commencerai par démontrer le théorème suivant: Si, en tout point d'un intervalle continu, on a:

$$\omega_1(x) = 0,$$

la fonction $f(x)$ peut s'obtenir en partant d'une certaine fonction continue, et en changeant les valeurs de cette fonction aux points d'un ensemble dénombrable.

En effet, on a, d'après l'hypothèse:

$$\omega_1(x) = M_1(x) - m_1(x) = 0.$$

Nous pouvons donc poser:

$$M_1(x) = m_1(x) = g(x).$$

La fonction $g(x)$, étant identique à $M_1(x)$ et à $m_1(x)$, se trouve être à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement; c'est donc une fonction continue.

Soit σ un nombre positif; je dis que l'ensemble des points où l'on a:

$$f(x) > g(x) + \sigma,$$

est dénombrable. Si en effet cet ensemble n'était pas dénombrable, il y aurait au moins un point x_0 tel que, dans tout intervalle entourant ce point, l'ensemble ne serait pas dénombrable. On peut choisir l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 - \delta)$ assez petit, pour qu'on ait à son intérieur:

$$g(x) > g(x_0) - \frac{\sigma}{2},$$

et on aura, dans cet intervalle, et dans tout intervalle plus petit entourant x_0, un ensemble *non dénombrable* de points pour lesquels:

$$f(x) > g(x) + \sigma > \left[g(x_0) - \frac{\sigma}{2}\right] + \sigma,$$

c'est-à-dire:

$$f(x) > g(x_0) + \frac{\sigma}{2}\cdot$$

Par suite, la quantité $M_1(x_0)$ serait au moins égale à $g(x_0) + \frac{\sigma}{2}$, ce qui est impossible, puisqu'elle est identique à $g(x_0)$.

Ainsi l'ensemble des points où l'on a:

$$f(x) > g(x) + \sigma,$$

est dénombrable, quel que soit le nombre positif σ. Il en résulte que l'ensemble des points où l'on a:

$$f(x) > g(x),$$

qui est limite du précédent, lorsqu'on donne à σ une suite de valeurs tendant vers 0, est aussi dénombrable. Il en est évidemment de même pour l'ensemble des points où $f(x) < g(x)$.

En résumé, les points où l'on a:

$$f(x) \gtrless g(x),$$

forment un ensemble dénombrable, ce qui démontre le théorème.

71. Démontrons maintenant un autre théorème auxiliaire, qui sera analogue à ceux que nous avons établis aux § 49, 50 et 51.

Etant donnée une fonction $f(x)$, appelons λ le maximum de $\omega_1[f(x)]$ dans l'intervalle que l'on considère. D'après cela, on a, en chaque point:

$$|M_1(x) - m_1(x)| \leq \lambda.$$

D'ailleurs on sait que M_1 est semi-continue supérieurement, m_1 semi-continue inférieurement; si donc nous imaginons la fonction multiforme définie par la condition d'avoir en chaque point deux valeurs, celle de M_1 et celle de m_1, l'oscillation de cette fonction en chaque point (au sens du § 14) sera précisément égale à ω_1.

On en déduit, d'après l'extension faite du théorème du § 51 aux fonctions multiformes (§ 52), qu'il est possible de déterminer une fonction continue $g(x)$ telle que, en chaque point, les deux nombres M_1 et m_1 soient compris entre $g(x)$ et $g(x)+\lambda$.

D'autre part, en faisant un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire dans le § précédent, on voit que l'ensemble des points où l'on a :

$$f(x) > g(x) + \lambda + \sigma,$$

est dénombrable, ainsi que celui des points où :

$$f(x) < g(x) - \sigma.$$

On en conclut que les points où la condition :

$$g(x) \leq f(x) \leq g(x) + \lambda,$$

n'est pas remplie, forment un ensemble dénombrable. Ainsi, *à part un certain ensemble dénombrable E de points, la fonction $f(x)$ reste comprise entre $g(x)$ et $g(x)+\lambda$.*

Je décomposerai $f(x)$ de la manière suivante : Aux points qui ne font pas partie de E, je poserai :

$$\varphi(x) = g(x)$$

$$\psi(x) = f(x) - g(x).$$

Aux points de E je prendrai :

$$\varphi(x) = f(x)$$

$$\psi(x) = 0.$$

En tout point, on aura :

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

avec :

$$0 \leq \psi(x) \leq \lambda.$$

$\varphi(x)$ ne diffère d'une fonction continue qu'aux points d'un ensemble dénombrable ; ce sera donc une fonction pour laquelle $\omega_1[\varphi(x)]$ a son minimum nul en tout point.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que l'on considérait une fonction définie sur un segment, en y comprenant les extrêmes. L'extension se fera, comme au § 50, si l'on considère seulement les points *intérieurs* au segment.

Enfin, une autre extension, analogue à celle du § 52, peut se faire, si on remplace le continu par un ensemble parfait quelconque. On peut ainsi résumer tous les résultats que nous venons d'obtenir dans l'énoncé suivant :

Si G est un ensemble parfait sur lequel la fonction $f(x)$ est définie, les points extrêmes pouvant être exceptés, et si le maximum de $\omega_1[f(x), G, x]$ est λ, on peut poser:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant compris entre 0 et λ, et $\varphi(x)$ ne différant d'une fonction continue sur G qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

72. Supposons maintenant qu'une fonction $f(x)$ remplisse la condition suivante: Dans tout ensemble parfait G, la fonction $\omega_1[f(x), G]$ a son minimum nul en tout point.

Prenons un nombre positif σ, et considérons l'ensemble des points où $\omega_1[f(x)] \geqq \sigma$; il s'agit, bien entendu, de la fonction ω_1 relative au continu. Soit P cet ensemble; P est fermé, et d'après l'hypothèse, est non dense. Soit $\alpha\beta$ un intervalle contigu à P; en chaque point intérieur à cet intervalle, on a:

$$\omega_1(x) < \sigma.$$

On peut donc, dans cet intervalle, poser:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$\varphi(x)$ ne différant d'une certaine fonction continue $g(x)$ qu'aux points d'un ensemble dénombrable, et $\psi(x)$ étant compris entre 0 et σ.

Il reste à définir φ, ψ, g, aux points de P. Considérons P^Ω; dans un intervalle contigu à P^Ω, P forme un ensemble réductible; aux points de P qui sont intérieurs à cet intervalle, nous posons:

$$\varphi(x) = g(x) = f(x)$$
$$\psi(x) = 0.$$

Dans cet intervalle, la fonction g est de première classe, puisque ses points de discontinuité forment un ensemble réductible; φ ne diffère toujours de g qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

Soit maintenant P_1 l'ensemble des points de P^Ω où l'on a:

$$\omega_1[f(x), P^\Omega] \geqq \sigma.$$

D'après l'hypothèse faite sur $f(x)$, P_1 est non dense par rapport à P^Ω, et dans tout intervalle contigu à P_1, on a :

$$\omega_1 [f(x), P^\Omega] < \sigma.$$

Nous opérons la décomposition de f en $\varphi + \psi$ aux points de P^Ω qui se trouvent dans un tel intervalle; φ sera identique à une fonction continue sur cette portion de P^Ω, que je désignerai par g, sauf un ensemble dénombrable; de sorte que si nous considérons φ et g dans tout l'intervalle continu contigu à P_1 (sauf les extrêmes), g est de première classe, et φ n'en diffère qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

On voit en résumé qu'en suivant une marche tout à fait analogue à celle que nous avons suivie au § 53, on arrive à mettre $f(x)$ sous la forme suivante :

$$f(x) = \varphi_0(x) + \psi(x),$$

$\varphi_0(x)$ ne différant d'une fonction de première classe $g_0(x)$ qu'en un ensemble dénombrable de points, et $\psi(x)$ satisfaisant en tout point à la condition :

$$0 \leq \psi(x) \leq \sigma.$$

Nous appliquerons ensuite la même méthode à $\psi(x)$, en remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}$. Il faut montrer d'abord que $\psi(x)$ satisfait à la condition que nous avons supposée être remplie par $f(x)$, c'est-à-dire que $\omega_1[\psi(x), G]$ a son minimum nul en tout point de G; cela résulte de ce que $\psi(x)$ est la différence de deux fonctions $f(x)$ et $\varphi_0(x)$ pour chacune desquelles la condition est remplie.

On peut donc poser :

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x),$$

avec les conditions suivantes :

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \sigma$$

$$0 \leq \psi_1(x) \leq \frac{\sigma}{2}.$$

De plus, φ_1 ne diffère d'une certaine fonction de première classe g_1 qu'aux points d'un ensemble dénombrable. On a également pour g_1 :

$$0 \leq g_1(x) \leq \sigma.$$

On répétera la même opération pour ψ_1 en remplaçant $\frac{\sigma}{2}$ par $\frac{\sigma}{4}$, et ainsi de suite indéfiniment. On arrive ainsi à la formule suivante:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots$$

cette série étant uniformément convergente, et chaque fonction $\varphi_n(x)$ ne différant qu'en un ensemble dénombrable E_n d'une fonction de première classe $g_n(x)$.

Posons:

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) + \cdots$$

Nous avons là une série uniformément convergente dont les termes sont tous des fonctions de première classe; donc $g(x)$ est aussi une fonction de première classe. D'autre part, l'ensemble E formé par la réunion de tous les ensembles dénombrables E_n est encore dénombrable. En tout point qui n'appartient pas à E, $f(x)$ est identique à $g(x)$. Nous avons donc démontré le résultat annoncé au § 70: la fonction $f(x)$ ne diffère d'une certaine fonction de première classe qu'aux points d'un ensemble dénombrable.

73. Dans l'étude que nous venons de faire, nous avons trouvé une condition *suffisante* pour qu'une fonction soit de deuxième classe: c'est que $\omega_1[f(x), G]$ ait son minimum nul en tout point de G, quel que soit G supposé parfait. Il est bien facile de montrer que cette condition n'est pas nécessaire. Je prendrai l'exemple suivant:

Dans l'intervalle (0, 1), prenons un ensemble parfait non dense E_1; pour fixer les idées, ce sera l'ensemble type du § 37, défini par la formule:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_n}{3^n} + \cdots$$

le nombre des fractions étant fini ou infini, et chaque nombre c pouvant prendre la valeur 0 ou la valeur 2.

Je formerai ensuite un ensemble E_2 de la manière suivante: dans chaque intervalle *contigu à* E_1, je formerai l'ensemble qui, par rapport à cet intervalle, a la même situation que E_1 par rapport à l'intervalle (0, 1); l'opération étant supposée effectuée dans tous les intervalles *contigus* à E_1, je désigne l'ensemble total par E_2.

Je déduirai E_3 de E_2 par le même procédé, c'est-à-dire que dans tout intervalle *contigu* à E_2, j'introduis un ensemble jouant le même rôle par rapport à cet intervalle que E_1 par rapport à (0, 1).

Je définis ainsi E_1, $E_2, \ldots E_n, \ldots$ Chacun de ces ensembles contient les précédents, et est non dense par rapport au continu; mais si nous désignons par E l'ensemble limite de E_n, il est facile de voir que E est dense dans toute portion du continu; il suffit de s'assurer, par exemple, qu'en désignant par α_n le maximum de la longueur des segments *contigus* à E_n, α_n tend vers 0 quand n croît indéfiniment. L'ensemble E est ce que j'ai appelé au § 59 un ensemble de *première catégorie.*

Considérons alors la fonction $f(x)$ qui a la valeur 1 pour les points de E, la valeur 0 aux autres points; je dis que $f(x)$ est de deuxième classe. Pour cela, je prends $f_n(x)$, définie par la condition d'être égale à 1 aux points de E_n, à 0 aux autres points. Il est bien évident que $f_n(x)$ a pour limite $f(x)$; d'ailleurs $f_n(x)$ est une fonction de première classe, car elle n'a de discontinuités que sur l'ensemble parfait E_n, et elle est continue sur cet ensemble; donc $f(x)$ est de la deuxième classe.

D'autre part, si nous appliquons à cet exemple les définitions que nous avons données des nombres M_1, m_1, ω_1 (relatifs au continu), nous reconnaissons qu'on a, en tout point:

$$M_1 = 1, \quad m_1 = 0, \quad \omega_1 = 1,$$

ce qui montre que la condition du numéro précédent n'est pas remplie par cette fonction.

74. Je vais maintenant indiquer des conditions nécessaires auxquelles satisfont les fonctions de deuxième classe; il me faudra pour cela poser de nouvelles définitions.

Je rappelle qu'au § 59 j'ai appelé ensemble de *première catégorie* tout ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Considérons maintenant une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $\alpha\,\beta$. Il existe un nombre $M_2(\alpha\,\beta)$ qui est *la limite inférieure des nombres* λ *tels que les points où* $f(x) > \lambda$ *forment un ensemble de première catégorie,* et ce nombre est en même temps *la limite supérieure des nombres* λ *tels que les points où* $f(x) > \lambda$ *forment un ensemble de deuxième catégorie.*

De même, il existe un nombre $m_2(\alpha\,\beta)$ tel que, suivant qu'on a $\lambda > m_2$ ou $\lambda < m_2$, les points où $f(x) < \lambda$ forment un ensemble de deuxième ou de première catégorie.

Comme pour la définition de $M_1(\alpha\,\beta)$ et de $m_1(\alpha\,\beta)$, il est indifférent de mettre $f(x) \leqq \lambda$ ou $f(x) < \lambda$.

On a d'ailleurs:

$$M_0(\alpha\beta) \geqq M_1(\alpha\beta) \geqq M_2(\alpha\beta) \geqq m_2(\alpha\beta) \geqq m_1(\alpha\beta) \geqq m_0(\alpha\beta).$$

Je me contente de démontrer l'inégalité:

$$M_2(\alpha\beta) \geqq m_2(\alpha\beta).$$

Elle résulte de ce que, si on a: $\lambda > M_2$, l'ensemble des points où $f(x) \geqq \lambda$ étant de première catégorie, l'ensemble complémentaire, en chaque point duquel on a: $f(x) < \lambda$, se trouve être de deuxième catégorie; on a donc aussi $\lambda \geqq m_2$.

Si on considère un point x_0, nous appellerons $M_2(x_0)$ et $m_2(x_0)$ les limites vers lesquelles tendent respectivement $M_2(\alpha\beta)$ et $m_2(\alpha\beta)$ si on prend pour $\alpha\beta$ l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ et si l'on fait tendre δ vers 0.

Posons enfin:

$$\omega_2(\alpha\beta) = M_2(\alpha\beta) - m_2(\alpha\beta)$$

$$\omega_2(x_0) = M_2(x_0) - m_2(x_0).$$

Nous pourrons dire que les nombres M_2, m_2, ω_2, considérés, soit dans un intervalle $\alpha\beta$, soit en un point x_0, représentent le maximum, le minimum, l'oscillation de $f(x)$ *quand on néglige les ensembles de première catégorie;* il est évident que si E est un ensemble de première catégorie, on peut, pour définir ces nombres, faire complètement abstraction des valeurs de la fonction aux points de E.

Enfin on prouvera aisément, comme au § 68, que $M_2(x)$ et $\omega_2(x)$ sont semi-continues supérieurement, $m_2(x)$ semi-continue inférieurement.

75. Supposons à présent qu'on ait une suite de fonctions de première classe:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots\ \varphi_n(x), \ldots$$

ayant une fonction limite $\varphi(x)$. Je vais définir une fonction $f(x, y)$ de la manière suivante: je prends d'abord une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0: $y_1, y_2, \ldots\ y_n, \ldots$ et je pose:

$$f(x, y_n) = \varphi_n(x)$$

$$f(x, 0) = \varphi(x).$$

Sur chaque parallèle à $0y$, $x = x_0$, la fonction se trouve définie en des points qui ont pour limite le point $y = 0$; pour la définir aux autres points, entre (x_0, y_n) et (x_0, y_{n+1}) par exemple, je conviens de raccorder linéairement les valeurs en ces deux points, c'est-à-dire que je pose :

$$f(x_0, y) = \frac{y_n - y}{y_n - y_{n+1}} f(x_0, y_{n+1}) + \frac{y - y_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} f(x_0, y_n). \qquad (1)$$

C'est le procédé que j'ai déjà employé au § 20; on reconnaît que la fonction ainsi définie est, en tout point de $x = x_0$, continue par rapport à y.

Si maintenant on considère une droite parallèle à $0x$, et d'ordonnée positive, la fonction, considérée sur cette droite comme fonction de x, est de première classe; cela a lieu, d'après les hypothèses, sur les droites $y = y_n$, et aussi sur les autres droites parallèles à $0x$ (sauf $y = 0$), où $f(x, y)$ est, d'après la formule (1), une combinaison linéaire de fonctions de première classe.

Rappelons un résultat obtenu au chapitre II: si on considère la suite de fonctions :

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots \ \varphi_n(x), \ldots,$$

l'ensemble P des points en chacun desquels une au moins des fonctions est discontinue, est un ensemble de première catégorie; en chaque point de l'ensemble complémentaire $E - P$ (E représentant le continu), toutes les fonctions sont continues par rapport à x. Soit $A(x_0)$ un point quelconque de cet ensemble $E - P$; je dis que, quel que soit y, pourvu qu'il soit positif, $f(x_0, y)$ est continue au point (x_0, y) par rapport à x. Cela a lieu, d'après l'hypothèse, quand y fait partie de la suite : $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$; par suite, cela a lieu aux autres points de la droite $x = x_0$, en vertu de la formule (1).

Mon but est donc d'étudier la fonction: $\varphi(x) = f(x, 0)$, sachant que $f(x, y)$ est en tout point continue par rapport à y, que, pour $y_0 > 0$, $f(x, y_0)$ est *de première classe* par rapport à x, et que, pour toute valeur x_0 qui n'appartient pas à un certain ensemble de première catégorie P, $f(x, y)$ est continue par rapport à x au point (x_0, y) si y est positif.

76. Prenons sur $0x$ un point quelconque $A_0(x_0)$, et considérons la droite $x = x_0$. La fonction est continue sur cette droite; si donc on se donne un nombre positif σ, il existe un segment $A_0 B_0$ (fig. 13) de longueur α_σ qui possède la double propriété suivante : dans $A_0 B_0$, l'oscillation de la fonction est σ; dans un segment $A_0 B_1$ de longueur supérieure à α_σ, l'oscillation est supérieure à σ. La quantité α_σ est ainsi une fonction parfaitement déterminée de x, qui a en chaque point une valeur *positive*.

Je vais démontrer que si $A_0(x_0)$ est un point de $E - P$, $\alpha_\sigma(x)$ est, en ce point, semi-continue supérieurement par rapport à x; la démonstration est tout à fait analogue à celle du § 23.

Je prends :

$$A_0 B_1 = \alpha_\sigma(x_0) + \varepsilon.$$

Dans le segment $A_0 B_1$, l'oscillation est un nombre supérieur à σ; soit $\sigma + k$. Si je prends $k_1 < k$, je peux trouver, entre A et B_1, deux points P et Q tels que :

$$|f(P) - f(Q)| > \sigma + k_1.$$

Comme, en chacun des deux points P et Q, il y a continuité par rapport à x, on peut déterminer deux segments $P' P''$ et $Q' Q''$, parallèles à $0x$,

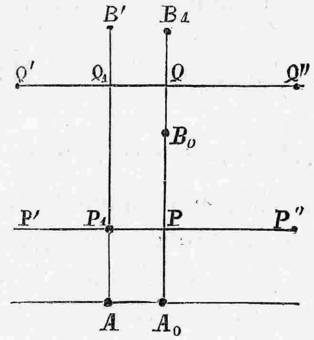

Fig. 13.

ayant pour milieux P et Q, de même longueur 2δ, tels que, si P_1 et Q_1 sont deux points quelconques pris respectivement sur ces segments, on a :

$$|f(P_1) - f(P)| < \frac{k_1}{2}$$

$$|f(Q_1) - f(Q)| < \frac{k_1}{2}.$$

Des trois inégalités écrites on déduit :

$$|f(P_1) - f(Q_1)| > \sigma,$$

P_1 et Q_1 étant deux points quelconques pris, le premier sur $P' P''$, le second sur $Q' Q''$.

Si alors on prend un point $A(x)$ d'abscisse comprise entre $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$, et si on considère le segment AB' correspondant à A et de longueur $\alpha_\sigma(x_0) + \varepsilon$, on voit que dans ce segment l'oscillation est $> \sigma$, puisqu'il renferme un couple de points P_1 et Q_1. Donc, toutes les fois que:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

on a:

$$\alpha_\sigma(x) < \alpha_\sigma(x_0) + \varepsilon,$$

ce qui exprime la propriété que je voulais établir.

Considérons maintenant la fonction m_2 relative à α_σ, c'est-à-dire le minimum de α_σ *lorsqu'on néglige les ensembles de première catégorie.* Je dis que $m_2(\alpha_\sigma)$ ne peut pas être nul pour tous les points d'un intervalle continu $A B$. Supposons pour un instant que cela ait lieu, c'est-à-dire que, dans toute portion de l'intervalle, et si petit que soit ε, les points où $\alpha_\sigma < \varepsilon$ forment un ensemble de deuxième catégorie; cet ensemble a certainement des points communs avec $E - P$ (§ 59); donc, dans toute portion de $E - P$, et si petit que soit ε, on peut trouver un point de $E - P$ où l'on a: $\alpha_\sigma < \varepsilon$; et comme, en tout point de $E - P$, α_σ est semi-continue supérieurement, il y a, autour de ce point, un intervalle où l'on a partout:

$$\alpha_\sigma < 2\,\varepsilon.$$

Ainsi, dans toute portion de $A B$, et si petit que soit ε, il y a un intervalle en tout point duquel on a:

$$\alpha_\sigma < 2\,\varepsilon.$$

On en déduit l'existence d'un point où $\alpha_\sigma = 0$, ce qui montre que l'hypothèse est inadmissible.

En résumé, $m_2(\alpha_\sigma)$ ne pouvant être nul pour tous les points d'un intervalle continu, les points où $m_2(\alpha_\sigma)$ est nul forment un ensemble *non dense.* Autrement dit, dans tout intervalle il existe un autre intervalle ($A B$) tel que l'on a:

$$m_2[\alpha_\sigma,\ A B] > 0.$$

On peut aussi conclure de là qu'il existe dans tout intervalle un point x où $m_2[\alpha_\sigma,\ x]$ est positif, quel que soit σ.

Soit $A B$ un intervalle tel que $m_2[\alpha_\sigma,\ A B]$ soit positif; prenons un nombre positif γ inférieur à ce nombre. Les points de $A B$ où l'on a:

$$\alpha_\sigma < \gamma,$$

forment un ensemble de première catégorie Q. Traçons (fig. 14) le rectangle $A B A' B'$ qui a pour base $A B$ et dont la hauteur est γ. Si M est un point de AB n'appartenant pas à Q, on a en ce point:

$$\alpha_\sigma \geqq \gamma.$$

Par suite, dans le segment MM' parallèle à $0y$ et qui joint les deux bases du rectangle $ABB'A'$, l'oscillation est $\leqq \sigma$.

Soit R l'ensemble formé par la réunion de P et de Q, P désignant toujours, comme plus haut, l'ensemble des points x_0 tels que, sur les points de $x = x_0$, il y a continuité par rapport à x. L'ensemble $E - R$ possède à la fois les propriétés de $E - P$ et de $E - Q$; c'est-à-dire que si M appartient à $E - R$, l'oscillation sur MM' est $\leqq \sigma$, et en tout point de MM' distinct de M, il y a continuité par rapport à x.

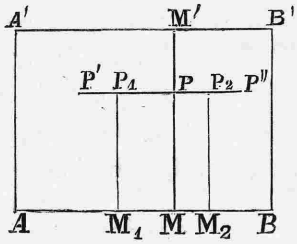

Fig. 14.

Je dis que, si $M\ (x_0)$ est un point de AB appartenant à $E - R$, l'oscillation de la fonction en ce point *par rapport aux points de* $E - R$ est $\leqq 2\,\sigma$. En effet, donnons-nous un nombre positif ε; prenons sur MM' un point quelconque $P(x_0,\ y_0)$; nous pouvons déterminer un nombre β assez petit pour que, sur le segment $P'\,P''$ $(x_0 - \beta \leqq x \leqq x_0 + \beta,\ y = y_0)$, l'oscillation soit $< \varepsilon$. Si M_1 et M_2 sont deux points de AB appartenant à $E - R$ et pris dans l'intervalle $x_0 - \beta \leqq x \leqq x + \beta$, et si P_1 et P_2 sont les projections de ces points sur $P'\,P''$, on a:

$$|f(M_1) - f(P_1)| \leqq \sigma,$$
$$|f(M_2) - f(P_2)| \leqq \sigma,$$
$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon,$$

d'où l'on déduit:

$$|f(M_1) - f(M_2)| < 2\,\sigma + \varepsilon,$$

ce qui démontre qu'au point M, quand on ne considère que les points de $E - R$, l'oscillation est $\leqq 2\,\sigma$.

D'ailleurs R est un ensemble de première catégorie; si donc on considère tous les points du continu E, et si en chaque point on définit $\omega_2\ [\varphi\ (x)]$, cette quantité sera $\leqq 2\,\sigma$.

Ainsi, dans toute portion de l'intervalle considéré, et si petit que soit σ, il y a un intervalle en chaque point duquel on a: $\omega_2 \leqq 2\sigma$. Il en résulte que, dans toute portion de l'intervalle, il existe des points où l'on a: $\omega_2 = 0$. Autrement dit, *si une fonction $\varphi(x)$ est de deuxième classe, la fonction $\omega_2[\varphi(x)]$ a son minimum nul en tout point.*

77. On peut refaire une théorie analogue à celle que je viens d'exposer en partant d'un ensemble parfait quelconque G, qui jouera le rôle du continu dans les considérations qui précèdent. Nous définirons, dans tout intervalle $\alpha\beta$ contenant des points de G, et en chaque point de G, les nombres:

$$M_2[\varphi(x),\ G,\ \alpha\beta],\quad M_2[\varphi(x),\ G,\ x_0],\ \text{etc.}\ldots$$

Par exemple, $M_2[\varphi(x),\ G,\ \alpha\beta]$ sera la limite supérieure des nombres λ tels que les points de G situés dans l'intervalle $\alpha\beta$ où l'on a: $f(x) > \lambda$, forment un ensemble de deuxième catégorie par rapport à G.

Les raisonnements du numéro précédent s'appliquent quand on remplace le continu par un ensemble parfait G; on en déduit l'énoncé suivant:

Si une fonction est de deuxième classe, et si on considère un ensemble parfait quelconque G, la fonction $\omega_2[\varphi(x),\ G]$ a son minimum nul en tout point de G.

Nous avons ainsi obtenu des conditions nécessaires; mais il semble difficile d'obtenir des conditions suffisantes. Je bornerai donc ici l'étude des fonctions de deuxième classe.

CHAPITRE IV.

Fonctions de plusieurs variables.

78. Au sujet des fonctions de plusieurs variables, il se pose des questions tout à fait analogues à celles dont nous nous sommes occupés relativement aux fonctions d'une seule variable. En particulier, les notions indiquées au commencement du chapitre III sur les fonctions des différentes classes, s'appliquent mot pour mot, si l'on considère des fonctions de n variables. Nous appellerons classe 0 l'ensemble des fonctions continues, classe 1 l'ensemble des fonctions discontinues qui peuvent être considérées comme limites de fonctions continues, etc.... Il y aurait, comme pour le cas d'une seule variable, à étudier les fonctions de ces différentes classes, en commençant par celles

de classe 1. On conçoit tout de suite que cette étude serait plus difficile que l'étude des fonctions d'une seule variable; supposons, pour prendre le premier problème qui se pose, qu'on cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x, y)$ soit la limite d'une suite de fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots f_n(x, y), \ldots$, dont chacune soit continue par rapport à l'ensemble (x, y); les résultats que nous avons démontrés dans le chapitre II nous donneront bien aisément des conditions nécessaires, mais si nous cherchons des conditions suffisantes, nous serons amenés à considérer des ensembles parfaits de points dans le plan; or, il est plus difficile de raisonner sur ces ensembles que sur les ensembles parfaits linéaires. On peut dire que la théorie de ces derniers est complète: tous les points qui ne font pas partie de l'ensemble sont constitués par les points intérieurs à une infinité d'intervalles *parfaitement déterminés*, qui sont les intervalles *contigus* à l'ensemble. Dans le cas du plan, les choses sont loin de se présenter d'une manière aussi nette; il faudrait donc en premier lieu chercher ce qui, dans le plan, remplacera la notion d'intervalle *contigu* à l'ensemble. Dans tous les cas, il faudrait faire, à un point de vue en quelque sorte géométrique, une étude de l'ensemble parfait à deux dimensions le plus général; c'est seulement alors qu'on pourrait aborder le problème relatif aux fonctions.

En ce qui concerne les fonctions de plusieurs variables en général, je me bornerai donc à ces indications; je vais, dans ce chapitre, donner quelques résultats sur les fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles.

I. Fonctions de deux variables, continues par rapport à chacune d'elles.

79. Nous avons déjà obtenu, dans le chapitre II, des résultats importants sur les fonctions de deux variables, continues par rapport à chacune d'elles; je me propose de compléter ces résultats.

Soit $f(x, y)$ une telle fonction; nous avons reconnu (§ 25) que l'ensemble des points où l'oscillation par rapport à (x, y) est $\geqq \sigma$ est un ensemble qui n'est dense nulle part par rapport au continu, et qui n'est dense non plus par rapport à aucune portion de la courbe: $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction continue. Posons-nous maintenant la question suivante: soit un rectangle parallèle aux axes:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta.$$

Parmi les segments parallèles à $0y$ et contenus dans ce rectangle, c'est-à-dire parmi les segments:

$$x = x_0, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

en supposant x_0 compris entre α et β, considérons ceux qui contiennent un point où l'oscillation est $\geqq \sigma$, et prenons leurs points d'intersection avec $0x$; ces points peuvent-ils former sur $0x$ un ensemble dense par rapport au continu? En d'autres termes, les segments en question peuvent-ils former un faisceau dense par rapport au faisceau de tous les segments parallèles à $0y$? C'est la question que je me propose de traiter, et qui m'amène tout naturellement à de nouvelles études sur la théorie des ensembles.

80. Supposons que, dans le rectangle:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

il existe un ensemble de points E réparti de telle manière que, entre deux droites parallèles à $0y$: $x = a$, $x = b$, (supposées limitées aux bases du rectangle), il existe toujours une droite $x = c$ contenant un point de E; je suppose de plus que E est fermé.

Remarquons d'abord que ces deux conditions entraînent la suivante: Sur *toute* parallèle à $0y$, il y a au moins un point de E. Cela résulte du théorème suivant:

Si une droite $x = a$ est limite d'une suite de droites $x = a_1$, $x = a_2, \ldots$, $x = a_n \ldots$, dont chacune contient un point de E, supposé fermé, elle contient un point de E au moins. Soit en effet $PQ\,(x = a,\ \gamma \leqq y \leqq \delta)$ le segment limite de la suite de segments P_1Q_1, $P_2Q_2, \ldots$ $P_nQ_n\ [x = a_n,\ \gamma \leqq y \leqq \delta], \ldots$; chacun de ces segments contient un point de E au moins. Partageons tous ces segments en deux par la droite $R_1R_2, \ldots R_n, \ldots R$, d'ordonnée $y = \dfrac{\gamma + \delta}{2}$. Je dis qu'un au moins des deux segments PR, RQ, a la propriété que nous supposons appartenir à PQ; en effet, ou bien, parmi les segments P_1R_1, $P_2R_2, \ldots$ $P_nR_n, \ldots$, il y en a une infinité contenant des points de E et admettant PR comme limite, ou bien la chose a lieu pour RQ; car si la propriété n'avait lieu ni pour PR, ni pour RQ, elle n'aurait pas lieu non plus pour le segment total PQ. Supposons par exemple que PR possède la propriété; on divisera PR en deux segments, dont un au moins la possèdera, et ainsi de suite indéfiniment. On arrive ainsi à la démonstration de l'existence d'un point $M(y_0)$ de PQ, qui possède la propriété suivante: si petit que soit ε, le segment:

$$x = a, \quad y_0 - \varepsilon \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon,$$

est la limite d'une suite de segments:

$$x = a'_n, \quad y_0 - \varepsilon \leqq x \leqq y_0 + \varepsilon, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

dont chacun contient au moins un point de E. Le point M est donc un point-limite de E, et par suite fait partie de E.

Nous pouvons énoncer le résultat sous une autre forme: Si E est fermé, et si on *projette* cet ensemble sur une droite, l'ensemble projeté est fermé.

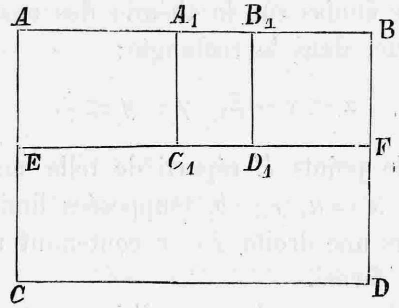

Fig. 15.

81. Cette remarque étant faite, reprenons l'ensemble E, supposé fermé, et réparti sur toutes les parallèles à $0y$ dans le rectangle $ABCD$ (fig. 15):

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta.$$

Traçons la droite EF:

$$y = \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Je dis qu'il existe certainement un rectangle parallèle aux axes, ayant pour bases des portions de AB et de EF, ou de EF et de CD, tel que, sur chaque segment parallèle à $0y$ joignant les bases de ce rectangle, il y a au moins un point de E.

Si en effet cela n'était pas, c'est que, en projetant sur AB (parallèlement à $0y$) les points de l'ensemble E contenus dans le rectangle $ABFE$, ou ceux qui sont contenus dans $EFCD$, on aurait chaque fois un ensemble *non dense;* on en déduirait que, dans le rectangle total $ABCD$, il n'y aurait qu'un ensemble *non dense* de parallèles à $0y$ portant des points de E, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Il existe donc certainement un rectangle tel que $A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 15), qui se trouve dans les mêmes conditions que le rectangle primitif $A B C D$: l'ensemble E est réparti sur toutes les parallèles à $0y$ contenues dans ce rectangle; de plus, la hauteur de ce nouveau rectangle est la moitié de celle du rectangle primitif. Je désigne par α_1, β_1, γ_1, δ_1 les coordonnées qui jouent le même rôle par rapport à $A_1 B_1 C_1 D_1$ que α, β, γ, δ, par rapport à $A B C D$, de sorte que $A_1 B_1 C_1 D_1$ peut être représenté par:

$$\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1, \quad \gamma_1 \leqq y \leqq \delta_1,$$

et l'on a:

$$\delta_1 - \gamma_1 = \frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Par le même raisonnement, on voit qu'il existe dans $A_1 B_1 C_1 D_1$ un rectangle $A_2 B_2 C_2 D_2$:

$$\alpha_2 \leqq x \leqq \beta_2, \quad \gamma_2 \leqq y \leqq \delta_2,$$

possédant les mêmes propriétés que $A B C D$ et $A_1 B_1 C_1 D_1$, et tel que:

$$\delta_2 - \gamma_2 = \frac{\delta - \gamma}{2^2}.$$

En répétant indéfiniment l'opération, on obtient une suite de rectangles dont chacun est contenu dans celui qui le précède; de plus, on peut s'assujettir à prendre toujours:

$$\alpha_n > \alpha_{n-1}, \quad \beta_n < \beta_{n-1},$$

les inégalités excluant les égalités. Dans ces conditions, il existe au moins un point $P(x_0, y_0)$ appartenant à E, et tel qu'on a, quel que soit n:

$$\alpha_n < x_0 < \beta_n, \quad \gamma_n \leqq y_0 \leqq \delta_n.$$

Ce point possède la propriété suivante: *Si on prend une aire quelconque contenant P à son intérieur, si petite qu'elle soit, on peut trouver dans cette aire un rectangle de côtés parallèles aux axes, dans lequel l'ensemble E est réparti sur toutes les parallèles à $0y$, P étant contenu dans ce rectangle, mais ne se trouvant pas sur l'un des côtés parallèles à $0y$.*

Si nous reprenons le rectangle $A B C D$, et si nous considérons deux parallèles quelconques à $0y$, le raisonnement s'applique aussi bien à la portion de $A B C D$ limitée par ces deux droites qu'au rectangle total; il existe donc, entre ces deux droites, un point de même nature que le point dont je viens de démontrer l'existence; je dirai qu'un point *est un point P* s'il possède la propriété fondamentale que je viens d'énoncer. Nous pouvons dire alors que *l'ensemble des parallèles à* $0y$ *qui portent des points* P *est un ensemble dense.*

Je vais montrer que l'ensemble des points P est un ensemble *dense en lui-même*, c'est-à-dire qu'un point P ne peut pas être isolé. Supposons pour un instant qu'il puisse exister un point P_0 (x_0, y_0) isolé; je peux alors déterminer un rectangle $ABCD$ (fig. 16) contenant P_0 *à son intérieur* et ne contenant pas d'autre point P. Soit:

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

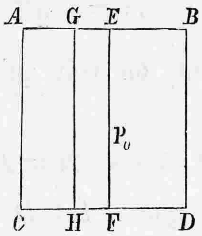

Fig. 16.

ce rectangle. On a:

$$\alpha < x_0 < \beta, \quad \gamma \leqq y_0 \leqq \delta.$$

Menons la droite GH:

$$x = x_0 - \varepsilon.$$

Le rectangle $ACGH$ ne contient, par hypothèse, aucun point P; donc, entre AC et GH, il ne peut y avoir qu'un ensemble *non dense* de segments parallèles à $0y$ portant des points de l'ensemble E. Ce raisonnement s'applique, si petit que soit ε, de sorte que, dans le rectangle $ACEF$, l'ensemble des segments qui portent des points de E est *non dense;* cela est encore vrai pour le rectangle $EFBD$, et par suite pour le rectangle $ABCD$. Donc le point P_0 ne peut pas posséder la propriété caractéristique des points P, puisqu'il y a des valeurs x' de x aussi voisines qu'on veut de x_0 et telles que $x = x'$ ne contient aucun point de E. L'hypothèse faite sur P_0 est donc inadmissible: P_0 n'est pas un point isolé.

En appelant G l'ensemble des points P, on voit donc que G, qui est contenu dans E, est un ensemble *dense en lui-même;* l'ensemble G', dérivé de G, est aussi contenu dans E, et c'est un ensemble *parfait;* de plus, il est, dans le rectangle donné, réparti sur toutes les parallèles à $0y$.

Voici maintenant la conséquence que je déduis de la propriété essentielle des points P. Supposons que, en chaque point M de E, on construise le segment parallèle à $0y$, ayant ce point pour milieu, et de longueur $2h$; considérons l'ensemble de tous les points qui se trouvent appartenir aux segments ainsi construits; prenons un point $P(x_0, y_0)$; je dis que, si petit que soit h, il existe une aire contenant P à son intérieur, et dont tous les points appartiennent à l'ensemble précédent. En effet, traçons les droites:

$$y = y_0 \pm \frac{h}{2}.$$

D'après la propriété de P, il existe certainement un rectangle R ayant pour bases des portions de ces droites, comprenant P entre ses côtés parallèles à $0y$, et tel que l'ensemble E est réparti sur tous les segments parallèles à $0y$ contenus dans R. Si, par chaque point (x_1, y_1) de E contenu dans R, on mène le segment de longueur $2h$ qui a ce point pour milieu, ce segment:

$$x = x_1, \quad y_1 - h \leqq y \leqq y_1 + h,$$

contiendra tout le segment:

$$x = x_1, \quad y_0 - \frac{h}{2} \leqq y \leqq y_0 + \frac{h}{2}.$$

On pourra donc affirmer que tout point du rectangle R appartient à un segment de longueur $2h$ ayant pour milieu un point de E.

82. Considérons maintenant une fonction $f(x, y)$ continue par rapport à chacune des variables; reprenons la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ définie au chapitre II: c'est la demi-longueur du plus grand segment parallèle à $0y$ et de milieu $A(x, y)$, dans lequel l'oscillation est égale à σ.

Nous savons que α_σ est une fonction positive et semi-continue supérieurement; si on considère un ensemble parfait quelconque E, je dis qu'il est impossible que, en tout point de E, α_σ ait son minimum nul par rapport à E. La démonstration a déjà été faite au chapitre I (§ 12), quand on considère une fonction de n variables qui peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre certaines limites; je l'ai étendue ensuite, au chapitre II (§ 28), au cas où la fonction est seulement définie aux points d'un ensemble parfait linéaire. D'une manière plus générale, le théorème est vrai si la fonction est définie sur un ensemble parfait absolument quelconque, dans un domaine à n dimensions; il suffit, pour le voir, de reprendre avec quelques modifications de détail, la démonstration donnée au § 28; j'admettrai donc ce résultat.

83. Cela posé, considérons la fonction $f(x, y)$ dans un certain rectangle $ABCD$ parallèle aux axes, et admettons pour un instant que l'ensemble E des points où l'oscillation est $\geqq \sigma$ puisse être réparti dans ce rectangle sur toutes les parallèles à $0y$.

L'ensemble E est essentiellement fermé; par le procédé du § 81 je déduis de E un ensemble G, dont chaque point P possède la propriété étudiée dans ce paragraphe; j'ai fait remarquer de plus que G' est parfait, et réparti sur toutes les parallèles à $0y$. Il est donc impossible que α_σ, considérée comme fonction définie sur G', ait, en tout point de G', son minimum nul par rapport à G'. Il est également impossible que ce minimum de α_σ par rapport à G' soit nul en tous les points de G, car alors il serait nul en tout point de G'. *Il existe donc certainement des points de G en chacun desquels α_σ a son minimum par rapport à G' positif.*

Je dis que, en un point P de G où α_σ a son minimum positif par rapport à G', l'oscillation de la fonction par rapport à (x, y) est $\leqq 2\sigma$. En effet, prenons un nombre positif h inférieur à ce minimum. D'après ce que nous venons de voir au § 81, si par chaque point de G' on mène le segment parallèle à $0y$ et de longueur $2h$ qui a ce point pour milieu, il existe un rectangle contenant P à son intérieur, et dont tout point fait partie d'un de ces segments; par suite, sur chaque segment parallèle à $0y$ contenu dans ce rectangle, l'oscillation est $\leqq \sigma$. On en déduit, en raisonnant comme au § 24, qu'au point P l'oscillation par rapport à (x, y) est $\leqq 2\sigma$. Nous dirons, sous une autre forme: Si, en un point P, l'oscillation est $\geqq \sigma$, et si l'on a $\sigma' < \frac{\sigma}{2}$, la fonction $\alpha_{\sigma'}$ a en P son minimum nul par rapport à G'.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'hypothèse faite plus haut aboutit à une contradiction: l'ensemble E des points où $\omega \geqq \sigma$ serait réparti sur toutes les parallèles à $0y$ dans $ABCD$. Il en résulterait que $\alpha_{\sigma'}$ aurait son minimum nul en tous les points de G; nous avons vu que cela est impossible.

En résumé, il est établi que, dans tout rectangle tel que $ABCD$, l'ensemble des parallèles à $0y$ portant des points où $\omega \geqq \sigma$, est un ensemble non dense. La conclusion de cette étude est donc le théorème suivant:

Si $f(x, y)$ est une fonction continue par rapport à chacune des variables, l'ensemble des points où l'on a: $\omega[f(x, y)] \geqq \sigma$, se projette sur chacun des deux axes, parallèlement à l'autre, suivant un ensemble non dense.

84. J'indique maintenant une autre propriété des fonctions séparément continues par rapport à x et y, propriété qui a été remarquée par M. Volterra.

Si on considère un point $A(x_0, y_0)$, et si on se donne un nombre ε, on peut, dans tout cercle de centre A, trouver un autre cercle en tout point duquel on a:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

En effet, nous pouvons prendre, sur $0x$ par exemple, et à partir de A, un segment AB contenu tout entier dans le cercle donné, et dans lequel l'oscillation sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Dans le segment AB, il existe des points où la fonction est continue par rapport à l'ensemble (x, y); prenons l'un de ces points; nous pourrons trouver un cercle C ayant pour centre ce point, et dans lequel l'oscillation sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Il est évident qu'en tout point du cercle C, l'inégalité (1) a lieu.

Remarquons la différence qui se présente entre les points de continuité et les points de discontinuité: si en A la fonction est continue, on peut toujours choisir pour cercle C un cercle contenant A; au contraire, s'il y a une discontinuité en A, lorsque ε est suffisamment petit, on est obligé de prendre pour cercle C un cercle ne contenant pas A.

II. Fonctions de trois variables.

85. Etudions maintenant le cas d'une fonction de trois variables x, y, z, qu'on suppose, en chaque point, continue par rapport à chacune d'elles.

Soit $f(x, y, z)$ une telle fonction; soit A_0 un point (x_0, y_0, z_0); je considère une portion de surface S passant par A_0, et représentable par une équation de la forme:

$$x = \varphi(y, z),$$

avec la condition:

$$x_0 = \varphi(y_0, z_0).$$

Soit, en chaque point $A(x, y, z)$, $\alpha_\sigma(x, y, z)$ la demi-longueur du plus grand segment BC parallèle à $0x$ et de milieu A, dans lequel l'oscillation est $\leq \sigma$; je vais étudier cette fonction $\alpha_\sigma(x, y, z)$, considérée comme fonction sur la surface S.

Soit (fig. 17):

$$B_0 A_0 = A_0 C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0, z_0).$$

Prenons, ε étant un nombre positif quelconque:

$$B'_0 A_0 = A_0 C'_0 = \alpha_\sigma (x_0, y_0, z_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans le segment $B'_0 C'_0$, l'oscillation est un nombre supérieur à σ, soit $\sigma + k$; si je prends: $k' < k$, il existe entre B'_0 et C'_0 deux points P_0 et Q_0 tels que:

$$| f(P_0) - f(Q_0) | > \sigma + k'.$$

Je vais considérer des points de S voisins de A_0; je m'astreins tout d'a-

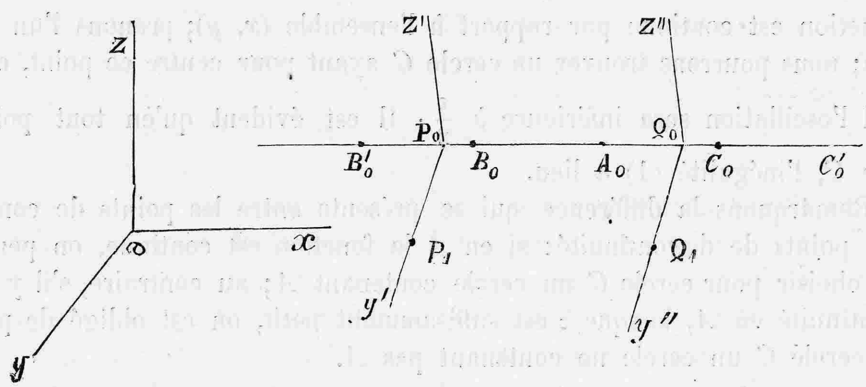

Fig. 17.

bord à faire varier y et z dans un champ suffisamment restreint autour de y_0 et z_0 pour qu'on ait toujours:

$$| x - x_0 | < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Menons par P_0 et Q_0 les plans parallèles au plan des $y\,z$, et dans ces plans, les parallèles à $0\,y$, $P_0\,y'$, $Q_0\,y''$; prenons, sur $P_0\,y'$ et $Q_0\,y''$, deux segments $P_0 P_1$ et $Q_0 Q_1$, dans chacun desquels l'oscillation soit inférieure à $\frac{k'}{4}$; nous les prenons en outre assez petits pour que les valeurs de y et z correspondant aux points intérieurs à ces segments soient comprises dans le champ de variation de y et z, précédemment défini.

Choisissons sur $P_0 P_1$ un point de continuité par rapport à l'ensemble (y, z) dans le plan $P\,y'\,z'$; soit P' un tel point; prenons dans ce plan un cercle C de centre P' et où l'oscillation soit moindre que $\frac{k'}{4}$. Prenons ensuite, sur $Q_0 Q_1$, un point Q' se projetant à l'intérieur du cercle C, et traçons dans le plan $Q_0 y'' z''$ un cercle C' de centre Q_0 où l'oscillation soit inférieure à $\frac{k'}{4}$.

Si P et Q sont deux points quelconques pris, l'un dans C et l'autre dans C', on a les différentes inégalités:

$$|f(P') - f(P_0)| < \frac{k'}{4}, \quad |f(P) - f(P')| < \frac{k'}{4},$$

$$|f(Q') - f(Q_0)| < \frac{k'}{4}, \quad |f(Q) - f(Q')| < \frac{k'}{4},$$

$$|f(P_0) - f(Q_0)| > \sigma + k',$$

d'où l'on déduit:

$$|f(P) - f(Q)| > \sigma.$$

D'après la construction des cercles C et C', ces cercles ont en projection (sur le plan $y\,z$) une partie commune; le cylindre projetant cette partie commune découpe sur la surface S une certaine aire G; si $A\,(x,\ y,\ z)$ est un point de cette aire, et si on trace le segment parallèle à $0\,x$ de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(x_0,\ y_0,\ z_0) + \varepsilon$, ce segment contient certainement un couple de points P et Q, car la distance de A à chacun des plans menés par B'_0 et C'_0 parallèlement au plan des $y\,z$ est moindre que $\alpha_\sigma(x_0,\ y_0,\ z_0) + \varepsilon$, d'après l'inégalité (1). Par suite, l'oscillation dans ce segment est supérieure à σ; on a donc, au point A:

$$\alpha_\sigma(x,\ y,\ z) < \alpha_\sigma(x_0,\ y_0,\ z_0) + \varepsilon.$$

Ainsi, la fonction α_σ définie sur la surface S possède la propriété suivante: *au voisinage de tout point* $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, *et si petit que soit* ε, *on peut trouver sur la surface une aire où l'on a partout:*

$$\alpha_\sigma(x,\ y,\ z) < \alpha_\sigma(x_0,\ y_0,\ z_0) + \varepsilon.$$

Cette propriété, jointe à cette autre que α_σ est positif en tout point, conduit à celle-ci que α_σ ne peut avoir son minimum par rapport à S nul en tous les points d'une aire. Supposons en effet que cela puisse avoir lieu; si nous nous donnons un nombre ε, nous pouvons prendre un point où $\alpha_\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$, puis, au voisinage de ce point, une aire en tout point de laquelle on aura:

$$\alpha_\sigma < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire:

$$\alpha_\sigma < \varepsilon.$$

De même, dans cette aire, on en trouvera une autre où l'on aura partout:

$$\alpha_\sigma < \frac{\varepsilon}{2},$$

et ainsi de suite.

On aurait finalement un point où $\alpha_\sigma = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi, dans toute portion de S, il existe une autre portion dans laquelle le minimum de α_σ est positif. Soit C une portion dans laquelle α_σ a son minimum positif, et soit γ un nombre positif inférieur à ce minimum.

Nous pouvons déterminer un domaine à trois dimensions, un prisme de côtés parallèles aux axes, par exemple, tel que, sur chaque parallèle à $0x$ contenue dans ce prisme, il y ait un point de C, et dont la dimension parallèle à $0x$ soit au plus égale à γ; dans ces conditions, sur tout segment parallèle à $0x$ et contenu dans le prisme, l'oscillation est $\leqq \sigma$. Prenons ensuite une section de ce prisme par un plan parallèle aux yz, et dans cette section, une aire G dans laquelle l'oscillation soit $\leqq \sigma$. Considérons le cylindre qui projette G sur le plan des yz, soit L ce cylindre, limité aux faces du prisme, et soit C_1 la portion de C qu'il découpe sur la surface S. Je dis que, dans le cylindre L, l'oscillation de la fonction est $\leqq 3\sigma$. En effet, soient P et Q deux points quelconques pris dans ce cylindre, et soient P' et Q' leurs projections sur G. On a:

$$|f(P) - f(P')| \leqq \sigma, \quad |f(Q) - f(Q')| \leqq \sigma, \quad |f(P') - f(Q')| \leqq \sigma,$$

d'où:

$$|f(P) - f(Q)| \leqq 3\sigma.$$

En particulier, nous constatons que, en chaque point de C_1, l'oscillation par rapport à l'ensemble (x, y, z) est $\leqq 3\sigma$.

Ainsi, dans toute portion de la surface: $x = \varphi(y, z)$, et si petit que soit σ, il existe une aire en chaque point de laquelle l'oscillation par rapport à (x, y, z) est $\leqq 3\sigma$. On déduit de là, par un procédé de raisonnement que j'ai eu souvent l'occasion d'employer, l'existence, dans chaque portion de la surface, d'un point de continuité par rapport à l'ensemble (x, y, z).

On a, *a fortiori*, les résultats suivants:

Dans tout domaine à trois dimensions, il y a des points de continuité par rapport à l'ensemble (x, y, z); autrement dit, *la fonction est ponctuellement discontinue.*

Sur toute surface $x = \varphi(y, z)$, la fonction donnée, considérée comme fonction de y et z, est ponctuellement discontinue.

86. Nous voyons d'après cela que l'ensemble des points où l'on a: $\omega[f(x, y, z)] \geqq \sigma$ ne peut pas être dense par rapport à un volume, ni même par rapport à une surface; *mais cet ensemble peut contenir tous les points d'une ligne*, comme je vais le montrer sur un exemple très simple.

Prenons une fonction $\varphi(x, y)$ continue par rapport à chacune des deux variables x et y, en supposant que le point $x = 0$, $y = 0$, par exemple, soit point de discontinuité. Nous définirons $f(x, y, z)$ par la condition:

$$f(x, y, z) = \varphi(x. y),$$

de sorte que f sera constante sur toutes les parallèles à $0z$. Cette fonction est continue partout par rapport à chacune des variables, et l'on voit que tous les points de $0z$ sont des points de discontinuité, la valeur de l'oscillation en tous ces points étant la même.

J'indiquerai encore un autre exemple. Je fais remarquer d'abord qu'on peut prendre, dans le plan (x, y), une fonction toujours continue sur les trois séries de droites suivantes: les parallèles à $0x$, les parallèles à $0y$, et les parallèles à une troisième direction telle que celle de $x - y = 0$, cette fonction pouvant être discontinue en certains points par rapport à l'ensemble (x, y); la fonction qui est égale à 0 pour l'origine, et à:

$$\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pour les autres points, possède ces propriétés. Prenons alors une fonction $f(x, y, z)$ qui sera constante sur toutes les parallèles à la droite:

$$x = y = z,$$

et qui, pour les points du plan $x0y$, sera égale à la fonction précédente. Sur la droite $x = y = z$, tous les points sont des points de discontinuité, la valeur de l'oscillation étant la même en tous ces points. D'autre part, la fonction f, qui est égale à 0 pour la droite $x = y = z$, et à:

$$\frac{(x-z)(y-z)(x-y)}{[(x-z)^2+(y-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

aux autres points, est partout continue par rapport à chacune des variables x, y, z.

87. Il y aurait lieu maintenant d'étudier la succession de valeurs que prend, sur une courbe quelconque de l'espace, la fonction $f(x, y, z)$, continue par rapport à chacune des variables. Je donnerai à ce sujet le résultat suivant: *la fonction d'une variable ainsi obtenue est au plus de la deuxième classe.*

Je commencerai par démontrer le théorème suivant: Si une fonction de deux variables $f(x, y)$ est continue sur chaque parallèle à $0\,x$, et est de première classe sur chaque parallèle à $0\,y$, elle est, sur une courbe quelconque,

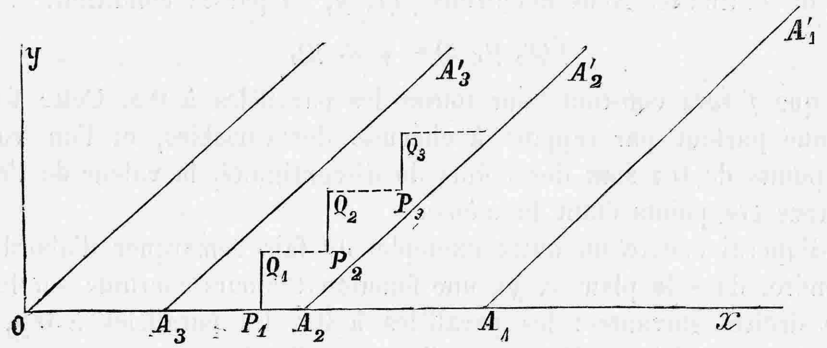

Fig. 18.

de deuxième classe au plus. Je ferai la démonstration en considérant la droite $x - y = 0$. Prenons la suite des droites (fig. 18):

$$x - y = a_1,\ x - y = a_2, \dots\ x - y = a_n, \dots$$

$a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ étant une suite de quantités tendant vers 0.

Soient $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2, \dots$ ces droites. Entre une quelconque de ces droites et la droite voisine, par exemple entre $A_2 A'_2$ et $A_3 A'_3$, je peux tracer des segments parallèles à $0\,y$, tels que $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, etc..., de sorte que chaque parallèle à $0\,x$ contienne un seul point appartenant à l'un de ces segments (sauf les droites $Q_1 P_2$, $Q_2 P_3$, etc....); la succession des valeurs que prend $f(x, y)$ sur $P_1 Q_1$ (P_1 compris, Q_1 exclus), puis sur $P_2 Q_2$ (P_2 compris, Q_2 exclus), etc.... forme une fonction d'une variable, qui est de première classe, puisqu'elle est de première classe sur chacun de ces segments. En supposant que cette opération soit effectuée entre $A_n A'_n$ et $A_{n+1} A'_{n+1}$, pour toutes les valeurs de n, nous déterminons ainsi une suite de fonctions de première classe:

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y), \dots\ \varphi_n(y), \dots$$

Si d'autre part $\varphi(y)$ est la fonction donnée, considérée sur $x - y = 0$, on reconnaît que $\varphi(y)$ est la limite de $\varphi_n(y)$. Ainsi $\varphi(y)$ est une fonction de la deuxième classe.

Reprenons maintenant la fonction $f(x, y, z)$, et soit C une courbe de l'espace. Projetons C sur le plan des (y, z) suivant C', et imaginons qu'on développe sur un plan le cylindre projetant. Dans ce plan, aux parallèles à $0x$ de l'espace qui rencontrent C correspondent les parallèles à une direction $0X$: il y aura donc continuité sur ces droites. A C' et aux courbes parallèles à C' situées sur le cylindre correspondent les parallèles à une direction $0Y$; or, dans chaque plan parallèle à $y \, o \, z$, comme il y a continuité sur chacune des parallèles à l'un des axes $0y$ et $0z$, la fonction est de première classe sur les courbes parallèles à C' et par suite sur les parallèles a $0Y$. Enfin, à C correspond dans le plan $X0Y$ une courbe C_1 à laquelle le théorème précédent s'applique; donc, sur C_1, et par suite sur C, la fonction est au plus de deuxième classe.

CHAPITRE V.

Le problème de l'intégration au point de vue des variables réelles.

88. Lorsqu'on se sert de la théorie du changement de variables dans une question d'Analyse, on suppose implicitement la continuité des dérivées qu'on emploie. Pour prendre un exemple très simple, soit une fonction de deux variables $f(x, y)$; faisons le changement de variables:

$$x = X + Y$$
$$y = X - Y.$$

Les formules connues:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y},$$

ne sont valables que si l'on suppose $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues. Si l'on suppose seulement *l'existence* de ces dérivées en chaque point, il peut arriver que les formules ne s'appliquent pas; c'est ce qui a lieu, par exemple, à l'origine, pour la fonction qui est égale à 0 en ce point, et à $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ aux autres points. On a, en effet, au point $x=0$, $y=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Si maintenant on déplace le point (x, y) à partir de l'origine dans la direction $y=ax$, on a, en appelant $\frac{\partial f}{\partial n_a}$ la dérivée dans cette direction:

$$\frac{\partial f}{\partial n_a}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ainsi, à l'origine, il y a une dérivée déterminée dans chaque direction, mais ces dérivées ne sont pas données par les formules ordinaires.

Cette remarque correspond, au point de vue géométrique, à ce fait que si on considère la surface $z=f(x, y)$, cette surface n'a pas, au point $x=y=0$, de plan tangent déterminé.

89. Cela posé, considérons une équation aux dérivées partielles, et posons le problème de l'intégration de la manière suivante:

Rechercher toutes les fonctions de variables réelles, assujetties seulement aux conditions strictement indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation aient un sens déterminé et vérifient cette équation.

En prenant comme exemple l'équation très simple:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

il faudra déterminer toutes les fonctions de x et y qui, en chaque point, sont continues par rapport à chacune des variables, et possèdent des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfaisant à la relation donnée.

Le problème étant ainsi posé, le raisonnement qui consiste à prendre comme nouvelle variable $X=x-y$, et à constater que la fonction ne doit dépendre que de X, est insuffisant, car il suppose la continuité des dérivées.

Pour essayer de traiter la question avec le minimum d'hypothèses possible, il convient tout d'abord de faire une étude des conséquences qu'entraîne, pour une fonction de deux variables, l'hypothèse de l'existence de dérivées partielles en chaque point.

90. Je commencerai par exposer quelques considérations générales sur les fonctions d'une seule variable.

Soit une fonction quelconque $f(x)$, définie dans l'intervalle AB. Prenons deux points $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ dans cet intervalle, et formons le rapport:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Je désignerai dans la suite ce rapport par la notation:

$$\text{rapport }(x_1,\ x_2), \quad \text{ou} \quad r^t(x_1,\ x_2), \quad \text{ou} \quad r^t(M_1 M_2).$$

Il est indépendant de l'ordre dans lequel on énonce les deux points; on peut dire que c'est une fonction de l'ensemble des deux nombres (x_1, x_2), *définie seulement pour* $x_1 \gtrless x_2$.

Dans le cas où l'on suppose la fonction $f(x)$ continue, la fonction $r^t(x_1, x_2)$ est, en chaque point (x_1, x_2) où elle se trouve définie, *continue par rapport à l'ensemble* (x_1, x_2).

Je donne une propriété élémentaire de cette fonction qui me sera utile dans la suite. Considérons trois nombres x_1, x_2, x_3, *rangés par ordre de grandeur*. Soit:

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

On a évidemment:

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \times \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} + \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \times \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1},$$

c'est-à-dire, en posant:

$$\alpha = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1},$$

$$r^t(x_1,\ x_3) = \alpha\, r^t(x_1,\ x_2) + (1-\alpha)\, r^t(x_2,\ x_3).$$

Comme on a:

$$0 < \alpha < 1,$$

on en déduit que $r^t(x_1, x_3)$ *est compris entre* $r^t(x_1, x_2)$ et $r^t(x_2, x_3)$.

Nous emploierons quelquefois ce résultat sous une autre forme: *Si* x_1, x_2, x_3 *sont rangés par ordre de grandeur, et si* $r^t(x_1, x_3)$ *est supérieur* (inférieur) *à un nombre* λ, *l'un au moins des deux nombres* $r^t(x_1, x_2)$, $r^t(x_2, x_3)$ *est supérieur* (inférieur) à λ.

Enfin le résultat s'étend au cas où l'on considère un nombre quelconque de quantités x: *Si* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ *sont rangés par ordre de grandeur, la* *quantité* $r^t(x_1, x_n)$ *est comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités:*

$$r^t(x_1, x_2),\ r^t(x_2, x_3), \ldots\ r^t(x_{n-1}, x_n).$$

91. Reprenons maintenant la fonction $r^t(x_1, x_2)$; laissons x_1 fixe, et donnons à x_2 toutes les valeurs satisfaisant à l'inégalité:

$$x_1 < x_2 \leqq x_1 + h,$$

h étant un nombre positif. Les valeurs de $r^t(x_1, x_2)$ qui correspondent à ces diverses valeurs de x_2 forment un ensemble de nombres, qui a une limite supérieure et une limite inférieure: soient M_h et m_h ces limites (qui peuvent d'ailleurs être infinies); si h tend vers 0, M_h ed m_h tendent vers des limites déterminées Λ_d ed λ_d, qui sont les *extrêmes oscillatoires de la fonction à droite* (*); on définit de même les *extrêmes oscillatoires à gauche* Λ_g et λ_g. On a ainsi les *quatre nombres dérivés*, dont l'étude a fait l'objet de travaux de plusieurs géomètres, en particulier de MM. Dini, Volterra, L. Scheeffer.

Remarquons que, si en un point les quatre nombres dérivés sont finis, il est certain qu'en ce point la fonction est continue, mais la réciproque n'a pas nécessairement lieu.

Si, en un point, les quatre nombres dérivés sont égaux, c'est qu'il existe en ce point pour la fonction une dérivée déterminée $f'(x)$ qui a pour valeur la valeur commune de ces quatre nombres.

Supposons qu'il en soit ainsi au point $A_0(x_0)$. On peut alors, si petit que soit ε, déterminer un intervalle $BC\,[x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$, tel que, si M est un point quelconque de cet intervalle, *distinct de* A_0, on a:

$$|\, r^t A_0 M - f'(x_0)\,| \leqq \varepsilon.$$

Prenons alors deux points P et Q dans l'intervalle BC, *situés de part et d'autre de* A_0; dans ces conditions, d'après la remarque faite au § 90, $r^t PQ$ est compris entre $r^t A_0 P$ et $r^t A_0 Q$. On a donc:

$$|\, r^t PQ - f'(x_0)\,| \leqq \varepsilon.$$

D'une manière générale, BC représentant un segment de milieu $A(x_0)$ et de longueur 2α, prenons, de toutes les manières possibles, un couple de points P et Q situés dans cet intervalle et de part et d'autre de A, de telle

(*) Cf. Dini, *Fondamenti*, etc., page 190.

sorte qu'on ait toujours:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 - \alpha \leqq x_P \leqq x_0 \\ x_0 \leqq x_Q \leqq x_0 + \alpha. \end{array}\right\} \quad (1)$$

D'après ces inégalités, il y aurait lieu de considérer l'expression $r^t(x_0, x_0)$, qui n'a pas encore été définie; je poserai:

$$r^t(x_0, x_0) = f'(x_0).$$

De cette manière, pour tout système de valeurs de x_P et x_Q satisfaisant aux inégalités (1), il existe une valeur de $r^t P Q$ parfaitement déterminée; l'ensemble de ces valeurs a un maximum M et un minimum m; posons en outre: $\omega = M - m$. Si nous faisons varier α, nous pouvons considérer ω comme fonction de α; c'est évidemment une fonction qui n'est jamais décroissante; de plus, si α tend vers 0, elle tend vers 0, car, d'après ce que nous avons vu plus haut, M et m tendent tous deux vers la même quantité $f'(x_0)$.

Si donc on se donne un nombre positif σ, il existe un nombre *positif* parfaitement déterminé, que je désigne par α_σ, qui est la limite supérieure des nombres α pour lesquels $\omega \leqq \sigma$. Soit $B_0 C_0$ le segment de milieu A_0 et de longueur $2\alpha_\sigma(x_0)$; dans ce segment, le nombre ω est *inférieur ou égal à* σ (si on suppose la fonction continue); dans tout segment $B'_0 C'_0$ de milieu A_0 et de longueur supérieure à $2\alpha_\sigma$, ω est *supérieur à* σ.

92. Je considère maintenant une fonction de deux variables $f(x, y)$, sur laquelle je fais les hypothèses suivantes: elle est continue par rapport à x, par rapport à y, et possède en tout point une dérivée déterminée par rapport à x, $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot$ En chaque point A, je considère la fonction $\alpha_\sigma(x, y)$ définie comme au numéro précédent: c'est donc la demi-longueur du plus grand segment parallèle à $0x$, et de milieu A, dans lequel la différence entre les valeurs extrêmes de $r^t(PQ)\,[x_P < x_A < x_Q]$ est $\leqq \sigma$. Je dis que $\alpha_\sigma(x, y)$ *est semi-continue supérieurement par rapport à* (x, y).

Pour le démontrer, prenons (fig. 19):

$$B_0 A_0 = A_0 C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0)$$

$$B'_0 A_0 = A_0 C'_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Dans le segment $B'_0 C'_0$, le nombre ω est supérieur à σ; soit $\sigma + k$ sa valeur. En prenant $k' < k$, on peut déterminer, entre B'_0 et C'_0, deux couples de points $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, tels que:

$$| r^t P_1 Q_1 - r^t P_2 Q_2 | > \sigma + k'. \tag{1}$$

On peut d'ailleurs s'astreindre à ce qu'aucun des quatre points P_1, Q_1, P_2, Q_2, ne coïncide avec A_0; on aura ainsi:

$$x_{P_1} < x_0, \quad x_{Q_1} > x_0,$$
$$x_{P_2} < x_0, \quad x_{Q_2} > x_0.$$

Il existe un nombre positif β tel que, dans l'intervalle $(x_0 - \beta,\ x_0 + \beta)$, il n'y a aucun de ces quatre points.

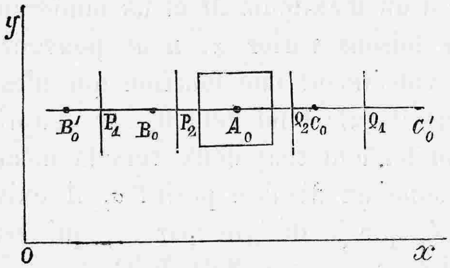

Fig. 19.

La condition (1) s'écrit:

$$\left| \frac{f(x_{P_1},\ y_0) - f(x_{Q_1},\ y_0)}{x_{P_1} - x_{Q_1}} - \frac{f(x_{P_2},\ y_0) - f(x_{Q_2},\ y_0)}{x_{P_2} - x_{Q_2}} \right| > \sigma + k'. \tag{2}$$

Je vais maintenant utiliser la condition imposée à la fonction d'être continue en tout point par rapport à y.

Considérons les parallèles à $0y$ menées par les points P_1, Q_1, P_2, Q_2, et remarquons que, si dans la formule (2) on remplace y_0 par la quantité variable y, le premier membre de cette formule est une fonction continue de y; donc on peut trouver un nombre positif γ tel que, quand y sera compris entre $y_0 - \gamma$ et $y_0 + \gamma$, on aura:

$$\left| \frac{f(x_{P_1},\ y) - f(x_{Q_1},\ y)}{x_{P_1} - x_{Q_1}} - \frac{f(x_{P_2},\ y) - f(x_{Q_2},\ y)}{x_{P_2} - x_{Q_2}} \right| > \sigma. \tag{3}$$

Appelons η le plus petit des trois nombres β, γ, $\frac{\varepsilon}{2}$, et considérons le carré de centre A_0 et de côté 2η, soit:

$$x_0 - \eta \leqq x \leqq x_0 + \eta, \quad y_0 - \eta \leqq y \leqq y_0 + \eta.$$

Si $A(x, y)$ est un point quelconque pris dans ce carré, le segment parallèle à $0x$, de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$, contiendra certainement deux couples de points tels que:

$$(x_{P_1}, y), \quad (x_{Q_1}, y),$$
$$(x_{P_2}, y), \quad (x_{Q_2}, y),$$

auxquels s'appliquera la relation (3); de plus, les deux points de chacune des couples seront de part et d'autre de A. Par suite, dans le segment de milieu A et de demi-longueur $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$, l'oscillation ω des $r^t(PQ)$, telle que nous l'avons définie, est supérieure à σ. On a donc:

$$\alpha_\sigma(x, y) < \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

ce qui montre que $\alpha_\sigma(x, y)$ *est une fonction semi-continue supérieurement.*

93. Nous déduisons de là que si E est un ensemble parfait quelconque, il y a, au voisinage de tout point de E, des points de E où α_σ a son minimum *positif* par rapport à E.

Prenons d'abord pour E le continu à deux dimensions, c'est-à-dire une aire quelconque. On peut, dans cette aire, en trouver une autre où α_σ a son minimum positif, dans celle-ci une autre où $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum positif, etc....
On voit ainsi que dans toute aire il existe des points où α_σ a son minimum par rapport à (x, y) *positif, quel que soit* σ.

Supposons que, dans une aire C, le minimum de α_σ soit positif. Je dis qu'en un point quelconque $A_0(x_0, y_0)$ de cette aire, l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à (x, y) est $\leqq 2\sigma$. En effet, prenons dans C un rectangle C_1 de côtés parallèles aux axes, contenant A_0, et dont la dimension parallèle à $0x$ soit inférieure au minimum de α_σ dans C; dans ces conditions, si P, Q, A, sont trois points situés dans ce rectangle C_1, sur une même parallèle à $0x$, et de manière que P et Q soient de part et d'autre de A, on aura:

$$\left| r^t PQ - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leqq \sigma. \tag{1}$$

Donnons-nous un nombre ε positif. Je prends d'abord, sur la parallèle à $0x$ menée par A_0, et de part et d'autre de A_0, deux points P_0 et Q_0 compris dans C_1; puis, sur les parallèles à $0y$ menées par P_0 et Q_0, je prends deux intervalles entourants ces points, assez petits pour que, P et Q étant deux points quelconques pris respectivement dans ces intervalles, on ait:

$$|r^t PQ - r^t P_0 Q_0| < \varepsilon. \tag{2}$$

On voit alors qu'on peut prendre autour de A_0 une aire assez petite pour que, A étant un point quelconque de cette aire, il y ait, sur la parallèle à $0x$ menée par A, une couple de points P et Q vérifiant les inégalités (1) et (2); ajoutons l'inégalité:

$$\left| r^t P_0 Q_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(A_0) \right| \leqq \sigma.$$

Nous déduisons de là:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(A) - \frac{\partial f}{\partial x}(A_0) \right| < 2\sigma + \varepsilon,$$

et comme ε est aussi petit qu'on veut, l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en A_0 est $\leqq 2\sigma$.

Nous avons reconnu qu'il existe des points où α_σ a son minimum positif, quel que soit σ; en un tel point, l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle, c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

On reconnaît ainsi que *si* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe en tout point, c'est une fonction ponctuellement discontinue.*

94. Supposons à présent que $f(x, y)$ ait, en chaque point, des dérivées partielles déterminées par rapport à x et par rapport à y. Appelons $\beta_\sigma(x, y)$ la fonction qui joue par rapport à y le même rôle que $\alpha_\sigma(x, y)$ par rapport à x. Dans toute aire il existe une autre aire où α_σ a son minimum positif, et dans celle-ci une autre où β_σ a son minimum positif; ceci ayant lieu quel que soit σ, on reconnaît qu'*il existe dans toute aire des points en chacun desquels α_σ et β_σ ont leur minimum positif, quel que soit σ.* Je dirai qu'un tel point est un *point régulier*.

Soit A un point régulier; d'après la définition, quel que petit que soit σ, les fonctions $\alpha_\sigma(x, y)$, $\beta_\sigma(x, y)$, ont en A leur minimum positif; je dis que, si petit que soit σ, il est possible de déterminer autour de A une aire assez petite pour que, si B et C sont deux points quelconques *de même ordonnée* situés dans cette aire, on ait:

$$\left| r^t BC - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| < \sigma.$$

En effet, $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum positif en A; je peux prendre un nombre positif γ inférieur à ce minimum, et déterminer autour de A une aire en tout point de laquelle on aura: $\alpha_{\frac{\sigma}{2}} > \gamma$. Dans cette aire, je prendrai un rectangle de centre A et dont la dimension parallèle à $0x$ sera plus petite que γ; enfin je diminuerai, s'il le faut, les dimensions de ce rectangle, de manière que l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y soit inférieure à $\frac{\sigma}{2}$. Dans ces conditions, si nous prenons, dans le rectangle obtenu en dernier lieu, et sur une même parallèle à $0x$, deux points quelconques B et C, on a, en appelant D le milieu du segment BC:

$$\left| r^t BC - \frac{\partial f}{\partial x}(D) \right| \leq \frac{\sigma}{2},$$

et:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(D) - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \frac{\sigma}{2},$$

inégalités d'où l'on déduit:

$$\left| r^t BC - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \sigma. \tag{1}$$

On démontrerait de même que si l'aire considérée autour de A est suffisamment petite, et si on prend deux points quelconques B' et C' *de même abscisse* dans cette aire, on a:

$$\left| r^t B'C' - \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right| \leq \sigma. \tag{2}$$

Etudions maintenant ce qui se passe quand on considère deux points au voisinage de A, situés l'un par rapport à l'autre d'une manière quelconque. Je suppose qu'on ait déterminé autour de A une aire (un carré de centre A, par exemple), dans laquelle les conditions précédentes, exprimées par les inégalités (1) et (2), se trouvent remplies.

Soient P et Q deux points quelconques de cette aire. Je représente la longueur PQ par l, l'angle que fait la direction PQ avec $0x$ par λ; de cette manière, si les coordonnées de P sont x_1, y_1, celles de Q seront $x_2 = x_1 + l\cos\lambda$, $y_2 = y_1 + l\sin\lambda$. Considérons le point R qui a même ordonnée que P et même abscisse que Q, c'est-à-dire qui a pour coordonnées (x_2, y_1).

Je me propose de trouver une expression de la quantité :

$$r^t\,P\,Q = \frac{f(Q) - f(P)}{\text{longueur}\,P\,Q}.$$

Pour cela, j'écris :

$$\frac{f(Q) - f(P)}{l^r\,PQ} = \frac{f(R) - f(P)}{\overline{PR}} \cdot \frac{\overline{PR}}{l^r\,PQ} + \frac{f(Q) - f(R)}{\overline{RQ}} \cdot \frac{\overline{RQ}}{l^r\,PQ},$$

c'est-à-dire :

$$r^t\,P\,Q = r^t\,P\,R \cdot \cos\lambda + r^t\,R\,Q \cdot \sin\lambda.$$

Rappelons maintenant qu'on a :

$$\left| r^t\,P\,R - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leqq \sigma$$

$$\left| r^t\,R\,Q - \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right| \leqq \sigma.$$

Nous avons donc :

$$\left| r^t\,P\,Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot \cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot \sin\lambda\right] \right| \leqq \sigma \cdot (|\cos\lambda| + |\sin\lambda|).$$

La quantité du second membre ne surpasse pas $\sigma \cdot \sqrt{2}$. Nous pouvons tirer de cette étude la conclusion suivante :

Si A est un point régulier, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un cercle de centre A, tel que, P et Q étant deux points quelconques pris dans ce cercle, et λ étant l'angle de $P\,Q$ avec $0\,x$, on a :

$$\left| \frac{f(Q) - f(P)}{l^r\,PQ} - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \sin\lambda\right] \right| < \varepsilon.$$

95. On pourrait faire des raisonnements analogues aux précèdents, en considérant une courbe au lieu d'une aire. D'une manière plus générale, je passe tout de suite au cas où l'on considère un ensemble parfait quelconque E.

Si on considère les fonctions $\alpha_\sigma(x, y)$ et $\beta_\sigma(x, y)$ sur l'ensemble E, chacune d'elles étant positive et semi-continue supérieurement, il est impossible que l'une d'elles ait, en tout point de E, son minimum nul par rapport à E; par suite, au voisinage de tout point de E, on peut trouver un point de E où le minimum de α_σ et celui de β_σ sont positifs. On déduit de là que, au voisinage de tout point de E, il existe des points de E en chacun desquels le minimum de α_σ et de β_σ par rapport à E est positif, quel que soit σ. Je dirai qu'un point de cette nature est un point *régulier par rapport à E.*

Nous allons voir qu'un tel point possède des propriétés tout à fait analogues à celles que j'ai étudiées dans le numéro précédent.

Soit A un point régulier par rapport à E; la fonction $\alpha_{\frac{\sigma}{2}}$ a son minimum par rapport à E positif; soit γ un nombre positif inférieur à ce minimum. Je peux déterminer un carré de centre A possédant les propriétés suivantes :

1.° On a, en tout point de E situé dans ce carré :

$$\alpha_{\frac{\sigma}{2}} > \gamma.$$

2.° Le côté du carré est inférieur à γ.

3.° L'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à E est inférieure à $\frac{\sigma}{2}$; il est possible de réaliser cette condition, parce que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en A par rapport à E.

Dans ces conditions, si nous prenons dans ce carré un point B appartenant à E et un autre point C quelconque, mais de même ordonnée que B, nous aurons :

$$\left| r^t\, B\, C - \frac{\partial f}{\partial x}(B) \right| \leq \frac{\sigma}{2},$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(B) - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \frac{\sigma}{2},$$

et par suite :

$$\left| r^t\, B\, C - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| \leq \sigma.$$

Supposons qu'on ait déterminé autour de A un carré remplissant les conditions qui précèdent et celles qu'on en déduit en permutant le rôle des lettres x et y. Prenons dans cette aire deux points P et Q appartenants à E; soit R le point de même ordonnée que P, et de même abscisse que Q; (R n'appartient pas nécessairement à E). On peut, en raisonnant comme au numéro précédent, montrer qu'on a :

$$\left| \frac{f(Q) - f(P)}{l^r\, P\, Q} - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cos \lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \sin \lambda \right] \right| \leq \sigma \cdot \sqrt{2}.$$

λ représente, comme plus haut, l'angle de $P\,Q$ avec $0\,x$.

Je résume ces résultats dans l'énoncé suivant:

Si E est un ensemble parfait, il existe, au voisinage de tout point de E, des points de E que j'appelle réguliers par rapport à E; si A est un de ces points, à tout nombre ε correspond un cercle de centre A tel que, si P et Q sont deux points de E pris dans ce cercle, on a:

$$\left| r^t P Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot \cos(0x,\ PQ) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot \sin(0x,\ PQ)\right]\right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Comme application de ce résultat général, nous reconnaissons que si l'on considère une courbe, il y a, dans tout arc de cette courbe, des points où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont *continues par rapport à la courbe.*

Mais il peut arriver que, pour tous les points d'un arc de courbe, $\frac{\partial f}{\partial x}$, par exemple, soit discontinue par rapport à (x, y). Citons la fonction qui, pour $x - y = 0$, est égale à 0, et qui, pour $x - y \gtrless 0$, est égale à:

$$(x-y)^2 \sin\frac{1}{x-y}.$$

En tous les points de $x - y = 0$, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont discontinues, l'oscillation étant égale à 2.

96. Revenons maintenant au problème posé au § 89, à savoir l'intégration de l'équation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Je viens de déterminer certaines conditions auxquelles satisfait toute fonction $f(x, y)$ qui possède en chaque point des dérivées déterminées; j'ajoute maintenant à ces conditions celle qui est exprimée par l'équation (2).

Interprétons alors les résultats trouvés. Prenons une quelconque des droites parallèles à $x - y = 0$, et sur cette droite un ensemble parfait quelconque E (qui, en particulier, pourra être le continu). Il existe, au voisinage de tout point de E, des *points réguliers par rapport à E*; si A est un de ces points, à tout nombre positif ε correspond un intervalle de milieu A, tel que, si P et Q sont deux points de E pris dans cet intervalle, on a:

$$\left| r^t P Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right]\right| < \varepsilon.$$

Dans le cas actuel, cette relation devient simplement :

$$| r^t\, P\, Q | < \varepsilon.$$

Nous sommes ainsi conduits à rechercher les fonctions d'une variable qui possèdent les propriétés exprimées dans l'énoncé précédent. J'aurai besoin, pour cela, d'exposer encore quelques considérations générales sur les fonctions.

97. Soit une fonction quelconque $f(x)$; considérons, dans l'intervalle $A\,B$ où elle est définie, un ensemble parfait E, qui pourra être le continu, et prenons une portion déterminée de cet intervalle $\alpha\,\beta$, contenant des points de E.

Soit un couple de points P et Q appartenant à E et situés sur $\alpha\,\beta$; considérons toutes les quantités : $r^t\, P\, Q$; l'ensemble de ces quantités a une limite supérieure M et une limite inférieure m. Je conviendrai de dire que M et m sont *les coefficients maximum et minimum de variabilité de* $f(x)$, *par rapport à* E, *dans l'intervalle* $\alpha\,\beta$; et je représenterai ces nombres par $M\,[f(x),\ E,\ \alpha\,\beta]$, $m\,[f(x),\ E,\ \alpha\,\beta]$.

Si x_0 est un point appartenant à E, je prendrai, dans l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, les nombres que je viens de définir; quand δ tend vers 0, ces nombres tendent vers des limites déterminées : $M\,[f(x),\ E,\ x_0]$ et $m\,[f(x),\ E,\ x_0]$, qui seront *les coefficients maximum et minimum de variabilité de* $f(x)$ *par rapport à* E *au point* x_0.

Il est évident que si x_0 est compris dans $\alpha\,\beta$, on a :

$$M(x_0) \leqq M(\alpha\,\beta).$$

On déduit de là que si on considère le coefficient maximum de variabilité en un point $M(x)$ comme fonction de x, *cette fonction est semi-continue supérieurement.*

J'énonce encore une remarque qui me sera utile dans la suite. Si l'on a deux points P et Q tels que :

$$r^t\, P\, Q \geqq \lambda,$$

il existe certainement un point A situé entre P et Q, ou coïncidant avec l'un d'eux, et où l'on a :

$$M(A) \geqq \lambda,$$

la fonction M étant relative au continu. C'est une conséquence directe d'une remarque faite au § 90.

Je n'ai fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur $f(x)$; je suppose maintenant que cette fonction est continue. Soit $\alpha\,\beta$ un intervalle contenant le point $A_0(x_0)$. Pour définir $M(f(x), E, \alpha\beta)$, on peut, au lieu de considérer tous les couples de points $A_1(x_1)$ et $A_2(x_2)$ appartenants à E et situés dans l'intervalle, considérer seulement ceux pour lesquels on n'a pas: $x_1 = x_2 = x_0$, en d'autres termes faire abstraction du point M_0. En effet, dans l'hypothèse de la continuité, toute quantité telle que $r^t A_0 A$ peut être regardée comme limite d'une suite de quantités telles que $r^t A_1 A_2$, A_1 et A_2 étant distincts de A_0; par suite, que l'on tienne compte ou non des quantités de la forme: $r^t A_0 A$, les limites supérieure et inférieure resteront les mêmes.

Prenons maintenant l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, et considérons tous les points du continu C qui sont dans cet intervalle, *en retranchant le point* x_0. La fonction $M[f(x), C, x]$ a, en chacun de ces points, une valeur déterminée; cet ensemble de valeurs a un maximum qui, quand δ tend vers 0, a une limite M'; je dis que, *dans le cas où la fonction est continue, cette limite* M' *est précisément* $M[f(x), C, x_0]$.

Nous savons déjà qu'on a:

$$M(x_0) \geqq M'.$$

Cela résulte de ce que la fonction $M(x)$ est semi-continue supérieurement; il suffit donc de démontrer qu'on ne peut pas avoir:

$$M(x_0) > M'.$$

Supposons que cela ait lieu; prenons un nombre λ tel qu'on ait:

$$M(x_0) > \lambda > M'.$$

On peut trouver, aussi près qu'on veut de x_0, deux points P et Q tels que:

$$r^t P Q > \lambda.$$

On peut d'ailleurs supposer que P et Q sont du même côté par rapport à $A(x_0)$; en effet, si cela n'a pas lieu, si l'on a, par exemple:

$$x_P < x_0 < x_Q,$$

il est certain que l'une au moins des deux quantités $r^t P A$ et $r^t A Q$, est supérieure à λ; soit, par exemple:

$$r^t P A > \lambda.$$

Nous pouvons, à cause de la continuité de la fonction, prendre un point Q_1 du même côté que P par rapport à A et assez voisin de A pour qu'on ait encore:

$$r^t P Q_1 > \lambda.$$

Il existe, entre P et Q_1, un point $B(x)$ où l'on a :

$$M(x) > \lambda,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : $\lambda > M'$.

En résumé, dans le cas où $f(x)$ est continue, la fonction $M(x)$ relative au continu, possède une propriété caractéristique qu'on peut énoncer de la manière suivante :

La fonction $M(x)$ est égale, en chaque point, au maximum des valeurs qu'elle a aux points voisins.

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ *continue*, et *non constante;* cette dernière condition peut s'exprimer de la manière suivante : il existe deux points P et Q tels que l'on a :

$$r^t P Q \gtrless 0.$$

On aura, ou bien : $r^t P Q > 0$, ou bien : $r^t P Q < 0$; il suffit d'envisager, par exemple, la première hypothèse. Je suppose donc qu'il existe un nombre positif σ et un couple PQ, pour lequel on a :

$$r^t P Q > \sigma.$$

D'après ce que nous avons vu, il existe certainement au moins un point x où l'on a :

$$M(x) > \sigma,$$

et, au voisinage de ce point, il en existe d'autres possédant la même propriété : *tout point où l'on a $M(x) > \sigma$ est point limite d'une suite de points où l'on a aussi $M(x) > \sigma$.* Autrement dit, en désignant par G l'ensemble des points où $M(x) > \sigma$, l'ensemble G est *dense en lui-même.* Son dérivé G' est donc un ensemble parfait, et en chaque point de G' on a :

$$M(x) \geqq \sigma.$$

98. J'arrive maintenant à l'étude des fonctions présentant la propriété indiquée au § 96, propriété que je peux énoncer de la manière suivante : *Si l'on considère un ensemble parfait quelconque E, il y a, au voisinage de tout point de E, des points où l'on a :*

$$M[f, E, x] = m[f, E, x] = 0.$$

On peut dire qu'un point où cette double condition est remplie est un point *stationnaire par rapport à E;* au contraire, en un point où l'un des deux nombres M et m est différent de 0, on dira que la fonction est *variable par* *rapport à E.* Nous sommes conduits à dire, par analogie avec la notion de fonction ponctuellement discontinue, que la fonction dont nous nous occupons en ce moment est *ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait.*

D'après cette définition, le résultat du § 96 peut s'énoncer dans les termes suivants: *Si une fonction $f(x, y)$ satisfait en tout point à l'équation:* $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, *sur chaque droite $x - y = C^{te}$, elle est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait.*

Supposons qu'on impose à $f(x, y)$ la condition d'être continue par rapport à l'ensemble (x, y); dans ce cas, la fonction d'une variable définie sur chaque droite $x - y = C^{te}$, sera à la fois *continue* et *ponctuellement variable sur tout ensemble parfait.* Je vais démontrer qu'une telle fonction est nécessairement *constante.*

Je ferai voir pour cela qu'une fonction *continue et non constante* ne peut pas remplir la condition d'être *ponctuellement variable sur tout ensemble parfait.*

Soit donc $f(x)$ une fonction continue et non constante; j'ai montré plus haut qu'il existe (soit pour $f(x)$, soit pour cette fonction changée de signe), un nombre positif σ tel que l'ensemble G des points où $M(f(x), C, x) > \sigma$, C représentant le continu, est *dense en lui-même.* En tout point de G' on a:

$$M \geqq \sigma,$$

et en tout point qui ne fait pas partie de G', on a:

$$M \leqq \sigma.$$

Si on suppose que $f(x)$ est *ponctuellement variable relativement au continu,* G (et par suite G') est *non dense* par rapport au continu.

Soit $A(x_0)$ un point de G'. Je considère simultanément les deux nombres $M[f(x), C, x_0]$ et $M[f(x), G', x_0]$; je vais démontrer qu'ils sont égaux.

D'abord on a certainement:

$$M(G', x_0) \leqq M(C, x_0),$$

car tous les couples de points qui sont à considérer dans la définition de $M(G', x_0)$, le sont aussi dans la définition de $M(C, x_0)$.

Je dis maintenant qu'on ne peut pas avoir:

$$M(G', x_0) < M(C, x_0).$$

Supposons en effet que cela puisse avoir lieu; prenons alors un nombre λ tel qu'on ait:

$$M(G', x_0) < \lambda < M(C, x_0),$$

et en même temps:

$$\lambda > \sigma.$$

On peut, d'après cela, déterminer un intervalle BB' contenant le point $A(x_0)$, tel que, pour tout couple HK de points de G' contenus dans cet intervalle, on ait:

$$|r^t HK| < \lambda.$$

Soit alors PQ $(x_P < x_Q)$ un couple de points *quelconques* pris dans l'intervalle; soit H le point de G' qui est le plus voisin de P, à droite de P, et K le point de G' qui est le plus voisin de Q, à gauche de Q; on a ainsi:

$$x_P \leqq x_H \leqq x_K \leqq x_Q.$$

De plus, il n'y a, entre P et H, ou bien entre K et Q, aucun point de l'ensemble G'. De cette manière, il est certain qu'on a:

$$|r^t PH| \leqq \sigma,$$
$$|r^t KQ| \leqq \sigma,$$

car si l'on avait, par exemple: $r^t PH > \sigma$, il y aurait entre P et H un point de G, ce qui ne peut pas être. On a en outre:

$$|r^t HK| < \lambda.$$

Or, la quantité $r^t PQ$ est comprise entre les valeurs extrêmes des quantités $r^t PH$, $r^t HK$, $r^t KQ$. On a donc:

$$|r^t PQ| < \lambda.$$

Comme P et Q sont deux points quelconques de l'intervalle BB', on devrait avoir:

$$M[C, x_0] \leqq \lambda,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, on a:

$$M[G', x_0] = M(C, x_0),$$

ce qui montre qu'en tout point de l'ensemble parfait G', on a:

$$M(G', x_0) \geqq \sigma.$$

Donc, sur l'ensemble parfait G', la fonction considérée ne peut pas être ponctuellement variable; nous pouvons dire qu'elle est, sur G', *totalement variable*, ou même *totalement croissante.*

La conclusion de cette étude est, que, *si une fonction est continue et est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait, elle est constante.*

Pour se convaincre de la nécessité des raisonnements que nous venons de faire, il suffit de se rappeler qu'une fonction peut être continue, non constante, et telle que, dans tout intervalle, il en existe un autre où elle est constante (*). Autrement dit, une fonction peut être continue et être ponctuellement variable relativement au continu, sans être constante.

D'autre part, si on supprime la condition de la continuité, le théorème ne s'applique plus. Prenons par exemple la fonction discontinue égale partout à 0, sauf en un point, où elle a la valeur 1. Cette fonction, qui n'est pas constante, est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait.

99. L'application des résultats précédents à l'intégration de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$ est immédiate, et nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Toute fonction $f(x, y)$, *continue par rapport à* (x, y), *et possédant en tout point des dérivées* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *satisfaisant à la relation:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

est de la forme:

$$\varphi(x-y),$$

$\varphi(u)$ *représentant une fonction continue de* u *qui a une dérivée déterminée en chaque point.*

Si on compare ce résultat avec les résultats courants, on voit que notre démonstration est plus complète que la démonstration par le changement de variables, en ce sens que nous ne faisons sur les dérivées aucune autre hypothèse que celle de leur existence. Il resterait, pour terminer la question, à voir ce qui se passe lorsqu'on n'assujettit plus la fonction à être continue par rapport à l'ensemble des variables, mais seulement par rapport à chacune d'elles.

(*) L. Scheeffer, *Acta Mathematica,* Tome V, page 289.

100. Les résultats que nous venons d'obtenir pour l'équation simple : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, s'étendent sans difficulté à toute équation de la forme :

$$X(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Lorsqu'on se place au point de vue ordinaire, on cherche d'abord les courbes satisfaisant à la relation différentielle :

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Ces courbes sont les caractéristiques de l'équation (1); si l'on admet que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions continues, la fonction $f(x, y)$ admet une différentielle totale :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

On voit alors que cette fonction doit être constante sur les caractéristiques. Cherchons dans quelle mesure nous pouvons étendre ce résultat.

Je me place dans les hypothèses suivantes : Dans une certaine aire S, il existe une famille de courbes :

$$\varphi(x, y) = u,$$

de sorte que, par tout point de l'aire, passe une courbe et une seule de cette famille ; $\varphi(x, y)$ a en tout point des dérivées continues par rapport à (x, y); il y a ainsi, en chaque point (x_0, y_0), une tangente déterminée pour la courbe qui passe en ce point ; l'angle α de cette tangente avec $0x$ est donné par la formule :

$$\frac{\cos\alpha}{X(x_0, y_0)} = \frac{\sin\alpha}{Y(x_0, y_0)} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Enfin, X et Y sont *limités* dans l'aire que nous considérons.

Soit C une de ces courbes, E un ensemble parfait de points pris sur C; je dis que *la fonction $f(x, y)$, relativement à E, est ponctuellement variable.* Il suffit, pour le démontrer, d'interpréter le résultat général énoncé au § 95 :

Il existe dans E des points *réguliers par rapport à E*; si A est un de ces points, à ε correspond un cercle de centre A tel que, si P et Q sont deux points de E pris dans ce cercle, on a:

$$\left| r^t P Q - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot \cos(0x, PQ) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot \sin(0x, PQ)\right]\right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Dans le cas actuel, si α est l'angle de la tangente à C en A avec $0x$, les quantités $\cos(0x, PQ)$, $\sin(0x, PQ)$, sont infiniment voisines de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, qui sont proportionnelles à $X(A)$, $Y(A)$; donc, en tenant compte de l'équation (1), la relation d'inégalité (2) donne lieu à celle-ci:

$$| r^t P Q | < \varepsilon_1, \qquad (3)$$

ε_1 pouvant devenir aussi petit qu'on veut. Cette inégalité (3) exprime la proposition que je voulais démontrer.

On déduit de là que, si $f(x, y)$ est assujettie à être continue par rapport à (x, y), elle doit être constante sur les caractéristiques, *la chose étant démontrée indépendamment de toute hypothèse sur les dérivées autre que celle de leur existence.*

101. Nous pouvons enfin donner encore une extension à ces résultats, en considérant le cas de l'équation à n variables:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \qquad (1)$$

En premier lieu, on fera une étude sur les conséquences qu'entraîne, pour une fonction de n variables, l'hypothèse de l'existence de dérivées partielles en chaque point; dans le cas général, cette étude présenterait des difficultés, analogues à celles que nous avons rencontrées dans l'étude des fonctions de n variables, continues par rapport à chacune d'elles, dès que n est égal à 3.

Mais si l'on suppose que $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables, on a immédiatement un résultat très simple; en effet, appellons $\alpha_\sigma(x_1, x_2, \ldots x_n)$ la fonction définie au § 91, et relative à x_1; dans l'hypothèse de la continuité de f, cette fonction α_σ est *semi-continue supérieurement par rapport à l'ensemble* $(x_1, x_2, \ldots x_n)$; on en déduit que, sur toute courbe caractéristique de l'équation (1), la fonction f est à la fois continue et ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait; elle est donc constante.

Ici encore nous avons accompli un progrès: nous avons supprimé la restriction de la continuité des dérivées.

Je ferai remarquer qu'il existe certainement des fonctions *non continues par rapport à l'ensemble des variables* et satisfaisant à l'équation (1); par exemple, si nous envisageons l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

la fonction que j'ai déjà considérée au § 86, qui est égale à 0 pour les points de la droite $x = y = z$, et à :

$$\frac{(x-z)(y-z)(x-y)}{[(x-z)^2 + (y-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

pour les autres points de l'espace, satisfait en tout point à l'équation aux dérivées partielles (2); cela résulte de ce qu'elle est constante sur chaque parallèle à $x = y = z$; mais on voit qu'elle est discontinue par rapport à l'ensemble (x, y, z).

CONCLUSION.

Dans l'introduction, j'ai montré comment les différentes questions traitées dans ce travail peuvent être considérées à un même point de vue. On voit à prèsent que les méthodes qui ont été employées pour les résoudre présentent aussi entre elles les plus grandes analogies. La théorie des ensembles de points joue un rôle très important dans ces méthodes; on peut même dire, d'une manière générale, que, dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés, tout problème relatif à la théorie des fonctions conduit à certaines questions relatives à la théorie des ensembles; et c'est dans la mesure où ces dernières questions sont avancées ou peuvent l'être qu'il est possible de résoudre plus ou moins complètement le problème donné.

Les questions dont l'étude fait l'objet de ce mémoire en appellent une foule d'autres. En ce qui concerne les fonctions d'une variable, il y aurait lieu de poursuivre l'étude des différentes classes de fonctions définies au chapitre III; il faudrait ensuite faire une étude analogue pour les fonctions de plusieurs variables, étudier en particulier, d'une manière plus approfondie qu'on ne l'a fait au chapitre IV, les fonctions de n variables, continues par rapport à chacune d'elles; il y aurait lieu aussi de chercher à résoudre, aussi complètement que possible, la question posée au chapitre V au sujet des équations aux dérivées partielles.

On voit qu'il y a là tout un groupe de problèmes, dont quelques-uns seulement, choisis parmi les plus simples, ont été étudiés dans ce travail.

Vu et approuvé :

Paris, le 1er août 1898.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 1er août 1898.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

TABLE DES MATIÈRES

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Principales propositions relatives aux surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre.

Vu et approuvé :

Paris, le 1er août 1898.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 1er août 1898.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

3464-98 Milan. — Imprimerie BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.