ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

THÈSES

DE

MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE,

SOUTENUES

DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

Par F. Chevet.

PARIS,
IMPRIMERIE D'ADOLPHE EVERAT ET COMPAGNIE,
Rue du Cadran, 14 et 16.

1837.

PROFESSEURS.

MM. Thénard, doyen.
Lacroix.
Biot.
Poisson.
Francoeur.
Beudant.
Dulong.
Geoffroy St-Hilaire.
Mirbel.

PROFESSEURS ADJOINTS.

MM. de Blainville.
Pouillet.
Constant Prevost.
Dumas.
Auguste St-Hilaire.
Libri.

SUPPLÉANTS.

MM. Lefébure de Fourcy.
Adrien de Jussieu.

A Monsieur **BOURDON**,

Inspecteur-général de l'Université.

Hommage de respect et d'attachement.

F. Chevet.

PROGRAMME

DE LA

THÈSE DE MÉCANIQUE.

ATTRACTION D'UN ELLIPSOÏDE HOMOGÈNE.

Expressions des trois composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène, sur un point situé dans l'espace d'une manière quelconque, l'attraction ayant lieu en raison inverse du carré de la distance.

Ces expressions s'intègrent immédiatement une première fois, en faisant usage de coordonnées polaires, ayant leur origine au point attiré. Après cette première intégration, le problème présente deux cas tout-à-fait distincts, suivant que le point attiré est intérieur ou extérieur à la masse de l'ellipsoïde.

Si le point attiré est intérieur, un changement de variables permet de suite une seconde intégration. Les trois intégrales simples que l'on obtient alors n'en constituent que deux distinctes. Lorsque l'ellipsoïde est de révolution, les formules s'intègrent encore et sous forme finie en logarithmes ou en arcs-tangentes, suivant que cet ellipsoïde est alongé ou aplati. Lorsqu'il est quelconque, on peut obtenir l'expression des trois composantes de son attraction, sous une forme très-symétrique et qui permet de les déduire l'une de l'autre par la simple permutation des axes et des coordonnées du point attiré, rapportées aux axes principaux de l'ellipsoïde; on ne peut toutefois les intégrer sous forme finie.

Si le point attiré est extérieur, la difficulté analytique pour amener la solution du problème à ce dernier terme, peut être éludée au moyen d'un théorème qui la fait dépendre immédiatement de celle relative au cas où le point attiré est intérieur, et dont voici l'énoncé : si l'on a deux ellipsoïdes homogènes de même centre et de mêmes foyers, l'attraction suivant chaque axe que l'un des deux corps exerce sur un point situé à la surface de l'autre, est à l'attraction de celui-ci sur le *point correspondant* de la surface du premier, comme le produit des deux autres axes du premier ellipsoïde est au produit des deux autres axes du second. A la question d'analyse, on substitue par ce théorème, dû à M. Yvori, une simple question de géométrie, qui se réduit à trouver les axes d'un second ellipsoïde, d'après ceux du premier et d'après les coordonnées du point donné.

L'analyse si puissante de M. Poisson a triomphé de l'excessive difficulté que présentait la solution analytique directe de la question, et que les plus célèbres géomètres avaient en vain tenté de surmonter avant lui.

En différentiant le résultat de l'intégration immédiate relatif au point extérieur, par rapport au grand axe considéré comme variable, on obtient des expressions qui, multipliées par l'élément de cet axe, représentent les composantes de l'attraction exercée sur le point extérieur par une couche elliptique élémentaire comprise entre deux surfaces concentriques et semblables, et qui sont des intégrales doubles dont les limites se déduisent de la considération de la portion de surface sphérique déterminée par le cône tangent à cette couche, et ayant son sommet au point attiré. En sorte que si l'on peut obtenir ces expressions en fonction de l'axe variable, on n'aura plus qu'à les multiplier par l'élément de cet axe, et à intégrer depuis zéro jusqu'à la valeur de l'axe qui répond à l'ellipsoïde entier pour avoir l'attraction totale.

On y parvient en rapportant les coordonnées à un nouveau système d'axes rectangulaires passant toujours par le point attiré, mais d'une direction indéterminée, dont on dispose de manière à faire évanouir les rectangles des coordonnées dans l'équation de la surface cônique tangente à une couche elliptique quelconque. On a alors à déterminer les trois coefficients des carrés des coordonnées, puis les neuf cosinus qui fixent la direction des axes à laquelle est dû l'évanouissement des rectangles. Il y a donc douze équations entre douze inconnues à résoudre : mais les calculs se simplifient d'une manière remarquable par un choix convenable du mode d'élimination; et les neuf cosinus, aussi bien que les trois coefficients s'expriment très-simplement en fonction des coefficients de l'équation primitive de la surface cônique. L'équation simplifiée de cette surface montre que l'un des axes rectangulaires auxquels on a rapporté les coordonnées, est l'axe même du cône tangent à chaque couche elliptique, et la substitution des valeurs qui en résultent pour les cosinus des angles primitifs du rayon vecteur, font voir que l'attraction est dirigée suivant cet axe du cône, pour chaque couche elliptique infiniment mince, et les trois composantes de cette action s'obtiennent sous forme finie; un changement de variable porte une grande simplification dans ces expressions qui deviennent alors aussi simples que celles relatives au cas où le point attiré est intérieur. Enfin par un second changement de variable, on les obtient identiquement sous la même forme, et elles ne diffèrent des premières qu'en ce que chaque demi-axe est augmenté d'une certaine constante, dont la valeur est donnée par la racine positive unique d'une équation du troisième degré.

Dans l'un et l'autre cas, ces formules se ramènent facilement aux fonctions elliptiques, fonctions qui ont même module, et ne diffèrent que par leur amplitude. Cette conversion se fait fort simplement au moyen de la remarque que nous avons faite en parlant du cas relatif au point intérieur, savoir : que les trois intégrales qui expriment les composantes de l'attraction totale se réduisent à deux intégrales distinctes.

On peut, dans le cours de cette théorie, faire les remarques suivantes :

L'attraction d'un ellipsoïde homogène creux est nulle sur un point situé d'une manière quelconque dans l'espace vide, pourvu que cet espace vide soit terminé par une surface semblable et concentrique à celle de l'ellipsoïde.

L'attraction sur un point de sa propre masse se réduit à celle exercée par la partie de ce corps terminée par une surface semblable à la sienne et passant par le point attiré.

Chaque composante de l'attraction exercée sur un point intérieur, est proportionnelle à sa distance au plan principal de l'ellipsoïde, perpendiculairement auquel cette composante est dirigée.

La somme des différentielles de chaque composante, prises respectivement par rapport aux coordonnées du point attiré qui leur sont parallèles, et divisées par la différentielle de cette coordonnée, est une quantité constante ; si le point attiré fait partie de la masse de l'ellipsoïde, cette quantité est égale au produit de la densité qui a lieu au point attiré, par le quadruple du rapport de la circonférence au diamètre ; elle est nulle dans le cas où le point attiré est extérieur, et aussi lorsque ce point est situé dans la partie vide d'un ellipsoïde creux.

La somme des composantes divisées respectivement par les coordonnées du point attiré qui lui sont parallèles, est une quantité constante, dont l'expression relative au cas du point attiré extérieur se déduit simplement de celle relative au cas du point attiré intérieur.

Permis d'imprimer, l'inspecteur-général des études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris.

ROUSSELLES.

Vu et approuvé par le doyen des Facultés des Sciences de l'Académie de Paris.

Baron THÉNARD.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

PERTURBATIONS

DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE

DES COMÈTES.

Les éléments des orbites d'une même planète déterminés dans différents siècles, ne coïncident pas entre eux ; et ces inégalités, trop considérables pour être attribuées aux erreurs d'observations, sont dues à ce que le mouvement elliptique n'est véritablement qu'une approximation ; en effet, il n'a lieu qu'autant qu'on ne considère que l'action du soleil sur la planète dont on s'occupe, en faisant abstraction de l'action de tous les autres corps célestes. Ces inégalités, bien qu'elles aient besoin d'être séculaires pour devenir très-sensibles à nos moyens d'observations, qui, si parfaits qu'ils soient, ne peuvent jamais être rigoureux, n'en sont pas moins continues comme l'action des forces auxquelles elles sont dues. Si l'on veut les soumettre au calcul, on n'a qu'à suivre la marche indiquée d'avance par la dynamique, et qui consiste à supposer le mouvement rigoureusement elliptique, ou, ce qui revient au même, à supposer les éléments de l'orbite constants pendant un certain temps, et variant après ce temps, de toute la variation qu'ils ont acquise pendant sa durée, en vertu de l'action des forces perturbatrices, c'est-à-dire des forces distinctes de celles qui produisent l'action principale et réciproque du soleil et de la planète. Lorsque cette durée sera supposée infiniment petite, il est évident que la loi de continuité sera maintenue. On suppose donc que la planète se meut sur une ellipse dont les éléments varient d'une manière continue par l'effet des forces perturbatrices ; et il en résulte que l'orbite réelle est tangente à celles que l'on aura prises successivement comme fixes, pendant chacun des instants infiniment petits considérés.

Le problème général à résoudre est le suivant : connaissant le mouvement d'une planète soumise à l'action du soleil, on veut déterminer le mouvement qui résulterait de cette action principale, augmentée de celle de nouvelles forces très-petites par rapport à la première. Les altérations causées par ces forces très-petites ne pouvant être que très-petites elles-mêmes, il est naturel de prendre pour solution de la question, les intégrales trouvées dans le cas où l'on fait abstraction des forces perturbatrices, et d'y introduire de très-petites variations que l'on déterminera de manière à satisfaire aux équations du mouvement troublé, c'est-à-dire du mouvement réel. Soient donc les trois équations différentielles générales: $(\alpha)\ \frac{d^2x}{dt^2} + P = m'X;\ \frac{d^2y}{dt^2} + P' = m'Y;\ \frac{d^2z}{dt^2} + P'' = m'Z$, dans lesquelles P, P', P'', sont des fonctions de x, y, z, liées entre elles par la relation $P\,dx + P'dy + P''dz = dV$, V étant aussi fonction de x, y, z, et m' un très-petit coefficient; on connaît leurs intégrales $x = F(a, b, c, e, f, g, t)$; $y = F_1(a, b, c, e, f, g, t)$; $z = F_2(a, b, c, e, f, g, t)$; dans l'hypothèse $m' = o$, et ce sont ces intégrales qu'on veut faire concourir à déterminer le mouvement troublé, c'est-à-dire celui qui a lieu quand m' n'est plus nul, mais est seulement très-petit. Or, dans ce dernier cas, elles ne satisfont plus aux équations proposées, à moins qu'on ne fasse subir aux constantes, des modifications convenables.

Différentions ces équations intégrales, en faisant varier les constantes, il vient: $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)$ (1) $+ \frac{dx}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dx}{db}\frac{db}{dt} + \frac{dx}{dc}\frac{dc}{dt} + \frac{dx}{de}\frac{de}{dt} + \frac{dx}{df}\frac{df}{dt} + \frac{dx}{dg}\frac{dg}{dt}$. Les deux autres fourniront des résultats semblables en z et y; nous aurons six inconnues assujetties à vérifier les trois équations proposées; trois d'entre elles seront donc arbitraires, et ce qu'il y a de plus simple à faire, c'est de supposer que les différentielles premières de x, y, z, conservent la même forme dans le cas où l'on fait varier les arbitraires a, b, c, e, f, g, et dans celui où elles sont regardées comme constantes; ou à faire $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, et pour cela, à égaler à zéro la partie de chaque différentielle dx, dy, dz, qui résultera de la variabilité de ces arbitraires, ce qui n'est autre chose que supposer l'ellipse fixe pendant l'instant dt. Si l'on exprime par δ les différentiations prises relativement aux constantes seules, on aura donc: $\delta x = \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db +$ etc. $= 0$; $\delta y = \frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db + \frac{dy}{dc}dc +$ etc. $= 0$; $\delta z = \frac{dz}{da}da + \frac{dz}{db}db +$ etc. $= 0$; et si nous représentons $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, pzr $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, une seconde différentiation nous donnera

(1) Le signe ( ), indiquant la différentiation relative au cas de l'invariabilité des constantes.

$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{\delta x,}{dt}$; $\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{\delta y,}{dt}$; $\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{\delta z,}{dt}$, substituons dans les proposées, en vertu des relations (ϵ) $\frac{d^2x}{dt^2} + P = 0$; $\frac{d^2y}{dt^2} + P' = 0$; $\frac{d^2z}{dt^2} + P'' = 0$; il viendra : ($\gamma$) $\delta x, = m'X\,dt$; $\delta y, = m'Y\,dt$; $\delta z, = m'Z\,dt$; relations qui, jointes à $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, donneront six équations entre t, a, b, c, etc., da, db, dc, etc., c'est-à-dire, six équations différentielles du premier ordre entre un même nombre de quantités, da, db, etc., qu'elles devront déterminer; et ce qu'il y a d'intéressant à remarquer, c'est que la fonction perturbatrice ne portera aucune altération dans la forme analytique explicite des coordonnées x, y, z; ni dans celle de leurs différences premières, et que chacune des différentielles de $x,$, $y,$, $z,$, prise seulement par rapport aux constantes, est exprimée par la composante suivant l'axe qui lui correspond, des forces perturbatrices, multipliée par l'élément du temps ; d'où résulte cet important théorème :

Toute intégrale finie et toute équation différentielle première conviennent également au mouvement troublé, si elles conviennent au mouvement non troublé; et l'équation différentielle du premier ordre étant elle-même différentiée conviendra encore au mouvement troublé, pourvu qu'on ne fasse varier que les constantes et les différences premières des coordonnées, et qu'on donne pour valeur aux accroissements de ces dernières, les variations mêmes qui résultent des actions perturbatrices.

Les procédés ordinaires d'élimination pour tirer des six équations (γ), les valeurs des différentielles da, db, dc, etc., donneraient lieu à des calculs très-compliqués; mais, par le beau théorème de Lagrange, ces différentielles des constantes s'obtiennent en fonction des différences partielles de la fonction perturbatrice R, au moyen des relations

$$(\delta)\ \frac{da}{dt} = (a,b)\frac{dR}{db} + (a,c)\frac{dR}{dc} + (a,e)\frac{dR}{de} + (a,f)\frac{dR}{df} + (a,g)\frac{dR}{dg}.$$
$$\frac{b}{dt} = (b,a)\frac{dR}{da} + (b,c)\frac{dR}{dc} + (b,e)\frac{dR}{de} + (b,f)\frac{dR}{df} + (b,g)\frac{dR}{dg}.$$

etc. . . .

dans lesquelles (a,b), (a,c) ... etc., sont des coefficients indépendants du temps égaux et de signes contraires pour les éléments correspondants.

Les équations du mouvement d'une planète troublée par l'action des autres corps célestes sont : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{dR}{dx}$; $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{dR}{dy}$; $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{dR}{}$.
x, y, z, sont les coordonnées de la planète par rapport au soleil, r sa distance

à cet astre, la fonction perturbatrice $R = \Sigma\, m' \left[\left(\frac{1}{(x-x')^2+(y'-y')^2+(z-z')^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{xx'+yy+'zz'}{r'^3} \right]$; $\mu = M + m$, M étant la masse du soleil, m celle de la planète; R comme on le voit, ne contient que les masses troublantes m', m'', m''', etc., dont les coordonnées sont d'ailleurs x', y', z', x'', y'' z'', etc. Si dans une première approximation on néglige les quantités de l'ordre du carré des masses perturbatrices, on pourra substituer pour ces coordonnées leurs valeurs en fonction des éléments elliptiques a, b, c, etc., a', b', c', etc., et du temps t. Concevons cette fonction développée en série ordonnée par rapport à t; (R) étant le premier terme, c'est-à-dire celui qui est indépendant du temps, sa substitution dans les formules (δ) ne donnera, après les intégrations, que des termes croissant avec le temps d'une manière continue. L'autre partie de R donnera, par la nature du développement, des termes qui renferment des fonctions périodiques, et ne croissent pas, par conséquent, d'une manière continue; ce sont les *inégalités séculaires;* elles sont entièrement indépendantes de la position de la planète troublée et des planètes perturbatrices; les autres ne dépendant au contraire que des positions relatives des masses réagissantes et de leur situation dans leurs orbites, à l'égard de leurs nœuds et de leurs aphélies, reprennent les mêmes valeurs toutes les fois que le système reprend les mêmes états, ce sont les *inégalités périodiques.* Leur influence ne peut porter aucune atteinte à la stabilité de notre système planétaire; elle ne fait qu'altérer la position de la planète sur son orbite. Quant aux inégalités séculaires, rien ne dit à priori qu'elles ne finiront pas par le bouleverser complétement. L'intégration des équations (δ) peut seule nous l'apprendre, et dans l'état actuel de l'analyse, cette intégration ne peut pas s'effectuer d'une manière exacte; on est alors obligé d'avoir recours aux méthodes d'approximation, et c'est ici que le problème général se partage en deux, suivant que l'astre que l'on considère a une orbite dont l'excentricité et l'inclinaison sont très-petites, ou qu'au contraire il a une orbite dont l'excentricité et l'inclinaison sont considérables. Les planètes sont dans le premier cas, et les comètes dans le second. Lorsque les excentricités et les inclinaisons sont très-petites, la méthode des approximations successives permet d'obtenir les valeurs finies des altérations des éléments avec toute l'exactitude désirable. On a alors des formules qui embrassent un nombre indéfini de révolutions et qui, par de simples substitutions numériques, fournissent immédiatement l'altération de l'élément considéré, à une époque donnée quelconque d'ailleurs. Mais si les excentricités et les inclinaisons sont très-grandes, le développement de R, cesse d'être convergent, et l'on est forcé de renoncer aux avantages que présente la forme des expressions (8), des variations différentielles des éléments.

La méthode la plus avantageuse est alors celle des quadratures, qui consiste à partager la courbe décrite en portions très-petites, à déterminer les altérations des éléments dans l'étendue de chacune d'elles, et à en déduire ensuite les altérations en un point quelconque de l'orbite. Cette méthode exige que chaque différentielle soit donnée sous la forme $F(x)dx$; et l'on y parvient très-facilement en appliquant aux formules du mouvement elliptique, le principe fondamental de la théorie de la variation des constantes arbitraires énoncé précédemment.

Expressions différentielles des éléments d'une comète troublée par l'action d'une planète.

Je dis d'abord que : en négligeant, comme on le fait ordinairement, les quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices, nous pourrons considérer séparément l'action de chaque masse troublante, quel que soit d'ailleurs leur nombre, et que nous aurons l'altération totale résultant de leurs actions simultanées en faisant la somme des altérations que chacune d'elles aura causées individuellement. En effet, si l'action de m'', par exemple, modifie le mouvement de m', les termes qui en proviennent, auront m'' en facteur commun ; et si ces termes, à leur tour, en introduisent de nouveaux dans l'expression du mouvement de m, ces derniers sont nécessairement affectés du produit $m'\,m''$, et doivent par conséquent être négligés quand on se borne à la première dimension des masses.

En négligeant la masse de la comète par rapport à celle du soleil, que nous prendrons pour unité, les équations du mouvement de la comète seront : $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{r^3}=\frac{dR}{dx}$; $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y}{r^3}=\frac{dR}{dy}$; $\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}=\frac{dR}{dz}$; dans lesquelles $R = m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)$; $\rho=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

Dans le cas où $m'=0$, on a pour intégrales :

$$(1)\ \frac{xdy-ydx}{dt}=c'\ ;\ \frac{zdx-xdz}{dt}=c''\ ;\ \frac{ydz-zdy}{dt}=c'''\ ;$$

$$(2)\ \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2}{r}+\frac{1}{a}=0$$

$$(3)\ \frac{x}{r}=c'\frac{dy}{dt}-c''\frac{dz}{dt}-f'\ ;\ \frac{y}{r}=c'''\frac{dz}{dt}-c'\frac{dx}{dt}-f''\ ;\ \frac{z}{r}=c''\frac{dx}{dt}-c'''\frac{dy}{dt}-f'''$$

auxquelles il faut joindre les relations :

$$(4)\ c'''f'+c''f''+c'f'''=0\ ;\ c'^2+c''^2+c'''^2=c^2=a(1-e^2)\ ;\ f'^2+f''^2+f'''^2=f^2=e^2$$

(5) $\frac{1-f^2}{c^2}=\frac{1}{a}$; (6) $r=a(1-e\cos u)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}$; (7) $nt+\varepsilon-\omega=u-e\sin u$; (8) $a^3n^2=1$.

(9) $\frac{c'''}{c'}=\sin\theta\ \mathrm{tang}\,\varphi$ $\frac{c''}{c'}=\cos\theta\ \mathrm{tang}\,\varphi$; $\mathrm{tang}\,\omega=\frac{f''c}{f'c'}$.

Le plan de l'écliptique est pris pour celui des x, y; a, e sont le demi-grand axe et l'excentricité, qui déterminent la forme de l'orbite ; φ et θ sont l'inclinaison de l'orbite et la longitude du nœud, ils fixent la position du plan par rapport à un autre plan choisi arbitrairement, et que nous avons pris pour celui de l'écliptique ; ω est la longitude du périhélie et place le grand axe de la courbe dans son plan ; ε est la longitude moyenne de l'astre à l'époque que l'on a prise pour origine du temps, ou la longitude de l'époque ; $nt+\varepsilon-\omega$ l'anomalie moyenne, d'où l'on déduit l'anomalie vraie $v-\omega$, laquelle place la planète sur son orbite ; nt est le moyen mouvement. Enfin u est l'anomalie excentrique.

Toutes ces formules du mouvement elliptique conviennent à une planète quelconque ; dans le cas des comètes, le seul qui nous occupe, on y introduit quelques simplifications en prenant pour plan des x, y, celui même de la comète à un instant donné, en sorte que z sera de l'ordre des forces perturbatrices, et nul avec t ; $\mathrm{tang.}\ \varphi$ et par suite c'', c''', et f''' seront dans le même cas ; les carrés de toutes ces quantités ou leurs produits par celles de leur ordre seront donc négligeables.

Nos intégrales (1) (2) et (3) contenant les constantes arbitraires combinées avec les coordonnées de la comète, et leurs différences premières divisées par l'élément du temps, nous permettent d'exprimer facilement les altérations des éléments de l'orbite en fonction de R et de ses différentielles exprimées elles-mêmes au moyen des coordonnées de la comète et de la planète perturbatrice.

Les différentielles des éléments elliptiques seront données par les équations :

(A) $\frac{dc'}{dt}=m'(xY-yX)$; $\frac{dc''}{dt}=-m'xZ$; $\frac{dc'''}{dt}=m'yZ$; $d.\frac{1}{a}=-2m'(Xdx+Ydy)$;

$df'=m'(xY-yX)dy+m'(xdy-ydx)Y$; $df''=m'(yX-xY)dx+m'(ydx-xdy)X$.

en faisant $m'X=\frac{dR}{dx}$; $m'Y=\frac{dR}{dy}$; $m'Z=\frac{dR}{dz}$;

Des équations (9) et (4) on tire d'ailleurs $e\sin\omega=f''$; $e\cos\omega=f'$ d'où $de=df'$; $ed\omega=df''$; $d.\ \mathrm{tang}\,\varphi\sin\theta=\frac{dc'}{\sqrt{a(1-e^2)}}$; $d.\ \mathrm{tang}\,\varphi\cos\theta=\frac{dc''}{\sqrt{a(1-e^2)}}$ en prenant la ligne des absides pour axe des x, ce qui rejette ω dans l'ordre des forces perturbatrices.

L'orbite fixe est connue de forme et de position. Les équations précédentes étant intégrées, détermineront l'orbite troublée par rapport à la première ; la trigonométrie sphérique nous la donnera ensuite par rapport à un plan quelconque. Il ne nous faut donc plus que la différentielle de l'anomalie moyenne.

De la relation (6) on tire : $Cos(v-\omega)(1-ecosu)=cosu-e$; et (7) donne : $nt+\varepsilon-\varpi=u-esinu$; différentions par rapport aux constantes ; on en tire : $du=-\frac{1-ecosu}{\sqrt{1-e^2}}d\omega-\frac{sinu}{1-e^2}de$ d'ailleurs $r=a(1-ecosu)$ donne : $da(1-ecosu)-adecosu+aedusinu.=0$. La valeur de du qu'on en tire, étant substituée dans les deux premières, il vient :

$$ae\sqrt{1-e^2}.\ d\omega\ sin\,u+ade(e+cosu)-da(1-e^2)=0\ ;\ (d\varepsilon-d\omega)aesinu+ade(e-cosu)+da(1-ecosu)^2=0$$

faisant la somme on obtient :

$$d\varepsilon-d\omega\ (1-\sqrt{1-e^2})=\frac{d.\ a(1-e^2)-da(1-eeosu)^2}{aesinu}$$

mais $d.\ a(1-e^2)=\sqrt{a(1-e^2)}d.\ \sqrt{a(1-e^2)}$; substituant pour da et pour $d.\ \sqrt{a(1-e_2)}$ leurs valeurs ; il vient enfin : (A') $d\varepsilon=d\omega(1-\sqrt{1-e^2})-2andt.m'(xX+yY)$, formule qui déterminera $d\varepsilon$ lorsque $d\omega$ sera lui-même connu. $a^3n^2=1$, donne d'ailleurs (A'') $dn=-3an.\ m'(Xdx+Ydy)$.

Quant à l'altération du temps périodique, si l'on nomme ζ l'anomalie moyenne, on a dans le mouvement elliptique : $\zeta=nt+\varepsilon-\omega$, qui convient aussi au mouvement troublé ; si l'on différentie relativement à ce dernier cas, on aura : $d.\zeta=dt\!\int\! dn+d\varepsilon-d\omega$ et $\int d\zeta=t\!\int\! dn-\int tdn+\int d\varepsilon-\int d\omega.$; après un temps quelconque t, on aura donc généralement dans l'orbite troublée $\zeta=Nt+\varepsilon-\omega+\int d\zeta$, ou $\zeta=Nt+\int d\zeta$, si l'on compte le temps à partir du passage au périhélie. Si T est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs ; $\int d\zeta=T\!\int\! dn-\int tdn+\int d\varepsilon-\int d\omega$, donne, pour calculer l'époque du retour suivant, la relation $2\pi=NT+\int d\zeta$; mais la constante N étant relative au passage qui précède celui dont on part pour calculer le suivant, est affectée des perturbations que l'astre a éprouvées pendant cette période ; il faut donc chercher la valeur de N à l'époque dont on part. Or T étant l'intervalle des deux passages qui précèdent celui qu'on cherche à déterminer, on aura au premier passage $N=\frac{2\pi-\int d\zeta}{T}$, l'intégrale s'étendant depuis l'époque de ce premier passage jusqu'à celle du second ; e, ε, ω, résultant des observations faites à ce même premier passage. Si N' est la valeur de N au second passage, on aura $N'=N+\int dn$, l'intégrale ayant les limites précédentes ; si donc T' est l'intervalle compris entre le second et le troisième passage, on aura pour l'époque que l'on cherche à assigner $2\pi=N'T'+\int d\zeta$, expression dans laquelle

$\int d\zeta = t\overline{\int dn} - \overline{\int t dn} + \overline{\int d\varepsilon} - \overline{\int d\omega}$, les intégrales surmontées d'un trait commençant au second passage et finissant à $t = T$.

Mettant pour x et y leurs valeurs en anomalie excentrique, nous aurons donc pour les variations infiniment petites des éléments de l'orbite :

$$da = -2m'a^3 du (X \sin u - Y\sqrt{1-e^2}.\cos u); \quad d.\,\tang \varphi \sin \theta = \frac{m' r y Z}{\sqrt{1-e^2}} du$$

$$(\text{A}''') \quad de = m'a\sqrt{1-e^2} du [(xY - yX)\cos u + Yr]; \quad d.\,\tang\varphi \cos\theta = \frac{m'.rxZ}{\sqrt{1-e^2}} du$$

$$ed\omega = m'a\, du[\sin u(xY - yX) - \sqrt{1-e^2}.rX]; dn = 3m'a^2 n du (X \sin u - Y\sqrt{1-e^2}.\cos u)$$

$$d\varepsilon = (1 - \sqrt{1-e^2}) d\omega - 2m' du (xX + yY) r.$$

formules dans lesquelles x, y, r sont connus en u.

Variations finies des éléments de l'orbite.

Les équations du mouvement elliptique, quand on représente par δx, δy, δz, les altérations que les forces perturbatrices portent dans les coordonnées de la comète, deviennent, en négligeant les quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices :

$$(\text{B}) \quad \frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{\delta x}{r^3} - \frac{3x\delta r}{r^4} \quad \frac{dR}{dx}; \quad \frac{d^2\delta y}{dt^2} + \frac{\delta y}{r^3} - \frac{3y\delta r}{r^4} = \frac{dR}{dy}; \quad \frac{d^2\delta z}{dt^2} + \frac{\delta z}{r^3} - \frac{3z\delta r}{r^4} = \frac{dR}{dz};$$

si l'on connaît les valeurs de δx, δy, δz, qui satisfont à ces équations, en les ajoutant aux valeurs elliptiques de x,y,z, on aura les intégrales complètes des trois équations différentielles du mouvement de la comète. On obtient facilement de semblables valeurs dans les deux cas extrêmes où la comète est très-rapprochée ou très-éloignée du soleil par rapport à ses distances aux planètes perturbatrices.

Dans le premier cas, l'inspection de $R = m' \left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) =$
$= m'\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{(xx'+yy'+zz')^2}{r'^5} + \&\right]$, fait voir que les trois différentielles partielles de R seront de l'ordre du carré des forces perturbatrices, quand x, y, z, seront de l'ordre de m', et les altérations qui en résulteront seront insensibles; d'où $\frac{dR}{dx} = 0$, $\frac{dR}{dy} = 0$, $\frac{dR}{dz} = 0$.

Si, au contraire, le rayon vecteur de la comète est très-considérable, on peut dans $R = m'\left[-(+xx'+yy'+zz')\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)\right] + R'$

où $R'=\frac{1}{2}m'\left[-\frac{r'^2}{r^3}+3\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^5}+5\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^7}+\&^a\right]$; négliger R' qui est, dans cette circonstance, très-petit par rapport à R; et les équations qui fournissent les variations différentielles des éléments sont satisfaites par des valeurs de δx, δy, δz, facilement assignables.

En différentiant R, avec abstraction de R', on trouve : $\frac{dR}{dx}=m'\left(\frac{x'-x}{r^3}-\frac{x'}{r'^3}-\frac{3x}{r^5}(xx'+yy'+zz')\right)$ valeur exacte à cela près des quantités de l'ordre $\frac{m'}{r4}$. La première de nos équations (B) devient, après simplification : $\frac{d^2\delta x}{dt^2}-m'\frac{d^2x'}{dt^2}+m'\frac{d^2x}{dt^2}=(\delta x-m'x')\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+(\delta y-m'y')\frac{3xy}{r^5}+(\delta z-m'z')\frac{3xz}{r^5}$. Les deux autres donneraient des résultats analogues. Il est facile de voir que $\delta x=m'x'$, $\delta y=m'y'$, $\delta z=m'z'$, satisfaisant à cette équation, abstraction faite de $m'\frac{d^2x}{dt^2}$; $\delta x=m'x'+\frac{1}{3}m'x$; $\delta y=m'y'+\frac{1}{3}m'y$; $\delta z=m'z'+\frac{1}{3}m'z$, y satisfont en rétablissant ce terme. Si l'on exige une approximation plus grande, on fera $\delta x=m'x'+\frac{1}{3}m'x+\delta'x$, et $\delta'x$ se déterminera par l'équation $\frac{d^2\delta'x}{dt^2}+\frac{\delta'x}{r^3}-\frac{3x\delta'r}{r^4}=\frac{dR'}{dx}$, toute semblable aux équations (B), et qu'on intégrera par la méthode de la variation des constantes arbitraires; mais $\frac{dR'}{dx}$ étant très-petit par rapport à $\frac{dR}{dx}$, les calculs seront peu laborieux.

Les valeurs précédentes de δx, δy, δz, et leurs différentielles substituées dans les équations (1) (2) (3), différentiées d'abord en δ, deviennent successivement :

$$\delta a=-\frac{2}{3}m'a+2m'a^2\left(\frac{1}{r}+\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\right);$$

$$\delta n=m'n-3m'an\left(\frac{1}{r}+\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\right);$$

$$\delta f'=m'\left[f'+\frac{x}{r}+y\frac{(xy'-yx')}{r^3}+dy'\frac{(xdy-ydx)}{dt^2}+dy\frac{(xdy'-y'dx+x'dy-y\,dx')}{dt^2}\right]$$

$$\delta f''=m'\left[f'+\frac{y}{r}-x\frac{(xy'-yx')}{r^3}-dx'\frac{(xdy-ydx)}{dt^2}-dx\frac{(xdy'-y'dx+x'dx-ydx')}{dt^2}\right]$$

$$\delta c''=m'\frac{(xdz'-z'dx)}{dt};\quad \delta c'''=m'\frac{(ydz'-z'dy)}{dt}.$$

On a d'ailleurs :

$\delta f' = \delta e$; $\delta f'' = e\delta\omega$; $\delta c'' \quad \sqrt{a(1-e^2)}\delta.\ tang\ \varphi\ sin\ \theta$; $\delta c''' = \sqrt{a(1-e^2)}\ \delta\ tang\ \varphi\ cos\ \theta$.

Soit ζ l'anomalie moyenne, $m'l$ la valeur de δn au point où a lieu la séparation de R en deux parties ; on aura après un temps quelconque compté de ce point :

$\delta\zeta = -m'lt' + \int \delta\, ndt + \delta\varepsilon - \delta\omega = m'lt' + \delta\varepsilon - \delta\omega$, en comprenant $\int \delta\, ndt$ dans δ pour plus de simplicité ; mais généralement on a $nt + \varepsilon - \omega = u - esin\ u$; différentiant en δ il viendra $\delta\varepsilon - \delta\omega = \delta u\ (1 - ecosu) - \delta e\ sinu$. L'équation du mouvement elliptique $\cos(v - \omega)\ (1 - ecosu) = cosu - e$ donnera de même $\delta u = (\delta v - \delta\omega)\dfrac{1 - ecosu}{\sqrt{1-e^2}} - \delta e\dfrac{sinu}{1-e^2}$; substituant dans la précédente, on obtient : $\delta\varepsilon - \delta\omega \quad - \delta e\ sin\ u\ (2 - e^2 - ecosu) + \dfrac{(\delta v - \delta\omega)(1 - ecosu)^2}{\sqrt{1-e^2}}$. Différentions x et y exprimés en anomalie vraie, par rapport à δ ; on a, puisque $x\delta y - y\delta x = r^2\delta v$; $r^2 = a^2(1 - e\ cosu)^2$: $\delta\zeta = -m'lt' + \dfrac{x\delta y - y\delta x}{a^2\sqrt{1-e^2}} + \delta e.\ \dfrac{sinu\,(2 - e^2 - ecosu)}{1-e^2} - \dfrac{\delta\omega\,(1 - ecosu).}{\sqrt{1-e^2}}$

Telles seront les altérations dues à la partie de R indépendante de R' ; il faut maintenant calculer celles qui sont dues à cette seconde partie.

$$\text{On a R}' = \frac{m'}{2}\left[\begin{array}{l} -\dfrac{r'^2}{r^3} + 3\,(xx' + yy' + zz' - \tfrac{1}{2}r'^2)^2 + 5\,(xx' + yy' \\ + zz' - \tfrac{1}{2}r'^2)^3 + \& \end{array}\right]$$

la différentiation donne :

$$\frac{dR'}{dx} = m'\,(Px + P'x')\ ;\ \frac{dR'}{dy} = m'\,(Py + P'y')\ ;\ \frac{dR'}{dz} = m'\,(Pz + P'z')\ ;$$

en faisant pour abréger :

$$P = -\frac{3}{2}\frac{r'^2}{r^5} - \frac{15}{2}\left(\frac{xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r'^2}{r^7}\right)^2 - \frac{35}{2}\left(\frac{xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r'^2}{r^5}\right)^3 - \&$$

$$P' = 3\left(\frac{xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r'^2}{r^5}\right) - \frac{15}{2}\left(\frac{xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r'^2}{r^7}\right)^2 - \&.$$

Si l'on représente $\dfrac{dR'}{dx}$, $\dfrac{dR'}{dy}$, $\dfrac{dR'}{dz}$, par X', Y', Z', et qu'on substitue dans les équations (A) ; elles reproduisent identiquement les formules (A''') dans lesquelles X, Y, Z, sont remplacés par X', Y', Z'. La méthode d'intégration à employer pour trouver les altérations finies dues à la portion R' de la fonction perturbatrice, depuis la séparation de cette fonction jusqu'au moment où l'on renoncera à cette séparation, est donc la même que celle qui nous fournira les altérations dues à la fonction perturbatrice tout entière depuis une époque quelconque jusqu'au moment de la séparation. Il semblerait, d'après cela, que cette séparation n'a pas un grand avantage ; on va voir que les calculs immenses que nécessite la méthode d'intégration à employer s'en trouvent cependant considérablement abrégés. En effet, on n'a pas jusqu'ici d'autre ressource que d'intégrer par quadratures, au moyen de l'équation :

$$(C) \int y dx = \alpha . \left[\tfrac{1}{2} y^0 + y^1 + y^2 \ldots + y^{n-1} + \tfrac{1}{2} y^n \right] - \frac{\alpha}{12} . \left[\Delta y^{n-1} - \Delta y^0 \right]$$

$$- \frac{\alpha}{24} . \left[\Delta^2 y^{n-2} + \Delta^2 y^0 \right] - \frac{19 . \alpha}{720} . \left[\Delta^3 y^{n-3} - \Delta^3 y^0 \right] - \frac{3 . \alpha}{160} . \left[\Delta_4 y n - \Delta^4 y^0 \right]$$

$$- \text{etc.}$$

que fournissent les premiers principes du calcul aux différences finies, et où les caractéristiques Δ, Δ^2 etc., désignent les différences des divers ordres, et $n\alpha = x$ l'abscisse d'une parabole dont y est l'ordonnée.

Il faut donc ramener les expressions (A''') à la forme $F(u)\, du$. Or : x, y, r sont connus en u ; x', y', z', que contiennent X, Y, Z, et qui sont les coordonnées de la planète, à l'instant que l'on considère, seront données par les relations : $x' = r' cos v' cos \lambda - r' sin v' cos \gamma sin \lambda$; $y' = r' cos v' sin \lambda + r' sin v' cos \gamma cos \lambda$; $z' = r' sin v' sin \gamma$. γ étant l'inclinaison du plan de la planète sur celui de la comète, pris pour plan de projection, v' l'angle du rayon vecteur de la planète avec l'intersection de son plan sur celui de la comète, et λ la longitude de son nœud ascendant compté sur le plan de la comète, dont le grand axe est d'ailleurs pris pour axe des x. Si donc I est l'inclinaison de l'orbite de la comète à l'écliptique, I' celle de la planète au même plan, l la longitude du nœud de la comète, l' celle du nœud de la planète ; dans le triangle sphérique déterminé par les trois plans, γ sera l'angle opposé au côté $l' - l$, et l'on aura : $cos \gamma = sin\ I'\ sm\ I\ cos\ (l' - l) - cos\ I'\ cos\ I$. En appelant i, i' les distances du nœud de la comète et de celui de la planète dans l'écliptique au nœud de la planète dans le plan de la comète, on aura : $\cos i = \cos I \sin (l' - l) \sin i' + \cos (l' - l) \cos i'$; en ajoutant à i la distance du nœud de la comète à son périhélie, on aura λ. Soit v la longitude vraie de la planète dans son orbite, correspondante à un temps quelconque t donné, et α la distance angulaire du nœud de la planète sur l'écliptique, à son nœud ascendant sur l'orbite de la comète ; on aura $v' = v + \alpha$, et l'angle v et le rayon vecteur r' seront fournis par les tables, dès que le temps t sera connu. Puisque nous prenons pour variable, l'anomalie excentrique de la comète, il suffira donc, pour avoir la position de la planète relative à une valeur quelconque de cette anomalie, de calculer le temps qui lui correspond, par la formule : $= a^{\frac{1}{2}} (u - e sin u)$. Les substitutions étant faites dans X, Y, Z, on aura ramené chaque variation différentielle à la forme $F(u)\, du$.. On pourra donc, en faisant varier u de degré en degré, par exemple, intégrer par quadratures, au moyen de la formule (C). Les calculs sont immenses, comme il est facile de le voir, et c'est là ce qui rend si utile, la séparation de R dans la partie supérieure de l'orbite ; car R' étant très-petit par rapport à la première partie de R, on peut espacer les valeurs de u beaucoup plus que dans la proximité de l'astre.

En résumé, soit PQ le grand axe de l'orbite, AB le petit; du périhélie jusqu'en A, on calculera les variations des éléments par quadratures; soit $\int \pi dt$ la variation finie; de A, où l'on fait commencer la partie supérieure, jusqu'en B, où on la fait cesser, on sépare R en deux parties; soit $H'—H$, la variation indépendante de R' et $\int \pi' dt$ celle qui en dépend; enfin, de B en P on reprendra les quadratures, soit $\int \pi'' dt$ la variation obtenue; on aura donc $\int \pi dt + H' - H + \int \pi' dt + \int \pi'' dt$ pour la variation totale.

Comme on a pris pour plan de projections, celui de la comète à une époque donnée, on n'aura alors que la position du plan de l'orbite troublée par rapport à l'orbite fixe. La détermination de ce plan par rapport à l'écliptique n'est plus qu'un problème de trigonométrie sphérique.

Altérations dues à la résistance d'un milieu.

S'il existe, ainsi qu'on l'admet assez généralement, un fluide éthéré répandu autour du soleil, c'est particulièrement sur les comètes que la résistance qu'il oppose au mouvement des corps qui le parcourent doit produire des effets sensibles. Sans chercher à déterminer d'une manière complète les altérations qui en résulteraient dans les éléments de leurs orbites, je vais cependant montrer quelle en serait la nature.

D'après la loi admise de la résistance des milieux, la fonction perturbatrice devient $R = \rho \frac{ds^2}{dt^2}$ expression dans laquelle $\rho = K\varphi(r)$, K étant un coefficient constant, et $\varphi(r)$ une fonction inconnue du rayon vecteur de la comète. Nous continuerons à prendre pour plan de projection, celui de l'orbite considéré comme fixe à une époque donnée.

Si l'on fait attention que l'on a maintenant $m'X = -\rho \frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}$; $m'Y = -\rho \frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}$; $m'Z = -\rho \frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} = 0$; $r = a(1 - e\cos u)$; $x = a(\cos u - e)$; $y = a\sqrt{1-e^2}.\sin u$; $ndt = du\,(1 - e\cos u)$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{an\sin u}{1-e\cos u}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{an\sqrt{1-e^2}.\cos u}{1-e\cos u}$; $a^3n^2 = 1$; d'où $\frac{ds}{d} = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}{1-e\cos u}.an.$; $\frac{xdy - ydx}{dt} = \frac{r^2dv}{dt} = \sqrt{a(1-e^2)}$; $\frac{xdx+ydy}{dt} = a^2n.e\sin u.$

Les équations (A''') deviennent :

$$\text{D)}\ da = -2a^2\rho du\sqrt{\frac{(1+ecosu)}{1-ecosu}}.$$

$$de = -2a(1-e^2)\rho\ du\ cosu\sqrt{\frac{1+ecosu}{1-ecosu}}.$$

$$ed\omega = -2a\sqrt{1-e^2}.\ \rho\ du\ sinu\sqrt{\frac{1+ecosu}{1-ecosu}}.$$

$$d\varepsilon - (1-\sqrt{1-e^2})\,d\omega = 2ae\rho\ du.\ sinu\sqrt{1-e^2cos^2u}.$$

$$d.\ tang\varphi\ sin\theta = 0.$$

$$d.\ tang\varphi\ cos\theta = 0.$$

$$dn = 3\rho\, an.\ du\sqrt{\frac{(1+ecosu)^3}{1-ecosu}}.$$

Nous ignorons complétement la loi des densités de l'éther; par conséquent ρ est une fonction qui nous est inconnue; cependant cette fonction de r ou de $a(1-ecosu)$, étant substituée dans les formules précédentes, donnera des produits que l'on pourra développer en séries ordonnées par rapport aux cosinus de u et de ses multiples. Soit : $A+B\cos u+C\cos 2u+D\cos 3u+$ etc., cette série; on n'aura que des quantités périodiques dans la troisième et dans la quatrième des expressions précédentes; les deux suivantes font voir d'ailleurs que, dans tous les cas, ω et θ ne varient pas. Concluons donc de là, que la résistance de l'éther n'altère en aucune manière la position de l'orbite; que la longitude du périhélie et celle de l'époque ne seront soumises qu'à des altérations périodiques, et n'éprouveront pas de variations croissant de siècle en siècle ou d'inégalités séculaires. Bien entendu que nous faisons ici abstraction du frottement de l'éther sur la comète, autrement le plan de l'orbite pourrait être altéré à la longue.

Voyons maintenant le genre d'altération dont le grand axe, l'excentricité et le moyen mouvement sont susceptibles. En multipliant le numérateur et le dénominateur de la première des expressions (D) par $\sqrt{1+ecosu}$, elle prend la forme :

$$\text{(D')}\ da = \frac{-2a^2\rho du(1+ecosu)^2}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} = -2a^2\rho\,du\left[\frac{2(1+ecosu)}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} - \sqrt{1-e^2cos^2u}\right]$$

la seconde donne :

$$de = -2a(1-e^2)\rho\,du\left[\frac{ecosu+e^2cos^2u}{\sqrt{1-e^2cos^2u}}\right] = -\frac{2a(1-e^2)\rho}{e}\,du\left[\frac{1+ecosu}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} - \sqrt{1-e^2cos^2u}\right]$$

la septième : $dn = 3\rho\, an\, du\left[\frac{2(1+ecosu)}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} - \sqrt{1-e^2cos^2u}\right].$

Soient : $A + A'cosu + A''\ cos2u +$ etc.; $B + B'\ cosu + B''\ cos2u +$ etc.

les développements respectifs de $\rho \frac{(1 + e\cos u)}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}}$ et de $\rho \sqrt{1 - e^2\cos^2 u}$; leurs substitutions étant faites, on aura pour intégrales, en négligeant les quantités périodiques $\delta a = -2a^2 (2A - B) u$; $\delta e = \frac{-2a(1-e^2)}{e} (A - B) u$; $\delta n = 3an (2A - B) u$. Mais ζ étant l'anomalie moyenne, on a : $d\zeta = dt \int dn + d\varepsilon - d\omega = dt \int dn$ puisque ε et ω sont constants d'où $\delta\zeta = 3a \int ndt\, \delta n$; mais $ndt = du\, (1 - e\cos u) = du$, en négligeant les quantités périodiques; il viendra donc : $\delta\zeta = \frac{3}{2} a (2A - B) u^2$. Il résulte de là que le grand axe et l'excentricité décroissent indéfiniment, que la comète converge continuement vers le mouvement circulaire en décrivant une spirale autour du soleil, auquel elle doit un jour se réunir, et que son moyen mouvement va toujours en s'accroissant.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences
de l'Académie de Paris,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer :

L'Inspecteur-général des Études, chargé de l'Administration
de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.