Paris 4 Avril 1900

Monsieur,

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt la note que vous m'avez fait l'honneur de m'envoyer. A ce propos je vous présenterai une remarque. Il semble que vous dites (page 10) que votre théorème est une généralisation de celui de Lagrange; autrement dit, que celui de Lagrange est un cas particulier du vôtre. Il ne me semble pas qu'il en soit ainsi. Soit une équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donc

$$x = -\frac{b}{a} - \frac{\frac{c}{a}}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x}$$

$\left(\alpha = -\frac{b}{a}, \beta = -\frac{c}{a}\right)$.

D'où

$$x = a + \cfrac{p}{a + \cfrac{p}{a + \ddots}}$$

ce qui est bien votre forme de développement.
Mais ce n'est pas celui de Lagrange,
si ce n'est dans le cas particulier où
α est entier ainsi que $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\alpha}{p}$ étant de plus positifs.

Au sujet de ce que vous me demandez,
je ne puis vous donner que les renseignements
suivants : M. Charve, en étudiant
la même question que vous a été amené
comme vous à considérer des équations de
2^{e} degré à 3 variables. Voyez sa thèse
sur la réduction des formes quadratiques ternaires,
qui se trouve dans les annales de l'Ecole Normale
Supérieure de l'année 1880. Vous y trouverez
d'autres renseignements bibliographiques.

Remarquez, que lorsqu'on détermine
les formes quadratiques binaires de discriminant donné (p. 239 et 271 de mon
ouvrage) on écrit en fait, l'équation

indéterminée à 3 variables $xy - z^2 = D$.

On sait donc résoudre cette équation et toutes celles qui s'y ramènent par substitutions linéaires.

Je ne crois pas que la question ait été complètement résolue, bien qu'elle me semble d'ailleurs résoluble.

Agréez, je vous prie, Monsieur, mes sentiments les plus distingués.

G. Cayley

6 Novembre 1916

Cher Monsieur,

Je vous remercie des bonnes feuilles que vous m'offrez aimablement, mais puisque l'ouvrage lui-même doit paraître vers le 15 Décembre il est inutile de vous donner cette peine ; j'attendrai jusque là. Je vais faire d'abord aux étudiants le cours de Cinématique ; ce n'est qu'après que je leur ferai faire des exercices de Mécanique ; par conséquent je n'aurai certainement pas à parler des F.C. avant le 15 X^bre. Avec mes meilleurs

souvenirs et amitiés.

G. Capus

23/1/17

3

Tous mes remerciements, cher Monsieur,
pour votre beau livre. Je vais, dès demain,

EUGÈNE CAHEN

en m'en aidant, donner aux étudiants quelques
notions sur Schumann.

Avec mes remerciements, recevez, je vous prie,
l'expression de mes meilleurs sentiments.

46, rue Cortambert XVI^e

E Cahen

22 Mars 1927 — 1 RUE DE PASSY. XVI^E

Cher Monsieur,

La proposition $(a_1^2 + k b_1^2)(a_2^2 + k b_2^2) \ldots = A + k B^2$

n'est pas nouvelle.

Elle peut se généraliser. Soient

$$n = \alpha a_1^2 + \beta a_1 b_1 + \gamma b_1^2$$

$$n' = \alpha' a_1'^2 + \beta' a_1' b_1' + \gamma' b_1'^2$$

. . . . . .

où l'on suppose $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \beta'^2 - 4\alpha'\gamma' = \ldots$,

le produit $nn' \ldots$ peut se mettre sous la forme

$$A a^2 + B a b + C b^2$$

avec $B^2 - 4AC = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \ldots$

(toutes les lettres représentant des entiers, bien entendu)

C'est la théorie de la multiplication ou composition des formes quadratiques.

Quand on prend les cubes au lieu des carrés la proposition n'est plus vraie en général, car

$(1^3+1^3)(1^3+1^3) = 4$

$(1^3+1^3)(1^3+2^3) = 18$

. . . .

Or aucun des nombres 4, 18, . . n'est une somme de deux cubes.

Pour la décomposition des nombres en sommes de cubes voici ce que je sais sur l'état de la question:

Tout nombre est décomposable en une somme de 8 cubes à partir d'une certaine limite, mais au dessous de cette limite il peut y avoir besoin de plus de 8 cubes. Exemples 23 et 239 ne se décomposent qu'en 9 cubes. Je ne sais pas si on a trouvé des nombres qui ont besoin de plus de 9 cubes. Il s'agit bien entendu de cubes positifs. Quant à la décomposition en une somme de cubes positifs ou négatifs, je ne sais pas.

Agréez, je vous prie, l'expression de mes meilleurs sentiments

G. Cantor

De Montessus de Ballore (R.). — Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications. (*Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris*). — *1 vol. grand in-8° de* X + 207 *pages* (*Prix : 12 fr.*) *Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Paris, 1917.*

Le Calcul intégral a été inventé pour résoudre des problèmes pratiques : pour calculer des longueurs, des aires, des volumes, des travaux de forces. Depuis, il n'a pas cessé d'être l'instrument indispensable aux recherches de ce genre. Mais, dès le début, il s'est heurté à un obstacle : l'intégration des différentielles les plus simples, sauf les différentielles rationnelles ou celles qui s'y ramènent, ne pouvait se faire avec les fonctions connues. De là l'introduction dans la science de fonctions nouvelles dont les premières sont les fonctions elliptiques. Ainsi les fonctions elliptiques sont nées de questions pratiques, pour la résolution complète et commode desquelles elles sont maintenant encore indispensables.

Cependant, ce point de vue avait été à peu près abandonné par les auteurs. Les traités français publiés jusqu'à ce jour, sauf, peut-être, celui de Halphen (mais celui-ci, admirable d'ailleurs, a été conçu dans des dimensions qui le rendent impraticable aux étudiants, et de plus il est resté inachevé), sont faits pour des mathématiciens et prennent leur point de départ dans des théories abstraites : séries, fonctions de variables imaginaires, etc. Tel est le caractère des traités de Briot et Bouquet, de Laurent, de Tannery et Molk, de MM. Appell et Lacour, de Lucien Lévy. N'était-il pas bon de revenir au point de vue primitif ?

Remarquons que pour les fonctions trigonométriques, cas particuliers des fonctions elliptiques, ce point de vue n'a jamais été abandonné. Sans doute, le souci de la méthode et de la rigueur ont conduit les mathématiciens à donner de ces fonctions des définitions purement analytiques. Il n'est cependant venu à l'idée de personne de retarder leur introduction dans l'enseignement jusqu'à ce que l'étudiant soit en état de saisir de telles définitions, et l'on continue à définir le sinus d'un arc comme la demi-corde de l'arc double. M. de Montessus de Ballore a pensé que la même méthode devait s'appliquer aux fonctions elliptiques, et c'est pour cela qu'il a proposé en 1915-1916, à la Faculté des Sciences de Paris, un cours libre dont le livre actuel est la reproduction rédigée.

Dès le début, il s'est placé au point de vue d'Abel, c'est-à-dire qu'il définit $\mathrm{sn}(u)$ comme l'inverse de $u = \int_0^{\cdots} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$; cela lui a permis d'être suivi par un auditoire composé en parties d'élèves de l'École Centrale. Peut-être aurait-il pu accentuer davantage ce caractère et définir $\mathrm{sn}\,u$ en partant d'un problème concret, par exemple : *Étudier le mouvement d'un point de masse* m *et d'abcisse* x *soumis à la force* $\mathrm{m}x(2k^2x^2 - 1 - k^2)$, *où* $k^2 < 1$, *avec les conditions initiales* $x_0 = 0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 1$. Le théorème des forces vives donne tout de suite $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$; alors l'étudiant habitué à de telles discussions *verra* le point se mouvoir périodiquement dans le segment $-1, +1$, et concevra immédiatement une idée nette de la fonction $\mathrm{sn}\,(t)$ pour les valeurs réelles de t.

La première partie de l'Ouvrage traite des fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$; la seconde des fonctions $\zeta(u)$, $\lambda(u)$, $\beta(u)$, dont l'étude découle de celle des précédentes. La troisième partie contient des généralités sur les fonctions elliptiques, enfin la quatrième traite des fonctions θ. Ces deux dernières parties contiennent les théories qui, dans les autres traités, servent de points de départ. Car il est à remarquer que, malgré le caractère élémentaire du début et ses petites dimensions, l'ouvrage de M. de Montessus est, dans son genre, complet, et tel que même beaucoup de mathématiciens de profession seraient heureux d'en posséder, présents à l'esprit, les principaux résultats.

Étant donné le caractère de l'ouvrage, les renseignements nécessaires pour les calculs qui peuvent se présenter dans les applications devaient occuper une place importante et ils l'occupent en effet. Non moins de quatre chapitres, contenant soixante-deux pages, y sont consacrés. On trouve aux chapitre III et IV la réduction des intégrales elliptiques aux formes canoniques et les calculs numériques qui les concernent ; aux chapitres XVIII et XIX ceux qui concernent les fonctions $\lambda(u)$, $\zeta(u)$, etc ; au chapitre XX le calcul des intégrales elliptiques à l'aide des fonctions θ.

Souhaitons à l'ouvrage de M. de Montessus le même succès qui a accueilli son cours ; il le mérite à tous égards.

E. Cahen,
Chargé de cours à la Sorbonne.