N° D'ORDRE

793.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

1re THÈSE. — SUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES SIMULTANÉES AUXQUELLES SATISFAIT LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE A DEUX VARIABLES $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 11 novembre 1893 devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*
PICARD,
POINCARÉ, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

28741

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

1983 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A

MONSIEUR E. PICARD.

Hommage respectueux de son élève.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES SIMULTANÉES

AUXQUELLES SATISFAIT LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE A DEUX VARIABLES $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

Le présent travail est une modeste contribution à l'étude du système d'équations aux dérivées partielles simultanées (S) auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

Il est divisé en cinq Chapitres.

Dans le Chapitre I, je m'occupe des relations qui existent entre la fonc- $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ et ses contiguës. Je démontre que toute fonction contiguë, $F_1(\alpha+p, \beta+q, \beta'+q', \gamma+r; x, y)$, p, q, q' et r étant des nombres entiers, est une fonction linéaire et homogène de F_1, de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y. J'en déduis, par une voie naturelle, les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfait la fonction F_1. En suivant une marche identique, j'étudie de la même façon les dix intégrales particulières bien connues qu'on obtient en donnant à g et h, dans l'expression

$$\int_g^h u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du,$$

les valeurs 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Dans le Chapitre II, j'établis un Tableau de 64 intégrales du système

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(S) analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. C'est le développement d'une Note que M. Goursat a fait publier dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Le Chapitre III est occupé par la recherche des relations qui existent entre trois ou quatre des dix intégrales précédemment citées, lorsqu'elles ne sont pas distinctes. J'ai insisté sur ce fait que les relations en question dépendent des positions de x et y. J'ai dressé quatorze Tableaux distincts de relations, je n'ai écrit que celles qu'on ne peut déduire simplement des relations déjà trouvées. J'ai adopté un système de numérotage qui permet de trouver immédiatement dans l'un des Tableaux la relation qui existe entre tel groupe que l'on voudra, de trois ou quatre intégrales non distinctes.

Soit

$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{c-1}(u-y)^{d-1},$$

$$\omega_1 = \int_0^x \varphi(u)\,du, \qquad \omega_2 = \int_0^y \varphi(u)\,du, \qquad \omega_3 = \int_0^1 \varphi(u)\,du;$$

enfin

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta.$$

M. Picard a démontré que si x et y, considérées comme fonctions de ξ et de η, étaient des fonctions uniformes de ξ et de η, les dix nombres $a+b-1$, $a+c-1$, $a+d-1$, $b+c-1$, $b+d-1$, $c+d-1$, $2-b-c-d$, $2-c-d-a$, $2-d-a-b$, $2-a-b-c$ devaient être les inverses de nombres entiers. Je me suis proposé, dans le Chapitre IV, de trouver tous les groupes de quatre nombres a, b, c, d, jouissant de cette propriété.

Dans le Chapitre V, j'établis le groupe du système (S) en suivant la méthode de M. Picard; puis, considérant la forme quadratique ternaire, à indéterminées conjuguées que ce groupe laisse inaltérée, j'établis que son déterminant invariant ne peut s'annuler qu'en même temps que tous ses premiers mineurs, répondant ainsi à une question que M. Picard a posée dans une Note insérée au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, année 1886-1887, p. 148.

Je cherche ensuite dans quels cas le système (S) aura son intégrale générale algébrique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE I.

1. Considérons l'expression

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

dans laquelle on suppose que u prend des valeurs réelles appartenant à l'intervalle (0, 1). Je choisis pour l'argument de u et pour l'argument de $(1-u)$ la valeur zéro. x et y sont des valeurs complexes ou réelles, mais, si elles sont réelles, inférieures à 1. Comme arguments de $(1-ux)$ et de $(1-uy)$, je choisis ceux qui s'annulent en même temps que u. Les nombres α, β, β', γ sont réels ou imaginaires. La partie réelle de α et celle de $(\gamma-\alpha)$ sont assujetties à être positives.

Dans ces conditions, l'intégrale définie

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_0^1 U\,du$$

a un sens. C'est une fonction bien déterminée de x et de y, Si l'on regarde la portion indéfinie de l'axe réel X qui est à droite du point $(+1)$ comme une coupure, que ne pourront franchir ni le point x, ni le point y, Φ sera une fonction uniforme de x et de y.

On a, en particulier,

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta'\gamma; 0, 0) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\,du = B(\alpha, \gamma-\alpha),$$

en posant

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx \quad (1).$$

Nous définirons, avec M. Appell (2), l'expression (λ, k) par l'égalité

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1).$$

---

(1) Voir le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. C. Jordan, t. II, p. 177, 190, 191.

(2) Voir *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, t. VIII, année 1882, p. 173 et suivantes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Par convention, le symbole (λ, o), qui n'a pas de sens par lui-même, représentera 1.

On voit alors immédiatement que l'on a

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)}{\partial x^m\partial y^n}=(\beta,m)(\beta',n)\,\Phi(\alpha+m+n,\beta+m,\beta'+n,\gamma+m+n;x,y).$$

En conséquence, si nous posons

$$\Phi(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=B(\alpha,\gamma-\alpha)\,\Phi_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y),$$

en sorte que

$$\Phi_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;o,o)=1,$$

on déduit aisément de l'égalité précédente pour cette nouvelle fonction Φ_1 la formule suivante :

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)}\,\Phi_1(\alpha+m+n,\beta+m,\beta'+n,\gamma+m+n;x,y).$$

On conclut de là, en observant que $m!=(1,m)$,

$$\frac{1}{m!\,n!}\left[\frac{\partial^{m+n}\Phi_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}$$

et, par conséquent, la fonction Φ_1 sera représentée, pour x et y voisins de l'origine, par la série

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n.$$

M. Appell a démontré que cette série est convergente sous les conditions $|x|<1$, $|y|<1$, quelles que soient les valeurs de α, β, β' et γ (1). Elle servira donc à définir la fonction $\Phi_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$, quelles que soient les valeurs de α, β, β' et γ, tant qu'on aura $|x|<1$, $|y|<1$.

2. Soit p un nombre entier quelconque. Dans ce qui va suivre, pour abréger, je désignerai par $\Phi(\alpha+p)$, $\Phi(\beta+p)$, $\Phi(\beta'+p)$, $\Phi(\gamma+p)$ les expressions $\Phi(\alpha+p,\beta,\beta',\gamma;x,y)$, $\Phi(\alpha,\beta+p,\beta',\gamma;x,y)$, $\Phi(\alpha,\beta,\beta'+p,\gamma;x,y)$, $\Phi(\alpha,\beta,\beta',\gamma+p;x,y)$, respectivement.

(1) *Voir* le Mémoire de M. Appell, *loc. cit.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

De même, q désignant un autre nombre entier, $\Phi(\alpha+p, \beta+q)$ représentera $\Phi(\alpha+p, \beta+q, \beta', \gamma; x, y)$, et ainsi de suite.

J'emploierai les mêmes abréviations pour la série $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

Cela posé, si la partie réelle de α est supérieure à 1, l'intégrale $\int_0^1 \frac{U du}{u}$ aura un sens ainsi que $\Phi(\alpha-1)$ et l'on verra sans difficulté qu'on a

$$\int_0^1 \frac{U du}{u} = \Phi(\alpha-1) + \Phi.$$

De même, si la partie réelle de $(\gamma-\alpha)$ est supérieure à 1, l'intégrale $\int_0^1 \frac{U du}{1-u}$ aura un sens, ainsi que $\Phi(\gamma-1)$ et l'on aura précisément

$$\int_0^1 \frac{U du}{1-u} = \Phi(\gamma-1).$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{U du}{1-ux} = \Phi(\beta+1),$$

$$\int_0^1 \frac{U du}{1-uy} = \Phi(\beta'+1)$$

et

$$\int_0^1 U u du = \Phi - \Phi(\gamma+1).$$

Ensuite on trouvera aisément les relations suivantes :

$$\Phi(\alpha+1) = \Phi(\gamma-1) - \Phi,$$
$$\Phi(\beta-1) = x\Phi(\gamma+1) - (x-1)\Phi,$$
$$\Phi(\beta'-1) = y\Phi(\gamma+1) - (y-1)\Phi.$$

Les trois dernières relations donnent immédiatement, si l'on suppose $|x|<1$, et $|y|<1$, en tenant compte de la formule

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y),$$

qui a lieu dans les conditions données,

(1) $$\alpha F_1(\alpha+1) = (\gamma-1) F_1(\gamma-1) + (1+\alpha-\gamma) F_1,$$

(2) $$\gamma F_1(\beta-1) = (\gamma-\alpha) x F_1(\gamma+1) - \gamma(x-1) F_1,$$

(3) $$\gamma F_1(\beta'-1) = (\gamma-\alpha) y F_1(\gamma+1) - \gamma(y-1) F_1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3. De l'équation

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

je déduis

$$\frac{dU}{du} = U\left(\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right).$$

Intégrant les deux membres de cette équation, multipliés par du, depuis o jusqu'à 1, on trouve (en supposant toujours les parties réelles de α et de $\gamma-\alpha$ supérieures à 1)

$$(\alpha-1)[\Phi(\alpha-1)+\Phi]-(\gamma-\alpha-1)\Phi(\gamma-1)+\beta x\,\Phi(\beta+1)+\beta' y\,\Phi(\beta'+1)=0,$$

et, par suite,

$$(4)\qquad \begin{cases} (\gamma-\alpha)F_1(\alpha-1)+(\alpha-1)F_1-(\gamma-1)F_1(\gamma-1) \\ \qquad +\beta x F_1(\beta+1)+\beta' y F_1(\beta'+1)=0. \end{cases}$$

De même, on a

$$\frac{d(uU)}{du} = uU\left(\frac{\alpha}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par du et intégrons de o jusqu'à 1, il vient

$$\beta\Phi(\beta+1)+\beta'\Phi(\beta'+1)=(\gamma-\alpha-1)\Phi(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)\Phi,$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \beta F_1(\beta+1)+\beta' F_1(\beta'+1)=(\gamma-1)F_1(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)F_1.$$

Enfin, en partant de l'équation

$$\frac{d(u^2U)}{du} = u^2U\left(\frac{\alpha+1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

multipliant les deux nombres par du, puis intégrant de o à 1, on trouve

$$\begin{aligned}[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\Phi-(\gamma-\beta-\beta')xy\,\Phi(\gamma+1) \\ -(\gamma-\alpha-1)xy\,\Phi(\gamma-1)+\beta y\,\Phi(\beta+1)+\beta' x\,\Phi(\beta'+1)=0,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \begin{cases} (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')xy\,F_1(\gamma+1) \\ \quad =[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\gamma F_1-\gamma(\gamma-1)xy\,F_1(\gamma-1) \\ \qquad +\beta\gamma y F_1(\beta+1)+\beta'\gamma x F_1(\beta'+1). \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous avons ainsi obtenu *six* équations linéaires et homogènes entre F_1, $F_1(\alpha-1)$, $F_1(\beta-1)$, $F_1(\beta'-1)$, $F_1(\gamma-1)$, $F_1(\alpha+1)$, $F_1(\beta+1)$, $F_1(\beta'+1)$, $F_1(\gamma+1)$, les coefficients étant des polynômes entiers en x et en y. La suite des calculs montrera que ces six relations sont distinctes. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Entre la fonction* F_1 *et trois quelconques des huit fonctions contiguës* $F_1(\alpha-1)$, $F_1(\beta-1)$, $F_1(\beta'-1)$, $F_1(\gamma-1)$, $F_1(\alpha+1)$, $F_1(\beta+1)$, $F_1(\beta'+1)$, $F_1(\gamma+1)$, *existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des polynômes entiers en* x *et en* y.

4. Posons

$$u_{mn}=\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,$$

d'où

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}u_{mn}=\mathrm{S}u_{mn}.$$

On a alors

$$F_1(\beta+1)=F_1+\frac{1}{\beta}\mathrm{S}mu_{mn},$$

$$F_1(\beta'+1)=F_1+\frac{1}{\beta'}\mathrm{S}nu_{mn}$$

et

$$F_1(\gamma-1)=F_1+\frac{1}{\gamma-1}\mathrm{S}(m+n)u_{mn}.$$

D'ailleurs, on voit immédiatement que

$$\mathrm{S}mu_{mn}=x\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\mathrm{S}nu_{mn}=y\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Donc

$$F_1(\beta+1)=F_1+\frac{x}{\beta}\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$F_1(\beta'+1)=F_1+\frac{y}{\beta'}\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$F_1(\gamma-1)=F_1+\frac{1}{\gamma-1}\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

On déduit de là que *les huit fonctions contiguës pourront s'exprimer*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en fonction linéaire et homogène de F_1, *de* $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *et de* $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, *les coefficients étant des polynômes entiers en* x *et en* y.

On a le Tableau suivant :

$$(\gamma-\alpha)F_1(\alpha-1)=(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)F_1+x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\beta-\beta')F_1(\beta-1)=(\gamma-\beta-\beta'-\alpha x)F_1+x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+x(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\beta-\beta')F_1(\beta'-1)=(\gamma-\beta-\beta'-\alpha y)F_1+y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}+y(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$(\gamma-1)F_1(\gamma-1)=(\gamma-1)F_1+x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\alpha F_1(\alpha+1)=\alpha F_1+x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta F_1(\beta+1)=\beta F_1+x\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\beta' F_1(\beta'+1)=\beta' F_1+y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')F_1(\gamma+1)=(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\gamma F_1+\gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+\gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

De la formation effective de ce Tableau résulte que les équations (1), (2), ..., (6) sont bien distinctes, ainsi que nous l'avions annoncé.

5. La méthode que nous venons d'appliquer, pour trouver les huit premières fonctions contiguës en fonction linéaire et homogène de F_1, de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, s'applique aussi aux suivantes.

Soit à calculer

$$\Phi(\alpha+p,\ \beta+q,\ \beta'+q',\ \gamma+r),$$

p, q, q' et r étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. On part de la formule

$$\Phi(\alpha+p,\ \beta+q,\ \beta'+q',\ \gamma+r)$$
$$=\int_0^1 u^{\alpha+p-1}(1-u)^{\gamma-\alpha+r-p-1}(1-ux)^{-\beta-q}(1-uy)^{-\beta'-q'}du;$$

si p est négatif, il faudra supposer que la partie réelle de α est supérieure à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$-p$; de même, si $(r-p)$ est négatif, il faudra supposer que la partie réelle de $\gamma-\alpha$ est supérieure à $p-r$.

Sous ces conditions seulement, l'intégrale du second membre a un sens. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int_0^1 \mathrm{U}\, u^p (1-u)^{r-p} (1-ux)^{-q} (1-uy)^{-q'} du.$$

On décomposera alors la fonction rationnelle de u,

$$u^p (1-u)^{r-p} (1-ux)^{-q} (1-uy)^{-q'}$$

en ses éléments simples. Supposons que l'on ait

$$u^p (1-u)^{r-p} (1-ux)^{-q} (1-uy)^{-q'} = \sum a_h u^h + \sum \frac{\mathrm{A}_\lambda}{u^\lambda} + \sum \frac{\mathrm{B}_\mu}{(1-u)^\mu} + \sum \frac{\mathrm{C}_\nu}{(1-ux)^\nu} + \sum \frac{\mathrm{C}'_{\nu'}}{(1-uy)^{\nu'}}$$

(h, λ, μ, ν, ν' étant des entiers positifs); on aura alors à calculer des intégrales de la forme

$$(7) \qquad \int_0^1 u^h \mathrm{U}\, du, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{U}\, du}{u^\lambda}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{U}\, du}{(1-u)^\mu}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{U}\, du}{(1-ux)^\nu}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{U}\, du}{(1-uy)^{\nu'}}.$$

Or on a identiquement

$$\frac{d(u^{h+1}\mathrm{U})}{du} = u^{h+1}\mathrm{U}\left(\frac{\alpha+h}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{U}}{(1-u)^{\mu-1}}\right] = \frac{\mathrm{U}}{(1-u)^{\mu-1}}\left(\frac{\alpha-1}{u} + \frac{\alpha-\gamma+\mu}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{U}}{(1-ux)^{\nu-1}}\right] = \frac{\mathrm{U}}{(1-ux)^{\nu-1}}\left[\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{(\beta+\nu-1)x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{U}}{(1-uy)^{\nu'-1}}\right] = \frac{\mathrm{U}}{(1-uy)^{\nu'-1}}\left[\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{(\beta'+\nu'-1)y}{1-uy}\right].$$

Enfin

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{U}}{u^{\lambda-1}}\right) = \frac{\mathrm{U}}{u^{\lambda-1}}\left(\frac{\alpha-\lambda}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right).$$

Multipliant par du les deux membres de l'une quelconque de ces équations, et intégrant, de 0 à 1, le premier membre est nul, et les équations obtenues, toute réduction faite, permettront de calculer les intégrales (7),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pourvu que l'on ait déjà calculé les intégrales analogues, où les exposants h, λ, μ, ν, ν' soient moindres.

On passe ensuite des formules concernant la fonction Φ aux formules concernant la fonction F_1, sans aucune difficulté.

Ces dernières formules se trouvent ainsi démontrées pour certaines valeurs de α, β, β', γ. Néanmoins, elles ont lieu pour toute valeur de α, β, β', γ. Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer qu'on peut les vérifier directement, en partant de la formule

$$F_1 = \mathbf{S} u_{mn},$$

et que, dans le calcul de vérification, on n'a aucune restriction à faire sur les valeurs de α, β, β' et γ.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction contiguë* $F_1(\alpha+p, \beta+q, \beta'+q', \gamma+r)$ *est une fonction linéaire et homogène de* F_1, *de* $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *et de* $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, *les coefficients étant des fonctions rationnelles de* x *et de* y.

Je donne ici le Tableau des fonctions contiguës obtenues en remplaçant dans F_1 deux des quantités α, β, β', γ par $\alpha \pm 1$, $\beta \pm 1$, $\beta' \pm 1$, $\gamma \pm 1$.

$$\begin{aligned}
&(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')F_1(\alpha-1,\beta-1)\\
&\quad=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)-(\gamma-\beta-\beta'-\alpha)(\alpha-1)x]F_1\\
&\qquad+(1+\gamma-\alpha-\beta-\beta')x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}\\
&\qquad+[(\gamma-\beta-\beta')y-(\alpha-1)x](1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},\\
&(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')F_1(\alpha-1,\beta'-1)\\
&\quad=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)-(\gamma-\beta-\beta'-\alpha)(\alpha-1)y]F_1\\
&\qquad+(1+\gamma-\alpha-\beta-\beta')y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}\\
&\qquad+[(\gamma-\beta-\beta')x-(\alpha-1)y](1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$(\gamma-1)F_1(\alpha-1,\gamma-1)=(\gamma-1-\beta x-\beta' y)F_1+x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\beta(\gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1(\alpha-1,\beta+1)=[\gamma-\alpha-(1+\beta-\alpha)x-\beta' y]\,\beta\,\mathrm{F}_1 + (1+\beta-\alpha)\,x(1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+\beta\, y(1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y},$$

$$\beta'(\gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1(\alpha-1,\beta'+1)=[\gamma-\alpha-(1+\beta'-\alpha)y-\beta x]\,\beta'\,\mathrm{F}_1 + (1+\beta'-\alpha)\,y(1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}+\beta' x(1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')\,\mathrm{F}_1(\alpha-1,\gamma+1)&=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)-(\alpha-1)(\gamma-\alpha-\beta-\beta')]\,\gamma\,\mathrm{F}_1\\&+[(\gamma-\beta-\beta')x-(\alpha-1)]\,\gamma(1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\\&+[(\gamma-\beta-\beta')y-(\alpha-1)]\,\gamma(1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)\,\mathrm{F}_1(\beta-1,\beta'-1)&=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)+\alpha(\beta y+\beta' x)\\&\quad-\alpha(\gamma-\beta-\beta'+1)(x+y)-\alpha(\beta+\beta'-\alpha-1)xy]\,\mathrm{F}_1\\&+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy+(1-\beta)y+(1+\gamma-\beta-2\beta')x](1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\\&+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy+(1-\beta')x+(1+\gamma-2\beta-\beta')y](1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y};\end{aligned}$$

$$(\gamma-1)\,\mathrm{F}_1(\beta-1,\gamma-1)=(\gamma-1-\alpha x)\mathrm{F}_1+(1-x)\left(x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}\right),$$

$$(\gamma-1)\,\mathrm{F}_1(\beta'-1,\gamma-1)=(\gamma-1-\alpha y)\mathrm{F}_1+(1-y)\left(x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}\right);$$

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma-\beta-\beta')\,\mathrm{F}_1(\alpha+1,\beta-1)&=\alpha[(\beta+\beta'-\alpha-1)x+(\gamma-\beta-\beta')]\,\mathrm{F}_1-(\beta+\beta'-\alpha-1)\,x(1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\\&+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy-(\gamma-\alpha-1)x+(\gamma-\beta-\beta')y]\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma-\beta-\beta')\,\mathrm{F}_1(\alpha+1,\beta'-1)&=\alpha[(\beta+\beta'-\alpha-1)y+(\gamma-\beta-\beta')]\,\mathrm{F}_1-(\beta+\beta'-\alpha-1)\,y(1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}\\&+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy-(\gamma-\alpha-1)y+(\gamma-\beta-\beta')x]\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x};\end{aligned}$$

$$\beta'\,\mathrm{F}_1(\beta-1,\beta'+1)=\beta'\,\mathrm{F}_1+(y-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y},$$

$$\beta\,\mathrm{F}_1(\beta+1,\beta'-1)=\beta\,\mathrm{F}_1+(x-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)y\,\mathrm{F}_1(\beta-1,\gamma+1)$$
$$=[\alpha(\alpha-\gamma)xy+\alpha(\beta y+\beta' x)+(\gamma-\beta-\beta'+1)(\gamma-\beta-\beta'+\alpha)y]\gamma\,\mathrm{F}_1$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy+(1-\beta)y-\beta' x]\,\gamma(1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy-(\gamma-\beta)x+(\gamma-2\beta-\beta'+1)y]\,\gamma(1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)x\,\mathrm{F}_1(\beta'-1,\gamma+1)$$
$$=[\alpha(\alpha-\gamma)xy+\alpha(\beta y+\beta' x)+(\gamma-\beta-\beta'+1)(\gamma-\beta-\beta'+\alpha)x]\gamma\,\mathrm{F}_1$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy+(1-\beta')x-\beta y]\,\gamma(1-y)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy-(\gamma-\beta')y+(\gamma-2\beta'-\beta+1)x]\,\gamma(1-x)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x};$$

$$\alpha(\gamma-1)\,\mathrm{F}_1(\alpha+1,\gamma-1)=\left(\gamma-1+\frac{\beta x}{1-x}+\frac{\beta' y}{1-y}\right)\alpha\,\mathrm{F}_1$$
$$+\left[\alpha-(\gamma-\alpha-1)\frac{x}{1-x}+\frac{\beta x}{1-x}+\frac{\beta' y}{1-y}\right]x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}$$
$$+\left[\alpha-(\gamma-\alpha-1)\frac{y}{1-y}+\frac{\beta x}{1-x}+\frac{\beta' y}{1-y}\right]y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y};$$

$$\beta(\gamma-1)(1-x)\,\mathrm{F}_1(\beta+1,\gamma-1)$$
$$=[\gamma-1-(\gamma-\alpha-1)x]\beta\,\mathrm{F}_1+[\beta-(\gamma-\alpha-1)x]x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+\beta y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y},$$
$$\beta'(\gamma-1)(1-y)\,\mathrm{F}_1(\beta'+1,\gamma-1)$$
$$=[\gamma-1-(\gamma-\alpha-1)y]\beta'\,\mathrm{F}_1+[\beta'-(\gamma-\alpha-1)y]y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}+\beta' x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x};$$

$$\alpha\beta(1-x)\,\mathrm{F}_1(\alpha+1,\beta+1)=\alpha\beta\,\mathrm{F}_1+(\alpha+\beta-\gamma+1)x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+\beta y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y},$$
$$\alpha\beta'(1-y)\,\mathrm{F}_1(\alpha+1,\beta'+1)=\alpha\beta'\mathrm{F}_1+(\alpha+\beta'-\gamma+1)y\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}+\beta' x\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x};$$

$$\alpha(\gamma-\beta-\beta')\,\mathrm{F}_1(\alpha+1,\gamma+1)=\alpha\gamma\,\mathrm{F}_1+\gamma\left[(x-1)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}\right];$$
$$\beta\beta'(x-y)\,\mathrm{F}_1(\beta+1,\beta'+1)=\beta\beta'(x-y)\mathrm{F}_1+\beta' x^2\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}-\beta y^2\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y};$$

$$\beta(\gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1(\beta+1,\gamma+1)=\beta\gamma\,\mathrm{F}_1+\gamma(x-1)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x},$$
$$\beta'(\gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1(\beta'+1,\gamma+1)=\beta'\gamma\,\mathrm{F}_1+\gamma(y-1)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

6. Revenons à la formule démontrée au n° 1, savoir :

$$\frac{\partial^{m+n} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} F_1(\alpha+m+n, \beta+m, \beta'+n, \gamma+m+n; x, y).$$

De cette formule et du théorème énoncé au numéro précédent résulte le théorème suivant :

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 *de la fonction* F_1 *peuvent s'exprimer en fonction linéaire et homogène de* F_1, *de* $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *et de* $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, *les coefficients étant des fonctions rationnelles de* x *et de* y.

En particulier, si nous calculons les dérivées partielles du second ordre, en suivant toujours la même méthode de calcul, nous obtenons le système d'équations aux dérivées partielles qui suit :

$$(8)\quad \begin{cases} x(1-x)(x-y)\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + [\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y]\dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \qquad - \beta y(1-y)\dfrac{\partial F_1}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)F_1 = 0, \\ y(1-y)(y-x)\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + [\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+1)xy + \beta x]\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \qquad - \beta' x(1-x)\dfrac{\partial F_1}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)F_1 = 0, \\ (x-y)\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \beta'\dfrac{\partial F_1}{\partial x} - \beta\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \quad (1). \end{cases}$$

C'est ce système d'équations aux dérivées partielles que nous allons principalement étudier dans le présent travail. Nous en possédons déjà une intégrale particulière. Proposons-nous d'en trouver d'autres.

7. Envisageons pour cela l'intégrale définie

$$\Psi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_g^h u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du.$$

(1) *Voir* le Mémoire de M. Appell, *loc. cit.* — Pour l'étude de la dernière équation aux dérivées partielles, prise isolément, *voir* le Chapitre III de la IIe Partie des *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où g et h sont deux constantes quelconques, réelles ou imaginaires. Nous prendrons pour le chemin que suit u pour aller du point g au point h, une courbe arbitraire, donnée une fois pour toutes. Si elle part du point o, ou si elle y aboutit, on supposera la partie réelle de α plus grande que zéro; si elle part du point $(+1)$, ou si elle y aboutit, on devra supposer la partie réelle de $(\gamma-\alpha)$ supérieure à zéro. Si elle part du point à l'infini, ou si elle y aboutit, il faudra que la partie réelle de $(1+\beta+\beta'-\gamma)$ soit supérieure à zéro. Si les points g, h ne coïncident ni l'un ni l'autre, ni avec le point o, ni avec le point $(+1)$, ni avec le point à l'infini, α, β, β' et γ sont arbitraires; mais le chemin que suit u ne doit passer ni par le point o, ni par le point $+1$, ni par le point à l'infini. De plus, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ ne devront pas se trouver sur ce chemin.

Cela posé, on a, comme pour la fonction Φ, d'abord

$$\frac{\partial^{m+n}\Psi(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)}{\partial x^m\,\partial y^n}=(\beta,m)(\beta',n)\Psi(\alpha+m+n,\beta+m,\beta'+n,\gamma+m+n;x,y).$$

Ensuite, en posant

$$U(u)=u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

on trouve

$$\Psi(\alpha+1)=\Psi(\gamma-1)-\Psi, \tag{9}$$

$$\Psi(\beta-1)=x\Psi(\gamma+1)-(x-1)\Psi, \tag{10}$$

$$\Psi(\beta'-1)=y\Psi(\gamma+1)-(y-1)\Psi, \tag{11}$$

puis

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha-1)[\Psi(\alpha-1)+\Psi]-(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)\\ \qquad\qquad+\beta x\Psi(\beta+1)+\beta' y\Psi(\beta'+1)=U(h)-U(g),\end{array}\right. \tag{12}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\beta\Psi(\beta+1)+\beta'\Psi(\beta'+1)\\ \quad=(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)\Psi+hU(h)-gU(g).\end{array}\right. \tag{13}$$

Enfin

$$\left\{\begin{array}{l}[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\Psi-(\gamma-\beta-\beta')xy\Psi(\gamma+1)\\ \quad-(\gamma-\alpha-1)xy\Psi(\gamma-1)+\beta y\Psi(\beta+1)+\beta' x\Psi(\beta'+1)\\ \quad=h^2U(h)-g^2U(g).\end{array}\right. \tag{14}$$

Il résulte de là que, entre la fonction Ψ et trois quelconques des huit pre-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mières fonctions contiguës, il existe bien encore une relation linéaire, mais elle n'est plus toujours homogène.

D'ailleurs, si de la formule

$$\Psi(\beta+1)=\int_g^h \frac{U\,du}{1-ux},$$

on retranche membre à membre la formule

$$\Psi=\int_g^h U\,du,$$

il vient

$$\Psi(\beta+1)-\Psi=x\int_g^h \frac{u\,U\,du}{1-ux}=\frac{x}{\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

On a donc

$$\Psi(\beta+1)=\Psi+\frac{x}{\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$\Psi(\beta'+1)=\Psi+\frac{y}{\beta'}\frac{\partial\Psi}{\partial y}.$$

Donc

$$\beta\Psi(\beta+1)+\beta'\Psi(\beta'+1)=(\beta+\beta')\Psi+x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+y\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$
$$=(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)\Psi+hU(h)-gU(g),$$

et, par suite,

$$(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)=(\gamma-1)\Psi+x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+gU(g)-hU(h).$$

On voit donc que toute fonction

$$\Psi(\alpha\pm m,\beta\pm p,\beta'\pm p',\gamma\pm n;x,y)$$

et, en particulier, toute dérivée partielle de Ψ d'ordre supérieur à un, pourra s'exprimer linéairement en fonction de Ψ, de $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$. Seulement on n'aura pas toujours une fonction linéaire et homogène. Les coefficients de Ψ, de $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ seront encore des fonctions rationnelles de x et de y; le terme indépendant de Ψ, de $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ sera, en général, une fonction transcendante de x et de y.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si nous cherchons en particulier l'expression des dérivées partielles du second ordre de Ψ, on arrive au résultat suivant :

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+[\gamma(x-y)-(1+\alpha+\beta)x^2+(1+\alpha+\beta-\beta')xy+\beta' y]\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$
$$-\beta x(1-y)\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\alpha\beta(x-y)\Psi=\beta(x-y)\left[\frac{g(1-g)\,U(g)}{1-gx}-\frac{h(1-h)\,U(h)}{1-hx}\right],$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+[\gamma(y-x)-(1+\alpha+\beta')y^2+(1+\alpha+\beta'-\beta)xy+\beta x]\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$
$$-\beta' x(1-x)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\alpha\beta'(y-x)\Psi=\beta'(y-x)\left[\frac{g(1-g)\,U(g)}{1-gy}-\frac{h(1-h)\,U(h)}{1-hy}\right],$$

$$(x-y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}=\beta'\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\beta\frac{\partial\Psi}{\partial y}.$$

De là résulte ce fait important : lorsque les intégrales $\int_0^{-\infty} U\,du$ *et* $\int_{+1}^{+\infty} U\,du$ *ont un sens, elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles* (8); en effet, on a alors partie réelle de $\alpha>0$, partie réelle de $(\gamma-\alpha)>0$, partie réelle de $(1+\beta+\beta'-\gamma)>0$. Les seconds membres des deux premières équations aux dérivées partielles qui précèdent s'annulent donc pour $g=0,\ 1,\ h=\pm\infty$.

8. D'autres solutions particulières vont nous être fournies par l'intégrale

$$I(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\int_g^{\frac{h}{x}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}du.$$

Ici encore, g et h sont des constantes quelconques. Donnons à x une valeur arbitraire, complexe ou réelle, et choisissons un chemin quelconque allant du point g au point $\frac{h}{x}$ en observant les conditions suivantes.

Si $g=0$, ou $g=1$, on devra supposer la partie réelle de α, ou la partie réelle de $(\gamma-\alpha)$ supérieure à zéro. Sinon, α et γ seront arbitraires. Si $h=1$, on devra supposer que la partie réelle de β est inférieure à 1. Enfin, si $g=\infty$, la partie réelle de $(1+\beta+\beta'-\gamma)$ devra être supérieure à zéro. En tous cas le chemin ne devra passer ni par le point 0, ni par le point $+1$, ni par les points $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ni par le point à l'infini; si l'on fait ensuite varier x

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'une façon continue, le chemin suivi par u devra varier en satisfaisant toujours aux conditions précédentes.

Cela posé, on a pour la fonction I, en faisant pour α, β, β' et γ les restrictions nécessaires, les formules suivantes :

$$\mathrm{I}(\alpha+1)=\mathrm{I}(\gamma-1)-\mathrm{I},$$

$$\mathrm{I}(\beta-1)=x\,\mathrm{I}(\gamma+1)-(x-1)\,\mathrm{I},$$

$$\mathrm{I}(\beta'-1)=y\,\mathrm{I}(\gamma+1)-(y-1)\,\mathrm{I},$$

$$(\alpha-1)[\mathrm{I}(\alpha-1)+\mathrm{I}]-(\gamma-\alpha-1)\,\mathrm{I}(\gamma-1)+\beta x\,\mathrm{I}(\beta+1)+\beta' y\,\mathrm{I}(\beta'+1)=\mathrm{U}\left(\frac{h}{x}\right)-\mathrm{U}(g),$$

$$\begin{aligned}&\beta\,\mathrm{I}(\beta+1)+\beta'\,\mathrm{I}(\beta'+1)\\&\quad=(\gamma-\alpha-1)\,\mathrm{I}(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)\,\mathrm{I}+\frac{h}{x}\,\mathrm{U}\left(\frac{h}{x}\right)-g\,\mathrm{U}(g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\,\mathrm{I}-(\gamma-\beta-\beta')xy\,\mathrm{I}(\gamma+1)\\&\quad-(\gamma-\alpha-1)xy\,\mathrm{I}(\gamma-1)+\beta y\,\mathrm{I}(\beta+1)+\beta' x\,\mathrm{I}(\beta'+1)=\frac{h^2}{x^2}\,\mathrm{U}\left(\frac{h}{x}\right)-g^2\,\mathrm{U}(g).\end{aligned}$$

Il résulte de là qu'entre la fonction I et ses contiguës prises trois par trois il existe encore une relation linéaire, mais non toujours homogène.

D'autre part, les formules

$$\beta\,\mathrm{I}(\beta+1)=\beta\,\mathrm{I}+x\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial x}+\frac{h}{x}\,\mathrm{U}\left(\frac{h}{x}\right),$$

$$\beta'\,\mathrm{I}(\beta'+1)=\beta'\,\mathrm{I}+y\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial y},$$

$$(\gamma-\alpha-1)\,\mathrm{I}(\gamma-1)=(\gamma-1)\,\mathrm{I}+x\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial x}+y\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial y}+g\,\mathrm{U}(g)$$

nous permettent d'affirmer que ces mêmes fonctions contiguës, et en particulier les dérivées partielles de I d'ordre supérieur à un, sont des fonctions linéaires (mais non toujours homogènes) de I, de $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial x}$ et de $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial y}$. Les coefficients de I, de $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial x}$ et de $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial y}$ seront des fonctions rationnelles de x et de y, et le terme indépendant de I, $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial y}$ sera en général une fonction transcendante de x et de y.

Si nous cherchons en particulier l'expression des dérivées partielles du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

second ordre de I, on tombe sur les équations suivantes :

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+[\gamma(x-y)-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha+\beta-\beta'+1)xy+\beta' y]\frac{\partial I}{\partial x}$$
$$-\beta y(1-y)\frac{\partial I}{\partial y}-\alpha\beta(x-y)I$$
$$=\frac{\beta(x-y)g(1-g)U(g)}{1-gx}+\frac{h}{x}(1-h)U\left(\frac{h}{x}\right)\left[\frac{(\gamma-\alpha-1)(y-x)}{x-h}+\frac{\beta' y(x-1)}{x-hy}\right],$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}+[\gamma(y-x)-(\alpha+\beta'+1)y^2+(\alpha+\beta'-\beta+1)xy+\beta x]\frac{\partial I}{\partial y}$$
$$-\beta' x(1-x)\frac{\partial I}{\partial x}-\alpha\beta'(y-x)I$$
$$=\frac{\beta'(y-x)g(1-g)U(g)}{1-gy}+\frac{\beta'(1-y)h(1-h)U\left(\frac{h}{x}\right)}{x-hy},$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial y}+\beta\frac{\partial I}{\partial y}-\beta'\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{\beta'}{x-hy}\frac{h}{x}(1-h)U\left(\frac{h}{x}\right).$$

Les seconds membres de ces trois équations aux dérivées partielles s'annulent si l'on y fait $h=1$, $g=0, 1, \infty$ en tenant compte des conditions auxquelles doivent alors satisfaire α, β, β' et γ.

Donc, *lorsque les intégrales* $\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du$, $\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du$, $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du$ *ont un sens, elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles* (8).

D'ailleurs l'étude de l'intégrale $\int_g^{\frac{h}{y}} U\,du$ se réduira à permuter dans les résultats précédemment obtenus pour l'intégrale $\int_g^{\frac{h}{x}} U\,du$ à la fois x et y d'une part, β et β' d'autre part. Et, par suite, *si les intégrales* $\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du$, $\int_1^{y} U\,du$, $\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} U\,du$ *ont un sens, elles satisfont aux équations aux dérivées partielles* (8).

9. Il nous reste enfin à étudier l'intégrale $\int_{\frac{g}{x}}^{\frac{h}{y}} U\,du = J(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, où g et h sont des constantes quelconques, de module fini et différent de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

zéro. Si $g = 1$ ou $h = 1$, on devra avoir (partie réelle de β) < 1 ou (partie réelle de β') < 1 respectivement; x et y étant donnés, on choisira pour le chemin que doit décrire le point u une courbe quelconque partant du point $\frac{g}{x}$ pour aboutir au point $\frac{h}{y}$, en l'assujettissant à ne passer ni par le point 0, ni par le point 1, ni par les points $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ni par le point à l'infini. Si ensuite x et y tiennent à varier d'une façon continue, on fera varier d'une façon continue les extrémités du chemin arbitrairement choisi, en tenant toujours compte des conditions précédentes.

Cela posé, on a tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(\alpha+1) &= \mathrm{J}(\gamma-1) - \mathrm{J},\\
\mathrm{J}(\beta-1) &= x\mathrm{J}(\gamma+1) - (x-1)\mathrm{J},\\
\mathrm{J}(\beta'-1) &= y\mathrm{J}(\gamma+1) - (y-1)\mathrm{J},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha-1)[\mathrm{J}(\alpha-1)+\mathrm{J}] - (\gamma-\alpha-1)\mathrm{J}(\gamma-1) + \beta x\mathrm{J}(\beta+1) + \beta' y\mathrm{J}(\beta'+1)\\
&\quad = \mathrm{U}\left(\frac{h}{y}\right) - \mathrm{U}\left(\frac{g}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\beta\mathrm{J}(\beta+1) + \beta'\mathrm{J}(\beta'+1)\\
&\quad = (\gamma-\alpha-1)\mathrm{J}(\gamma-1) + (1+\beta+\beta'-\gamma)\mathrm{J} + \frac{h}{y}\mathrm{U}\left(\frac{h}{y}\right) - \frac{g}{x}\mathrm{U}\left(\frac{g}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy - \beta y - \beta' x]\mathrm{J} - (\gamma-\beta-\beta')xy\,\mathrm{J}(\gamma+1)\\
&\qquad - (\gamma-\alpha-1)xy\,\mathrm{J}(\gamma-1) + \beta y\mathrm{J}(\beta+1) + \beta' x\mathrm{J}(\beta'+1)\\
&\quad = \frac{h^2}{y^2}\mathrm{U}\left(\frac{h}{y}\right) - \frac{g^2}{x^2}\mathrm{U}\left(\frac{g}{x}\right).
\end{aligned}$$

On peut donc énoncer, pour la fonction J, le même théorème que pour les fonctions Ψ et I. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\beta\,\mathrm{J}(\beta+1) &= \beta\,\mathrm{J} + x\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} - \frac{g}{x}\mathrm{U}\left(\frac{g}{x}\right),\\
\beta'\mathrm{J}(\beta'+1) &= \beta'\mathrm{J} + y\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} + \frac{h}{y}\mathrm{U}\left(\frac{h}{y}\right),\\
(\gamma-\alpha-1)\mathrm{J}(\gamma-1) &= (\gamma-1)\mathrm{J} + x\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Les huit premières fonctions contiguës s'expriment donc linéairement en fonction de J, de $\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}$. La même méthode de calcul s'applique d'ailleurs aux fonctions contiguës suivantes, et en particulier aux dérivées

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

partielles de J d'ordre supérieur à un. Ainsi, si l'on fait le calcul pour les dérivées secondes, on trouve

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+[\gamma(x-y)-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha+\beta-\beta'+1)xy+\beta' y]\frac{\partial J}{\partial x}$$
$$-\beta y(1-y)\frac{\partial J}{\partial y}-\alpha\beta(x-y)J$$
$$=\frac{g}{x}(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)\left[\frac{\beta' y(1-x)}{x-gy}-\frac{(\gamma-\alpha-1)(x-y)}{x-g}\right]-\frac{\beta h(1-h)U\left(\frac{h}{g}\right)(1-x)}{y-hx},$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}+[\gamma(y-x)-(\alpha+\beta'+1)y^2+(\alpha+\beta'-\beta+1)xy+\beta x]\frac{\partial J}{\partial y}$$
$$-\beta' x(1-x)\frac{\partial J}{\partial x}-\alpha\beta'(y-x)J$$
$$=\frac{\beta' g(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)(1-y)}{x-gy}-\frac{h}{y}(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right)\left[\frac{\beta x(1-y)}{y-hx}-\frac{(\gamma-\alpha-1)(y-x)}{y-h}\right],$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 J}{\partial x\,\partial y}+\beta\frac{\partial J}{\partial y}-\beta'\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{\beta\frac{h}{y}(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right)}{y-hx}+\frac{\beta'\frac{g}{x}(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)}{x-gy}.$$

A la seule inspection de ces équations, on voit que si l'on suppose que l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U\,du$ a un sens, elle satisfait aux équations aux dérivées partielles (8).

En résumé, nous avons trouvé dix intégrales particulières du système des équations aux dérivées partielles (8).

Ces dix intégrales ont déjà été signalées depuis longtemps par M. Picard (1). La méthode ici exposée permet d'établir d'une façon nette les relations qui lient la fonction de x et de y définie par l'une de ces dix intégrales, ses dérivées partielles du premier ordre, et les fonctions contiguës qui s'y rattachent.

---

(1) *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques,* par M. Émile Picard (*Annales de l'École Normale supérieure,* t. X, année 1881, 2e série, p. 305 et suiv.).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

10. J'ai l'intention d'établir dans le présent Chapitre un Tableau de 60 intégrales du système (8) analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Ce Tableau a été signalé par M. Goursat dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Pour abréger, je désignerai par $\overline{\arg} x$ celui des arguments de x qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Reprenons l'intégrale $\int_0^1 U\,du$, telle que nous l'avons définie au n° 1 du Chapitre I. Posons $u = 1 - v$, d'où $v = 1 - u$; v et $(1 - v)$ seront réels, positifs, on pourra poser $\arg v = 0$, $\arg(1 - v) = 0$.

On a

$$1 - ux = (1 - x)\left(1 - \frac{vx}{x - 1}\right);$$

or, d'après nos conventions, l'argument de $1 - ux$ varie de 0 à $\overline{\arg}(1 - x)$; d'autre part, les points $1 - x$, $1 - \frac{vx}{x-1}$ sont dans des régions différentes du plan, l'un au-dessus de l'axe réel X, l'autre au-dessous. On peut donc choisir pour arguments de $(1 - x)$ et de $\left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, car leur produit aura encore un argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, comme celui de $(1 - ux)$.

La formule $1 - uy = (1 - y)\left(1 - \frac{vy}{y-1}\right)$ donne lieu aux mêmes conclusions. On a alors

$$\int_0^1 U\,du = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{vy}{y-1}\right)^{-\beta'}dv.$$

Sous la condition qu'on ait simultanément $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{y-1}\right| < 1$,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cette dernière intégrale pourra être remplacée par un développement en série défini par l'équation

$$\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{vy}{y-1}\right)^{-\beta'}dv$$
$$=\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right).$$

J'emploierai les mêmes notations que M. Goursat (¹). C_0 et C_1 seront les cercles de rayon égal à l'unité décrits des points o et $+1$ comme centres; E_0 et E_1 seront les portions de plan limitées par la corde commune à ces deux circonférences, prolongée indéfiniment, E_0 contenant le point o, E_1 le point $(+1)$. Cela posé, si x et y sont simultanément dans la région E_0 et à l'intérieur du cercle C_0, on a identiquement

$$(15)\quad \mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right),$$

avec les conditions

$$-\pi<\arg(1-x)<+\pi,$$
$$-\pi<\arg(1-y)<+\pi \quad (^2).$$

11. Posons maintenant

$$u=\frac{v}{1-x+vx}.$$

Tandis que u parcourt le segment rectiligne o——$(+1)$, le point v parcourt un arc $\mathrm{OM}(+1)=\mathrm{L}$ d'une circonférence qui passe par les trois points o, 1, $\frac{x-1}{x}$.

De la formule $u=\frac{v}{1-x+vx}$, je tire $v=\frac{u(1-x)}{1-ux}$ et, en posant $x=\xi+i\eta$,

$$v=\frac{u(1-\xi)(1-u\xi)-iu(1-u)\eta}{(1-u\xi)^2+\eta^2};$$

je conclus de là que v et x sont dans des régions différentes du plan. D'ailleurs

$$1-ux=\frac{1}{1-v\dfrac{x}{x-1}},$$

(¹) *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* Supplément au t. X, année 1881, 2e série, p. 11).

(²) Cette formule a été donnée par M. Appell (*loc. cit.*).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donc x et $\left(1-\rho\frac{x}{x-1}\right)$ sont dans la même région, et, par suite, $(1-x)$ et $\left(1-\rho\frac{x}{x-1}\right)$ dans des régions différentes. On peut donc choisir pour chacune de ces quantités des arguments compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, le produit $(1-x)\left(1-\rho\frac{x}{x-1}\right)$ aura encore un argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et la formule $u=\frac{\rho}{(1-x)\left(1-\rho\frac{x}{x-1}\right)}$ nous permet de poser

$$\overline{\arg}\,\rho=\overline{\arg}\,(1-x)+\overline{\arg}\left(1-\rho\frac{x}{x-1}\right).$$

L'égalité $1-u=\frac{1-\rho}{1-\rho\frac{x}{x-1}}$ nous permet de définir l'argument de $(1-\rho)$ par la formule

$$\overline{\arg}\,(1-\rho)=\overline{\arg}\left(1-\rho\frac{x}{x-1}\right).$$

On a d'autre part

$$1-uy=\frac{1-\rho\frac{x-y}{x-1}}{1-\rho\frac{x}{x-1}}=(1-ux)\left(1-\rho\frac{x-y}{x-1}\right).$$

On posera

$$\overline{\arg}\left(1-\rho\frac{x-y}{x-1}\right)=\overline{\arg}\,(1-uy)-\overline{\arg}\,(1-ux);$$

cela revient à choisir pour argument de $\left(1-\rho\frac{x-y}{x-1}\right)$ celui qui s'annule pour $\rho=0$. L'argument d'un facteur une fois choisi, on le laisse varier d'une façon continue, même si, dans sa variation, il franchit l'une des limites $(-\pi)$, $(+\pi)$.

Cela posé, on aura

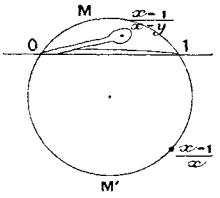
$$\int_0^{+1}U\,du=(1-x)^{-\alpha}\int_L\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{\rho x}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1-\frac{\rho(x-y)}{x-1}\right]^{-\beta'}d\rho.$$

L'intégrale du second membre est prise le long de l'arc de circonférence L. On ne peut pas toujours remplacer l'arc $L=\widehat{OM1}$ que décrit le point ρ par le segment rectiligne $0\text{——}(+1)$. Il est vrai que l'on n'a pas à se préoccuper du point critique $c=\frac{x-1}{x}$ qui correspond à $u=\infty$, et qui,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par suite, est sur l'arc $\widehat{OM'1}$; mais le point critique $v = \frac{x-1}{x-y}$, qui corres-

Fig. 1.



pond à $u = \frac{1}{y}$, pourrait être situé à l'intérieur de l'aire O1MO (*fig.* 1). On aurait alors, en posant, pour abréger,

$$V = v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1-\frac{v(x-y)}{x-1}\right]^{-\beta'},$$

$$\int_L V\,dv = (1-e^{2i\pi\beta'})\int_0^{\frac{x-1}{x-y}} V\,dv + e^{2i\pi\beta'}\int_0^1 V\,dv.$$

Maintenant, imaginons que l'on ait $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, $\left|\frac{x-y}{x-1}\right| < 1$, en sorte que les deux points $\frac{x-1}{x-y}$, $\frac{x-1}{x}$ soient *extérieurs* au cercle C_0. Alors l'arc $\widehat{OM'1}$ devra être plus grand que l'arc $\widehat{OM1}$, tandis que l'aire O1MO sera tout entière à l'intérieur de C_0. Donc le point $\frac{x-1}{x-y}$ *ne pourra pas être situé dans cette aire*. Alors on aura

$$\int_0^1 U\,du = (1-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{x-y}{x-1}\right)^{-\beta'}dv,$$

et d'ailleurs

$$\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{x-y}{x-1}\right)^{-\beta'}dv$$
$$= B(\alpha,\gamma-\alpha)\,F_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1}\right).$$

Si donc x est à la fois dans E_0 et dans C_0, et plus rapproché de y que de 1, et si y est lui-même dans C_0, on aura

$$(16)\quad F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = (1-x)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1}\right)\ (^1)$$

(1) Cette formule a été donnée par M. Appell (*loc. cit.*).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

La formule de transformation $u = \frac{v}{1-y+vy}$ donne des résultats analogues. Il suffit de permuter, dans ce qui précède, x et y, β et β'.

Si donc x et y sont à la fois à l'intérieur de C_0, si, en outre, y est dans la région E_0 et plus rapproché du point x que du point 1, on aura

$$(17) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

12. Soit maintenant

$$u = \frac{1-v}{1-vx}.$$

Tandis que u parcourt le segment rectiligne $0 \longrightarrow (+1)$, le point v décrira l'arc $\Lambda = \overset{\frown}{0M1}$ d'une circonférence passant par les points 0, 1, $\frac{1}{x}$. Je choisis comme arguments de $(1-x)$ et $(1-y)$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, 0, si ces quantités sont réelles.

v et x sont dans la même région du plan, v et $1-x$ dans des régions différentes. Je choisis pour argument de v celui qui est compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$. Alors la formule

$$1-u = \frac{v(1-x)}{1-vx}$$

nous permet de poser

$$\overline{\arg}(1-vx) = \overline{\arg}\, v + \overline{\arg}(1-x).$$

On a, d'autre part,

$$\overline{\arg}(1-v) = \overline{\arg}(1-vx).$$

L'argument de $\left(1-v\frac{y-x}{y-1}\right)$ se trouve ainsi déterminé par la condition qu'il s'annule pour $v=0$. On a alors

$$\int_0^1 U\,du = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} \int_\Lambda v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(1-vx)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{y-x}{y-1}\right)^{-\beta'} dv.$$

On ne pourra remplacer l'arc de circonférence Λ par le segment recti-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ligne $0 \text{——} (+1)$ que si le point critique $v = \frac{y-1}{y-x}$ n'est pas sur l'aire $01\,\mathrm{Mo}$; c'est ce qui a lieu si l'on a

$$|x| < 1, \quad \left|\frac{y-x}{y-1}\right| < 1.$$

D'ailleurs

$$\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(1-vx)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{y-x}{y-1}\right)^{-\beta'} dv$$
$$= \mathrm{B}(\alpha, \gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right).$$

Par suite, si x et y sont simultanément dans C_0 et si, en même temps, y est plus voisin de x que du point $+1$, on aura

$$(18)\quad \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si l'on pose $u = \frac{1-v}{1-vy}$, il suffira de permuter, dans les résultats que nous venons d'obtenir, x et y d'une part, β et β' de l'autre, en sorte que, si x et y sont simultanément à l'intérieur de C_0, x étant plus voisin de y que du point $(+1)$, on a

$$(19)\quad \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

13. En résumé, posons

$$\int_0^1 \mathrm{U}\,du = \mathrm{B}(\alpha, \gamma-\alpha)\varphi_1.$$

Si x et y sont tous les deux à l'intérieur de C_0, on a

$$\varphi_1 = \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y).$$

Lorsque x et y sont simultanément dans la région E_0

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est dans la région E_0, et plus voisin du point y que du point $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est pris dans la région E_0 et plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right), \quad [-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

Si x est à l'intérieur de C_0 et y plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right),$$

$$[-\pi < \arg(1-x) < +\pi],$$
$$[-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

Enfin, si y est à l'intérieur de C_0 et y plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right),$$

$$[-\pi < \arg(1-x) < +\pi],$$
$$[-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

14. Envisageons maintenant l'intégrale

$$\int_0^{-\infty} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du,$$

u est réel et négatif. Son argument pourra être pris soit égal à $(+\pi)$, soit égal à $(-\pi)$. On posera

$$\arg(1-u) = 0.$$

Pour arguments de $1-ux$ et de $1-uy$, on choisit ceux qui s'annulent pour $u = 0$.

On doit avoir

$$(\text{Partie réelle de } \alpha) > 0, \qquad \text{Partie réelle de } (1+\beta+\beta'-\gamma) > 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les variables x et y seront assujetties à ne pas franchir le segment $(-\infty)$—o.

A ces conditions, l'intégrale a un sens et définit une fonction uniforme de x et de y.

Choisissons d'abord $(+\pi)$ pour argument de u. Posons

$$u = e^{i\pi}\frac{v}{1-v},$$

v étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle (o, 1).

On posera

$$\arg v = 0, \qquad \arg(1-v) = 0.$$

Pour arguments de $1-v(1-x)$ et de $1-v(1-y)$, il faudra prendre ceux qui s'annulent pour $v=0$; et alors on a

$$\int_0^{-\infty} U\,du = e^{\alpha i\pi}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta+\beta'-\gamma}[1-v(1-x)]^{-\beta}[1-v(1-y)]^{-\beta'}dv,$$

ou bien

$$\int_0^{-\infty} U\,du = e^{\alpha i\pi}B(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2.$$

D'ailleurs, en se reportant aux formules (15), (16), (17), (18) et (19), on voit que, si x et y sont simultanément dans C_1,

$$\varphi_2 = F_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1-y).$$

Si x et y sont simultanément dans E_1,

$$\varphi_2 = x^{-\beta}y^{-\beta'}F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$
$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Si x est dans la région E_1 et plus voisin de y que de l'origine,

$$\varphi_2 = x^{-\alpha}F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si y est dans la région E_1 et plus voisin de x que de l'origine

$$\varphi_2 = y^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Si x est à l'intérieur de C_1 et y plus voisin de x que de l'origine,

$$\varphi_2 = x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, \frac{y-x}{y}\right).$$

Si y est à l'intérieur de C_1 et x plus voisin de y que de l'origine

$$\varphi_2 = x^{-\beta} y^{1+\beta-\gamma} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-y}{x}, 1-y\right).$$

Dans ces deux dernières formules, on a

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$
$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Rappelons que, si l'on prend $\arg u = +\pi$,

$$\int_0^{-\infty} U\, du = e^{+\alpha i\pi} B(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2,$$

et, si l'on prend $\arg u = -\pi$,

$$\int_0^{-\infty} U\, du = e^{-\alpha i\pi} B(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2,$$

15. Prenons maintenant l'intégrale

$$\int_{+1}^{+\infty} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du.$$

On prendra l'argument de u égal à zéro. Celui de $(1-u)$, quantité réelle négative, pourra être pris égal soit à $(+\pi)$, soit à $(-\pi)$.

Observons que les points x et y sont assujettis à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Pour rendre la fonction uniforme, nous interdirons aux variables x et y de franchir le segment rectiligne $0 \text{——} (+\infty)$. On pourra donc choisir pour argument de $1-ux$, $1-uy$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a, bien entendu,

$$\text{Partie réelle de } (\gamma-\alpha)>0,$$
$$\text{Partie réelle de } (1+\beta+\beta'-\gamma)>0.$$

Cela posé, soit $u=\frac{1}{v}$, v étant réel, et appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Soit aussi $\arg v=0$.

Supposons qu'on choisisse $+\pi$ pour argument de $1-u$, de sorte que

$$1-u=e^{i\pi}\frac{1-v}{v}, \qquad \text{avec} \quad \arg(1-v)=0.$$

D'ailleurs

$$1-ux=(-x)\frac{1-\frac{v}{x}}{v}, \qquad 1-uy=(-y)\frac{1-\frac{v}{y}}{v}.$$

Comme $(-x)$ et $\left(1-\frac{v}{x}\right)$ sont dans des régions différentes, je puis choisir pour arguments de $(-x)$ et de $1-\frac{v}{x}$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$. Même remarque pour les arguments de $(-y)$ et de $\left(1-\frac{v}{y}\right)$.

Alors

$$\int_{+1}^{+\infty} U\,du=e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi}(-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'}\int_0^{+1} v^{\beta+\beta'-\gamma}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{v}{y}\right)^{-\beta'}dv.$$

D'ailleurs, on a, sous les conditions $|x|>1$, $|y|>1$,

$$\int_0^{+1} v^{\beta+\beta'-\gamma}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{v}{y}\right)^{-\beta'}dv$$
$$=B(1+\beta+\beta'-\gamma,\gamma-\alpha)\,F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\beta,\beta',1+\beta+\beta'-\alpha;\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right).$$

Si donc on pose, avec la condition $\arg(1-u)=+\pi$,

$$\int_{+1}^{+\infty} U\,du=e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi}B(1+\beta+\beta'-\gamma,\gamma-\alpha)\varphi_3,$$

avec la condition $\arg(1-u)=-\pi$,

$$\int_{+1}^{+\infty} U\,du=e^{(1+\alpha-\gamma)i\pi}B(1+\beta+\beta'-\gamma,\gamma-\alpha)\varphi_3,$$

on aura pour φ_3 les formes suivantes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si x et y sont tous les deux extérieurs au cercle C_0,

$$\varphi_3 = (-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

Ici, on a

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(-y) < +\pi.$$

Si x et y sont tous les deux extérieurs au cercle C_1,

$$\varphi_3 = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right).$$

Je dis qu'on a

$$(-\pi) < \arg(1-x) < (+\pi), \qquad (-\pi) < \arg(1-y) (+\pi).$$

En effet, reportons-nous à la formule (15); le facteur $(1-x)^{-\beta}$ provient du produit $(-x)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$; or l'argument de $(-x)$ a été choisi entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et dans la formule (15) (après qu'on y a changé x en $\frac{1}{x}$), le facteur $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ a aussi son argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

D'ailleurs $(-x)$ et $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ sont dans des régions différentes, on a donc

$$\overline{\arg}(1-x) = \overline{\arg}(-x) + \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si x est extérieur au cercle C_1, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-x)^{1+\beta'-\gamma}(-y)^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right).$$

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est extérieur au cercle C_1, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-y)^{1+\beta-\gamma}(-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}$$
$$\times\,\mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{x-y}{x(1-y)}, \frac{1}{1-y}\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est extérieur à C_0 et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si y est extérieur à C_0, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-y)^{\alpha-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

16. Examinons actuellement l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{x}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du.$$

Nous faisons décrire à u le chemin qui va de l'origine au point $\frac{1}{x}$ en droite ligne. Si ω est l'argument de $(-x)$, supposé compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et si l'on veut, pour l'argument de u, un argument compris, lui aussi, entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, il faudra poser $\arg u = \pi - \omega$, si le point $(-x)$ est dans la région supérieure du plan, et $\arg u = -\pi - \omega$, si le point $(-x)$ est dans la région inférieure.

Dans le premier, on écrira

$$u = e^{+i\pi}\frac{v}{(-x)} \quad v \text{ étant réel, et appartenant à l'intervalle } (0, 1),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, dans le deuxième cas,

$$u = e^{-i\pi}\frac{v}{(-x)}, \quad v \text{ étant réel et appartenant à l'intervalle } (0, 1).$$

$1-u = 1-\frac{v}{x}$: on choisira l'argument qui s'annule pour $v=0$;

$1-ux = 1-v$; $\arg(1-ux) = \arg(1-v) = 0$;

$1-uy = 1-\frac{vy}{x}$: on choisira l'argument qui s'annule pour $v=0$.

On doit avoir

$$\text{Partie réelle de } (\alpha) > 0,$$
$$\text{Partie réelle de } (1-\beta) > 0,$$

x est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, de façon que le point $(+1)$ ne soit pas sur le parcours de la variable u. Le point $\frac{1}{y}$ ne devra pas, lui non plus, être situé sur ce parcours.

Supposons que $(-x)$ soit dans la région supérieure du plan; alors

$$\overline{\arg} u = \pi - \overline{\arg}(-x),$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = e^{\alpha i\pi}(-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{-\beta}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vy}{x}\right)^{-\beta'} dv.$$

D'ailleurs, sous les conditions $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$,

$$\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{-\beta}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-v\,\frac{y}{x}\right)^{-\beta'} dv$$
$$= B(\alpha, 1-\beta)\,F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right).$$

On peut donc poser, si l'on a $\overline{\arg} u = \pi - \overline{\arg}(-x)$,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = e^{\alpha i\pi} B(\alpha, 1-\beta)\varphi_4,$$

et, si l'on a $\overline{\arg} u = -\pi - \overline{\arg}(-x)$,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = e^{-\alpha i\pi} B(\alpha, 1-\beta)\varphi_4,$$

l'intégrale φ_4 pouvant, d'ailleurs, prendre les formes suivantes :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si x est extérieur au cercle C_0, et y plus voisin de l'origine que le point x,

$$\varphi_4 = (-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

avec

$$(-\pi) < \arg(-x) < +\pi.$$

Si x est extérieur au cercle C_1 et y plus voisin de l'origine que du point x,

$$\varphi_4 = (-x)^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x}\right).$$

On a toujours

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi.$$

D'autre part,

$$\overline{\arg}(1-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) + \overline{\arg}(-x);$$

donc

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Enfin

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Si x est extérieur au cercle C_1, et y plus voisin de 1 que x,

$$\varphi_4 = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{1-y}{1-x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est plus voisin de 1 que de x, et aussi plus voisin de o que de x,

$$\varphi_4 = (y-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta; \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right)$$

avec

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Si x est extérieur à C_0 et y plus voisin de 1 que de x,

$$\varphi_4 = (-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y-1}{y-x}\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$-\pi < \arg\ (-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Enfin, si y est à la fois plus voisin des points 1 et 0 que x,

$$\varphi_4 = (-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'}\,F_1\left(1-\beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1-y}{1-x},\ \frac{y}{x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg\ (-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du$ donne lieu à des considérations analogues. Il suffit de permuter dans les résultats précédents x et y d'une part, β et β' de l'autre.

Si l'on a $\overline{\arg}\,u = \pi - \overline{\arg}(-y)$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du = e^{\alpha i\pi}\,B(\alpha,\ 1-\beta')\,\varphi_5,$$

et si l'on a $\overline{\arg}\,u = -\pi - \overline{\arg}(-y)$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du = e^{-\alpha i\pi}\,B(\alpha,\ 1-\beta')\,\varphi_5,$$

l'intégrale φ_5 pouvant d'ailleurs prendre les formes suivantes.

Si y est extérieur au cercle C_0 et x plus voisin de l'origine que y,

$$\varphi_5 = (-y)^{-\alpha}\,F_1\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{y},\ \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si y est extérieur au cercle C_1 et x plus voisin de l'origine que de y,

$$\varphi_5 = (-y)^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta}\,F_1\left(1-\beta',\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{x-y},\ \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg\ (-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Si y est extérieur au cercle C_1 et x plus voisin de 1 que y,

$$\varphi_5 = (1-y)^{-\alpha}\,F_1\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{1-x}{1-y},\ \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est plus voisin de 1 et de 0 que de y,

$$\varphi_5 = (x-y)^{-\alpha}\,F_1\left(\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{x-y},\ \frac{x-1}{x-y}\right)$$

avec

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Si y est extérieur à C_0, et x plus voisin de 1 que de y,

$$\varphi_5 = (-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta}\,F_1\left(1-\beta',\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x-1}{x-y},\ \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg\ (-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Enfin, si x est à la fois plus voisin des points 1 et 0 que y,

$$\varphi_5 = (-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'}\,F_1\left(1-\beta',\gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{y},\ \frac{1-x}{1-y}\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$-\pi < \arg\ (-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

17. Soit à étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du.$$

Ici nous poserons $u = \frac{1}{\rho x}$, ρ étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle (0, 1); on aura donc

$$\arg u = -\overline{\arg}\, x.$$

On doit donc avoir

$$\text{Partie réelle de } (1-\beta) > 0,$$
$$\text{Partie réelle de } (1+\beta+\beta'-\gamma) > 0.$$

D'autre part,

$$1-u = 1-\frac{1}{\rho x};$$

il ne faut pas que cette quantité puisse devenir nulle. x est donc assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles supérieures à 1.

De même

$$1-uy = 1-\frac{y}{\rho x};$$

il ne faut pas que ce facteur puisse s'annuler. Donc $\frac{y}{x}$ est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, c'est-à-dire que x et y ne devront pas se trouver en ligne droite avec l'origine, du même côté par rapport à l'origine, y étant compris entre l'origine et le point x.

Maintenant

$$1-u = (-1)\frac{1-\rho x}{\rho x}.$$

Pour argument de $1-\rho x$, je choisis celui qui s'annule pour $\rho = 0$. Si l'on veut que l'argument de $1-u$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$, si x est dans

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la partie supérieure du plan, il faudra poser

$$1-u=e^{+i\pi}\frac{1-\varphi x}{\varphi x}\qquad\text{et}\qquad 1-u=e^{-i\pi}\frac{1-\varphi x}{\varphi x}$$

lorsque x sera dans la partie inférieure.

De même

$$1-uy=(-1)\frac{y}{\varphi x}\left(1-\varphi\frac{x}{y}\right);$$

on choisira pour argument de $1-\varphi\frac{x}{y}$ celui qui s'annule pour $\varphi=0$. De plus, si l'on veut que l'argument de $1-uy$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$, si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, on posera

$$1-uy=e^{+i\pi}\frac{y}{\varphi x}\left(1-\varphi\frac{x}{y}\right);$$

si, au contraire, $\frac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan, on écrira

$$1-uy=e^{-i\pi}\frac{y}{\varphi x}\left(1-\frac{\varphi x}{y}\right).$$

Si l'on pose $x=\xi+i\eta$, $y=\xi'+i\eta'$,

$$\frac{x}{y}=\frac{\xi\xi'+\eta\eta'+i(\eta\xi'-\xi\eta')}{(\xi'^2+\eta'^2)}.$$

Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, on a

$$\eta\xi'-\xi\eta'>0.$$

Par suite, si l'on parcourt le périmètre du triangle Oxy dans le sens Oxy, on a l'aire du triangle *à sa droite*. On aura l'aire du triangle *à sa gauche* si le point $\frac{x}{y}$ est sur la partie inférieure du plan.

Enfin,

$$1-ux=e^{\pm\pi i}\frac{1-\varphi}{\varphi}.$$

On aura alors

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}U\,du=e^{\varepsilon\beta i\pi+\varepsilon'\beta'i\pi+\varepsilon''(\gamma-\alpha-1)i\pi}x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta'}\int_0^1\varphi^{\beta+\beta'-\gamma}(1-\varphi)^{-\beta}(1-\varphi x)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{\varphi x}{y}\right)^{-\beta'}d\varphi,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les valeurs de ε, ε', ε'' étant déterminées ainsi qu'il suit :

Si $\arg(1-ux)=+\pi$, $\varepsilon=-1$.

Si $\arg(1-ux)=-\pi$, $\varepsilon=+1$.

Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon'=-1$.

Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon'=+1$.

Si x est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon''=+1$.

Si x est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon''=-1$.

D'ailleurs, sous les conditions $|x|<1$, $\left|\frac{x}{y}\right|<1$,

$$\int_0^1 v^{\beta+\beta'-\gamma}(1-v)^{-\beta}(1-vx)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-v\frac{x}{y}\right)^{-\beta'}dv$$
$$=B(1+\beta+\beta'-\gamma,\,1-\beta)\,F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\,1+\alpha-\gamma,\,\beta',\,2+\beta'-\gamma;\,x,\frac{x}{y}\right).$$

En résumé,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du=e^{\varepsilon\beta i\pi+\varepsilon'\beta' i\pi+\varepsilon''(\gamma-\alpha-1)i\pi}B(1+\beta+\beta'-\gamma,\,1-\beta)\,\varphi_6,$$

φ_6 ayant l'une des six formes qui suivent.

Si x est dans C_0 et plus voisin de l'origine que y,

$$\varphi_6=x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta'}F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\,1+\alpha-\gamma,\,\beta',\,2+\beta'-\gamma;\,x,\frac{x}{y}\right)$$

avec

$$-\pi<\arg x<+\pi$$

et

$$\arg y=\overline{\arg}\,x-\overline{\arg}\,\frac{x}{y}.$$

Si x est plus voisin de l'origine que de 1 et de y,

$$\varphi_6=x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'}F_1\left(1-\beta,\,1+\alpha-\gamma,\,\beta',\,2+\beta'-\gamma;\,\frac{x}{x-1},\frac{x}{x-y}\right).$$

On a d'abord

$$-\pi<\arg x<+\pi,$$

puis

$$-\pi<\arg(1-x)<+\pi,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

enfin

$$\arg(y-x)=\overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right)+\overline{\arg}\,x.$$

Si x est dans la région E_0 et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6=x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1}F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x}{x-1},\ \frac{x(y-1)}{y(x-1)}\right],$$

avec

$$-\pi<\arg x<+\pi,$$
$$\arg y=\overline{\arg}\,x-\overline{\arg}\,\frac{x}{y},$$
$$-\pi<\arg(1-x)<+\pi.$$

Si $\frac{1}{y}$ est plus voisin de 1 et de 0 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6=x^{1+\beta'-\gamma}y^{1+\beta-\gamma}(y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1}F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1-\alpha,\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ \frac{x}{x-y}\right]$$

avec

$$-\pi<\arg x<+\pi,$$
$$\arg y=\overline{\arg}\,x-\overline{\arg}\,\frac{x}{y},$$
$$\arg(y-x)=\overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right)+\overline{\arg}\,x.$$

Si x est dans C_0 et si $\frac{1}{y}$ est plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6=x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'}F_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 2+\beta'-\gamma;\ x,\ \frac{x(1-y)}{x-y}\right],$$

avec

$$-\pi<\arg x<+\pi,$$
$$-\pi<\arg(1-x)<+\pi,$$
$$\arg(y-x)=\overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right)+\overline{\arg}\,x.$$

Enfin, si x est plus voisin de l'origine que y, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6=x^{1+\beta'-\gamma}y^{\beta-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F_1\left[1-\beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1-\alpha,\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x(y-1)}{y(x-1)},\ \frac{x}{y}\right],$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$-\pi < \arg x < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$\arg y = \overline{\arg} x - \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\arg(y-x) = \overline{\overline{\arg}}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\overline{\arg}} x.$$

Pour obtenir les résultats concernant l'intégrale $\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \mathrm{U}\,du$, il n'y a qu'à permuter, dans ce qui précède, x et y, β et β'.

On a donc

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \mathrm{U}\,du\, e^{\varepsilon\beta i\pi + \varepsilon'\beta' i\pi + \varepsilon''(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathrm{B}(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\beta')\varphi_7,$$

ε, ε' et ε'' étant déterminés comme il suit :

$$\text{Si } \arg(1-uy) = +\pi, \qquad \varepsilon' = -1,$$
$$\text{Si } \arg(1-uy) = -\pi, \qquad \varepsilon' = +1.$$

Si $\frac{y}{x}$ est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon = -1$,

Si $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon = +1$,

Si y est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon'' = +1$,

Si y est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon'' = -1$.

φ_7 aura, d'ailleurs, l'une des six formes ci-jointes :

Si y est dans le cercle C_0 et plus voisin de l'origine que x,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} \mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{x},\ y\right);$$

Si y est plus voisin de l'origine que de 1 et de x,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta} \mathrm{F}_1\left(1-\beta',\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{y-x},\ \frac{y}{y-1}\right);$$

Si y est dans la région E_0, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} \mathrm{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y(x-1)}{x(y-1)},\ \frac{y}{y-1}\right];$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si $\frac{1}{x}$ est plus voisin de 1 et de 0 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2+\beta-\gamma; \frac{y}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x}\right];$$

Si y est dans C_0, et si $\frac{1}{x}$ est plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta}F_1\left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, 2+\beta-\gamma; \frac{y(1-x)}{y-x}, y\right];$$

Enfin, si y est plus voisin de l'origine que x, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma}x^{\beta'-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}F_1\left[1-\beta', 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2+\beta-\gamma; \frac{y}{x}, \frac{y(x-1)}{x(y-1)}\right].$$

Dans ces formules, on a

$$-\pi < \arg y < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$
$$\arg x = \overline{\arg} y - \overline{\arg}\frac{y}{x},$$
$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}-1\right) + \overline{\arg}\, y.$$

18. Nous arrivons à l'intégrale

$$\int_{+1}^{+\frac{1}{x}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du.$$

On doit avoir

Partie réelle de $(\gamma-\alpha) > 0$,
Partie réelle de $(1-\beta) > 0$.

On fera décrire à u le chemin rectiligne qui va du point 1 au point $\frac{1}{x}$; on posera, en conséquence, $u = 1 - \rho\frac{x-1}{x}$, ρ étant une variable réelle appartenant à l'intervalle $(0,1)$. Ce facteur ne doit pas s'annuler. Or l'équation $u = 0$ équivaut à $x = 1 - \frac{1}{1-\rho}$; donc x est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles négatives.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

De même

$$1 - uy = (1 - y)\left[1 - \varepsilon \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right].$$

Ce dernier facteur ne doit pas s'annuler; $\frac{x(1-y)}{y(1-x)}$ est assujetti à ne pas prendre de valeur réelle, positive, comprise entre zéro et 1. Géométriquement, les points $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ ne devront pas être en ligne droite avec le point $+1$, $\frac{1}{y}$ étant plus près de 1 que $\frac{1}{x}$.

Passons aux arguments.

$u = 1 - \varepsilon \frac{x-1}{x}$; on prendra pour argument de u celui qui s'annule pour $\varepsilon = 0$.

$1 - u = -\frac{1-x}{x}\varepsilon$; si x est dans la partie supérieure du plan, $\frac{1}{x}$ est dans la partie inférieure; il en est de même de $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$. Si x est dans la partie supérieure du plan, on posera donc

$$\left(1 - u = e^{+i\pi}\frac{1-x}{x}\varepsilon\right),$$

et si x est dans la partie inférieure,

$$1 - u = e^{-i\pi}\frac{1-x}{x}\varepsilon,$$

en choisissant pour argument de $\frac{1-x}{x}$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. L'argument de ε est égal à zéro.

$1 - ux = (1-x)(1-\varepsilon)$; posons $\arg(1-\varepsilon) = 0$. Choisissons pour argument de $(1-x)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$; alors

$$\arg(1-ux) = \overline{\arg}(1-x).$$

Remarquons que l'on a

$$\overline{\arg}x = \overline{\arg}(1-x) - \overline{\arg}\frac{1-x}{x},$$

$(1-uy) = (1-y)\left[1 - \frac{\varepsilon y(1-x)}{x(1-y)}\right]$. On prendra pour argument de $(1-y)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et pour argument de $1 - \frac{\varepsilon y(1-x)}{x(1-y)}$ celui qui s'annule pour $\varepsilon = 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On arrive alors aux résultats suivants :

Si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi}\mathrm{B}(\gamma-\alpha,\ 1-\beta)\,\varphi_8;$$

Si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{(1+\alpha-\gamma)i\pi}\mathrm{B}(\gamma-\alpha,\ 1-\beta)\,\varphi_8;$$

D'ailleurs, φ_8 prend les six formes qui suivent :

Si x est dans E_1, et $\frac{1}{x}$ plus près de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right],$$

les arguments de x, $1-x$, $1-y$ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$;

Si x est dans C_1 et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x,\ \frac{y(1-x)}{y-x}\right];$$

Si x est dans C_1 plus près de 1 que y,

$$\varphi_8 = (1-x^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x,\ \frac{x-1}{y-1}\right);$$

Si x est plus voisin de 1 que de y, $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{\alpha-\gamma}\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{1-x}{y-x},\ \frac{y(1-x)}{y-x}\right];$$

Si x est dans la région E_1, plus voisin de 1 que de y,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x},\ \frac{1-x}{y-x}\right];$$

Si enfin x est plus voisin de 1 que y, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\beta-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta'_1\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{y-1},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans ces formules, les arguments de x, $1-x$, $1-y$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On a, d'autre part,

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left[1-\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right] + \overline{\arg}\,x + \overline{\arg}(1-y).$$

En permutant, dans ces résultats, x et y, β et β', on aura ceux qui concernent l'intégrale $\int_{+1}^{+\frac{1}{y}} U_1 du$.

Les voici : si y est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} U\,du = e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi}\mathrm{B}(\gamma-\alpha,\ 1-\beta')\varphi_9;$$

Si y est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} U\,du = e^{-(\gamma-\alpha-1)i\pi}\mathrm{B}(\gamma-\alpha,\ 1-\beta')\varphi_9,$$

φ_2 pourra prendre l'une des six formes qui suivent :

Si y est dans E_1, $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)},\ \frac{y-1}{y}\right];$$

Si y est dans C_1, et $\frac{1}{y}$ plus près de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{1+\beta-\gamma}(y-x)^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta',\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ 1-y\right];$$

Si y est, dans C_1, plus voisin de 1 que x,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{y-1}{x-1},\ 1-y\right);$$

Si y est plus voisin de 1 que de x et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{\alpha-\gamma}\,\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ \frac{1-y}{x-y}\right];$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si y est, dans la région E_1, plus voisin de 1 que de x,

$$\varphi_0 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (y-x)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{1-y}{x-y}, \frac{y-1}{y}\right);$$

Enfin, si y est plus voisin de 1 que x, $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_0 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (1-x)^{\beta'-1} (y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{x-1}\right].$$

Dans ces formules, les arguments de y, $1-x$, $1-y$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et l'on a

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left[1-\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right] + \overline{\arg} y + \overline{\arg}(1-x).$$

19. Reste enfin à étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

En premier lieu, on doit avoir

$$\text{Partie réelle de } (1-\beta) > 0.$$
$$\text{Partie réelle de } (1-\beta') > 0.$$

Le chemin décrit par u sera le segment rectiligne allant de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$.

Posons

$$u = \frac{1}{x}\left[1-\frac{\varepsilon(y-x)}{y}\right],$$

ε étant réel et appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Ce facteur ne doit pas s'annuler. Or l'égalité $1-\varepsilon\frac{y-x}{y} = 0$ revient à $\frac{x}{y} = 1-\frac{1}{\varepsilon}$: la condition revient donc géométriquement à la suivante : les points x et y ne doivent pas être à la fois en ligne droite avec l'origine, et de part et d'autre de l'origine.

D'ailleurs $1-u = \frac{x-1}{x}\left[1-\varepsilon\frac{y-x}{y(1-x)}\right]$ ne doit pas non plus s'annuler. Or l'équation

$$1-\varepsilon\frac{y-x}{y(1-x)} = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peut s'écrire

$$\frac{1-\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{x}} = 1-\frac{1}{v};$$

on en conclut que le point 1 ne doit pas se trouver sur le segment de droite qui va de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$.

Dans la formule $u = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{v(y-x)}{y}\right]$, je choisis comme argument de x celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et comme argument de $1 - \frac{v(y-x)}{y}$ celui qui s'annule pour $v = 0$; on a donc

$$\arg u = \overline{\arg}\left(1 - v + v\frac{x}{y}\right) - \overline{\arg} x, \qquad 1-u = \frac{x-1}{x}\left[1 - v\frac{y-x}{y(1-x)}\right];$$

et l'on aura

$$\arg(1-u) = \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) + \overline{\arg}\left[1 - v\frac{y-x}{y(1-x)}\right],$$

$$1 - ux = \frac{y-x}{y}v, \qquad \text{d'où} \qquad \arg(1-ux) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right).$$

Enfin

$$1 - uy = e^{\varepsilon i\pi}\frac{y-x}{y}(1-v).$$

On posera

$\varepsilon = +1$ si $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan,

$\varepsilon = -1$ si $\frac{y}{x}$ est dans la partie supérieure du plan.

Alors on a

$$\int_x^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du = e^{(1-\varepsilon\beta')i\pi}\,\mathrm{B}(1-\beta, 1-\beta')\varphi_{10},$$

φ_{10} pouvant d'ailleurs se mettre sous les six formes suivantes :

Si y est plus voisin de x que de l'origine, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-1}x^{1+\beta'-\gamma}y^{\beta-1}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right];$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si x est plus voisin de y que de l'origine et que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-1}x^{\beta+\beta'-\gamma}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ 2-\beta-\beta';\ \frac{x-y}{x},\ \frac{y-x}{1-x}\right);$$

Si y est plus voisin de x que de 1, et aussi $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(y-1)^{\beta-1}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta';\ \frac{x-y}{1-y},\ \frac{x-y}{x(1-y)}\right];$$

Si y est plus voisin de x que de l'origine et de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-1}y^{\beta+\beta'-\gamma}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ \gamma-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta';\ \frac{x-y}{1-y},\ \frac{y-x}{y}\right);$$

Si x est plus voisin de y que de 1, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{\beta+\beta'-\gamma}(x-1)^{\beta'-1}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta',\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ 2-\beta-\beta';\ \frac{y-x}{y(1-x)},\ \frac{y-x}{1-x}\right];$$

Enfin, si x est plus voisin de y que de l'origine, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-1}y^{1+\beta-\gamma}x^{\beta'-1}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ 1-\alpha,\ 2-\beta-\beta';\ \frac{y-x}{x(y-1)},\ \frac{x-y}{x}\right].$$

Dans ces formules, les arguments de x et de $(x-1)$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On a d'autre part

$$\begin{aligned}
\arg y &= \overline{\arg}\,\frac{y}{x} + \overline{\arg}\,x,\\
\arg(y-1) &= \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}\,\frac{y-1}{x-1}\right) + \overline{\arg}\,\frac{y}{x} + \overline{\arg}(x-1),\\
\arg(y-x) &= \overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\arg}\,x.
\end{aligned}$$

20. En résumé, voici le Tableau des soixante intégrales annoncé au début

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de ce Chapitre :

$$\varphi_1 = \begin{cases} \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y), \\ (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right), \\ (1-x)^{-\alpha}\mathrm{F}_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right), \\ (1-y)^{-\alpha}\mathrm{F}_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right), \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right); \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1-y), \\ x^{-\beta}y^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right), \\ x^{-\alpha}\mathrm{F}_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x}\right), \\ y^{-\alpha}\mathrm{F}_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y}\right), \\ x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, \frac{y-x}{y}\right), \\ y^{1+\beta-\gamma}x^{-\beta}\mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-y}{x}, 1-y\right); \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} (-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \\ (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right), \\ (-x)^{1+\beta'-\gamma}(-y)^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right], \\ (-y)^{1+\beta-\gamma}(-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{x-y}{x(1-y)}, \frac{1}{1-y}\right], \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(-x)^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right], \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(-y)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{1}{y}\right); \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\varphi_4 = \begin{cases} (-x)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ \beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{x},\ \frac{y}{x}\right), \\ (-x)^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ \beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{1-x},\ \frac{y}{y-x}\right), \\ (1-x)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{1-x},\ \frac{1-y}{1-x}\right), \\ (y-x)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{y-1}{y-x},\ \frac{y}{y-x}\right), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(y-x)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{x},\ \frac{y-1}{y-x}\right), \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'}(-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1-y}{1-x},\ \frac{y}{x}\right); \end{cases}$$

$$\varphi_5 = \begin{cases} (-y)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{y},\ \frac{1}{y}\right), \\ (-y)^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta',\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{x-y},\ \frac{1}{1-y}\right), \\ (1-y)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{1-x}{1-y},\ \frac{1}{1-y}\right), \\ (x-y)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{x-y},\ \frac{x-1}{x-y}\right), \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta}(-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta',\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x-1}{x-y},\ \frac{1}{y}\right), \\ (x-y)^{1-\beta-\beta'}(-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta',\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta';\ \frac{x}{y},\ \frac{1-x}{1-y}\right); \end{cases}$$

$$\varphi_6 = \begin{cases} x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1+\alpha-\gamma,\ \beta',\ 2+\beta'-\gamma;\ x,\ \frac{x}{y}\right), \\ x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ \beta',\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x}{x-1},\ \frac{x}{x-y}\right), \\ x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1}\,\mathrm{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x}{x-1},\ \frac{x(y-1)}{y(x-1)}\right], \\ x^{1+\beta'-\gamma}y^{1+\beta-\gamma}(y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1}\,\mathrm{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha,\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ \frac{x}{x-y}\right], \\ x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 2+\beta'-\gamma;\ x,\ \frac{x(1-y)}{x-y}\right], \\ x^{1+\beta'-\gamma}(y-x)^{1-\beta-\beta'}y^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathrm{F}_1\left[1-\beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1-\alpha,\ 2+\beta'-\gamma;\ \frac{x(y-1)}{y(x-1)},\ \frac{x}{y}\right]; \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$y^{1+\beta-\gamma}x^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{x},\ y\right),$$

$$\left\{\begin{array}{l}
y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left(1-\beta',\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \dfrac{y}{y-x},\ \dfrac{y}{y-1}\right),\\
y^{1+\beta-\gamma}x^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 2+\beta-\gamma;\ \dfrac{y(x-1)}{x(y-1)},\ \dfrac{y}{y-1}\right],\\
y^{1+\beta-\gamma}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \dfrac{y}{y-x},\ \dfrac{y(1-x)}{y-x}\right],\\
y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta',\ \beta,\ 1-\alpha,\ 2+\beta-\gamma;\ \dfrac{y(1-x)}{y-x},\ y\right],\\
y^{1+\beta-\gamma}(x-y)^{1-\beta-\beta'}x^{\beta'-1}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \dfrac{y}{x},\ \dfrac{y(x-1)}{x(y-1)}\right];
\end{array}\right.\quad \varphi_7 =$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right],$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x,\ \dfrac{y(1-x)}{y-x}\right],\\
(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x,\ \dfrac{y-1}{x-1}\right),\\
(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{\alpha-\gamma}\,\mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \dfrac{1-x}{y-x},\ \dfrac{y(1-x)}{y-x}\right],\\
(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\,\mathbf{F}_1\left(1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \dfrac{x-1}{x},\ \dfrac{x-1}{x-y}\right),\\
(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(x-y)^{1-\beta-\beta'}x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\beta-1}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \dfrac{y-1}{x-1},\ \dfrac{y(1-x)}{x(1-y)}\right];
\end{array}\right.\quad \varphi_8 =$$

$$(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)},\ \frac{y-1}{y}\right],$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{1+\beta-\gamma}(y-x)^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta',\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \dfrac{x(1-y)}{x-y},\ 1-y\right],\\
(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \dfrac{y-1}{x-1},\ 1-y\right],\\
(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{\alpha-\gamma}\,\mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \dfrac{x(1-y)}{x-y},\ \dfrac{1-y}{x-y}\right],\\
(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{\beta+\beta'-\gamma}(y-x)^{-\beta}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta',\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \dfrac{1-y}{x-y},\ \dfrac{y-1}{y}\right],\\
(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(y-x)^{1-\beta-\beta'}y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\beta'-1}\,\mathbf{F}_1\left[1-\beta',\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \dfrac{x(1-y)}{y(1-x)},\ \dfrac{y-1}{x-1}\right];
\end{array}\right.\quad \varphi_9 =$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\varphi_{10} = \begin{cases} (y-x)^{1-\beta-\beta'} x^{1+\beta'-\gamma} (x-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta-1} \mathbf{F}_1\left[1-\beta, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} y^{1+\beta-\gamma} (y-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta'-1} \mathbf{F}_1\left[1-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{x(1-y)}, \frac{x-y}{x}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta+\beta'-\gamma} \mathbf{F}_1\left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{x}, \frac{y-x}{1-x}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta+\beta'-\gamma} \mathbf{F}_1\left[1-\beta', 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y-x}{y}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma} (y-1)^{\beta-1} \mathbf{F}_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (x-1)^{\beta'-1} \mathbf{F}_1\left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{y-x}{1-x}\right]. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

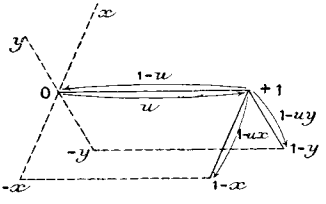
CHAPITRE III.

21. Les dix intégrales précédentes ne sont pas distinctes. Entre quatre d'entre elles existe certainement une relation linéaire. Parfois même, si on les prend trois par trois, certains groupes, pour des positions convenablement choisies de x et de y dans le plan, seront composés de trois intégrales non distinctes, entre lesquelles, par conséquent, il existera une relation linéaire et homogène. Le point capital que je désire bien mettre en évidence, c'est que les relations cherchées ne subsistent pas pour toutes les positions de x et de y dans le plan. C'est ce que je vais d'abord établir.

Rendons-nous compte, en premier lieu, des chemins suivis par les points $1-u$, $1-ux$, $1-uy$ quand le point u suit un chemin déterminé. Nous n'examinerons que les cas particuliers nécessaires pour la suite.

1° Le point u va sur l'axe réel X, de 0 à 1 (*fig.* 2); le point $1-u$ va sur X, de 1 à 0; le point $1-ux$ va en ligne droite du point 1 au point $(1-x)$ et, de même, le point $1-uy$ va en ligne droite du point 1 au point $1-y$.

Fig. 2.



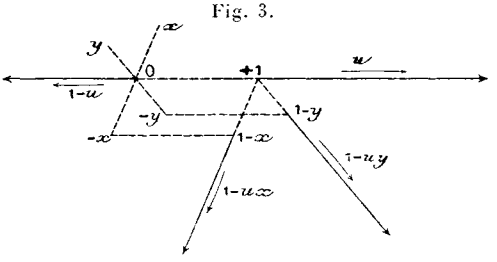
2° Le point u va sur X de $+1$ à $+\infty$ (*fig.* 3); le point $(1-u)$ va sur X de 0 à $(-\infty)$; $1-ux$ va de $(1-x)$ à l'infini sur la droite $(1, 1-x)$; $1-uy$ va de $(-y)$ à l'infini sur la droite $(1, 1-y)$.

3° Le point u va sur X de 0 à $(-\infty)$ (*fig.* 4); le point $(1-u)$ va sur X de $+1$ à $+\infty$; le point $(1-ux)$ va de 1 à l'infini sur la droite $(1, 1-x)$: le point $1-uy$ va de 1 à l'infini sur la droite $(1, 1-y)$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

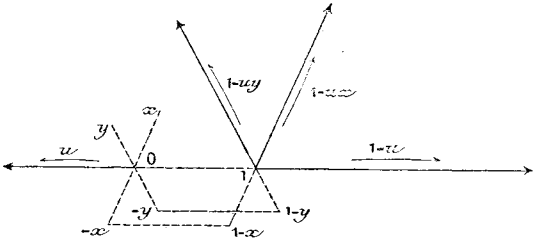
4° u va en ligne droite de o à $\frac{1}{x}$ (*fig.* 5); $1-u$ va en ligne droite de 1 à

Fig. 3.



$1-\frac{1}{x}$; $1-ux$ va sur X de 1 à o; $1-uy$ va en ligne droite de 1 à $1-\frac{y}{x}$.

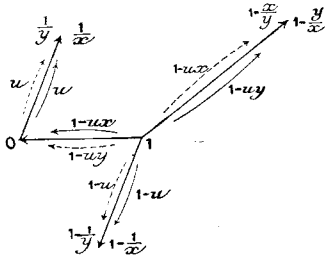
Fig. 4.



5° u va en ligne droite de o à $\frac{1}{y}$ (*fig.* 5); $1-u$ va en ligne droite de 1 à $1-\frac{1}{y}$; $1-ux$ va en ligne droite de 1 à $1-\frac{x}{y}$; et $(1-uy)$ va sur X de 1 à o.

6° u va en ligne droite de 1 à $\frac{1}{x}$ (*fig.* 6); $1-u$ va en ligne droite de o à $1-\frac{1}{x}$; $1-ux$ va en ligne droite de $1-x$ à o; $1-uy$ va en ligne droite de $1-y$ à $1-\frac{y}{x}$.

Fig. 5.

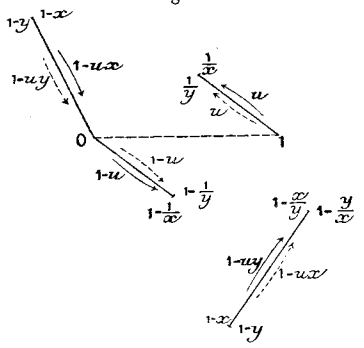


7° u va en ligne droite du point 1 au point $\frac{1}{y}$ (*fig.* 6); $1-u$ va en ligne

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

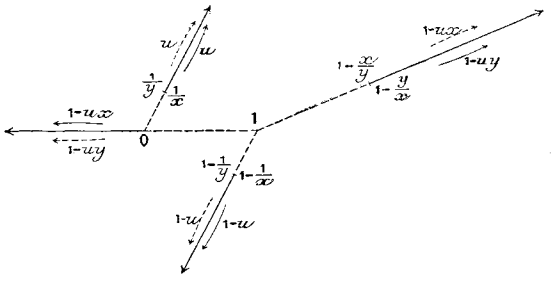
droite de o à $1-\frac{1}{y}$; $1-ux$ va en ligne droite de $1-x$ à $1-\frac{x}{y}$; et $1-uy$ va en ligne droite de $1-y$ à o.

Fig. 6.



8° u va en ligne droite de $\frac{1}{x}$ à l'infini sur la droite $\left(o, \frac{1}{x}\right)$ (*fig.* 7), sans passer par l'origine; $1-u$ va de $1-\frac{1}{x}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{1}{x}\right)$, sans passer par le point 1; $1-ux$ va sur X de o à $(-\infty)$; $1-uy$ va de $1-\frac{y}{x}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{y}{x}\right)$, sans passer par le point 1.

Fig. 7.



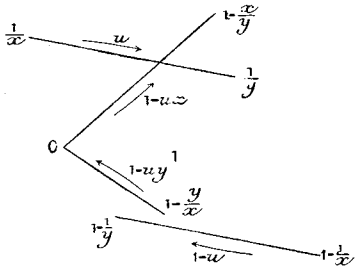
9° u va en ligne droite de $\frac{1}{y}$ à l'infini, sans passer par l'origine; $1-u$ va en ligne droite de $1-\frac{1}{y}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{1}{y}\right)$, sans passer par le point 1; $1-ux$ va de $1-\frac{x}{y}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{x}{y}\right)$, sans passer par le point 1. Enfin $1-uy$ va sur X de o à $(-\infty)$.

10° u va en ligne droite de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$ (*fig.* 8); $1-u$ va en ligne droite de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$1-\frac{1}{x}$ à $1-\frac{1}{y}$; $1-ux$ va de o à $1-\frac{x}{y}$; et $1-uy$ de $1-\frac{y}{x}$ à o, toujours en ligne droite.

Fig. 8.



11° Si le point u décrit une circonférence de rayon ρ autour de o comme centre, le point $1-u$ décrit, dans le même sens, une circonférence de même rayon autour de 1 comme centre; $1-ux$ décrit, dans le même sens, autour du point 1 comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; et $1-uy$ décrit, dans le même sens, autour du point 1 comme centre une circonférence de rayon $\rho|y|$.

12° Le point u décrit une circonférence de rayon ρ autour du point 1 comme centre; $1-u$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon ρ autour de l'origine comme centre; $1-ux$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon $\rho|x|$ autour du point $(1-x)$ comme centre; $1-uy$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon $\rho|y|$ autour du point $(1-y)$ comme centre.

13° Le point u décrit du point $\frac{1}{x}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; le point $1-u$ décrit, dans le même sens, autour du point $1-\frac{1}{x}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; le point $1-ux$ décrit, dans le même sens, autour de o comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; enfin le point $1-uy$ décrit, dans le même sens, autour du point $1-\frac{y}{x}$ une circonférence de rayon $\rho|y|$.

14° Le point u décrit autour de $\frac{1}{y}$ comme centre une circonférence de rayon ρ: $1-u$ décrit, dans le même sens, autour de $1-\frac{1}{y}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; $1-ux$ décrit, dans le même sens, autour de $1-\frac{x}{y}$ comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; enfin $1-uy$ décrit autour de o comme centre une circonférence de rayon $\rho|y|$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

22. Précisons maintenant les arguments choisis pour u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$ dans les dix intégrales que nous aurons à considérer.

1° Dans l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{U}\,du$, on a

$$\arg u = 0, \qquad \arg(1-u) = 0.$$

L'argument de $(1-ux)$ reste compris entre 0 et $\overline{\arg}(1-x)$;
L'argument de $(1-uy)$ reste compris entre 0 et $\overline{\arg}(1-y)$.
On posera

$$\int_0^1 \mathrm{U}\,du = \mathrm{B}(\alpha, \gamma-\alpha)\varphi_1 = \psi_1.$$

2° Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{U}\,du$,

$$\arg u = \pm\pi, \qquad \arg(1-u) = 0.$$

L'argument de $(1-ux)$ varie entre 0 et $\overline{\arg}x$;
L'argument de $(1-uy)$ varie entre 0 et $\overline{\arg}y$.
Soit

$$\psi_2 = \mathrm{B}(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2,$$

on aura, en posant $(\alpha) = e^{\alpha i\pi}$,

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\,du = (\alpha)\psi_2 \qquad \text{si} \qquad \arg u = +\pi,$$

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\,du = (-\alpha)\psi_2 \qquad \text{si} \qquad \arg u = -\pi.$$

3° Dans l'intégrale $\int_{+1}^{+\infty} \mathrm{U}\,du$,

$$\arg u = 0, \qquad \arg(1-u) = \pm\pi.$$

L'argument de $(1-ux)$ varie entre $\overline{\arg}(-x)$ et $\overline{\arg}(1-x)$;
L'argument de $(1-uy)$ varie entre $\overline{\arg}(-y)$ et $\overline{\arg}(1-y)$.
Si l'on pose

$$\psi_3 = \mathrm{B}(1+\beta+\beta'-\gamma, \gamma-\alpha)\varphi_3,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on aura

$$\int_{+1}^{+\infty} \mathrm{U}\,du = (\gamma - \alpha - 1)\psi_3 \qquad \text{si} \qquad \arg(1-u) = \pi,$$

$$\int_{+1}^{+\infty} \mathrm{U}\,du = (1 + \alpha - \gamma)\psi_3 \qquad \text{si} \qquad \arg(1-u) = -\pi.$$

4° Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du$,

$$\arg u = \overline{\arg}\,\frac{1}{x} = \pm\pi - \overline{\arg}(-x);$$

on prendra le signe + si x est dans la partie inférieure du plan, le signe — si x est dans la partie supérieure. L'argument de $(1-u)$ varie entre o et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. L'argument de $1 - ux$ est nul; l'argument de $1 - uy$ varie de o à $\overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$.

Soit

$$\psi_4 = \mathrm{B}(\alpha, 1-\beta)\varphi_4 :$$

si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = (-\alpha)\psi_4;$$

si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (\alpha)\psi_4.$$

5° Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du$,

$$\arg u = \overline{\arg}\,\frac{1}{y} = \pm\pi - \overline{\arg}(-y).$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre o et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{y}\right)$; l'argument de $1 - ux$ varie entre o et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$; l'argument de $1 - uy$ est nul.

Soit

$$\psi_5 = \mathrm{B}(\alpha, 1-\beta')\varphi_5 :$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

si y est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (-\alpha)\psi_5 ;$$

si y est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (\alpha)\psi_5 .$$

6° Dans l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \mathrm{U}\,du$, on a

$$\arg u = \overline{\arg}\,\frac{1}{x} = -\overline{\arg}\,x .$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\arg}\left(-\frac{1}{x}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\,x ;$$

l'argument de $(1-uy)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\arg}\left(-\frac{y}{x}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}\right);$$

l'argument de $1-ux$ est égal à $\pm\pi$.

Soit

$$\psi_6 = \mathrm{B}(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\beta)\varphi_6,$$

on aura

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \mathrm{U}\,du = [\varepsilon\beta + \varepsilon'\beta' + \varepsilon''(\gamma-\alpha-1)]\psi_6,$$

avec

$\varepsilon = -1$ si $\arg(1-ux) = +\pi$,

$\varepsilon = +1$ si $\arg(1-ux) = -\pi$,

$\varepsilon' = -1$ si $\dfrac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan,

$\varepsilon' = +1$ si $\dfrac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan,

$\varepsilon'' = +1$ si x est dans la partie supérieure du plan,

$\varepsilon'' = -1$ si x est dans la partie inférieure du plan.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

7° Dans l'intégrale $\int_1^\infty U\,du$, on a

$$\arg u = \overline{\arg}\,\frac{1}{y} = -\overline{\arg}\,y.$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg}\left(-\frac{1}{y}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\,y;$$

l'argument de $(1-ux)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \arg\left(-\frac{x}{y}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\,\frac{x}{y};$$

l'argument de $1-uy$ est égal à $\pm\pi$.

Soit

$$\psi_7 = B(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\beta')\varphi_7,$$

on aura

$$\int_{\frac{1}{y}}^\infty U\,du = [\varepsilon\beta + \varepsilon'\beta' + \varepsilon''(\gamma-\alpha-1)]\psi_6,$$

avec

$\varepsilon = -1$ si $\frac{y}{x}$ est dans la partie supérieure du plan,

$\varepsilon = +1$ si $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan,

$\varepsilon' = -1$ si $\arg(1-uy) = +\pi$,

$\varepsilon' = +1$ si $\arg(1-uy) = -\pi$,

$\varepsilon'' = +1$ si y est dans la partie supérieure du plan,

$\varepsilon'' = -1$ si y est dans la partie inférieure du plan.

8° Passons à l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du$.

L'argument de u varie de 0 à $\overline{\arg}\,\frac{1}{x}$; on a

$$\arg(1-ux) = \overline{\arg}(1-x).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'argument de $(1-u)$ est égal à

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\pm\pi+\overline{\arg}\left(\frac{1-x}{x}\right).$$

Si le segment de droite $\left(1-y, 1-\frac{y}{x}\right)$ ne coupe pas l'*axe réel* X, ou le coupe *à droite* du point o, l'argument de $(1-uy)$ varie entre $\overline{\arg}(1-y)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)$.

Si le segment de droite $\left(1-y, 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe l'axe réel X *à gauche* du point o, si y est sur la partie supérieure du plan, l'argument de $1-uy$ varie entre $\overline{\arg}(1-y)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)-2\pi$; tandis que, si y est sur la partie inférieure du plan, l'argument de $1-uy$ varie entre $\overline{\arg}(1-y)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)+2\pi$.

Si maintenant l'on pose

$$\psi_8=\mathrm{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta)\varphi_8,$$

on a, si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}}\mathrm{U}\,du=(\gamma-\alpha-1)\psi_8,$$

et, si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}}\mathrm{U}\,du=(1+\alpha-\gamma)\psi_8.$$

9° De même pour l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{y}}\mathrm{U}\,du$.

L'argument de u varie de o à $\overline{\arg}\frac{1}{y}$; on a

$$\arg(1-uy)=\overline{\arg}(1-y);$$

l'argument de $(1-u)$ est égal à

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right)=\pm\pi+\overline{\arg}\left(\frac{1-y}{y}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si le segment de droite $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X, ou le coupe à droite du point o, l'argument de $1-ux$ varie entre $\overline{\arg}(1-x)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right)$.

Si le segment de droite $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ coupe X *à gauche* du point o, si x est sur la partie supérieure du plan, on a

$$\overline{\arg}(1-x) \geqq \arg(1-ux) \geqq \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) - 2\pi;$$

si x est sur la partie inférieure du plan, on a

$$\overline{\arg}(1-x) \leqq \arg(1-ux) \leqq \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + 2\pi.$$

Soit

$$\psi_9 = \mathrm{B}(\gamma-\alpha,\ 1-\beta')\varphi_9 :$$

si y est sur la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (\gamma-\alpha-1)\psi_9;$$

si y est sur la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (1+\alpha-\gamma)\psi_9.$$

10° Enfin envisageons l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du$.

D'abord

$$\arg(1-ux) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\arg(1-uy) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) = \pm\pi + \overline{\arg}\left(\frac{y-x}{x}\right).$$

Ensuite, si le segment rectiligne $\left(\frac{1}{x},\ \frac{1}{y}\right)$ ne rencontre pas l'axe réel X, ou

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le rencontre en un point situé à droite du point o, l'argument de u variera entre $\overline{\arg}\frac{1}{x}$ et $\overline{\arg}\frac{1}{y}$; si ce segment $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ coupe X en un point situé *à gauche* du point o, on aura, si x est sur la partie supérieure du plan,

$$\overline{\arg}\frac{1}{x} \geqq \arg u \geqq -2\pi + \overline{\arg}\frac{1}{y};$$

si x est sur la partie inférieure du plan,

$$\overline{\arg}\frac{1}{x} \leqq \arg u \leqq +2\pi + \overline{\arg}\frac{1}{y}.$$

De même, si le segment rectiligne $\left(1-\frac{1}{x}, 1-\frac{1}{y}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X, ou le rencontre en un point situé *à droite* de o, l'argument de $1-u$ variera entre $\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right)$. S'il coupe l'axe réel en un point situé à gauche de o, si x est sur la partie supérieure du plan,

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leqq \arg(1-u) \leqq +2\pi + \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right);$$

si x est sur la partie inférieure du plan,

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) \geqq \arg(1-u) \geqq -2\pi + \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right).$$

Soit

$$\psi_{10} = \mathrm{B}(1-\beta, 1-\beta')\varphi_{10};$$

si $\frac{x}{y}$ est sur la partie supérieure du plan,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (1-\beta')\psi_{10};$$

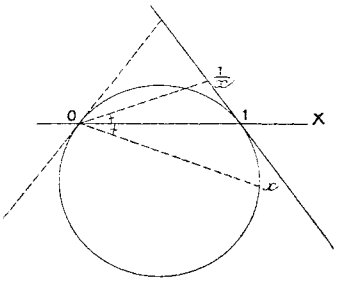
si $\frac{x}{y}$ est sur la partie inférieure du plan,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\,du = (1+\beta')\psi_{10}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

23. Les droites Ox, $O\frac{1}{x}$ sont également inclinées sur X (*fig.* 9); de plus, $\frac{1}{x}$ est sur la tangente au point 1, à la circonférence passant par les

Fig. 9.



points 0, 1, x, de sorte que, si l'on fait varier x, en l'assujettissant à rester sur une circonférence quelconque passant par les points 0, 1, le point $\frac{1}{x}$ se meut sur la tangente au point 1 à cette circonférence.

La droite qui joint le point $1-y$ au point $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} z & z' & 1 \\ 1-y & 1-y' & 1 \\ 1-\frac{y}{x} & 1-\frac{y'}{x'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(z et z' désignent deux quantités imaginaires conjuguées). Nous avons besoin de savoir en quelle région se trouve son point d'intersection avec X. Soit ζ l'abscisse de ce point d'intersection. On a

$$\zeta = \frac{xx'(y-y') + xy' - yx' - yy'(x-x')}{xx'(y-y') + xy' - yx'}.$$

Supposons que le point x soit fixe et le point y variable, l'équation

$$yy'(x-x') = xx'(y-y') + xy' - yx'$$

représente précisément le cercle qui passe par les points 0, 1, x, et

$$xx'(y-y') + xy' - yx' = 0$$

est l'équation de la tangente à ce cercle à l'origine.

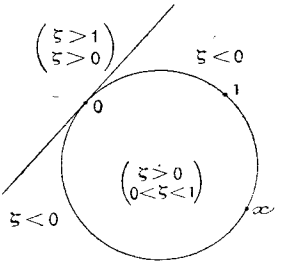
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En faisant $y = y' = \frac{1}{2}$, on trouve, en posant $x = \varepsilon + i\eta$,

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2} i\eta}{i\eta} = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que ζ sera négatif si y est à l'extérieur de la circonférence o, 1, x, et du même côté de la tangente en o que la circonférence.

Fig. 10.



Sinon ζ est positif.

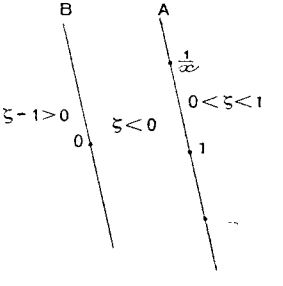
D'ailleurs

$$\zeta - 1 = \frac{yy'(x' - x)}{xx'(y - y') + xy' - yx'};$$

$\zeta - 1$ sera donc positif dans la région du plan séparée par la tangente qui ne contient pas la circonférence, et négatif dans l'autre.

Avec le point $\frac{1}{y}$ les résultats sont encore plus simples. Soient A (*fig.* 11) la droite $\left(1, \frac{1}{x}\right)$, B la parallèle à A menée par l'origine.

Fig. 11.



Si $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par B et ne contenant pas A, la droite $\left(1 - y, 1 - \frac{y}{x}\right)$ coupe X à droite du point 1.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si $\frac{1}{y}$ est dans la bande comprise entre A et B, la droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe X à gauche de o.

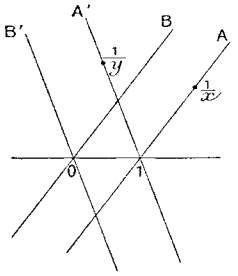
Si $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par A, qui ne contient pas B, la droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe X entre o et 1.

Des considérations analogues nous indiqueront en quelle région sera le point d'intersection de la droite $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ avec X. Il suffit de permuter x et y dans ce qui précède.

1° Supposons x et y tous les deux dans la partie inférieure du plan. Supposons $\frac{1}{y}$ situé dans la région séparée par B et ne contenant pas A.

On voit que, nécessairement, $\frac{1}{x}$ est dans la région séparée par A′ qui ne contient pas B′ (*fig.* 12). Ainsi la droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe X à

Fig. 12.



droite de 1 et la droite $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ coupe X entre o et 1. D'ailleurs, puisque le triangle o $\frac{1}{x}\ \frac{1}{y}$ est à gauche de l'observateur qui parcourt dans le sens o $\frac{1}{x}\ \frac{1}{y}$ son périmètre, c'est que $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan.

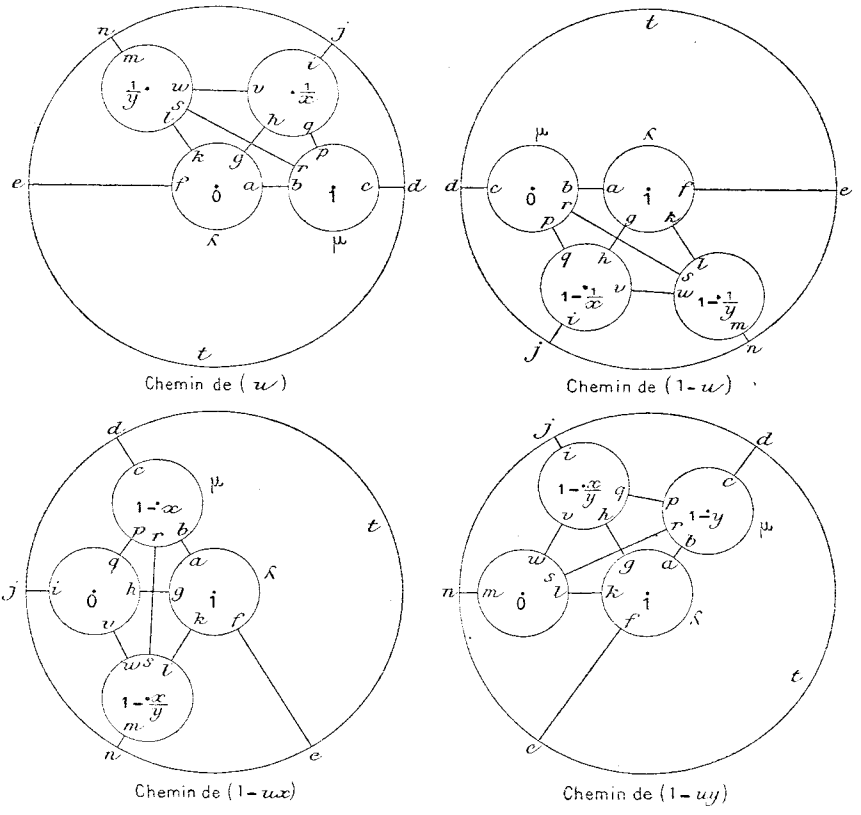
D'autre part, x est dans la partie inférieure du plan; il en est de même de $\frac{-y}{-\frac{y}{x}} = x$. Or $(-y)$ et $\left(-\frac{y}{x}\right)$ sont simultanément dans la partie supérieure, donc le point $\frac{1-y}{1-\frac{y}{x}}$ est, lui aussi, comme $\frac{-y}{-\frac{y}{x}} = x$ dans la partie inférieure du plan.

Bref, le triangle $\left(0,\ 1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ est à gauche de l'observateur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

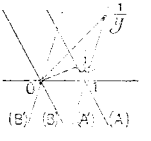
Voici alors le schéma des chemins que parcourront les variables u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$.

TABLEAU I.



Si le point $\frac{1}{y}$ vient sur B la droite $\left(1-\frac{y}{x},\ 1-y\right)$ devient parallèle à X. Si $\frac{1}{y}$ entre dans la bande AB, la droite $\left(1-\frac{y}{x},\ 1-y\right)$ coupera X à gauche

Fig. 13.

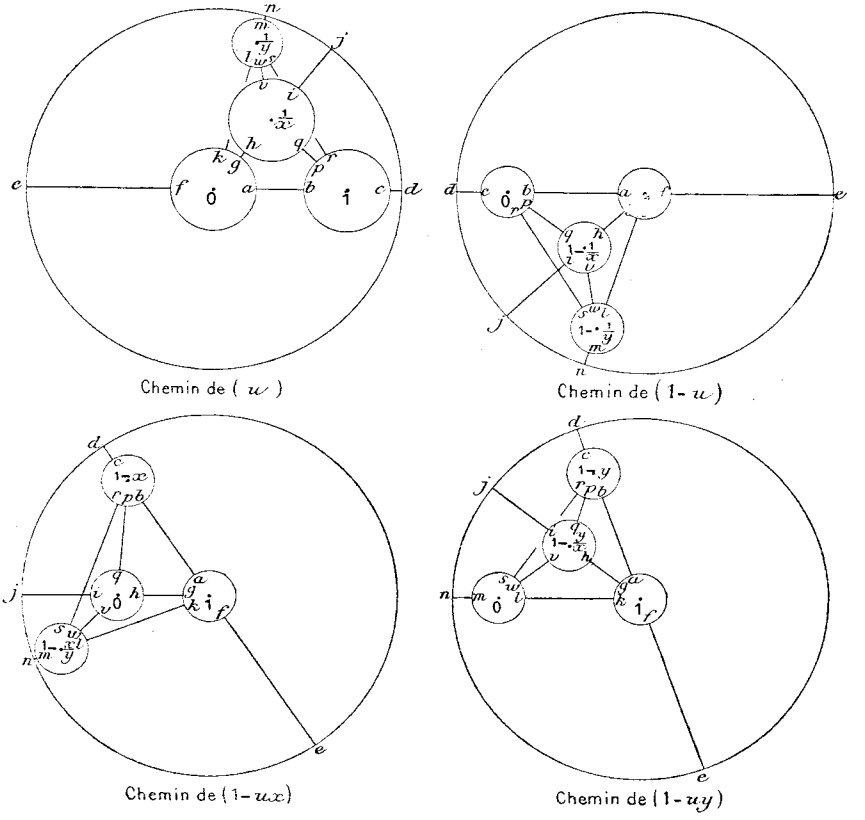


du point o. Mais le segment $\left(1-\frac{y}{x},\ 1-y\right)$ reste tout entier dans la partie supérieure du plan. Ces deux cas rentrent donc dans le premier.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le Tableau II, on suppose toujours que x, y, $\frac{y}{x}$ sont dans la partie inférieure du plan, mais $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par A qui ne contient

TABLEAU II.



pas B. Alors le segment $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ coupe X à gauche de o. Le point $\frac{1}{x}$ est à l'intérieur du triangle $\left(0\ 1\ \frac{1}{y}\right)$ (*fig.* 13).

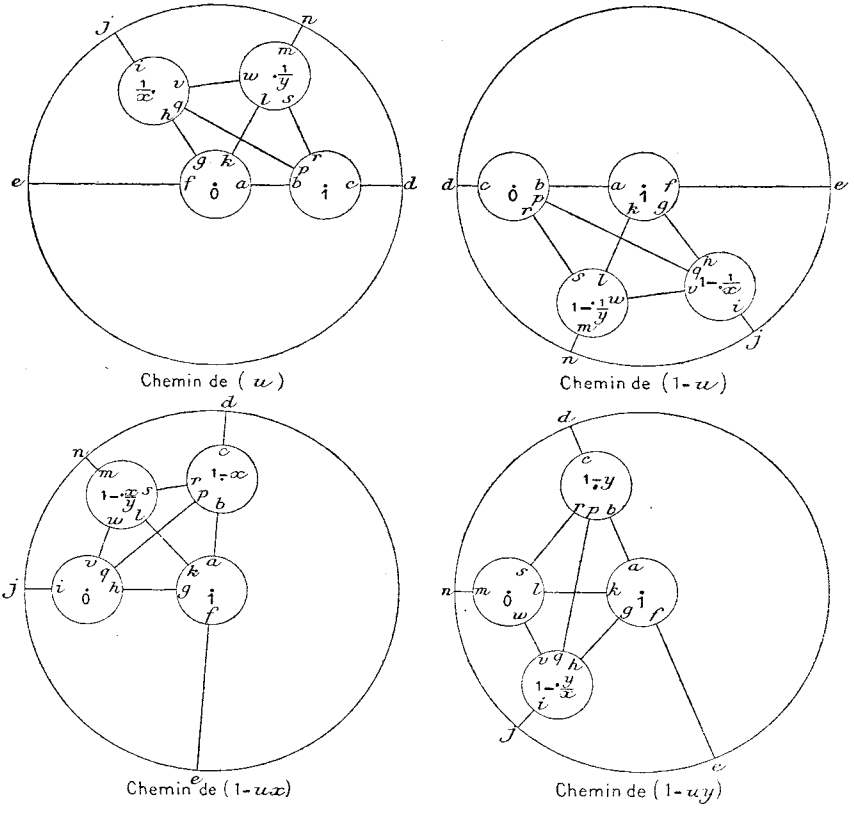
Dans le Tableau III, $\frac{y}{x}$ vient sur la partie supérieure du plan, $1-\frac{x}{y}$ asse aussi dans la partie supérieure; le segment $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe le segment (0, 1) entre o et 1, etc. On obtient de la sorte quatorze Tableaux.

24. Voici maintenant comment nous allons opérer. Imaginons un système de trois ou quatre intégrales qui, pour les positions de x et de y con-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sidérées, ne soient pas distinctes. Supposons qu'il existe dans l'un des quatorze Tableaux précédents une aire dont les côtés rectilignes correspondent

TABLEAU III.



aux intégrales envisagées, telle que ces côtés ne se coupent pas, telle enfin qu'à l'intérieur de cette aire la fonction

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

considérée comme fonction de u, soit holomorphe.

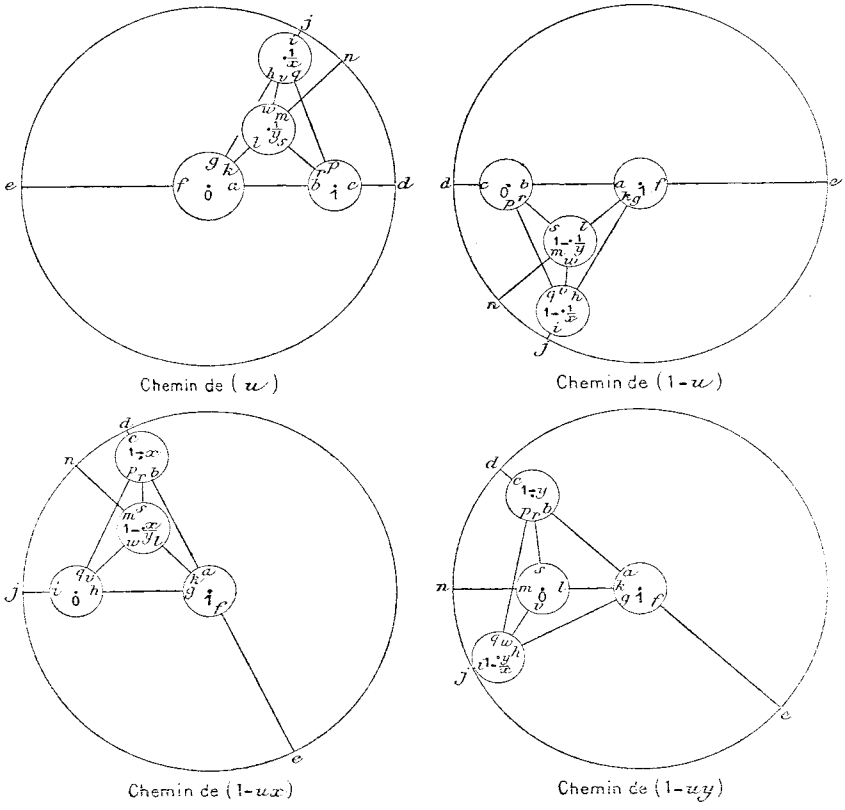
Nous supposons que l'on a

Partie réelle de $\alpha > 0$,
Partie réelle de $(\gamma - \alpha) > 0$,
Partie réelle de $(1-\beta) > 0$,
Partie réelle de $(1-\beta') > 0$,
Partie réelle de $(1+\beta+\beta'-\gamma) > 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Alors les intégrales de la forme $\int_C U\,du$, C étant un arc de circonférence de rayon infiniment petit ayant pour centres les points o, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$; ou un arc de circonférence de rayon infiniment grand ayant pour centre o, sont des quantités infiniment petites, qui deviennent nulles à la limite.

TABLEAU IV.

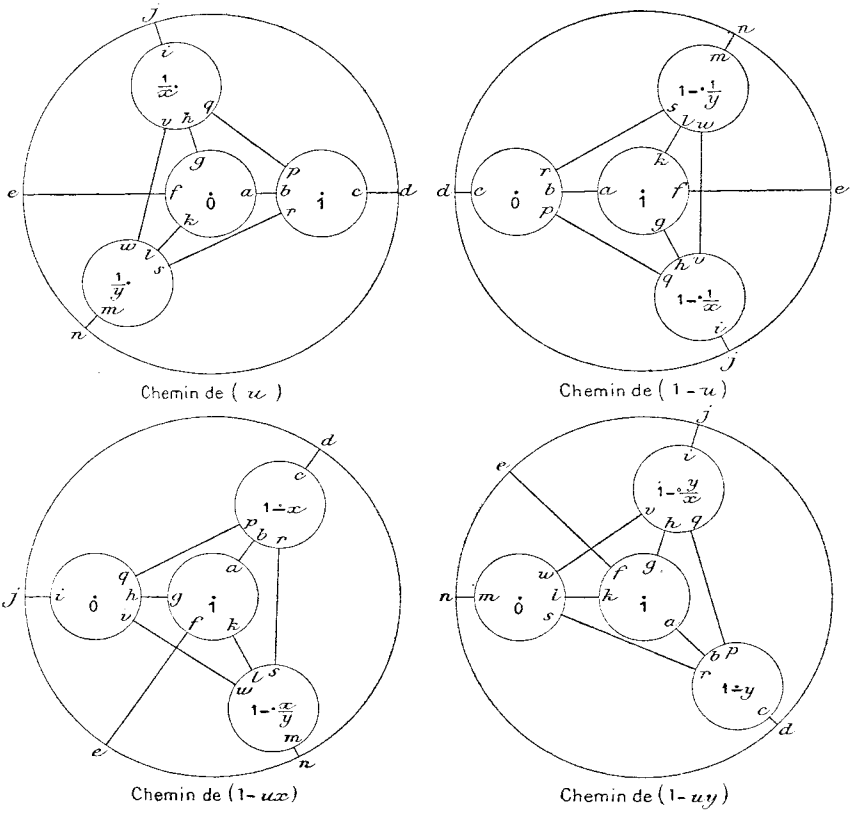


L'aire trouvée, on forme un Tableau dans lequel, en suivant d'une façon continue sur les schémas des Tableaux précédents, les chemins de u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$, on indiquera si les arguments de u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$ sont bien ceux que nous avons choisis pour préciser la définition des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{10}$, ou de combien ils en diffèrent. N désignant l'argument normal choisi, on aura à écrire si l'argument trouvé est N ou $N+2\pi$ ou $N-2\pi$. Si l'argument trouvé est o, $+\pi$, ou $-\pi$, on l'écrira dans le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Tableau. Le Tableau formé, on en déduit immédiatement la relation par l'application du théorème de Cauchy.

TABLEAU V.



Premier exemple. — Soit à trouver, dans le Tableau I, la relation qui existe entre ψ_1, ψ_2, ψ_3. Considérons l'aire

$$ab.\mu.cd.t.ef.\lambda.$$

Formons le Tableau suivant :

Chemin.	arg u.	arg $(1-u)$.	arg $(1-ux)$.	arg $(1-uy)$.
ab	0	0	N	N
cd	0	$+\pi$	N	N
ef	$-\pi$	0	N	N

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous reportant alors au n° 22, nous obtenons la formule

$$\psi_1 + (\gamma - \alpha - 1)\psi_3 - (-\alpha)\psi_2 = 0,$$

qu'on peut écrire

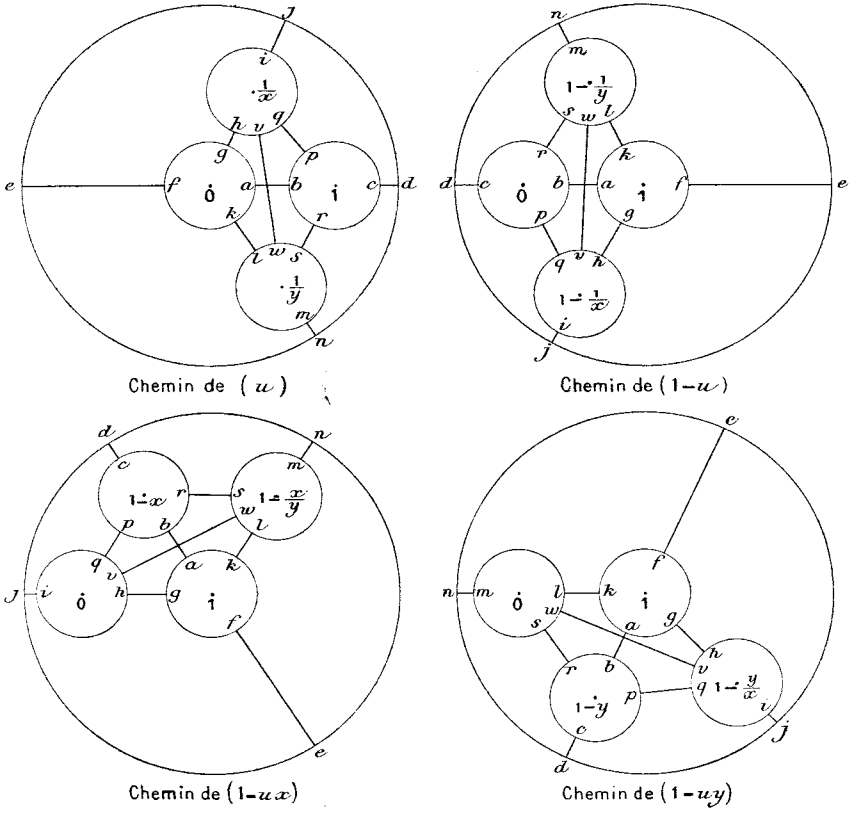
$$(\alpha)\psi_1 - (\gamma)\psi_3 - \psi_2 = 0,$$

où

$$(\alpha) = e^{i\pi\alpha}, \qquad (\gamma) = e^{i\pi\gamma}, \qquad \ldots.$$

Deuxième exemple. — Proposons-nous d'obtenir la relation qui existe

TABLEAU VI.



entre ψ_1, ψ_2, ψ_4, ψ_5. J'envisage, toujours dans le premier Tableau, l'aire

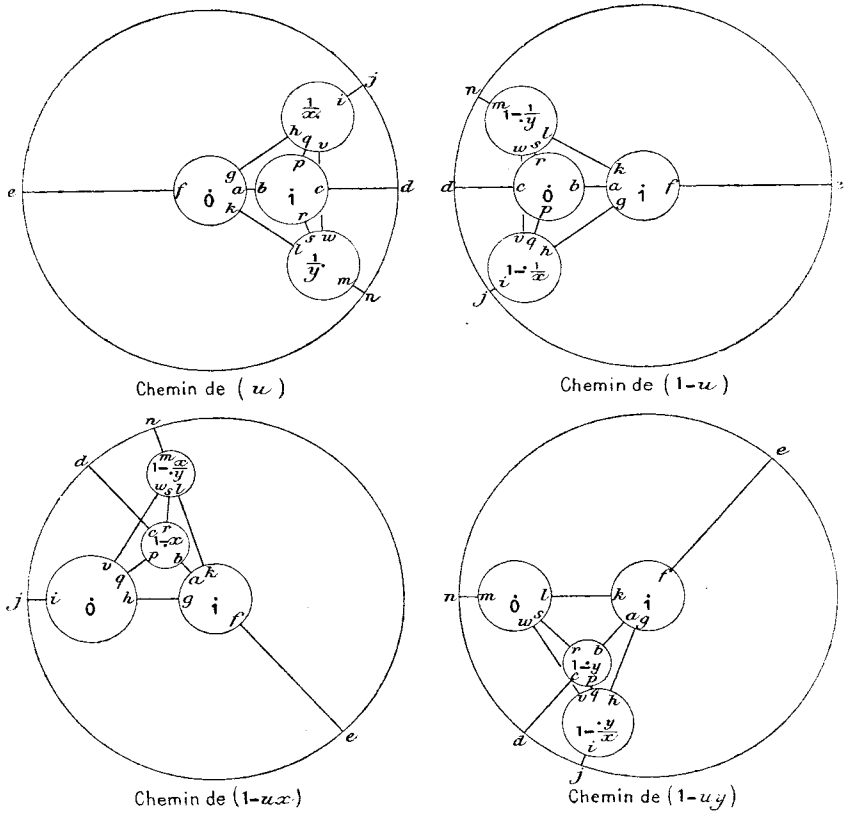
$$ab.rpc\mu.ba.\lambda.fe.tdjn.ef.kl.mws.lk.gh.viq.hg,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et je forme le Tableau qui suit :

Chemin.	$\arg u$.	$\arg(1-u)$.	$\arg(1-ux)$.	$\arg(1-uy)$.
ab	0	0	N	N
ba	0	-2π	N	N
fe	$-\pi$	-2π	N	N
ef	$+\pi$	0	$N+2\pi$	$N+2\pi$
kl	N	N	$N+2\pi$	2π
lk	N	N	$N+2\pi$	0
gh	N	N	2π	N
hg	N	N	0	N

TABLEAU VII.



De ce Tableau, je déduis la formule

$$[1-(2\alpha-2\gamma)]\psi_1+[(\alpha-2\gamma)-(\alpha-2\beta-2\beta')]\psi_2$$
$$+[(\alpha-2\beta-2\beta')-(\alpha-2\beta)]\psi_3+[(\alpha-2\beta)-(\alpha)]\psi_4=0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

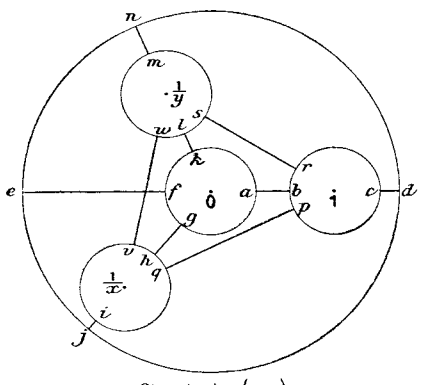
formule qui peut s'écrire

$$(\beta+\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$$
$$-(\gamma+\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0.$$

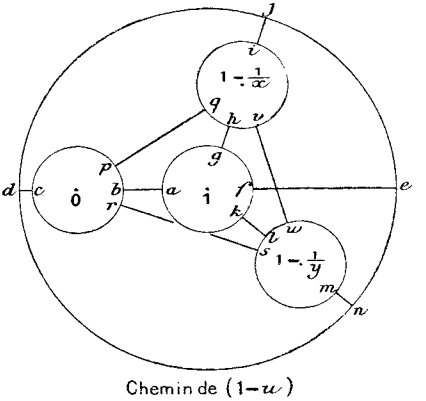
Troisième exemple. — Soit encore à trouver la relation qui existe entre ψ_1, ψ_2, ψ_4, ψ_6. Envisageons l'aire

$$ab.rpc\mu.ba.\lambda.fe.td.jiq.kg \quad \text{(Tableau I)},$$

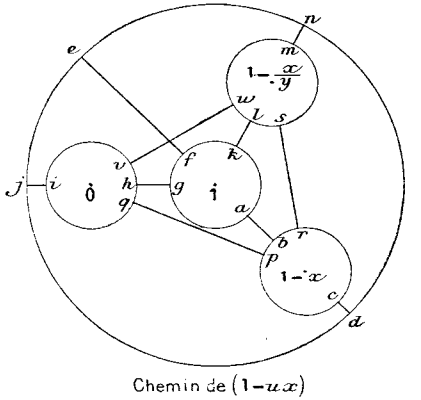
TABLEAU VIII.



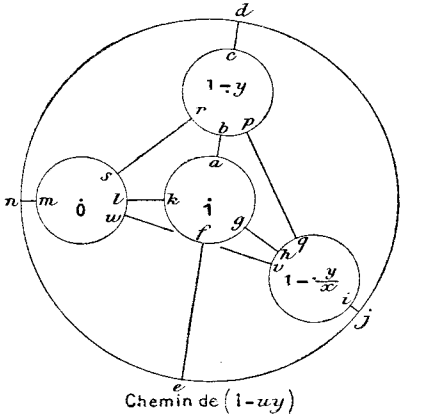
Chemin de (u)



Chemin de $(1-u)$



Chemin de $(1-ux)$



Chemin de $(1-uy)$

et formons le Tableau suivant :

Chemin.	$\arg u$.	$\arg(1-u)$.	$\arg(1-ux)$.	$\arg(1-uy)$.
ab	0	0	N	N
ba	0	-2π	N	N
fe	$-\pi$	-2π	N	N
ji	N	N	$+\pi$	N
hg	N	N	0	N

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'où la formule

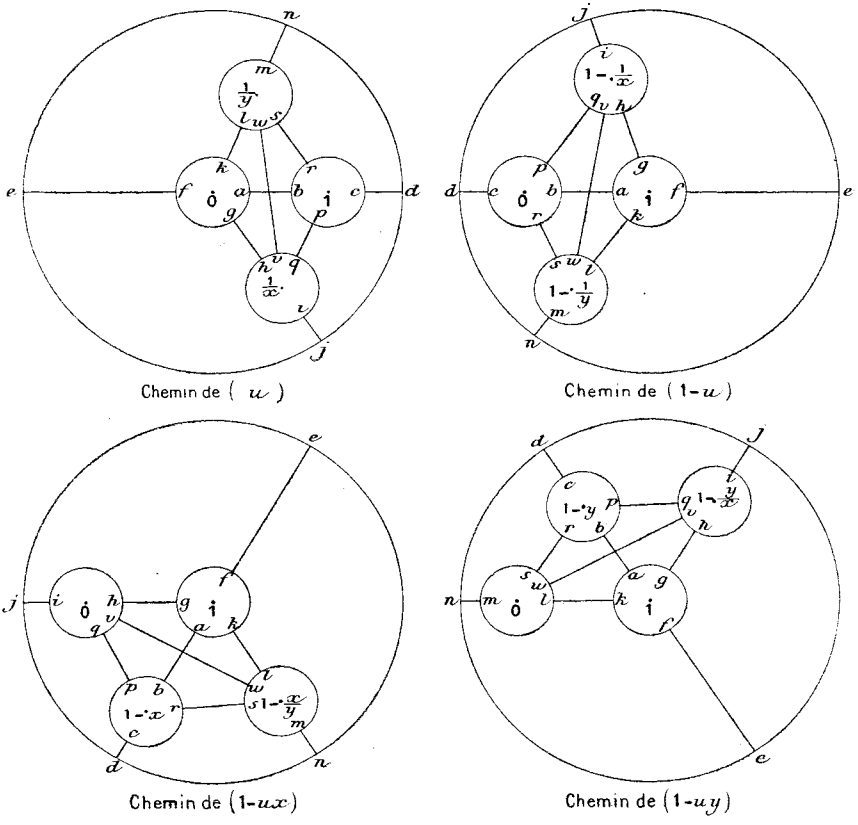
$$[1-(2\alpha-2\gamma)]\psi_1+(\alpha-2\gamma)\psi_2-(-\beta-\beta'+1+\alpha-\gamma)\psi_6-(\alpha)\psi_4=0,$$

qu'on peut écrire

$$2i\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-\gamma)\psi_2-(\gamma)\psi_4+(-\beta-\beta')\psi_6=0.$$

Remarque. — Au cas où deux chemins rectilignes se croisent, la relation

TABLEAU IX.



correspondant à l'aire où ce fait se produit se déduira des relations déjà trouvées par voie d'élimination.

Voici les quatorze Tableaux de relations. Je désigne par (ijk) la relation qui existe entre ψ_i, ψ_j, ψ_k, quand elles ne sont pas distinctes; par $(ijkh)$ la relation qui existe entre ψ_i, ψ_j, ψ_k et ψ_h.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

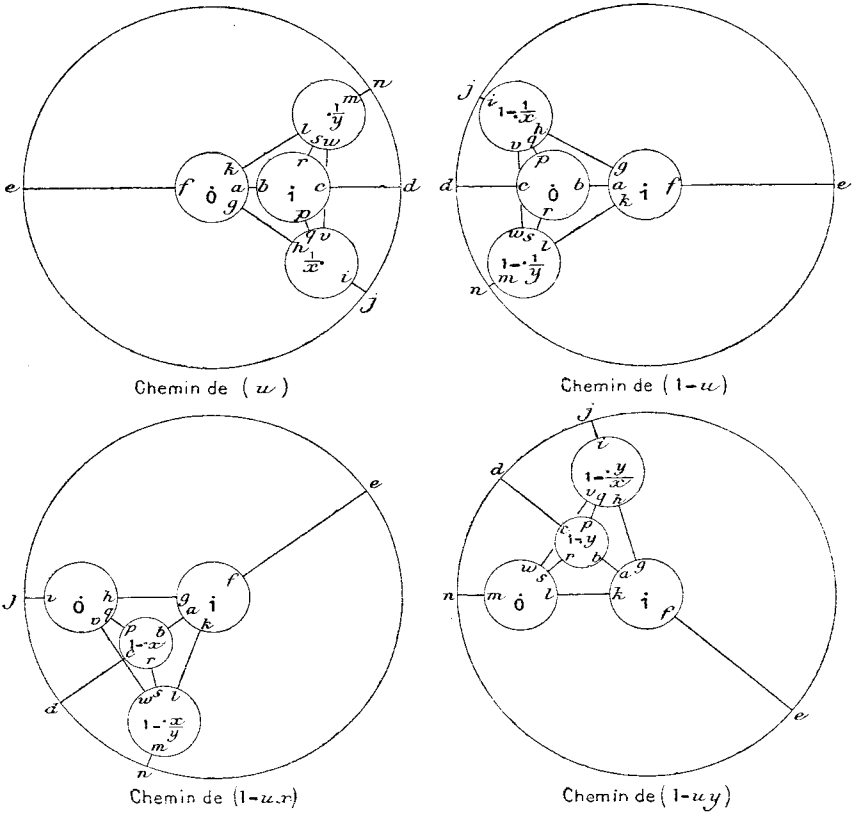
TABLEAU I (*voir* page 67).

$(1, 2, 3)$ $\quad (\alpha)\psi_1 - \psi_2 - (\gamma)\psi_3 = 0, \qquad [(\alpha) = e^{\alpha i \pi}],$

$(1, 2, 4, 5)$ $\quad (\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\gamma + \beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma - \beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1, 2, 4, 6)$ $\quad 2i\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\gamma)\psi_2 - (\gamma)\psi_4 + (-\beta - \beta')\psi_6 = 0,$

TABLEAU X.



$(1, 2, 4, 7)$ $\quad (\beta)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_4 \sin\beta\pi - \psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1, 2, 4, 9)$ $\quad [(\beta + \beta')\sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha - \beta)\sin\beta'\pi]\psi_1$
$+ \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma + \beta')\psi_4 \sin\beta\pi + (-\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1, 2, 4, 10)$ $\quad (\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\gamma)\psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(1, 2, 5, 6)$ $\quad (\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi - \psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

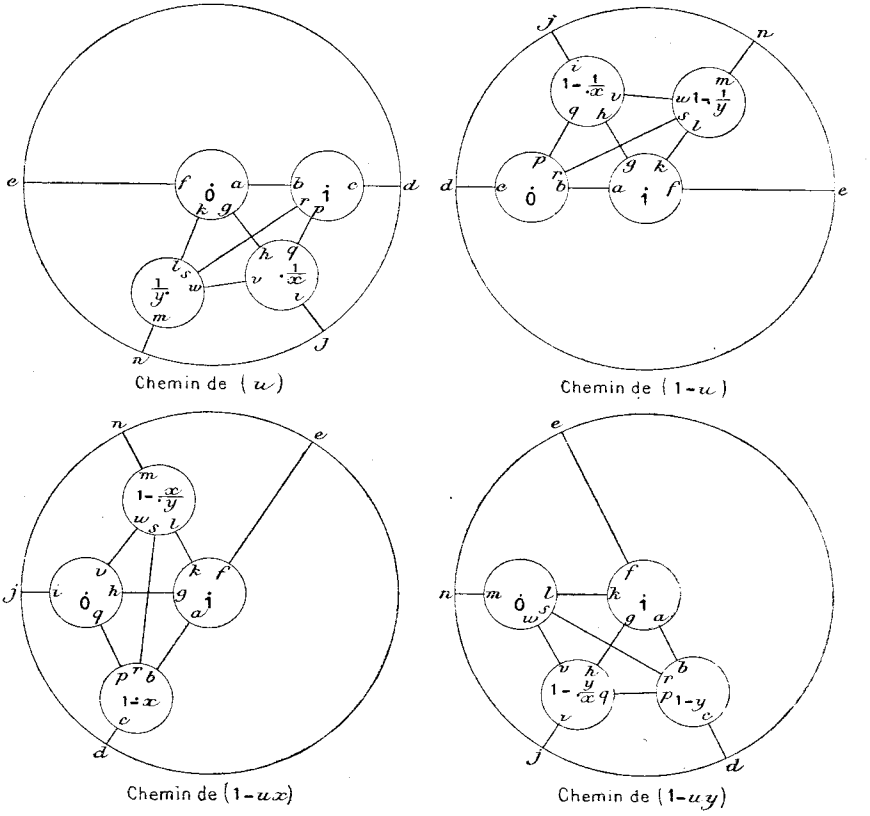
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,2,5,8)$ $(\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi+\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi+(\beta')\psi_8 \sin\beta\pi=0,$

$(1,2,5,10)$ $(\beta+\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma)\psi_5 \sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi=0,$

$(1,2,6,7)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2 \sin\gamma\pi-(-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi-(\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi=0,$

TABLEAU XI.



$(1,2,6,8)$ $\psi_1-(-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_6-(\gamma-\alpha)\psi_8=0,$

$(1,2,6,9)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+\psi_2 \sin(\beta'-\gamma)\pi-\psi_6 \sin\beta\pi+\psi_9 \sin\beta'\pi=0,$

$(1,2,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2 \sin\gamma\pi-\psi_6 \sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi=0,$

$(1,2,7,8)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi+\psi_2 \sin(\beta-\gamma)\pi-\psi_7 \sin\beta'\pi+\psi_8 \sin\beta\pi=0,$

$(1,2,7,9)$ $\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\psi_7-(\alpha-\gamma)\psi_9=0,$

$(1,2,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2 \sin\gamma\pi-\psi_7 \sin(\beta+\beta')\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi=0,$

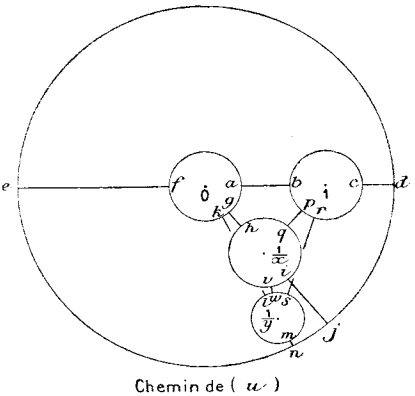
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,2,8,9)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta')\psi_8\sin\beta$
$+(-\beta)\psi_9\sin\beta'=0,$

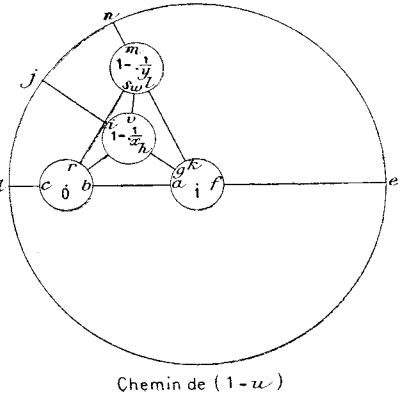
$(1,2,8,10)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi$
$+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(1,2,9,10)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi$
$-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

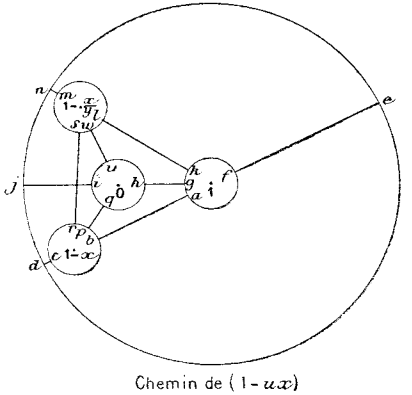
Tableau XII.



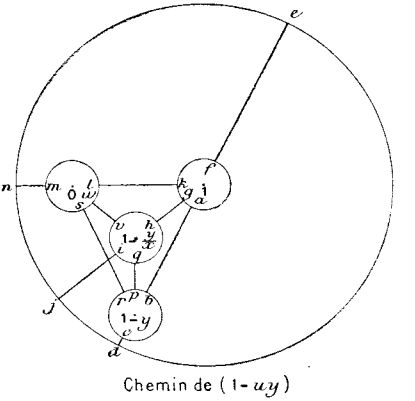
Chemin de (u)



Chemin de ($1-u$)



Chemin de ($1-ux$)



Chemin de ($1-uy$)

$(1,3,4,5)$ $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\beta')\psi_4\sin\beta\pi$
$-(-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,4,6)$ $\psi_1-(\alpha-\gamma)\psi_3-(\alpha)\psi_4+(\alpha-\gamma-\beta-\beta')\psi_6=0,$

$(1,3,4,7)$ $\psi_1\sin(\beta-\alpha)\pi+\psi_3\sin(\gamma-\beta)\pi-\psi_4\sin\beta\pi-(-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,4,9)$ $[(\beta'-\alpha)\sin\beta\pi-(-\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_1-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta')\psi_4\sin\beta\pi+(-\beta-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,4,10)$ $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$-\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

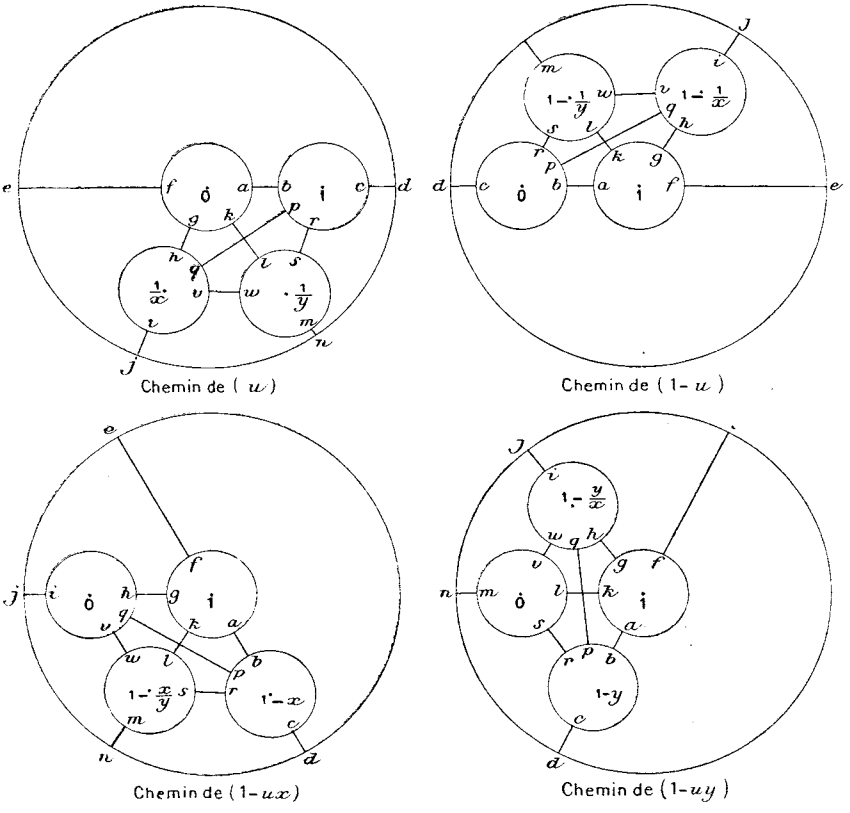
$(1,3,5,6)$ $\psi_1 \sin(\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\beta')\pi - \psi_5 \sin\beta'\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,3,5,7)$ $\psi_1 - (\gamma-\alpha)\psi_3 + (\beta+\beta'-\alpha-\gamma)\psi_7 - (-\alpha)\psi_5 = 0,$

$(1,3,5,8)$ $(-\beta)\psi_1 \sin(\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$- (-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi + (\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,3,5,10)$ $\psi_1 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - \psi_5 \sin(\beta+\beta')\pi$
$- (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

Tableau XIII.



$(1,3,6,7)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,6,9)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta')\psi_3 \sin(\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,6,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,7,8)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - (\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,3,7,9)$ $2i\psi_1 \sin\alpha\pi - (\gamma)\psi_3 + (\beta+\beta'-\gamma)\psi_7 + (-\gamma)\psi_9 = 0,$

$(1,3,7,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta')\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

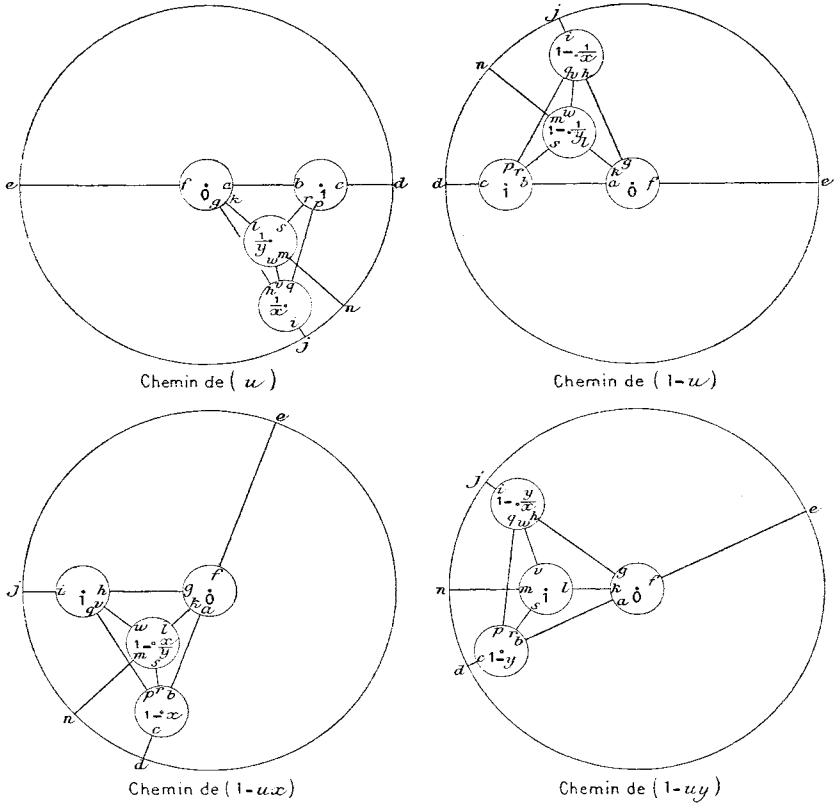
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(**1, 3, 8, 9**) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1 \sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta')\psi_8\sin\beta\pi-(-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(**1, 3, 8, 10**) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(**1, 3, 9, 10**) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

Tableau XIV.



(**1, 4, 5, 6**) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta')\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi-(\beta'-\gamma)\psi_5\sin\beta'\pi$
$-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$

(**1, 4, 5, 7**) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi+(-\beta)\psi_5\sin(\beta-\gamma)\pi$
$-(-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$

(**1, 4, 6, 7**) $(\gamma)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma)\psi_4\sin\gamma\pi-(-\beta')\psi_6\sin(\beta-\gamma)\pi$
$-(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

(**1, 4, 6, 9**) $[(\gamma-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi+(-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_1-(\gamma)\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi$
$+(-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,4,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(1,4,7,9)$ $[\sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\pi]\psi_1 - (\gamma-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\beta-\gamma)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(1,4,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(1,4,8)$ $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

$(1,4,9,10)$ $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_9 + (-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(1,5,6,7)$ $(\gamma)\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,5,6,8)$ $\psi_1 \sin(\beta'-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi + \psi_8 \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

$(1,5,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,5,7,8)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta-\gamma)\pi - (\beta-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,5,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(1,5,8,10)$ $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_8 - (-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(1,5,9)$ $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

$(1,6,7,8)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi = 0,$

$(1,6,7,9)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$

$(1,6,8,9)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi - (\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,6,8,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(1,6,9,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,7,8,9)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\beta)\psi_8 \sin\beta\pi + (-\beta)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(1,7,8,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi + (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(1,7,9,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,4,5)$ $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha+\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\alpha-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,4,6)$ $(-\alpha)\psi_2 + 2i\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 + (\alpha-\gamma-\beta-\beta')\psi_6 = 0,$

$(2,3,4,7)$ $\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi - (\alpha-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2,3,4,8)$ $(-\alpha)\psi_2+(\gamma-\alpha)\psi_3-(\alpha)\psi_4-(\alpha-\gamma)\psi_8=0,$

$(2,3,4,9)$ $[(\beta+\beta'-\alpha)\sin\beta\pi-(-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_2$
$+[(2\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_3$
$-(\alpha+\beta+\beta')\psi_4\sin\beta\pi+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,4,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\alpha)\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi+(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,5,6)$ $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi+(\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$
$-(\alpha-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,5,8)$ $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$-(\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi+(\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,5,9)$ $(-\alpha)\psi_2+(\gamma-\alpha)\psi_3-(\alpha)\psi_5-(\alpha-\gamma)\psi_9=0,$

$(2,3,5,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\alpha)\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi-\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,6,7)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,6,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta'-\gamma)+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,6,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\alpha-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi-\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,7,8)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta)\psi_3\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,7,9)$ $2i\psi_2\sin\alpha\pi-(\gamma-\alpha)\psi_3+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_7+(\alpha-\gamma)\psi_9=0,$

$(2,3,7,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\alpha-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi$
$+(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,8,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta+2\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,8,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi-\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,9,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi+(\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,4,5,6)$ $(-\beta')\psi_2-(\beta')\psi_4+2i\psi_5\sin\beta'\pi+(\beta-\gamma)\psi_6=0,$

$(2,4,5,8)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha+\beta')\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$-(\gamma-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,5,9)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma+\beta')\psi_4\sin\beta\pi$
$+[(\alpha+\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,6,7)$ $\psi_2-\psi_4+(\beta-\beta'-\gamma)\psi_6+2i(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2,4,6,8)\quad (-\alpha)\psi_2-(\alpha)\psi_4+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_6+2i\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,6,9)\quad [(\gamma-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi-(-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_2-(\gamma)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi$
$+[(\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta'\pi]\psi_6$
$+2i\psi_9\sin\beta'\pi\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(2,4,6,10)\quad \psi_2-\psi_4+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-2i(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,4,7,8)\quad \psi_2\sin(\beta-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$-\psi_7\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,7,9)\quad [(-\beta)\sin(\beta-\gamma)\pi+(\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi$
$+[(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7$
$+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,7,10)\quad \psi_2-\psi_4+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_7+(-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

$(2,4,8,9)\quad (\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\beta')\sin\beta\pi+(\alpha-\gamma)\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi]\psi_8+(-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,4,8,10)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,4,9,10)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\alpha)\psi_4\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta'\pi-(\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_{10}=0,$

$(2,5,6,8)\quad \psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi-(\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi+\psi_6\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$+(\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,5,6,9)\quad \psi_2\sin(\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi-\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,5,6,10)\quad \psi_2-\psi_5+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-(\beta'-\alpha)\psi_{10}=0,$

$(2,5,7)\quad \psi_2-\psi_5+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_7=0,$

$(2,5,8,9)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\beta')\psi_8\sin\beta\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(2,5,8,10)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(2,5,9,10)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,6,7,8)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_6\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(2,6,7,9)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_6\sin\beta\pi+(\beta)\psi_7\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(2,6,8,9)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta')\psi_8\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,6,8,10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$(2,6,9,10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi=0,$$

$$(2,7,8,9)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_8\sin\beta\pi+(-\beta)\psi_9\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$$

$$(2,7,8,10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$$

$$(2,7,9,10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$$

$$(3,4,5,6)\quad \psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta')\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi+(-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi=0,$$

$$(3,4,5,7)\quad \psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\alpha-\beta)\psi_4\sin\beta\pi+(-\beta)\psi_5\sin(\beta-\alpha)\pi+(-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi=0,$$

$$(3,4,5,8)\quad \psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi+(\alpha-\beta)\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi-(-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$$

$$(3,4,5,9)\quad \psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\beta')\psi_4\sin\beta\pi+[(\alpha)\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-(-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$$

$$(3,4,6,7)\quad \psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\alpha\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta)\pi-(\beta-\alpha-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$$

$$(3,4,6,9)\quad [(\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_3-(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi+[(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi-(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6+(\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$$

$$(3,4,6,10)\quad \psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\alpha\pi+(-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi+(-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

$$(3,4,7,8)\quad \psi_3\sin(\gamma-\beta)\pi-(\alpha-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi-(-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta-\alpha)\pi=0,$$

$$(3,4,7,9)\quad [(\gamma-\alpha)\sin\beta\pi-(\beta-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_3-2i\psi_4\sin\alpha\pi\sin\beta\pi+[(-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi-(\beta+\beta'-\gamma-\alpha)\sin\beta\pi]\psi_7+(-\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\beta)\pi=0,$$

$$(3,4,7,10)\quad \psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\alpha\pi+(-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi=0,$$

$$(3,4,8,9)\quad (\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha+\gamma-\beta-\beta')\psi_4\sin\alpha\pi+[(\alpha-\beta-\beta')\sin\alpha\pi-(\beta')\sin\beta\pi]\psi_8-(-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$$

$$(3,4,8,10)\quad \psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\alpha-\beta-\beta')\psi_4\sin\alpha\pi+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

$$(3,4,9,10)\quad \psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\alpha-\beta-\beta')\psi_4\sin\alpha\pi+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(-\beta-\beta')[(-\beta')\sin\alpha\pi-(\beta+\beta'-\alpha)\sin\beta\pi]\psi_{10}=0,$$

$$(3,5,6,7)\quad \psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_5\sin\alpha\pi-(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi+(\beta-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(3,5,6,9)$ $\psi_3 \sin(\gamma-\beta')\pi-(\alpha-\beta')\psi_5\sin\alpha\pi-(-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,5,6,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_5\sin\alpha\pi+(-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi$
$-(-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

$(3,5,7,8)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi-(-\beta)\psi_5\sin\alpha\pi+(-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta')\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(3,5,7,9)$ $(\gamma-\alpha)\psi_3-2i\psi_5\sin\alpha\pi-(\beta+\beta'-\alpha-\gamma)\psi_7-(\alpha-\gamma)\psi_9=0,$

$(3,5,7,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_5\sin\alpha\pi+(-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi$
$-(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(3,5,8,9)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\alpha-\beta-\beta')\psi_5\sin\alpha\pi$
$+(\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi+(\alpha-\beta-\gamma)\psi_9\sin(\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,5,8,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\alpha-\beta-\beta')\psi_5\sin\alpha\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,5,9,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\alpha-\beta-\beta')\psi_5\sin\alpha\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(3,6,7,9)$ $\psi_3+2i(-\beta')\psi_6\sin\beta-(\beta-\beta')\psi_7-\psi_9=0,$

$(3,6,8)$ $\psi_3-(-\beta-\beta')\psi_6-\psi_8=0,$

$(3,6,9,10)$ $\psi_3-(-\beta-\beta')\psi_6-\psi_9+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

$(3,7,8,9)$ $(\beta)\psi_3-(-\beta')\psi_7-2i\psi_8\sin\beta\pi-(-\beta)\psi_9=0,$

$(3,7,8,10)$ $\psi_3-(-\beta-\beta')\psi_7-\psi_8-(\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\psi_{10}=0,$

$(3,7,9,10)$ $\psi_3-(-\beta-\beta')\psi_7-\psi_9+2i(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(4,5,6,7)$ $\psi_4-\psi_5-(\beta-\beta'-\gamma)\psi_6+(\beta-\beta'-\gamma)\psi_7=0,$

$(4,5,6,8)$ $(\alpha)\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi-\psi_5\sin\beta'\pi$
$+(-\beta')\psi_6\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi+(\alpha-\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(4,5,6,9)$ $(\beta')\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi+[(\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(4,5,7,8)$ $(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi+\psi_5\sin(\beta-\gamma)\pi$
$+(\beta-\gamma)\psi_7\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(4,5,7,9)$ $(\gamma)\psi_4\sin\beta\pi+[(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\gamma)\pi+\sin(\gamma-\beta)\pi]\psi_5$
$+(\beta-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(4,5,8,9)$ $\psi_4-\psi_5+(-\gamma)\psi_8-(-\gamma)\psi_9=0,$

$(4,5,10)$ $(\alpha)\psi_4-(\alpha)\psi_5-(-\beta')\psi_{10}=0,$

$(4,6,7,8)$ $(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi-(-\beta')\psi_6\sin(\gamma-\beta)\pi+(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(4,6,7,9)$ $\psi_4\sin\alpha\pi+[(\gamma-\alpha-\beta')\sin\beta\pi-(\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_6$
$+[(\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta-\alpha-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_7+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(4,6,8,9)$ $\psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(-\gamma)\sin\alpha\pi+(\beta'-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi]\psi_8-(\beta'-\alpha-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(4,6,8,10)$ $(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(4,6,9,10)$ $(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+(-\alpha)[(\gamma-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi-(-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_{10}=0,$

$(4,7,8,9)$ $(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi-(\gamma-\beta)\sin\beta\pi]\psi_8+(-\beta)\psi_9\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

$(4,7,8,10)$ $(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

$(4,7,9,10)$ $(\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+[(2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta\pi-(-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_{10}=0,$

$(5,6,7,8)$ $\psi_5\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_6\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$+(\beta-\gamma)\psi_7\sin(\beta'-\alpha)\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(5,6,7,9)$ $\psi_5\sin\alpha\pi+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\beta-\alpha)\psi_7\sin(\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(5,6,8,9)$ $\psi_5\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\beta'-\alpha)\psi_8\sin(\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

$(5,6,8,10)$ $(\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

$(5,6,9,10)$ $(\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\beta')\pi=0,$

$(5,7,8,9)$ $(\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta)\psi_8\sin\beta\pi+(\alpha-\beta)\psi_9\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

$(5,7,8,10)$ $(\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

$(5,7,9,10)$ $(\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(6,7,8,9)$ $(\beta-\beta')\psi_6-(\beta-\beta')\psi_7+\psi_8-\psi_9=0,$

$(6,7,10)$ $\psi_6-\psi_7-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_{10}=0,$

$(8,9,10)$ $\psi_8-\psi_9+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}=0.$

TABLEAU II (*voir* page 68).

$(1,2,3)$, $(1,2,4,5)$, $(1,2,4,6)$, $(1,2,4,7)$ (*voir* le Tableau I).

$(1,2,4,9)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+(-\beta)\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta-\beta')\psi_4\sin\beta\pi+\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(1,2,4,10)$, $(1,2,5,6)$, $(1,2,5,8)$ (*voir* le Tableau I).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(1, 2, 5, 9) $(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_1+2i\psi_2\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$-(\gamma-\beta-\beta')\psi_5-(\beta+\beta')\psi_9=0,$

(1, 2, 5, 10), (1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 6, 9) $[(-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_1$
$+[(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta)\sin\gamma\pi]\psi_2$
$-(-\beta-\beta')\psi_6\sin\beta\pi+(\beta+\beta')\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 6, 10), (1, 2, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 7, 9) $\psi_1-(-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7-(\gamma-\alpha)\psi_9=0,$

(1, 2, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 8, 9) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(-\beta')\psi_8\sin\beta\pi+(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 9, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha-2\beta-2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 4, 9) $\psi_1\sin(\beta-\alpha)\pi-(\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_4\sin\beta\pi$
$+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 4, 10), (1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 5, 9) $\psi_1+2i(\beta+\beta'-\alpha)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(-\alpha)\psi_5-(2\beta+2\beta'-\alpha-\gamma)\psi_9=0,$

(1, 3, 5, 10), (1, 3, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 6, 9) $(-\beta)\psi_1\sin\alpha\pi+[(\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_3$
$+(-\gamma-\beta-\beta')\psi_6\sin\beta\pi-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 6, 10), (1, 3, 7, 8), (1, 3, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 8, 9) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(-\beta')\psi_8\sin\beta\pi-(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 5, 9) $(\beta)\psi_1-2i(\alpha)\psi_4\sin\beta\pi-(\alpha-\beta)\psi_5-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_9=0,$

(1, 4, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 6, 9) $[(\beta-\alpha)\sin\beta'\pi-(\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_1$
$+[(-\beta')\sin\beta\pi-(\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_4$
$+(-\beta-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 4, 6, 10) (*voir* le Tableau I),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,4,7,9)$ $\psi_1\sin(\beta-\alpha)\pi-\psi_4\sin\beta\pi$
$+(-\beta)\psi_7\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi+\psi_9\sin(\gamma-\beta)\pi=0,$

$(1,4,7,10)$, $(1,4,8)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,4,9,10)$ $\psi_1-(\alpha)\psi_4-(\beta-\gamma)\psi_9+(-2\beta-\beta')\psi_{10}=0,$

$(1,5,6,7)$, $(1,5,6,8)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,5,6,9)$ $[(\gamma+\beta'-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\alpha)\sin\beta\pi]\psi_1$
$-[(\gamma+\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\sin\beta\pi]\psi_5$
$-2i\psi_6\sin\beta\pi\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta+\beta')\psi_9\sin(\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(1,5,6,10)$, $(1,5,7,8)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,5,7,9)$ $\psi_1-(-\alpha)\psi_5+2i(-\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_9=0,$

$(1,5,7,10)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,5,8,9)$ $(-\beta)\psi_1-(\alpha-\beta)\psi_5+2i(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_9=0,$

$(1,5,8,10)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,5,9,10)$ $\psi_1-(\alpha)\psi_5-(\alpha-\gamma)\psi_9-2i(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(1,6,7,8)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,6,7,9)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+[(\beta-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta-\beta')\sin\gamma\pi]\psi_7-\psi_9\sin\gamma\pi=0,$

$(1,6,8,9)$ $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma-\beta-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(-\beta')\sin\beta\pi]\psi_8-(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(1,6,8,10)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,6,9,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_9\sin\gamma\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')[(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta)\sin\gamma\pi]\psi_{10}=0,$

$(1,7,8,9)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi+(\beta)\psi_9\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

$(1,7,8,10)$ (*voir* le Tableau I),

$(1,7,9,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_9\sin\gamma\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,4,5)$, $(2,3,4,6)$, $(2,3,4,7)$, $(2,3,4,8)$ (*voir* le Tableau I),

$(2,3,4,9)$ $\psi_2\sin(\beta-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta')$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi-(\alpha)\psi_4\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,4,10)$, $(2,3,5,6)$, $(2,3,5,8)$ (*voir* le Tableau I),

$(2,3,5,9)$ $\psi_2+(2\beta+2\beta'-\gamma)\psi_3-\psi_5-(2\beta+2\beta'-\gamma)\psi_9=0.$

$(2,3,5,10)$, $(2,3,6,7)$ (*voir* le Tableau I),

$(2,3,6,9)$ $(-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+[(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,6,10)$, $(2,3,7,8)$, $(2,3,7,10)$ (*voir* le Tableau I),

$(2,3,8,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(2, 3, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 4, 5, 6), (2, 4, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 5, 9) $(\gamma-\alpha-\beta')\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi$
$+(\gamma-\beta-\beta')\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

(2, 4, 6, 7), (2, 4, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 6, 9) $(-\beta)[(\beta-\alpha)\sin\beta\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$-(\gamma-\beta-\beta')[(\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_4$
$+(-\beta-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi + 2i\psi_9 \sin\beta'\pi \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

(2, 4, 6, 10), (2, 4, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 7, 9) $\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi$
$+\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

(2, 4, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 8, 9) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 4, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(2, 5, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 6, 9) $[(\beta)\sin(\beta'-\alpha)\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$-[(\alpha+\beta)\sin\beta'\pi + (\gamma-\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_5$
$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta+\beta')\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(2, 5, 6, 10), (2, 5, 7) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 8, 9) $(\gamma-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (+2\beta+\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$

(2, 5, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 9, 10) $(\gamma-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\beta+\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 6, 7, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi + (-\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_7$
$+(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(2, 6, 8, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\beta+\beta')\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_8$
$-(\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(2, 6, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- [\sin\beta'\pi - (\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_{10} = 0,$

(2, 7, 8, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

(2, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 7, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

(3, 4, 5, 9) $\psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (2\alpha-2\beta-\beta')\psi_4 \sin\beta\pi$
$+ (\alpha-2\beta-\beta')\psi_5 \sin(\beta-\alpha)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3, 4, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(3, 4, 6, 9) $[(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_3$
$+ (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta-\alpha)\pi$
$- (\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 6, 10), (3, 4, 7, 8), (3, 4, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(3, 4, 8, 9) $\psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta-\beta')\psi_4 \sin\alpha\pi$
$+ (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\beta-\alpha)\pi + (\beta-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(3, 4, 9, 10) $\psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta-\beta')\psi_4 \sin\alpha\pi$
$+ (\alpha-\gamma)\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (-2\beta-2\beta')\psi_{10} \sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 5, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(3, 5, 6, 9) $[(2\beta+2\beta'-\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\beta')\pi + (\beta'-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$- (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$+ (2\beta+2\beta'-\gamma-\alpha)\psi_9 \sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3, 5, 6, 10), (3, 5, 7, 8), (3, 5, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(3, 5, 8, 9) $\psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta-\beta')\psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ (2\alpha-\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_9 \sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3, 5, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(3, 5, 9, 10) $\psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta-\beta')\psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ (\alpha-\gamma)\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\alpha-2\beta-2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(3, 6, 9, 10) $(\beta+\beta')\psi_3 - \psi_6 - (\beta+\beta')\psi_9 + (\gamma-\alpha-\beta)\psi_{10} = 0,$

(3, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(3, 7, 9) $\psi_3 - (-\beta-\beta')\psi_7 - \psi_9 = 0,$

(4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(4, 5, 6, 9) $[(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin(\beta'-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_4$
$- [(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi + (\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_5$
$- (\beta-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(4, 5, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(4, 5, 7, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi + \psi_5 \sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(4, 5, 8, 9) $\psi_4 - \psi_5 + (2\beta-\gamma)(\psi_8-\psi_9) = 0,$

(4, 5, 10) (*voir* le Tableau I),

(4, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(4, 6, 7, 9) $(\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi + [(-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi + (2\beta-\gamma-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_7 - (\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(4, 6, 8, 9) $(\alpha-\beta-\beta')\psi_4 \sin\alpha\pi + [\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\pi]\psi_8 + (-\beta-\beta')\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\beta-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(4, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(4, 6, 9, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - [(-2\alpha)\sin\beta'\pi + (\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_{10} = 0,$

(4, 7, 8, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(4, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(4, 7, 9, 10) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

(5, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(5, 6, 7, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + [(\beta-\gamma)\sin(\beta'-\alpha)\pi - (-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_7 + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(5, 6, 8, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + [(2\beta+\beta'-\gamma)\sin(\beta'-\alpha)\pi - \sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_8 + (2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(5, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(5, 6, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + [(\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\alpha)\sin(\alpha-\beta')\pi]\psi_{10} = 0,$

(5, 7, 8, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I).

(5, 7, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(6, 7, 8, 9) $\psi_6 - \psi_7 + (\beta+\beta')\psi_8 - (\beta+\beta')\psi_9 = 0,$

(6, 7, 10) (*voir* le Tableau I), (8, 9, 10) $\psi_8 - \psi_9 + (\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\psi_{10} = 0.$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLEAUX III ET IV (*voir* p. 69, 70).

Les formules correspondantes se déduisent respectivement des formules des Tableaux I et II par la règle suivante : 1° On permutera β et β'; 2° ψ_1, ψ_2, ψ_3 restent inaltérés; 3° on permutera ψ_4 avec ψ_5, ψ_6 avec ψ_7, ψ_8 avec ψ_9 4° ψ_{10} se change en $-(\beta+\beta')\psi_{10}$.

Exemples :

(1, 2, 3) même formule qu'au Tableau I.

(1, 2, 4, 5) $(\beta+\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi-(\gamma+\beta)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 10) $(\beta+\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma)\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

.....

(Ces formules se rapportent au Tableau III).

TABLEAU V (*voir* p. 71).

(1, 2, 3, 4) $(\beta)\psi_1-(\alpha-\beta)\psi_2-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_3-2i(\alpha)\psi_4\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 3, 5) $(-\beta')\psi_1-(\beta'-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_3+2i(-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 3, 6) $\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\alpha-\gamma)\psi_3-2i(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 3, 7) $\psi_1-(-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha)\psi_3+2i(\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 3, 8) $(-\beta)\psi_1-(\alpha-\beta)\psi_2-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_3+2i(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 3, 9) $(\beta')\psi_1-(\beta'-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_3-2i(\gamma-\alpha)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 3, 10) $[(\alpha+\beta')\sin\beta\pi+(\beta-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_1-\psi_2\sin(\beta+\beta')$
$+[(\gamma-\beta')\sin\beta+(\beta-\gamma)\sin\beta']\psi_3$
$-2i(-\alpha-\beta')\psi_{10}\sin\beta\sin\beta'=0,$

(1, 2, 4, 5) $(\beta-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi$
$-(\beta-\gamma)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 7) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-\beta)\psi_2\sin(\beta-\gamma)\pi-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi$
$-(\beta)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 9) $(\beta)\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi+(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 10) $(\beta-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta-\beta')\sin\gamma\pi+\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_4$
$+(\beta-\beta'-\alpha-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,2,5,6)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta')\psi_2 \sin(\beta'-\gamma)\pi - (\beta'-\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi$
$- (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,2,5,8)$ $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\beta-\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,2,5,10)$ $(\beta-\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- [(\beta-\beta')\sin\gamma\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_5$
$- (\gamma-\alpha-2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(1,2,6,7)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,2,6,8)$ $\psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\alpha+\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

$(1,2,6,9)$ $\psi_1 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma-\beta')\pi$
$+ (-2\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - \psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,2,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi$
$- (-\gamma)[(\beta-\beta')\sin\gamma\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_6$
$+ (-\alpha-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,2,7,8)$ $\psi_1 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma-\beta)\pi + (2\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,2,7,9)$ $\psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\beta-\beta'+\gamma-\alpha)\psi_7 - (\gamma-\alpha)\psi_9 = 0,$

$(1,2,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi$
$- (\gamma)[(\beta-\beta')\sin\gamma\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_7$
$- (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(1,2,8,9)$ $\psi_1 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$- (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,2,8,10)$ $[(\beta'-\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_1$
$- (\alpha+\beta'-\beta)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha-\gamma)[(\gamma-\beta)\sin\beta\pi + (\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_8$
$- (-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,2,9,10)$ $[(\beta'-\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi]\psi_1$
$- (\beta'-\beta-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\gamma-\alpha)[(\gamma-\beta)\sin\beta\pi + (\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$+ (\gamma-2\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(1,3,4,5)$ $\psi_1 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$- (\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,4,6)$ $\psi_1 - (\alpha-\gamma)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 + (\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 = 0,$

$(1,3,4,7)$ $\psi_1 \sin(\alpha-\beta)\pi + \psi_3 \sin(\beta-\gamma)\pi + \psi_4 \sin\beta\pi + (\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,4,9)$ $\psi_1 \sin(\alpha-\beta)\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma-\beta-\beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,4,10)$ $\psi_1 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_4 \sin(\beta+\beta')\pi$
$+ (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,3,5,6)$ $\psi_1 \sin(\alpha-\beta')\pi+\psi_3\sin(\beta'-\gamma)\pi+\psi_5\sin\beta'\pi+(-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0,$

$(1,3,5,7)$ $\psi_1-(\gamma-\alpha)\psi_3-(-\alpha)\psi_5+(\beta+\beta'+\gamma-\alpha)\psi_7=0,$

$(1,3,5,8)$ $\psi_1\sin(\alpha-\beta')\pi+(\beta)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_5\sin\beta'\pi-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(1,3,5,10)$ $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(1,3,6,7)$ $\psi_1\sin\alpha\pi-\psi_3\sin\gamma\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi+(\beta+\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0.$

$(1,3,6,9)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_3\sin(\beta'-\gamma)\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$-(\gamma-\beta')\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,6,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi-\psi_3\sin\gamma\pi+(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,7,8)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta)\psi_3\sin(\beta-\gamma)\pi+(\beta+\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$-(\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(1,3,7\,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi-\psi_3\sin\gamma\pi+(\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi$
$+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(1,3,8,9)$ $(\beta'-\beta)\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\gamma-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,8,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(1,3,9,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+(-\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta-\beta')\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(1,4,5,6)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta')\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta'-\gamma)\psi_5\sin\beta'\pi-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(1,4,5,7)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi+(-\beta)\psi_5\sin(\beta-\gamma)\pi$
$-(\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(1,4,6,7)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\gamma\pi-(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta-\gamma)\pi$
$-(\beta)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

$(1,4,6,9)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi$
$-(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(1,4,6,10)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\gamma\pi-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(-\alpha-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(1,4,7,9)$ $\psi_1\sin(\alpha-\beta)\pi+\psi_4\sin\beta\pi+(\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

$(1,4,7,10)$ $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\gamma\pi-(\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\beta)\pi=0,$

$(1,4,8)$ $\psi_1-(\alpha)\psi_4-(\alpha-\gamma)\psi_8=0,$

$(1,4,9,10)$ $(\alpha)\psi_1-\psi_4-(\gamma)\psi_9+(\beta'-\alpha)\psi_{10}=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,5,6,7)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta+\gamma)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,5,6,8)$ $\psi_1 \sin(\alpha-\beta')\pi + \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,5,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

$(1,5,7,8)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta-\gamma)\pi - (\beta+\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(1,5,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(1,5,8,10)$ $(-\alpha)\psi_1 - \psi_5 - (-\gamma)\psi_8 - (-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(1,5,9)$ $\psi_1 - (-\alpha)\psi_5 - (\gamma-\alpha)\psi_9 = 0,$

$(1,6,7,8)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta+\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi = 0,$

$(1,6,7,9)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$

$(1,6,8,9)$ $(\beta')\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi - (\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,6,8,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(1,6,9,10)$ $(\gamma)\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma)\psi_9 \sin\gamma\pi + (-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

$(1,7,8,9)$ $(-\beta)\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(1,7,8,10)$ $(-\gamma)\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\gamma)\psi_8 \sin\gamma\pi - (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\gamma-\beta)\pi = 0,$

$(1,7,9,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(1,8,9,10)$ $2i\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\gamma)\psi_8 - (\gamma)\psi_9 + (-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(2,3,4,5)$ $(\beta'-\beta)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,4,7)$ $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi - (\beta+\gamma-\alpha)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,4,8)$ $(-\beta)\psi_2 + (\beta-\gamma)\psi_3 - (-\beta)\psi_4 - (\beta-\gamma)\psi_8 = 0,$

$(2,3,4,9)$ $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi + (\gamma-\alpha-\beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,4,10)$ $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - [(\beta-\beta')\sin\alpha\pi + \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_4 + (\beta-\beta'-2\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2,3,5,6)$ $(\beta')\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi+\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$
$-(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,5,8)$ $(\beta')\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi+(\beta)\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,5,9)$ $(\beta')\psi_2+(\gamma-\beta')\psi_3-(\beta')\psi_5-(\gamma-\beta')\psi_9=0,$

$(2,3,5,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(\beta-\beta')\sin\alpha\pi+\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_5-(-2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,6,7)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,6,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,6,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+(-\gamma)[(\beta-\beta')\sin\alpha\pi+\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_6-(-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,7,8)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta)\psi_3\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi+(\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi$
$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,7,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+(\gamma)[(\beta-\beta')\sin\alpha\pi+\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_7$
$+(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,8,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,8,10)$ $(\alpha-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+[(\alpha+\beta-\gamma)\sin\alpha\pi+(\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_7$
$-(-\gamma)[(\beta+\beta')\sin\beta'\pi+(2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_8-(-\alpha-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,9,10)$ $(\beta'-\alpha)\psi_2\sin\alpha\pi+[(\gamma-\alpha-\beta')\sin\alpha\pi+(-\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_3$
$-(\gamma)[(-\beta-\beta')\sin\beta\pi+(-2\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$+(-\alpha-\beta-2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,4,5,8)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\alpha-\beta')\psi_4\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$-(\beta-\gamma)\psi_5\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta-\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,5,9)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi$
$-(\beta-\alpha)\psi_5\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi+(\gamma+\beta-\beta'-\alpha)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,6)$ $\psi_2-\psi_4+(\beta-\beta'-\gamma)\psi_6=0,$

$(2,4,7,8)$ $(-\beta)\psi_2\sin(\beta-\gamma)\pi-(\alpha-\beta)\psi_4\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$-(\beta)\psi_7\sin\beta'\pi+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,7,9)$ $(-\beta)\psi_2\sin(\beta-\alpha)\pi-(\alpha-\beta)\psi_4\sin\beta\pi$
$+(\beta)\psi_7\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2,4,7,10)$ $\psi_2-\psi_4+(\beta-\beta'+\gamma)\psi_7+(-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

$(2,4,8,9)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\alpha)\psi_4\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2, 4, 8, 10)$ $(-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_4$
$-(\beta-\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta-\beta'-\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2, 4, 9, 10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+[(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi-(\gamma-\beta')\sin\beta\pi]\psi_4$
$+(\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\beta-\beta'-2\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi=0,$

$(2, 5, 6, 8)$ $(\beta')\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$
$+(-\beta')\psi_6\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi+\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2, 5, 6, 9)$ $(\beta')\psi_2\sin(\beta'-\gamma)\pi-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$-(-\beta')\psi_6\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

$(2, 5, 6, 10)$ $\psi_2-\psi_5+(\beta-\beta'-\gamma)\psi_6-(-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

$(2, 5, 7)$ $\psi_2-\psi_5+(\beta-\beta'+\gamma)\psi_7=0,$

$(2, 5, 8, 9)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(-\alpha)\psi_5\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(-\beta')\psi_8\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(2, 5, 8, 10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha-\beta')\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi+(\beta-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$+(\alpha+\beta-\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-2\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(2, 5, 9, 10)$ $(\alpha)\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta-\beta'+\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_5$
$-(\beta-\beta'+\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-2\alpha+\gamma-2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2, 6, 7, 8)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_6\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$+(\gamma-\alpha+\beta)\psi_7\sin\beta'\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(2, 6, 7, 9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi+(\beta)\psi_7\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

$(2, 6, 8, 9)$ $(\beta')\psi_2\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_8\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(2, 6, 8, 10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+[(\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi+(-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_6$
$+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2, 6, 9, 10)$ $(\gamma)\psi_2\sin\alpha\pi+[(\alpha-\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_6$
$+(\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(2, 7, 8, 9)$ $(-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta)\psi_7\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi+\psi_9\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

$(2, 7, 8, 10)$ $(-\gamma)\psi_2\sin\alpha\pi+[(\gamma-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_7$
$+(-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

$(2, 7, 9, 10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+[(\beta-\beta'+\gamma)\sin\alpha\pi+(\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_7$
$+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(-2\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2,8,9,10)$ $2i\psi_2 \sin\alpha\pi \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha-\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_8$
$-[(\gamma-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_9$
$+(\alpha-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(3,4,5,6)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta')\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$
$-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,4,5,7)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\alpha-\beta)\psi_4\sin\beta\pi+(-\beta)\psi_5\sin(\beta-\alpha)\pi$
$-(\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,4,5,8)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi+(\alpha-\beta)\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi$
$-(-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,4,5,9)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\beta')\psi_4\sin\beta\pi+(\beta'-\alpha)\psi_5\sin(\beta-\alpha)\pi$
$+(\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,4,6,7)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\alpha\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta)\pi$
$-(\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

$(3,4,6,9)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi-(\beta')\psi_4\sin\alpha\pi$
$-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(3,4,6,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\alpha\pi-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$
$+(-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(3,4,7,8)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta)\pi-(\alpha-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi$
$-(\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta-\alpha)\pi=0,$

$(3,4,7,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_4\sin\alpha\pi-(\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$
$+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi=0,$

$(3,4,8,9)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\alpha+\beta'-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\beta)\pi+(\gamma-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

$(3,4,8,10)$ $\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha-\beta-\beta')\sin\alpha\pi$
$-(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(3,4,9,10)$ $\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(-2\alpha)\psi_{10}\sin(\beta-\alpha)\pi=0,$

$(3,5,6,7)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_5\sin\alpha\pi-(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\beta+\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

$(3,5,6,9)$ $\psi_3\sin(\gamma-\beta')\pi-(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi-(-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,5,6,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_5\sin\alpha\pi-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$
$-(-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

$(3,5,7,8)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi-(-\beta)\psi_5\sin\alpha\pi-(\gamma)\psi_7\sin(\beta'-\alpha)\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

$(3,5,7,10)$ $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_5\sin\alpha\pi-(\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$
$-(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$(3,5,8,9)\quad \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi-(\beta'-\beta-\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi + (\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_9\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$$

$$(3,5,8,10)\quad \psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha-\beta-\beta')\psi_5\sin\alpha\pi - (\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta'-\alpha)\pi=0,$$

$$(3,5,9,10)\quad \psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi - (\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi+(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$$

$$(3,6,8)\quad \psi_3-(-\beta-\beta')\psi_6-\psi_8=0,$$

$$(3,6,9,10)\quad (\gamma)\psi_3-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-(\gamma)\psi_9+(\beta'-\alpha)\psi_{10}=0,$$

$$(3,7,8,10)\quad (-\gamma)\psi_3-(\gamma-\beta-\beta')\psi_7-(-\gamma)\psi_8-(-\alpha-2\beta-\beta')\psi_{10}=0,$$

$$(3,7,9)\quad \psi_3-(\beta+\beta')\psi_7-\psi_9=0,$$

$$(3,8,9,10)\quad 2\iota\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 + (\gamma-\beta-\beta')\psi_9-(-\alpha-\beta)\psi_{10}=0,$$

$$(4,5,6,7)\quad (\beta'-\beta)\psi_4-(\beta'-\beta)\psi_5-(-\gamma)\psi_6+(\gamma)\psi_7=0,$$

$$(4,5,6,8)\quad \psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi-(-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi - (-\alpha-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(-\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$$

$$(4,5,6,9)\quad \psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi+(-\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi - (-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$$

$$(4,5,7,8)\quad (\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi+\psi_5\sin(\beta-\gamma)\pi - (\beta+\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$$

$$(4,5,7,9)\quad (\alpha)\psi_4\sin\beta\pi+\psi_5\sin(\alpha-\beta)\pi+(\alpha+\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$$

$$(4,5,8,9)\quad (\alpha)\psi_4-(-\alpha)\psi_5+(\alpha-\gamma)\psi_8-(\gamma-\alpha)\psi_9=0,$$

$$(4,5,10)\quad \psi_4-\psi_5-(-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$$

$$(4,6,7,8)\quad \psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha-\beta')\psi_6\sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$$

$$(4,6,7,9)\quad \psi_4\sin\alpha\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta-\alpha)\pi + (\beta)\psi_7\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$$

$$(4,6,8,9)\quad (\beta')\psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$$

$$(4,6,8,10)\quad \psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

$$(4,6,9,10)\quad (\gamma)\psi_4\sin\alpha\pi+(\alpha-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi=0,$$

$$(4,7,8,9)\quad (-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi+(\beta-\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\beta)\pi+(-\alpha)\psi_9\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$$

$$(4,7,8,10)\quad (-\gamma)\psi_4\sin\alpha\pi+(\gamma-\alpha)\gamma_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(-2\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(4,7,9,10)$ $\psi_4 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

$(4,8,9,10)$ $2i\psi_4 \sin\alpha\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8 - (\gamma-\alpha)\psi_9 + (-2\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(5,6,7,8)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$+ (\beta+\gamma)\psi_7 \sin(\beta'-\alpha)\pi + \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

$(5,6,7,9)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$+ (\alpha+\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

$(5,6,8,9)$ $(\beta')\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta')\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\alpha)\psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

$(5,6,8,10)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$

$(5,6,9\,10)$ $(\gamma)\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - \psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(5,7,8,9)$ $(-\beta)\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha+\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(5,7,8,10)$ $(-\gamma)\psi_5 \sin\alpha\pi + (\gamma-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(5,7,9,10)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+ (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(5,8,9,10)$ $2i\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8 - (\gamma-\alpha)\psi_9 + (-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(6,7,8,9)$ $(-\beta-\beta')\psi_6 - (\beta+\beta')\psi_7 + \psi_8 - \psi_9 = 0,$

$(6,7,10)$ $(-\gamma)\psi_6 - (\gamma)\psi_7 - (-\alpha-\beta)\psi_{10} = 0,$

$(6,8,9,10)$ $2i\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma)\psi_8 + (\gamma)\psi_9 - (\beta'-\alpha)\psi_{10} = 0,$

$(7,8,9,10)$ $2i\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\gamma)\psi_8 + (-\gamma)\psi_9 - (-\alpha-2\beta-\beta')\psi_{10} = 0.$

Remarque. — A chaque formule de ce Tableau en correspond une autre du même Tableau, que l'on peut déduire de la première par les règles suivantes :

1° Dans les coefficients de $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9$ on change i en $-i$ en laissant α, β, β', γ invariables, puis on permute β et β', ψ_4 et ψ_5, ψ_6 et ψ_7, ψ_8 et ψ_9;

2° On multiplie le coefficient de ψ_{10} par $-(2\alpha+\beta+\beta')$, puis on change i en $-i$, en laissant α, β, β', γ invariables; puis enfin on permute β et β'.

$(-\alpha-\beta)$ devient par exemple $-(-\alpha-\beta)$; $(-\alpha-\beta')$ devient $-(-\alpha-\beta')$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(-\alpha-\beta-\beta')$ devient $-(-\alpha)$, lequel devient $+(-\alpha-\beta-\beta')$, etc., etc.

Certaines formules se correspondent à elles-mêmes.

TABLEAU VI (*voir* p. 72).

Remarque I. — Les formules de ce Tableau, qui ne contiennent ni ψ_6, ni ψ_7, ni ψ_{10}, sont les mêmes que dans le Tableau V.

Remarque II. — Dans les formules qui contiennent ψ_6, ou ψ_7, ou ψ_6 et ψ_7, sans contenir ψ_{10}, il suffira d'ajouter $2\beta'$ à la quantité entre parenthèses dans le coefficient de ψ_6, et de retrancher 2β à la quantité entre parenthèses dans le coefficient de ψ_7. Cela tient à ce que le point $\frac{y}{x}$ passe de la partie inférieure du plan dans la partie supérieure.

Exemple. — La relation

$$\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\alpha-\gamma)\psi_3-2i(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0$$

du Tableau V devient dans le Tableau VI

$$\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\alpha-\gamma)\psi_3-2i(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0.$$

Cela posé, voici les relations du Tableau VI :

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 3, 6), (1, 2, 3, 7) (1),

(1, 2, 3, 8), (1, 2, 3, 9) (*voir* le Tableau V),

$$(1,2,3,10)\quad \psi_1\sin(\beta+\beta')\pi-[(\beta'-\alpha)\sin\beta\pi+(\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_2 -[(\gamma-\alpha-\beta')\sin\beta\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_3 -2i(\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 4, 5) (*voir* le Tableau V), (1, 2, 4, 7) (1), (1, 2, 4, 9) (*voir* le Tableau V),

$$(1,2,4,10)\quad \psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta'-\beta)\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi -[(\gamma-\beta)\sin\beta\pi+(2\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_4 +(\alpha+2\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 5, 6) (1), (1, 2, 5, 8) (*voir* le Tableau V),

$$(1,2,5,10)\quad (\beta-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi -(-\alpha)[(\gamma-\alpha-\beta')\sin\beta\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5-(\gamma-\alpha)\psi_{10}=0,$$

(1) *Voir* la remarque II, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) (1),

(1, 2, 6, 10) $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(\alpha-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_2$
$-[\sin\beta\pi+(2\alpha+\beta+\beta'-2\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_6+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) (1),

(1, 2, 7, 10) $(-\beta)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)$
$-[(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_2$
$+[\sin\beta'\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta-\beta')\sin\beta\pi]\psi_7-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 8, 10) $\psi_1\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\beta')\sin\beta\pi+(2\alpha-2\gamma+\beta)\sin\beta'\pi]\psi_8$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 9, 10) $\psi_1\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta)\sin\beta'\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta')\sin\beta\pi]\psi_9+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 4, 5) (*voir* le Tableau V), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7) (1),

(1, 3, 4, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 4, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta')\sin\beta\pi]\psi_4+(\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7) (1), (1, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 5, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta'-2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_5-(2\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) (1),

(1, 3, 6, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-[(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi+(\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+[(2\alpha-\beta-\gamma)\sin\beta'\pi+(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 7, 8) (1),

(1, 3, 7, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-[(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi+(2\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+[(\gamma-2\alpha+\beta')\sin\beta\pi+(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 8, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta-\gamma)\sin\beta\pi+(2\alpha-\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_8-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi+(\gamma+\beta-2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_9$
$+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7), (1, 4, 6, 7) (1, 4, 6, 9) (1),

---

(1) *Voir* la remarque II, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,4,6,10)$ $(-\alpha-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_4$
$-(\beta'-\alpha-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(1,4,7,9)$ (1),

$(1,4,7,10)$ $(\beta-\alpha)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+[(\alpha)\sin(\beta-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\sin\beta\pi]\psi_4$
$-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)-(\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

$(1,4,8)$ (*voir* le Tableau V),

$(1,4,9,10)$ $\psi_1-(\alpha)\psi_4-(\gamma-\alpha)\psi_9+(\beta')\psi_{10}=0,$

$(1,5,6,7)$, $(1,5,6,8)$ (1),

$(1,5,6,10)$ $(\alpha-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi-(\alpha-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta')\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(1,5,7,8)$ (1),

$(1,5,7,10)$ $(\alpha+\beta)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+[(\beta)\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\gamma-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_5$
$-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta'+\gamma)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(1,5,8,10)$ $\psi_1-(-\alpha)\psi_5-(\alpha-\gamma)\psi_8-(\beta')\psi_{10}=0,$

$(1,5,9)$ (*voir* le Tableau V), $(1,6,7,8)$, $(1,6,7,9)$ (1),

$(1,6,7,10)$ $2i\psi_1\sin\alpha\pi\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(\beta+\beta'-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta'-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_6$
$+[(\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta'-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_7-(\beta')\psi_{10}\sin\gamma\pi=0,$

$(1,6,8,9)$ (1),

$(1,6,8,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_8-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(1,6,9,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\gamma-\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi]\psi_9$
$+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\beta')\pi=0,$

$(1,7,8,9)$ (1),

$(1,7,8,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha+2\beta-2\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_8$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin(\gamma-\beta)\pi=0,$

$(1,7,9,10)$ $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi]\psi_9$
$+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,4,5)$ (*voir* le Tableau V), $(2,3,4,7)$ (1),

$(2,3,4,8)$, $(2,3,4,9)$ (*voir* le Tableau V),

---

(1) *Voir* la remarque II, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(2, 3, 4, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 5, 6) (1), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 5, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 3, 5, 10) $\psi_2 \sin((\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 6, 7), (2, 3, 6, 9) (1),

(2, 3, 6, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - (-2\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 7, 8) (1),

(2, 3, 7, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - (2\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\gamma-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 3, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 4, 5, 8), (2, 4, 5, 9) (*voir* le Tableau V), (2, 4, 6), (2, 4, 7, 8), (2, 4, 7, 9) (1),

(2, 4, 7, 10) $(-\alpha)\psi_2 - (\alpha)\psi_4 + (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7 + (\beta')\psi_{10} = 0,$

(2, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 4, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(2, 5, 6, 8), (2, 5, 6, 9) (1),

(2, 5, 6, 10) $(\alpha)\psi_2 - (-\alpha)\psi_5 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_6 - (\beta')\psi_{10} = 0,$

(2, 5, 7) (1), (2, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 5, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

(2, 5, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 6, 7, 8), (2, 6, 7, 9) (1),

(2, 6, 7, 10) $2i\psi_2 \sin\alpha\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_6 - (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7 - (\beta')\psi_{10} = 0,$

(2, 6, 8, 9) (1),

(2, 6, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-2\beta')\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

---

(1) *Voir* la remarque II, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(2, 6; 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(2\gamma-2\alpha-2\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi = 0,$

(2, 7, 8, 9) (1),

(2, 7, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(2\alpha+2\beta-2\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$

(2, 7, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(2\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7) (1), (3, 4, 5, 8), (3, 4, 5, 9) (*voir* le Tableau V),

(3, 4, 6, 7), (3, 4, 6, 9) (1),

(3, 4, 6, 10) $(-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta')\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\alpha) + (\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 7, 8) (1),

(3, 4, 7, 10) $(\beta-\alpha)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(3, 4, 8, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 9, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9) (1),

(3, 5, 6, 10) $(\alpha-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(3, 5, 7, 8) (1),

(3, 5, 7, 10) $(\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (-\beta)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(3, 5, 8, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + \psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(3, 5, 9, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 6, 7, 10) $2i(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6 - (\gamma-\alpha)\psi_7 - (\beta)\psi_{10} = 0,$

(3, 6, 8) (1),

---

(1) *Voir* la remarque II, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(3, 6, 9, 10)$ $(\alpha-\gamma)\psi_3-(\alpha-\gamma+\beta'-\beta)\psi_6-(\gamma-\alpha)\psi_9+(\beta')\psi_{10}=0,$

$(3, 7, 8, 10)$ $(\gamma-\alpha)\psi_3-(\gamma-\alpha+\beta'-\beta)\psi_7-(\alpha-\gamma)\psi_8-(\beta')\psi_{10}=0,$

$(3, 7, 9)$, $(4, 5, 6, 7)$, $(4, 5, 6, 8)$, $(4, 5, 6, 9)$, $(4, 5, 7, 8)$, $(4, 5, 7, 9)$ [1],

$(4, 5, 8, 9)$ (*voir* le Tableau V),

$(4, 5, 10)$ $(\alpha)\psi_4-(-\alpha)\psi_5-(\beta')\psi_{10}=0,$

$(4, 6, 7, 8)$, $(4, 6, 7, 9)$ [1],

$(4, 6, 7, 10)$ $2i\psi_4\sin\alpha\pi+(\beta+\beta'-\alpha-\gamma)\psi_6-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7-(\beta')\psi_{10}=0,$

$(4, 6, 8, 9)$ [1],

$(4, 6, 8, 10)$ $\psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(-2\beta')\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(4, 6, 9, 10)$ $\psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(2\gamma-2\alpha-2\beta')\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi=0,$

$(4, 7, 8, 9)$ (*voir* le Tableau V),

$(4, 7, 8, 10)$ $(\gamma-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\beta-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

$(4, 7, 9, 10)$ $(\alpha-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi+(-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\beta-\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi=0,$

$(5, 6, 7, 8)$, $(5, 6, 7, 9)$ [1],

$(5, 6, 7, 10)$ $2i\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-(\alpha+\gamma-\beta-\beta')\psi_7-(\beta')\psi_{10}=0,$

$(5, 6, 8, 9)$ [1],

$(5, 6, 8, 10)$ $(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+(\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha-\beta')\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

$(5, 6, 9, 10)$ $(\beta'-\gamma)\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\gamma-\beta')\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\beta')\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(5, 7, 8, 9)$ [1],

$(5, 7, 8, 10)$ $\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(2\alpha+2\beta-2\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(5, 7, 9, 10)$ $\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(2\beta)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+(\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(6, 7, 8, 10)$ $(\gamma-\alpha)\psi_6-(\gamma-\alpha)\psi_7+2i(\beta-\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta)\psi_{10}=0,$

$(6, 7, 9, 10)$ $(\alpha-\gamma)\psi_6-(\alpha-\gamma)\psi_7+2i(\beta-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta)\psi_{10}=0,$

$(8, 9, 10)$ $(\alpha-\gamma)\psi_8-(\gamma-\alpha)\psi_9+(\beta')\psi_{10}=0.$

---

[1] *Voir* la remarque II, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Tableau VII.

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6) (1, 2, 3, 7), (1, 2, 3, 8), 1, 2, 3, 9) (*voir* le Tableau VI).

(1, 2, 3, 10) $[(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_1$
$-[(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_2$
$-\psi_3\sin(\beta+\beta')\pi-2i(\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 7), (1, 2, 4, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 4, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-\beta-\beta')\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta-\beta')\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 5, 6), (1, 2, 5, 8) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 5, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 6, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2\sin\gamma\pi-\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 7, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2\sin\gamma\pi-\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi$
$-(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 8, 10 $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 9, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7), (1, 3, 4, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 3, 4, 10) $[(\beta-\beta'-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_1$
$-(\beta-\beta'-\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi+(\beta-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_4-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau VI),

(1, 3, 5, 10) $[(\alpha+\beta-\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_1$
$-(\gamma+\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi]\psi_5$
$-(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 3, 6, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-\psi_3\sin\gamma\pi+[(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi)\psi_6$
$-(2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 7, 8) (*voir* le Tableau VI),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(1,3,7,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + [(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi + (\gamma-\beta)\sin\beta'\pi)\psi_7 + (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(1,3,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,3,8,10)$ $(\beta')\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - [(\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta')\sin\gamma\pi)\psi_8 - (2\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(1,3,9,10)$ $(-\beta)\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - [(-\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\beta)\sin\gamma\pi]\psi_9 + (\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(1,4,5,6)$, $(1,4,5,7)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,4,5,10)$ $2i\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma)\psi_4 + (-\gamma)\psi_5 + (\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

$(1,4,6,7)$, $(1,4,6,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,4,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(1,4,7,9)$ (*voir* le Tableau VI).

$(1,4,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta-\gamma) = 0,$

$(1,4,8)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,4,9,10)$ $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_9 + (\beta')\psi_{10} = 0,$

$(1,5,6,7)$, $(1,5,6,8)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,5,6,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,5,7,8)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,5,7,10)$ $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(1,5,8,10)$ $\psi_1 - (-\alpha)\psi_5 - (\gamma-\alpha)\psi_8 - (2\gamma-2\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

$(1,5,9)$, $(1,6,7,8)$, $(1,6,7,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,6,8,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi - (2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(1,6,9,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(1,7,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(1,7,8,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi + (\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(1,7,9,10)$ $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,4,5)$, $(2,3,4,7)$, $(2,3,4,8)$, $(2,3,4,9)$ (*voir* le Tableau VI),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2,3,4,10)$ $[(-\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(2\alpha-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\beta-\beta')\sin\beta'\pi]\psi_4$
$+(\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,5,6)$, $(2,3,5,8)$, $(2,3,5,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,3,5,10)$ $[(\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(\gamma-2\alpha)\sin\beta'\pi+(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_5$
$-(\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,6,7)$, $(2,3,6,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,3,6,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+[(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_6$
$-(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,7,8)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,3,7,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+[(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_7$
$+(\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,3,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,3,8,10)$ $(\beta'-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_8$
$-(2\gamma-2\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,9,10)$ $(\beta'-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$+(2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,4,5,8)$ $(2,4,5,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,4,5,10)$ $2i\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\gamma-\beta-\beta')\psi_4-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_5-(\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10}=0,$

$(2,4,6)$, $(2,4,7,8)$, $(2,4,7,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,4,7,10)$ $\psi_2-\psi_4+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_7+(2\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}=0,$

$(2,4,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,4,8,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,4,9,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi=0,$

$(2,5,6,8)$, $(2,5,6,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,5,6,10)$ $\psi_2-\psi_5+(\gamma-\beta-\beta')\psi_6-(2\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

$(2,5,7)$, $(2,5,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(2,5,8,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(-\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(2,5,9,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(-\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,6,7,8)$, $(2,6,7,9)$, $(2,6,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,6,8,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$-(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,6,9,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(2,5,6,8)$, $(2,5,6,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,5,6,10)$ $\psi_2-\psi_5+(\gamma-\beta-\beta')\psi_6-(2\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

$(2,5,7)$, $(2,5,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,5,8,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(-\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi+(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

$(2,5,9,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(-\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(2,6,7,8)$, $(2,6,7,9)$, $(2,6,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,6,8,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta')\pi$
$+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,6,9,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi=0,$

$(2,7,8,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(2,7,8,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

$(2,7,9,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

$(3,4,5,6)$, $(3,4,5,7)$, $(3,4,5,8)$, $(3,4,5,9)$ (*voir* le Tableau IV),

$(3,4,5,10)$ $2i\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta)\sin(\beta'-\alpha)\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_4$
$+[(\beta'-\gamma)\sin(\beta-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$+(\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10}\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi=0,$

$(3,4,6,7)$, $(3,4,6,9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(3,4,6,10)$ $\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi+\psi_4\sin\alpha\pi$
$+[(-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_6$
$-(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(3,4,7,8)$ (*voir* le Tableau VI),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(3, 4, 7, 10) $\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\alpha\pi$
$- [(\beta'-\gamma)\sin(\beta-\alpha)\pi + (\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7$
$- (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

(3, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(3, 4, 8, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta'-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$- [(\alpha+\beta'-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_8$
$- (2\gamma-\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 9, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta'-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$+ [(\alpha+\beta'-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\pi - (\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$- (2\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(3, 5, 6, 10) $\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\alpha\pi$
$- [(\gamma-\beta)\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6$
$+ (2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3, 5, 7, 8) (*voir* le Tableau VI),

(3, 5, 7, 10) $\psi_3 \sin(\alpha-\gamma)\pi + \psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ [(\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_7$
$+ (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(3, 5, 8, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\beta-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ [(\gamma-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta')\pi - (\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_8$
$+ (2\gamma-2\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(3, 5, 9, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\beta-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$- [(\beta'-\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_9$
$+ (2\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 6, 8) (*voir* le Tableau VI),

(3, 6, 9, 10) $\psi_3 - (\beta'-\beta)\psi_6 - \psi_9 + (\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

(3, 7, 8, 10) $\psi_3 - (\beta'-\beta)\psi_7 - \psi_8 - (\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

(3, 7, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8), (4, 5, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 5, 6, 10) $\psi_4 - \psi_5 - 2i\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (2\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

(4, 5, 7, 8), (4, 5, 7, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 5, 7, 10) $\psi_4 - \psi_5 - 2i\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (2\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10} = 0,$

(4, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 5, 8, 10) $(\alpha)\psi_4 - (-\alpha)\psi_5 - 2i\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (2\gamma-2\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

(4, 5, 9, 10) $(\alpha)\psi_4 - (-\alpha)\psi_5 - 2i\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta')\psi_{10} = 0,$

(4, 6, 7, 8), (4, 6, 7, 9), (4, 6, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 6, 8, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$(4, 6, 9, 10)$ $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(4, 7, 8, 9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(4, 7, 8, 10)$ $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\gamma-2\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(4, 7, 9, 10)$ $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

$(5, 6, 7, 8)$, $(5, 6, 7, 9)$, $(5, 6, 8, 9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(5, 6, 8, 10)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

$(5, 6, 9, 10)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (\gamma)\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(5, 7, 8, 9)$ (*voir* le Tableau VI),

$(5, 7, 8, 10)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(5, 7, 9, 10)$ $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(6, 7, 10)$ $\psi_6 - \psi_7 - (\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10} = 0,$

$(8, 9, 10)$ $\psi_8 - \psi_9 + (\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

Remarque I. — Les formules de ce Tableau s'associent deux à deux, ou à elles-mêmes comme il a déjà été dit (*voir* p. 100). Il n'y a de changement que pour le coefficient de ψ_{10}. Étant donnée une formule du Tableau, contenant ψ_{10}, pour avoir le coefficient de ψ_{10} dans la formule associée, il faut effectuer les opérations suivantes : 1° multiplier le coefficient de ψ_{10} dans la formule donnée par $-(2\alpha-2\gamma-\beta-\beta')$; 2° dans la parenthèse, permuter β et β'; 3° changer tous les signes des termes de cette parenthèse.

Remarque II. — Étant données deux aires symétriques par rapport à X, tandis que u parcourt le contour de l'une, le point imaginaire conjugué u_0 parcourt le contour de l'autre. Les deux formules correspondantes se déduiront l'une de l'autre comme il suit : dans le coefficient de chaque terme de l'une, on changera les signes de tous les termes entre parenthèses. Un terme de la forme $e^{i\pi\lambda}\psi_p = (\lambda)\psi_p$ devient ainsi $e^{-i\pi\lambda}\psi_p = (-\lambda)\psi_p$. Les arguments des sinus restent inaltérés.

Cette remarque permet de déduire les Tableaux VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV des précédents.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IV.

25. Si l'on pose

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}$$

et

$$V = v^{\beta+\beta'-\gamma}(v-1)^{\gamma-\alpha-1}(v-x)^{-\beta}(v-y)^{-\beta'},$$

on aura

$$\int_0^{+1} U\,du = \int_{+1}^{\infty} V\,dv, \qquad \int_0^{-\infty} U\,du = \int_0^{-\infty} V\,dv, \qquad \int_{+1}^{\infty} U\,du = \int_0^{1} V\,dv,$$

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = \int_x^{\infty} V\,dv, \qquad \int_0^{\frac{1}{y}} U\,du = \int_y^{\infty} V\,dv,$$

$$\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du = \int_x^{1} V\,dv, \qquad \int_1^{\frac{1}{y}} U\,du = \int_y^{1} V\,dv,$$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du = \int_0^{x} V\,dv, \qquad \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U\,du = \int_0^{y} V\,dv, \qquad \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U\,du = \int_y^{x} V\,dv.$$

Les intégrales des seconds membres sont prises soit le long de segments rectilignes, soit le long d'arcs de circonférences qu'il est aisé de déterminer.

Choisissons les trois intégrales suivantes

$$\omega_1 = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du = \int_0^{x} V\,dv,$$

$$\omega_2 = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U\,du = \int_0^{y} V\,dv,$$

$$\omega_3 = \int_1^{\infty} U\,du = \int_0^{1} V\,dv,$$

et soit

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On peut se demander à quelles conditions x et y, considérées comme fonctions de ξ et de η, seront des fonctions uniformes de ξ et de η.

Soient

$$a = 1 + \beta + \beta' - \gamma, \qquad b = \gamma - \alpha, \qquad \lambda = 1 - \beta, \qquad \mu = 1 - \beta'.$$

M. Picard a démontré (1) que les dix conditions suivantes étaient tout d'abord nécessaires : les dix nombres $a + b - 1$, $a + \lambda - 1$, $a + \mu - 1$, $b + \lambda - 1$, $b + \mu - 1$, $\lambda + \mu - 1$, $2 - b - \lambda - \mu$, $2 - \lambda - \mu - a$, $2 - \mu - a - b$, $2 - a - b - \lambda$ doivent être les inverses d'un nombre entier, positif ou négatif (2).

Nous nous proposons, dans le présent Chapitre, de trouver tous les groupes de quatre nombres, a, b, c, d, tels que l'on ait

$$a + b = 1 + \frac{1}{n_{ab}},$$

$$a + c = 1 + \frac{1}{n_{ac}}, \qquad 2 - (b + c + d) = \frac{1}{n_a},$$

$$a + d = 1 + \frac{1}{n_{ad}}, \qquad 2 - (c + d + a) = \frac{1}{n_b},$$

$$b + c = 1 + \frac{1}{n_{bc}}, \qquad 2 - (d + a + b) = \frac{1}{n_c},$$

$$b + d = 1 + \frac{1}{n_{bd}}, \qquad 2 - (a + b + c) = \frac{1}{n_d},$$

$$c + d = 1 + \frac{1}{n_{cd}},$$

où les n sont des nombres entiers.

Les quatre dernières équations, ajoutées membre à membre nous donnent

$$8 - 3(a + b + c + d) = \frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_d} = \sigma$$

ou

$$a + b + c + d = \frac{8 - \sigma}{3},$$

---

(1) E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 381; année 1885.

(2) E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 148; année 1886-1887.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où je conclus

$$a = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_a},$$

$$b = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_b},$$

$$c = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_c},$$

$$d = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_d}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{n_{ij}} = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{1-2\sigma}{3},$$

i et j désignant deux quelconques des quatre lettres a, b, c, d; si k et l désignent les deux autres, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_l} - \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j} + \frac{3}{n_{ij}} = 1.$$

Donc, en posant $n_a = x$, $n_b = y$, $n_c = z$, $n_d = t$,

$$n_{cd} = u, \qquad n_{bd} = v, \qquad n_{bc} = w, \qquad n_{ad} = p, \qquad n_{ac} = q, \qquad n_{ab} = r,$$

on est ramené à résoudre en nombres entiers le système des six équations qui suivent

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 1,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 1,$$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 1.$$

26. Si l'on considère la première de ces équations, si l'on a simultanément

$$|x| > 10, \quad |y| > 10, \quad |z| > 5, \quad |t| > 5, \quad |u| > 15,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

j'en déduis

$$\left|\frac{2}{x}\right|<\frac{1}{5},\quad \left|\frac{2}{y}\right|<\frac{1}{5},\quad \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{5},\quad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{1}{5},\quad \left|\frac{3}{u}\right|<\frac{1}{5};$$

donc

$$\left|\frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}\right|<1,$$

et, par suite, pas de solution possible dans de telles conditions.

Comme x, y, z et t jouent le même rôle, je vais d'abord donner à x des valeurs entières appartenant à l'intervalle $(-10, +10)$.

Je donnerai ensuite à u, v, w, p, q, r des valeurs entières appartenant à l'intervalle $(-15, +15)$.

27. Nous ferons d'abord $x=2$. Les six équations précédentes deviennent

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=0,\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=0,\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=0,\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{3}{2}.$$

Si l'on a simultanément

$$|y|>\tfrac{16}{3},\quad |z|>\tfrac{16}{3},\quad |t|>\tfrac{8}{3},\quad |p|>8,$$

ou

$$|y|>5,\quad |z|>5,\quad |t|>2,\quad |p|>8,$$

il est impossible de satisfaire à la première équation du deuxième groupe.

Comme dans les équations du deuxième groupe, y, z et t jouent le même rôle, je donnerai à y des valeurs entières comprises dans l'intervalle $(-5, +5)$. Ensuite je donnerai à p, q, r des valeurs entières appartenant à l'intervalle $(-8, +8)$.

28. Soit $y=-2$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=1,\qquad \frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{5}{2},$$

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}-\frac{3}{v}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=1,$$

$$\frac{1}{z}-\frac{2}{t}-\frac{3}{w}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{5}{2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Je considère en particulier l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{2}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{5}{6}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{5}{6}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{5}{6}$$

ou bien

$$|z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |p| > 3,$$

il n'y a pas de solutions.

29. Soient $t = 1$, $\frac{2}{z} + \frac{3}{p} = \frac{7}{2}$, $z = \frac{4p}{7p-6}$.

Soient $7p - 6 = p'$, $z = \frac{4}{7} + \frac{24}{7p'}$. On doit donc avoir

$$4 + \frac{24}{p'} \equiv 0 \pmod 7,$$

p' étant un diviseur de 24.

Donc

$$p' = 1, 8, \qquad p = 1, 2, \qquad z = 4, 1;$$

mais, pour $t = 1$, $\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{z}$ élimine $z = 4$.

Reste la solution $t = z = 1$, qui convient.

Soient donc $x = 2$, $y = -2$, $z = t = 1$. On a

$$\sigma = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2, \qquad \frac{2-\sigma}{3} = 0, \qquad a = b = 1, \qquad c = \frac{1}{2}, \qquad d = -\frac{1}{2}.$$

Nous avons ainsi une première solution. Elle est comprise dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard.

30. Soient $t = -1$, $\frac{2}{z} + \frac{3}{p} = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4p}{3(p-2)}$.

Posons $p - 2 = p'$, $z = \frac{4}{3} + \frac{8}{3p'}$. On a

$$4 + \frac{8}{p'} \equiv 0 \pmod 3,$$

d'où

$$p' = -8, -2, 1, 4,$$

$$p = -6, 3, 6, 2,$$

$$z = 1, 4, 2, \infty.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La formule $v = -\frac{3z+4}{2z}$ élimine $z = 1, 4, 2$.

D'ailleurs l'équation $\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{2}$ élimine $t = -1$, $z = \infty$.

31. Soient maintenant $z = -2$, $p = \frac{6t}{7t+2}$; soit $7t + 2 = t'$,

$$p = \frac{6}{7} - \frac{12}{7t'}, \qquad 6 - \frac{12}{t'} \equiv 0 \pmod 7,$$

$$t' = -12, \qquad t = -2,$$

$x = 2$, $y = z = t = -2$ est une solution.

1re *solution* : $x = 2$, $y = z = t = -2$; $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$.

32. Soit $z = -1$, on a

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = \frac{9}{2}.$$

Or on a

$$\left|\frac{3}{p} - \frac{1}{t}\right| \leq 4;$$

donc, pas de solutions.

33. Soit $z = +1$, on a

$$p = \frac{6t}{t+2}, \qquad t + 2 = t', \qquad p = 6 - \frac{12}{t'},$$

$$t' = -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty,$$
$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 2, 4, 10, \infty, -2.$$

D'ailleurs la formule $q = \frac{6t}{7t-4}$ élimine

$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 2, 10, \infty, -2.$$

Reste

$$t = 1, 4;$$

$t = 1$ a déjà été essayé (29).

$\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{t}$ élimine $t = 4$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

34. Soit $z = +2$, on a

$$p = \frac{6t}{3t+2}, \qquad 3t+2 = t', \qquad p = 2 - \frac{4}{t'}.$$

$$t' = -4, -2, -1, 1, 2, 4, \infty,$$
$$3t = -6, -4, -3, -1, 2, \infty,$$

$$t = -2, -1, \infty.$$

La formule $c = \frac{6t}{2-3t}$ élimine $t = -2, -1$.

$x = 2$, $y = -2$, $z = 2$, $t = \infty$ est une solution.

2e *solution* : $x = y = 2$, $z = -2$, $t = \infty$, $a = b = 1$, $c = 0$, $d = \frac{1}{2}$.

35. Revenons au n° 28. Soit $|p| \leqq 3$. On peut supposer

$$|z| > 2, \qquad |t| > 2, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

On doit donc avoir $\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{p}\right| \leqq 1$;

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{p} \leqq 1 \quad \text{donne} \quad p \leqq 2,$$

en supposant $p > 0$. Or

$$\frac{3}{p} - \frac{5}{2} \leqq 1 \quad \text{donne} \quad p > 0,$$

donc

$$p = 1, 2,$$

$p = 1$:

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{1}{2}, \qquad t = \frac{2z}{z+4}; \qquad z+4 = z' \qquad t = 2 - \frac{8}{z'},$$

$$z' = -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, \infty,$$

$$z = -12, -8, -6, -5, -3, -2, 4, \infty, -4,$$
$$t = \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 10, -6, -2, 1, 2, \infty.$$

J'écarte les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 2$, $|t| > 2$.

La formule $u = \frac{2z}{z+2}$ élimine $z = -12, -8, -5$. Reste

$$z = -6, -3, -4.$$
$$t = \quad 6, -6, \quad \infty.$$

$2r + z = 0$ élimine $z = -3$; $q = \frac{2z}{z-2}$ élimine $z = -6, -4$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

36. $p = 2$:

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad z = \frac{2t}{t+1}, \qquad t+1 = t', \qquad z = 2 - \frac{2}{t'},$$

$$t' = -2, -1, 1, 2, \infty,$$
$$t = -3, -2, 1, \infty, -1,$$
$$z = 3, \quad 2.$$

La seule solution à essayer est $t = -3$; $z = 3$ or elle donne $q = \frac{6}{7}$.

37. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = -1$.
Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 2, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{7}{2},$$
$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = 1, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = 1, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{7}{2}.$$

Prenons la dernière de ces équations. Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{t}\right| < \frac{7}{6}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{7}{6}, \qquad \left|\frac{3}{q}\right| < \frac{7}{6}, \qquad \text{ou bien} \qquad |t| > 1, \qquad |z| > 0, \qquad |q| > 2,$$

il n'y a pas de solutions.

38. Soit donc $t = -1$; $\frac{3}{q} - \frac{1}{z} = \frac{11}{2}$ n'admet pas de solutions.

39. Soit $t = +1$,

$$\frac{3}{q} - \frac{1}{z} = \frac{3}{2}, \qquad z = \frac{2q}{3(2-q)},$$
$$2 - q = q', \qquad z = \frac{4}{3q'} - \frac{2}{3}, \qquad \frac{4}{q'} - 2 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$q' = -4, -1,$$
$$q = 6, \quad 3, \quad 2,$$
$$z = -1, -2, \infty.$$

$u = \frac{3z}{3z+1}$ élimine $z = -1, -2$; reste la solution $t = 1$, $z = \infty$ qui donne $w = -\frac{5}{6}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

40. On peut maintenant supposer

$$|z|>1, \quad |t|>1, \quad \max\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{2}, \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{7}{2}-\frac{3}{q}\right|\leq\frac{3}{2};$$

$$\frac{7}{2}-\frac{3}{q}\leq\frac{3}{2} \quad \text{donne} \quad q\leq 1,$$

$$\frac{3}{q}-\frac{7}{2}\leq\frac{3}{2} \quad \text{donne} \quad q>0,$$

donc

$$q=1,$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}, \qquad z=\frac{2t}{4-t}, \qquad 4-t=t', \qquad z=\frac{8}{t'}-2,$$

$$t'=-8,-4,-2,-1,1,2,4,8,\infty,$$

$$t=12,\ 8,\ 6,\ 5,3,2,-4,\ \infty,\ 4,$$
$$z=-3,-4,-6,-10,6,2,-1,-2,\infty.$$

J'écarte immédiatement la solution

$$\begin{matrix} t=-4 \\ z=-1 \end{matrix} \qquad \text{où} \qquad |z|=1.$$

$u=\frac{2t}{t+2}$ élimine $t=12, 8, 6, 5, 3, 4$; reste

$$t=2,\ \infty,$$
$$z=2,\ -2.$$

$t=\infty$, $z=-2$ donnent $p=\frac{2}{3}$; $x=2$, $y=-1$, $z=t=2$ donnent une solution,

$$a=b=c=1, \qquad d=-\tfrac{1}{2};$$

mais cette solution rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard.

41. Reportons-nous au n° 27, et faisons $y=1$.

Le système à résoudre est le suivant

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}-\frac{3}{u}=2, \qquad \frac{1}{t}-\frac{2}{z}-\frac{3}{p}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=1, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{5}{2},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=1, \qquad \frac{1}{z}-\frac{2}{t}-\frac{3}{q}=\frac{1}{2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Considérons la première de ces équations. Pour

$$\left|\frac{1}{z}\right|<\frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{3}{u}\right|<\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad |z|>1, \qquad |t|>1, \qquad |u|>4,$$

il n'y aura pas de solutions.

42. Soit $z=-1$, on a

$$t=\frac{u}{3u+3}, \qquad 3u+3=u', \qquad t=\frac{1}{3}-\frac{3}{3u'}; \qquad 1-\frac{3}{u'}\equiv 0 \pmod 3.$$

$\left.\begin{matrix} u=-1 \\ t=\infty \end{matrix}\right\}$ est la seule solution; elle donne

$$p=-\tfrac{6}{5}.$$

43. $z=+1$, on a

$$t=\frac{u}{u+3}, \qquad u+3=u', \qquad t=1-\frac{3}{u'},$$

$$u'=-3, -1, 1, 3,$$

$$u=-6, -4, -2, \infty, -3,$$
$$t=\ \ 2, \ \ 4, -2, \ 1, \infty.$$

$p=\frac{6t}{2-5t}$ élimine $t=2, 4, \infty$.

$t=-2$ donne une solution qui rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard.

3e *solution* : $x=2$, $t=y=z=1$, $a=b=c=\frac{1}{2}$, $d=0$.

44. Revenons au n° 41. On peut supposer

$$|z|>1, \qquad |t|>1, \qquad \max\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1,$$

d'où

$$\left|\frac{3}{u}+2\right|\leq 1,$$

$-\frac{3}{u}-2\leq 1$ donne

$$\frac{1}{u}\geq -1,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\frac{3}{u} + 2 \leqq 1$ donne

$$\frac{1}{u} \leqq -\frac{1}{3},$$

d'où

$$u = -1, -2, -3.$$

Soit $u = -3$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1 \qquad z = \frac{t}{t-1},$$

$$t = 2, \infty, 1,$$
$$z = 2, 1, \infty.$$

$t = \infty$, $z = 1$ donnent

$$w = \tfrac{3}{2}.$$

4e *solution* : $x = y = z = 2$, $t = 1$, $a = b = c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{5}{6}$.

45. Soit $u = -2$,

$$z = \frac{2t}{t-2},$$

$$t = -2, \quad 1, 3, 4, 6, \infty, 2,$$
$$z = \quad 1, -2, 6, 4, 3, 2, \infty.$$

Nous écartons les solutions où l'on n'a pas $|z| > 1$, $|t| > 1$.

5e *solution* : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 6$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$.
6e *solution* : $x = y = 4$, $z = 1$, $t = 2$, $a = b = \frac{1}{4}$, $c = 1$, $d = \frac{1}{2}$.
7e *solution* : $x = y = 2$, $z = 1$, $t = \infty$, $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $d = 0$.

46. $u = -1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -1,$$

$$t = -2, \quad \infty, -1,$$
$$z = -2, -1, \quad \infty.$$

$t = z = -2$ donne

$$r = \tfrac{2}{3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

47. Reportons-nous au n° 27.

Soit $y = 2$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = 1, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 2,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{1}{2}.$$

Prenons l'équation $\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 2$.

Si l'on a

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{2}{3}, \qquad \text{ou} \qquad |z| > 3, \qquad t| > 3, \qquad |r| > 4,$$

il n'y a pas de solutions.

48. Soit $z = 3$,

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3},$$

$$t = -12, 6, 2.$$

8e *solution :*	$x = y = 2$,	$z = 3$,	$t = -12$,	$a = b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{1}{6}$.
9e *solution :*	$x = y = 2$,	$z = 3$,	$t = 6$,	$a = b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{3}$.
10e *solution :*	$x = y = z = 2$,		$t = 3$,	$a = b = c = \frac{5}{9}$, $d = \frac{7}{18}$.

49. $z = 2$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$r = -3, \quad 1, \quad 2, 4, 5, 6, 9, \infty, 3,$$
$$t = \quad 1, -1, -4, 8, 5, 4, 3, 2, \infty;$$

les valeurs $t = 1, -1$ sont écartées, puisqu'on a déjà fait $y = 1, y = -1$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

11e *solution :*	$x=y=z=2,$	$t=-4,$	$a=b=c=\frac{3}{4},$	$d=0.$
12e *solution :*	$x=y=z=2,$	$t=8,$	$a=b=c=\frac{5}{8},$	$d=\frac{1}{4}.$
13e *solution :*	$x=y=z=2,$	$t=5,$	$a=b=c=\frac{3}{5},$	$d=\frac{3}{10}.$
14e *solution :*	$x=y=z=2,$	$t=4,$	$a=b=c=\frac{7}{12},$	$d=\frac{1}{3}.$

15e *solution :*	$x=y=z=2,$	$t=3,$	$a=b=c=\frac{5}{9},$	$d=\frac{7}{18}.$
16e *solution :*	$x=y=z=t=2,$		$a=b=c=d=\frac{1}{2}.$	
17e *solution :*	$x=y=z=2,$	$t=\infty,$	$a=b=c=\frac{2}{3},$	$d=\frac{1}{6}.$

50. Il est inutile de faire $z=1, -1, -2$, puisque nous avons déjà donné ces valeurs à y.

Soit $z=-3$, on a

$$\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{8}{3},$$

$$r=1,$$
$$t=-6.$$

18e *solution :*	$x=y=2,$	$z=-3,$	$t=-6,$	$a=b=1,$	$c=\frac{1}{6},$ $d=\frac{1}{3}.$

51. Revenons au n° 47. On peut supposer

$$|z|>3, \qquad |t|>3, \qquad \max\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1,$$

d'où

$$\left|2-\frac{3}{r}\right|\leq 1.$$

$2-\frac{3}{r}\leq 1$ donne

$$\frac{3}{r}\geq 1 \qquad \text{donc} \qquad r>0 \quad \text{et} \quad r\leq 3,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\frac{3}{r} - 2 \leq 1$ donne

$$r \geq 1 \qquad \text{donc} \qquad r = 1, 2, 3.$$

$r = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$t = -6, -4, -3, -1, \quad 2, \quad \infty, -2,$$
$$z = -3, -4, -6, \quad 2, -1, -2, \quad \infty.$$

Si nous écartons les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 3, |t| > 3$, reste

$$t = z = -4.$$

19e *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = -4, \quad a = b = 1, \quad c = d = \frac{1}{4}.$

52. $r = 2$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} = \frac{1}{2},$$

$$t = -12, -4, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, 8, 12, 20, \infty, \quad 4,$$
$$z = \quad 3, \quad 2, -4, -12, 20, 12, 8, \quad 6, \quad 5, \quad 4, \infty.$$

20e *solution :* $x = y = 2, \quad z = 5, \quad t = 20, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{9}{20}, \quad d = \frac{3}{10}.$
21e *solution :* $x = y = 2, \quad z = 6, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{5}{12}, \quad d = \frac{1}{3}.$
22e *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = 8, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = d = \frac{3}{8}.$
23e *solution :* $x = y = 2, \quad z = 4, \quad t = \infty, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{4},$

53. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$t = -2, \quad 1, 3, 4, 6, \infty, \quad 2,$$
$$z = \quad 1, -2, 6, 4, 3, \quad 2, \infty.$$

24e *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = 4, \quad b = b = \frac{2}{3}, \quad c = d = \frac{5}{12}.$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

54. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = -3$.
Les équations à résoudre sont

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{13}{6},$$

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6},$$

$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{13}{6}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{13}{6}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{13}{18}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{13}{18}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{13}{18},$$

ou bien

$$|z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |p| > 4,$$

il n'y a pas de solutions; or on peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Donc

$$\left|\frac{13}{6} - \frac{2}{p}\right| \leq 1, \qquad \text{d'où} \qquad p = 1, \ 2.$$

55. Soit $p = 1$, on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{5}{6},$$

$$z = -6, \ -4, \ -3, \ -2, \ 12,$$
$$t = \ 2, \ \ 3, \ \ 6, \ -6, \ \ 1.$$

$z = -4$, $t = 3$ donne

$$w = -\tfrac{12}{5}.$$

25e *solution* : $x = y = -3$, $z = 2$, $t = 6$, $a = b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{7}{6}$, $d = \frac{5}{6}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

56. Soit $p = 2$,

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} z &= -6, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 12, \quad 3, \\ t &= \quad 1, \quad -3, \quad 6, \quad 3, \quad 2, \quad \infty. \end{aligned}$$

$q = \dfrac{6z}{7z-6}$ élimine $z = 4,\ 3$; reste

$$\begin{aligned} z &= 6, \\ t &= 3, \end{aligned}$$

qui donne

$$u = \tfrac{18}{7}.$$

57. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = 3$, on a

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{11}{6},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{6}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{11}{6}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{11}{18}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{11}{18}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{11}{18},$$

ou bien

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 4,$$

il n'y a pas de solutions. Or on peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2.$$

58. Soit $z = 3$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6}.$$

Pour $|t| > 3$, $|r| > 5$, il n'y a pas de solutions; soit $t = 3$ (alors $r = 6$), on trouve ensuite

$$t = -6, \ 12.$$

$x = y = z = 3$, $t = 2$ est une solution.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

26e *solution :*	$x=y=z=3,$	$t=2,$	$a=b=c=\frac{1}{2},$	$d=\frac{2}{3}.$
27e *solution :*	$x=y=3,$	$z=2,$	$t=-6,$	$a=b=\frac{2}{3},$	$c=\frac{5}{6},$	$d=\frac{1}{6}.$
28e *solution :*	$x=y=3,$	$z=2,$	$t=12,$	$a=b=\frac{7}{12},$	$c=\frac{3}{4},$	$d=\frac{1}{3}.$

59. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{11}{6}-\frac{3}{r}\right|\leq 1,$$

ce qui donne

$$r=2,\ 3,$$

soit $r=2$,

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6},$$

$t=-30,\ -12,\ -6,\ -3,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 24,$
$z=\ \ 5,\ \ \ 4,\ \ \mathbf{3},\ \ \mathbf{2},\ \mathbf{-3},\ \mathbf{-6},\ \mathbf{-12},\ \mathbf{-30},\ 42,\ 24,\ 18,\ 15,\ 12,\ \mathbf{10},\ \ 9,\ \ 8,$

$$t=42,\ \infty,\ 6,$$
$$z=\ \ 7,\ \ 6,\ \infty.$$

$p=\frac{6t}{t+6}$ élimine $t=-30,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$; reste

$$t=-12,\ 12,\ \infty,$$
$$z=\ \ \ 4,\ 12,\ 6.$$

$q=\frac{6z}{z+6}$ élimine $z=4$.

29e *solution :*	$x=2,$	$y=3,$	$z=12,$	$t=+12,$	$a=b=\frac{5}{12},$	$c=\frac{5}{6},$	$d=\frac{2}{3}.$
30e *solution :*	$x=2,$	$y=3,$	$z=6,$	$t=\infty,$	$a=\frac{5}{6},$	$b=\frac{2}{3},$	$c=\frac{1}{2},$	$d=\frac{1}{3}.$

60. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12},$$

pour $|z|>4,\ |t|>4$, pas de solutions,

$$t=\ 3,\ 4,$$
$$z=12,\ 6.$$

la première solution a déjà été trouvée (58).

L.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

31e *solution* : $x=2,\ y=3,\ z=4,\ t=6,\ a=\frac{3}{4},\ b=\frac{7}{12},\ c=\frac{1}{2},\ d=\frac{5}{12}$.

61. Reportons-nous maintenant au n° 27 et soit $y=-4$. Le système à résoudre est

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=2,$$

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}-\frac{3}{v}=\frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{1}{z}-\frac{2}{t}-\frac{3}{w}=\frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=2.$$

L'équation $\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=2$ n'aura pas de solution si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right|<\frac{2}{3}, \quad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{2}{3}, \quad \left|\frac{3}{p}\right|<\frac{2}{3},$$

ou

$$|z|>3, \quad |t|>1, \quad |p|>4.$$

Or on peut supposer

$$|z|>3, \quad |t|>3;$$

donc

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4};$$

ceci donne la condition

$$\left|2-\frac{3}{p}\right|\leq\frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad p=2.$$

62. Soit donc $p=2$,

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2},$$

$$z=\ 12,\ \ 8,\ \ 6,\ \ 5,\ 3,\ 2,\ -4,\ \infty,\ 4,$$
$$t=-\ 3,\ -4,\ -6,\ -10,\ 6,\ 2,\ -1,\ -2,\ \infty,$$

$r=\frac{4z}{3z-8}$ élimine $z=6,5$; $q=\frac{z-1}{z}$ élimine $z=8,4$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

63. Revenons au n° 27 et soit $y = 4$. Le système à résoudre est

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{4},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 1.$$

L'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{4}$$

n'aura pas de solutions si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{7}{12}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{7}{12}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{7}{12},$$

ou bien

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 5.$$

On peut supposer

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = 1.$$

Donc

$$\left|\frac{7}{4} - \frac{3}{r}\right| \leq 1, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2, 3, 4.$$

64. Soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{8},$$

$z = -56, -24, -8, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 16, 24, 40, 72, \infty, 8,$
$t = 7, 6, 4, -8, -24, -56, 72, 40, 24, 16, 12, 10, 9, 8, \infty.$

$p = \frac{4t}{t+4}$ élimine $t = 7, 6, 72, 40, 24, 16, 8$. Reste

$$z = -8,$$
$$t = 4.$$

32e *solution* : $x = y = 4, \quad z = 2, \quad t = -8, \quad a = b = \frac{5}{8}, \quad c = \frac{7}{8}, \quad d = \frac{1}{4}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

65. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$, il n'y a pas de solutions.

$$t = 4,$$
$$z = 8$$

donne

$$q = \tfrac{2}{3}\tfrac{4}{5}.$$

66. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2};$$

$$z = -2, \quad 1, \ 3, \ 4, \ 6, \ \infty, \ 2,$$
$$t = \ 1, \ -2, \ 6, \ 4, \ 3, \ 2, \ \infty.$$

33e *solution* : $x = y = z = 4$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{4}$

67. Revenons au n° 27, soit $y = -5$.

On a à résoudre le système suivant :

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{19}{10},$$
$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{13}{10},$$
$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{19}{10}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{19}{10}.$$

Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{19}{30}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{19}{30}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{19}{30} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 3, \quad |t| > 1, \quad |p| > 4.$$

Or on peut supposer $|z| > 4$, $|t| > 4$; donc

$$\max.\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{19}{10} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{3}{5};$$

d'où

$$p = 2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

68. $p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5};$$

$$\begin{aligned} z &= \quad 30, \quad 10, \quad 6, \quad 4, \quad -20, \quad 5, \\ t &= -\,3, \; -\,5, \; -15, \; 10, \; -\,2, \; \infty. \end{aligned}$$

$r = \dfrac{10z}{7z - 20}$ élimine $z = 6, 5$. Reste

$$\begin{aligned} z &= \quad 10, \\ t &= -\,5, \end{aligned}$$

qui donne

$$q = \tfrac{5}{4}.$$

69. Revenons au n° 27, soit $y = 5$. Le système à résoudre est

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{11}{10},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{17}{10},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{11}{10}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{17}{10}.$$

Elle n'aura pas de solutions, si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{17}{30}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{17}{30}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{17}{30} \qquad \text{ou bien} \qquad |z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 5.$$

Or on peut supposer $|z| > 4$, $|t| > 4$, donc

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{17}{10} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5};$$

donc

$$r = 2, \; 3.$$

70. Soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned} z &= -90, \; -40, \; -15, \; -10, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 9, \quad 11, \; 12, \; 14, \; 15, \; 20, \; 30, \; 35, \; 60, \; 110, \\ t &= \quad 9, \quad 8, \quad 6, \quad 5, \; -10, \; -15, \; -40, \; -90, \; 110, \; 60, \; 35, \; 30, \; 20, \; 15, \; 14, \; 12, \; 11, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \infty, \; 10, \\ t &= 10, \; \infty. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$p = \frac{10t}{3t+10}$ élimine $t = 9, 8, 6, 110, 60, 35, 20, 10$. Reste

$$z = -10,\ 15,$$
$$t = \quad 5,\ 30.$$

$q = \frac{10z}{3z+10}$ élimine $z = 15$.

34e *solution* : $x = y = 5$, $z = 2$, $t = -10$, $a = b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{9}{10}$, $d = \frac{3}{10}$

71. Soit $r = 3$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{20}.$$

Pour $|z| > 5$, $|t| > 5$, il n'y a pas de solutions; or $z = 5$ donne

$$t = \frac{20}{3}.$$

72. Revenons au n° 27. On peut supposer $|y| > 5$, $|z| > 5$, $|t| > 5$. Donc

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{5}{6};$$

donc

$$p = 2,\ 3,\ 4.$$

De même,

$$q = 2,\ 3,\ 4, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

D'ailleurs, en ajoutant les équations du second groupe, on trouve

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2};$$

de là on tire

$$y = \frac{6pqr}{3pqr + 2pq - 4r(p+q)},$$
$$z = \frac{6pqr}{3pqr + 2pr - 4q(p+r)},$$
$$t = \frac{6pqr}{3pqr + 2rq - 4p(q+r)};$$

puis

$$u = \frac{3pqr}{r(p+q) - 2pq}, \qquad v = \frac{3pqr}{q(p+r) - 2pr}, \qquad w = \frac{3pqr}{p(q+r) - 2qr}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

73. Soit $p = q = 2$, $r = 2, 3, 4$.

35e *solution* : $x = y = z = \infty$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = 1$
36e *solution* : $x = y = 9$, $t = 2$, $z = -18$, $a = b = \frac{5}{9}$, $c = \frac{17}{18}$, $d = \frac{7}{18}$
37e *solution* : $x = y = 6$, $t = 2$, $z = -12$, $a = b = \frac{7}{12}$, $c = \frac{11}{12}$, $d = \frac{1}{3}$

74. $p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4$; $w = \frac{9r}{3 - 2r}$ élimine $r = 4$; $p = 2$, $q = r = 3$ donnent

$$t = \tfrac{9}{2}.$$

75. $p = 2$, $q = r = 4$ donne

$$x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = t = 12,$$

solution déjà trouvée (n° 59).

76. $p = q = 3$, $r = 3, 4$; $p = q = 3$, $r = 4$ donne

$$z = t = \tfrac{9}{2}.$$

38e *solution* : $x = y = z = 6$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{5}{6}$

77. $p = 3$, $q = r = 4$ donne

$$t = \tfrac{18}{5}.$$

78. $p = q = r = 4$ donne la 33e solution.

79. Revenons aux nos 26 et 25, et faisons $x = -1$.
On a à résoudre le système suivant :

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 3, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 0,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 3, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 0,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 3, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La première équation n'aura pas de solutions, si l'on suppose simultanément

$$\left|\frac{2}{y}\right|<\frac{3}{4},\quad \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{3}{4},\quad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{3}{4},\quad \left|\frac{3}{u}\right|<\frac{3}{4}$$

ou

$$|y|>2,\quad |z|>1,\quad |t|>1,\quad |u|>4.$$

Remarquons que nous avons trouvé *toutes* les solutions où l'un des nombres x, y, z, t est égal à 2. Nous essayerons donc $y=-2, -1, +1$.

80. Soit $y=1$. Le système à résoudre devient

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=1,\qquad \frac{1}{t}-\frac{2}{z}-\frac{3}{p}=2,$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=4,\qquad \frac{1}{z}-\frac{2}{t}-\frac{3}{q}=2,$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=4,\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=1.$$

L'équation $\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=4$ n'aura pas de solutions si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right|<\frac{4}{3},\qquad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{4}{3},\qquad \left|\frac{3}{v}\right|<\frac{4}{3}\qquad \text{ou}\qquad |z|>1,\qquad |v|>2.$$

81. $z=-1$ donne

$$\frac{3}{v}-\frac{1}{t}=6,$$

qui n'a pas de solutions, car

$$\text{max.}\left(\frac{3}{v}-\frac{1}{t}\right)=4.$$

82. $z=+1$ donne

$$\frac{3}{v}-\frac{1}{t}=2,\qquad t=-2,-1,1.$$

$w=\frac{3t}{5t-2}$ élimine $-2, -1$.

$x=y=z=1$, $t=-1$ donne

$$a=b=c=1,\qquad d=-1;$$

cette solution rentre dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard (86).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

83. Revenons au n° 80; on peut supposer

$$|z|>1, \qquad |t|>1, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{2}.$$

Donc

$$\left|4-\frac{3}{v}\right|\leq\frac{3}{2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad v=1.$$

$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=1$. On a

$$t=-3,\ -2,\ 1,\ \infty,\ -1,$$
$$z=\ \ 3,\ \ 4,\ 1,\ 2,\ \infty.$$

$w=\frac{z}{2z-1}$ élimine 3, 4, ∞.

84. Revenons au n° 79 et faisons $y=-1$. Le système à résoudre est

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=5, \qquad \frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\ \ 2,$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=2, \qquad \frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\ \ 2,$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=2, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=-1.$$

Or, si nous considérons la première équation, le maximum du premier membre est précisément 5; il est atteint pour $z=t=-1$. La solution ainsi trouvée ($a=b=c=d=1$) rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (86).

85. Revenons au n° 79, et faisons $y=-2$.

La première équation devient $\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=4$. Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right|<\frac{4}{3}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{4}{3}, \qquad |t|<\frac{4}{3}, \qquad \text{ou} \qquad |u|>2.$$

Comme on a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1,$$

on en conclut

$$\left|\frac{3}{u}-4\right|\leq 1, \qquad u=1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-1$. On a

$$z=-2,\ \infty,\ -1,$$
$$t=-2,\ -1,\ \infty.$$

La solution ainsi trouvée $x=y=z=-2$; $t=-1$ rentre toujours dans la même solution générale que nous allons trouver à l'instant (86).

86. Revenons au n° 79; on suppose $|y|>2$, $|z|>2$, $|t|>2$. Donc

$$\text{max.}\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{3},\qquad \text{d'où}\qquad \left|\left(3-\frac{3}{u}\right)\right|\leq\frac{4}{3},$$

donc

$$u=1,\qquad \text{et, de même,}\qquad v=w=1.$$

Donc

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$
$$\frac{2}{z}=\frac{1}{t}+\frac{1}{y},$$
$$\frac{2}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

donc

$$\frac{3}{y}=\frac{3}{z}=\frac{3}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

ainsi

$$y=z=t=n$$

(n étant un entier quelconque positif ou négatif).

39e *solution* : $x=y=z=-n$, $t=-1$, $a=b=c=1$, $d=\frac{1}{n}$,
n étant un nombre entier arbitraire, positif ou négatif.

87. Revenons au n° 26 et faisons $x=-5$. Le système à résoudre sera

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{4}{5},$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{4}{5},$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{4}{5}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La première équation n'aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{y}\right| < \frac{7}{20}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{7}{20}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{7}{20}, \qquad \left|\frac{3}{u}\right| < \frac{7}{20},$$

ou bien

$$|y| > 5, \qquad |z| > 2, \qquad |t| > 2, \qquad |u| > 8.$$

Nous allons faire varier y dans l'intervalle $(-5, +5)$, en omettant les valeurs $y = 2, -1$, qui ne pourraient donner que des solutions déjà trouvées.

88. Soit $y = 1$; $\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{12}{5}$ n'aura pas de solutions si l'on suppose

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{4}{5} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 2, \qquad |t| > 1, \qquad |v| > 3,$$

$t = 1$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{17}{5}, \qquad z = 5.$$

La solution correspondante ($a = b = 1$, $c = \frac{1}{5}$, $d = -\frac{1}{5}$) rentre dans une solution plus générale (146).

89. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{17}{5},$$

qui n'a pas de solutions.

90. $z = 1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{w} = \frac{17}{5},$$

dont la seule solution est $t = 5$ (déjà trouvée).

91. On peut supposer $|z| > 2$, $|t| > 2$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{12}{5} - \frac{3}{v}\right| \leq 1,$$

d'où

$$v = 1, 2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{3}{5},$$

$$z = -20, -5, -4, -3, 5,$$
$$t = \quad 2, \quad 5, \quad 10, -15, 1.$$

$w = \frac{5z}{2z-5}$ élimine $z = -5, -4, -3$.

92. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{10};$$

or on trouve

$$p = -\frac{7}{10}.$$

93. Revenons au n° 87 et faisons $y = -2$. On a d'abord

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{12}{5},$$

équation qui n'a pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{5} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad |u| > 3.$$

D'ailleurs on a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{12}{5}\right| \leq 1, \qquad u = 1, 2.$$

94. $u = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{5};$$

$$t = 2, 10,$$
$$z = 10, \ 2$$

ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

95. $u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{9}{10};$$

$$t = -1, \quad 10,$$
$$z = \quad 10, -1$$

ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

96. Revenons au n° 87, et soit $y = -3$. La première équation devient

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{31}{15};$$

elle n'admettra pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{31}{45}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{31}{45}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{31}{45}, \qquad \text{ou} \qquad |u| > 4, \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1.$$

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{31}{15} - \frac{3}{u}\right| \leq \frac{2}{3};$$

cette inégalité ne peut être vérifiée.

97. Revenons au n° 87 et soit $y = 3$. La deuxième équation donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{26}{15},$$

laquelle n'aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{26}{45}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{26}{45}, \qquad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{26}{45} \qquad \text{ou bien} \qquad |z| > 3, \qquad |t| > 1, \qquad |v| > 5.$$

98. Soit $z = 3$, l'équation devient

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{16}{15}.$$

$t = -15$ est la seule solution; elle donne

$$v = \frac{15}{11}.$$

99. Soit $|z| > 3$, $|t| > 3$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{26}{15} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4},$$

d'où

$$v = 1, 2, 3.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{19}{15};$$

pour $|z| > 3$, $|t| > 1$ pas de solutions. Or, $z = 3$ donne

$$t = \frac{15}{29}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

100. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{7}{30};$$

on en déduit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6},$$

qui est plus simple à résoudre; elle donne

$$z = -42, -24, -18, -15, -12, -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, 3, 6, 12, 30, -6;$$

j'en conclus

$$z = 6, \quad 12, \quad 30,$$
$$t = 10, -15, -6,$$

comme solutions communes.

D'ailleurs $w = \frac{15z}{11z - 15}$ élimine $z = 6$, 12 et 30.

101. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{11}{15},$$

qui admet pour solution $z = 3$, $t = -15$; mais, pour $z = 3$, $t = -15$, on a

$$w = \frac{15}{11}.$$

102. Revenons au n° 87 et soit $y = -4$. La première équation donne

$$\frac{3}{u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{19}{10};$$

il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$|u| > 4, \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1.$$

Comme on peut supposer $|z| > 3$, $|t| > 3$, on a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{19}{10}\right| \leq \frac{1}{2},$$

d'où

$$u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{5},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$t = -15, -5, -3, -2, \quad 10,$$
$$z = -3, -5, -15, \quad 10, -2,$$

et $t = z = -5$ donne

$$v = \tfrac{20}{9}.$$

103. Revenons au n° 87, et faisons $y = +4$. La seconde équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{33}{20}.$$

Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$|z| > 3, \qquad |t| > 1, \qquad |v| > 5.$$

D'ailleurs

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4},$$

donc

$$\left|\frac{33}{20} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4},$$

donc

$$v = 2, 3.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{20},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{13}{20}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{19}{20},$$

dont les solutions sont

$$u = \quad 1, -20,$$
$$w = -20, \quad 1,$$

donc, pas de solutions.

104. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{13}{20}, \qquad \text{d'où} \qquad p = -\frac{60}{7}.$$

105. Revenons au n° 87, et soit $y = -5$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{5},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui, pour $|u|>5$, $|z|>1$, $|t|>1$, n'aura pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{9}{5}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{2}{5},$$

et, par suite, $u=2$, qui donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{3}{10}, \qquad \text{d'où} \qquad r=\frac{5}{2}.$$

106. Revenons au n° 87 et soit $y=+5$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{8}{5},$$

qui n'aura pas de solutions si l'on a simultanément $|z|>3$, $|t|>1$, $|v|>5$; on a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{v}-\frac{8}{5}\right|\leq\frac{3}{5},$$

et, par suite,

$$v=2,\ 3.$$

$v=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{z}+\frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{9}{10},$$

$$w=\quad 1,\ -10,$$
$$u=-10,\quad 1;$$

donc pas de solutions.

107. $v=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{z}+\frac{2}{15}, \qquad \frac{1}{w}+\frac{1}{z}=\frac{14}{15}, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{16}{15},$$

$$u=\ 1, \qquad u=15,$$
$$w=15, \qquad w=\ 1.$$

On trouve

$$z=-15, \qquad t=-\tfrac{15}{11};$$

donc pas de solution.

108. Revenons au n° 87. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{5}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{2}{3},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donc

$$u = 2, 3, 4, \qquad v = 2, 3, 4, \qquad w = 2, 3, 4.$$

D'ailleurs, en ajoutant les trois premières équations membre à membre, on trouve

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{5};$$

donc pas de solutions.

109. Revenons au n° 26 et faisons $x = -4$. Le système à résoudre est le suivant

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{3}{4}.$$

Si l'on a simultanément $|y| > 5$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|u| > 8$, pas de solutions.

Faisons d'abord varier y dans l'intervalle -5, $+5$, en évitant les valeurs 2, -1, -5 qui ne pourraient que nous donner des solutions déjà trouvées.

110. Soit $y = 1$. Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{5}{2};$$

elle n'a pas de solutions si l'on prend simultanément $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 3$.

111. Soit $t = 1$, on a

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{7}{2}, \qquad z = 1, 4;$$

la solution $y = t = 1$, $z = 4$ donne une solution qui rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (146).

$y = t = z = 1$ donne

$$p = -\tfrac{4}{3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

112. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{7}{2}.$$

$t = -2$ donne

$$r = \tfrac{12}{7}.$$

113. Soient $|z| > 2$, $|t| > 2$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \left|\frac{5}{2} - \frac{3}{v}\right| \leq 1 \qquad v = 1, 2.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{l} z = -12, -8, -6, -5, -3, -2, 4, \infty, -4, \\ t = \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 10, -6, -2, 1, \quad 2, \quad \infty. \end{array}$$

$w = \dfrac{2z}{z-2}$ élimine $z = -12, -8, -5, -3, -4$.

114. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad p = -\frac{3}{4}.$$

115. Revenons au n° 109 et soit $y = -2$. L'équation

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

n'admettra pas de solution si l'on a simultanément $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$; on a d'ailleurs

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{5}{2}\right| \leq 1 \qquad u = 1, 2.$$

$u = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{array}{l} t = -2, \quad 1, 3, 4, 6, \infty, \quad 2, \\ z = \quad 1, -2, 6, 4, 3, \quad 2, \infty. \end{array}$$

$p = \dfrac{4t}{t+4}$ élimine $t = 6$.

40e *solution* : $x = y = 4$, $z = -2$, $t = -4$, $a = b = 1$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

116. $u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -1,$$

$$t = -2, \quad \infty, -1,$$
$$z = -2, -\mathbf{1}, \infty.$$

$y = t = z = -2$ donne

$$p = \tfrac{4}{3}.$$

117. Revenons au n° 109 et soit $y = -3$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{13}{6}, \qquad \max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{13}{6} - \frac{3}{u}\right| \leq \frac{2}{3}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{3},$$

d'où l'on conclut

$$r = \tfrac{12}{7}.$$

118. Revenons au n° 109 et soit $y = 3$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{11}{6},$$

équation qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'a pas de solutions.

Soit $z = 3$, on a

$$\frac{3}{v} = \frac{1}{t} + \frac{7}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad t = -6, -\mathbf{1}, 3.$$

$t = -6$ donne

$$v = \tfrac{6}{5}.$$

41e *solution :* $x = y = z = 3$, $\quad t = -4$, $\quad a = b = c = \frac{3}{4}$, $\quad d = \frac{1}{6}$.

119. Maintenant on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{3}{v} - \frac{11}{6}\right| \leq \frac{3}{4}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{3},$$

$$t = -21, -12, -9, -6, -5, -4, -2, -1, 3, 6, 15, \infty, -3,$$
$$z = \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \quad 24, -\mathbf{12}, -\mathbf{3}, 3, 4, \quad 5, \quad 6, \quad \infty.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$u = \frac{6z}{z+6}$ élimine $z = 7, 8, 9, 15, 24, 4, 5$; reste

$$z = 12, 6.$$

$w = \frac{6z}{5z-6}$ élimine $z = 12, 6$.

120. Revenons au n° 109 et soit $y = -4$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 2, \qquad \text{max.}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{u} - 2\right| \leq \frac{1}{2}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$t = -6, -4, -3, -1, \quad 2, \quad \infty, -2,$$
$$z = -3, -4, -6, \quad 2, -1, -2, \quad \infty.$$

42e solution: $x = y = z = t = -4, \qquad a = b = c = d = \frac{3}{4}$.

121. Revenons au n° 109. Soit $y = 4$, on a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{7}{4};$$

de plus

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{4} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4},$$

donc

$$v = 2, 3.$$

Soit $v = 2$; on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{4} + \frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4};$$

donc

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} = 1,$$

$$u = 2, \infty, 1,$$
$$w = 2, 1, \infty.$$

$\left.\begin{matrix} u = \infty \\ w = 1 \end{matrix}\right\}$ donne

$$z = -4 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{t} = -\frac{3}{4}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

43e *solution* : $x=y=z=4, \quad t=-4, \quad a=b=c=\frac{3}{4}, \quad d=\frac{1}{4}.$

$u=w=2$ donne

$$z=4, \qquad t=4.$$

122. $v=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{4},$$

qui n'a pas de solutions si l'on a $|z|>5$, $|t|>2$,

$\left.\begin{matrix} z= & 4 \\ t= & -4 \end{matrix}\right\}$ est la seule solution, déjà essayée d'ailleurs.

123. Revenons au n° 109, et soit $y=5$; on a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{17}{10},$$

qui n'a pas de solutions si l'on suppose simultanément $|z|>3$, $|t|>1$, $|v|>5$,

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{17}{10}-\frac{3}{v}\right|\leq\frac{3}{5}, \qquad v=2.$$

$v=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{z}+\frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{w}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10}, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=1,$$

$$\begin{matrix} u=2, & \infty, & 1, \\ w=2, & 1, & \infty, \end{matrix} \qquad z=5, \qquad t=5.$$

44e *solution* : $x=y=z=5, \quad t=-4, \quad a=b=c=\frac{3}{4}, \quad d=\frac{3}{10}.$

124. Revenons au n° 109, et supposons $|y|>5$, $|z|>5$, $|t|>5$, d'où

$$\text{max.}\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{2}{3},$$

$$u=2,\ 3, \qquad v=2,\ 3, \qquad w=2,\ 3.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{2};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la solution $v = u = w$ convient seule. On a alors

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t},$$
$$\frac{2}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{y},$$
$$\frac{2}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z};$$

donc

$$\frac{3}{y} = \frac{3}{z} = \frac{3}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}, \qquad y = z = t.$$

On trouve alors

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{1}{4}$$

et, par suite,

$$y = -12,\ \mathbf{-4},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\ \infty,\ \mathbf{4}.$$

Toutes ces valeurs de y donnent des solutions, savoir :

45e *solution :*	$x = y = z = -12$,	$t = -4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{7}{12}$.
46e *solution :*	$x = y = z = 6$,	$t = -4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{1}{3}$.
47e *solution :*	$x = y = z = 8$,	$t = -4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{3}{8}$.
48e *solution :*	$x = y = z = 12$,	$t = -4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{5}{12}$.
49e *solution :*	$x = y = z = 20$,	$t = -4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{9}{20}$.
50e *solution :*	$x = y = z = \infty$,	$t = -4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{1}{2}$.

125. Revenons au n° 26, et faisons $x = -3$. Le système d'équations à résoudre est alors le suivant :

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{2}{3},$$
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{2}{3},$$
$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{v} + \frac{3}{r} = \frac{2}{3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on suppose simultanément $|y|>4$, $|z|>2$, $|t|>2$, $|v|>7$, la première équation n'aura pas de solutions.

126. Soit $y=1$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{8}{3};$$

pour $|t|>1$, $|z|>2$, $|v|>3$, il n'y a pas de solutions.

$t=1$ donne

$$\frac{2}{z}+\frac{3}{v}=\frac{11}{3}, \qquad \begin{matrix} v=1, \\ z=3. \end{matrix}$$

$x=y=1$, $z=3$, $t=-3$ donne une solution; elle rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (146).

127. $z=-2$ donne

$$\frac{3}{v}-\frac{1}{t}=\frac{11}{3},$$

qui n'a pas de solutions.

128. Supposons $|z|>2$, $|t|>2$, d'où

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{8}{3}-\frac{3}{v}\right|\leq 1, \qquad v=1.$$

$v=1$ donne

$$\frac{1}{t}=\frac{2}{z}+\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{matrix} z=-3,\ 3, \\ t=-3,\ 1. \end{matrix}$$

Nous aurons la solution suivante :

51e *solution :* $x=y=z=-3$, $t=1$, $a=b=c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{3}{5}$.

129. Revenons au n° 125, et soit $y=-2$. On a l'équation

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{8}{3},$$

laquelle n'a pas de solutions si l'on a simultanément $|u|>3$, $|z|>1$, $|t|>1$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u}-\frac{8}{3}\right|\leq 1,$$

d'où

$$u=1.$$

$u=1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},$$

$$t=-6,\quad 2,\quad 4,\quad 6,\quad 12,\quad \infty,\quad 3,$$
$$z=\quad 2,\quad -6,\quad 12,\quad 6,\quad 4,\quad 3,\quad \infty.$$

$v=\dfrac{6t}{t+6}$ élimine $t=4$; $q=\dfrac{3z}{z+3}$ élimine $z=3$.

52e *solution :* $x=y=6$, $z=-3$, $t=-2$, $a=b=1$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{3}$.

130. Revenons au n° 125, et soit $y=-3$. On a l'équation

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{7}{3},$$

laquelle n'a pas de solutions si l'on a simultanément $|u|>4$, $|z|>1$, $|t|>1$.

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u}-\frac{7}{3}\right|\leq\frac{2}{3}, \qquad u=1.$$

Pour $u=1$,

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3},$$

$$t=-3,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 6,$$
$$z=+1,\quad -3,\quad 6,\quad 3,\quad 2.$$

53e *solution :* $x=y=3$, $z=t=-3$, $a=b=1$, $c=d=\frac{1}{3}$.

131. Revenons au n° 125, et soit $y=3$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=2,$$

qui, pour $|z|>3$, $|t|>1$, $|v|>4$, n'aura pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Essayons $z = 3$, qui donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{4}{3}, \qquad t = -3, \ -1, \ 6.$$

$t = 0$ donne

$$w = \tfrac{3}{2}.$$

132. On a alors

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|2 - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} t &= -10, \ -6, \ -4, \ -3, \ -1, \ 2, \ 6, \ \infty, \ -2, \\ z &= \ \ 5, \ \ 6, \ \ 8, \ \ 12, \ -4, \ 2, \ 3, \ 4, \ \infty. \end{aligned}$$

$u = \dfrac{6z}{z+6}$ élimine 5, 8, 4; $w = \dfrac{z}{z-1}$ élimine 6.

133. Revenons au n° 125, et soit $y = 4$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{23}{12},$$

qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'admet pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{23}{12} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4}, \qquad v = 2,$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{12}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} w &= -12, \ -6, \ -4, \ -2, \ \ 6, \ \ \infty, \ -3, \\ u &= -4, \ -6, \ -12, \ \ 6, \ -2, \ -3, \ \ \infty. \end{aligned}$$

$z = \dfrac{4u}{4-u}$ élimine $u = -6, -3$; pour

$$\begin{aligned} u &= -4, \ \ 6, \\ z &= -2, \ -12, \end{aligned}$$

$z = -12$ donne

$$t = -\tfrac{12}{7}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

134. Revenons au n° 125, et soit $|z|>4$, $|y|>4$, $|t|>4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{5}{3}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{4}{5}, \qquad u=2,\ 3;$$

pareillement

$$v=2,\ 3, \qquad w=2,\ 3.$$

Or on doit avoir

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{3};$$

il y a contradiction.

134 *bis*. Revenons maintenant au n° 26, et soit $x=-2$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=2, \qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{y}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=2, \qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=2, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{1}{2}.$$

La première équation n'aura pas de solutions si l'on a $|y|>4$, $|z|>2$, $|t|>2$, $|u|>6$.

135. Soit $y=1$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=3,$$

laquelle, pour $|z|>2$, $|t|>1$, $|v|>3$, n'a pas de solutions.

Soit $z=1$, on a

$$\frac{3}{v}-\frac{1}{t}=1, \qquad t=-4,\ -2,\ 2,\ \infty,\ -1,$$

$w=\dfrac{3t}{4t-2}$ élimine -4, -2, ∞.

136. $z=-2$ donne

$$\frac{3}{v}-\frac{1}{t}=4, \qquad t=-1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

137. Soit $|z|>2$, $|t|>2$, on a

$$\max.\left|\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right|=1, \qquad \left|3-\frac{3}{\varphi}\right|\leq 1, \qquad \varphi=1.$$

$\varphi=1$ donne

$$z=2t, \qquad \frac{2}{w}+\frac{1}{t}=2,$$

$$t=1,\ \infty,$$
$$z=2,\ \infty;$$

$t=1$, $z=2$ donnent une solution qui rentre dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard.

54e *solution :* $x=y=\infty$, $z=-2$, $t=1$, $a=b=\frac{1}{2}$, $c=0$, $d=\frac{3}{2}$.

138. Revenons au n° 134, et soit $y=-2$. On a l'équation

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=3,$$

qui, pour $|u|>3$, $|z|>1$, $|t|>1$, n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|3-\frac{3}{n}\right|\leq 1, \qquad u=1.$$

$u=1$ donne

$$z=-t, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{2},$$

$$t=2,\ -1,\ -3,\ -4,\ -6,\ \infty,\ -2,$$
$$z=2,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 6,\ \infty,\ \ 2;$$

$\frac{1}{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2}$, ou $w=\frac{2z}{z+2}$ élimine $z=3, 4, 6$.

55e *solution :* $x=y=-2$, $z=t=\infty$, $a=b=\frac{1}{2}$, $c=d=1$.

139. Revenons au n° 134, et soit $y=3$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{\varphi}=\frac{7}{3},$$

qui, pour $|z|>2$, $|t|>1$, $|\varphi|>4$, n'a pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{7}{3}-\frac{3}{\varphi}\right|\leq 1, \qquad \varphi=1,\ 2;$$

$\varphi=1$ donne

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} z&=-12,\ -6,\ -4,\ -2,\ 6,\ -3,\\ t&=\ \ 2,\ \ 3,\ \ 6,\ -3,\ 1,\ \ \infty, \end{aligned}$$

$u=\dfrac{3z}{2z+3}$ élimine -4.

140. $\varphi=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{5}{6},$$

$$\begin{aligned} z&=\ \ 3,\ \ 4,\\ t&=-6,\ -3. \end{aligned}$$

56e *solution* : $x=y=3$, $z=-2$, $t=-6$, $a=b=1$, $c=\frac{1}{6}$, $d=\frac{1}{2}$.

141. Revenons au n° 134, et soit $y=4$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{\varphi}=\frac{9}{4},$$

équation qui n'a pas de solutions pour $|z|>2$, $|t|>1$, $|\varphi|>4$.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{9}{4}-\frac{3}{\varphi}\right|\leq\frac{3}{4}, \qquad \varphi=1,\ 2.$$

$\varphi=1$ donne

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned} z&=-4,\\ t&=\ \ 4. \end{aligned}$$

142. $\varphi=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned} z&=\ \ 4,\\ t&=-4. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

143. Revenons au n° 134. On peut supposer $|y|>4$, $|z|>4$, $|t|>4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{5}, \qquad \left|2-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{4}{5}, \qquad u=2,$$

et de même

$$v=w=2.$$

Or on doit avoir

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=2,$$

il y a contradiction.

144. Reportons-nous au n° 26, et soit $x=1$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=-1, \qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=2,$$

$$\frac{3}{v}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}=-1, \qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=2,$$

$$\frac{3}{w}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-1, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=2.$$

Prenons

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=2;$$

pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|y|>2$, $|r|>6$, il n'y a pas de solutions.

145. Soit $y=1$,

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=3;$$

pour $|z|>2$, $|t|>2$, $|r|>3$, pas de solutions.

Soit $z=1$,

$$\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=1,$$

$$t=-4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ 2.$$

$p=\dfrac{3t}{1-2t}$ élimine 3, 4, 5, 8, ∞.

57e *solution* : $x=y=z=t=1$, $\quad a=b=c=d=\frac{1}{3}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

146. Soit $|z|>2$, $|t|>2$,

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{4}{3}, \qquad \left|3-\frac{3}{r}\right|\leq\frac{4}{3}, \qquad r=1.$$

$r=1$ donne

$$t=-z.$$

58e *solution* : $x=y=1$, $z=n$, $t=-n$, $a=b=1$, $c=\frac{1}{n}$, $d=-\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier quelconque.

147. Revenons au n° 144 et soit $y=3$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{7}{3}.$$

Pour $|z|>2$, $|t|>2$, $|r|>4$, pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{4}{3}, \qquad \left|\frac{7}{3}-\frac{3}{r}\right|\leq\frac{4}{3}, \qquad r=1,\ 2,\ 3.$$

$r=1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{3}{2}.$$

148. $r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12}, \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{12}{5}.$$

149. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3}, \qquad z=t=3.$$

59e *solution* : $x=y=z=3$, $t=1$, $a=b=c=\frac{1}{3}$, $d=1$.

150. Revenons au n° 144 et soit $y=4$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{9}{4};$$

pour $|z|>2$, $|t|>2$, $|r|>4$, pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{9}{4}-\frac{3}{r}\right|\leqq 1, \qquad r=1,\ 2.$$

$r=1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{3}{8}, \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{8}{5}.$$

151. $r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{8}, \qquad u=-\frac{8}{3}.$$

152. Revenons au n° 144. Supposons $|y|>4$, $|z|>4$, $|t|>4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|2-\frac{3}{p}\right|\leqq 1;$$

donc

$$p=1,\ 2,\ 3,$$
$$q=1,\ 2,\ 3,$$
$$r=1,\ 2,\ 3.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2 \qquad \text{avec} \qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}.$$

153. $p=q=r=1$ donne

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-1; \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right|>\frac{3}{5}.$$

154. $p=q=1$, $r=2$ donne

$$t=z=\infty, \qquad y=-2 \qquad (\textit{voir} \text{ la } 54^{\text{e}} \text{ solution}).$$

155. $p=q=1$, $r=3$ donne

$$y=-\tfrac{9}{5}.$$

156. $p=1$, $q=r=2$ donne

$$t=3 \qquad (\text{déjà essayé}).$$

157. $p=1$, $q=2$, $r=3$ donne

$$t=\tfrac{9}{4}.$$

158. $p=1$, $q=r=3$ donne

$$t=\tfrac{9}{5}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

159. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = 6.$$

60e *solution* : $x = y = z = 6$, $t = 1$, $a = b = c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{7}{6}$.

160. $p = q = 2$, $r = 3$. On a

$$2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{2}{3} > \frac{3}{5};$$

les autres essais sont donc inutiles.

161. Revenons au n° 26, et soit $x = 3$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3}.$$

Pour $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 3$, $|p| > 9$, il n'y aura pas de solutions.

162. Soit $y = -6$; l'équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{3}.$$

Pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|p| > 5$, cette dernière n'a pas de solutions.
Faisons $z = 3$, cela donne

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = 1, \qquad t = -4, \ -2, \ 2, \ \infty, \ -1.$$

La seule solution à essayer est $t = \infty$; elle donne

$$q = \tfrac{3}{2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

163. Soit $|z|>3$, $|t|>3$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{5}{3}-\frac{3}{p}\right|\leq\frac{3}{4}, \qquad p=2,\ 3.$$

$p=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad z=-3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6.$$

61e *solution :* $x=y=6$, $z=3$, $t=-6$, $a=b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{5}{6}$, $d=\frac{1}{3}$.

164. $p=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{2}{3}, \qquad t=-6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3,\ \infty,$$
$$z=\ 4, \qquad\qquad 3;$$

$t=-6$, $z=4$ donne

$$q=\tfrac{4}{3}.$$

165. Revenons au n° 161, et soit $y=3$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{5}{3}.$$

Pour $|z|>3$, $|t|>3$, $|r|>5$, pas de solutions.

Soit $z=3$, on a

$$\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=1, \qquad t=-4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ 2.$$

62e *solution :*	$x=y=z=t=3$,		$a=b=c=d=\frac{3}{9}$,	
63e *solution :*	$x=y=z=3$,	$t=4$,	$a=b=c=\frac{7}{12}$,	$d=\frac{1}{2}$.
64e *solution :*	$x=y=z=3$,	$t=5$,	$a=b=c=\frac{3}{5}$,	$d=\frac{7}{15}$.
65e *solution :*	$x=y=z=3$,	$t=8$,	$a=b=c=\frac{3}{8}$,	$d=\frac{3}{12}$.
66e *solution :*	$x=y=z=3$,	$t=\infty$,	$a=b=c=\frac{2}{3}$,	$d=\frac{1}{3}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

166. Soit $|z|>3$, $|t|>3$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{5}{3}-\frac{3}{r}\right|\leq 1, \qquad r=2,\ 3,\ 4;$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{5}{12},$$

$$\begin{aligned} p&= \quad 2,\ \ 3,\ \ 4,\\ q&=-12,\ 12,\ \ 6,\\ z&=-4,\ -12,\ \infty,\\ t&= \quad 3,\ \ \ 6,\ \ 12. \end{aligned}$$

67e *solution :*	$x=y=3$,	$z=6$,	$t=-12$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{7}{12}$, $d=\frac{1}{3}$.
68e *solution :*	$x=y=3$,	$z=12$,	$t=\infty$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{5}{12}$.

167. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} t&=-6, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 12, \quad \infty, \quad 3,\\ z&= \quad \mathbf{2}, \ \mathbf{-6}, \ 12, \ \ 6, \ \ \mathbf{4}, \ \mathbf{3}, \ \boldsymbol{\infty}. \end{aligned}$$

69e *solution :*	$x=y=3$,	$z=4$,	$t=12$,	$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=\frac{7}{12}$, $d=\frac{5}{12}$,
70e *solution :*	$x=y=3$,	$z=t=6$,		$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=d=\frac{1}{2}$.

168. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{11}{24};$$

$t=3$, $z=8$ donne une solution déjà trouvée.

169. Revenons au n° 161, et soit $y=4$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{19}{12},$$

qui, pour $|z|>3$, $|t|>3$, $|r|>5$, n'a pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{19}{12}-\frac{3}{r}\right|\leq 1, \qquad r=2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{24}, \qquad \frac{1}{v}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{8},$$

$$w=-8,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 8,\quad 24,$$
$$v=\quad 2,\quad -8,\quad 24,\quad 8,\quad 4,\quad 3.$$

$z=\frac{6w}{6-w}$ élimine $w=-8$,

$$z=\quad 6,\quad 12,$$
$$t=-8,\ -24.$$

$p=\frac{4t}{t+4}$ élimine $t=-24$; $q=\frac{4z}{z+4}$ élimine $z=6$.

170. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{24};$$

pour $|z|>6$, $|t|>6$ pas de solutions.

$$t=\ 4,\ 6,$$
$$z=24,\ 8.$$

$q=\frac{12z}{z+12}$ élimine $z=8$.

71e *solution* : $x=y=4$, $z=3$, $t=24$, $a=b=\frac{5}{8}$, $c=\frac{17}{24}$, $d=\frac{5}{12}$.

171. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12},$$

$$z=4,$$
$$t=6.$$

72e *solution* : $x=y=4$, $z=3$, $t=6$, $a=b=\frac{7}{12}$, $c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$.

172. $r=5$, on a

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{59}{120},$$

pas de solution.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

173. Revenons au n° 161, et faisons $y = 5$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{23}{15},$$

équation qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|r| > 5$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{23}{15} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{60}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{20},$$

$$v = 3,\ 4,$$
$$w = 60,\ 10.$$

$\left.\begin{matrix} t = \ \ 12 \\ z = -15 \end{matrix}\right\}$ donne

$$q = \tfrac{30}{7},$$

174. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{4}{15},$$

$$z = 6,\ 5,$$
$$t = 10,\ 15.$$

$p = \dfrac{15t}{2t + 15}z$ élimine $t = 6$.

73e *solution* : $x = y = 5$, $z = 3$, $t = 15$, $a = b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{11}{15}$, $d = \frac{7}{15}$

175. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{47}{120}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{120}{13}.$$

176. Revenons au n° 161, et faisons $y = 6$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2};$$

pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$, pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$r = 2$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{3},$$

$$w = -6, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 12, \quad \infty, \quad 3,$$
$$v = \quad 2, \quad -6, \quad 12, \quad 6, \quad 4, \quad 3, \quad \infty.$$

$z = \dfrac{6w}{w-6}$,

$$z = \quad 3, \quad -3, \quad -12, \quad \infty, \quad 12, \quad 6, \quad -6,$$
$$t = -3, \quad 3, \quad 12, \quad \infty, \quad -12, \quad -6, \quad +6.$$

$p = \dfrac{3z}{z-3}$, $q = \dfrac{3z}{z+3}$ éliminent la solution $-12, +12$.

74e *solution* : $x = y = 6, \quad t = -6, \quad z = 3, \quad a = b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{5}{6}$.

75e *solution* : $x = y = \infty, \quad z = 3, \quad t = 6, \quad a = b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{5}{6}, \quad d = \frac{2}{3}$.

177. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4},$$

$$t = -12, \quad -4, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad 20, \quad \infty, \quad 4,$$
$$z = \quad 3, \quad 2, \quad -4, \quad -12, \quad 20, \quad 12, \quad 8, \quad 6, \quad 5, \quad 4, \quad \infty.$$

76e *solution* : $x = y = 6, \quad z = 3, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{7}{12}, \quad c = \frac{3}{4}, \quad d = \frac{1}{2}$.

178. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$ pas de solutions; or $z = 6$ donne

$$t = \tfrac{24}{5}.$$

179. Revenons au n° 161. On a

$$\max. \left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} \right) = \frac{5}{7}, \qquad \left| \frac{4}{3} - \frac{3}{p} \right| \leq \frac{5}{7},$$

d'où

$$p, q, r = 2, 3, 4.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{4}{3}, \qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{7}.$$

180. Soient $p=q=r=2$, $y=z=t=-18$.

77e solution : $x=y=z=-18$, $t=3$, $a=b=c=\frac{5}{9}$, $d=\frac{17}{18}$.

181. $p=q=2$, $r=3$, $t=z=18$,

$$y=-9, \qquad u=\frac{9}{2}.$$

182. $p=q=2$, $r=4$, $t=z=9$,

$$y=-\frac{36}{5}.$$

$p=2$, $r=q=3$ donnent

$$t=6.$$

$p=2$, $q=3$, $r=4$ donnent

$$t=\frac{9}{2}.$$

$p=2$, $q=r=4$ donnent

$$t=\frac{18}{5}.$$

183. $p=q=r=3$ donne

$$y=z=t=9.$$

78e solution : $x=y=z=9$, $t=3$, $a=b=c=\frac{5}{9}$, $d=\frac{7}{9}$.

184. $p=q=3$, $r=4$,

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}<\frac{3}{7}.$$

Les autres essais sont inutiles.

185. Revenons au n° 25, et soit $x=4$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4};$$

pour $|z|>6$, $|t|>6$, $|y|>3$, $|r|>9$ il n'y a pas de solutions.

186. Soit $y=-6$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{19}{12},$$

qui, pour $|z|>3$, $|t|>1$, $|p|>5$, n'a pas de solutions.

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4},\qquad \left|\frac{19}{12}-\frac{3}{p}\right|\leq\frac{3}{4},\qquad p=2,\ 3.$$

$p=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{q}=\frac{7}{12};$$

cette dernière n'aura pas de solutions si l'on a simultanément $|z|>3$, $|q|>3$.

$$q=2,\qquad q=3,$$
$$z=12,\qquad z=4.$$

$z=4$ donne

$$t=\tfrac{12}{5}.$$

79e *solution* : $x=y=12$, $y=4$, $t=-6$, $a=b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{2}{6}$, $d=\frac{3}{12}$.

187. $p=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{7}{12};$$

pour $|z|>6$, $|t|>3$ pas de solutions.

$$z=\quad 4,\quad 6,$$
$$t=-12,\ -4.$$

$z=4$, $t=-12$ donnent

$$q=\tfrac{3}{2}.$$

188. Revenons au n° 185, et soit $y=4$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{3}{2},$$

qui, pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|r|>6$, n'a pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit $z = 4$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$t = -4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ 2.$$

$p = \frac{12t}{t+4}$ élimine 5.

80e *solution* :	$x = y = z = t = 4$,		$a = b = c = d = \frac{7}{12}$.	
81e *solution* :	$x = y = z = 4$,	$t = 8$,	$a = b = c = \frac{5}{8}$,	$d = \frac{1}{2}$.
82e *solution* :	$x = y = z = 4$,	$t = \infty$,	$a = b = c = \frac{2}{3}$,	$d = \frac{5}{12}$.

189. Soient maintenant $|z| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$

$$q = -3,\quad 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty,\ 2,$$
$$p = \quad 1,\ -2,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty.$$

$z = \frac{4p}{p-4}$ élimine $p = -2$; $z = \frac{4q}{4-q}$ élimine $q = -2$.

$$z = 12,\ \infty,\ 4.$$

83e *solution* :	$x = y = 4$,	$z = 12$,	$t = -12$,	$a = b = \frac{3}{4}$,	$c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{5}{12}$.
84e *solution* :	$x = y = 4$,	$t = z = \infty$,		$a = b = \frac{3}{4}$,	$c = d = \frac{1}{2}$.

190. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4},$$

$$t = -12,\ -4,\quad 2,\quad 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\ \infty,\ 4,$$
$$z = \quad 3,\quad 2,\ -4,\ -12,\ 20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5,\ 4,\ \infty.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$q = \frac{12z}{z+12}$ élimine 8, 20.

85e *solution* : $x = y = 4, \quad z = 6, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{7}{12}, \quad d = \frac{1}{2}.$

191. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$ pas de solutions.

$z = 5$ donne

$$t = \frac{40}{7}.$$

192. Revenons au n° 185 et soit $y = 5$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{20},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{29}{20} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5}, \qquad r = 2, 3, 4.$$

Pour $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{40}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad z = 5, 30, -20, -10.$$

$t = -\frac{40z}{z+40}$ élimine $z = 5, 30, -10$.

$\left.\begin{matrix} z = -20 \\ t = \quad 40 \end{matrix}\right\}$ donne

$$p = \frac{40}{13}.$$

193. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{9}{40}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{120}{13}.$$

194. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{20}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{20}{3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

195. Revenons au n° 185 et faisons $y = 6$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{17}{12},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{17}{12} - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{2}{3}, \qquad r = 2, 3, 4.$$

196. $r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{24}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3},$$

$$z = -12, \quad \infty,$$
$$t = \quad 24, -24;$$

$p = \dfrac{3t}{t+3}$ élimine 24 et (-24).

197. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{24}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6};$$

pas de solutions acceptables.

198. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3},$$

$$t = -6, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 12, \quad \infty, \quad 3,$$
$$z = \quad 2, -6, 12, \quad 6, \quad 4, \quad 3, \quad \infty.$$

86e *solution* : $x = y = z = 6$, $\quad t = 4$, $\quad a = b = c = \frac{7}{12}$, $\quad d = \frac{2}{3}$.

199. Reportons-nous au n° 185 et soient $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{5}{7}, \qquad p = 2, 3, 4, 5.$$

De plus

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4}, \qquad \text{avec} \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{7}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

200. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = -12.$$

87e *solution* : $x = y = z = -12$, $t = 4$, $a = b = c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{11}{12}$.

201. $p = q = 2$, $r = 3$ donnent

$$y = -\frac{36}{5}.$$

$p = q = 2$, $r = 4$ donnent

$z = t = 12$, $y = -6$, solution déjà trouvée (79e *solution*).

$p = q = 2$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{7}.$$

$p = 2$, $q = r = 3$ donnent

$$t = \frac{36}{5}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 4$ donnent

$$t = \frac{36}{7}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{180}{41}.$$

$p = 2$, $q = r = 4$ donnent

$t = 4$, $y = z = \infty$, solution déjà trouvée (84e *solution*).

$p = 2$, $q = 4$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{17}.$$

$p = 2$, $q = r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{19}.$$

$p = q = r = 3$ donne

$$y = z = t = 12.$$

88e *solution* : $x = 4$, $y = z = t = 12$, $a = b = c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{3}{4}$.

202. $p = q = 3$, $r = 4$ donnent

$$t = \frac{36}{5}.$$

$p = q = 3$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{180}{31}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$p=3,\ q=r=4$ donnent

$$t=\tfrac{36}{7}.$$

$p=3,\ q=4,\ r=5$ donnent

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{15}<\frac{3}{7};$$

les autres essais sont inutiles.

203. Revenons au n° 26 et faisons $x=5$. On a à résoudre le système

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{p}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{6}{5},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{q}+\frac{2}{y}+\frac{2}{t}-\frac{1}{z}=\frac{6}{5},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{r}+\frac{2}{t}+\frac{2}{z}-\frac{1}{y}=\frac{6}{5}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}+\frac{6}{5};$$

pour $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>3$, $|p|>10$, pas de solutions.

204. Faisons $y=-6$, on a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{6}{5}+\frac{1}{3}=\frac{23}{15};$$

pour $|z|>3$, $|t|>1$, $|p|>5$, cette équation n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}, \qquad \left|\frac{23}{15}-\frac{3}{p}\right|\leq\frac{3}{5}, \qquad p=2,3.$$

$p=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{30}, \qquad \text{d'où} \qquad v=\frac{15}{2}.$$

$p=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{8}{15}, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{q}=\frac{13}{15};$$

cette dernière équation n'a pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

205. Revenons au n° 203 et faisons $y = 5$. On a

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{z} + \frac{3}{r} = \frac{7}{5},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{z}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{7}{5} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{z} = -\frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{11}{20},$$

$$v = 2,\ 20,$$
$$w = 20,\ 2,$$

$\left.\begin{matrix} t = 5 \\ z = -4 \end{matrix}\right\}$ donne une solution déjà trouvée.

206. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{15}{2}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{13}{40}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{40}{7}.$$

$r = 5$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5},$$

$$z = -10,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 15,$$
$$t = \quad 2,\ -10,\quad 15,\quad 5,\quad 3.$$

89e *solution :* $x = y = z = t = 5, \qquad a = b = c = d = \frac{3}{5}$.

207. Revenons au n° 203, et soit $y = 6$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{41}{30},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{41}{30} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{2}{3}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{15}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{t} + \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{5},$$

$$p = 2,\ 10,$$
$$q = 10,\ 2.$$

$q = 10$ donne

$$z = -\tfrac{30}{7}.$$

$r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{11}{60}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{20}{3}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{17}{60}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{60}{11}.$$

208. Revenons au n° 203 et supposons $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{6}{5} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{5}{7},$$

$$p = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$q,\ r = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{6}{5} \qquad \text{avec} \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{7}.$$

$p = q = r = 2$ donne

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{3}{10}, \qquad y = z = t = -10.$$

90e *solution* : $x = y = z = -10$, $t = 5$, $a = b = c = \frac{3}{5}$, $d = \frac{9}{10}$.

209. Soient $p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5, 6$; on a

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{11}{30}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{3}{u} + \frac{3}{r} = \frac{9}{5},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$u = \frac{90r}{43r - 40}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 2,\ q = 4,\ r = 4, 5, 6$

$$u = \frac{60r}{27r - 40}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 2,\ q = 5,\ r = 5, 6$

$$u = \frac{30r}{13r - 20}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 2,\ q = r = 6$ donnent

$$t = \tfrac{90}{31}.$$

$p = q = r = 3$ donne

$$y = z = t = 15.$$

91e *solution :* $x = y = z = 15$, $t = 5$, $a = b = c = \frac{3}{5}$, $d = \frac{11}{15}$.

210. $p = q = 3,\ r = 4, 5, 6$ donnent

$$u = \frac{45r}{19r - 30}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4, 5, 6$ donnent

$$u = \frac{180r}{71r - 120}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 3,\ q = 5,\ r = 5$ donnent

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{6}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{7}{15} > \frac{3}{7};$$

donc les essais suivants sont inutiles.

211. Revenons maintenant au n° 26, et soit $x = -6$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{v} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{w} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{5}{6}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{4}{3},$$

pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 9$, il n'y aura pas de solutions.

212. Soit $y = -6$, alors on a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{3},$$

qui pour $|u| > 5$, $|z| > 1$, $|t| > 1$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{3}, \qquad \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{u}\right| \leq \frac{1}{3}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$v = 1, \qquad v = 2,$$
$$w = -6, \qquad w = 3.$$

$v = 1$ donne

$$t = 2.$$

$v = 2$ donne

$$t = \infty, \qquad z = -6.$$

92e *solution :* $x = y = z = -6$, $t = \infty$, $a = b = c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{5}{6}$.

213. Revenons au n° 211, et soit $y = 6$. On a

$$\frac{3}{v} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{2};$$

pour $|v| > 6$, $|z| > 4$, $|t| > 2$, pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{1}{2}, \qquad v = 2,\ 3.$$

$v = 2$ donne

$$z = 2t, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{6t}{2t + 3},$$

$$t = -6,\ \infty,$$
$$z = -12,\ \infty.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

93e *solution* : $x=y=\infty$, $z=6$, $t=-6$, $a=b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{5}{6}$, $d=\frac{1}{2}$.

214. $r=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2},$$

$$t=-10,\ 6,\ \infty,$$
$$z=\ \ 5,\ 3,\ 4,$$

aucune solution nouvelle.

215. Revenons au n° 211. Supposons $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>6$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{7},\qquad \left|\frac{4}{3}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{4}{7},\qquad u=2,\ 3;$$

de même

$$v,\ w=2,\ 3;$$

mais

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{3},\qquad \text{d'où}\qquad u=2,\qquad v=2,\qquad w=3,$$

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\ \ \frac{1}{3},$$

$$y=z,\qquad \frac{1}{t}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2},$$

$$y=z=\infty,\quad t=6,$$
$$y=12,\qquad t=4.$$

Pas de solutions nouvelles.

216. Revenons maintenant au n° 26, et faisons $x=+6$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{7}{6},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{7}{6},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{7}{6},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{2}{p}=\frac{7}{6},$$

pour $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>3$, $|p|>10$ pas de solutions.

217. Essayons $y=6$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{4}{3},$$

qui pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|r|>6$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{4}{3}-\frac{3}{r}\right|\leq\frac{2}{3}, \qquad \text{donne} \qquad r=2,\ 3,\ 4,$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{7}{12}.$$

$$q=2,\ 3, \qquad z=6,\ \infty,$$
$$p=12,\ 4, \qquad t=-4,\ -12.$$

94^e *solution* : $x=y=6$, $t=-12$, $z=\infty$, $a=b=\frac{3}{4}$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{7}{12}$.

218. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}.$$

$$q=-2,\ 3,\ 4,\ 2, \qquad z=6,\ 12,\ 3,$$
$$p=1,\ 6,\ 4,\ \infty, \qquad t=\infty,\ 12,\ -6.$$

95^e *solution* : $x=y=z=6$, $t=\infty$, $a=b=c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$.

96^e *solution* : $x=y=6$, $t=z=12$, $a=b=\frac{2}{3}$, $c=d=\frac{7}{12}$.

219. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{24}, \qquad \text{d'où} \qquad u=\frac{24}{5}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

220. Revenons au n° 216; supposons $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>6$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{7}{6}-\frac{3}{p}\right|\leq\frac{5}{7},$$

d'où

$$p,\ q,\ r=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{7}{6};$$

on a

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{7}.$$

$p=q=2$,

$$r=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6; \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{1}{6};$$

donc

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{u}+\frac{2}{r}=\frac{11}{6}.$$

$u=\frac{9r}{5r-6}$ élimine $r=2,\ 4,\ 5,\ 6$; reste

$$r=3,$$

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{3}+\frac{2}{t}=-\frac{1}{3}, \qquad t=z=\infty, \qquad y=-6,$$

solution déjà trouvée (93e solution).

$p=2,\ q=3,\ r=3,\ 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{1}{3}.$$

$u=\frac{6r}{3r-4}$ élimine $3,\ 5,\ 6$; reste

$$r=4,$$

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{2}{t}=\frac{1}{6},$$

$t=6$ ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

$p=2,\ q=4,\ r=4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{5}{12}.$$

$u=\frac{36r}{17r-24}$ élimine $r=4,\ 5,\ 6.$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$p = 2,\ q = 5,\ r = 5, 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{7}{15}.$$

$u = \frac{90r}{41r - 60}$ élimine $r = 5, 6.$

$p = 2,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{4}{15}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{45}{13}.$$

$p = q = 3,\ r = 3, 4, 5, 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

$u = \frac{9r}{4r - 6}$ élimine 3, 4, 5; reste

$$r = 6,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad t = 6.$$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4, 5, 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{7}{12}.$$

$u = \frac{12r}{5r - 8}$ élimine $r = 5, 6$; reste

$$r = 4,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}, \qquad t = 6.$$

$p = 3,\ q = 5,\ r = 5, 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{19}{30}, \qquad \frac{19}{30} - \frac{1}{5} = \frac{13}{30} > \frac{3}{7};$$

les essais sont inutiles.

$p = q = 4,\ r = 4, 5, 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3}.$$

$r = 4$ donne

$$t = \frac{9}{2}; \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15} > \frac{3}{7}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$p = 4,\ q = 5,\ r = 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \geq \frac{31}{60} > \frac{3}{7};$$

les essais sont inutiles, ainsi que ceux qui suivent.

221. Revenons au n° 26, et faisons $x = -7$. On a l'équation

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{7};$$

pour $|p| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 8$, pas de solutions. On a

$$\text{max.}\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{9}{7} - \frac{3}{u}\right| \leq \frac{4}{7},$$

d'où

$$u,\ v,\ w = 2,\ 3,\ 4.$$

Mais

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{9};$$

donc, pas de solutions.

222. Revenons au n° 26, et soit $x = +7$. On a

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{8}{7},$$

équation qui, pour $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, n'a pas de solutions.

Essayons $y = 7$; on a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{9}{7},$$

équation qui, pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 7$, n'a pas de solutions.

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{9}{7} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{7}, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{3}{28}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{28}{3}.$$

$r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{7}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{21}{4}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{15}{56}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{56}{13}.$$

223. Supposons maintenant $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 7$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{8}, \qquad \left|\frac{8}{7} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{5}{8},$$

d'où

$$p = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \qquad \text{de même} \qquad q, r = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{8}{7}, \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{8}.$$

$p = q = 2$, $r = 2, 3, 4, 5$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{7},$$

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{8}{7},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \frac{3}{u} = \frac{13}{7}.$$

$u = \frac{7r}{4r-7}$ élimine $r = 3, 4, 5$; reste

$$r = 2, \qquad \text{d'où} \qquad t = -\frac{42}{5}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{13}{42}.$$

$u = \frac{126r}{65r-84}$ élimine $r = 3, 4, 5$.

$p = 2$, $q = 4$, $r = 4, 5$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{11}{28},$$

$u = \frac{84r}{41r-56}$ élimine $4, 5$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$p = 2,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{17}{10}, \qquad t = \frac{210}{59}.$$

$p = q = 3,\ r = 3, 4, 5.$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{10}{21}.$$

$u = \dfrac{63r}{29r - 42}$ élimine $r = 3, 4, 5.$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4, 5.$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{47}{84},$$

$u = \dfrac{252r}{109r - 168}$ élimine $r = 4, 5.$

$p = 3,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{43}{105}, \qquad t = \frac{315}{71}.$$

$p = q = 4,\ r = 4, 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{9}{14},$$

$u = \dfrac{42r}{17r - 28}$ élimine $r = 4, 5.$

$p = q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{19}{35}, \qquad t = \frac{105}{19}.$$

224. Revenons au n° 26, et soit $x = -8$. On a

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{4},$$

équation qui, pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 9$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{u}\right| \leq \frac{1}{2}, \qquad u = 2, 3, 4.$$

De même

$$v, w = 2, 3, 4.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{4}, \qquad u=v=2,\ w=4$$

est la seule solution.

97e solution : $x=y=z=-8, \quad t=8, \quad a=b=c=\frac{5}{8}, \quad d=\frac{7}{8}.$

225. Revenons au n° 26 et faisons $x=8$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{9}{8},$$

qui, pour $|y|>7$, $|z|>7$, $|t|>3$, $|p|>9$, n'admet pas de solutions.

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{3}{4}.$$

On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{4}-\frac{3}{u}\right|<\frac{1}{2}, \qquad u=3,\ 4,\ \ldots,\ 12,$$

et de même

$$v,\ w=3,\ 4,\ \ldots,\ 12.$$

Or on a

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{4},$$

qui, pour $|u|>4$, $|v|>4$, $|w|>4$, n'a pas de solutions.

$u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{12},$$

$$v=3,\ 4,$$
$$w=12,\ 6.$$

$u=4$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{1}{2}, \qquad u=v=w=4.$$

226. $u=3=v$, $w=12$ donnent

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{4}, \qquad y=z;$$

pas de solutions acceptables.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$u = 3$, $v = 4$, $w = 6$ donnent

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{3}{8};$$

pas de solutions acceptables.

$u = v = w = 4$,

$$y = z = t, \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{3}{8}, \qquad y = 8, 24.$$

98e *solution :* $x = y = z = t = 8$,	$a = b = c = d = \frac{5}{8}$.
99e *solution :* $x = y = z = 24$, $t = 8$,	$a = b = c = \frac{5}{8}$, $d = \frac{17}{24}$.

227. Revenons au n° 26 et faisons $x = -9$. On a l'équation

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{11}{9},$$

qui, pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 9$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{9}, \qquad \left|\frac{11}{9} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{9}, \qquad u = 2, 3;$$

de même

$$v, w = 2, 3.$$

Or on a

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{11}{9};$$

donc pas de solutions.

228. Revenons au n° 26 et soit $x = +9$. Alors on a l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{10}{9},$$

qui, pour $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, n'a pas de solutions.

On a aussi

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{7}{9}, \qquad \max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{9}, \qquad \left|\frac{7}{9} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{9},$$

$$, v, w = 2, 3, \ldots, 9.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'ailleurs

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{7}{9},$$

équation qui, pour $|u|>3$, $|v|>3$, $|w|>3$, n'a pas de solutions.

$u=2$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{18},$$

$$v=6,$$
$$w=9.$$

$u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{9},$$

$$v=3,$$
$$w=9.$$

Mais $w=9$ donne

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{4}{9}, \qquad \text{d'où} \qquad t=9, \qquad y=z=-9 \quad \text{(inacceptable)}.$$

229. Revenons au n° 26 et soit $x=-10$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{6}{5},$$

qui, pour $|y|>6$, $|z|>3$, $|t|>3$, $|u|>10$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{5}, \qquad \left|\frac{6}{5}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{2}{5}, \qquad u=2,3;$$

de même

$$v,w=2,3.$$

Or on a

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{6}{5};$$

donc pas de solutions.

230. Revenons au n° 26 et soit $x=+10$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{11}{10},$$

qui, pour $|y|>7$, $|z|>7$, $|t|>3$, $|p|>10$, n'a pas de solutions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On aura aussi

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{4}{5}, \qquad \max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{5}+\frac{2}{11}=\frac{21}{55}, \qquad \left|\frac{4}{5}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{21}{55},$$

$$u,\ v,\ w=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Or

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{5},$$

équation qui, pour $|u|>3$, $|v|>3$, $|w|>3$, n'a pas de solutions.

Or $u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{7}{15},$$

qui n'a pas de solutions acceptables.

231. Revenons au n° 26 et supposons $|x|>10$, $|y|>10$, $|z|>10$, $|t|>10$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{6}{11}, \qquad \left|1-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{6}{11};$$

donc

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=0, \qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=0;$$

donc

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{r}=\frac{1}{v}+\frac{1}{q}=\frac{1}{w}+\frac{1}{p}=\sigma.$$

Voici les valeurs que peut prendre σ; elles correspondent aux combinaisons 2 à 2 des nombres 2, 3, 4, 5, 6 :

2, 2 donne $\sigma=1$;	2, 3, $\sigma=\frac{5}{6}$;	2, 4, $\sigma=\frac{3}{4}$;	2, 5, $\sigma=\frac{7}{10}$;
2, 6 $\sigma=\frac{2}{3}$;	3, 3, $\sigma=\frac{2}{3}$;	3, 4, $\sigma=\frac{7}{12}$;	3, 5, $\sigma=\frac{8}{15}$;
3, 6 ou 4, 4 $\sigma=\frac{1}{2}$;	4, 5, $\sigma=\frac{9}{20}$;	4, 6, $\sigma=\frac{5}{12}$;	5, 5, $\sigma=\frac{2}{5}$;
5, 6 $\sigma=\frac{11}{30}$;	6, 6, $\sigma=\frac{1}{3}$;		

$\sigma=1$ donne

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{r}=1, \qquad u=v=w=p=q=r=2;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\sigma = \frac{5}{6}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{5}{6}, \qquad u = v = w = 2, \qquad p = q = r = 3;$$

$\sigma = \frac{3}{4}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{3}{4}, \qquad u = v = w = 2, \qquad p = q = r = 4;$$

$\sigma = \frac{7}{10}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{7}{10}, \qquad u = v = w = 2, \qquad p = q = r = 5;$$

$\sigma = \frac{2}{3}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3},$$

$u = v = w = 2, \quad p = q = r = 6, \qquad u = 2, \quad r = 6, \quad v = w = p = q = 3,$
$u = v = w = p = q = r = 3, \qquad u = v = 2, \quad r = q = 6, \quad w = p = 3;$

$\sigma = \frac{7}{12}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{7}{12}, \qquad u = v = w = 3, \qquad p = q = r = 4;$$

$\sigma = \frac{8}{15}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{8}{15}, \qquad u = v = w = 3, \qquad p = q = r = 5;$$

$\sigma = \frac{4}{2}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2},$$

$u = v = w = 3, \quad p = q = r = 6, \qquad u = 3, \quad r = 6, \quad v = w = p = q = 4,$
$u = v = w = p = q = r = 4, \qquad u = v = 3, \quad r = q = 6, \quad w = p = 4.$

$\sigma = \frac{9}{20}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{9}{20}, \qquad u = v = w = 4, \qquad p = q = r = 5;$$

$\sigma = \frac{5}{12}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{5}{12}, \qquad u = v = w = 4, \qquad p = q = r = 6;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\sigma = \frac{2}{5}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{2}{5}, \qquad u = v = w = p = q = r = 5.$$

$\sigma = \frac{11}{30}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{11}{30}, \qquad u = v = w = 5, \qquad p = q = r = 6.$$

Enfin $\sigma = \frac{1}{3}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{3}, \qquad u = v = w = p = q = r = 6.$$

Soit d'abord

$$u = v = w = p = q = r, \qquad \text{d'où} \qquad x = y = z = t, \qquad \frac{2}{x} + \frac{3}{u} = 1.$$

$x = \frac{2u}{u-3}$ élimine $u = 2, 4, 5$. Reste

$$x = y = z = t = \infty.$$

100e *solution :* $x = y = z = t = \infty, \quad a = b = c = d = \frac{2}{3}$.

232. Soient maintenant $u = v = w$, $p = q = r$, on a

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{u} = 3, \qquad x = \frac{2u}{u-3}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \infty,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1.$$

$t = y = z = \frac{3p}{p-3}$ élimine $p = 2, 3, 5, 6$. Reste

$$p = 4.$$

101e *solution :* $x = y = z = 12, \quad t = \infty, \quad a = b = c = \frac{2}{3}, \quad d = \frac{7}{12}$.

233. $u = 2$, $r = 6$, $v = w = p = q = 3$ donne

$$x = y = -12, \qquad z = t = 12.$$

102e *solution :* $x = y = 12, \quad z = t = -12, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = d = \frac{7}{12}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

234. $u = v = 2$, $r = q = 3$, $w = p = 3$ donnent

$$y = z = \infty, \qquad x = -6, \qquad t = 6;$$

solution déjà trouvée.

$u = 3$, $r = 6$, $v = w = p = q = 4$ donne

$$z = 6.$$

$u = v = 3$, $r = q = 6$, $w = p = 4$ donne

$$y = 8.$$

On ne pourrait donc que tomber sur des solutions déjà trouvées.

235. Nous pouvons maintenant résumer, dans le Tableau suivant, les solutions que nous avons trouvées.

La méthode que nous avons appliquée nous permet de dire que nous les avons trouvées toutes :

$$a = b = c = d = \frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{5}{9}, \ \frac{7}{12}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{5}{8}, \ \frac{3}{5};$$

$$\begin{array}{rl} a = b = c = & \left| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{5}{9} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{5}{8} \middle| \frac{3}{5} \middle| \frac{7}{12} \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| 1 \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \right. \\ d = & \left| \frac{3}{2} \middle| 0 \middle| \frac{5}{6} \middle| \frac{7}{18} \middle| 0 \middle| \frac{1}{4} \middle| \frac{3}{10} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{6} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{2}{3} \middle| 1 \middle| \frac{5}{6} \middle| \frac{1}{n} \middle| \frac{1}{6} \middle| \frac{1}{4} \middle| \frac{7}{12} \middle| \frac{3}{10} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{3}{8} \middle| \frac{5}{12} \right. \end{array},$$

$$\begin{array}{rl} a = b = & \left| 1 \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{2}{3} \middle| 1 \middle| 1 \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{3}{4} \right. \\ c = d = & \left| \frac{1}{4} \middle| \frac{3}{8} \middle| \frac{5}{12} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{7}{12} \middle| \frac{7}{12} \right. \end{array},$$

$$\begin{array}{rl} a = b = & \left| 1 \middle| \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{2}{3} \middle| 1 \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{7}{12} \middle| \frac{5}{8} \middle| \frac{3}{5} \middle| \frac{5}{12} \middle| \frac{5}{9} \middle| \frac{7}{12} \middle| 1 \middle| 1 \middle| 1 \middle| \frac{1}{2} \right. \\ c = & \left| 0 \middle| 1 \middle| 1 \middle| \frac{7}{12} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{9}{20} \middle| \frac{5}{12} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{7}{6} \middle| \frac{5}{6} \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{1}{4} \middle| \frac{9}{10} \middle| \frac{5}{6} \middle| \frac{17}{18} \middle| \frac{11}{12} \middle| \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{n} \middle| \frac{1}{2} \middle| 0 \right. \\ d = & \left| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| 0 \middle| \frac{1}{6} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{6} \middle| \frac{3}{10} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{4} \middle| \frac{5}{6} \middle| \frac{1}{6} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{7}{8} \middle| \frac{3}{10} \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{7}{18} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{2} \middle| -\frac{1}{n} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{3}{2} \right. \end{array},$$

$$\begin{array}{rl} a = & \left| 1 \middle| \frac{3}{4} \middle| \frac{5}{6} \right. \\ b = & \left| \frac{1}{2} \middle| \frac{7}{12} \middle| \frac{2}{3} \right. \\ c = & \left| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \right. \\ d = & \left| \frac{1}{6} \middle| \frac{5}{12} \middle| \frac{1}{3} \right. \end{array},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$a=b=c=\left|\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{17}{18} & \frac{7}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} & \frac{11}{15} \end{array}\right|,$$

$$a=b=\left|\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{17}{24} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & \frac{5}{6} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} \end{array}\right|,$$

$$a=b=c=\left|\begin{array}{ccccc} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{17}{24} & \frac{7}{12} \end{array}\right|.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE V.

236. Soit

$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}.$$

Je poserai, avec M. Picard,

$$U_0 = \int_{u_0}^{0} \varphi(u)\,du, \qquad U_1 = \int_{u_0}^{1} \varphi(u)\,du,$$

$$U_\infty = \int_{u_0}^{\infty} \varphi(u)\,du, \qquad U_x = \int_{u_0}^{x} \varphi(u)\,du, \qquad U_y = \int_{u_0}^{y} \varphi(u)\,du;$$

a, b, λ, μ sont des nombres *réels* satisfaisant aux inégalités

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0, \qquad a + b + \lambda + \mu < 3.$$

Les arguments de u, $(u-1)$, $u-x$, $u-y$ sont choisis d'une façon arbitraire, mais bien déterminée au point u_0 ; ensuite, on les fait varier d'une façon continue.

Cela posé, choisissons les trois intégrales

$$\omega_1 = U_x - U_0,$$
$$\omega_2 = U_y - U_0,$$
$$\omega_3 = U_1 - U_0.$$

Les chemins suivis par le point d'affixe u étant ceux qu'indique la

Fig. 14.

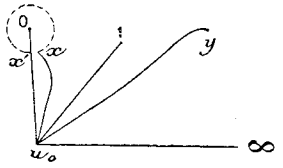


fig. 14, imaginons que le point x tourne autour de l'origine dans le sens direct. La substitution correspondante, calculée d'après la méthode de

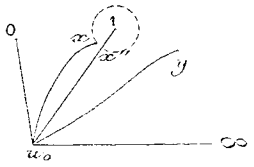
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

M. Picard (1), sera

$$S_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & (2a + 2\lambda)\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 + [(2\lambda) - 1]\omega_1 \\ \omega_3 & \omega_3 + [(2\lambda) - 1]\omega_1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Supposons maintenant que le point x tourne autour du point 1 (*fig.* 15),

Fig. 15.

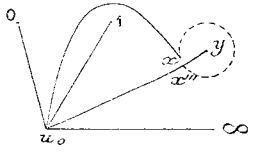


cette fois dans le sens inverse, on aura la deuxième substitution qui suit

$$S_2 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1 + [(-2\lambda) - (-2b - 2\lambda)](\omega_3 - \omega_1) \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_1 + (-2\lambda)(\omega_3 - \omega_1) \end{vmatrix}.$$

Un tour du point x, dans le sens inverse, autour du point y (*fig.* 16),

Fig. 16.



donne la substitution suivante :

$$S_3 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1[1-(-2\lambda)+(-2\lambda-2\mu)]+(-2\lambda-2b)[1-(-2\mu)] & \omega_2+[(2b)-1]\omega_3 \\ \omega_2 & \omega_1(2b)[1-(-2\lambda)]+(-2\lambda)\omega_2+[1-(2b)][1-(-2\lambda)]\omega_3 & \\ \omega_3 & \omega_3 & \end{vmatrix}.$$

Laissons maintenant x fixe et faisons tourner y autour du point 1 (*fig.* 17) dans le sens direct. On aura une quatrième substitution

$$S_4 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 + (2\mu)[(2b) - 1](\omega_2 - \omega_3) \\ \omega_3 & \omega_3 + [1 - (2\mu)](\omega_2 - \omega_3) \end{vmatrix}.$$

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IX, année 1885, Ire Partie, p. 202.

(2) J'emploie toujours la notation (a) pour $e^{i\pi a}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En faisant tourner le point y dans le sens direct autour du point x, on trouve la substitution S_3^{-1}.

Fig. 17.

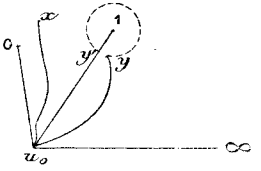
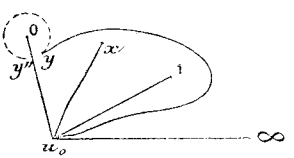


Fig. 18.



Enfin, en le faisant tourner dans le sens direct autour du point o (*fig.* 18), on trouve la cinquième et dernière substitution qui suit

$$
S_5 = \left|\begin{array}{ll}
\omega_1 & [(2\mu)+(-2\lambda)-(2\mu-2\lambda)]\omega_1+(-2b-2\lambda)[(2\mu)-1]\omega_2 \\
 & \quad +(-2\lambda)[(2\mu)-1][1-(-2b)]\omega_3 \\
\omega_2 & [(2a+2\lambda+2b+2\mu)-(2a+2b+2\mu)-(2b+2\lambda+2\mu) \\
 & \qquad -(2\mu-2\lambda)+(2b+2\mu)+(2\mu)+(-2\lambda)-1]\omega_1 \\
 & \quad +[(2\mu-2b-2\lambda)+(2a+2\mu)-(-2b-2\lambda)-(2\mu)+1]\omega_2 \\
 & \quad +[(2a+2b+2\mu)-(2\mu-2b-2\lambda)-(2a+2\mu) \\
 & \qquad -(2b+2\mu)+(2\mu-2\lambda)+(-2\lambda-2b)+(2\mu)-(-2\lambda)]\omega_3 \\
\omega_3 & [(2\mu)-1][1-(-2\lambda)]\omega_1+[(2\mu)-1](-2b-2\lambda)\omega_2 \\
 & \quad +[1-(-2\lambda)+(2\mu-2\lambda)+(-2b-2\lambda)-(2\mu-2\lambda-2b)]\omega_3
\end{array}\right|.
$$

L'équation déterminante relative à S_1 admet la racine double $s=1$ et la racine simple $s=(2a+2\lambda)$; celle relative à S_2 admet la racine double $s=1$ et la racine simple $s=(-2\lambda-2b)$; celle relative à S_3 admet la racine double $s=1$ et la racine simple $s=(-2\lambda-2\mu)$; celle relative à S_4 la racine double $s=1$ et la racine simple $s=(2\mu+2b)$; celle relative à S_5 admet la racine double $s=1$ et la racine simple $s=(2a+2\mu)$.

237. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de former la forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, que les cinq substitutions précédentes laissent inaltérées, au cas où l'on prend pour a, b, λ, μ l'une des solutions données à la fin du Chapitre V.

Soit

$$
\begin{aligned}
f = {} & A\omega_1\omega_1^0+A'\omega_2\omega_2^0+A''\omega_3\omega_3^0 \\
 & +B\omega_2\omega_3^0+B_0\omega_2^0\omega_3+B'\omega_3\omega_1^0+B'_0\omega_3^0\omega_1+B''\omega_1\omega_2^0+B''_0\omega_1^0\omega_2
\end{aligned}
$$

cette forme, A, A', A'' étant des constantes réelles, B et B_0, B' et B'_0, B'' et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

B_0'' des quantités imaginaires conjuguées, ω_1^0, ω_2^0, ω_3^0 étant les imaginaires conjuguées de ω_1, ω_2, ω_3.

Je formerai le déterminant suivant

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B_0'' & B' \\ B'' & A' & B_0 \\ B_0' & B & A'' \end{vmatrix}$$

et chercherai dans quel cas il est nul, en même temps que tous ses premiers mineurs, ou s'il existe des cas où δ est nul sans que tous ses premiers mineurs le soient.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution S_1 laisse la forme f inaltérée sont

$$\begin{aligned}
B'' \sin(a+\lambda)\pi + (-a)(A' + B_0)\sin\lambda\pi &= 0,\\
B_0'' \sin(a+\lambda)\pi + (\quad a)(A' + B\ )\sin\lambda\pi &= 0,\\
B' \sin(a+\lambda)\pi + (\quad a)(A'' + B_0)\sin\lambda\pi &= 0,\\
B_0' \sin(a+\lambda)\pi + (-a)(A'' + B\ )\sin\lambda\pi &= 0.
\end{aligned}$$

La substitution S_2 nous donne quatre autres équations

$$\begin{aligned}
B \sin\lambda\pi &= (\lambda + b)B_0'' \sin b\pi,\\
B_0 \sin\lambda\pi &= (-\lambda - b)B'' \sin b\pi,\\
B' \sin(\lambda - b)\pi &= (-\lambda)A \sin b\pi - (-b)A'' \sin\lambda\pi,\\
B_0' \sin(\lambda - b)\pi &= (\quad\lambda)A \sin b\pi - (\quad b)A'' \sin\lambda\pi.
\end{aligned}$$

Enfin la substitution S_4 peut se déduire de la substitution S_2 par le changement de ω_1 en ω_2, de ω_2 en ω_1, de λ en $-\mu$, et de b en $-b$. On en conclut

$$\begin{aligned}
B' \sin\mu\pi &= (b+\mu)B_0'' \sin b\pi,\\
B_0' \sin\mu\pi &= (-b-\mu)B'' \sin b\pi,\\
B \sin(\mu - b)\pi &= (-\mu)A' \sin b\pi - (-b)A'' \sin\mu\pi,\\
B_0 \sin(\mu - b)\pi &= (\mu)A' \sin b\pi - (b)A'' \sin\mu\pi,
\end{aligned}$$

ce qui donne, en les considérant simultanément,

$$\begin{aligned}
\sigma A &= \sin\lambda\pi \sin(a+b+\mu)\pi,\\
\sigma A' &= \sin\mu\pi \sin(a+b+\lambda)\pi,\\
\sigma A'' &= \sin b\pi \sin(a+\lambda+\mu)\pi
\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et

$$\sigma B = -(\lambda + a)\sin b\pi \sin \mu\pi,$$
$$\sigma B_0 = -(-\lambda - a)\sin b\pi \sin \mu\pi,$$
$$\sigma B' = -(\mu + a)\sin b\pi \sin \lambda\pi,$$
$$\sigma B'_0 = -(-\mu - a)\sin b\pi \sin \lambda\pi,$$
$$\sigma B'' = -(b - a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi,$$
$$\sigma B''_0 = -(a - b)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi.$$

On en conclut

$$\sigma^3 \delta = \sin \alpha\pi \sin b\pi \sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi.$$

Or, parmi les solutions dont nous avons donné le Tableau à la fin du Chapitre IV, nous devons éliminer celles où l'un des nombres a, b, c, d est égal à 1 ou à 0; en effet, nous supposons que, dans l'expression $\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}$, aucun des facteurs n'a un exposant nul; et de plus, on doit avoir $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Il en résulte que les nombres a, b, λ, μ sont certainement des *fractions*, et non pas des nombres entiers, et, par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour que δ soit nul, c'est que $a + b + \lambda + \mu$ soit égal à un nombre entier.*

D'ailleurs, on a

$$\sigma^2 a = \sigma^3(A'A'' - BB_0) = \sin \mu\pi \sin b\pi \sin(a + \lambda)\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi,$$
$$\sigma^2 a' = \sigma^2(A''A - B'B'_0) = \sin b\pi \sin \lambda\pi \sin(a + \mu)\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi,$$
$$\sigma^2 a'' = \sigma^2(AA' - B''B''_0) = \sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin(a + \lambda)\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi,$$
$$\sigma^2 b = \sigma^2(B'B'' - AB_0) = (-a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin \nu\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi,$$
$$\sigma^2 b' = \sigma^2(B''B - A'B'_0) = (-a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin \nu\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi,$$
$$\sigma^2 b'' = \sigma^2(BB' - A''B''_0) = (a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin \nu\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi.$$

Et il résulte de ces formules que, *si δ est nul, il en sera de même de tous ses premiers mineurs.*

238. Nous avons donc à partager les solutions trouvées au Chapitre IV en deux catégories, celles pour lesquelles $a + b + \lambda + \mu$ est un nombre entier, et celles pour lesquelles $a + b + \lambda + \mu$ est une fraction.

En nous plaçant à un autre point de vue, nous aurons à distinguer les solutions pour lesquelles aucun des dix nombres $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$, $c + d$, $a + b + c$, $b + c + d$, $c + d + a$, $d + a + b$ n'est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

entier. Pour les solutions correspondantes, le groupe hyperfuchsien qui y est attaché est tel que le polyèdre fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite; la surface du domaine fondamental n'a aucun point commun avec celle de cette hypersphère. Nous allons examiner successivement, en nous plaçant à ce double point de vue, les solutions trouvées au Chapitre IV.

Première catégorie : $a+b+c+d$ est entier.

$$a=b=c=d=\tfrac{1}{2}, \qquad 2a-1=0, \qquad 2-3a=\tfrac{1}{2}, \qquad 4a=2.$$

$$f=(\omega_1-\omega_2-\omega_3)(\omega_1^0+\omega_2^0-\omega_3^0), \qquad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-x)(u-y)}}.$$

Les cinq substitutions fondamentales sont

$$S_1=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_1,\ \omega_2-2\omega_1,\ \omega_3-2\omega_1\,|,$$
$$S_2=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ 3\omega_1-2\omega_3,\ \omega_2,\ 2\omega_1-\omega_3\,|,$$
$$S_3=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ 3\omega_1+2\omega_2-4\omega_3,\ -2\omega_1-\omega_2+4\omega_3,\ \omega_3\,|,$$
$$S_4=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_1,\ 3\omega_2-2\omega_3,\ 2\omega_2-\omega_3\,|,$$
$$S_5=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ -3\omega_1-2\omega_3+4\omega_3,\ \omega_2,\ -4\omega_1-2\omega_2+5\omega_3\,|.$$

$$a=b=c=d=\tfrac{3}{4}; \qquad 2a=1+\tfrac{1}{2}, \qquad 2-3a=-\tfrac{1}{4}, \qquad 4a=3.$$

$$f=(\omega_1-\omega_2+i\omega_3)(\omega_1^0-\omega_2^0-i\omega_3^0), \qquad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt[4]{u(u-1)(u-x)(u-y)}}.$$

$$S_1=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ -\omega_1,\ \omega_2-(1+i)\omega_1,\ \omega_3-(1+i)\omega_1\,|,$$
$$S_2=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ (1+i)\omega_3-i\omega_1,\ \omega_2,\ (1-i)\omega_1+i\omega_3\,|,$$
$$S_3=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ -i\omega_1+(i-1)\omega_2+2\omega_3,\ -(i+1)\omega_1+i\omega_2+2\omega_3,\ \omega_3\,|,$$
$$S_4=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_1,\ i\omega_2+(1-i)\omega_3,\ (1+i)\omega_2-i\omega_3\,|,$$
$$S_5=|\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ -\omega_1+(i+1)\omega_2-2i\omega_3,$$
$$-2(i+1)\omega_1+(2i+1)\omega_2+2(1-i)\omega_3,\ -2\omega_1+(1+i)\omega_2+(1-2i)\omega_3\,|.$$

Toutes les autres solutions rentrent dans la deuxième catégorie.

Citons, par exemple, le cas $a=b=c=d=\frac{1}{3}$. Ici

$$f=j(\omega_2\omega_3^0+\omega_3\omega_1^0)+j^2(\omega_2^0\omega_3+\omega_3^0\omega_1)+\omega_1\omega_2^0+\omega_3\omega_1^0,$$

où

$$j=(\tfrac{2}{3})=e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \delta=-1.$$

On peut écrire

$$f=uu_0+\tfrac{1}{2}vv_0-\tfrac{1}{2}ww_0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant

$$u = \omega_3,$$
$$v = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3,$$
$$w = \omega_2 - \omega_1 + (j - j^2)\omega_3,$$

d'où, inversement,

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}w - j^2 u,$$
$$\omega_2 = \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}w - ju,$$
$$\omega_3 = u.$$

Voici quelles sont ici les cinq substitutions fondamentales et leurs transformées :

$$S_1 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad j^2\omega_1,\ \omega_2 + (j-1)\omega_1,\ \omega_3 + (j-1)\omega_1\,|,$$
$$S_2 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2j^2\omega_1 + (j^2 - j)\omega_3,\ \omega_2,\ (1-j^2)\omega_1 + j^2\omega_3\,|,$$
$$S_3 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2j^2\omega_1 + (j-1)\omega_2 - 3j\omega_3,\ (j-1)\omega_1 + j^2\omega_2 + 3\omega_3,\ \omega_3\,|,$$
$$S_4 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad \omega_1,\ -2j\omega_2 + (j - j^2)\omega_3,\ (1-j)\omega_2 + j\omega_3\,|,$$
$$S_5 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2\omega_1 + (j^2 - j)\omega_2 - 3j^2\omega_3,\ -6\omega_1 + (j^2 - 3j)\omega_2 - 6j^2\omega_3,\ -3\omega_1 + (j^2 - j)\omega_2 + (1 - 3j^2)\omega_3\,|$$

et

$$S_1 = |\,u, v, w \quad j^2 u + \tfrac{1}{2}(j-1)v - \tfrac{1}{2}(j-1)w,\ (j^2 - j)u - \tfrac{1}{2}jv + \tfrac{1}{2}(1-j^2)w,\ (j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j^2 - 1)v - \tfrac{1}{2}(j^2 - 3)w\,|$$
$$S_2 = |\,u, v, w \quad ju + \tfrac{1}{2}(1-j^2)v - \tfrac{1}{2}(1-j^2)w,\ (j^2 - j)u - \tfrac{1}{2}j^2 v + \tfrac{1}{2}(1-j)w,\ (j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j-1)v - \tfrac{1}{2}(j-3)w\,|,$$
$$S_3 = |\,u, v, w \quad u,\ \tfrac{1}{2}(3j-1)v - \tfrac{3}{2}(j+1)w,\ -\tfrac{3}{2}(j+1)v - \tfrac{1}{2}(j-3)w\,|,$$
$$S_4 = |\,u, v, w \quad j^2 u + \tfrac{1}{2}(1-j)v + \tfrac{1}{2}(1-j)w,\ (j - j^2)u - \tfrac{1}{2}jv - \tfrac{1}{2}(j+2)w,\ (j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j+2)v + \tfrac{1}{2}(j+4)w\,|,$$
$$S_5 = |\,u, v, w \quad j^2 u + (j^2 - 1)v + (j^2 + 2)w,\ 2(j^2 - 1)u + (2j^2 - 1)v + 2(j^2 + 2)w,\ 2(2j^2 + 1)u + 2(2j^2 + 1)v + (2j + 5)w\,|.$$

Le cas $a = b = c = d = \frac{2}{3}$ est à rapprocher du précédent (il suffit de changer i en $-i$ dans les formules que l'on vient d'écrire). Ce cas a été étudié spécialement par M. Picard (¹).

Je vais me borner, pour les autres cas, à énumérer les solutions (a, b, c, d), telles que, dans le groupe hyperfuchsien correspondant, le

(¹) *Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, t. II, p. 114).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

polyèdre fondamental n'ait aucun point commun avec l'hypersphère limite :

$$a = b = c = d = \frac{5}{9}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{5},$$

$$a = b = c = \left|\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{5}{9} & \frac{5}{8} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{9}{20} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{5}{12} & \frac{17}{18} & \frac{4}{9} \end{array}\right|,$$

$$a = b = c = \left|\begin{array}{cccccccc} \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} & \frac{11}{15} & \frac{7}{8} & \frac{17}{24} \end{array}\right|,$$

$$a = b = \left|\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} & \frac{5}{8} & \frac{3}{5} & \frac{5}{12} & \frac{5}{9} & \frac{7}{12} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{12} & \frac{9}{20} & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{5}{6} & \frac{17}{18} & \frac{11}{12} & \frac{7}{12} & \frac{17}{24} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{8} & \frac{3}{10} & \frac{2}{3} & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} \end{array}\right|,$$

$$a = b = \left|\begin{array}{cccc} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} \end{array}\right|.$$

En tout..... $4 + 24 \times 4 + 16 \times 12 + 4 \times 6 = 316$ cas.

239. Pour terminer ce travail, je veux dire quelques mots du problème qui consiste à chercher si le système d'équations aux dérivées partielles (8) (n° 6) peut, pour certaines valeurs de α, β, β', γ, avoir son intégrale générale algébrique. Le problème revient à chercher pour quelles valeurs de a, b, λ, μ le groupe dont les cinq substitutions fondamentales sont S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 est un groupe fini.

En premier lieu, cherchons si l'on ne pourrait avoir un groupe dont les substitutions seraient de la forme

$$|\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad a\omega_1, \quad b\omega_2, \quad c\omega_3|,$$

a, b et c étant des racines de l'unité.

Remarquons tout d'abord que chacune des cinq substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 doit avoir pour forme canonique précisément une substitution de cette forme. Or les équations déterminantes des cinq substitutions consi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dérées ont pour racines $(2a+2\lambda)$, $(-2b-2\lambda)$, $(-2\lambda-2\mu)$, $(2b+2\mu)$, $(2a+2\mu)$ (*voir* n° 236).

Soient

$$(2a+2\lambda)=A, \qquad (2b+2\lambda)=B, \qquad (2\lambda+2\mu)=C,$$
$$(2b+2\mu)=D, \qquad (2a+2\mu)=E,$$

A, B, C, D et E étant des racines de l'unité.

On en conclut

$$(2a)=A(-2\lambda),$$
$$(2b)=B(-2\lambda),$$
$$(2\mu)=C(-2\lambda);$$

donc

$$D=BC(-4\lambda);$$

donc λ est réel et rationnel, et, par suite, il en est de même de a, b, μ.

La substitution S_1 sera de la forme indiquée si $(2\lambda)=1$, d'où il suit que λ doit être entier. Alors

$$S_1=|\,\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad (2a)\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3\,|.$$

La deuxième devient

$$S_2=\begin{vmatrix} \omega_1 & (-2b)\omega_1+[1-(-2b)]\omega_3 \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_3 \end{vmatrix};$$

on en conclut que b doit être entier, et S_2 devient la substitution identique. Alors

$$S_3=\begin{vmatrix} \omega_1 & (-2\mu)\omega_1+[1-(-2\mu)]\omega_2 \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_3 \end{vmatrix};$$

on en conclut que μ doit être entier.

S_3 devient la substitution identique.

S_4 dans ces conditions se réduit aussi à la substitution identique, et

$$S_5=|\,\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \omega_1,\quad (2a)\omega_2,\quad \omega_3\,|.$$

Ainsi on trouve la solution suivante : a rationnel, b, λ, μ entiers. Comme on a

$$\beta+\beta'-\gamma=a-1, \qquad \gamma-\alpha=b, \qquad \beta=1-\lambda, \qquad \beta'=1-\mu,$$

on en conclut que β et β' sont entiers, ainsi que $\gamma-\alpha$, γ et α étant rationnels.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si, d'une façon plus générale, on cherche si les substitutions du groupe peuvent être de la forme

$$|\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ a\omega_i,\ b\omega_j,\ c\omega_k|,$$

où i, j, k représentent l'une quelconque des permutations des indices 1, 2, 3, on retrouve les mêmes résultats.

Enfin si l'on essaye de faire en sorte que les substitutions soient de la forme $|\omega_i, \omega_j, \omega_k, \alpha\omega_i+\beta\omega_j, \gamma\omega_i+\delta\omega_j, \varepsilon\omega_k|$ ε étant racine de l'unité, et le groupe $|\omega_i, \omega_j, \alpha\omega_i+\beta\omega_j, \gamma\omega_i+\delta\omega_j|$ étant un groupe fini à deux variables, on retombe encore sur les mêmes résultats.

D'ailleurs si l'intégrale générale était une fonction algébrique de x et de y, elle serait une fonction algébrique de x seulement (y ayant une valeur constante quelconque). Donc le groupe formé par les trois premières substitutions prises seules devrait être fini. Or les groupes finis à trois variables autres que ceux déjà considérés dérivent de plus de *trois* substitutions fondamentales. Par suite, il n'y a pas d'autre solution que celle que nous avons indiquée plus haut.

240. Supposons maintenant que nous cherchions les cas où le système d'équations aux dérivées partielles (8), n° 6, admet *une seule* intégrale algébrique.

Je n'ai pas encore eu l'occasion d'écrire les équations auxquelles satisfait la série $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ considérée soit comme fonction de x seulement, soit comme fonction de y seulement. Ces équations, qui sont du troisième ordre, ont été données par M. Picard (1). Les voici

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$
$$+[(\beta+\gamma+2)x+(\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+2\beta+4)x^2+(\alpha+\beta-\beta'+3)xy]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$+(\beta+1)[\gamma-(2\alpha+\beta+2)x+(\alpha-\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta(\beta+1)z=0,$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$
$$+[(\beta'+\gamma+2)y+(\beta-\gamma-1)x-(\alpha+2\beta'+4)y^2+(\alpha+\beta'-\beta+3)xy]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+(\beta'+1)[\gamma-(2\alpha+\beta'+2)y+(\alpha-\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta'(\beta'+1)z=0.$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, n° 22, p. 1267, 31 mai 1880.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables qui satisfasse simultanément aux deux équations. Considérée comme fonction de x, elle admettra comme points critiques les points $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$, $x = y$.

$$\text{Les racines de l'équation déterminante relative aux points.....} \begin{cases} x = 0, \\ x = \infty, \\ x = 1, \\ x = y, \end{cases} \quad \text{sont} \quad \begin{cases} a = 0, 1, 1 + \beta' - \gamma, \\ b = \alpha, \beta, \beta + 1, \\ c = 0, 1, \gamma - \alpha - \beta, \\ d = 0, 1, 1 - \beta - \beta'. \end{cases}$$

Considérée comme fonction de y, elle admettra comme points critiques les points $y = 0$, $y = \infty$, $y = 1$, $y = x$.

$$\text{Les racines de l'équation déterminante relative aux points.....} \begin{cases} y = 0, \\ y = \infty, \\ y = 1, \\ y = x, \end{cases} \quad \text{sont} \quad \begin{cases} a' = 0, 1, 1 + \beta - \gamma, \\ b' = \alpha, \beta', \beta' + 1, \\ c' = 0, 1, \gamma - \alpha - \beta', \\ d' = 0, 1, 1 - \beta - \beta'. \end{cases}$$

Si les équations précédentes admettent une intégrale algébrique unique, ce sera une fonction algébrique de x seul, ou de y seul, les dérivées partielles logarithmiques du premier ordre seront des fonctions rationnelles de x et de y.

L'intégrale sera donc de la forme

$$z = x^a y^{a'} (1 - x)^c (1 - y)^{c'} (x - y)^d g(x, y).$$

a, a', c, c', d étant réels et rationnels, $g(x, y)$ étant un polynôme entier en x et en y, de degré m en x, de degré n en y, et l'on aura

$$b = -(a + c + d + m),$$
$$b' = -(a' + c' + d' + n).$$

Dès lors, le Tableau des intégrales que nous avons donné à la fin du Chapitre II nous fournira aisément des exemples où le système d'équations aux dérivées partielles (8) admet une seule intégrale algébrique.

m étant entier et positif, $F_1(-m, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ est un polynôme entier de degré m, en x et en y.

On aura encore, comme intégrales algébriques,

$$(1 - x)^{\frac{p}{q}} (1 - y)^n F_1\left(\gamma + m + n + \frac{p}{q}, -m, -n, \gamma; x, \frac{x - y}{y - 1}\right),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant $\beta' = -m$, $\gamma - \beta - \beta' = -n$, $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p}{q}$, m, n, p, q étant entiers, positifs, puis

$$(1-y)^{\frac{p}{q}}(1-x)^m \mathrm{F}_1\left(\gamma + m + n + \frac{p}{q}, -m, -n, \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right),$$

dans des circonstances analogues.

Si l'on pose $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $\beta' = -n$, $1 + \alpha - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}} y^n \mathrm{F}_1\left(\beta + \frac{p}{q}, -m, -n, \beta - m - n; 1-x, \frac{y-x}{y}\right),$$

et, dans des circonstances analogues

$$y^{\frac{p}{q}} x^m \mathrm{F}_1\left(\beta' + \frac{p}{q}, -m, -n, \beta' - m - n; \frac{x-y}{x}, 1-y\right).$$

Si l'on pose $1 - \beta - \beta' = \frac{p}{q}$, $\gamma - \beta - \beta' = -n$, $1 + \alpha - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$(y-x)^{\frac{p}{q}}(-x)^n (1-x)^m \mathrm{F}_1\left(1-\beta, -m, -n, 1-\beta-m-n-\frac{p}{q}, \frac{1-y}{1-x}, \frac{y}{x}\right).$$

Si l'on pose $1 + \beta - \gamma = \frac{p'}{q'}$, $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $1 + \beta + \beta' - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p'}{q'}} (y-x)^m \mathrm{F}_1\left(-m, \alpha + m + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}, 1-\alpha, 1+\frac{p}{q}; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{x}{x-y}\right).$$

Si l'on pose $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p'}{q'}$, $\beta' = -n$, $1 - \alpha = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}}(1-x)^{\frac{p'}{q'}}(y-x)^n \mathrm{F}_1\left[1 + m + n + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}, -m, -n, 1+\frac{p}{q}; x, \frac{x(1-y)}{x-y}\right]$$

et, dans des circonstances analogues,

$$y^{\frac{p}{q}}(1-y)^{\frac{p'}{q'}}(x-y)^m \mathrm{F}\left[1 + m + n + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} - m, -n, 1+\frac{p}{q}, \frac{y(1-x)}{y-x}, y\right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En posant $\gamma-\alpha-\beta=\frac{p}{q}$, $\gamma-\alpha-\beta'=\frac{p'}{q'}$, $\gamma-\alpha=-m$, on aura l'intégrale algébrique

$$(1-x)^{\frac{p}{q}}(1-y)^{\frac{p'}{q'}}(x-y)^m F_1\left[-m, 1-\alpha, \gamma-2m-\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}, 1+\frac{p}{q}; \frac{1-x}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x}\right],$$

et ainsi de suite.

241. Pour finir, démontrons le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème analogue concernant l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss (¹).

Soient z_1, z_2, z_3 trois intégrales particulières, distinctes, du système d'équations aux dérivées partielles (8). Si l'on pose $p_i=\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $q_i=\frac{\partial z_i}{\partial y}$, et si Δ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix},$$

on sait que

$$\Delta = A x^{\beta'-\gamma} y^{\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1} (x-y)^{-\beta-\beta'}.$$

(*Voir* le Mémoire de M. Appell, déjà cité.)

Si z_1, z_2, z_3 sont des fonctions algébriques de x et de y, il en sera de même de $\omega_1=\frac{z_1}{z_3}$ et de $\omega_2=\frac{z_2}{z_3}$. *Réciproquement*, si ω_1 et ω_2 sont des fonctions algébriques de x et de y, et si Δ est aussi une fonction algébrique de x et de y (ce qui aura lieu si α, β, β', γ sont réels et rationnels), z_1, z_2 et z_3 seront aussi des fonctions algébriques de x et de y.

En effet, si ω_1, ω_2 sont des fonctions algébriques, il en sera de même de $\frac{\partial\omega_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega_2}{\partial y}$. Or

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = z_1 z_2 z_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1} & \frac{p_2}{z_2} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1} & \frac{q_2}{z_2} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix} = \omega_1\omega_2 z_3^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1}-\frac{p_3}{z_3} & \frac{p_2}{z_2}-\frac{p_3}{z_3} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1}-\frac{q_3}{z_3} & \frac{q_2}{z_2}-\frac{q_3}{z_3} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix};$$

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Schwarz : *Sur les cas dans lesquels la série hypergéométrique de Gauss représente une fonction algébrique de son quatrième élément* (*Journal de Crelle*, t. LXXV, p. 292, 335).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'ailleurs

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x}=\frac{p_1}{z_1}-\frac{p_3}{z_3},\qquad \frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial y}=\frac{q_1}{z_1}-\frac{q_3}{z_3},$$

$$\frac{1}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}=\frac{p_2}{z_2}-\frac{p_3}{z_3},\qquad \frac{1}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial y}=\frac{q_2}{z_2}-\frac{q_3}{z_3};$$

donc

$$\Delta=z_3^3\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{\partial\omega_2}{\partial y}-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right).$$

Donc z_3 est une fonction algébrique de x et de y, et par suite aussi z_1 et z_2.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 avril 1893.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 avril 1893.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Des petits mouvements dans un milieu élastique. — Applications à la propagation de la lumière.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 avril 1893.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 avril 1893.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

19831 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC