

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DE

LA CHALEUR.

THÈSE



SOUTENUE DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES,

LE 1854,

PAR J.-M.-C. DUHAMEL,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



Paris.

GUIRAUDET, IMPRIMEUR, RUE SAINT-HONORÉ, N° 515.

1854.

UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.



MM. Baron THÉNARD (doyen)	}	PROFESSEURS.
LACROIX		
BIOT.		
Baron POISSON		
FRANCOEUR		
DULONG.		
BEUDANT		
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	}	PROFESSEURS-ADJOINTS.
MIRBEL		
DE BLAINVILLE.		
HACHETTE		
POUILLET.		
CONSTANT PRÉVOST.		
DUMAS	}	SUPPLÉANTS.
LEFÈBRE DE FOURCY		
LÉVY		



THÈSE

SUR LA

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA CHALEUR.

Toutes les fois qu'on veut appliquer l'analyse mathématique à une classe de phénomènes, on commence par déterminer expérimentalement un certain nombre de faits généraux, ou par choisir les hypothèses qui paraissent les plus plausibles et semblent le mieux s'accorder avec les faits connus; on exprime ensuite analytiquement ces faits généraux, ou ces hypothèses, considérées comme entièrement exactes, et, par le moyen des méthodes de transformation et de déduction que fournit l'analyse, on peut parvenir à prévoir et à mesurer tous les phénomènes successifs qui résulteront de données précises et suffisantes.

L'exactitude des résultats ainsi obtenus dépend de celle des hypothèses premières. Elle ne saurait être plus grande, en général; mais elle peut être beaucoup moindre, parce que des erreurs très faibles au point de départ pourraient assez s'accumuler pour devenir du même ordre que les quantités qu'on veut calculer, et les résultats de l'analyse n'auraient plus aucun rapport avec ceux de l'expérience. Cette comparaison est la vérification nécessaire de toutes les théories physico-mathématiques, elle apprend les modifications successives qu'il faut faire aux hypothèses pour représenter fidèlement les phénomènes dans des circonstances de plus en plus variées.

Le fait général qui sert de base à la théorie mathématique de la chaleur, du moins dans ce qui se rapporte à sa propagation, consiste en ce que deux particules à des températures différentes ont l'une sur l'autre une action telle, que la moins échauffée acquiert, dans un temps donné infiniment petit, une quantité de chaleur proportionnelle à la différence de leurs températures. Cette quantité dépend en outre de la nature des particules, de leur masse, et de leurs positions respectives.

Ce fait une fois admis, la théorie mathématique a pour objet de déterminer, à un instant quelconque, l'état thermométrique d'un système dont l'état initial est donné, avec la nature des substances et les circonstances extérieures, si ce système n'est pas infini dans tous les sens.

Je me propose ici d'établir succinctement les équations différentielles qui règlent ces changements successifs, et les principales méthodes qu'on emploie pour en déduire l'expression finie qui les représente et les mesure.

Mouvement de la chaleur dans les solides.

Le calcul de la propagation de la chaleur dans les solides se ramène à la détermination du *flux* qui traverse un élément plan intérieur, c'est-à-dire à l'excès de la quantité de chaleur qui passe d'un côté de ce plan sur celle qui passe de l'autre dans le même temps.

Pour faire la somme des quantités de chaleur que les molécules situées d'un côté du plan intérieur envoient à celles qui sont situées de l'autre, on peut supposer la substance continue, si l'on admet que la fonction qui représente l'action de deux molécules ne change pas sensiblement quand leur distance varie d'une quantité égale à l'intervalle qui sépare les molécules les plus voisines. Nous supposerons en outre que cette fonction dépend de la direction de la droite qui joint les deux molécules, et de la position de l'une d'elles.

Cela posé, on calculera d'abord la quantité de chaleur qui, dans un temps infiniment petit, traverse l'élément plan intérieur, suivant une même direction. Elle provient de l'action mutuelle des couples des molécules situées respectivement de côtés différents du plan, et telle que la droite qui les joint soit parallèle à la direction que l'on considère. Cette quantité, que l'on pourra indiquer soit par une intégrale définie, soit par une somme, suivant qu'on considérera la substance comme continue ou discontinue, sera une fonction des angles de cette direction avec les axes fixes. On fera ensuite la somme de toutes les valeurs positives ou négatives que prend cette expression quand la direction choisie varie dans tous les sens d'un même côté du plan, et on aura ainsi l'excédant de la quantité totale de chaleur qui passe d'un côté de ce plan sur celle qui passe de l'autre; on rapportera cette quantité à l'unité de surface et à l'unité de temps, et on aura ainsi l'expression du *flux* relatif à la position et à la direction de l'élément. Cette expression, dont le calcul n'offre aucune difficulté, est

$$-\left(A\frac{du}{dx} + D\frac{du}{dy} + E\frac{du}{dz}\right)\cos\alpha - \left(D\frac{du}{dx} + B\frac{du}{dy} + F\frac{du}{dz}\right)\cos\beta - \left(E\frac{du}{dx} + F\frac{du}{dy} + C\frac{du}{dz}\right)\cos\gamma.$$

u désigne la température; α, β, γ , sont les angles que forme avec les axes la normale à l'élément plan, que nous nommerons l'axe du flux; A, B, C, D, E, F , sont des quantités dépendantes des coordonnées du point que l'on considère, si la conductibilité est variable d'un point à un autre. Ce sont des constantes dans une assez grande étendue de l'échelle thermométrique, si la conductibilité ne dépend que de la direction. Les trois dernières sont nulles et les trois premières égales, lorsque la conductibilité est la même en tout point et suivant toute direction.

Si l'on désigne par F le flux dont l'axe est déterminé par les angles α, β, γ , et par

X, Y, Z , ceux dont les axes sont respectivement parallèles aux x, y, z , on trouvera

$$F = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma.$$

Cette formule montre que le flux à travers un élément plan quelconque est toujours égal à la somme de ceux qui se rapporteraient à ses projections sur trois plans rectangulaires menés par le même point. On en déduit facilement la direction de l'axe du flux maximum, ainsi que les équations différentielles des lignes dont la tangente est toujours dirigée suivant l'axe du flux maximum, et, par suite, normale aux surfaces isothermes.

On en déduit encore les directions remarquables pour lesquelles le flux est le même que si la conductibilité était égale en tous sens. J'ai donné à ces directions le nom d'axes principaux de conductibilité. Leur considération est surtout importante dans le cas où la conductibilité ne varie qu'avec la direction.

L'expression du flux conduit à l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides. Si l'on considère en effet un parallépipède infiniment petit ayant ses arêtes parallèles aux axes de coordonnées, et que l'on calcule la différence entre la quantité chaleur qui entre et celle qui sort par ses diverses faces dans un temps infiniment petit, on en conclura facilement l'élévation de sa température.

On parviendra ainsi à l'équation suivante, dans laquelle q désigne la chaleur spécifique de la substance,

$$(1) \quad q \frac{du}{dt} = \left\{ \frac{d \left(A \frac{du}{dx} + D \frac{du}{dy} + E \frac{du}{dz} \right)}{dx} + \frac{d \left(D \frac{du}{dx} + B \frac{du}{dy} + F \frac{du}{dz} \right)}{dy} + \frac{d \left(E \frac{du}{dx} + F \frac{du}{dy} + C \frac{du}{dz} \right)}{dz} \right\}.$$

Cette équation se réduit à son second membre quand les températures de chaque point sont invariables. Si la conductibilité varie avec la direction seulement, A, B, C, D, E, F , sont des constantes, et l'on a

$$(2) \quad q \frac{du}{dt} = \left(A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{d^2u}{dy^2} + C \frac{d^2u}{dz^2} + 2D \frac{d^2u}{dx dy} + 2E \frac{d^2u}{dx dz} + 2F \frac{d^2u}{dy dz} \right).$$

Si elle varie seulement avec la position on a

$$A = B = C, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

$$(3) \quad q \frac{du}{dt} = \frac{d \cdot A \frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d \cdot A \frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d \cdot A \frac{du}{dz}}{dz}.$$

C'est l'équation donnée avant moi par M. Poisson.

Enfin si elle est constante en tous les points et dans tous les sens, il faudra supposer en outre A constant, et l'on aura

$$(4) \quad q \frac{du}{dt} = A \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right).$$

C'est l'équation donnée primitivement par M. Fourier.

L'équation (2) peut être simplifiée en prenant pour axes des coordonnées des droites parallèles aux axes principaux de la substance ; elle devient alors

$$q \frac{du}{dt} = A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{d^2u}{dy^2} + C \frac{d^2u}{dz^2}.$$

Elle se réduit à l'équation (4) quand on suppose $A = B = C$, ce qui n'exige pas que la conductibilité soit la même en tout sens.

Ces diverses propositions sont extraites d'un mémoire que j'ai présenté à l'Institut en 1828.

Si la chaleur se propage dans une substance indéfinie dans tous les sens, l'équation précédente suffit avec l'état initial pour déterminer tous les états thermométriques successifs. Mais s'il s'agit d'un corps limité, il y aura pour les points de la surface une condition particulière qui exprime que la quantité de chaleur qui sort par chaque élément de la surface, en vertu du rayonnement et de l'action du milieu, est égale au flux déterminé au même point par l'état intérieur. Cette condition est essentielle pour que la température des points voisins de la surface ne subisse pas des variations infinies dans des temps finis. Elle est exprimée par l'équation suivante, qui ne doit avoir lieu que pour les points de la surface

$$X \cos a + Y \cos b + Z \cos c = H (a - \zeta).$$

a, b, c , désignent les angles que la normale fait avec les axes, ζ est la température du milieu, et H une certaine fonction des coordonnées de la surface, qui se réduit à une constante dans l'hypothèse de M. Fourier. Ce grand géomètre observe que le second membre doit être changé de forme si l'on ne suppose pas la perte de chaleur, à la surface, proportionnelle à l'excès de température du milieu.

M. Poisson a donné les équations qui ont lieu à la surface de séparation de deux solides juxtaposés. Elles expriment que le flux relatif à un élément quelconque de cette surface est proportionnel à la différence des températures des deux substances, pour des points infiniment voisins de cette même surface ; et que ce flux est le même, au signe près, pour les deux substances.

Au moyen de ces différentes équations, la propagation de la chaleur dans les solides est ramenée à une question d'analyse pure.

Mouvement de la chaleur dans les liquides.

Considérons maintenant le mouvement de la chaleur dans les liquides.

Il faudra encore chercher la quantité de chaleur que gagne dans un temps infini-

ment petit le liquide compris dans le parallépipède fixe $dx dy dz$. Cette quantité sera égale à celle qui entre par le rayonnement, comme dans le cas des solides, et en outre à celle que le mouvement du fluide y introduit. Désignant par q la chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, et que nous regardons toujours comme indépendante de la température; par ϵ la densité variable; par α, ϵ, γ , les composantes de la vitesse du liquide, et par K la conductibilité, supposée constante, on obtiendra ainsi l'équation suivante :

$$\frac{d(u\epsilon)}{dt} = \frac{K}{q} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) - \left(\frac{d.\epsilon.\alpha u}{dx} + \frac{d.\epsilon.\epsilon u}{dy} + \frac{d.\epsilon.\gamma u}{dz} \right).$$

On supposera que le liquide se dilate uniformément entre les limites que l'on considérera, et qui seront par exemple de 0° à 100° . On aura ainsi :

$$\epsilon = e(1 - hu),$$

e étant la densité du liquide à la température zéro, et h la dilatation de l'unité de volume, en passant de zéro à la température de l'eau bouillante.

L'équation ci-dessus diffère de celle donnée par M. Fourier en ce qu'on y suppose constante la chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, et non à l'unité de volume.

Si dans certains cas on peut négliger les termes multipliés par le coefficient h , qui a une valeur très petite, notre équation rentre dans celle de M. Fourier.

En observant que l'équation de continuité donne alors

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\epsilon}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

notre équation devient

$$e \frac{du}{dt} = \frac{K}{q} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) - e \left(\alpha \frac{du}{dx} + \epsilon \frac{du}{dy} + \gamma \frac{du}{dz} \right).$$

Si on négligeait aussi le coefficient K , très petit dans les liquides, on aurait

$$\frac{du}{dt} + \alpha \frac{du}{dx} + \epsilon \frac{du}{dy} + \gamma \frac{du}{dz} = 0.$$

A ces équations on devra joindre les quatre équations ordinaires de l'hydrodynamique.

Intégration des équations précédentes.

Aucune application n'ayant encore été faite des équations du mouvement de la chaleur dans les liquides, nous nous bornerons à considérer celles qui se rapportent aux solides.

Il est facile de s'assurer d'abord qu'il ne peut y avoir qu'une seule valeur de u qui satisfasse à l'équation indéfinie, aux équations relatives à la surface et à l'état initial, quand il s'agit du mouvement varié; il suffit donc d'en trouver une par une voie quelconque.

La marche la plus simple à suivre pour y parvenir consiste à chercher d'abord des solutions particulières qui satisfassent en tout ou en partie aux conditions de la surface, à en former une plus générale en les ajoutant, et à déterminer les arbitraires qu'elles renferment, de manière à ce que toutes les conditions soient remplies.

Quelle que soit au reste la marche que l'on suive, il est souvent indispensable de faire usage de certaines formes particulières dans le développement des fonctions.

L'une de ces formules est la suivante

$$F(x) = \frac{1}{2l} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^{+l} F(u) \cos(mx - mu) du.$$

Elle a été donnée d'abord par Lagrange dans un de ses mémoires sur la propagation du son. On la retrouve dans un mémoire posthume d'Euler, mais sans aucun examen de la convergence de la série, de la discontinuité de la fonction, et des limites entre lesquelles elle est représentée. M. Fourier en a fait un grand usage, et l'a démontrée de plusieurs manières qui montrent clairement le sens précis qu'on doit y attacher. Le second membre de cette équation représente une fonction arbitraire pour les valeurs de x , comprise entre $-l$ et $+l$; elle se reproduit ensuite périodiquement par intervalles égaux à $2l$. Elle s'étend à un nombre quelconque de variables. M. Fourier en a déduit une autre formule d'une grande importance, qu'il a encore démontrée de diverses manières; cette formule est la suivante

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cos(qx - qu) dq du,$$

laquelle peut de même être étendue à un nombre quelconque de variables.

Lorsque l'on emploie des coordonnées polaires, ce qui est quelquefois presque indispensable, les fonctions dépendent d'un rayon vecteur r et de deux angles θ , ψ , dont les limites sont 0 et π pour le premier, 0 et 2π pour le second. Il est utile alors d'employer la formule suivante :

$$F(\theta, \psi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (2n+1) P_n F(\theta', \psi') \sin \theta' d\theta' d\psi',$$

qui se trouve démontrée et discutée dans un mémoire de M. Poisson, imprimé dans le dix-neuvième cahier du Journal de l'Ecole polytechnique. Il en a fait usage dans le calcul du refroidissement d'une sphère primitivement échauffée d'une manière quelconque; il a montré en même temps comment on pouvait en déduire

une propriété importante de certaines fonctions qui jouent un grand rôle dans l'attraction des sphéroïdes. Enfin ce savant géomètre a fait voir que cette formule renfermait la première des deux précédentes, et a donné le moyen d'y parvenir, en supposant la fonction F indépendante de θ . On aurait pu y être conduit en supposant F indépendant de ψ ; on serait parvenu seulement à représenter une fonction dont la période serait 2π , mais qui n'aurait de valeur arbitraire qu'entre 0 et π , et serait nulle entre π et 2π .

Enfin on est souvent obligé de développer une fonction en séries de termes dépendants de racines d'équations transcendentes. Ces formes peuvent varier à l'infini, et il serait hors de propos d'énumérer ici toutes celles dont les géomètres ont fait usage. Ces équations déterminées résultent des conditions relatives à la surface qui termine le corps. Elles ont une infinité de racines réelles inégales, et n'en ont pas d'imaginaires.

Propagation de la chaleur dans un solide indéfini en tous sens.

Lorsque l'on considère un solide indéfini dans tous les sens, et dont l'état initial est connu, il est facile de trouver la formule générale qui représente ses états successifs. Lorsque la conductibilité est la même dans toutes les directions, l'équation à intégrer est de la forme suivante :

$$\frac{du}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right),$$

et il faut qu'en faisant $t = 0$, on ait $u = F(x, y, z)$, F étant une fonction arbitraire. On aura immédiatement une valeur très simple de u en posant

$$u = A e^{-a^2(m^2+n^2+p^2)t} \cos(mx - m\alpha) \cos(ny - n\beta) \cos(pz - p\gamma).$$

On peut faire varier arbitrairement les constantes A , m , n , p , α , β , γ , et faire la somme d'autant de solutions que l'on voudra. Si donc on fait varier ces quantités d'une manière continue en prenant

$$A = dm \, dn \, dp \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \, F(\alpha, \beta, \gamma),$$

on aura une solution plus générale de l'équation; et, d'après un théorème précédent, elle donnera

$$u = (2\pi)^3 F(x, y, z),$$

quand on fera $t = 0$, si toutes les intégrales sont prises, comme nous le supposons, entre les limites $-\infty$ et $+\infty$.

On aura donc la solution cherchée, relative à l'état initial donné, en prenant

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \iiint \iiint e^{-a^2(m^2+n^2+p^2)t} \cos(mx - m\alpha) \cos(ny - n\beta) \cos(pz - p\gamma) F(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma dm \, dn \, dp.$$

On peut effectuer les intégrations relative à m, n, p , en faisant usage de la formule suivante donnée par M. Laplace.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \cos 2kr dr = e^{-k^2} \sqrt{\pi}.$$

On trouvera ainsi

$$u = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} \iiint e^{-q^2 - r^2 - s^2} F(x + 2aq\sqrt{t}, y + 2ar\sqrt{t}, z + 2as\sqrt{t}) dq dr ds,$$

et l'on vérifiera facilement qu'elle satisfait à toutes les conditions.

Si les intégrales relatives aux variables α, β, γ , étaient prises entre les limites α', α'' ; β', β'' ; γ', γ'' , on sait que la formule (1) donnerait, pour $t = 0$, une valeur nulle pour u , quand on prendrait x, y, z , en dessous des limites de l'intégration, et qu'elle donnerait $F(x, y, z)$ entre ces limites.

Les limites des intégrales de la formule (2) feraient alors $\frac{\alpha' - x}{2a\sqrt{t}}, \frac{\alpha'' - x}{2a\sqrt{t}}$, pour q , et de même des autres.

Et il est bon de reconnaître, d'après cette forme, entre quelles limites l'état initial est représenté par $F(x, y, z)$: or, si l'on fait $t = 0$ dans l'équation (2), il vient

$$u = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} \iiint e^{-q^2 - r^2 - s^2} dq dr ds F(x, y, z).$$

Les limites relatives à q deviennent infinies pour $t = 0$; elles sont de signes contraires si x est entre α' et α'' , et l'intégration par rapport à q donne alors $\sqrt{\pi}$; mais elles sont de même signe si x n'est pas entre α' et α'' , et alors l'intégrale est nulle. Il en est de même relativement à r et s : on aura donc $u = F(x, y, z)$ entre les limites α', α'' ; β', β'' ; γ', γ'' ; et $u = 0$ dès qu'une des variables x, y, z , sera en dehors de ces limites respectives.

Si donc on veut que l'état initial soit représenté jusqu'à l'infini par une fonction arbitraire, il faut que toutes les intégrales aient pour limites $+\infty$ et $-\infty$.

Si la conductibilité était variable avec la direction, mais indépendante de la position, il faudrait faire usage de l'équation suivante, rapportée à des axes de coordonnées parallèles aux axes principaux de conductibilité:

$$\frac{du}{dt} = A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{d^2u}{dy^2} + C \frac{d^2u}{dz^2}.$$

L'intégrale complète de cette équation est

$$u = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} F \left\{ x + 2\alpha\sqrt{At}, y + 2\beta\sqrt{Bt}, z + 2\gamma\sqrt{Ct} \right\} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Cas où les circonstances extérieures varient avec le temps.

M. Fourier a démontré un principe très fécond dans la théorie de la chaleur, celui de la superposition des effets. Il consiste en ce que, si l'on décompose l'état thermométrique initial d'un système en un nombre quelconque d'états différents, et que chacun de ces états se développe comme s'il était seul, leur superposition recomposera à chaque instant l'état réel du système proposé au bout du même temps.

En appliquant ce principe à des états thermométriques qui ne commencent pas au même instant, mais à des époques qui se suivent d'une manière continue, je suis parvenu à une méthode générale applicable au cas d'un système quelconque de points matériels soumis à l'action d'un milieu dont la température varie avec le temps, suivant une loi donnée arbitraire, ou dont un certain nombre sont assujettis à passer par des températures données arbitrairement en fonction du temps. Le mémoire que j'ai présenté sur ce sujet à l'Institut est imprimé dans le Journal de l'École polytechnique. M. Fourier avait traité auparavant un cas particulier de la même question, mais par des considérations dépendantes du calcul de ce cas isolé. J'ai étendu et généralisé sa solution, et j'ai ainsi obtenu la méthode qui ramène toujours la question au cas où les circonstances extérieures sont invariables. J'en ai fait l'application à diverses questions, et en particulier au cas d'une sphère primitivement échauffée d'une manière quelconque, et qui se refroidit dans un milieu dont la température est exprimée par une fonction arbitraire du temps. Cette question avait été traitée, dans le cas d'un milieu invariable, d'abord par M. Laplace, puis avec beaucoup plus de développement par M. Poisson, qui a considéré quelques cas particuliers de la variation du milieu. La méthode dont je viens de parler conduit sans difficulté à la solution la plus générale de cette question. Le mémoire où j'ai traité cette question étant imprimé, je me dispenserai d'en rapporter ici les calculs.

Calculs des effets mécaniques produits par le changement de température.

Les géomètres n'avaient encore considéré la théorie de la chaleur que sous le rapport des effets thermométriques, lorsque je fis connaître les équations générales qui déterminent les pressions ou tensions qui ont lieu soit à l'intérieur, soit à la surface d'un corps solide, et la figure qu'il affecte pour un état thermométrique donné, quand on connaît toutes les circonstances relatives à un état primitif. Ces équations renferment d'abord les mêmes termes que celles que M. Navier a données pour l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, et, en outre, des termes provenant des forces développées par le changement de température.

Trois d'entre elles ont lieu pour tous les points de l'intérieur ; elles ont la forme suivante :

$$5 \delta'_{\Delta} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X \right) = 3 \frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2z}{dc^2} + 2 \frac{d^2y}{dad b} + \frac{2d^2z}{dad c} - 5 \delta \frac{du}{du},$$

$$5 \delta'_{\Delta} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y \right) = \dots$$

.....

Les trois suivantes n'ont lieu que pour les points de la surface ,

$$5 \delta' X' = \left(3 \frac{dx}{da} + \frac{dy}{db} + \frac{dz}{dc} \right) \cos l + \left(\frac{dx}{db} + \frac{dy}{da} \right) \cos m + \left(\frac{dx}{dc} + \frac{dz}{da} \right) \cos n - 5 \delta u \cos l,$$

$$5 \delta' Y' = \dots$$

.....

a, b, c , désignent les coordonnées primitives d'un point ; x, y, z , leurs accroissements ; X, Y, Z , les composantes des forces qui agissent sur tous les points ; X', Y', Z' , celles des pressions exercées sur la surface ; l, m, n , les angles formés avec les axes par la normale à la surface ; Δ la densité primitive du corps ; δ et δ' les dilatations linéaires provenant de l'élevation de la température et de la traction.

Ces équations feront connaître x, y, z , quand la température u sera donnée ; et cette température sera déterminée à chaque instant par la théorie précédente. Dans le mémoire que j'ai présenté sur ce sujet à l'Institut, j'ai fait diverses applications de ces équations, mais ce n'est pas le lieu de les indiquer ici. Je n'ai voulu que présenter un point de vue nouveau , sous lequel on aura maintenant à envisager la théorie de la chaleur , et je ne pouvais me dispenser d'en parler dans une thèse sur les généralités de cette théorie.

De la chaleur provenant des dilatations ou contractions de la substance.

Les géomètres qui se sont occupés de la théorie de la chaleur, ne connaissant pas les effets mécaniques dont nous venons de donner les équations générales , supposaient que les changements de température produisaient en chaque point la même dilatation que si tout le corps avait subi le même changement que ce point. Notre théorie a prouvé qu'il en était autrement ; et il en résulte une modification dans l'équation de la propagation de la chaleur dans les solides.

Lorsque la température change en un point, les coefficients spécifiques de la substance subissent bien quelques légères variations ; mais, dans les limites ordinaires,

elles sont de peu d'importance, et M. Fourier avait déjà indiqué comment on devrait y avoir égard dans des approximations de plus en plus précises.

L'observation que nous faisons ici porte sur un tout autre objet. Elle est fondée sur ce que la chaleur spécifique, tout en étant considérée comme constante aux diverses températures, n'est pas la même quand le corps est soumis à une pression constante, et quand il est maintenu à un volume constant. Bien qu'on n'ait pas encore d'expériences qui permettent d'assigner le rapport de ces deux quantités, on sait que la première est plus grande que la seconde, puisque tous les corps dégagent de la chaleur quand on les comprime. D'après cela si on connaît la quantité de chaleur que reçoit une partie infiniment petite du corps, on pourra calculer l'élevation de température résultante, en supposant que cette partie se dilate comme si elle était soumise à une pression constante, et qu'ensuite on la comprime ou on la dilate de manière à lui donner la densité qu'elle doit avoir d'après l'équilibre mécanique : la quantité de chaleur dégagée ou absorbée par ce moyen déterminera la modification que doit subir l'accroissement déjà calculé de la température.

L'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides homogènes devient alors de la forme (*)

$$\frac{du}{dt} = k^2 \left(\frac{d^2u}{da^2} + \frac{d^2u}{db^2} + \frac{d^2u}{dc^2} \right) - \mu \left(\frac{d^2x}{dadt} + \frac{d^2y}{dbdt} + \frac{d^2z}{cdt} \right),$$

μ étant une constante à déterminer par l'expérience. De cette manière la théorie de la chaleur et la théorie de l'élasticité se trouvent dépendantes l'une de l'autre, et le problème analytique consiste à intégrer quatre équations où entrent les quatre fonctions x, y, z, u , assujetties d'ailleurs aux conditions connues relatives à la surface.

Quoiqu'on ne puisse assigner la valeur de la constante μ , on peut dans une première approximation négliger les termes additionnels, pour y avoir égard dans une seconde, d'après les méthodes connues.

Lorsque les températures sont devenues invariables, notre équation reprend la forme de celle de Fourier.

Résultat singulier qu'on obtient en considérant les termes des ordres supérieurs au second.

L'équation de la propagation de la chaleur renfermerait des coefficients différentiels de tous les ordres pairs, jusqu'à l'infini, si l'on ne négligeait pas les termes

(*) *Bulletin de la Société Philomatique*, juin 1855.

qui renferment les puissances paires, supérieures à la seconde, de la distance où l'action des molécules est sensible. M. Fourier a donné la formule qui se rapporte à ce cas général, en supposant un solide indéfini dans tous les sens. Mais il n'a pas considéré les températures fixes ou variables des différents points d'un corps limité, au moins en certains sens.

En examinant cette question, j'ai été conduit à ce résultat singulier qu'il y a une infinité d'états fixes compatibles avec les mêmes circonstances relatives à la surface. Ainsi, par exemple, si l'on suppose un solide indéfini, compris entre deux bases parallèles, exposées à l'action de deux milieux assujettis à des températures constantes, il y aura une infinité d'états thermométriques qui satisferont à toutes les équations de la question. Le problème ne deviendra déterminé que si l'on se donne, par exemple, pour les deux bases, le coefficient différentiel du premier ordre de la température par rapport à l'abscisse.

Je me contente ici d'indiquer ce résultat, que je me propose de discuter avec plus de détail dans un autre écrit.

*Vu et approuvé par le doyen de la faculté des sciences
de l'Académie de Paris, 9 janvier 1834.*

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

L'inspecteur général des études chargé de
l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.