COURS
D'ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON,

DE LA MARINE, DU COMMERCE,

ET DES ÉLEVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Par BÉZOUT, *de l'Académie des Sciences et de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon et de la Marine, des Eleves et Aspirans au Corps de l'Artillerie.*

PREMIERE PARTIE.

SECONDE ÉDITION.

A PARIS, RUE DE THIONVILLE,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la quatrieme maison en entrant par le Pont-Neuf.

L'An VII^e de la République Française.

Cours élémentaire et complet de Mathématiques-pures, rédigé par la *Caille*, augmenté par *Marie*, et éclairci par *Theveneau*, ancien professeur de Mathématiques des gardes de la marine à Brest; nouvelle édition, revue avec soin, belle impression, sur caracterès Didot, beau papier, et enrichie de 12 planches; gros vol. in-8°. de 556 pag. Prix 8 fr., franc de port, par la poste. = Il ne faut pas confondre l'édition de l'an 3, dont il ne reste que quelque peu dans le commerce, avec celle-ci.

Calcul différentiel de Cousin, 2 vol. in-4. 21 f.

Analyse *idem*, du même. fr. de port, 5 f.

Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, par Bézout, premiere partie, contenant les élémens d'Arithmétique, avec l'application des regles de l'arithmétique aux nouveaux poids, aux nouvelles monnoies et aux nouvelles mesures, leurs nomenclatures et leurs valeurs, 1 vol. in-8. fr. de port, 3 fr.

Idem, seconde partie, contenant les Elémens de la Géométrie, la Trigonométrie-rectiligne et la Trigonométrie-sphérique, sept figures, 1 vol in-8. 5 f.

Idem, troisieme partie, contenant l'Algebre, vol. in-8, 6 f.
Cette nouvelle édition est enrichie de notes du citoyen Garnier, professeur et examinateur de l'école politechnique, est des plus exactes et la plus belle que l'on puisse donner. La suite est sous presse.

Cours d'Artillerie, 4 vol. grand papier, 24 f.

Cours de Mathématiques à l'usage des Eleves du Génie, par le citoyen Bossut, 1 v. in-8, contenant l'Arithmétique et l'Algebre, fr. de port, 6 f. 25 c.
Idem, Géométrie, 1 vol. in-8. fr. de port, 6 f. 25 c.
Idem, Méchanique, 1 vol. in-8. fr. de port, 6 f. 25 c.
Idem, Hydrodinamique, 2 vol. in-8. fr. de port, 10 f.

Le Calcul intégral et différentiel, 2 vol. 12 f.

Développement du nouveau systême des poids et mesures, et traité d'arithmétique adapté à ce systême, vol. in-8. fr. de port, 3 f.

Elémens d'algêbre, par Clairaut, cinquieme édition, avec des notes et des additions tirées en partie des leçons données à l'école normale par Lagrange et Laplace, et précédée d'un traité élémentaire d'arithmétique, 2 vol. in-8. 10 f.

Elémens de Géométrie, avec des notes; par Adrien-Marie le Gendre, 1 vol. 8°. avec des figures, franc de port, 6 f.

Récréations mathématiques de Guyot, 3 vol. in-8, fig. 18 f.
Tables portatives de logarithmes, contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000, par Callet, 1 vol. in-8°. 14 f.

Ceux de ces objets où il n'y a pas franc de port, seront envoyés par la diligence, à la charge des demandeurs.
Il faut adresser les lettres et l'argent, franc de port, au cit. *Courcier*, rue Poupée André-des-Arts.

AVERTISSEMENT DE L'EDITEUR.

COMME l'admission des nouveaux poids et des nouvelles mesures est devenue obligatoire, et qu'elle offre d'ailleurs le double avantage de rendre les calculs arithmétiques plus uniformes et plus simples, nous avons cru que, pour en propager plus sûrement et plus promptement les principes, il falloit les intercaler dans un livre élémentaire d'Arithmétique, et sur-tout dans le livre de ce genre le plus clair, le plus facile et le plus répandu. Le premier volume du Cours de Bézout nous a paru jouir, par dessus tous les autres, de ces propriétés, 1°. par le nombre considérable des éditions qui en ont été faites ; et 2°. par les différentes écoles où on est obligé de le suivre.

Ainsi, mais sans rompre l'ordre des chapitres, nous avons appliqué successivement presque chaque regle énoncée dans cet ouvrage, à plusieurs exemples tirés des nouvelles unités ; et, pour en faciliter la connoissance, nous avons donné un Vocabulaire complet de ces unités, avec leurs divisions décimales, tant ascendantes que descendantes : enfin nous avons ajouté des Tables de réductions des nouvelles mesures de toute espece en anciennes, et des anciennes en nouvelles ; Tables très-utiles pour abréger les calculs, dans une infinité de cas, et dont nous avons facilité l'usage par un grand nombre d'applications. Nous osons croire que ces augmentations, faites pour completter un ouvrage aussi nécessaire que répandu, le rendront en même temps plus utile à presque toutes les classes de lecteurs.

PRÉFACE.

LE Cours de Mathématiques dont nous donnons aujourd'hui la premiere Partie, doit rassembler les connoissances élémentaires nécessaires aux Gardes du Pavillon et de la Marine, pour être admis au rang d'Officiers de Vaisseaux.

Quelque utile qu'il soit d'instruire de bonne heure ces jeunes citoyens, dans la pratique d'un art aussi étendu que celui de la Navigation, on ne peut douter que la connoissance préliminaire des principes sur lesquels portent les regles de l'art, ne doive contribuer beaucoup à faire fructifier les leçons qu'ils recevront ensuite de l'expérience, et ne les dispose à y être plus attentifs, et par conséquent n'accélere beaucoup leurs progrès.

D'ailleurs, il est si rare qu'un esprit accoutumé à obéir servilement aux seules regles de la pratique, se replie ensuite assez sur lui-même, pour revenir avec succès à l'étude de la théorie, qu'on ne peut trop tôt les disposer à profiter des avantages qu'ils peuvent retirer de celle-ci.

Presque toutes les méthodes de la Navigation-pratique sont fondées sur des connoissances mathématiques : comment pourroit-on différer d'instruire des principes de ces sciences, ceux qui sont destinés à en diriger un jour l'application.

Pour me conformer, autant qu'il est en moi, aux vues des personnes qui ont bien voulu me confier l'examen des études des gardes du Pavillon et de la Marine, ainsi que la composition d'un Cours de Mathématiques à leur usage, j'ai cru devoir m'attacher à concilier ces deux points, la nécessité d'instruire ces Eleves sur les connoissances mathématiques relatives à leur objet, et celle de les en instruire dans un intervalle de tems qui ne leur fit rien perdre de l'avantage qu'il doit y avoir à aller de bonne heure à la mer.

Pour satisfaire à ces deux objets, je me suis proposé 1°. de borner le Cours d'Etudes d'obligation aux propositions directement utiles à la Navigation, et à celles qui seroient indispensables pour l'intelligence de celle-là. 2°. De faciliter cette étude, en la rendant plus intéressante par de fréquentes applications à la pratique, prises principalement dans la Marine; ce qui réunit encore l'avantage de disposer l'esprit des Commençans à saisir de bonne heure le lien qui unit la théorie à la pratique.

Mais dans la vue de concourir, autant qu'il m'est possible aux progrès d'un art aussi important, j'ai cru devoir ne pas perdre de vue ceux de ces jeunes Citoyens qui, joignant à une noble émulation, des dispositions plus marquées que les autres, auroient le desir de s'instruire plus parfaitement. C'est dans cette vue que j'aurai soin de répandre dans ce Cours des connoissances plus étendues, et spécialement celles qui peuvent faciliter l'intelligence des ouvrages de feu le C. Bouguer, et de quelques autres ouvrages non moins utiles à la Marine, dont on n'a pas encore retiré, à beaucoup près, tout le fruit qu'on peut en espérer, parce que les études des Gardes n'y étoient pas dirigées aussi pleinement qu'on se propose de le faire.

Ces connoissances qu'il est louable d'acquérir, et auxquelles on ne peut trop inviter les Gardes du Pavillon et de la Marine de s'appliquer; ces connoissances, dis-je, ne seront point d'obligation, et nous aurons soin de les distinguer de celles ci, par un caractere dont nous avertirons.

Le Cours de Mathématiques dont il s'agit ici, sera divisé en quatre Parties.

La premiere traite de l'Arithmétique.

La seconde traitera de la Géométrie, dans laquelle on comprendra la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique.

La troisieme aura pour objet, l'Algebre et l'application de l'Algebre à la Géométrie.

La quatrieme comprendra la Statique et le Mouvement, avec quelques propositions d'Hydrostatique et d'Hydraulique.

Nous avons préféré de faire succéder l'Algebre à la Géométrie plutôt qu'à l'Arithmétique; parce qu'outre que l'Algebre nous eût été d'une utilité très-médiocre dans la Géométrie élémentaire, les Commençans ne sont d'ailleurs pas encore assez exercés dans les raisonnemens mathématiques, pour sentir la force des démonstrations algébriques, quoique celles-ci soient souvent plus simples, que les démonstrations synthétiques; au lieu que dans la disposition que nous avons choisie, on a lieu de croire que les commençans déjà fortifiés par l'étude des deux premieres Parties, en auront d'autant plus de facilité à généraliser leurs idées, et saisiront mieux les usages nombreux qu'on peut faire de cette science; d'ailleurs ayant déjà plus de connoissances acquises, ils seront plus à portée de se familiariser avec cette science, par un plus grand nombre d'objets auxquels ils pourront l'appliquer.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur l'exécution des trois dernieres parties du Cours ; nous nous bornerons à rendre compte de celle-ci. Elle renferme sous un volume assez peu considérable, ce qu'il est nécessaire de savoir, non-seulement pour appliquer les connoissances mathématiques que nous enseignerons par la suite ; mais encore pour satisfaire à divers autres usages. En exposant les méthodes, nous avons évité de les multiplier pour un même objet, parce qu'on ne peut veiller trop soigneusement à ne pas partager l'attention dans les commencemens; c'est un abus que de dire, en faveur de l'opinion contraire, qu'il est utile d'envisager un objet sous différens aspects cela n'est vrai que lorsqu'on a acquis un certain nombre de connoissances. C'est par ce même principe que nous avons cru devoir resserrer les raisonnemens et les discours, dans beaucoup d'endroits : les Commençans, peu ou point du tout faits à raisonner méthodiquement, perdent, en parcourant un long échafaudage de logique, la force de tête qui leur est nécessaire pour saisir l'esprit d'une démonstration.

On a donc fait ensorte de ne donner aux raisonnemens, que l'étendue nécessaire pour être bien entendus, et d'en élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiômes, et qui à force de supposer le Lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel.

J'ai tâché d'applanir la route, soit en simplifiant des raisonnemens déjà employés, soit en leur en substituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, soit enfin en employant un langage familier et simple. C'est au Public à juger si j'ai réussi ; mais on ne doit pas s'attendre que le Lecteur soit dispensé d'un certain degré d'attention : on ne fera jamais un livre de Mathématique qui puisse être lu comme on lit un livre d'Histoire.

Je ne suppose d'autre connoissance à mon Lecteur, que celle des noms, des nombres et quelques autres idées aussi familieres sur lesquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales. Je passe de-là aux quatre opérations fondamentales, dont je donne le procédé, et dont j'explique la nature et les principes de maniere à en faciliter l'application aux opérations plus composées qui en dépendent. A la suite de ces opérations, j'en indique quelques usages. Les fractions sont traitées à peu près de la même maniere.

Les nombres complexes dont le calcul suppose, à la rigueur, la connoissance des fractions, succèdent à celles-ci. Quoique je n'aie pas parlé du Toisé, les regles que j'ai établies, ne le renferment pas moins ; mais la connoissance de la nature des unités des facteurs et du produit, appartenant à la Géométrie, j'ai différé, pour cette raison, d'en parler, jusqu'à ce temps.

Quoique je ne désapprouve pas qu'on emprunte d'une science, les notions qui peuvent faciliter celle que l'on traite (quelque subordination qu'on ait d'ailleurs coutume de mettre entre ces deux sciences) néanmoins je pense qu'on ne doit prendre ce parti, que lorsqu'il ne s'en offre pas de plus simple. Comme l'Arithmétique m'a paru fournir des ressources suffisantes pour l'explication des opérations de la racine quarrée et de la racine cubique, je n'ai pas été puiser ailleurs que dans les principes même de cette science.

Ce que j'expose des rapports, Proportions et Progressions, quoique court, me paroît renfermer ce qui nous sera nécessaire pour les trois Parties qui doivent suivre. Cependant, comme nous pouvons, sans nous écarter de la loi que nous nous sommes imposée, revenir sur quelques propriétés des Progressions, que quelques Lecteurs pourroient desirer, nous avertissons que nous les avons réservées pour application ds l'Algebre.

Les logarithmes sont d'un trop grand usage dans la pratique de la Navigation, pour que nous n'ayons pas dû nous en occuper spécialement. Aussi après avoir exposé la nature, la formation et ceux des usages de ces nombres, que nous pouvions exposer sans anticiper sur aucune autre science, nous avons donné les moyens d'étendre, dans le besoin, les secours qu'on peut tirer des tables ordinaires.

Quoiqu'on puisse faire un grand nombre d'applications de l'Arithmétique à la Navigation, ce n'est cependant pas dans l'Arithmétique même qu'elles peuvent trouver leur place, parce qu'elles supposent presque toutes, au moins la Géométrie. Néanmoins dans le nombre des applications que nous avons données, nous avons pris quelques exemples dans le métier même. A mesure que nous avancerons, elles deviendront et plus nombreuses et plus importantes : on en trouvera d'ailleurs un très-grand nombre dans le *Traité de Navigation* qui forme la suite de ce Cours.

AVERTISSEMENT.

LES Nombres que l'on trouve entre deux parentheses, dans plusieurs endroits de ce Livre, sont destinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonstration de la proposition sur laquelle on s'appuie dans ces endroits. A l'égard des Numéros, ils sont au commencement des à-lineâ.

Ce que l'on trouvera en petits caracteres, renferme les objets qui ne sont pas d'obligation dans le Cours d'Etudes des Gardes du Pavillon et de la Marine.

TABLE DES MATIERES.

ÉLÉMENS

ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DU COMMERCE.

Notions préliminaires sur la nature et les différentes especes de Nombres.

1. On appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces sciences, ne considere les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique est donc la science des nombres : elle en considere la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*.

4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités

d'une même espece : ainsi, lorsqu'on dit, un tel corps pese cinq *livres*, la livre est l'unité ; c'est la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps ; on auroit pu également prendre l'once pour unité, et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de partie d'unité, une quantité est composée.

Si la quantité est composée d'unités entieres, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier* : et si elle est composée d'unités entieres, et de parties de l'unité, ou simplement de parties de l'unité, alors le nombre est dit *fractionnaire* ou *fraction* ; *trois et demi* sont un nombre fractionnaire : *trois quarts* sont une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espece des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abstrait* ; et lorsqu'on énonce en même temps l'espece des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres especes de nombre à mesure qu'il en sera question.

De la Numération et des Décimales.

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms et de caracteres ; ces caracteres s'appellent chiffres.

Nous nous dispenserons de donner ici les noms des nombres, c'est une connoissance familiere à tout le monde.

Quant à la maniere de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caracteres dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caracteres, on est convenu que de dix unités, on en feroit une seule, à laquelle on donneroit le nom de *dixaine*, et que l'on compteroit par dixaines, comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compteroit deux dixaines, trois dixaines, etc. jusqu'à neuf: que pour représenter ces nouvelles unités, on emploieroit les mêmes chiffres que pour les unités simples; mais qu'on les distingueroit par la place qu'on leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferme cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contient un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités simples, et détermine le chiffre 6, à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle: savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un

zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il étoit seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dixaines, on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi pour marquer *huit cent cinquante-neuf* qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avoit *huit cent neuf* qui contiennent huit centaines, point de dixaines, et neuf unités, on écriroit 809; c'est-à-dire, que l'on mettroit un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquoient aussi, on mettroit deux zéros; ainsi, pour marquer *huit cent*, on écriroit 800.

11. Remarquons encore qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*; on peut compter par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille, comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009; et pour *sept* *mille*, on écrira 7000; où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés vers la gauche, on parvient à exprimer d'une maniere uniforme, et avec dix caracteres seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on les partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche, (en partant toujours de la droite) aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisieme celui de centaines de la tranche.

Ainsi en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche comme si elle étoit seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche : par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités
23,	456,	789,	234,	565,	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent soixante et cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent, pour rendre un nombre, dix fois, cènt fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc. zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manieres de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujettisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même, pourvu qu'on puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs les plus commodes qu'il sera possible; c'est pour cette raison, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage d'abord qu'en un certain nombre de parties, et qu'on subdivise celles-ci en d'autres, et ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'est ainsi que dans les monnoies on partage la

livre en 20 parties qu'on appelle *sols*, le sol en 12 parties que l'on appelle *deniers*. De même dans les mesures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, etc.; ensorte que dans le premier cas on compte par vingtaines et par douzaines, dans le second, par deuxaines et par huitaines, etc.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées ainsi à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe* et par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espece d'unité, s'appelle *nombre incomplexe*. 8$^{\#}$ ou 8 livres sont un nombre incomplexe. 8$^{\#}$ 17$_s$ 8^d ou 8 livres 17 sols 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque art subdivise à sa maniere l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre; celles de la livre, différentes de celles du jour, de l'heure; celles-ci différentes de celles du marc, et ainsi de suite : nous les ferons connoître lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans tous les calculs *. Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques; la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour

* Telles sont les nouvelles divisions adoptées par le gouvernement, divisions dont nous donnerons bientôt les dénominations et le calcul.

les nombres ordinaires ou entiers ; nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer en décimales les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, quelle qu'elle soit, livre, toise, etc., est composée de 10 parties, comme on imagine la dixaine composée de dix unités simples, ou comme on imagine la livre composée de 20 sols. Ces nouvelles unités, par opposition aux dixaines, sont nommées *dixiemes ;* on les représente par les mêmes chiffres que les unités simples ; et comme elles sont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités simples.

Mais pour prévenir l'équivoque, et ne point donner lieu de prendre ces dixiemes pour des unités simples, on est convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particuliere ; celle qui est le plus en usage est une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui représente les unités, ou, ce qui est la même chose, entre les unités et les *dixiemes* ; ainsi pour marquer *vingt-quatre unités et trois dixiemes*, on écrira 24, 3.

22. On peut de même regarder actuellement les *dixiemes*, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petite que les *dixiemes*, et par la même raison d'analogie, les placer à la droite des *dixiemes*. Ces nouvelles unités, dix fois plus petites que les *dixiemes*, seront cent fois plus petites que les unités principales, et pour cette raison seront nommées *centiemes*. Ainsi pour marquer *vingt-quatre unités, trois dixiemes et cinq centiemes*, on écrira 24, 35.

23. Concevons pareillement les *centiemes*, comme formés de dix parties ; ces parties seront mille fois plus petites que l'unité principale, et pour cette raison seront nommées *milliemes ;* et comme dix fois plus petites que les *centiemes*, on les placera à la droite de celles-ci.

En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-milliemes*, *cent milliemes*, *millioniemes*, *dix-millioniemes*, *cent millioniemes*, *billioniemes*, etc., et qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité que nous venons de décrire, sont ce que l'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la maniere de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même maniere ; mais on ajoute, à la fin, le nom des unités décimales de la derniere espece ; ainsi, pour énoncer ce nombre 34, 572, on diroit trente-quatre unités et cinq cent soixante et douze *milliemes ;* si c'étoient des toises, par exemple, on diroit trente-quatre toises et cinq cent soixante et douze *milliemes* de toise.

La raison en est facile à appercevoir, si l'on fait attention que dans le nombre 34, 572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu ou par cinq *dixiemes*, ou par cinq cent *milliemes*, puisque le *dixieme* (22) valant 10 *centiemes*, et le *centieme* (23) valant 10 *milliemes*, le *dixieme* contiendra dix fois dix *milliemes*, ou 100 *milliemes*; ainsi, que les cinq dixiemes valent 500 *milliemes*. Par une raison semblable, le chiffre 7 pourra s'énoncer en disant soixante et dix *milliemes*, puisque (23) chaque *centieme* vaut 10 *milliemes*.

26. A l'égard de l'espece des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement en comptant successivement de gauche à droite sur chaque chiffre depuis la virgule, les noms suivans . . . .
dixiemes, *centiemes*, *milliemes*, *dix-milliemes*, etc.

27. Si l'on n'avoit point d'unités entieres, mais seulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités; ainsi pour marquer 125 *milliemes*, on écriroit 0,125. Si l'on vouloit marquer 25 *milliemes*, on écriroit 0,025, en mettant un zéro entre la virgule et les autres chiffres, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixiemes*, que pour donner aux parties suivantes leur véritable valeur. Par la même raison, pour marquer 6 *dix-milliemes*, on écriroit 0,0006.

28. Examinons maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puisque la virgule détermine la place des unités, et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule; si l'on avance la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la gauche, on rend le nombre 10, 100, 1000, etc. fois plus petit; et au contraire on le rend 10, 100, 1000, etc.

fois plus grand, si l'on recule la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la droite.

En effet, si l'on a 4327, 5264, et qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432, 75264; il est visible que les mille du premier nombre sont des centaines dans le nouveau; les centaines sont des dixaines; les dixaines, des unités; les unités, des dixiemes; les dixiemes, des centiemes, et ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre est devenue dix fois plus petites par ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275, 264, les mille du premier nombre se trouveroient changés en dixaines de mille, les centaines en mille, les dixaines en centaines, les unités en dixaines, les dixiemes en unités, et ainsi de suite. Donc le nouveau nombre est dix fois plus grand que le premier.

29. Un raisonnement semblable fait voir qu'en avançant la virgule sur la gauche, de deux ou de trois places, on rendroit le nombre, 100 ou 1000 fois plus petit, et au contraire, 100 ou 1000 fois plus grand en reculant la virgule de deux ou de trois places sur la droite.

30. La derniere observation que nous ferons sur les décimales, est qu'on n'en change point la valeur en mettant à la suite du dernier chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainsi 43, 25 est la même chose que 43, 250, ou que 43, 2500, ou que 43, 25000, etc.

Car chaque *centieme* valant 10 *milliemes* ou 100 *dix-milliemes*, etc., les 25 *centiemes*, vaudront 250 *milliemes* ou 2500 *dix-milliemes*, etc.

en un mot, c'est la même chose que lorsqu'au lieu de dire 25 pistoles, on dit 250 livres, ou lorsqu'au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 liv.

Des Opérations de l'Arithmétique.

31. Ajouter, soustraire, multiplier et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres, se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familieres, et d'en bien saisir l'esprit.

32. Le but de l'Arithmétique est, comme nous l'avons déjà dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à réduire le calcul des nombres les plus composés, à celui de nombres plus simples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres possible. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

De l'Addition des nombres entiers et des Parties décimales.

33. Exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un seul, est ce qu'on appelle *faire une addition.*

Quand les nombres qu'on se propose d'ajouter n'ont qu'un seul chiffre, on n'a pas besoin de regle; mais lorsqu'ils ont plusieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *somme*, en observant la regle suivante.

Ecrivez les uns sous les autres, tous

les nombres proposés, de maniere que les chiffres des unités de chacun, soient dans une même colonne verticale ; qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, etc. ; soulignez le tout.

Ajoutez d'abord tous les nombres qui sont dans la colonne des unités ; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous ; si elle surpasse 9, elle renfermera des dixaines ; n'écrivez au-dessous, que l'excédent du nombre des dixaines : comptez ces dixaines pour autant d'unités, et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante : observez à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, et continuez ainsi de colonne en colonne, jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Eclaircissons cette règle par des exemples.

EXEMPLE I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici.

$$\begin{array}{r} 54925 \\ 2023 \\ \hline 56948 \end{array} \text{ somme.}$$

Et après avoir souligné le tout, je commence par les unités, en disant 5 et 3 font 8 que j'écris sous cette même colonne.

Je passe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 et 2 font 4, que j'écris au-dessous.

A la colonne des centaines, je dis 9 et o font 9, que j'écris sous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis 4 et 2 font 6, que j'écris sous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dixaines de mille, je dis 5 est 5, que j'écris de même au-dessous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, est la somme des deux nombres proposés, puisqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les mille, et les dixaines de mille, que nous avons rassemblés successivement.

EXEMPLE II.

On demande la somme des quatre nombres suivans.... 6903, 7854, 953, 7327; je les écris comme on les voit ici.

$$\begin{array}{r} 6903 \\ 7854 \\ 953 \\ 7327 \\ \hline 23037 \end{array} \text{ somme.}$$

Et en commençant comme ci-dessus, par la droite, je dis 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17; j'écris les 7 unités sous la première colonne, et je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis 1 que je retiens et o font 1, et 5 font 6, et 5 font 11, et 2 font 13; j'écris 3 sous la colonne actuelle, et je retiens, une dixaine, comme une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant 1 et 9 font 10, et 8 font 18, et 9 font 27, et 3 font 30, je pose 0 sous cette colonne, et je retiens trois dixaines, que j'ajoute comme trois unités à la colonne suivante, en disant pareillement, 3 et 6 font 9, et 7 valent 16, et 7 font 23; j'écris 3 sous cette colonne, et comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance, d'une place, les deux dixaines qui appartiendroient à la colonne suivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037 est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales, comme elles se comptent, ainsi que les autres nombres, par dixaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre dans une même colonne.

Ainsi, si on propose d'ajouter les trois nombres 72,957........12,8.......124,03, j'écrirai.

$$\begin{array}{r@{,}l} 72 & 957 \\ 12 & 8 \\ 124 & 03 \\ \hline 209 & 787 \text{ somme.} \end{array}$$

En suivant la règle ci-dessus, j'aurai 209, 787 pour la somme.

De la Soustraction des nombres entiers et des Parties décimales.

35 La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le résultat de cette opération s'appelle *reste*, ou *différence*.

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-dessous de l'autre, de la même manière que dans l'addition; et ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de son correspondant supérieur; c'est-à-dire, les unités des unités, les dixaines des dixaines, etc; on écrira chaque reste, au-dessous, dans le même ordre, et zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci dix unités qu'on aura en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

EXEMPLE I.

On propose de retrancher 5432 de 8954, j'écris ces deux nombres comme il suit.

$$\begin{array}{r} 8954 \\ 5432 \\ \hline 3522 \end{array} \text{ reste.}$$

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reste 2 que j'écris au-dessous : puis, passant aux dixaines, je dis 3 ôté de 5, il reste 2 que j'écris sous les dixaines. A la troisieme colonne, je dis 4 ôté de 9, il reste 5 que j'écris sous cette colonne. Enfin à la quatrieme, je dis 5 ôté de 8, il reste 3 que j'écris j'écris sous 5, et j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987 de 27646
On écrira..................27646

$$\begin{array}{r} 27646 \\ 7987 \\ \hline 19659 \end{array}$$ reste.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira, 7 ôté de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dixaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité: comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche; et on dira 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisième colonne, on dira de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15, (en empruntant comme ci-dessus); il reste 6 qu'on écrira sous 9.

A la quatrieme colonne, on dira, par la même raison, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7; et comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquieme colonne, on écrira sous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité sur ce 2, mais seulement 1, et on aura 19659, pour le reste.

36. Si le chiffre pour lequel on doit faire l'em-

prunt, étoit un zéro, l'emprunt se feroit, non pas sur ce zéro, mais sur le premier chiffre significatif qui viendroit après ; or, quoique ce soit, alors, emprunter 100 ou 1000 ou 10000, selon qu'il y a un, deux ou trois zéros consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus ; c'est-à-dire, qu'on ajoutera seulement 10 au chiffre pour lequel on emprunte, et comme ces dix sont censés pris sur les 100 ou 1000, etc. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, etc. qui restent, on comptera les zéros suivans pour autant de 9 ; c'est ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de..................................	20064
on veut retrancher..................	17489
	2575 reste.

On dira d'abord 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant) il reste 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2, une unité, laquelle vaut 1000 à l'égard du chiffre sur lequel on opere. De ce 1000 on ne prendra que 10 unités qu'on ajoutera à 5, et on dira 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que 10 unités sur 1000 qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros, ce qui revient au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9 : ainsi l'on dira 4 ôté de 9, reste 5; puis 7 ôté de 9, reste 2, et enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même regle; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette regle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres proposés, en mettant un nombre suffisant de zéros à la suite de celui qui a le moins de décimales; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (30).

EXEMPLE IV.

De 5403,25
on veut ôter.................. 385,6532

Je mets deux zéros à la suite des décimales du nombre supérieur; après quoi, j'opere sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la regle donnée pour les nombres entiers,

$$\begin{array}{r} 5403,2500 \\ 385,6532 \\ \hline 5017,5968 \end{array} \text{ reste}$$

et je trouve pour reste.. 5017,5968.

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

38. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique, est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la premiere.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de nouveau, par parties, mais en commençant par la gauche, les sommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la premiere colonne, de la partie qui lui répond dans la somme inférieure ; on écrit au-dessous, le reste, qu'on réduit par la pensée en dixaines, pour le joindre au chiffre suivant de cette même somme, et du total on retranche encore la totalité de la colonne supérieure ; on continue ainsi, jusqu'à la derniere colonne, dont la totalité étant retranchée, ne doit laisser aucun reste.

Ainsi, ayant trouvé ci-dessus que les quatre nombres

$$\begin{array}{r} 6903 \\ 7854 \\ 953 \\ 7327 \\ \hline \end{array}$$

ont pour somme.................. 23037

$$\cancel{3}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{0}$$

Pour vérifier ce résultat, j'ajoute les mêmes nombres, en commençant par la gauche ; et je dis 6 et 7 font 13, et 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dixaines, qui avec le chiffre suivant zéro, font 30. Je passe à la seconde colonne, et je dis 9 et 8 font 17, et 9 font 26, et 3 font 29 que j'ôte de 30; il reste 1 ou une dixaine, qui jointe au chiffre suivant 3, fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troisieme colonne, en disant 5 et 5 font 10, et 2 font 12, qui ôtés de 13, il reste 1 ou une dixaine, laquelle, jointe au chiffre suivant 7, fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la derniere colonne, en disant 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, qui ôtés de 17, il ne reste rien : d'où je conclus que la premiere opération est exacte.

On est fondé à conclure que la premiere opération a été bien faite, lorsqu'après cette preuve il ne reste rien, parce qu'ayant ôté successivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dixaines et toutes les unités dont on avoit composé la somme, il faut qu'à la fin il ne reste rien.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché; si la premiere opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché : ainsi je vois que dans le troisieme exemple que nous avons donné ci-dessus, l'opération a été bien faite, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché), avec le reste 2565, je reproduis 20054, nombre dont on a retranché

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, par exemple, c'est prendre 3 fois le nombre 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier s'appelle *multiplicande*; celui par lequel on doit multiplier, s'appelle *multiplicateur*; et le résultat de l'opération s'appelle *produit*.

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue; mais nous avertissons expressément que nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi les *facteurs* du produit, ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faisant ensuite l'addition; par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourroit écrire

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ \underline{7} \\ 21 \end{array}$$

Et la somme 21 résultante de cette addition seroit le produit.

Mais lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable, l'opération devient fort longue: ce que nous appellons proprement multiplication, est la méthode de parvenir à ce même résultat, par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considere les nombres que d'une maniere abstraite, c'est-à-dire, sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu, lequel des deux nombres proposés pour la multiplication, on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur; par exemple, si on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4, le produit sera toujours 12 : en effet 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4, et 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1; or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1 sont la même chose; et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais, lorsque par l'énoncé de la question, le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicateur du multiplicande : cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la suite.

Au reste, cela est toujours aisé à distinguer : la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle est la quantité qu'il s'agit de répéter plusieurs fois, c'est-à-dire le multiplicande; et quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande, c'est-à-dire, quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à

marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il est toujours un nombre abstrait : ainsi, quand on demande ce que doivent coûter 52 toises de bois, à raison de 36 livres la toise ; on voit que le multiplicande est 36 liv., qu'il s'agit de répéter 52 fois ; soit que ce 52 marque des toises, ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande *.

Après cette petite digression sur la nature des unités du produit et de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les regles de la multiplication des nombres les plus composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre, par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre, en ajoutant successivement un même nombre à lui-même. On peut aussi, si on le veut, faire usage de la table suivante, qu'on attribue à Pithagore.

* Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique, dont nous ne parlerons qu'en Géométrie, comme cela nous paroît assez naturel. Les unités du multiplicateur n'y sont jamais que des unités abstraites, comme dans toute autre multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La premiere bande de cette table se forme en ajoutant 1 à lui-même successivement.

La seconde, en ajoutant 2 de même.

La troisieme, en ajoutant 3, et ainsi de suite.

49. Pour trouver par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure; et en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur, qu'on trouvera dans la premiere colonne. Le nombre sur lequel on se sera arrêté, sera le produit; ainsi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9, je descends depuis 9 pris dans la premiere bande, jusques vis-à-vis de 6 pris dans la premiere colonne; le nombre sur lequel je m'arrête, est 54; par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.

50. Ecrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un seul chiffre, sous le multiplicande ; peu importe sous quel chiffre, mais, pour fixer les idées, supposons que ce soit sous le chiffre des unités.

Multipliez d'abord le nombre des unités par votre multiplicateur ; et si le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-dessous ; s'il contient des unités et des dixaines, écrivez seulement les unités, et comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multiplicande ; et, au produit ajoutez les unités que vous avez retenues ; écrivez le tout au-dessous, s'il peut être marqué par un seul chiffre, sinon n'écrivez que les unités de ce produit : et retenez-en les dixaines, qui sont des centaines, pour les ajouter au produit suivant, qui sera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier successivement, suivant la même regle, tous les chiffres du multiplicande ; la suite des chiffres que vous aurez écrits, marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toises valent de pieds ? La toise est de 6 pieds.

La question se réduit à prendre 6 pieds 2864 fois, ou ce qui revient au même (44) à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc. . . . . . . , . . . 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.

17184 . . . produit.

Et je dis en commençant par les unités 6 fois 4 font 24; j'écris 4, et je retiens 2 unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36, et 2 que j'ai retenues font 38; je pose 8, et je retiens 3.

3°. 6 fois 8 font 48, et 3 que j'ai retenues font 51; je pose 1, et je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12, et 5 que j'ai retenues font 17 que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toises, puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, et 6 fois les 2 mille; et par conséquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement, avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite; ainsi on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande, par le chiffre des unités du multiplicateur; puis par celui des dixaines; et l'on écrira ce second

produit sous le premier : mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit, sous les dixaines, et les autres chiffres, toujours en avançant sur la gauche.

Le troisieme produit, qui se fera en multipliant par les centaines, se placera de même sous le second, mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, et la somme sera le produit total.

EXEMPLE.

On propose de multiplier 65487
par. 6958

```
   65487
    6958
--------
  523896
 327435
589383
392922
--------
455658546 prod.
```

Je multiplie d'abord 65487, par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et j'écris successivement sous la barre, les chiffres du produit 523896 que je trouve en suivant la regle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie de même le nombre 65487, par le second chiffre 5 du multiplicateur, et j'écris le produit 327435, sous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troisieme chiffre 9, j'écris le produit 589383, sous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3 au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie est un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, et j'écris le produit 392922, sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son premier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille : enfin j'ajoute tous ces produits, et j'ai 455658546 pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'est-à-dire, pour la valeur de 65487, pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la premiere opération, 50 fois par la seconde, 900 fois par la troisieme, et 6000 fois par la quatrieme.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux étoient terminés par des zéros, on abrégeroit l'opération, en multipliant comme si ces zéros n'y étoient point; mais on les mettroit ensuite tous à la suite du produit.

EXEMPLE.

On propose de multiplier 6500
par. 350

$$\begin{array}{r} 6500 \\ 350 \\ \hline 325 \\ 195 \\ \hline 2275000 \end{array}$$

Je multiplie seulement 65 par 35, et je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande et du multiplicateur.

En effet, le multiplicande 6500 représente 65 centaines; ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement, le multiplicateur 350 marque 35 dixaines; ainsi quand on multiplie par 350, on doit sous-entendre que le produit sera des dixaines; il sera donc des dixaines de centaines, c'est-à-dire, des mille; il doit donc avoir 3 zéros: on appliquera un raisonnement semblable à tous les autres cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on se dispensera d'écrire ceux-ci dans le produit; et passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéros, on en avancera le produit sur la gauche d'autant de places plus une, qu'il y a de zéros qui se suivent dans le multiplicateur, c'est-à-dire, de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a........	42052
à multiplier........	3006
	252312
	126156
	126408312

Après avoir multiplié par 6, et écrit le produit [illegible], on multipliera tout de suite par [illegible], mais on écrira le produit [illegible], de manière qu'il marque des mille, il faudra donc le reculer de trois places, c'est-à-dire, d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interposés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties Décimales.

[illegible]. Pour multiplier les parties décimales, on observera la même règle que pour les nombres entiers, sans faire aucune attention à la virgule, mais après avoir trouvé le produit, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier [illegible]
par. . . . . [illegible]

[illegible]

Je multiplierai [illegible] par [illegible], le produit sera [illegible]; et comme il y a deux décimales dans le multiplicande, et une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit, qui par là deviendra [illegible], tel qu'il doit être.

La raison de cette règle est facile à saisir, car observant que si le multiplicateur étoit 83, le produit n'auroit en décimales que des *centiemes*, puisqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54, 23, dont les décimales sont des centiemes ; mais comme le multiplicateur est 8, 3, c'est-à-dire (21), dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des unités dix fois plus petites que les centiemes ; le dernier chiffre de ces décimales doit donc (23) être des *milliemes* ; il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit, c'est-à-dire, autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

EXEMPLE II.

Si on avoit.	0, 12
à multiplier par	0, 3
	0, 036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36 : comme la regle prescrit de séparer ici 3 chiffres, on pourroit être embarrassé à y satisfaire, puisque ce produit 36 n'en a que deux ; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interposer un zéro entre 36 et la virgule. En effet, si l'on avoit 0, 12 à multiplier par 3, il est évident qu'on auroit 0, 36 ; mais comme on n'a à multiplier que par 0, 3, c'est-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit

produit dix fois plus petit que o, 36, c'est-à-dire, des milliemes, et c'est ce qui a lieu (28) lorsqu'on écrit o,o36.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux, une approximation suffisante, mais prompte ; il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un dégré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier...... 45,625957 par 28,635, je n'aie besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millieme près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant répondre le chiffre de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux dégrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à la droite de celui par lequel je multiplie; et à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le premier chiffre du nouveau produit, sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espece de décimales que je me proposois d'avoir.

EXEMPLE.

Je veux multiplier......45,625957
par......................28,635
mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millieme d'unité près.

J'écris ainsi ces deux nombres.. 45,625957
53682

91251914
36500760
2737554
130875
22810

$1306499\cancel{1}\cancel{3}$

produit..........................1306,499

Et si l'on avoit fait la multiplication à l'ordinaire, on auroit eu 1306,499278695, qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisieme décimale, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avoit pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, pour faire correspondre le chiffre des unités du multiplicateur, au chiffre auquel la regle prescrit de le faire correspondre, on y suppléroit en mettant des zéros.

EXEMPLE.

On doit multiplier...... 54,236
par......................532,27
et l'on veut avoir le produit à un centieme d'unité près ;
j'écris 54,236000
72235

271180000
16270800
1084720
108472
37961

$28868195\cancel{5}\cancel{3}$

produit.........28868,20, en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux que l'on supprime, passent 50.

Pour troisieme exemple, supposons qu'on ait à....
multiplier 0,227538917
par..... 0,5664178
et l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit, on écrira........0,227538917

	87146650
	0
	113769455
	13652334
	1365228
	91012
	2275
	1589
	176
	12888206 9
produit.....	0,1288821

Sur quelques usages de la Multiplication.

56. Nous ne nous proposons pas de faire connoître tous les usages que l'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voiè pour les autres.

La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connoît la valeur de chacune. Par exemple, 1°. combien doivent coûter 5842 toises, à raison de 54# la toise? Il faut multiplier 54# par 5842, ou (44) 5842# par 54, on aura 315468# pour le prix total demandé. 2°. Combien 5954 pieds cubes * d'eau pesent-ils, en supposant que le

* Le pied-cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large, et sur un pied de haut, avec laquelle on évalue la capacité des corps, ainsi qu'on le verra en Géométrie.

pied cube pese 72 livres ? Il faut multiplier 72 ℔ par 5954, ou 5954 ℔ par 72 ; on aura 428688 ℔ pour le poids des 5954 pieds cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine espece, en unités d'une espece plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sols, et ceux-ci en deniers ; les toises en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes ; les jours en heures, celles-ci en minutes ; ces dernieres en secondes ; on a souvent besoin de ces sortes de conversions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir $8^{tt}\ 17^s\ 7^d$ en deniers ; comme la livre vaut 20^s, on multipliera les 8^{tt} par 20 (52), ce qui donnera 160^s, auxquels joignant les 17^s, on aura 177^s, qu'on multipliera par 12, parce que chaque sol vaut 12 deniers, et on aura 2124 deniers, lesquels joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de $8^{tt}\ 17^s\ 7^d$, convertis en deniers.

Si l'on demande combien une année commune, ou 365 jours, 5 heures, 48 minutes, ou $365^j\ 5^h\ 48^m$, valent de minutes, comme le jour est de 24 heures, on multipliera 24^h par 365, et au produit 8760^h on ajoutera 5^h, on multipliera le total 8765 par 60 (52), parce que l'heure contient 60 minutes, et on aura 525900 minutes, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette conversion des parties du temps est utile dans quelques opérations du *Pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52) peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombre de *tonneaux ;* comme le tonneau de poids pese 2000 livres, si l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854, et mettre les trois zéros à la suite du produit, on aura 1708000 pour le nombre de livres que pesent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faisons observer aux commençans, que ces expressions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, etc. signifient la même chose que multiplier par 2, par 3, par 4, etc.

De la Division des Nombres entiers, et des Parties Décimales.

59. Diviser un nombre par un autre, c'est en général chercher combien le premier de ces deux nombres contient le second.

Le nombre qu'on doit diviser, s'appelle *Dividende ;* celui par lequel on doit diviser, *Diviseur ;* et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur, s'appelle le *Quotient.*

On n'a pas toujours pour but dans la division, de savoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme si elle tendoit à ce but ; c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de-là, que si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puisque c'est prendre ce diviseur autant de fois qu'il est dans le dividende : cela est général, soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espece des unités du quotient, ce n'est ni par l'espece de celles du dividende, ni par l'espece de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger ; car le dividende et le diviseur restant les mêmes, le quotient qui sera aussi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8# contiennent 4#, le quotient sera un nombre abstrait qui marquera 2 fois. Mais s'il est question de savoir combien pour 8# on fera faire d'ouvrage à raison de 4# la toise, le quotient sera 2 toises, qui est un nombre concret, et dont l'espece n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit, en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

60. L'opération que nous allons décrire, suppose qu'on sache trouver combien de fois un

nombre d'un ou de deux chiffres contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connoissance déjà acquise, quand on sait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la table que nous avons donnée ci-dessus (48). Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, et je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'est ici 72; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis 72, dans la premiere colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviseur à côté du dividende, séparez l'un de l'autre par un trait, et soulignez le diviseur sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur; écrivez ce nombre de fois sous le diviseur.

Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, et portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit, de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, et vous aurez un reste.

A côté de ce reste, abaissez le chiffre suivant du dividende principal, et vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant et retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez, de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende, qui suit celui que vous avez abaissé, et vous continuerez toujours de la même maniere jusqu'au dernier inclusivement.

Cette regle va être éclaircie par l'exemple suivant.

EXEMPLE.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres comme on les voit ci-après.

dividende	7 diviseur
8769	$1252\frac{5}{7}$ quotient
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire en 8 mille, combien de fois 7 : mais je dis simplement en 8 combien de fois 7? Il y est une fois. Cet 1 est naturellement mille, mais les chiffres qui viendront après lui donneront sa véritable valeur; c'est pourquoi j'écris simplement 1 sous le diviseur.

Je multiplie le diviseur 7 par le quotient 1, et je porte le produit 7 sous la partie 8 que je viens de diviser ; faisant la soustraction, j'ai pour reste 1.

Ce reste 1 est la partie de 8 qui n'a pas été divisée et est une dixaine à l'égard du chiffre suivant 7 ; c'est pourquoi j'abaisse ce même chiffre 7, à côté, et je continue l'opération, en disant en 17, combien de fois 7? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la premiere opération.

Je multiplie, comme dans la premiere opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver ; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17, et faisant la soustraction, il me reste 3 pour la partie qui n'a pu être divisée.

A côté de ce reste 3 j'abaisse 6, troisieme chiffre du dividende, et je dis en 36 combien de fois 7? 5 fois, j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5; et ayant écrit le produit 35 sous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche, et il me reste 1.

Enfin à côté de ce reste j'abaisse le chiffre 9 du dividende, et je dis en 19 combien de fois 7? 2 fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par ce nouveau quotient 2, et ayant écrit le produit 14 sous mon nouveau dividende partiel 19, j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7, autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit ; c'est-à-dire, 1252 fois, et qu'il reste 5.

A l'égard de ce reste, nous nous contenterons pour le présent de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'est-à-dire, en écrivant le diviseur au-dessous de ce reste, et séparant l'un de l'autre par un trait ; et alors on prononce *cinq septiemes*. Nous expliquerons par la suite la nature de ces sortes de nombres.

61. Si dans la suite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels, se trouvoit ne pas contenir le diviseur, on écriroit zéro au quotient ; et omettant la multiplication, on abaisseroit tout de suite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, et on continueroit la division.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviser 14464 par 8

$$
\begin{array}{r|l}
14464 & 8 \\
\cline{2-2}
8 & 1808 \\
\cline{1-1}
64 & \\
64 & \\
\cline{1-1}
064 & \\
64 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Je prends ici les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviseur.

Je trouve que 14 contient 8, 1 fois, j'écris 1 au quotient; je multiplie 8 par 1, et je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reste 6, à côté duquel j'abaisse le troisieme chiffre 4 du dividende.

Je continue en disant, en 64 combien de fois 8? 8 fois; j'écris 8 au quotient, et faisant la multiplication, j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64, il me reste 0 à côté duquel j'abaisse 6, quatrieme chiffre du dividende; et comme 6 ne contient pas 8, j'écris 0 au quotient, et j'abaisse tout de suite à côté de 6 le dernier chiffre du dividende qui est ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8? il y est 8 fois: après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication; et je retranche le produit 64: et comme il ne reste rien, j'en conclus que 14464 contiennent 8, 1808 fois.

De la Division par un nombre de plusieurs chiffres.

62. Lorsque le diviseur aura plusieurs chiffres, on se conduira de la maniere suivante.

Prenez sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur.

Cela posé, au lieu de chercher comme ci-devant combien la partie du dividende que vous avez prise, contient votre diviseur entier, cherchez seulement combien de fois le premier chiffre de votre diviseur est compris dans le premier chiffre de votre dividende, ou dans les deux premiers si le premier ne suffit pas; marquez ce quotient sous le diviseur comme ci-devant.

Multipliez successivement, selon la règle donnée (50), tous les chiffres de votre diviseur, par ce quotient, et portez à mesure, les chiffres du produit sous les chiffres correspondans de votre dividende partiel. Faites la soustraction, et à côté du reste abaissez le chiffre suivant du dividende, pour continuer l'opération de la même maniere.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, et prévenir en même temps les cas qui peuvent causer quelque embarras.

EXEMPLE

On propose de diviser 75347 par 53.

$$\begin{array}{r|l} 75347 & 53 \\ \hline \underline{53} & 1421\frac{34}{53} \\ 223 & \\ \underline{212} & \\ 114 & \\ \underline{106} & \\ 87 & \\ \underline{53} & \\ 34 & \end{array}$$

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur, et au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les 7 dixaines de 75 contiennent les 5 dixaines de 53, c'est-à-dire, combien 7 contient 5 : je trouve 1 fois que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1 et je porte le produit 53 sous 75 : la soustraction faite il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffre 3 du dividende, et je poursuis, en disant, pour plus de facilité, en 22 combien de fois 5, (au lieu de dire en 223 combien de fois 53); je trouve 4 fois que j'écris au quotient.

Je multiplie successivement par 4 les deux chiffres du diviseur, et je porte le produit 212, sous mon dividende partiel 223 ; la soustraction faite, j'ai pour reste 11 ; j'abaisse à côté de ce reste, le chiffre 4 du dividende, et je dis simplement, comme ci-dessus, en 11 combien de fois 5 ? 2 fois ; je l'écris au quotient, et je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106 que j'écris sous le dividende partiel 114 ; faisant la soustraction, j'ai pour reste 8, à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 7 ; je divise de même 87, et continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotient, et 34 pour reste que j'écris à côté du quotient, de la maniere qui a été indiquée plus haut (60).

63. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier ; mais comme cette recherche seroit souvent longue et pénible, on se contente, comme on vient de le voir, de cher-

cher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur. Le quotient qu'on trouve par cette voie n'est pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée ; mais outre que cette estimation met presque toujours sur le but, et que dans les cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu ; la multiplication qui vient ensuite, sert à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, si le dividende partiel contenoit réellement le diviseur 3 fois, par exemple, et que par l'essai qu'on fait, on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il est facile de voir qu'en faisant la multiplication par 4 on auroit un produit plus grand que le dividende ; puisqu'on prendroit le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans ce dividende, et par conséquent la soustraction deviendra impossible ; alors on diminuera le quotient successivement d'une, deux, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher : au contraire, si l'on n'avoit mis que 2 au quotient, le reste de la soustraction se trouveroit plus grand que le diviseur : ce qui prouveroit que le diviseur y est encore contenu, et que par conséquent le quotient est trop foible.

Au reste, on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la premiere épreuve.

EXEMPLE II.

On propose de diviser 189492 par 375.

189492	375
1875	$505 \frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis, ensuite, en 18 seulement, combien de fois 3? il y est réellement 6 fois; mais en multipliant 375 par 6, j'aurois plus que mon dividende 1894; c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5, et après avoir écrit le produit sous 1894, je fais la soustraction, et j'ai pour reste 19.

J'abaisse à côté de 19, le chiffre 9 du dividende; et comme 199 que j'ai alors, ne contient pas 375, je pose 0 au quotient, et j'abaisse à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992, pour lequel je dis, en 19 seulement, combien de fois 3? 6 fois. Mais par la même raison que ci-dessus, je n'écris au quotient, que 5; et après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter dans un grand nombre de cas, les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces

essais douteux, lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas, au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans la partie correspondante du dividende, il faut chercher combien ce premier chiffre augmenté d'une unité, se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende; cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la premiere.

EXEMPLE

On propose de diviser 1832 par 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ \hline 1728 & 6\frac{104}{288} \\ \hline 104 & \end{array}$$

Au lieu de dire en 18 combien de fois 2, je dirai en 18 combien de fois 3, parce que le diviseur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200, je trouve 6 qui est le véritable quotient, au lieu que j'aurois trouvé 9, et j'aurois par conséquent été obligé de faire trois essais inutiles.

Moyens d'abréger la Méthode précédente.

65. C'est pour rendre la méthode plus facile à saisir, que nous avons prescrit d'écrire sous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviseur par le quotient; mais comme le but de l'Aritméthique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer

remarquer qu'on peut se dispenser d'écrire ces produits, et faire la soustraction à mesure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviseur. L'exemple suivant suffira pour faire entendre comment se fait cette soustraction.

EXEMPLE.

On veut diviser 756984 par 932.

756984	932
1138	$812 \frac{200}{932}$
2064	
200	

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui sont nécessaires pour contenir le diviseur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois ; c'est pourquoi j'écris 8 au quotient, et au lieu de porter sous 7569, le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord 2 par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte sur le chiffre suivant 6 une dixaine, qui jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me reste 3 que j'écris au-dssous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté, je retiens cette unité que je vais ajouter au produit suivant; ainsi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, et 1 que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende, deux dixaines, qui jointes à 6 me donnent 26; desquelles j'ôte 25, et il me reste 1 que j'écris sous 6; par-là j'ai tenu compte de la premiere dixaine dont j'aurois dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai de même compte des deux dixaines que je viens d'emprunter. Je continue donc, en disant 8 fois 9 font 72 et 2 que j'ai empruntés font 74, lesquels ôtés de 75, il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113 le chiffre 8 du dividende, et je continue de la même maniere, en disant en 11 combien de fois 9? 1 fois, puis 1 fois 2, fait 2, qui ôtés de 8 il reste 6; 1 fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il reste 0; 1 fois 9 est 9, qui ôtés de 11 il reste 2. J'abaisse le chiffre 4 à côté du reste 206, et je dis en 20 combien de fois 9? 2 fois; et faisant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il reste 0; 2 fois 3 font 6 qui ôtés de 6, il reste 0; et enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reste 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces divisions partielles, que le dividende contienne le diviseur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient; car si l'on pouvoit seulement mettre 10, ce seroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, seroit faux, puisque la dixaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel, appartiendroit à ce premier quotient.

67. Si le dividende et le diviseur étoient suivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un et à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins. Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserai seulement 80 par 4; car il est évident que 80 centaines, ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent, 4 unités.

De la Division des Parties Décimales.

68. Pour ne pas nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette regle seule.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun; cela ne changera rien à la valeur de ce nombre (30); supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre, et faites l'opération comme pour les nombres entiers, il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propose de diviser 12,52 par 4,3:

J'écris 1,252	4,3
Ou plutôt........12,52	4,30

en complétant le nombre de décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430; faisant l'opération,

1252	430
392	2 $\frac{392}{430}$

Je trouve 2 pour quotient, et 392 pour reste, c'est-à-dire, que le quotient est 2 et $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on se propose quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires ; au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme de fraction, comme on vient de le faire; on continueroit l'opération comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

1252	430
	2,9116
3920	
500	
700	
2700	
120	

Après avoir trouvé le quotient, en entier, qui est ici 2, on mettra à côté du reste 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reste dix fois trop grand ; on continuera de diviser par 430, et ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entieres, en mettant une virgule après le 2; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixiemes : après la multiplication et la soustraction faites, on mettra à côté du reste 50, un zéro, ce qui est la même chose que si l'on en avoit mis d'abord deux à côté du dividende, mais en mettant après 9, le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par-là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centiemes; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centieme d'unité près; en poussant jusqu'à trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millieme près, et ainsi de suite; puisqu'on n'auroit pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres; c'est ce qu'il est aisé d'appercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus, le dividende 12,52 et le diviseur 4,30, ne sont autre chose que 1252 centiemes et 430 centiemes, puisque les unités entieres valent des centaines de centiemes (22) : or il est clair que 1252 centiemes ne contiennent pas autrement 430 centiemes, que 1252 unités ne contiennent 430 unités; donc la considération de la virgule est inutile quand on a complété le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connoître le quotient d'une division, que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abréger le calcul, par la méthode suivante. Nous supposerons d'abord qu'on n'a besoin de connoître le quotient, qu'à une unité près : nous ferons voir ensuite, comment on doit appliquer la méthode pour l'avoir aussi près qu'on voudra : voici la regle.

Supprimez, sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur : faites, ensuite, la division comme à l'ordinaire; s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient, autant de zéros, que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par ce diviseur dont vous aurez supprimé le dernier chiffre de la droite : après cette division, vous diviserez le nouveau reste, par le diviseur précédent, dont vous supprimerez le dernier chiffre sur la droite; et vous continuerez, ainsi, de diviser, en supprimant à chaque division, un chiffre sur la droite du diviseur.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8789236487 divisé par 64423. Je supprime les quatre derniers chiffres de la droite du dividende, et je divise 878923, par le diviseur proposé 64423.

878923	64423
234693	136430
41424 .	. 6442
2772 .	. 644
196 .	. 64
4 .	. 6

Je trouve, d'abord, 13 pour quotient, et 41424 pour reste : je divise donc les 41424 par 6442, en supprimant le dernier chiffre 3 du diviseur : j'ai pour quotient 6, que j'écris à la suite du premier quotient 13, et le reste est 2772 que je divise par 644, en supprimant encore un chiffre sur la droite du diviseur primitif; j'ai pour quotient 4, que j'écris à la suite du quotient principal 136; le reste est 196 que je divise par 64, en supprimant encore un chiffre dans le diviseur : le quotient est 3, et le reste, 4. Enfin, je divise par 6, et j'ai 0 pour quotient; en sorte que le quotient de 8789236487 divisé par 64423, est 136430, à moins d'une unité près. En effet, le quotient exact est $136430 \frac{6197}{64423}$.

Il n'est pas indispensable d'écrire à chaque fois, comme nous l'avons fait, le nouveau diviseur; on peut se contenter de barrer, dans le diviseur primitif, chaque chiffre à mesure qu'on passe à une nouvelle division : ce n'a été que pour rendre l'opération plus sensible, que nous avons écrit ces diviseurs à côté des restes successifs.

70. Si le reste de la premiere division se trouvoit plus petit que n'est le diviseur après qu'on en a supprimé le dernier chiffre, on mettroit zéro au quotient; et s'il se trouvoit encore plus petit que ne seroit ce diviseur après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres restans, on mettroit encore un zéro au quotient, et ainsi de suite.

Exemple.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 divisé par 643; je divise comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reste après la suppression des deux derniers chiffres du dividende proposé.

551060	643
3666	85701
4510	
009 . .	64
9 . .	6
3	

J'ai pour quotient 857, et 9 pour reste; il faut donc diviser ce reste, par 64 seulement; comme 9 ne contient pas ce diviseur, je mets 0 au quotient, et j'ai encore pour reste, 9, que je divise par 6 seulement; en sorte que le quotient cherché, est 85701, à moins d'une unité près.

71. Si lorsqu'au commencement de l'opération on supprime sur la droite du dividende, les chiffres que la regle prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

Exemple.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161, ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime dans ce diviseur, les trois derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent.

		64
161		25
33	. .	6
3		

et j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près : en effet, le quotient exact est $24\frac{62951}{64524}$ qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité, le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime, est au-dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera de même d'une unité le dernier des chiffres qui restent dans le dividende, après la suppression que la regle prescrit, si ceux-ci surpassent ou 5, ou 50, ou 500; selon qu'il y en a 1, ou 2, ou 3, etc.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627 divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il suit.

		1987
8658		4357
710	. .	199
113	. .	20
13	. .	2

C'est-à-dire, qu'au lieu de diviser le reste 710 par 198 seulement, je le divise par 199, parce que le dernier chiffre 7 que je supprime, est au-dessus de 5. Même raison pour la division suivante. Mais comme le dernier diviseur qui est contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13 est un peu trop fort, je mets 7 au quotient, pour compenser.

73. Maintenant il est facile de voir ce qu'il y a à faire, lorsqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement. Par exemple, si l'on vouloit avoir le quotient, à un dix-millieme d'unité près, la question se réduiroit à mettre autant de zéros (ici, ce seroit quatre) à la suite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient; après quoi, on fera la division, selon la méthode actuelle. Et lorsqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'un dix-millieme d'unité près, le quotient de 6927 divisé par 4532; je mets quatre zéros à la suite de 6927, et la question se réduit à avoir, à moins d'une unite près, le quotient de 69270000 divisé par 4532, c'est-à-dire, conformément à la regle ci-dessus, à diviser 69270 par 4532, comme il suit,

69270		4532
23950		15285
1290	. .	453
384	. .	,45
24	. .	5

le quotient cherché est donc 1,5285, à moins d'un dix-millieme d'unité près.

S'il y avoit des décimales dans le dividende, ou dans le diviseur, ou dans tous les deux, on les rameneroit d'abord à n'en point avoir, selon ce qui a été dit (68); après quoi on opéreroit comme dans ce dernier exemple.

Donc si l'on vouloit réduire une fraction proposée, en décimales, on y parviendroit promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Ainsi si l'on veut réduire $\frac{4253}{9678}$ en décimales, et en avoir la valeur à moins d'un millieme d'unité près, on aura.

4253000 à diviser par 6978 ; ce qui (69) se réduira à diviser 4253 par 9678, ou (71) à diviser 4253 par 968 selon la méthode actuelle. On trouvera donc 439; en sorte qu'on aura 0,439 pour la valeur de $\frac{4253}{9678}$, à moins d'un millieme près.

74. Il pourroit arriver néanmoins que le quotient trouvé d'après ces regles, fût fautif de 1, 2, ou 3 unités dans le dernier chiffre. Quoique ce cas doive se rencontrer très-rarement, il n'est pas inutile de faire observer qu'on peut toujours le prévenir facilement, en ne séparant, au commencement de l'opération, sur la droite du dividende, qu'autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur, et opérant, du reste, comme ci-dessus. Lorsque le quotient sera trouvé, on en supprimera le dernier chiffre, en observant d'ajouter une unité au dernier de ceux qui resteront, si celui qu'on supprime est plus grand que 5.

Preuve de la Multiplication et de la Division.

75. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puisque dans la multiplication on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si l'on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est à-dire (59), si l'on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver, pour quotient, le multiplicateur; et comme on peut prendre le multiplicande pour le multiplicateur, *et vice versâ*; en général, *si l'on divise le produit d'une multiplication, par l'un de ses facteurs, on doit trouver, pour quotient, l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184 je divise

17184 par 2864, je dois trouver et je trouve en effet, 6 pour quotient.

Pareillement, puisque le quotient d'une division marque combien de fois le dividende contient le diviseur, il s'ensuit que si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, lorsque la division a été faite sans reste, et que dans le cas où il y a un reste, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, et qu'au produit on ajoute le reste de la division, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-dessus (63) que 189492 divisé par 375 donnoit 505 pour quotient et 117 pour reste; en multipliant 375 par 505, on trouve 189375, auquel ajoutant le reste 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainsi la multiplication et la division peuvent se servir de preuve réciproquement.

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons exposer : il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire : elles seront utiles dans beaucoup d'autres occasions.

Preuves par 9.

76. Supposons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, et trouvé que le produit est 29736092, on veuille éprouver si ce produit est exact.

On ajoutera tous les chiffres 6, 5, 4, 9, 8 du multiplicande, comme s'ils ne contenoient que des unités simples, et on retranchera 9 à mesure qu'ils se trouvera dans la somme ; on aura un reste qui sera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4, 5, 4, du multiplicateur, et retranchant pareillement tous les 9 que produit cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par le reste 4 du multiplicateur, et du produit 20, on retranchera les 9 qu'il peut renfermer ; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, de ce produit, et retranchant tous les 9, il ne reste aussi que 2, ce qui a lieu en effet.

Cette regle est fondée sur ce principe, que pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ses chiffres, ajoutés comme des unités simples, donneroient après la suppression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéros, on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre : si de 400 ou de 5000, ou de 60000, vous retranchez tous les 9, le reste sera 4 ou 5, ou 6, etc. ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donneroit, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498 ; (qui est la même chose que 60000, plus 5000, plus 400, plus 90, plus 8), sera le même que celui que donneroient 6, plus 5, plus 4, plus 9, plus 8; c'est-à-dire, le même que si l'on ajoutoit ces chiffres comme contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 et d'un reste 5, et que le multiplicateur 454 est composé aussi d'un certain nombre de 9, et d'un reste 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4 ou 20 que le produit total ne soit divisible par 9; ou en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2, que le produit total ne soit divisible par 9 ; donc il doit rester au produit la même quantité que dans le produit des deux restes après la suppression des 9 qu'il renferme.

On pourroit faire aussi cette preuve de la même maniere par le nombre 3.

A l'égard de la division, elle devient facile à éprouver, après ce qui a été dit (70). Après avoir ôté du dividende le reste qu'a donné la division, on regardera le résultat comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs, et par conséquent on y appliquera la preuve par 9 de la même maniere qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'est pas infaillible, parce que, dans la multiplication, par exemple, si l'on s'étoit trompé de quelques unités sur quelque chiffre du produit, et qu'en même temps on eût fait une erreur égale, mais en sens contraire, sur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changeroit rien au reste que l'on auroit après la suppression des 9, cette regle ne feroit point appercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainsi que l'on voit, au moins deux erreurs, et deux erreurs qui se compensent, ou qui ne different que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification seroit fautive, seront très-rares dans l'usage.

Quelques usages de la Regle précédente.

77. La division sert non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquieme, le vingtieme, le trentieme, etc. d'un nombre; c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. ou le partager en 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. parties égales, pour prendre une de ces parties.

La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce supérieure; par exemple, un certain nombre de deniers en sols, et ceux-ci en livres. Pour réduire 5854 deniers en sols, on remarquera que puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sol, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5854 deniers, autant il y aura de sols; il faut donc diviser par 12, et on trouvera 488^s et 8^d de reste. Pour réduire en livres 488^s, on divisera 488 par 20, puisqu'il faut 20^s pour faire la livre; et on aura en total 24 livres 8 sols 8 deniers.

A l'occasion de cette division par 20, remarquons que quand on a à diviser par un nombre suivi de zéros, on peut abréger l'opération en séparant sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros; on divise la partie qui reste à gauche, par les chiffres significatifs du diviseur; s'il y a un reste, on écrit à sa suite, les chiffres qu'on a séparés, ce qui donne le reste total. Par exemple, pour diviser 5834 par 20; je sépare le dernier chiffre 4, et je divise par 2, la partie restante 583; j'ai pour quotient 291, et 1 pour reste; j'écris à côté de ce reste 1, le chiffre séparé 4, ce qui me donne 14 pour reste total; en sorte que le quotient est 291 $\frac{14}{20}$.

Cette abréviation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids : si l'on sait que la charge est de 2584954 livres; pour la réduire en tonneaux, c'est-à-dire, pour diviser par 2000; on séparera les trois derniers chiffres de la droite, et prenant la moitié des autres, on aura 1292 tonneaux et 954 livres.

Quand on veut évaluer en livres et sols le vingtieme d'un nombre de livres proposé, il suit de cette regle que l'opération se réduit à compter le dernier chiffre pour des sols, et prendre moitié des autres chiffres que l'on comptera pour des livres. Si en prenant cette moitié il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sols qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtieme de 54672 livres, on séparera le dernier chiffre 2 que l'on comptera pour 2 sols; et prenant la moitié de 5467 qui est 2733, avec une unité de reste, on écrira 2733 livres 12 sols : la raison de cette regle est évidente, en faisant attention que 54672 livres est 54660 livres, plus 12 livres; or le vingtieme de 54660 est évidemment 2733, et celui de 12 livres est 12 sols, puisque le vingtieme d'une livre est un sol. S'il y avoit des sols et deniers dans la somme proposée, on négligeroit les deniers dont la vingtieme partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sols, on les tripleroit, et prenant le cinquieme, on le porteroit aux deniers. Ainsi le vingtieme de 54672 livres 17 sols 7 deniers, est 2733 livres 12 sols 10 deniers.

S'il s'agissoit d'avoir le dixieme d'un nombre de livres, on sépareroit le dernier chiffre, et l'ayant doublé, on le compteroit pour des sols; et on compteroit comme des livres tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixieme de 67987 livres est 6798 livres 14 sols. La raison pour laquelle on double le dernier chiffre, est que le dixieme d'une livre, est 2 sols.

On a assez souvent besoin de prendre les quatre deniers pour livre, d'une somme proposée : cela se réduit à en prendre d'abord le vingtieme, comme il vient d'être dit : puis prendre le tiers de ce vingtieme. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtieme qui est 438 livres 2 sols, dont le tiers 146 livres o sol 8 deniers forme les quatre deniers pour livre de 8762 livres. En effet, les quatre deniers pour livre, ne sont autre chose que le soixantieme; puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantieme est le tiers du vingtieme.

Des Fractions.

78. Les fractions considérées arithmétiquement sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre d'unités plus petites, comme l'on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties ou de vingt unités plus petites qu'on appelle sols.

Une ou plusieurs de ces parties forment ce qu'on appelle une fraction de l'unité. On donne aussi ce nom aux nombres qui représentent ces parties.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manieres qui sont chacune en usage.

La premiere maniere consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit; mais alors

alors on donne un nom particulier à ces parties : ainsi pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la liv., on emploieroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 sols et on écriroit 7^s. Cette maniere de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

80. Mais comme il faudroit un signe particulier pour chaque division qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes, en marquant une fraction par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, et séparés par un trait. Ainsi, pour marquer les 7 parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit, contient de parties de l'unité ; et on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle *le numérateur*) ; ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle *le dénominateur*) ; mais on ajoute au nom de celui-ci la terminaison *ieme* : par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$, on prononcera *sept vingtiemes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquiemes* ; et par cette expression *quatre cinquiemes*, on doit entendre quatre parties, dont il en faudroit cinq pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2, ou 3, ou 4, qui se prononcent *moitiés* ou *demis*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceroient un *demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction contient de parties de l'unité, et le dénominateur fait connoître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut pour composer l'unité. On lui donne le nom de dénominateur, parce que c'est lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, et qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$, les parties de la premiere s'appellent des *cinquiemes*, et les parties de la seconde des *septiemes*.

83. Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers considérés sous la forme de Fraction.

84. Les opérations qu'on fait sur les fractions, conduisent souvent à des résultats fractionnaires, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, par exemple, à des résultats tels que $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$, etc.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, et le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainsi $\frac{27}{5}$

donneront $5\frac{2}{5}$, c'est-à-dire, cinq entiers et deux cinquiemes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5 fait connoître que l'unité est composée de 5 parties ; donc autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entieres dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications et les divisions des nombres joints aux fractions exigent, du moins, pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fraction.

On fait cette conversion en multipliant le nombre entier par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier. Par exemple, si l'on veut convertir 8 entiers en cinquiemes, on multipliera 8 par 5, et on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8 en cinquiemes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties ; les 8 unités en contiendront donc 40 : pareillement $7\frac{4}{9}$ convertis en neuviemes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une Fraction, sans changer sa valeur.

87. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

88. Donc on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, etc., sans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, etc.

On peut donc dire en général *qu'une fraction ne change point de valeur, quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Ainsi $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, etc.

89. Par un raisonnement semblable, on voit que moins on supposera de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quantité ; que par conséquent on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, etc., fois plus petit, pourvu qu'en même temps on rende son numérateur 2, 3, 4, etc., fois plus petit ; et en général, *une fraction ne change point de valeur, quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeller ce que c'est que le dénominateur, et ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc que multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction ; puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser, sont la base des deux réductions suivantes, qui sont d'un très-grand usage.

Réduction des Fractions à un même Dénominateur.

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la premiere, chacun par le dénominateur

de la seconde ; et les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la premiere.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 et 3 qui sont les deux termes de la premiere fraction, chacun par 4 dénominateur de la seconde ; et j'ai $\frac{8}{12}$ qui (88) est de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie de même les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, chacun par 3 dénominateur de la premiere, et j'ai $\frac{9}{12}$ qui est de même valeur que $\frac{3}{4}$; en sorte que les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont changées en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$ qui sont respectivement de même valeur que celles-là, et qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il est aisé de voir que par cette méthode le dénominateur sera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions, puisque dans chaque opération le nouveau dénominateur est formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2°. Si l'on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune, par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je multiplierai les deux termes 2 et 3 de la premiere, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7, des autres fractions, produit que je trouve en disant : 4 fois 5 font 20, puis 7 fois 20 font 140 ; je multiplie donc 2 et 3, chacun par 140, et j'ai $\frac{280}{420}$, qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (88).

Je multiplie pareillement les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7, produit que je forme en disant : 3 fois 5 font 15, 7 fois 15 font 105; je multiplie donc 3 et 4 chacun par 105, ce qui donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisieme fraction, je multiplie ses deux termes 4 et 5 chacun par 84, produit de trois dénominateurs 3, 4 et 7, j'ai $\frac{336}{420}$ au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin, pour la quatrieme, je multiplierai 5 et 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5, des trois premieres fractions, et j'aurai $\frac{300}{420}$ au lieu de $\frac{5}{7}$, en sorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ sont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins simples à la vérité que celles-là, mais de même valeur qu'elles, et plus susceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition et de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

Réduction des Fractions à leur plus simple expression.

92. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée, à être exprimée par de moindres nombres, et cela lorsque son nu-

mérateur et son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre ; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'est une simplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faudra suivre.

93. On divisera le numérateur et le dénominateur, chacun par 2, et on répétera cette division tant qu'elle pourra se faire exactement.

On divisera ensuite les deux termes par 3, et on continuera de diviser l'un et l'autre par 3, tant que cela pourra se faire.

On fera la même chose successivement avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, etc., c'est-à-dire, avec les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, et qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, etc.

On pourra dans cette recherche s'aider des principes suivans.

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble comme s'ils étoient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire, un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3. Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1 font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres ajoutés ensemble font 9, ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 se démontre comme celle du nombre 9 à très-peu de chose près ; et l'un et l'autre se démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro est divisible par 5.

A l'égard du nombre 7 et des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles regles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division ; il faudra essayer la division.

Proposons-nous, pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je divise les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun sont pairs, et j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je divise encore par 2, et j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-dessus, m'apprend que je puis diviser par 3 ; je divise en effet, et j'ai $\frac{168}{483}$; je divise encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'essaie de diviser par 7 ; la division réussit et donne $\frac{8}{23}$.

La raison pour laquelle nous prescrivons de ne tenter la division que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc., c'est qu'après avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4, puisque si celle-ci pouvoit réussir, à plus forte raison la division par 2 auroit-elle pu encore se faire.

95. De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun, qu'ils puissent avoir : voici la regle pour trouver ce plus grand diviseur.

Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.

S'il y a un reste, divisez le plus petit terme par ce reste, et si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.

Si cette seconde division donne un reste, divisez le premier reste par le second, et continuez toujours de diviser le reste précédent par le dernier reste jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors le dernier diviseur que vous aurez employé, sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$:

Je divise 9024 par 3760; j'ai pour quotient 2, et pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504; j'ai pour quotient 2, et pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504 par le second reste 752; la division réussit, et j'en conclus que 752 peut diviser les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, et la réduire à sa plus simple expression qu'on trouve, en faisant l'opération, être $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 divise 1504; il doit donc diviser 3760 qu'on a vu être composé de deux fois 1504 et de 752; on voit de même, qu'il doit diviser 9024, puisque 9024 est composé de deux fois 3760, et de 1504.

On voit de plus que 752 est le plus grand diviseur commun que puissent avoir 3760 et 9024; car il ne peut y avoir de diviseur commun entre 9024 et 3760 qui ne le soit en même temps de 3760 et 1504; et entre ces deux-ci, il ne peut y en avoir un qui ne soit en même-temps diviseur commun de 1504 et de 752; mais il est évident qu'entre ces deux-ci, il ne peut y avoir de diviseur commun plus grand que 752; donc, etc.

Différentes manieres dont on peut envisager une Fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.

96. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici

d'une fraction, est que le dénominateur représente de combien de parties l'unité est composée; et le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur. Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4 comme représentant quatre choses quelconques, 4 livres par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 livres en cinq parties pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties pour prendre 4 de ces parties.

97. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction comme un dividende, et le dénominateur comme un diviseur. On voit par-là ce que signifient les restes de divisions mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il suit de-là 1°. qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier le numérateur, et lui donnant l'unité pour dénominateur, ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

99. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque en décimales, il n'y a qu'à considérer le numérateur comme un reste de division où le dénominateur étoit diviseur, et opérer par

conséquent, comme il a été dit (pag. 67), en observant de mettre d'abord un zéro au quotient pour tenir la place des unités ; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent en décimales 0,6, que $\frac{5}{9}$ valent 0,555, etc., que $\frac{1}{25}$ vaut 0,04, et ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales, tout nombre complexe proposé. Par exemple, s'il s'agit de réduire $3^{T}\ 5^{P}\ 8^{p}\ 7^{l}$ en décimales de la toise, de manière à ne pas négliger une demi-ligne ; j'observe que la toise contient 864 lignes, et par conséquent 1728 demi-lignes ; il faut donc, pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des milliemes, c'est-à-dire, jusqu'aux dix-milliemes.

Cela posé, je réduis les $5^{P}\ 8^{p}\ 7^{l}$ tout en lignes, et j'ai 823 lignes ou $\frac{823}{864}$ de la toise ; réduisant cette fraction en décimales comme il vient d'être dit, on a 0,9525, et par conséquent 3^{T}, 9525, pour le nombre proposé.

Des Opérations de l'Arithmétique sur les Fractions.

100. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Les deux premieres opérations, l'addition et la soustraction, exigent le plus souvent une opération préparatoire ; les deux autres n'en exigent pas.

De l'Addition des Fractions.

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, et on

donnera à la somme le dénominateur commun de ces fractions.

Ainsi pour ajouter $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 et 5, et j'ai par conséquent $\frac{10}{7}$, que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enseigné (90 et 91); après quoi on ajoutera ces nouvelles fractions de la maniere qui vient d'être prescrite. Ainsi si l'on propose d'ajouter $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, je change ces 3 fractions en ces trois autres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, dont la somme est $\frac{133}{60}$ qui se réduit à $2\frac{13}{60}$ (85).

De la Soustraction des Fractions.

103. Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et on donnera au reste le dénominateur commun de ces deux fractions. S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reste sera $\frac{3}{9}$, qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (93).

104. Si de $9\frac{5}{8}$ on vouloit retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunteroit sur 9 une unité, laquelle réduite en huitiemes et ajouté à $\frac{5}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$, desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resteroit $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4 de 8 qui restent après l'emprunt, il resteroit en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90) et (91), après quoi on fera la soustraction comme il vient d'être dit. Ainsi pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je change ces

fractions en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; et retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la Multiplication des Fractions.

106. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, et le dénominateur par le dénominateur.* Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur, et par conséquent $\frac{8}{15}$ pour le produit.

Pour sentir la raison de cette regle, il faut se rappeller que multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$, ou, plus exactement, c'est prendre 4 fois la cinquieme partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3, par 5, on change les tiers en quinziemes, c'est-à-dire, en parties cinq fois plus petites; et en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquieme partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc en effet $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si l'on avoit un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier, on mettroit l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$, cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la regle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, l'opération se réduit à multiplier le numérateur de cette fraction, par l'entier.

108. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, il faudroit, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers chacun en fraction de même espece que celle qui l'accompagne; par exemple, si l'on a $12\frac{3}{5}$ à multiplier par $9\frac{3}{4}$, je change (86) le multiplicande en $\frac{63}{5}$, et le multiplicateur en $\frac{39}{4}$; et je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$, selon la regle ci-dessus (106), ce qui me donne $\frac{2457}{20}$ qui valent $122\frac{17}{20}$.

Division des Fractions.

109. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, et multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainsi renversée.*

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui donne $\frac{3}{2}$, je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, selon la regle donnée (106), et j'ai $\frac{12}{10}$ ou $1\frac{2}{10}$ pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour appercevoir la raison de cette regle, il faut observer que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$; or il est facile de voir que puisque le diviseur est 2 tiers, il sera contenu dans le dividende trois fois autant que s'il étoit 2 entiers; donc il faut diviser d'abord par 2 et multiplier ensuite par 3, ce qui n'est autre chose que prendre trois fois la moitié du dividende, ou le multiplier par $\frac{3}{2}$ qui est la fraction diviseur renversée.

110. Si l'on avoit une fraction à diviser par un entier, ou un entier à diviser par une fraction, on commenceroit par mettre l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur: par exemple, si l'on a 12 à diviser par $\frac{5}{7}$, on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la regle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, et donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$, pareillement, si l'on avoit $\frac{3}{4}$ à diviser par 5, on réduiroit l'opération à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$; c'est-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorsqu'on a une fraction à diviser par un entier, l'opération se réduit à multiplier le dénominateur, par cet entier.

111. S'il y avoit des entiers, joints aux fractions, on réduiroit ces entiers chacun en fraction de même espece que celle qui l'accompagne : par exemple, si l'on avoit $54\frac{3}{5}$ à diviser par $12\frac{2}{3}$, on changeroit le dividende en $\frac{273}{5}$, et le diviseur en $\frac{38}{3}$, et l'opération seroit réduite à diviser $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$, c'est-à-dire, (109) à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$, ce qui donneroit $\frac{819}{190}$ ou $4\frac{59}{190}$.

Quelques applications des Règles précédentes.

112. Après ce que nous avons dit (96), il est aisé de voir comment on peut évaluer une fraction. Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puisque les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont la même chose (96) que le septieme de 5 livres, je réduis les 5 livres en sols (57), et je divise les 100 sols qu'elles me donnent, par 7, ce qui

me donne 14 sols pour quotient et 2 sols de reste; je réduis ces 2 sols en deniers, et je divise 24 deniers par 7, j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$, ainsi les $\frac{5}{7}$ d'une livre, sont 14 sols 3 deniers et $\frac{3}{7}$ de denier.

Si l'on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il est visible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre; et multiplier ensuite par 24, ce qu'auroit donné cette opération; mais il est plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (197) donne $\frac{120}{7}$ liv. et d'évaluer ensuite cette derniere fraction qu'on trouvera valoir 17 livres 2 sols 10 deniers $\frac{2}{7}$.

113. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer : si l'on demande, par exemple, combien valent 0, 532 de toise; comme la toise est de 6 pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds, c'est-à-dire, 3^p et 0, 192 de pieds; multipliant cette derniere fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire, 2^p et 0, 304 de pouce; enfin multipliant celle-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou 3^l et 0, 648 de ligne, c'est-à dire que la valeur de la fraction 0, 532 de toise, sera 3^T 2^P 3^l et 0,648 de ligne.

114. L'évaluation des fractions nous conduit naturellement à parler des *fractions de fractions* : on appelle ainsi une suite de fractions séparées, les unes des autres par l'article *de*; par exemple, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, etc. sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entre eux, et tous les dénominateurs entr'eux : ensorte que

la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$; la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$; puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$. Pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; et ce qu'on vient de dire, fait connoître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si l'on demandoit les $\frac{3}{4}$ *de* $5\,\frac{3}{8}$, on convertiroit l'entier 5 en huitiemes, et la question seroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$ qu'on trouveroit être $\frac{129}{32}$ ou $4\,\frac{1}{32}$.

Ajoutons à tout ce que nous avons dit sur les fractions, un exemple qui renferme plusieurs des regles que nous avons établies.

Supposons qu'on veut construire un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur, que les distances entre les sabords, en y comprenant l'espace entre le premier sabord et la rablure de l'étrave, et l'espace entre le dernier sabord et la rablure de l'étambot, fassent 108 $\frac{3}{4}$ pieds : on demande si l'on peut percer 12 sabords à la premiere batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$, je retranche 108 $\frac{3}{4}$ (103 *et suiv.*) il me reste 31 $\frac{11}{12}$ pour les sabords ; je divise 31 $\frac{11}{12}$ par 12, c'est-à-dire, $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) et (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds et $\frac{95}{144}$, fraction qui, évaluée en pouces et lignes, vaut 7 pouces 11 lignes ; ainsi il faudroit donner à chaque sabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'est-à-dire, 2 pieds 8 pouces à peu près, ce qui est une mesure convenable pour un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorsqu'une fraction exprimée par des nombres un peu considérables, n'est pas réductible par la méthode donnée (95), et qu'on peut se contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode suivante, qui donne alternativement des fractions plus grandes et plus petites que la proposée, mais toujours de plus en plus approchées, de sorte qu'à la derniere opération on retombe sur la fraction proposée. Prenons, par exemple, la fraction $\frac{100000}{314159}$, qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du diametre à la circonférence; et proposons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions moins exactes, à la vérité, mais exprimées par des nombres plus simples.

Divisez le numérateur et le dénominateur, par le numérateur, vous aurez $\dfrac{1}{3\frac{14159}{100000}}$. Pour avoir une premiere valeur approchée, négligez la fraction qui accompagne 3, vous aurez $\frac{1}{3}$ pour premiere valeur approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 3, chacun par le numérateur de cette fraction, et vous aurez $\dfrac{1}{3\dfrac{1}{7\frac{887}{14159}}}$; négligez la fraction qui accompagne 7, et vous aurez $\dfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (86) $\dfrac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (109) $\frac{7}{22}$ pour seconde valeur, qui est plus approchée que la premiere, mais un peu trop foible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 7, chacun par le numérateur de cette fraction; vous aurez $\dfrac{1}{3\dfrac{1}{7\dfrac{1}{15\frac{854}{887}}}}$: supprimez la fraction qui accompagne 15, et vous aurez $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\frac{1}{15}}}$ qui revient à $\frac{106}{333}$, valeur plus approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez les deux termes de la fraction qui accompagne 15, chacun par le numérateur 854, et vous aurez $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1\frac{33}{854}}}}}$;

négligeant la fraction $\frac{33}{854}$, vous aurez pour valeur plus approchée, $\frac{113}{355}$, mais qui est un peu trop foible. On voit à présent comment on peut continuer.

Des nombres complexes.

116. Quoique les regles que nous avons exposées jusqu'ici, puissent servir aussi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir considérer ceux-ci d'une maniere plus particuliere, parce que la division qu'on y fait de l'unité principale, en facilite souvent le calcul.

Il y a plusieurs sortes de nombres complexes, et les regles pour les calculer tiennent beaucoup à la division qu'on a faite de l'unité : cependant il n'est pas nécessaire d'examiner toutes ces especes pour être en état de les calculer; mais il importe de savoir quels rapports leurs différentes parties ont tant entr'elles, qu'à l'égard de l'unité principale; c'est par cette raison que nous donnons ici une Table des nombres complexes dont l'usage est le plus fréquent.

Table des unités de quelques especes, et caracteres par lesquels on représente ces différentes unités.

Pour les Monnoies.

₶ signifie.... livre.	1 livre vaut..20 sols.
f........... sol.	1 sol vaut....12 deniers.

Pour les Poids.

℔ signifie... livre.	1 livre (poids) vaut 2 marcs.
M......... marc.	1 marc...... 8 onces.
O ou ℥..... once.	1 once...... 8 gros.
G ou ʒ..... gros.	1 gros 3 deniers ou scrupules
D ou ℈ denier ou scrupule.	1 denier..... 24 grains.
g........... grain.	

Pour l'étendue des Lignes.

T signifie.... toise.	1 toise vaut... 6 pieds.
P......... pied.	1 pied...... 12 pouces.
p......... pouce.	1 pouce..... 12 lignes.
l......... ligne.	1 ligne...... 12 points.
pt......... point.	

Pour le Temps.

J signifie.... jour.	1 jour vaut.... 24 heures.
H............... heure.	1 heure.......... 60 minutes.
′................... minute.	1 minute....... 60 secondes.
″.................. seconde.	1 seconde..... 60 tierces.

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies et aux capacités des corps.

Addition des nombres complexes.

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés, les uns au-dessous des autres, de maniere que toutes les parties d'une même espece se trouvent chacune dans une même colonne verticale, et après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espece la plus petite ; si leur somme ne compose pas une unité de l'espece immédiatement supérieure, on l'écrit sous les unités de son espece, si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espece immédiatement supérieure, on n'écrit, au-dessous de cette colonne, que l'excédent d'un nombre juste d'unités de cette seconde espece, et on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables sur lesquelles on procéde de la même maniere.

EXEMPLE I.

On propose d'ajouter	227ᵗᵗ	14ˢ	8ᵈ
	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979ᵗᵗ	15ˢ	7ᵈ

La somme des deniers est 31 qui renferme 2 douzaines de deniers ou 2 sols et 7 deniers ; je pose les 7 deniers, et je retiens 2 sols que j'ajoute avec les unités de sols, ce qui donne 15 sols, dont je pose seulement le chiffre 5, et je retiens la dixaine pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5f, et comme il faut 2 dixaines de sols pour faire une livre, je prends la moitié de 5 qui est 2 avec 1 pour reste, je pose ce reste et je porte les deux livres à la colonne des livres que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

On propose d'ajouter

54^T	2^p	3^p	9^l
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^T	3^p	6^p	5^l

La somme des lignes monte à 41 qui font 3 pouces 5 lignes; je pose 5 lignes, et je retiens les 3 pouces que j'ajoute avec les pouces; le tout me donne 30 qui valent 2 pieds 6 pouces; je pose les 6 pouces, et je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent quinze pieds qui valent 2^T 3^p : je pose les 3^p et j'ajoute les deux toises avec les toises; le tout monte à 85, en sorte que la somme est 85^T 3^p 6^p 5^l.

Soustraction des Nombres complexes.

118. Ecrivez les nombres proposés comme dans l'addition, et commencez la soustraction par les unités de l'espece la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous. S'il ne peut être retranché, empruntez sur l'espece immédiatement supérieure, une unité que vous réduirez à l'espece dont il s'agit, et que

vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espece ; et lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste, à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

De.	$143^{tt}\ 17^{s}\ 6^{d}$	
on veut ôter.	$75^{tt}\ 12^{s}\ 9^{d}$	
	$68^{tt}\ 4^{s}\ 9^{d}$	reste.

Ne pouvant ôter 9^d de 6^d, j'emprunte 1 qui vaut 12^d, et 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9 ; j'ôte ensuite 12, non pas de 17, mais de 16 qui restent après l'emprunt, et il reste 4 ; enfin, je retranche 75 liv. de 143 liv. et il me reste 68 liv.

EXEMPLE II.

De.	$163^{tt}\ 0^{s}\ 5^{d}$
on veut ôter.	$84^{tt}\ 18^{s}\ 9^{d}$
	$78^{tt}\ 1^{s}\ 8^{d}$

Comme je ne puis ôter 9^d de 5^d, et que d'ailleurs il n'y a pas de sols sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte 1 liv. sur 163 liv. mais j'en laisse, par la pensée, 19 sols à la place du zéro ; après quoi j'opere comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

119. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction, multiplication dont nous avons donné la regle (106). Par exemple, si l'on demande ce que doivent coûter $54^{T}\ 3^{P}$ d'ouvrage, à raison de 42 livres 17 sols 8 deniers la toise, on peut réduire le multiplicande 42 livres 17 sols 8 deniers tout en deniers (57); ce qui donnera 10292 deniers; et comme le denier est la 240e partie de la livre, le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre; pareillement on réduira le multiplicateur $54^{T}\ 3^{P}$ tout en pieds; ce qui donnera 327^{P}; et comme le pied est la sixieme partie de la toise, on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de toise, en sorte que la question est réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ de livre par $\frac{327}{6}$, ce qui (106) donnera $\frac{3365484}{1440}$ de livre, qui (112) valent 2327 livres 2 sols 10 deniers.

Cette méthode s'étend à toute espece de nombres complexes; mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit partie *aliquote* de cet autre : ainsi 3 est partie aliquote de 12; il en est de même de 2, de 4 et de 6.

Rappellons-nous que multiplier n'étant autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois; multiplier par $8\ \frac{3}{4}$, par exemple,

c'est prendre le multiplicande 8 fois, et le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois, ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$, ou en prenant d'abord le quart, et l'écrivant 3 fois ; ou bien en prenant d'abord la moitié, et ensuite la moitié de cette moitié : ainsi, pour multiplier 84 par $8\frac{3}{4}$,
j'écrirois. . . .

$$\begin{array}{r} 84 \\ 8\frac{3}{4} \\ \hline 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$ produit.

En multipliant 84 par 8, j'aurois d'abord 672 ; ensuite, pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrois d'abord la moitié qui est 42 ; puis, pour prendre pour le quart restant, je prendrois la moitié de 42 qui est 21, et réunissant ces 3 produits particuliers, j'aurois 735 pour le produit total.

121. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes especes d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres, et à l'égard de cette unité principale ; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire en sorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de maniere que ces parties aliquotes puissent être employées commodément ; ou de les décomposer en parties aliquotes les unes des autres ; et si cette décomposition ne fournit que

des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléra par de faux produits ; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter 54^{T} 3^{P} à raison de 72 liv. la toise.

Il faut multiplier. . . . 72₶
par. . . . . 54^{T} 3^{P}

288₶ 0^{s} 0^{d}
360
36

3924₶ 0^{s} 0^{d}

On multipliera d'abord, selon les regles ordinaires, 72 livres par 54. Ensuite, pour multiplier par 3^{P} qui sont la moitié de la toise, et qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise, on prendra la moitié de 72 liv. et additionnant, on aura 3924₶ pour produit total.

EXEMPLE II.

Si on avoit. . . . 72₶
à multiplier par. . . . . 54^{T} 5^{P}

288₶ 0^{s} 0^{d}
360
36
24

3948₶ 0^{s} 0^{d}

On multipliera d'abord 72 liv. par 54. Ensuite, au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{6}$ de la toise, on décomposera 5^p en 3^p et 2^p, dont le premier est la moitié, le second le $\frac{1}{3}$ de la toise ; on prendra donc d'abord la moitié de 72 liv. et ensuite le $\frac{1}{3}$ de 72 liv et on aura, en réunissant tous ces produits particuliers, 3948 livres pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait.	72#
à multiplier par.	5^T 4^p 8^p
	360# 0^s 0^d
	36
	12
	4
	4
	416# 0^s 0^d

Après avoir multiplié par 5^T, on multipliera par 4^p, et pour cet effet on décomposera ce nombre en 3^p et 1^p ; pour 3^p, on prendra la moitié de 72 liv. qui est 36 liv. et pour un pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, et par conséquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 livres qui est 12 livres. Ensuite, pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, et on les décomposera en 4 pouces, et 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, et qui par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 livres. Enfin réunissant, on aura 416 livres 0^s 0^d pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a.	72^{tt}	6^s	6^d
à multiplier par. . . .	27^T	4^P	8^p
	504^{tt}	0^s	0^d
	144		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	2009^{tt}	0^s	$6^d\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 livres par 27.

Ensuite, pour multiplier 6 sols par 27, on décomposera ces 6 sols en 5 sols et 1 sol. Les 5 sols faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27, donner 27 fois le quart de la livre, ou le quart de 27 livres; on prendra donc le quart de 27 livres qui est 6 livres 15 sols. Pour multiplier 1 sol par 27, on remarquera qu'un sol est la cinquieme partie de 5 qu'on vient de multiplier, ainsi on prendra le cinquieme des 6 livres 15 sols, qui sera 1 livre 7 sols.

A l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié d'un sol, et par conséquent on prendra la moitié de 1 livre 7 sols qu'on a eu pour un sol.

Jusques-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même maniere que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire, que pour les 4^{p}, on prendra d'abord pour 3^{p}, la moitié 36 livres 3 sols 3 deniers du multiplicande, et pour 1^{p} le tiers de ce que donnent les 3^{p}.

Enfin, pour 8^{p}, on prendra 2 fois pour 4, c'est-à-dire, qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1^{p}; en réunissant toutes ces différentes parties, on aura 2009 livres 0 sols 6 deniers $\frac{2}{3}$ pour produit total.

123. Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été assez faciles à évaluer; mais dans le cas où ces parties seroient plus composées, on se conduiroit comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE V.

A raison de.	34^{tt}	10^{s}	2^{d} la toise.
combien doivent coûter	17^{T}		
	238	0	0
	34		
	8	10	
	~~0~~	~~17~~	
	0	2	10
	586^{tt}	12^{s}	10^{d}

Après avoir multiplié 34 livres par 17, et ensuite les 10 sols par 17 en prenant moitié de 17, on multipliera 2 deniers qui sont la sixieme partie d'un sol, et par conséquent la sixieme partie de la dixieme partie, ou (114) la soixantieme partie de 10 sols ; mais au lieu de prendre la soixantieme partie de 8 livres 10 sols, il sera plus commode de faire un faux produit, et de prendre d'abord le dixieme de ce qu'ont donné 10 sols, c'est-à dire, le dixieme de 8 livres 10 sols ; ce dixieme qui est 0 livres 17 sols, est pour un sol ; mais comme il ne faut que pour le sixieme d'un sol, on barrera ce faux produit, et on en écrira le sixieme au-dessous.

EXEMPLE VI.

Combien pour 34 livres 10 sols 2 deniers fera-t-on faire d'ouvrage, à raison de 1 livre pour 17 toises ?

Il faut multiplier 17 toises par 34 livres 10 sols 2 deniers, c'est-à-dire, prendre 17 toises autant de fois que la livre est contenue dans 34 livres 10 sols 2 deniers.

17^T				
$34^{\#}$	10_s	2_d		
68^T	0^P	0^p	0^l	0^{pts}
51				
8	3			
$\cancel{0}$	$\cancel{5}$	$\cancel{1}$	$\cancel{7}$	$\cancel{4}\,\cancel{\tfrac{1}{5}}$
0	0	10	2	$4\,\tfrac{4}{5}$
586^T	3^P	10^p	2^l	$4^{pts}.\ \tfrac{4}{5}$

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34 ; ensuite pour multiplier 17 toises par 10 sols, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sols font la moitié de la livre, et on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera pour plus de facilité, ce que donneroit un sol, en prenant le dixieme de ce qu'ont donné 10 sols ; ce dixieme est 0 toises 5 pieds 1 pouce 2 lignes 4 points et $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point ; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit ; mais on en prendra le sixieme pour avoir le produit de 2 deniers, on écrira au-dessous ce sixieme qui est 0 toises, 0 pieds 10 pouces 2 lignes 4 points $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement, pour confirmer ce que nous avons dit (45) qu'il importoit de distinguer le multiplicande du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets : en effet dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et 34 livres 10 sols 2 deniers ; cependant les deux produits sont différens.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplexe.

124. Si le dividende seul est complexe, et si en même temps le dividende et le diviseur ont des unités de différente espece, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la regle ordinaire ; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espece, qu'on ajoutera avec celles de

même espece qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisieme espece, auxquelles on ajoutera celles de la même espece qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme ci dessus ; on continuera de réduire les restes, en unités de l'espece suivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE.

On a donné 4783 liv. 3 sols 9 den. pour paiement de 87 toises d'ouvrage ; on demande à combien cela revient la toise ?

$4783^{tt}\ 3^{s}\ 9^{d}$	87
433	$54^{tt}\ 19^{s}\ 7^{d}$
85	
1703^{s}	
833	
50	
609^{d}	
000	

Il faut diviser 4783 livres 3 sols 9 deniers par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 livres divisées par 87, selon la regle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, et 85 livres pour reste : ces 85 livres réduites en sols (57) donneront avec les 3 sols du dividende 1703 sols, qui divisés par 87, donneront

19 sols pour quotient, et 50 sols pour reste: ces 50 sols réduits en deniers, donnent avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125. Mais si le dividende et le diviseur ont des unités de même espece, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espece qu'eux; ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans les cas où le dividende et le diviseur étant de même espece, le quotient devra aussi être de même espece qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent; par exemple, si l'on proposoit cette question, 1243 livres ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre? il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espece que le dividende et le diviseur, c'est-à-dire, doit être des livres, et qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sols, et le second reste en deniers; et on trouvera 5 livres 16 sols 8 deniers $\frac{760}{1243}$, pour réponse à la question.

127. Mais lorsque le dividende et le diviseur étant de même espece, le quotient devra être d'espece différente; alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende et le diviseur, chacun à la plus petite espece qui soit dans le dividende, après quoi on fera la division comme dans le cas précédent et on y traitera les unités du dividende, comme si elles étoient de même espece que celles que doit avoir le quotient:

par exemple, si l'on proposoit cette question, combien pour 7954 livres 11 sols 7 deniers fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 72 livres la toise? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et parties de toise. On réduira donc 7954 livres 11 sols 7 deniers tout en deniers, ce qui donnera 1909099 on réduira pareillement 72 livres en deniers, et on aura 17280; on divisera 1909099 considéré comme des toises, par 17280, et on aura pour quotient $110^T\ 2^P\ 10^p\ 6^l\ \frac{19}{20}$.

Division d'un Nombre complexe par un nombre complexe.

128. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espece (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite espece du diviseur pour composer l'unité principale de ce même diviseur; alors la division sera réduite au cas précédent où le diviseur étoit incomplexe.

EXEMPLE.

$57^T\ 5^P\ 5^p$ d'ouvrage ont été payées $854^{ll}\ 17^s\ 11^d$: on demande à combien cela revient la toise? Il faut diviser 854 livres $17^s\ 11^d$ par $57^T\ 5^P\ 5^p$, et pour cet effet, je réduis les $57^T\ 5^P\ 5^p$, en pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviseur; et comme il faut 72^p pour faire la toise, qui est l'unité principale du diviseur, je multiplie le dividende proposé 854 livres 17 sols 11 deniers par 72 (121), ce qui me donne 61552 livres 10 sols pour nouveau dividende, ensorte que je divise comme il suit.

61552ᵗᵗ 10	4169
19862	14ᵗᵗ 15ˢ 3ᵈ $\frac{1833}{4169}$
3186	
63730ˢ	
22040	
1195	
14340	
1833	

Les 61552 livres divisées par 4169 donnent 14 livres pour quotient, et 3186 pour reste. Ces 3186 livres réduites en sols, donnent avec les 10 sols du dividende, 63730 sols, qui divisés par 4169 donnent 15 sols pour quotient, et 1195 sols de reste. Ces 1195 sols réduits en deniers valent 14340 deniers, lesquels divisés par 4169 donnent 3 deniers pour quotient, et 1833 deniers pour reste; ensorte que le quotient est 14 livres 15 sols 3 deniers $\frac{1833}{4169}$ de deniers.

Pour entendre la raison de cette regle, il faut faire attention que les 57^T 5^P 5^p valant 4169^p, et le pouce étant la soixante-douzieme partie de la toise, le diviseur est $\frac{4169}{72}$ de la toise; or, pour diviser par une fraction, il faut (109) renverser la fraction diviseur, et multiplier ensuite par cette fraction ainsi renversée; il faut donc multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, et à diviser ensuite par 4169, ainsi que le prescrit la regle que nous donnons.

Comme la division par un nombre complexe se réduit, ainsi qu'on vient de le voir, à la division par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126) et (127).

Des nouvelles mesures.

129. L'irrégularité des anciennes mesures, leur nombre aussi étendu que varié, et la complication de calculs qu'elles entraînoient avec elles, avoient depuis longtemps engagé les Mathématiciens à leur substituer une division et une marche plus régulieres, et un calcul plus simple.

Ce calcul étoit tout trouvé dans le système décimal, qui, montant et descendant par des degrés de dix en dix fois plus grands ou plus petits, depuis l'unité jusqu'aux nombres les plus considérables ou les plus éxigus, offroit de lui-même une uniformité qui devoit faire succéder la simplicité à la complication, et la facilité des opérations aux anciennes difficultés, dont elles étoient accompagnées.

130. Après être convenu que la division décimale, remplaceroit, dans toutes sortes d'unités quelconques, les divisions qu'on avoit faites jusqu'ici de ces unités, on s'est occupé de diviser à leur tour toutes les mesures, en un certain nombre de mesures fondamentales.

131. Or on peut compter sept especes de mesures; savoir :

1°. Les mesures des valeurs, ou les monnoies;
2°. Les mesures linéaires ou de longueur;
3°. Les mesures agraires ou de superficie;

4° Les mesures de capacité et de solidité ;

5°. Les mesures de pesanteur, ou les poids ;

6°. Les mesures circulaires, ou les degrés ;

7°. Enfin les mesures de durée ou temporaires.

Nous observerons, relativement à toutes ces especes de mesures,

1°. Que les deux dernieres ne servant que dans les sciences, ou dans quelques arts, la nouvelle division qui les concerne, est d'un usage bien moins étendu, bien moins général, et par conséquent d'une nécessité bien moins absolue que les autres : aussi l'adoption n'en est-elle pas, comme pour ces autres, indispensablement prescrite par les loix. Nous n'en ferons donc que peu d'applications, dans les exemples que nous offrirons dans le cours de ce volume.

2°. Que les mesures de surface et de solidité, regardant la géométrie, nous nous proposons de n'en parler, que lorsque nous serons arrivés à cette partie des mathématiques.

3°. Enfin que tous les principes et toutes les regles qu'exigent la théorie et la pratique des nouvelles mesures, s'appuyant entiérement sur le systême décimal, il est essentiel que préliminairement les lecteurs se pénetrent à fond de ce qu'ils ont vu jusqu'à présent de relatif à ce systême.

132. Cela posé, l'on peut réduire à quatre points fondamentaux toutes les notions que peut exiger l'admission des nouvelles mesures ; savoir :

1°. à leur nomenclature ;

2°. à leur numération ;

3°. à réduire les anciennes aux nouvelles, *et vice versâ* ;

4°. à leur appliquer toutes les regles de l'arithmétique.

133. Nous ne pouvons mieux remplir le premier objet, qu'en offrant aux lecteurs le vocabulaire suivant, tiré d'un ouvrage imprimé par ordre du gouvernement, et ayant pour titre; *recueil des lois, instructions, tables et tableaux relatifs aux nouveaux poids et mesures, etc :* Ils y verront le premier avantage du nouveau systéme, celui de remplacer avec cinq noms seulement, les nombreuses dénominations de l'ancien : ils y trouveront les relations générales que les nouvelles mesures ont avec les anciennes; et bientôt, la simplicité de cette nomenclature, et les rapports établis entre les deux systêmes, parviendront à les fixer irrévocablement dans leur mémoire.

Pour ne point entreméler les tables et le discours, nous donnerons de suite, après le vocabulaire, tous les tableaux destinés à réduire les unes aux autres, les mesures anciennes et nouvelles.

VOCABULAIRE GÉNÉRAL

DES NOUVELLES MESURES,

ET

TABLES DE RÉDUCTION

Pour convertir les anciennes en nouvelles, et les nouvelles en anciennes.

VOCABULAIRE

ET INDICATION

DES VALEURS ET USAGES

DES MESURES NOUVELLES.

MESURES de longueur.	VALEURS ET USAGES.
Centimetre...	Centieme partie du metre. C'est plutôt une sous-division qu'une mesure particuliere (1).
Décimetre....	Dixieme partie du metre. Le double décimetre fait une mesure de poche très-commode.
METRE......	Grandeur de l'étalon des mesures de la république. Dix-millionieme partie du quart du méridien, ou longueur d'environ 3 pieds 11 lignes $\frac{1}{2}$.
	Servira pour l'aunage des étoffes et les toisés. Fait la hauteur ordinaire d'une canne, que chacun peut avoir à la main. Le demi-metre et le *double metre* peuvent être utiles pour différens mesurages.
Décametre....	Dix fois la longueur du metre. Environ 30 pieds. Propre à faire une chaîne d'arpentage.
Hectometre...	Longueur de cent metres. Ne sera guere usité.
Kilometre....	Equivaut à mille metres, ou environ 500 toises.

(1) On pourroit considérer le millimetre, millieme partie du metre ; mais il est peu important pour le commerce.

MESURES de longueur.	VALEURS ET USAGES.
Myriametre...	Sa valeur est de dix mille metres, ou environ 5000 toises ; ce qui est un peu plus qu'une poste. Le kilometre et le myriametre seront bons pour exprimer les distances itinéraires, et régler le placement des bornes pour la mesure des chemins.
MESURES de capacité.	
Centilitre.....	On n'a pas besoin de mesure plus petite de ce genre. On peut se la représenter comme un petit verre pour l'eau-de-vie et les liqueurs. Son double serviroit aussi très-bien au même usage.
Décilitre.....	C'est à-peu-près l'équivalent d'un gobelet ordinaire. On conçoit aisément à quoi il peut servir. Sa moitié et son double sont analogues à d'autres mesures que l'on emploie maintenant pour les liquides.
LITRE......	Sa capacité est celle d'un décimetre cube. Il differe peu du litron et de la pinte de Paris, et servira aux mêmes usages, soit pour les liquides, soit pour les matieres seches. Sa moitié et son double seront aussi très-utiles.
Décalitre....	Il peut tenir lieu, ainsi que le double *décalitre*, du boisseau pour la mesure du blé et de toutes sortes de graines. Le *demi-décalitre* remplaceroit le picotin.
Hectolitre....	Servira pour plusieurs matieres seches, telles que les grains, le sel, le plâtre, la chaux, le charbon, etc. On pourroit par la suite donner cette contenance et son double aux futailles pour les vins. Le *demi-hectolitre* sera aussi fort utile, et spécialement pour les grains.

MESURES de capacité.	VALEURS ET USAGES.
Kilolitre.	Capacité égale au metre cube. C'est à-peu-près un tonneau de mer d'aujourd'hui, qui est moins un instrument de mesure qu'un mode d'évaluation. Le myrialitre est superflu.
	Nota. Si l'on compare aux mesures anciennes la série des litres décimaux, augmentée des doubles et des moitiés de chacun d'eux, on verra que depuis le *centilitre* jusqu'au *décalitre*, ils conviennent parfaitement pour les liquides; et depuis le *demi-litre* jusqu'à l'*hectolitre* pour les diverses matieres seches.
POIDS.	
	Le *milligramme* seroit un peu moins pesant que le 50e. de grain, par conséquent donneroit une exactitude plus grande que les trente-deuxiemes dont on s'est servi jusqu'à présent; mais comme cette mesure n'est employée que dans des opérations très-délicates, et qui ne font pas partie des usages ordinaires du commerce, on peut se borner aux poids suivans.
Centigramme..	Poids cent fois moindre que le gramme; environ $\frac{1}{5}$ de grain.
Décigramme. .	Pese un peu moins que deux grains. Le demi-décigramme est donc à-peu-près le grain d'aujourd'hui.
Gramme. . . .	Equivaut au poids de l'eau sous le volume d'un centimetre cube; ce qui fait environ 19 grains. Très-analogue au *gramma* des Grecs, dont il tire son nom. Il est très-propre à servir d'unité dans la pesée des matieres précieuses, telles que l'or et l'argent, et toutes celles qui exigent beaucoup d'exactitude.

H 2

POIDS.	VALEURS ET USAGES.
Décagramme..	Poids de dix grammes. Sa moitié fait environ un gros et tiers. Son double est un peu moins que les ⅔ d'une once.
Hectogramme.	Poids de cent grammes.
Kilogramme..	Poids de mille grammes, très-commode pour la vente des matieres les plus communes. Sa moitié excede notre livre actuelle, d'environ 3 gros.
Myriagramme.	Poids de dix mille grammes. Un peu moindre que 20 livres ½ actuelles. Son double formera le plus gros des poids que l'on sera dans le cas d'employer, et remplira cet objet avec avantage.
	Nota. On conçoit combien sont utiles les doubles et les moitiés de chacun des poids qui composent la série décimale. En formant de tous une seule série, on voit qu'elle est fort analogue à celle des anciens poids, qu'elle remplacera très avantageusement dans tous les usages du commerce.
MESURES agraires.	
Centiare..... Déciare.....	Le centiare et le déciare ne sont que des sous-divisions de l'are. Le premier est égal à un metre quarré. Le second en vaut dix.
ARE........	Unité des mesures pour les terrains, ou d'arpentage. C'est l'équivalent d'un décametre quarré, ou de cent metres quarrés (environ 25 toises quarrées). Il est très-convenable pour la mesure des terrains précieux des villes, des jardins et des petites propriétés ou de médiocre étendue. La dénomination de *déca-are*, ou *décare* en syncopant, ne seroit presque d'aucun usage.

MESURES agraires.	VALEURS ET USAGES.
Hectare.	C'est une superficie contenant cent ares. Il peut être employé pour l'évaluation des terrains d'une certaine étendue. L'hectare est un peu moins que le double du grand arpent de 100 perches quarrées, la perche étant de 22 pieds. Le *Kilare* n'est pas important à considérer.
Myriare.	Etendue de dix mille ares, ou équivalant à un quarré d'un kilometre de côté; propre par conséquent à la mesure des territoires un peu considérables, tels que celui d'une commune, d'un district, etc., lorsque l'on ne voudra pas les exprimer en quarrés des mesures des longueurs.
MESURES pour les bois DE CHAUFFAGE.	
STERE.	Quantité égale au metre cube. En donnant un metre de longueur aux bûches, il ne faut pour obtenir le stere, que les ranger dans une membrure, ou châssis quarré, d'un metre de côté. Si les bûches ont une autre longueur, par exemple, 3 pieds $\frac{1}{2}$, comme l'exige l'ordonnance des eaux et forêts, il n'y a qu'un léger changement à faire à la hauteur du châssis, ce qui n'entraîne aucune difficulté. Le stere sera très-commode; il sera environ la demi-voie de Paris. Le *demi-stere* et le double stere pourront être aussi employés. Enfin on pourroit aussi se servir du *déci-stere*, ou mieux encore du *double déci-stere*, pour régler la grosseur des fagots et la mesure des côterets, en déterminant leur longueur convenablement. Les autres combinaisons du stere ne paroissent pas offrir d'usage utile.

MONNOIES.	VALEURS ET USAGES.
	Les monnoies sont ici considérées comme monnoies de comptes, c'est-à-dire, sans faire attention à la valeur propre de l'unité principale.
Centime.....	Centieme partie, ou valeur d'un centieme de franc.
Décime......	Dixieme de franc, équivalant à 2 sous.
FRANC......	Unité principale de la monnoie; la même que notre livre de 20 sous. Sa valeur absolue, c'est-à-dire, ce qu'elle peut procurer d'une certaine marchandise, varie, comme l'on sait, suivant les circonstances.

TABLES
DE COMPARAISON

ENTRE

LES MESURES ANCIENNES ET NOUVELLES.

Table I. MONNOIES.

Deniers.	Centimes.	Sous.	Centimes.	Sous.	Centimes.
1	0,4	1	05	11	55
2	0,8	2	10	12	60
3	1,2	3	15	13	65
4	1,7	4	20	14	70
5	2,1	5	25	15	75
6	2,5	6	30	16	80
7	2,9	7	35	17	85
8	3,3	8	40	18	90
9	3,7	9	45	19	95
10	4,2	10	50	20	100
11	4,6				
12	5,0				

Millimes.	Deniers.	Centimes.	Deniers.	Décimes.	Sols.
1	0,24	1	2,4	1	2
2	0,48	2	4,8	2	4
3	0,72	3	7,2	3	6
4	0,96	4	9,6	4	8
5	1,20	5	12,0	5	10
6	1,44	6	14,4	6	12
7	1,68	7	16,8	7	14
8	1,92	8	19,2	8	16
9	2,16	9	21,6	9	18

Table II. MESURES LINÉAIRES.

Aunes de Paris.	Metres.
1 . .	1,188
2 . .	2,376
3 . .	3,564
4 . .	4,752
5 . .	5,940
6 . .	7,128
7 . .	8,316
8 . .	9,504
9 . .	10,692

Metres.	Aunes de Paris.
1 . .	0,8417
2 . .	1,6834
3 . .	2,5251
4 . .	3,3668
5 . .	4,2086
6 . .	5,0503
7 . .	5,8920
8 . .	6,7337
9 . .	7,5754

Parties de l'aune.	Centimetres.
$\frac{1}{2}$ . .	59,4
$\frac{1}{4}$ . .	29,7
$\frac{1}{8}$ . .	14,8
$\frac{1}{16}$ . .	7,4
$\frac{1}{32}$ . .	3,7
$\frac{1}{3}$ . .	39,6
$\frac{1}{6}$ . .	19,8
$\frac{1}{12}$ . .	9,9
$\frac{1}{24}$ . .	5,0
$\frac{1}{48}$ . .	2,5

Toises.	Metres.
1 . .	1,9484
2 . .	3,8968
3 . .	5,8452
4 . .	7,7936
5 . .	9,7420
6 . .	11,6904
7 . .	13,6388
8 . .	15,5872
9 . .	17,5356

Metres.	Toises.
1 . .	0,51324
2 . .	1,02649
3 . .	1,53973
4 . .	2,05297
5 . .	2,56621
6 . .	3,07946
7 . .	3 59270
8 . .	4,10594
9 . .	4,61919

Pieds.	Décimetres.
1 . .	3,2473
2 . .	6,4946
3 . .	9,7420
4 . .	12,9893
5 . .	16,2366
6 . .	19,4839
7 . .	22 7312
8 . .	25,9785
9 . .	29,2259

Décim.	Pieds.
1 . .	0,30795
2 . .	0,61589
3 . .	0,92384
4 . .	1,23178
5 . .	1,53973
6 . .	1,84768
7 . .	2,15562
8 . .	2,46357
9 . .	2,77151

Pouces.	Centimetres.
1 . .	2,7061
2 . .	5,4122
3 . .	8,1183
4 . .	10,8244
5 . .	13,5305
6 . .	16,2366
7 . .	18,9427
8 . .	21,6488
9 . .	24,3549
10 . .	27,0610
11 . .	29,7671

Table II. Suite des MESURES LINÉAIRES.

Centim.	Pouces.	Lignes.	Millimetres.	Millim.	Lignes.
1 . .	0,3695	1 . .	2,255	1 . .	0,4434
2 . .	0,7391	2 . .	4,510	2 . .	0,8869
3 . .	1,1086	3 . .	6,765	3 . .	1,3303
4 . .	1,4781	4 . .	9,020	4 . .	1,7738
5 . .	1,8477	5 . .	11,275	5 . .	2,2172
6 . .	2,2172	6 . .	13,531	6 . .	2,6606
7 . .	2,5867	7 . .	15,786	7 . .	3,1041
8 . .	2,9563	8 . .	18,041	8 . .	3,5475
9 . .	3,3258	9 . .	20,296	9 . .	3,9910
		10 . .	22,551		
		11 . .	24,806		

Table III. MESURES ITINÉRAIRES.

Petites lieues de 2000 toises.	Myriametres.	Myriam.	Petites lieues de 2000 toises.	Lieues commu. de 25 au degré.	Myriametres.
1 . .	0,3897	1 . .	2,566	1 . .	0,4444
2 . .	0,7794	2 . .	5,132	2 . .	0,8889
3 . .	1,1690	3 . .	7,699	3 . .	1,3333
4 . .	1,5587	4 . .	10,265	4 . .	1,7778
5 . .	1,9484	5 . .	12,831	5 . .	2,2222
6 . .	2,3381	6 . .	15,397	6 . .	2,6667
7 . .	2,7278	7 . .	17,963	7 . .	3,1111
8 . .	3,1174	8 . .	20,530	8 . .	3,5556
9 . .	3,5071	9 . .	23,096	9 . .	4,0000

Table III. Suite des MESURES ITINÉRAIRES.

Myriam.	Lieues communes de 25 au degré.	Lieues marines de 20 au degré.	Myriametres.	Myriam.	Lieues marines de 20 au degré.
1 . .	2,25	1 . .	0,5556	1 . .	1,800
2 . .	4,50	2 . .	1,1111	2 . .	3,600
3 . .	6,75	3 . .	1,6667	3 . .	5,400
4 . .	9,00	4 . .	2,2222	4 . .	7,200
5 . .	11,25	5 . .	2,7778	5 . .	9,000
6 . .	13,50	6 . .	3,3333	6 . .	10,800
7 . .	15,75	7 . .	3,8889	7 . .	12,600
8 . .	18,00	8 . .	4,4444	8 . .	14,400
9 . .	20,25	9 . .	5,0000	9 . .	16,200

Table IV. MESURES DE SURFACE.

Toises quarrées.	Metres quarrés.	Metres quarrés.	Toises quarrées.	Pieds quarrés.	Décimetres quarrés.
1 . .	3,7962	1 . .	0,26342	1 . .	10,545
2 . .	7,5925	2 . .	0,52684	2 . .	21,090
3 . .	11,3887	3 . .	0,79025	3 . .	31,635
4 . .	15,1850	4 . .	1,05367	4 . .	42,180
5 . .	18,9812	5 . .	1,31709	5 . .	52,726
6 . .	22,7774	6 . .	1,58051	6 . .	63,271
7 . .	26,5737	7 . .	1,84393	7 . .	73,816
8 . .	30,3699	8 . .	2,10734	8 . .	84,361
9 . .	34,1661	9 . .	2,37076	9 . .	94,906

Table IV. Suite des MESURES DE SURFACE.

Décimetres quarrés.	Pieds quarrés.
1	0,09483
2	0,18966
3	0,28450
4	0,37932
5	0,47416
6	0,56899
7	0,66382
8	0,75865
9	0,85348

Pouces quarrés.	Centimet. quarrés.
1	7,323
2	14,646
3	21,969
4	29,292
5	36,615
6	43,938
7	51,261
8	58,584
9	65,907

Centimet. quarrés.	Pouces quarrés.
1	0,1365
2	0,2730
3	0,4095
4	0,5460
5	0,6826
6	0,8190
7	0,9556
8	1,0921
9	1,2286

Lignes quarrées.	Millimetres quarrés.
1	5,085
2	10,171
3	15,256
4	20,342
5	25,427
6	30,512
7	35,598
8	40,683
9	45,769

Millimet. quarrés.	Lignes quarrées.
1	0,1966
2	0,3933
3	0,5899
4	0,7866
5	0,9832
6	1,1798
7	1,3765
8	1,5731
9	1,7698

Toises-pieds.	Metres quarrés.
1	0,63271
2	1,26541
3	1,89812
4	2,53083
5	3,16353

Toises-pouces.	Metres quarrés.
1	0,05273
2	0,10545
3	0,15818
4	0,21090
5	0,26363
6	0,31635
7	0,36908
8	0,42180
9	0,47453
10	0,52726
11	0,57998

Toises-lignes.	Metres quarrés.
1	0,00439
2	0,00879
3	0,01318
4	0,01757
5	0,02197
6	0,02636
7	0,03076
8	0,03515
9	0,03954
10	0,04394
11	0,04833

Toises-points.	Metres quarrés.
1	0,00037
2	0,00073
3	0,00110
4	0,00147
5	0,00183
6	0,00220
7	0,00256
8	0,00293
9	0,00330
10	0,00366
11	9,00403

Table IV. Suite des MESURES DE SURFACES.

Metres quarrés.	Toises quar.	Pieds quar.	Pouces quar.	Lignes quar.	Toises quar.	Toises-pieds.	Toises-pouces.	Toises-lignes.	Toises-points.
1..	0..	0..	69..	80	0..	1..	6..	11..	7
2..	0..	18..	139..	16	0..	3..	1..	11..	2
3..	0..	28..	64..	97	0..	4..	8..	10..	9
4..	1..	1..	134..	33	0..	6..	3..	10..	4
5..	1..	11..	59..	113	1..	1..	10..	10..	0
6..	1..	20..	129..	49	1..	3..	5..	9..	7
7..	1..	30..	54..	129	1..	5..	0..	9..	2
8..	2..	3..	124..	66	2..	0..	7..	8..	9
9..	2..	13..	50..	2	2..	2..	2..	8..	4
10..	2..	22..	119..	82	2..	3..	9..	7..	11
20..	5..	9..	95..	20	5..	1..	7..	3..	10
30..	7..	32..	7..	101	7..	5..	4..	11..	9
40..	10..	19..	46..	39	10..	3..	2..	7..	9
50..	13..	6..	21..	121	13..	1..	0..	3..	8
60..	15..	28..	141..	59	15..	4..	9..	11..	7
70..	18..	15..	116..	141	18..	2..	7..	7..	6
80..	21..	22..	92..	78	21..	0..	5..	3..	6
90..	23..	25..	68..	16	23..	4..	2..	11..	5
100..	26..	12..	43..	98	26..	2..	0..	7..	4
200..	52..	24..	87..	53	52..	4..	1..	2..	8
300..	79..	0..	131..	7	79..	0..	1..	10..	0
400..	105..	13..	30..	105	105..	2..	2..	5..	4
500..	131..	25..	74..	60	131..	4..	3..	0..	8
600..	158..	1..	118..	14	158..	0..	3..	8..	0
700..	184..	14..	17..	112	184..	2..	4..	3..	4
800..	210..	26..	61..	67	210..	4..	4..	10..	8
900..	237..	2..	105..	21	237..	0..	5..	6..	0

Table IV. Suite des MESURES DE SURFACE.

Aunes quarrées.	Metres quarrés.	Parties de l'aune quarrée.	Parties décimales du metre quarré.
1	1,4115	$\frac{1}{2}$	0,7057
2	2,8229	$\frac{1}{3}$	0,4705
3	4,2344	$\frac{1}{4}$	0,3529
4	5,6459	$\frac{1}{6}$	0,2352
5	7,0573	$\frac{1}{8}$	0,1764
6	8,4688	$\frac{1}{12}$	0,1176
7	9,8803	$\frac{1}{16}$	0,0882
8	11,2918		
9	12,7032		

Table V. MESURES AGRAIRES.

PERCHE LINÉAIRE DE 18 PIEDS.

Perches quarrées. / Arpens.	Ares. / Hectares.	Ares. / Hectares.	Perches quarrées. / Arpens.
1	0,3417	1	2,9265
2	0,6833	2	5,8530
3	1,0250	3	8,7795
4	1,3666	4	11,7060
5	1,7083	5	14,6325
6	2,0500	6	17,5590
7	2,3916	7	20,4855
8	2,7333	8	23,4120
9	3,0750	9	26,3385

Table V. Suite des MESURES AGRAIRES.

PERCHE LINÉAIRE DE 22 PIEDS.

Perches quarrées.	Ares	Ares.	Perches quarrées.
Arpens.	Hectares	Hectares.	Arpens.
1	0,5104	1	1,9592
2	1,0208	2	3,9184
3	1,5311	3	5,8776
4	2,0415	4	7,8368
5	2,5519	5	9,7960
6	3,0623	6	11,7552
7	3,5727	7	13,7144
8	4,0831	8	15,6736
9	4,5935	9	17,6328

Valeur de la perche quarrée en ares, ou de l'arpent de 100 perches quarrées en hectares, selon les différentes valeurs de la perche linéaire.

La perche linéaire étant de	La perche quarrée est de	La perche linéaire étant de	La perche quarrée est de
Pieds.	Ares.	Pieds.	Ares.
9	0,08542	19	0,38067
9 ½	0,09517	20	0,42180
10	0,10545	21	0,46504
11	0,12760	22	0,51038
12	0,15185	23	0,55784
13	0,17821	24	0,60740
14	0,20668	25	0,65907
15	0,23726	26	0,71285
16	0,26995	27	0,76874
17	0,30475	28	0,82673
18	0,34166	29	0,88684

Table VI. MESURES DE SOLIDITÉ.

Toises cubes.	Metres cubes.	Metres cubes.	Toises cubes.	Pieds cubes	Décimetres cubes.
1...	7,3966	1...	0,13520	1...	34,243
2...	14,7932	2...	0,27039	2...	68,487
3...	22,1897	3...	0,40559	3...	102,730
4...	29,5863	4...	0,54079	4...	136,974
5...	36,9829	5...	0,67598	5...	171,217
6...	44,3795	6...	0,81118	6...	205,460
7...	51,7761	7...	0,94638	7...	239,704
8...	59,1726	8...	1,08158	8...	273,947
9...	66,5692	9...	1,21677	9...	308,191

Décimetres cubes.	Pieds cubes.	Pouces cubes.	Centimetres cubes.	Centimet. cubes.	Pouces cubes.
1..	0,029203	1...	19,817	1...	0,05046
2..	0,058405	2...	39,634	2...	0,10092
3..	0,087618	3...	59,450	3...	0,15139
4..	0,116811	4...	79,267	4...	0,20185
5..	0,146013	5...	99,084	5...	0,25231
6..	0,175216	6...	118,901	6...	0,30277
7..	0,204419	7...	138,718	7...	0,35323
8..	0,233622	8...	158,534	8...	0,40370
9..	0,262824	9...	178,351	9...	0,45416

Lignes cubes.	Millimet. cubes	Millimet. cubes.	Lignes cubes.	T. T. pieds.	Metres cubes.
1....	11,47	1....	0,0872	1...	1,23276
2....	22,94	2....	0,1744	2...	2,46553
3....	34,40	3....	0,2616	3...	3,69829
4....	45,87	4....	0,3488	4...	4,93105
5....	57,34	5....	0,4360	5...	6,16382
6....	68,81	6....	0,5232		
7....	80,28	7....	0,6104		
8....	91,74	8....	0,6976		
9....	103,21	9....	0,7847		

Table VI. Suite des MESURES DE SOLIDITÉ.

T. T. pouces.	Metres cubes.	T. T. lignes.	Metres cubes.	T. T. points.	Metres cubes.
1	0,10273	1	0,00856	1	0,00071
2	0,20545	2	0,01712	2	0,00143
3	0,30819	3	0,02568	3	0,00214
4	0,41092	4	0,03424	4	0,00285
5	0,51365	5	0,04280	5	0,00357
6	0,61638	6	0,05136	6	0,00428
7	0,71911	7	0,05993	7	0,00500
8	0,82184	8	0,06846	8	0,00571
9	0,92457	9	0,07705	9	0,00642
10	1,02730	10	0,08561	10	0,00713
11	1,13003	11	0,09417	11	0,00785

Table VII. *Mesures pour les bois de chauffage et de charpente.*

BOIS DE CHAUFFAGE.

Cordes des eaux-et-forêts.	Steres.	Steres.	Cordes des eaux-et-forêts.
1	3,835	1	0,2607
2	7,670	2	0,5215
3	11,506	3	0,7822
4	15,340	4	1,0429
5	19,176	5	1,3037
6	23,847	6	1,5644
7	26,012	7	1,8251
8	30,682	8	2,0859
9	34,517	9	2,3466

Table

Table VII. *Suite des mesures pour les bois de chauffage et de charpente.*

Bois de charpente.

Solives.	Metres cubes..	Metres cubes.	Solives.
1	0,10273	1	9,734
2	0,20546	2	19,468
3	0,30819	3	29,203
4	0,41092	4	38,937
5	0,51365	5	48,671
6	0,61638	6	58,405
7	0,71911	7	68,140
8	0,82184	8	77,874
9	0,92457	6	87,608

Table VIII. *Mesures de capacité pour les grains et matieres seches, en usage à Paris.*

Litrons.	Litres.	Litres.	Litrons.	Boisseaux.	Décalit.
1	0,7927	1	1,2616	1	1,2683
2	1,5853	2	2,5231	2	2,5365
3	2,3780	3	3,7846	3	3,8048
4	3,1707	4	5,0462	4	5,0731
5	3,9633	5	6,3078	5	6,3414
6	4,7560	6	7,5693	6	7,6096
7	5,5487	7	8,8309	7	8,8779
8	6,3413	8	10,0924	8	10,1462
9	7,1340	9	11,3540	9	11,4145

Table VIII. *Suite des mesures de capacité pour les grains et matieres seches, en usage à Paris.*

Décalit.	Boisseaux.	Setiers de 12 boisseaux.	Hectolit.	Hectolit.	Setiers de 12 boisseaux.
1 ..	0,7885	1 ..	1,5219	1 ..	0,6570
2 ..	1,5769	2 ..	3,0439	2 ..	1,3141
3 ..	2,3654	3 ..	4,5658	3 ..	1,9712
4 ..	3,1539	4 ..	6,0877	4 ..	2,6282
5 ..	3,9424	5 ..	7,6096	5 ..	3,2853
6 ..	4,7308	6 ..	9,1316	6 ..	3,9424
7 ..	5,5193	7 ..	10,6535	7 ..	4,5994
8 ..	6,3078	9 ..	12,1754	8 ..	5,2565
9 ..	7,0961	9 ..	13,6974	9 ..	5,9135

Muids de 12 setiers.	Kilolitres.	Kilolitres.	Muids de 12 setiers.
1 ..	1,8263	1 ..	0,5476
2 ..	3,6526	2 ..	1,0961
3 ..	5,4789	3 ..	1,6427
4 ..	7,3053	4 ..	2,1902
5 ..	9,1316	5 ..	2,7378
6 ..	10,9579	6 ..	3,2853
7 ..	12,7842	7 ..	3,8329
8 ..	14,6105	8 ..	4,3804
9 ..	16,4368	9 ..	4,9280

Table VIII. *Suite des mesures de capacité pour les grains et matieres seches, en usage à Paris.*

MESURES DE PARIS.

	POUR LES GRAINS.	POUR L'AVOINE.	POUR LE SEL.	POUR LE CHARBON
	Litres.	Litres.	Litres.	Litres.
Boisseau de 16 litrons.	12,68	12,68	12,68	12,68
Minot. .	de 3 boisseaux, 38,05	de 6 boisseaux, 76,10	de 4 boisseaux, 50,73	de 8 boisseaux, 101,46
Mine de 2 minots.	76,10	152,19	101,46	202,92
Setier de 2 mines.	152,19	304,39	202,92	405,85
Muid. . , .	de 12 setiers. 1826,32	de 12 setiers. 3652,63	de 10 setiers. 2435,09	de 10 setiers. 4058,48

Parties du Litron et du Boisseau de Paris.

	Litres.		Litres.
$\frac{1}{2}$ de litron.	0,40	$\frac{1}{2}$ de boisseau. . .	6,34
$\frac{1}{4}$ de litron.	0.20	$\frac{1}{4}$ de boisseau. . .	3,17
$\frac{1}{8}$ de litron.	0,10	$\frac{1}{8}$ de boisseau. . .	1,59

I 2

Table IX. *Mesures de capacité pour les Liquides.*

Pintes.	Litres.	Litres.	Pintes.	Parties de la pinte.	Décilitres.
1	0,9512	1	1,0513	$\frac{1}{2}$ ou chopine	4,76
2	1,9024	2	2,1026		
3	2,8536	3	3,1539	$\frac{1}{4}$ ou demi-setier	2,38
4	3,8048	4	4,2052		
5	4,7560	5	5,2565	$\frac{1}{8}$ ou poisson	1,19
6	5,7072	6	6,3078		
7	6,6584	7	7,3591	$\frac{1}{16}$ ou demi-poisson	0,59
8	7,6096	8	8,4104		
9	8,5609	9	9,4617	$\frac{1}{32}$ ou roquille	0,30

Dimensions des mesures de capacité.

Pour les Liquides.

Noms des mesures.	Diamet. de la base. Millim.	Hauteur. Millim.
Litre	86,0	172,0
Demi-litre	68,3	136,6
Double décilitre	50,3	100,6
Décilitre	39,9	79,9
Demi-décilitre	31,7	63,4

Pour les grains et matieres seches.

Noms des mesures	Hauteur. et diam. de la base. Millim.	Noms des mesures.	Hauteur et diam. de la base. Millim.
Double hectolitre	633,8	Demi-décalitre	185,3
Hectolitre	503,1	Double litre	136,6
Demi-hectolitre	399,3	Litre	108,4
Double décalitre	294,2	Demi-litre	86,0
Décalitre	233,5	Double décilitre	63,4
		Décilitre	50,3

Table X. POIDS.

Quintaux. Livres.	Myriagram. Hectogram.	Myriagram. Hectogram.	Quintaux. Livres.	Onces.	Décagram.
1...	4,8915	1...	0,20444	1...	3,0572
2...	9,7829	2...	0,40888	2...	6,1143
3...	14,6744	3...	0,61331	3...	9,1715
4...	19,5658	4...	0,81775	4...	12,2286
5...	24,4573	5...	1,02219	5...	16,2858
6...	29,3488	6...	1,22663	6...	18,3430
7...	34,2402	7...	1,43107	7...	21,4001
8...	39,1317	8...	1,63550	8...	24,4573
9...	44,0231	9...	1,83994	9...	27,5144

Décagram.	Onces.	Gros.	Grammes.	Grammes.	Gros.
1....	0,3271	1...	3,8215	1...	0,26168
2....	0,6542	2...	7,6429	2...	0,52336
3....	0,9813	3...	11,4644	3...	0 78504
4....	1,3084	4...	15,2858	4...	1,04672
5....	1,6355	5...	19,1072	5...	1,30840
6....	1,9626	6...	22,9287	6...	1,57008
7....	2,2897	7...	26,7502	7...	1,83176
8....	2,6168	8...	30,5716	8...	2,09344
9....	2,9439	9...	34,3931	9...	2,35512

Grains.	Décigram.	Décigram.	Grains.	16es. de grain.	Centigram.
1...	0,53076	1...	1,8841	1....	0,3317
2...	1,06151	2...	3,7682	2....	0,6634
3...	1,59227	3...	5,6523	3....	0,9952
4...	2,12303	4...	7,5364	4....	1,3269
5...	2,65379	5...	9,4205	5....	1,6583
6...	3,18454	6...	11,3046	6....	1,9903
7...	3,71530	7...	13,1887	7....	2,3221
8...	4,24606	8...	15,0728	8....	2,6538
...	4,77682	9...	16,9569	9....	2,9855

I 3

Table X. *Suite de la table pour convertir les nouveaux poids en anciens.*

Centigram.	16es. de grain.	256es. de grain.	Milligram.	Milligram.	256es. de grain.
1	3,015	1	0,2073	1	4,823
2	6,029	2	0,4147	2	9,647
3	9,044	3	0,6220	3	14,470
4	12,058	4	0,8293	4	19,293
5	15,073	5	1 0366	5	24,116
6	18,087	6	1,2440	6	28,940
7	21,102	7	1,4513	7	33,763
8	24,116	8	1,6586	8	38,586
9	27,131	9	1,8659	9	43,410

Myriag.	Livres.	Onces.	Gros.	Grains.	Hectog.	Liv.	Onc.	Gros.	Grains, 10es.
1	20	7	0	58	1	0	3	2	12, 1
2	40	14	1	44	2	0	6	4	24, 2
3	61	5	2	30	3	0	9	6	36, 3
4	81	12	3	16	4	0	12	8	48, 4
5	102	3	4	2	5	1	0	2	60, 5
6	122	10	4	60	6	1	3	5	0, 6
7	143	1	5	46	7	1	6	7	12, 7
8	163	8	6	32	8	1	10	1	24, 8
9	183	15	7	18	9	1	13	3	36, 9

Kilogra.	Livres.	Onces.	Gros.	Grains.	Décagr.	Onces.	Gros.	Grains, 100es.
1	2	0	5	49	1	0	2	44, 41
2	4	1	3	26	2	0	5	16, 82
3	6	2	1	3	3	0	7	61, 23
4	8	2	6	52	4	1	2	33, 64
5	10	3	4	29	5	1	5	6, 05
6	12	4	2	6	6	1	7	50, 46
7	14	5	7	55	7	2	2	22, 87
8	16	5	5	32	8	2	4	67, 28
9	18	6	3	9	9	2	7	39, 69

Table. X. *Suite de la table pour convertir les nouveaux poids en anciens.*

Gramm.	Gros.	Grains.	1000es.	Décigr.	Grains.	10000es. de grain.
1..	...0....	18,	841	1..	... 1,	8841
2..	...0....	37,	682	2..	... 3,	7682
3..	...0....	56,	523	3..	... 5,	6523
4..	...1....	3,	364	4..	... 7,	5364
5..	...1....	22,	205	5..	... 9,	4205
6..	...1....	41,	046	6..	...11,	3046
7..	...1....	59,	887	7..	...13,	1887
8..	...2....	6,	728	8..	...15,	0728
9..	...2....	25,	569	9..	...16,	9569

Table XI. *Pour connoître le prix du metre, du metre quarré, du litre et du kilogramme, d'après celui de l'aune de Paris, de la toise quarrée, de la pinte de Paris et de la livre poids de marc.*

Prix de l'aune de Paris. Livres ou francs.	Prix du metre. Francs.	Prix de la toise quarrée. Livres.	Prix du metre quarré. Francs.	Prix de la pinte de Paris. Livres	Prix du litre. Francs.	Prix de la liv. poids de marc. Livres. ou francs.	Prix du kilogram. Francs.
1..	0,8417	1..	0,2634	1...	1,051	1..	2,044
2..	1,6834	2..	0,5268	2...	2,103	2..	4,089
3..	2,5251	3..	0,7902	3...	3,154	3..	6,133
4..	3,3668	4..	1,0537	4...	4,205	4..	8,177
5..	4,2086	5..	1,3171	5...	5,256	5..	10,222
6..	5,0503	6..	1,5805	6...	6,308	6..	12,266
7..	5,8920	7..	1,8439	7...	7,359	7..	14,311
8..	6,7337	8..	2,1073	8...	8,410	8..	16,355
9..	7,5754	9..	2,3708	9...	9,462	9..	18,369

Table XII, *pour convertir les degrés, minutes et secondes de l'ancienne division du cercle en degrés décimaux, et parties décimales de ces degrés.*

Secondes anciennes.	DEGRÉS décimaux.	*Secondes anciennes.*	DEGRÉS décimaux.
1	0,000309	31	0,009568
2	0,000617	32	0,009876
3	0,000926	33	0,010185
4	0,001235	34	0,010494
5	0,001543	35	0,010802
6	0,001852	36	0,011111
7	0,002160	37	0,011420
8	0,002470	38	0,011728
9	0,002778	39	0,012037
10	0,003086	40	0,012346
11	0,003395	41	0,012654
12	0,003704	42	0,012963
13	0,004012	43	0,013272
14	0,004321	44	0,013580
15	0,004630	45	0,013889
16	0,004938	46	0,014197
17	0,005247	47	0,014506
18	0,005556	48	0,014815
19	0,005864	49	0,015123
20	0,006173	50	0,015432
21	0,006481	51	0,015741
22	0,006790	52	0,016049
23	0,007099	53	0,016358
24	0,007407	54	0,016667
25	0,007716	55	0,016975
26	0,008025	56	0,017284
27	0,008333	57	0,017593
28	0,008642	58	0,017901
29	0,008951	59	0,018210
30	0,009259	60	0,018519

Table XII, *Pour convertir les degrés, minutes et secondes de l'ancienne division du cercle en degrés décimaux, et parties décimales de ces degrés.*

Minutes. anciennes.	DEGRÉS. décimaux.	*Minutes anciennes.*	DEGRÉS décimaux.
1	0,018519	31	0,574074
2	0,037037	32	0,592592
3	0,055556	33	0,611111
4	0,074074	34	0,629629
5	0,092593	35	0,648148
6	0,111111	36	0,666667
7	0,129630	37	0,685185
8	0,148148	38	0,703703
9	0,166667	39	0,722222
10	0,185185	40	0,740740
11	0,203704	41	0,759259
12	0,222222	42	0,777777
13	0,240741	43	0,796296
14	0,259259	44	0,814814
15	0,277778	45	0,833333
16	0,296296	46	0,851851
17	0,314815	47	0,870370
18	0,333333	48	0,888888
19	0,351852	49	0,907407
20	0,370370	50	0,925926
21	0,388889	51	0,944444
22	0,407407	52	0,962963
23	0,425926	53	0,981481
24	0,444444	54	1,000000
25	0,462963	55	1,018519
26	0,481481	56	1,037037
27	0,500000	57	1,055556
28	0,518518	58	1,074074
29	0,537037	59	1,092592
30	0,555555	60	1,111111

Suite de la Table XII, *Pour convertir les degrés, minutes et secondes de l'ancienne division du cercle en degrés décimaux, et parties décimales de ces degrés.*

Degrés anciens.	DEGRÈS décimaux.	*Degrés anciens.*	DEGRÉS décimaux.
1	1,111111	31	34,444444
2	2,222222	32	35,555555
3	3,333333	33	36,666667
4	4,444444	34	37,777778
5	5,555556	35	38,888889
6	6,666667	36	40,000000
7	7,777778	37	41,111111
8	8,888889	38	42,222222
9	10,000000	39	43,333333
10	11,111111	40	44,444444
11	12,222222	41	45,555556
12	13,333333	42	46,666667
13	14,444444	43	47,777778
14	15,555556	44	48,888889
15	16,666667	45	50,000000
16	17,777778	46	51,111111
17	18,888889	47	52,222222
18	20,000000	48	53,333333
19	21,111111	49	54,444444
20	22,222222	50	55,555556
21	23,333333	51	56,666667
22	24,444444	52	57,777778
23	25,555556	53	58,888889
24	26,666667	54	60,000008
25	27,777778	55	61,111111
26	28,888889	56	62,222222
27	30,000000	57	63,333333
28	31,111111	58	64,444444
29	32,222222	59	65,555556
30	33,333333	60	66,666667

Suite de la Table XII, *Pour convertir les degrés, minutes et secondes de l'ancienne division du cercle en degrés décimaux, et parties décimales de ces degrés.*

Degrés anciens.	DEGRÉS décimaux.	*Degrés anciens.*	DEGRÉS décimaux.
61	67,777778	100	111,111111
62	68,888889	110	122,222222
63	70,000000	120	133,333333
64	71,111111	130	144,444444
65	72,222222	140	155,555556
66	73,333333	150	166,666667
67	74,444444	160	177,777778
68	75,555556	170	188,888889
69	76,666667	180	200,000000
70	77,777778	190	211,111111
71	78,888889	200	222,222222
72	80,000000	210	233,333333
73	81,111111	220	244,444444
74	82,222222	230	255,555556
75	83,333333	240	266,666667
76	84,444444	250	277,777778
77	85,555555	260	288,888889
78	86,666667	270	300,000000
79	87,777778	280	311,111111
80	88,888889	290	322,222222
81	90,000000	300	333,333333
82	91,111111	310	344,444444
83	92,222222	320	355,555556
84	93,333333	330	366,666667
85	94,444444	340	377,777778
86	95,555556	350	388,888889
87	96.666667	360	400,000000
88	97,777778		
89	98,888889		
90	100,000000		

Table XIII, *Ponr convertir l'ancienne division du jour en division décimale.*

Secondes anciennes.	HEURES décimales.	*Secondes anciennes.*	HEURES décimales.	*Minutes anciennes.*
1	0,000116	31	0,003588	1
2	0,000231	32	0,003704	2
3	0,000347	33	0,003819	3
4	0,000463	34	0,003935	4
5	0,000579	35	0,004051	5
6	0,000694	36	0,004167	6
7	0,000810	37	0,004282	7
8	0,000926	38	0,004398	8
9	0,001042	39	0,004514	9
10	0,001157	40	0,004630	10
11	0,001273	41	0,004745	11
12	0,001389	42	0,004861	12
13	0,001505	43	0,004977	13
14	0,001620	44	0,005093	14
15	0,001736	45	0,005208	15
16	0,001852	46	0,005324	16
17	0,001968	47	0,005440	17
18	0,002083	48	0,005556	18
19	0,002199	49	0,005671	19
20	0,002315	50	0,005787	20
21	0,002431	51	0,005903	21
22	0,002546	52	0,006018	22
23	0,002662	53	0,006134	23
24	0,002778	54	0,006250	24
25	0,002893	55	0,006366	25
26	0,003009	56	0,006481	26
27	0,003125	57	0,006597	27
28	0,003241	58	0,006713	28
29	0,003356	59	0,006829	29
30	0,003472	60	0,006944	30

Suite de la Table XIII, *Pour convertir l'ancienne division du jour en division décimale.*

HEURES décimales.	*Minutes ancienn.*	HEURES décimales.	*Heures ancienn.*	HEURES décimales.
0,006949	31	0,215278	1	0,416667
0,013889	32	0,222222	2	0,833333
0,020833	33	0,229167	3	1,250000
0,027778	34	0,236111	4	1,666667
0,034722	35	0,243056	5	2,083333
0,041667	36	0,250000	6	2,500000
0,048611	37	0,256944	7	2,916667
0,055556	38	0,263889	8	3,333333
0,062500	39	0,270833	9	3,750000
0,069444	40	0,277778	10	4,166667
0,076389	41	0,284722	11	4,583333
0,083333	42	0,291667	12	5,000000
0,090278	43	0,298611	13	5,416667
0,097222	44	0,305556	14	5,833333
0,104167	45	0,312500	15	6,250000
0,111111	46	0,319444	16	6,666667
0,118056	47	0,326389	17	7,083333
0,125000	48	0,333333	18	7,500000
0,131944	49	0,340278	19	7,916667
0,138889	50	0,347222	20	8,333333
0,145833	51	0,354167	21	8,750000
0,152778	52	0,361111	22	9,166666
0,159722	53	0,368056	23	9,583333
0,166667	54	0,375000	24	10,000000
0,173611	55	0,281944		
0,180556	56	0,388889		
0,187500	57	0,395833		
0,194444	58	0,402778		
0,201389	59	0,409722		
0,208333	60	0,416667		

Table XIV. *Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales.*

Fractions ordinaires.	FRACTIONS décimales.	*Fractions ordinaires.*	FRACTIONS décimales.
$\frac{1}{2}$	0,500000	$\frac{3}{10}$	0,300000
$\frac{1}{3}$	0,333333	$\frac{3}{11}$	0,272727
$\frac{1}{4}$	0,250000	$\frac{3}{13}$	0,230769
$\frac{1}{5}$	0,200000	$\frac{3}{14}$	0,214286
$\frac{1}{6}$	0,166666	$\frac{3}{16}$	0,187500
$\frac{1}{7}$	0,142857	$\frac{3}{17}$	0,176471
$\frac{1}{8}$	0,125000	$\frac{3}{19}$	0,157895
$\frac{1}{9}$	0,111111	$\frac{3}{20}$	0,150000
$\frac{1}{10}$	0,100000	$\frac{4}{5}$	0,800000
$\frac{1}{11}$	0,090909	$\frac{4}{7}$	0,571428
$\frac{1}{12}$	0,083333	$\frac{4}{9}$	0,444444
$\frac{1}{13}$	0,076923	$\frac{4}{11}$	0,363636
$\frac{1}{14}$	0,071429	$\frac{4}{13}$	0,307692
$\frac{1}{15}$	0,066666	$\frac{4}{15}$	0,266666
$\frac{1}{16}$	0,062500	$\frac{4}{17}$	0.235294
$\frac{1}{17}$	0,058824	$\frac{4}{19}$	0,210526
$\frac{1}{18}$	0,055555	$\frac{5}{6}$	0,833333
$\frac{1}{19}$	0,052632	$\frac{5}{7}$	0,714285
$\frac{1}{20}$	0,050000	$\frac{5}{8}$	0,625000
$\frac{2}{3}$	0,666666	$\frac{5}{9}$	0,555555
$\frac{2}{5}$	0.400000	$\frac{5}{11}$	0,454545
$\frac{2}{7}$	0,285714	$\frac{5}{12}$	0,416666
$\frac{2}{9}$	0,222222	$\frac{5}{13}$	0,384615
$\frac{2}{11}$	0,181818	$\frac{5}{14}$	0,357143
$\frac{2}{13}$	0,153846	$\frac{5}{16}$	0,312500
$\frac{2}{15}$	0,133333	$\frac{5}{17}$	0,294118
$\frac{2}{17}$	0,117647	$\frac{5}{18}$	0.277777
$\frac{2}{19}$	0,105263	$\frac{5}{19}$	0,263158
$\frac{3}{4}$	0,750000	$\frac{6}{7}$	0,857142
$\frac{3}{5}$	0,600000	$\frac{6}{11}$	0,545454
$\frac{3}{7}$	0,428571	$\frac{6}{13}$	0,461538
$\frac{3}{8}$	0,375000	$\frac{6}{17}$	0,352941

Suite de la Table XIV. *Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales.*

Fractions ordinaires.	FRACTIONS décimales.	*Fractions ordinaires.*	FRACTIONS décimales.
$\frac{6}{19}$	0,315789	$\frac{11}{13}$	0,846153
$\frac{7}{8}$	0,875000	$\frac{11}{14}$	0,785714
$\frac{7}{9}$	0,777777	$\frac{11}{15}$	0,733333
$\frac{7}{10}$	0,700000	$\frac{11}{16}$	0,687500
$\frac{7}{11}$	0,636363	$\frac{11}{17}$	0,647059
$\frac{7}{12}$	0,583333	$\frac{11}{18}$	0'611111
$\frac{7}{13}$	0,538461	$\frac{11}{19}$	0,578947
$\frac{7}{15}$	0,466666	$\frac{11}{20}$	0,550000
$\frac{7}{16}$	0,437500	$\frac{12}{13}$	0,923076
$\frac{7}{17}$	0,411765	$\frac{12}{17}$	0,705882
$\frac{7}{18}$	0,388888	$\frac{12}{19}$	0,631579
$\frac{7}{19}$	0,368421	$\frac{13}{14}$	0,928571
$\frac{7}{20}$	0,350000	$\frac{13}{15}$	0.866666
$\frac{8}{9}$	0,888888	$\frac{13}{16}$	0,812500
$\frac{8}{11}$	0,727272	$\frac{13}{17}$	0.764706
$\frac{8}{13}$	0,615384	$\frac{13}{18}$	0,722222
$\frac{8}{15}$	0,533333	$\frac{13}{19}$	0,684211
$\frac{8}{17}$	0,470588	$\frac{13}{20}$	0,650000
$\frac{8}{19}$	0,421053	$\frac{14}{15}$	0,933333
$\frac{9}{10}$	0,900000	$\frac{14}{17}$	0,823529
$\frac{9}{11}$	0,818181	$\frac{14}{19}$	0,736842
$\frac{9}{13}$	0,692307	$\frac{15}{16}$	0,937500
$\frac{9}{14}$	0,642857	$\frac{15}{17}$	0,882353
$\frac{9}{16}$	0,562500	$\frac{15}{19}$	0,789474
$\frac{9}{17}$	0,529412	$\frac{15}{20}$	0.750000
$\frac{9}{19}$	0,473684	$\frac{16}{17}$	0,941176
$\frac{9}{20}$	0,450000	$\frac{16}{19}$	0,842105
$\frac{10}{11}$	0,909090	$\frac{17}{18}$	0,944444
$\frac{10}{13}$	0,769230	$\frac{17}{19}$	0.894737
$\frac{10}{17}$	0,588235	$\frac{17}{20}$	0,850000
$\frac{10}{19}$	0,526316	$\frac{18}{19}$	0,947368
$\frac{11}{12}$	0,833333	$\frac{19}{20}$	0,950000

Table XV. *Rapports entre les mesures anciennes et les nouvelles.*

La distance du pôle à l'équateur étant { de 5132430 toises. ou de 30794580 pieds.

		Logarithmes des rapports.
Le mêtre vaut en aunes de Paris.	0,841712	9,925164
Le metre vaut en pieds,	3,07946	0,488474
Le metre quarré vaut en pieds quarrés,	9,48306	0,976948
L'arc vaut en perch. quarrées de 18 pieds,	2,92687	0,466403
Le metre cube vaut en pieds cubes,	39,2027	1,465423
Le litre vaut en pintes de Paris.	1,05130	0,021725
Le décalitre vaut en boiss. de Paris.	0,788473	9,896787
Le gramme vaut en grains poids de marc,	18,841	1,275104
Le décagramme vaut en onces.	0,327101	9,514681
Le kilogramme vaut en livres poids de marc	2,04438	0,310561

		Logarithmes des rapports.
L'aune de Paris vaut en metres,	1,18805	0,074836
Le pied vaut en metres,	0,324732	9,511526
Le pied quarré vaut en metres quarrés.	0,105451	9,023052
La perche quarrée de 18 pieds vaut en ares,	0,341662	9,533597
Le pied cube vaut en metres cubes,	0,0342434	8,534577
La pinte de Paris vaut en litres,	0,051206	9,978275
Le boiss. de Paris. vaut en décalitres,	1,26827	0,103213
Le grain poids de marc vaut en grammes.	0,053076	8,724896
L'once vaut en décagrammes,	3,05716	0,485319
La livre poids de marc vaut en kilogrammes,	0,489146	9,689437

135

135. On peut voir dans le vocabulaire précédent quelle simplicité regne dans la nouvelle nomenclature. En effet, on peut le considérer sous le double rapport, soit des noms principaux, soit des noms accessoires. Or, sous ces deux points de vue, le nouveau système est aussi simple qu'uniforme. Car six mots *franc*, *metre*, *are*, *stere*, *litre et gramme*, forment les noms primordiaux, et les sept mots * *myria*, *kilo*, *hecto*, *déca*, *déci*, *centi*, *milli*. *di-milli*, en forment les annexes ; et de ces sept noms, les trois derniers sont, d'après ce que nous avons vu, très-faciles à retenir, puisqu'il ne s'agit que de retrancher la terminaison *eme* des noms si connus, centieme, millieme, dix-millieme.

De la numération des nouvelles mesures.

136. On a vu dans la numération des décimales, que le chiffre des unités servant de point fixe de départ, les dixiemes répondoient aux dixaines, les centiemes aux centaines, les milliemes aux mille, etc. Et (voyez la note) il est aisé de remarquer que le nom primordial remplaçant l'unité, *déci* est opposé à *déca*, *centi* à *hecto*, *milli* à *kilo*, *di-milli* à *myria*.

137. Cela posé, il suffit d'un seul exemple pour entendre la numération actuelle : le voici ; on y a fait voir la correspondance qui regne entre les noms anciens et les nouveaux.

* Nota. *myria*, *kilo*, *hecto*, *déca* viennent du grec, et veulent dire. *dix mille*, *mille*, *cent*.

EXEMPLE.

Myria.	3	. . . . dix - mille.
Kilo.	4	. . . . mille.
Hecto.	7	. . . . cent.
Déca.	5	. . . . dix.
franc, gramme, metre, are, stere, litre.	6	. . . . unités.
Déci.	1	. . . . dixiemes.
Centi.	3	. . . . centiemes.
Milli.	4	. . . . milliemes.
Di-milli. . .	7	. . . . dix-milliemes.

On voit par cet exemple, que le nombre 34756, 1347 peut, lorsqu'il s'agira d'une unité nouvelle quelconque, de metres, par exemple, se prononcer comme il suit. Trois *myriametres*, quatre *kilometres*, sept *hectometres*, cinq *décametres*, six *metres*, un *décimetre*, trois *centimetres*, quatre *millimetres*, sept *di-millimetres*.

138. Et en effet, on pourroit le prononcer ainsi ; mais de même qu'on a vu dans la numération décimale, que ce nombre devoit se prononcer trente-quatre mille sept cent cinquante-six *unités*, mille trois cent quarante-sept *dix-milliemes*, il sera mieux de dire, trente-quatre mille sept cent cinquante-six *metres*, mille trois cent quarante-sept *di-millimetres*.

139. Le problême inverse n'est pas plus difficile à résoudre ; soit proposé, par exemple, d'exprimer en chiffres le nombre de metres

suivant, écrit en toutes lettres, deux mille quatre cent un *metres* trois cent quatorze *dimillimetres*, on a vu (21 à 23) que s'il s'agissoit *d'unités*, on écriroit 2401, 0314. Ici donc, où il s'agit de *metres*, on écrira 2401^{m}. 0314; en ayant soin seulement de mettre au-dessus du chiffre des unités, la lettre *m*, initiale du metre; on mettroit *f*, s'il étoit question de francs; *g*, pour des grammes, etc.

De la réduction des mesures anciennes en nouvelles, et des nouvelles en anciennes.

140. L'on sent d'après l'introduction des nouvelles mesures, que jusqu'à ce qu'une longue habitude ait assez familiarisé avec elles pour faire oublier les anciennes, on sera souvent forcé de les réduire les unes aux autres. C'est pour faciliter ces fréquentes réductions, qu'on a calculé les tables précédentes. Rien n'est plus aisé que leur formation et leurs usages.

141. Et d'abord quelques exemples, et les principes établis jusqu'à présent, suffiront de reste pour concevoir la maniere dont elles ont été formées.

EXEMPLE. I.

La premiere table contient, 1°. la réduction des sols et deniers en décimes et centimes, et 2°. celle des millimes, centimes et décimes, en sols et deniers. Or, voici comment elle a été construite: on a dit 1 franc vaut une livre; mais le franc vaut 100 centimes, et la livre vaut 240 deniers; donc 240 deniers valent 100 centimes; donc 1 denier vaut le 240e de 100 centimes, ou $\frac{100}{240}$, ou $\frac{10}{24}$, ou enfin $\frac{5}{12}$ de centimes; or, $\frac{5}{12}$ réduits en décimales, font (68) 0,417: donc 1 denier vaut les 417 milliemes d'un centime.

Ajoutant continuellement ce nombre à lui-même jusqu'à 12, on trouvera successivement que

Deniers.	Centimes.	Ou, en se bornant aux dixiemes.
1 vaut....	0,417.......	 0,4
2..........	0,834.......	 0,8
3	1,251.......	 1,2
4	1,668.......	 1,7
5	2,085.......	 2,1
6	2,502.......	 2,5
7	2,919.......	 2,9
8	3,336.......	 3,3
9	3,753.......	 3,7
10.........	4,170.......	 4,2
11	4,587.......	 4,6

On voit que pour avoir 1 sol ou 12 deniers, il faut ajouter 0,417 à 4,587; ce qui fait 5,004 ou 5 centimes, en négligeant les millimes de centimes; donc 2 sols feroient 10 centimes ou 1 décime, 3 sols feront 15 centimes, etc.

EXEMPLE II.

Veut-on faire la table inverse? on dira: 100 centimes font 240 deniers; donc 1 centime vaut le centieme de 240 deniers, ou 2,4 den., le millime vaut donc le dixieme de cette quantité, puisqu'il est le dixieme du centime; il vaut donc 0,24 de deniers ; ajoutant continuellement ce nombre à lui-même, on formera les valeurs de 1, 2, 3 millimes jusqu'à 9; et enfin on retombera à la neuvieme addition sur 2, 4 deniers valeur d'un décime; ajoutant ensuite 2, 4 den. 9 fois à lui-même, on tombera sur 2 sols valeur d'un décime ; enfin, si l'on ajoute 2 sols 9 fois de suite à lui-même, on trouvera 20 sols, valeur du franc : cette méthode est la meilleure à suivre, parce qu'elle porte sa preuve avec elle.

EXEMPLE III.

Une troisieme application achevera de mettre le lecteur au fait de la formation de ces tables. Veut-on savoir combien la toise vaut en metres et parties décimales du metre ? on dira : une toise vaut 6 pieds, et un metre vaut 3 pieds 0 pouce 11 lignes, 44, * ou réduisant le tout en centiemes de lignes, la toise vaut 86400 centiemes de ligne, et le metre en vaut 44344; donc la valeur de la toise en metres est égale au quotient de 86400, divisé par 44344 : or ce quotient est de 1,948404, ou en se bornant aux di-millimetres de $1^{m.},9484$, et tel est en effet le résultat que l'on trouve dans la table II. ajoutant successivement $1^{m.},9484$ à lui-même, on aura les valeurs de 2^{t}, 3^{t}, 4^{t}, prenant le sixieme de

* *Nota.* Le vocabulaire, (article des mesures linéaires) dit que le metre vaut 3 pieds 0 pouce 11 lignes $\frac{1}{2}$, ou 3 pieds 0 pouce 11 lignes, 50 ; mais la mesure exacte est 3 pieds 0 pouce 11 lignes, 44.

$1^{m.}$,9484, on aura pour la valeur du pied $0^{m.}$,32473 ou $3^{décim.}$,2473 dix milliemes de décimet. Ajoutant $3^{décim.}$,2473, 9 fois à lui-même, on aura la valeur de 1^{p}, 2^{p}, etc. en décimet., etc. etc.

142. Nous avons donné cet exemple, principalement pour faire voir qu'on n'étoit pas forcé de prendre pour chiffre des unités le nom primordial, mais celui qu'on voudra : et l'on sent bien que cela n'altere en rien la valeur du nombre ; car il est indifférent de dire 3 décimetres, 2473 dix-milliemes de décimetres, ou $0^{m.}$,32473 cent-milliemes de metre. Car si d'un côté les chiffres expriment des nombres dix fois plus grands, de l'autre les noms affectés à ces nombres expriment des valeurs dix fois plus petites.

143. Ce qu'on a dit ici pourroit faire croire que pour savoir réduire une mesure quelconque ancienne en nouvelle, et *vice versâ*, il faudroit passer par des additions successives, depuis la plus basse unité de l'espece de la quantité proposée, jusqu'à cette quantité même : mais on se tromperoit, et un exemple va prouver que rien n'est plus facile que cette réduction.

EXEMPLE.

Veut-on savoir, par une seule opération, ce que 8 toises 5 pieds 6 pouces 11 lignes valent de metres ?

On a vu (exemple III) que 1 toise valoit 1 metre 948404 ; donc 1 pied vaut le sixieme de 1 metre 948404, ou 0 metre 324734 ; 1 pouce vaut le douzieme de 0 metre 324734, ou 0 metre 027061 2;

et enfin 1 ligne vaut le douzieme de 0 metre 0270612, ou 0 metre 0022551. Cela posé, 8 toises 5 pieds 6 pouces 11 lignes valent 7715 lignes; donc il ne faut plus, pour avoir leur valeur en metres, que multiplier 0 metre 0022551 par 7715; ce qui donnera 17 metres, 3981, en se bornant aux di-millimetres.

Usages des Tables.

144. D'après ce qu'on vient de lire, rien n'est maintenant plus facile, que de se servir des tables de réduction.

EXEMPLE I.

Veut-on, au moyen de ces tables, réduire en metres et parties décimales du metre. . . . . $8^{T}\ 5^{p}\ 6^{p}\ 11^{L}$

Je vois (table II) que 8 toises valent . . . . $15^{m},5872$

Que 5 pieds valent 16 décimetres 0,2366, ou . . . . 1 ,62366

Que 6 pouces valent 16 centimetres 0,2366, ou. . . . . 0 ,162366

Enfin, que 11 lignes valent 24 millimetres 0,806, ou . . . . 0 ,024806

Ajoutant le tout, j'ai pour la valeur cherchée, ... $17^{m},398032$

ou, en se bornant aux di-millimetres.

On voit que ce résultat ne differe du précédent que de 7 cent-millimetres à peu de chose près; ce qui vaut à peine $\frac{3}{100}$ de ligne, ou $\frac{1}{3}$ de point.

EXEMPLE II.

Veut-on savoir encore ce que valent 354 liv. 7 onces 6 gros 36 grains ?

Je cherche la table X, où il s'agit de la réduction des poids, et je trouve que 354 ℔ ou 3 quintaux, 54 ℔ donnent, savoir :

pour 3 quintaux.	14,6744 myriag.
Pour 5 ℔ 24 hectogrammes, 4573, ou 0 myriagram. 244573, et par conséquent pour 50 ℔. .	2,445731
Enfin pour 4 ℔ 19 hectog. 5658, et par conséquent en myriag.	0,195658
Ensuite que 7 onces valent 21 décagrammes 4001, ou. . . .	0,0214001
Que 6 gros donnent 22 gr. 9287, ou	0,00229287
Enfin pour 36 grains, comme 3 grains donnent 1 décig. 59227, ou 0 myriag. 00001592, j'ai pour 30 grains.	0,0001592
Et pour 6 grains, qui valent 3 décigrammes, 18454,.	0,0000318
Total.	17,33967297

Ou 17 myriagrammes 33967, en se bornant aux cent-milliemes.

146. Le problême inverse est encore plus facile à résoudre. En effet, veut-on trouver combien 17 myriagram., 33967 valent de quintaux, de livres, d'onces, de gros et de grains.

Je décompose 17 miryag. en 8 et 9, et je trouve à la fin de la table X

	Quintaux.	Livres.	Onces.	Gros.	Grains.
Pour 9 myriag....	1	83	15	7	18
Pour 8	1	63	8	6	32
Pour 3 kilog......	0	6	2	1	03
Pour 3 hectog.....	0	0	9	6	36,3
Pour 9 décag......	0	0	2	7	39,7
Pour 6 gram.......	0	0	0	1	41,0
Pour 7 décig......	0	0	0	0	13,2
Total.........	3	54	7	6	39,2

La différence est de trois grains, différence bien petite sur trois à quatre quintaux.

Applications des regles de l'Arithmétique aux nouvelles unités.

145. Il ne nous reste plus qu'à faire subir aux nouvelles unités, les diverses opérations de l'arithmétique. Mais comme on a vu qu'elles n'étoient elles-mêmes qu'une extension du calcul décimal, il suffira de très-peu d'exemples, pour mettre bientôt le lecteur au fait de ces différens procédés.

Soit donc proposé 1°. d'ajouter

Livres.	Sous.	deniers.		Francs.	Centimes.
32	8	6	ou...	32	42,5
51	4	3	....	51	21,2
28	16	9	....	28	83,7
51	4	6	....	51	22,5
163	14	0		163	69,9

Or 67 centimes, 9 valent, savoir 6 décimes 12 sols, 9 centimes 1 sol 9 den. 6, et 9 millimes

2 den. 16; ce qui fait en tout 13 sols 11 den. 76, c'est-à-dire, 14 sols, à bien peu de chose près.

Si l'on vouloit ajouter $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, on trouveroit (101) que la somme vaut 2 entiers : et c'est ce que l'on trouveroit encore plus vîte au moyen de la table XIV. Car on auroit

pour $\frac{1}{2}$	0,5000
pour $\frac{2}{3}$	0,6667
pour $\frac{5}{6}$	0,8333
Total................	2,0000

Enfin voudroit-on ajouter

$\frac{2}{3}$ ou.................	0,6667
$\frac{3}{4}$	0,7500
$\frac{4}{5}$	0,8000
$\frac{7}{8}$	0,8750
$\frac{1}{6}$	0,1667
$\frac{7}{9}$	0,7778
$\frac{7}{10}$	0,7000
$\frac{3}{11}$	0,2727
$\frac{5}{16}$	0,3125
$\frac{7}{18}$	0,3889
$5\frac{583200000}{821145600}$	5,7103

Or $\frac{583200000}{821145600}$ réduits en décimales donnent 0,7102 ou 0,7103. On voit par-là avec quelle rapidité et quelle simplicité on exécute l'addition des fractions.

147. 2°. Veut-on soustraire la somme des trois fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{7}$ de la somme des quatre autres $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{11}$, celles-ci valent $2\frac{49}{193}$, celles-là, $1\frac{61}{140}$,

et retranchant, on a pour reste, $\frac{22502}{27720}$, ou 0,8117; et si, au moyen de la table XIV, on cherche la valeur de ces fractions, on aura

$$\begin{array}{rlcrl}
\frac{1}{2} = & 0,5000 & \quad & \frac{2}{5} = & 0,4000 \\
\frac{2}{3} = & 0,6667 & & \frac{3}{4} = & 0,7500 \\
\frac{4}{9} = & 0,4444 & & \frac{2}{7} = & 0,2857 \\
\frac{7}{11} = & 0,6364 & & & \overline{1,4357} \\
\text{de} & \overline{2,2475} & & & \\
\text{ôtant} & 1,4357 & & & \\
\text{reste} & \overline{0,8118} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrclrr}
\text{de} & 54^{₶} & 13^{s} & 4^{d} & \quad & \text{ou de} & 54^{\text{fr.}} & 6667 \\
\text{ôter} & 27 & 7 & 6 & & \text{ôter} & 27 & 3750 \\
\text{reste} & 27^{₶} & 5^{s} & 10^{d} & & \text{reste} & 27^{\text{fr.}} & 2917
\end{array}$$

Or 5^{s} 10^{d} valent (table I) $0^{₶}$ 2916 ou plutôt $0^{₶}$ 2917.

Multiplication.

148. 3°. Les exemples qu'on a donnés dans la multiplication des nombres complexes, sont très simples et très-faciles; mais souvent l'on en pourroit trouver de plus compliqués; et c'est alors que l'on sentiroit l'avantage des nouvelles méthodes.

Soit par exemple proposé de connoître le prix de 78 toises 4 pieds 7 pouces 10 lignes 9 points, en supposant que la toise coûte 53 livres 5 sols

7 deniers. On trouvera, en suivant la méthode donnée.

$$53^{\#}\ 5^{s}\ 9^{d}$$
$$78^{t.}\ 4^{p.}\ 7^{p.}\ 10^{l.}\ 9^{pts}$$

	424			
	371			
pour 5 sols....	19	10		
6 deniers.	1	19		
3 deniers....		19	6	
3 pieds...	26	12	10	$\frac{1}{2}$
1 pied...	8	17	7	$\frac{1}{2}$
6 pouces..	4	8	9	$\frac{3}{4}$
1 pouce.....		14	9	$\frac{5}{8}$
6 lignes.....		7	4	$\frac{13}{16}$
3 lignes.....		3	8	$\frac{13}{32}$
1 ligne......		1	2	$\frac{77}{96}$
6 points.........			7	$\frac{77}{192}$
3 points.........			3	$\frac{269}{384}$

$$4197^{\#}\ 15^{s}\ 10^{d}\ \tfrac{191}{384}$$

La longueur des opérations, sur-tout dans le calcul des fractions, en fera mieux sentir l'avantage de la méthode suivante, sur-tout dans le second exemple.

Et d'abord je vois, table XV, que le metre vaut en pieds 3,07946 ou 0,513243 de toises. De plus, 5 sols 9 den. valent $\frac{69}{240}$ de franc ou $\frac{23}{80}$, ou 0 franc 2875. Donc 53 livres 5 sols 9 deniers valent 53 francs 2875.

Cela posé, la toise valant 53 francs 2875, le metre ne vaut que 53 francs 2875 multiplié par 0,513243.

Si nous nous servons de la méthode abrégée, qu'on a donnée (55) pour la multiplication des décimales, on aura, * en se bornant aux cent-milliemes, 27,34943

$$\begin{array}{r}
0{,}5132430 \\
578235 \\
\hline
25662150 \\
1539729 \\
102648 \\
41056 \\
3591 \\
255 \\
\hline
27{,}349429
\end{array}$$

Le metre vaut donc ici 27 francs 34943 ; mais (table II)

70	toises valent..........	136^m,388
8	....	15 ,5872
4	pieds.................	1 ,29893
7	pouces...............	0 ,18943
10	lignes.................	0 ,02255
9	points................	0 ,00169
$78^t\ 4^p\ 7^p\ 10^l\ 9^p$	valent donc....	153^m,48780

* Nous nous sommes contentés, dans cet exemple, et dans ceux qui suivent, de mettre le chiffre des unités sous la décimale inférieure d'un degré seulement à celle à laquelle on veut borner le produit. La regle en exige deux ; mais outre que une seule suffit presque toujours, il est aisé de voir que le calcul en devient plus court.

Multipliant donc 27 francs 34943 par 153 metres 4878, on aura, par la même méthode abrégée, à un millieme près ;

$$
\begin{array}{r}
27{,}349430 \\
8784351 \\
\hline
27\ 349430 \\
13\ 674715 \\
820482 \\
109396 \\
21872 \\
1911 \\
216 \\
\hline
4197{,}802\cancel{7}
\end{array}
$$

C'est-à-dire, 4197 ₶ 16 sols o den. $\frac{1}{2}$, ce qui est le même résultat que ci-dessus, à 2 den. près.

EXEMPLE II.

A 96 livres 18 sols 7 deniers la livre d'argent, combien valent 9℔ 13 onces 6 gros 56 grains?

Par la méthode ordinaire, on eût opéré comme il suit :

	96₶	18ſ	7d	
	9℔	13 onc.	6 gr.	56 gra.
	864			
pour 10 sols...	4₶	10ſ		
5 ...	2	5		
2 ...		18		
1 ...		9		
6 den....		4	6d	
1 ...			9	
pour 8 onc...	48	9	3	$\frac{1}{2}$
4 ...	24	4	7	$\frac{3}{4}$
1 ...	6	1	1	$\frac{15}{16}$
4 gros...	3	0	6	$\frac{31}{32}$
2 ...	1	10	3	$\frac{31}{64}$
36 gr.....		7	6	$\frac{223}{256}$
18 ...		3	9	$\frac{223}{512}$
2 ...			5	$\frac{223}{4608}$
Total.......	956₶	4ſ	11d	$\frac{4588}{4608}$ ou $\frac{1147}{1152}$
ou à très-peu près...	956	5		

Par la nouvelle méthode, je trouve (table X) que

		Kilog.
9℔ valent	....	4,402310
10 onces	....	0,305720
3	....	0,091715
6 gros	....	0,022929
50 grains	....	0,002654
6	....	0,000318
donc 9℔ 13 onc. 6 gr. 56 gr. valent.		4,825646

Mais (table XIV) le kilogramme vaut en livres, poids de marc, 2,04438, et (table I) 96 liv. 18 sols 7 den. valent 96 francs 929. Pour avoir le prix du kilogramme dans l'hypothese actuelle, il faut multiplier 96 francs 929 par 2,04438.

	2,04438	
	92969	
	1839942	
	122658	
	18396	
	408	
	180	
Et on aura............	1981584	Prix du kilog. qui, multiplié par 4 kilog, 825646.
	6465284	
	7926336	
	1585264	
	39630	
	9905	
	1188	
	76	
	6	
donnent, à un 1000e. près	956fr 2405	

Ou 956 liv. 4 sols 11 den., c'est-à-dire, le même résultat que dessus, à moins d'un denier près.

On voit, par ces deux exemples, combien cette méthode est plus courte que l'ancienne, en supposant toutefois qu'on fasse abstraction de la double réduction, 1°. des anciennes mesures en nouvelles; et 2°. des anciens prix en nouveaux, réductions qui n'auront plus lieu, ou du du moins que très-rarement, quand les dernieres mesures seront totalement en vigueur. Passons à la division.

149. Soit proposé 1°. de déterminer la valeur du metre, en supposant que 153 metres, 4878 aient coûté 4197 francs 802, et 2°. la valeur du kilogramme en sachant que 4 kilogram. 825646 ont coûté 956 francs, 2405.

Il est clair que dans le premier exemple il faut diviser 4197 francs, 802 par 153,4878, et que dans le second il faut diviser 956 fr. 2405 par 4,825646. Or, si l'on se sert de la méthode abrégée donnée (73) pour la division des décimales, on trouvera, 1°. pour 4197,802 divisé par 153,4878, à un cent-millieme près, 29,34946. Voyez la division ci-dessous.

4197802	$\dot{1}\dot{5}\dot{3}\dot{4}\dot{8}\dot{7}8$
1128046	$27^{fr},34946$
53630	
7583	
1443	
66	
6	

On voit que le quotient ne differe que de 3 cent-millimes de la vraie valeur, quantité qui vaut à peine $\frac{1}{150}$ de denier.

Pour le second exemple, on aura 956 francs 2405 à diviser par 4,825646, ou

$$\begin{array}{r|l}
9562405 & \dot{4}8\dot{2}\dot{5}\dot{6}\dot{4}\dot{6} \\ \cline{2-2}
4736759 & 198^{\text{fr}},1582 \\
393674 & \\
7626 & \\
2800 & \\
390 & \\
6 &
\end{array}$$

On a donc 198 fr., 1582 qui ne differe du quotient véritable que de 2 millimes de franc, qui valent à peine $\frac{1}{20}$ de denier.

De la formation des Nombres quarrés et de l'extraction de leur racine.

150. On appelle *quarré* d'un nombre, le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

151. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre qui multiplié par lui-même, reproduiroit ce même nombre proposé : ainsi 5 est la racine quarrée de 25 ; 7 est la racine quarrée de 49.

152. Un nombre que l'on quarre, est donc tout à la fois multiplicande et multiplicateur ; il est donc deux fois facteur (42) du produit : c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les regles ordinaires de la multiplication : mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine, en nombre entier, est quelqu'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dont les quarrés sont,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine quarrée de 72, par exemple, est 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux ci, c'est-à-dire, entre 8 et 9 ; elle est 8 et une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut assigner exactement ; mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

153. La racine quarrée d'un nombre qui n'est point un quarré parfait, s'appelle un nombre *sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*.

154. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pourquarrer un nombre tel que 54, par exemple.

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande et le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités*.

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur, par le 4 inférieur; ce qui fait le *produit des dixaines* par les *unités*.

Nous passons, après cela, au second chiffre du multiplicateur, et nous multiplions le 4 supérieur, par le 5 inférieur; ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités*.

Enfin nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le *quarré des dixaines*.

Nous ajoutons ces produits, et nous avons pour quarré, le nombre 2916, que nous voyons donc être composé *du quarré des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités* du nombre 54.

155. Ce que nous venons d'observer étant une conséquence immédiate des regles de la multiplication, n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dixaines et d'unités; ensorte qu'on peut dire généralement que le quarré de tout nombre composé de dixaines et d'unités renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer; savoir, le quarré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités et le quarré des unités.

156. Cela posé, comme le quarré des dixaines est des centaines, (puisque 10 fois 10 font 100), il est visible que ce quarré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du quarré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, étant nécessairement des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du quarré total.

157. Donc pour revenir du quarré 2916 à sa racine, on peut raisonner ainsi.

EXEMPLE I.

2916	54 racine.
416	
104	
000	

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or la formation du quarré nous apprend qu'il y a, dans 2916, le quarré de ces dixaines, et que ce quarré ne peut faire partie des deux derniers chiffres ; il est donc dans 29 ; et comme la racine quarrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la racine, est 5 et portons les à côté de 2916, comme on le voit ci-dessus.

Je quarre 5, et je retranche le produit 25, de 29 ; il me reste 4 à côté duquel j'abaisse les deux autres chiffres 16 du nombre proposé 2916.

Pour trouver maintenant, les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reste 416 ; il ne contient plus que deux parties du quarré ; savoir, le double des dixaines de la racine, multipliées par les unités, et le quarré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la premiere suffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons ; car puisqu'elle est formée du double des dixaines multipliées par les unités, si on la divise par le double des dixaines que nous connoissons, elle doit (74) donner pour quotient les unités : il ne s'agit donc plus que de savoir dans quelle partie de 416 est renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités ; or nous avons remarqué ci-dessus qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre ; il est donc dans 41 ; il faut donc diviser 41, par le double 10 des dixaines trouvées ; j'écris donc sous 41 le double 10 des dixaines, et faisant la division, le quotient 4 que je trouve est le nombre des unités, que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées; ensorte que la racine cherchée est 54.

Mais il faut observer que quoique le quotient 4 que nous venons de trouver, soit en effet celui qui convient; cependant il peut arriver quelquefois que le quotient trouvé de cette maniere, soit plus fort qu'il ne convient; parce que 41 (c'est-à-dire, la partie qui reste après la séparation du dernier chiffre), renferme non-seulement le double des dixaines multiplié par les unités, mais encore les dixaines provenantes du quarré des unités; c'est pourquoi, pour n'avoir aucun doute sur le chiffre des unités, il faut employer la vérification suivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4 des unités, et l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie successivement tous les chiffres par le même nombre 4, et je retranche les produits successifs, des parties correspondantes de 416;

comme il ne reste rien, j'en conclus que la racine est en effet 54.

S'il restoit quelque chose, la racine n'en seroit pas moins la vraie racine en nombres entiers, à moins que ce reste ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'est ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enseigner, est fondée sur la formation même du quarré; car quand on multiplie 104 par 4, il est évident qu'on forme le quarré des unités et le double des dixaines multipliées par les unités, c'est-à-dire, ce qui complete le quarré parfait.

158. De ce que nous venons de dire, il faut conclure que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir séparé deux sur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reste à gauche; cette racine sera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, et on l'écrira à côté du nombre proposé, en l'en séparant par un trait.

On soustraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver, et après avoir écrit le reste au-dessous de cette tranche, on abaissera à côté de ce reste, les deux chiffres qu'on avoit séparés.

On séparera, par un point, le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaisser, et on divisera ce qui se trouvera sur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-dessous.

On écrira le quotient, à côté du premier chiffre de la racine, et on le portera ensuite à côté du double des dixaines qui a servi de diviseur.

Enfin on multipliera par ce même quotient, tous les chiffres qui se trouveront sur cette derniere ligne, et on retranchera leurs produits, à mesure qu'on trouvera des chiffres qui leur correspondent dans la ligne au-dessus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine quarrée de 7569.

```
75.69 | 87 racine.
116.9
 1 67
 ----
  000
```

Je sépare les deux chiffres 69, et je cherche la racine quarrée de 75; elle est 8; j'écris 8 à côté, je quarre 8 et je retranche de 75, le quarré 64; il me reste 11 que j'écris au-dessous de 75, et j'abaisse à côté de ce même 11, les chiffres 69 que j'avois séparés.

Je sépare, dans 1169, le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviser pour trouver les unités.

Je forme mon diviseur, en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, et j'écris ce diviseur au-dessous de 116; la division me donne pour quotient 7 que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte aussi ce quotient à côté du diviseur 16; je multiplie 167 qui forme la derniere ligne, par ce même quotient 7, et je retranche les produits, à mesure que je les trouve, de 1169 : il ne reste rien, ce qui prouve que 7569 est un quarré parfait et le quarré de 87.

159. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviser par le double des dixaines, que la seule partie qui reste à gauche, après qu'on a séparé le dernier chiffre ; ensorte que si elle ne contenoit pas le double des dixaines, il ne faudroit pas, pour cela, employer le chiffre séparé ; on mettroit o à la racine. Si au contraire, on trouvoit que le double des dixaines y est plus de 9 fois, on ne mettroit cependant pas plus de 9; la raison en est la même que pour la division (66).

160. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire sur la racine quarrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on saisira facilement ce qu'il convient de faire, lorsque le nombre des chiffres est plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être composée, on peut toujours la concevoir composée de deux parties, dont l'une soit des dixaines, et l'autre des unités ; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines et 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer, on peut aussi trouver le troisieme par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres, comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, et leur appliquant, pour trouver le troisieme, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrieme, on considérera les trois premiers, comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrieme, le même raisonnement qu'on appliquoit aux deux premiers pour trouver le troisieme, et ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche; la derniere pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette opération est fondée sur ce que, considérant la racine comme composée de dixaines et d'unités; il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (156 et *suiv.*) commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir, dans la partie qui reste à gauche, le quarré des dixaines; mais comme cette partie est elle même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, et ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine quarrée de 76807696

```
76.80.76.96 | 8764
 128.0
  167
 -------
  1117.6
   1746
 -------
   7009.6
   17524
 -------
   00000
```

Après avoir partagé le nombre proposé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine quarrée de la tranche 76 qui est le plus à gauche : je trouve qu'elle est 8, et j'écris 8 à côté du nombre proposé : je quarre 8 et je retranche le quarré 64, de 76 ; j'ai pour reste 12 que j'écris au-dessous de 76 ; à côté de ce reste j'abaisse la tranche 80 dont je sépare le dernier chiffre par un point ; et au-dessous de la partie 128, j'écris 16 double de la racine trouvée; puis disant, en 128 combien de fois 16? je trouve qu'il y est 7 fois : j'écris 7 à la suite de la racine 8; et à côté du double 16 ; je multiplie 167 par ce même nombre 7, et je retranche de 1280 le produit de cette multiplication, il me reste 111 à côté duquel j'abaisse la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je sépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, et sous la partie 1117 qui reste à gauche, j'écris 174, double de la racine 87 ; je divise 1117 par 174, et ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine et à côté du double 174 : je multiplie 1746, par ce même nombre 6, et je retranche de 11176, il reste 700 ; à côté de ce reste, j'abaisse 96 dont je sépare le dernier chiffre; au-dessous de 7009 qui reste à gauche, j'écris 1752 double de la racine trouvée 876, et divisant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine et à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, et je retranche de 70096, il ne reste rien, ainsi la racine quarrée de 76807696 est exactement 8764.

161. Lorsque le nombre proposé n'est point un quarré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, et la racine quarrée qu'on a trouvée, est la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé : alors il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée exactement; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos, c'est-à-dire, de maniere que l'erreur qui en résulteroit dans le quarré soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine, faire l'opération comme à l'ordinaire, et séparer ensuite par une virgule sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la suite du nombre proposé. En effet (54), le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le quarré (dont les deux facteurs sont égaux ; doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs, c'est-à dire, le double de ce que doit avoir la racine.

EXEMPLE.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millieme près.

Pour faire des milliemes il faut trois décimales; il faut donc mettre six zéros au quarré 87567; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
 49
------------
 346.7
  585
------------
 .5420.0
   5909
------------
   10190.0
    59181
------------
    427190.0
     59182 7
------------
     129111
```

En faisant l'opération comme dans les exemples précédens, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917; cette racine est celle de 87567000000; mais comme il s'agit de celle de 87567 ou de

87567,000000; je sépare moitié autant de décimales dans la racine, que j'ai mis de zéros au quarré, ce qui me donne 295,917 pour la racine quarré de 87567, à moins d'un millieme près.

Pareillement, si l'on demande la racine quarrée de 2 à moins d'un dix-millieme près, on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142; séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura, 1,4142 pour la racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millieme près.

162. On a vu (106) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; par conséquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur et le dénominateur, ainsi le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, et celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

163. Donc réciproquement, pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur et celle du dénominateur: ainsi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, et celle de 16 est 4.

164. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux ne soient point des quarrés parfaits; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un quarré, on en tirera la racine, approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, et ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur; ainsi si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2 qu'on trouvera 1,4 ou 1,41 ou 1,414 ou 1,4142, etc. selon qu'on voudra en

approcher plus ou moins, et comme la racine quarrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, etc.

Mais si le dénominateur n'est pas un quarré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne change rien à la valeur de la fraction, et rendra ce dénominateur quarré; alors on opérera comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine quarrée de 15, jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872; et comme la racine quarrée de 25 est 5, la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ sera de $\frac{3,872}{5}$.

165. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$, uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (99).

166. Enfin si l'on avoit des entiers joints à des fractions, on réduiroit ces entiers en fractions (86) et on opéreroit comme il vient d'être dit pour une fraction. Ainsi, pour tirer la racine quarrée de $8\frac{3}{7}$ on changeroit $8\frac{3}{7}$, en $\frac{59}{7}$, et celle-ci (164) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

167. On peut aussi réduire en décimales, la fraction qui accompagne l'entier; mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales pair et double de celui qu'on veut avoir à la racine; parce que le produit de la multiplication de deux nombres qui ont des décimales devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les

deux facteurs (54), le quarré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre. En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (99) dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

168. Si l'on avoit à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale, il faudroit avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas; ce qui se fera, en mettant à la suite de ces décimales 1 ou 3 ou 5, etc. zéros; cela n'en change pas la valeur (30). Ainsi, pour tirer la racine quarrée de 21,935 à moins d'un millieme près; je tire la racine quarrée de 21,935000 qui est 4,683; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même que celle de 0,542 est à moins d'un millieme près 0,736, et que celle de 0,0054 est à moins d'un millieme près 0,073.

169. Pour faire quelque application aux nouvelles unités des principes énoncés ci-dessus, nous demanderons 1°. de trouver la longueur ou la largeur d'un jardin quarré * qui auroit 9296 metres quarrés, 430724 de surface.

Il est aisé de voir que pour répondre à cette question, il ne s'agit que de tirer la racine quarrée de 9296 metres quarrés 430724 comme il suit:

92|96,|43|07|24	96m,418 racine.
119.6	186
8 04.3	1924
34 707	19281
154262.4	192828
0000000	

* On verra en Géométrie que le quarré est une figure superficielle, qui a quatre angles droits, et quatre côtés égaux, et que pour en avoir la surface, il faut multiplier l'un quelconque de ses côtés par lui-même, c'est-à-dire, quarrer ce côté.

J'ai

J'ai donc pour racine 96 mètres 418. Or, (table II.) veut-on savoir combien de toises on doit avoir ; on aura

	toises
90 mètres valent......................	46,1919
6..	3,07946
4 décim. valent 1 pied, 23178 ou..	0,20530
1 centi. vaut 0 pou., 3695 ou...	0,00513
8 millim. val. 3 lig., 5475 ou...	0,00411
Total........................	49,48590

Et enfin 49 toises, 4859 réduits en pieds, pouces et lignes donnent successivement en multipliant par 6, 12 et 12, 49 toises 2 pieds, 9154, 49 toises, 2 pieds 10 pouces, 9848, et enfin 49 toises 2 pieds 10 pouces 11 lignes, 8176 ou à très peu de chose près 49 toises $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE II.

Un sallon a 9 toises quarrées, 8 pieds quarrés, 9 pouces quarrés de surface ; on demande sa longueur, en supposant que la toise quarrée vaut 36 pieds quarrés, et que le pied quarré vaut 144 pouces quarrés.

Je réduis d'abord 9 toises quarrées, 8 pieds quarrés, 9 pouces quarrés tout en pouces quarrés, en multipliant d'abord 9 par 36, et ajoutant 8 au produit, ce qui me donne 332 pouces quarrés, et en multipliant ensuite 332 par 144, et ajoutant 9 au produit, ce qui fait 47817 pouces quarrés, il ne me reste donc plus qu'à extraire la racine de ce nombre : si je veux l'avoir à un centieme de pouce près, je l'écris, et j'opere comme il suit :

```
4|78|17|00|00  { 218,p67
 7.8           { 41
 371.7           428
  2930.0         4366
   31040.0       43727
     431 1
```

J'ai donc pour racine 218 pouces, 67 ou 218 pouces 8 lignes ou 18 pieds 2 pouces 8 lignes, ou enfin 3 toises 0 pieds 2 pouces 8 lignes, le sallon en question a donc en longueur ou largeur 3 toises 0 pouces 2 pieds 8 lignes.

Dans le nouveau systême, on auroit eu 35 mètres quarrés, 016301 : car (table IV):

	met. quar.
9 toises quar. valent..................	34,1661
8 pi. quar. 84 décim. quar. 361 ou....	0,84361
9 pou. quar. 65 cent. quar. 907 ou....	0,006591
donc 9 t. q. 8 p. q. 9 p. q. valent......	35,016301

Mais si l'on extrait la racine de ce nombre, comme il suit,

```
35,|01|63|01  { 5,917
 100.1        { 109
  206.3       { 1181
   8820,1       11827
     5412
```

On trouvera 5 mètres 917 à un millimètre près ; or (table II).

				toises
5	met. valent		....	2,56621
9	décim.	2p.77151	ou........	0,46192
1	centim.	0p.3695	ou.......	0,00513
7	millim.	3li.1041	ou........	000359
			total.........	3,03685

ou 3 t. 0 P. 2 p. 7 li. 84, ce qui est le même résultat que ci-dessus à 2 points près.

170. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être exposée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir plusieurs autres avec plus de facilité et de promptitude, par la division seule, en cette maniere.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par chercher les trois premiers chiffres de la racine, par la méthode ci-dessus : je trouve 873 pour cette racine, et 1574 pour reste : je mets à côté de ce reste, les deux chiffres 55, qui suivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres ; (je mettrois les trois chiffres suivans, si j'avois quatre chiffres de la racine, quatre si j'en avois 5, et ainsi de suite) : je divise 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine ; je trouve pour quotient 90 ; ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de la racine, qui par-là devient 87390. Je quarre cette racine, et je retranche son quarré 7637012100, de la partie 7637035568 dont 87390 est la racine ; il me reste 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine, comme j'en ai déjà cinq, je puis, par la seule division, en trouver 4 ; je mettrai pour cet effet, à la suite du reste 23468 les deux chiffres restans 23 du nombre proposé, et deux zéros, et divisant 2346802300 par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine : mais en partageant le nombre proposé, en tranches, de la maniere qui a été dite ci-dessus, on voit que sa racine ne doit avoir que six chiffres pour les nombres entiers, donc cette racine est 873901, 342, à moins d'un millieme près.

On peut, le plus souvent, pousser chaque division jusqu'à un chiffre de plus, c'est-à-dire, jusqu'à autant de chiffres qu'on en a déjà à la racine; mais il y a quelques cas, rares à la vérité, où l'erreur sur le dernier chiffre, pourroit aller jusqu'à cinq unités; au lieu qu'en se bornant à un chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre, même une unité d'erreur sur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine; par la méthode ordinaire, ce qui reste après l'opération faite se trouvoit égal au double de ces premiers chiffres, il faudroit, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire, après quoi on trouveroit les autres par la méthode abrégée que nous venons d'exposer, qui, comme on le voit, s'applique également aux décimales.

Si la racine devoit avoir des zéros parmi ses chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéros seroient du nombre des chiffres qu'on détermine par la division, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers chiffres du quotient, qu'on ne s'en apperçoive pas, parce que dans la division on ne marque pas les zéros qui doivent précéder sur la gauche du quotient: le moyen de le distinguer est de faire attention qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la suite du reste; et par conséquent, quand il y en aura moins, il en faudra completter le nombre, par des zéros placés sur la gauche de ce quotient.

Au reste, l'abrégé que nous venons d'exposer, est une suite de ce principe général, qu'il est aisé de déduire de ce qu'on a vu (134); savoir que le quarré d'une quantité quelconque composée de deux parties, renferme le quarré de la premiere partie, deux fois la premiere partie multipliée par la seconde, et le quarré de la seconde.

De la formation des nombres cubes, et de l'extraction de leur racine.

171. Pour former ce qu'on appelle *le cube*

d'un nombre. Il faut d'abord multiplier ce nombre par lui même, et multiplier ensuite, par ce même nombre, le produit résultant de cette premiere multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre : 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (quarré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube ; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisieme puissance* ou *troisieme* degré de ce nombre.

172. En général, on dit qu'un nombre est élevé à la seconde, troisieme, quatrieme, cinquieme, etc. puissances, quand on l'a multiplié par lui même, 1, 2, 3, 4, etc. fois consécutives, ou lorsqu'il est 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc. facteur dans le produit.

173. La racine cubique d'un cube proposé, est le nombre qui multiplié par son qnarré, produit ce cube ; ainsi 3 est la racine cubique de 27.

174. On n'a donc pas besoin de regles pour former le cube d'un nombre ; mais pour revenir du cube à sa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui se passe dans la formation du cube.

Observons cependant qu'on n'a besoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorsque le nombre proposé a moins de quatre chiffres, car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-dessous de 1000, et par conséquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10, c'est-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainsi tout nombre qui tombera entre deux de ceux ci.............................

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

aura sa racine cubique, en nombre entier, entre les deux nombres correspondans de cette suite. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dont la premiere contient les cubes.

175. Tout nombre n'a pas de racine cubique; mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

176. Voyons donc de quelles parties peut-être composé le cube d'un nombre qui contiendroit des dixaines et des unités.

Puisque le cube résulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeller ici (134) que *le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités*, *renferme*, 1°. *le quarré des dixaines*, 2°. *deux fois le produit des dixaines par les unités*, 3°. *le quarré des unités*.

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties, par les dixaines et par les unités du même nombre.

Afin d'appercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée, la forme suivante.

1°.

Le quarré des dixaines.	étant multiplié par les dixaines donnera	Le cube des dixaines.
Deux fois le produit des dixaines par les unités.		Deux fois le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Le quarré des unités.		Le produit des dixaines par le quarré des unités.

2°.

Le quarré des dixaines.	étant multiplié par les unités, donnera	Le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Deux fois le produit des dixaines par les unités.		Deux fois le produit des dixaines par le quarré des unités.
Le quarré des unités.		Le cube des unités.

Donc en rassemblant ces six résultats, et réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient quatre parties ; savoir, *le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, et enfin le cube des unités.*

Formons, d'après cela, le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, de 43, par exemple,

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Nous prendrons donc le cube de 4 qui est 64; mais comme ce 4 est des dixaines, son cube sera des mille, parce que le cube de 10 est 1000, ainsi le cube des 4 dixaines sera 64000.

3 fois 16 ou 3 fois le quarré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le quarré de 10 est 100; ainsi ce produit sera 14400.

3 fois 4, ou 3 fois les dixaines, étant multipliées par le quarré des unités, donneront des dixaines, et ce produit sera 1080.

Enfin le cube des unités se terminera à la place des unités, et sera 27.

En réunissant ces parties, on aura 79507 pour le cube de 43, cube qu'on auroit, sans doute, trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, et le produit 1849, encore par 43; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître par l'examen des parties qui le composent, la maniere de revenir à sa racine.

177. Cela posé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

EXEMPLE

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507.

Cube.	*Racine.*
79.507	43
155.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79, elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, et j'ôte le produit 64 de 79; il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15, j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dixaines trouvées, multipliées par les unités que nous cherchons, plus 3 fois ces mêmes dixaines multipliées par le quarré des unités; plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07; la partie 155 qui reste à gauche, renferme 3 fois le quarré des dixaines multiplié par les unités; c'est pourquoi, afin d'avoir les unités (74), je vais diviser cette partie 155, par le triple du quarré des 4 dixaines, c'est-à-dire, par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155, j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, et connoître le reste, s'il y en a, nous pourrions composer les 3 parties du cube qui doivent se trouver dans les 15507, et voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent; mais il est aussi commode de faire cette vérification, en cubant tout de suite 43, c'est-à-dire, en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849, et multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé a plus de six chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

```
596.947.688 | 842
 849.47
  192
592704
-----------
  42436.88
   21168
596947688
-----------
00000000
```

On considérera sa racine comme composée de dixaines et d'unités, et par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, et par conséquent elle aura des dixaines et des unités; il faut donc, pour trouver le cube de ces premieres dixaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596; elle est 8, j'écris ce 8 à côté. Je cube 8, et je retranche le produit 512, de 596; il reste 84, que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84, j'abaisse 947, ce qui me donne 84947, dont je sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192 qui est le triple quarré de la racine 8, et je divise 849 par

192 ; je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, et avoir en même-temps le reste, ~~je cube~~ 84, et je retranche le produit 592704, du nombre 596947 ; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste j'abaisse la tranche 688, et considérant la racine 84 comme un seul nombre qui marque les dixaines de la racine cherchée, je sépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaissée, et je divise la partie 42436 par le triple quarré de 84, c'est-à-dire, par 21168 ; je trouve pour quotient 2, que j'écris à la suite de 84.

Pour vérifier la racine 842 et avoir le reste, s'il y en a, je cube 842, et je retranche le produit 596947688, du nombre proposé 596947688 ; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer 1°. que dans le cours de ces opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort, on s'en appercevroit en ce que la soustraction ne pourroit se faire, et alors on diminueroit la racine successivement d'une, 2, 3, etc. unités, jusqu'à ce que la soustraction devint possible.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, et aussi loin qu'on le desire, sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

178. Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine; faire l'extraction comme dans les exemples précédens, et après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, c'est-à-dire, deux décimales, il faut que le cube ou le nombre proposé en ait six (174); il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

```
8.755.000.000 | 2061
--------------------
 07.55
 12
 8000
-----------------
  7550.00
   1200
 8741816
-----------------
   131840.00
   127308
 875455298 1
-----------------
     447019
```

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8, elle est 2, que j'écris à la racine. Je cube 2 et je retranche le produit de 8; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55 : au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple quarré de la racine, et divisant 7 par 12 je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755; j'ai pour reste 755; à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite; au-dessous de la partie restante 7550, j'écris 1200 triple quarré de la racine 20, et divisant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, et je retranche le produit, de 8755000; j'ai pour reste 13184 à côté duquel j'abaisse la derniere tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris 127308 triple quarré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la suite de 206. Je cube 2061, et ayant retranché de 8755000000, le produit 8754552981; j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée de 8755000000, est donc 2061; donc celle de 8755,000000 est 20,61, puisque le cube a trois fois autant de décimales que sa racine (174).

Si l'on vouloit pousser l'approximation plus loin, on mettroit à la suite du reste trois zéros, et on continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a abaissé une tranche.

179. Puisque pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur et dénominateur par dénominateur, il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur et son dénominateur. Donc réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, et la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, et celle de 64 est 4.

180. Mais si le dénominateur seul est un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, et on donnera à cette racine pour dénominateur, la racine cubique du dénominateur. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$; comme le numérateur n'est pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui sera 5, 22 à moins d'un centieme près; et tirant la racine de 343 qui est 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$; ou bien en réduisant en décimales (99), j'ai 0, 74 pour cette racine approchée à moins d'un centieme près.

181. Si le dénominateur n'est pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le quarré de ce dénominateur, et alors le nouveau dénominateur étant un cube, on se conduira comme il vient d'être dit. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$; je multiplie le numérateur et le dénominateur par 49, quarré du dénominateur 7, j'ai $\frac{147}{343}$ qui (88) est de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique

de $\frac{147}{343}$ est $\frac{5,27}{7}$, ou en réduisant purement en décimales, 0, 75; la racine cubique de $\frac{3}{7}$ est donc 0, 75 à moins d'un centieme près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertiroit le tout en fraction, et l'opération seroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (179 *et suiv.*)

On pourroit aussi, soit qu'il y ait des entiers, soit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales; mais il faut avoir soin de pousser cette réduction à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine. Ainsi si l'on demandoit la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, approchée jusqu'à moins d'un millieme, on changeroit la fraction $\frac{3}{11}$ en 0, 272727272; ensorte que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, on tirera celle de 7, 272727272 qu'on trouvera être 1,937.

182. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéros mis à sa suite, de maniere que le nombre de ses décimales soit 3 ou 6 ou 9, etc. alors on en tirera la racine, comme s'il n'y avoit pas de virgule; et après l'opération faite, on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée; ensorte que si la racine n'avoit pas suffisamment de chiffres pour que cette regle eût son exécution, on y suppléeroit par des zéros placés sur la gauche de cette racine. Ainsi pour tirer la racine cubique de 6, 54 à moins d'un millieme près, je mettrai 7 zéros, et je tirerai la racine cubique de 654000000 qui sera 1870; j'en séparerai 3 chiffres, puisqu'il

y a 9 décimales au cube, et j'aurai 1,870 ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6, 54. On trouvera de même que celle de 0,0006 approchée à moins d'un centieme près, est 0,08.

183. Pour faire quelques applications de ces principes aux nouvelles unités, soit proposé de déterminer le côté d'un cube qui auroit pour solidité 627 metres cubes, 441862481.

On voit qu'il suffit (voyez la note) d'extraire la racine cubique de ce nombre, c'est ce que l'on fera, d'après ce qui a été enseigné, comme il suit;

627,|441|862|481	8,561
512	192
115|441	21675
614125	2198208
13168|62	
627222016	
219464|81	
627 441 862 481	
000 000 000 000	

Le côté du cube proposé est donc de 8 metres, 561; or (table II).

---

* On verra en Géométrie quelle est la figure et la solidité du cube. En attendant il suffira de savoir que sa figure est celle d'un dez à jouer, et qu'on évalue sa solidité, en multipliant sa longueur par sa largeur et sa hauteur, c'est-à-dire, en cubant l'une d'elles, parce qu'elles sont toutes les trois égales entr'elles.

8 metres

				toises
8	metres valent		....	4,10594
5	décimetres..	1^{P}. 53973	....ou...	0,25662
6	centim.	2^{p}. 2172	....ou..	0,03079
1	millim.......	0^{li}. 4434	... ou..	0,00051
			total..........	4,39386

ou 4 t. 2 P. 0,36316 ou 4 t. 2 P. 4 p. 35792. etc.

Je demanderai pour second exemple de déterminer le côté d'un solide cubique qui auroit 36 toises cubes, 200 pieds cubes, 1500 pouces cubes, sachant d'ailleurs que la toise cube vaut 216 pieds cubes, et que le pied cube vaut 1728 pouces cubes. Je réduis les 36 toises cubes, 200 pieds cubes, 1500 pouces cubes, tout en pouces cubes, en multipliant 36 par 216, et ajoutant 200. puis en multipliant le produit 7976 par 1728 et ajoutant 1500, ce qui me donne 13796028 pouces cubes, dont j'extrais la racine ainsi qu'il suit :

13|796|028,000000	239,83
8	12
57|96	1587
12167	171363
16290|28	17251212
13651919	
1441 090|00	
1378946879 2	
655920800|00	

Et je trouve pour le côté cherché 239 pouces 83 ou 3 toises 1 pied 11 pouces 10 lignes.

Si l'on m'eût donné cette solidité en metres cubes, j'aurois eu simplement à extraire la racine cubique, comme il suit, de

```
met. cub.
273,154953 { 6,49
216        { 108
 57154       12288
 262144
--------
 1101095 3
```

Et j'aurois trouvé pour côté 6 metres, 49 : or (table II)

	toises
6 metres valent..................	3,07946
4 décim...., 1 pied, 23178 ou...	0,205297
9 centim.... 3 pouc., 3258 ou...	0,046192
donc 6 met., 49 valent.............	3,330949

ou 3 toises 1 pied 11 pouces 10 lignes.

Résultat parfaitement conforme au premier, mais beaucoup plus court et plus facile à obtenir.

185. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique, par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement par la division, et cela de la maniere suivante.

Qu'on demande la racine cubique de 5264627832723456; j'en cherche les quatre premiers chiffres, par la méthode ordinaire; ils sont 1739, et le reste de l'opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 5264627832 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avoit cinq chiffres, et les quatre, si elle en avoit six.) Je divise 568141372 par 9072363, triple quarré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, et ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739, ensorte que 173962 est, en nombres entiers, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on vouloit pousser plus loin, on cuberoit cette racine, et ayant retranché le produit, du nombre proposé, on mettroit à la suite du reste quatre zéros, et on diviseroit le tout, par le triple du quarré de 173962, ce qui donneroit quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (169) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces divisions on s'aidera de la regle abrégée qui a été donnée (69 *et suiv.*).

Des Raisons, Proportions, et Progressions; et de quelques Regles qui en dépendent.

186. Les mots *raison* et *rapport* ont la même signification en Mathématiques, et l'un et l'autre expriment le résultat de la comparaison de deux quantités.

187. Si dans la comparaison de deux quantités, on a pour but de connoître de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport Arithmétique.*

Ainsi, si je compare 15 avec 8, pour connoître leur différence 7; ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point; ensorte que 15. 8 marque que l'on considere le rapport arithmétique de 15 à 8.

188. Si dans la comparaison de deux quantités, on se propose de connoître combien l'une con-

tient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport géométrique*. Par exemple, si je compare 12 à 3 pour savoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par deux points : cette expression 12 : 3 marque que l'on considere le rapport géométrique de 12 à 3.

189. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la premiere, se nomme *antécédent*, et la seconde se nomme *conséquent*. Ainsi dans le rapport 12 : 3, 12 est l'antécédent, et 3 est le conséquent; l'un et l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

190. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités, il n'y a donc autre chose à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

191. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviser l'une par l'autre.

192. Nous évaluerons ce rapport, dorénavant, en divisant l'antécédent par le conséquent, ainsi le rapport de 12 à 3 est 4; et le rapport de 3 à 12 est $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

193. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ses deux termes ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence, (en quoi consiste le rapport), reste toujours la même.

194. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre : car le rapport

géométrique consistant (192) dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, est une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la division de ses deux termes, par un même nombre. Ainsi le rapport 3 : 12 est le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2; il est le même que celui de 1 : 4 que l'on a en divisant par 3.

195. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avois à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirois, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin en supprimant le dénominateur 12, (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), est le même que celui de 81 à 128.

196. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premieres, est le même que le rapport des deux dernieres, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*; et cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considere est arithmétique, ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14 forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premieres est la même que celle des deux dernieres. Pour marquer qu'elles sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi 7 . 9 : 12 . 14; c'est-à-dire, qu'on sépare par un point, les deux termes de chaque rapport; et les deux rapports par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à*, et les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme*; ensorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit 7 *est à* 9, *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20, forment une proportion géométrique; parce que 3 est contenu dans 15 comme 4 l'est dans 20. Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique, on les écrit ainsi 3 : 15 : : 4 : 20 ; c'est-à-dire, qu'on sépare les deux termes de chaque rapport par deux points, et les rapports par quatre points. Les deux points signifient *est à*, et les quatre points signifient *comme*; de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut seulement observer que dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme* du mot *arithmétiquement*.

197. Le premier et le dernier terme de la proportion se nomment les *extrêmes*; le deuxieme et le troisieme se nomment les *moyens*.

Comme il y a deux rapports, et par conséquent deux antécédens et deux conséquens : on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent*, et pour le second, *second antécédent*, *second conséquent*.

198. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme proportion *continue*. 3 . 7 : 7 . 11 forment une proportion arithmétique continue; on l'écrit ainsi ÷ 3 . 7 . 11 ; les deux points et la barre qui précédent, sont pour avertir que dans l'énoncé, on doit répéter le terme moyen qui est, ici, 7.

La proportion 5 : 20 : : 20 : 80 est une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainsi ÷÷ 5 : 20 : 80; l'usage des quatre points et de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

199. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétiques et géométriques ;

1°. Que si dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou si l'on en retranche la différence ou raison qui regne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus grand ou plus petit que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent ; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport, ce qui lui manque pour égaler son voisin ; ou retrancher du plus grand, ce dont il surpasse son voisin : ainsi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier et au troisieme terme, vous aurez 7.7:12.12 et il est aisé de sentir que cela est général.

2°. Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conséquens par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent ; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent : ainsi dans la proportion 12 : 3 : : 20 : 5, multipliez 3 et 5, chacun par 4, et vous aurez 12 : 12 : : 20 : 20. Pareillement, dans la proportion 15 : 9 :: 45 : 27, multipliez 9 et 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez 15 : 15 :: 45 : 45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

200. La propriété fondamentale des propor-

tions arithmétiques est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens* ; par exemple, dans cette proportion 3 . 7 : 8 . 12, la somme 3 et 12 des extrêmes, et celle 7 et 8 des moyens, sont également 15.

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entr'eux, et les deux derniers égaux aussi entr'eux, comme dans cette proportion

7 . 7 12 . 12.

il est évident que la somme des extrêmes seroit égale à celle des moyens.

Or toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (199) en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui regne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la somme des extrêmes et celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux sommes ; ainsi, si elles deviennent égales par cette addition, c'est qu'elles étoient égales sans cette même addition. Le raisonnement est le même pour le cas de la soustraction.

201. Puisque dans la proportion continue, les deux termes moyens sont égaux, il suit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes : ainsi pour avoir un moyen arithmétique entre 7 et 15, par exemple ; j'ajoute 7 à 15, et prenant la moitié de la somme 22, j'ai 11 pour le terme moyen; en sorte que ÷ 7 . 11 . 15.

Propriétés des Proportions Géométriques.

202. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est que *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ;* par exemple, dans cette proportion 3 : 15 : : 7 : 35, le produit de 35 par 3, et celui de 15 par 7 sont également 105.

Voici comment on peut se convaincre que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conséquens, comme dans cette proportion,

$$3 : 3 :: 7 : 7.$$

Il est évident que le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener toute proportion à cet état (199), en multipliant les deux conséquens par la raison. Cette multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes sera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été, ou sera un certain nombre de fois plus petit, si le rapport est une fraction ; mais elle produira le même effet sur celui des moyens ; donc, puisqu'après cette multiplication, le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens, ces deux produits doivent aussi être égaux sans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, et réciproquement.

Donc *dans la proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen* ; car les deux moyens étant égaux, leur produit est le quarré de l'un d'eux. Donc pour avoir un moyen géométrique entre deux nombres proposés, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, et tirer la racine quarrée de ce produit. Ainsi pour avoir un moyen géométrique entre 4 et 9, je multiplie 4 par 9, et la racine quarrée 6 du produit 36, est le moyen proportionnel cherché.

203. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique, il suit que, si connoissant les trois premiers termes d'une proportion, on vouloit déterminer le quatrieme, il faudroit *multiplier le second par le troisieme, et diviser le produit par le premier*; car il est évident (74) qu'on auroit le quatrieme terme en divisant le produit des deux extrêmes, par le premier terme; or ce produit est le même que celui des moyens; donc on aura aussi le quatrieme terme, en divisant le produit des moyens, par le premier terme.

Ainsi si l'on demande quel seroit le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient 3 : 8 : : 12; je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je divise par 3 : le quotient 32, est le quatrieme terme demandé; ensorte que 3, 8, 12, 32 forment une proportion : en effet le premier rapport est $\frac{3}{8}$, et le second est $\frac{12}{32}$ qui (89), en divisant les deux termes par 4, est aussi $\frac{3}{8}$.

Par un semblable raisonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion lorsqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver est un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, et diviser par l'ex-*

trême connu : si au contraire on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, et diviser par le terme moyen connu.

204. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique : en effet, si l'on avoit quatre quantités qui ne fussent point en proportion géométrique, en multipliant les conséquens par le rapport des deux premiers termes, il n'y auroit que le premier antécédent qui deviendroit égal à son conséquent ; par exemple, si l'on avoit 3, 12, 5, 10, en multipliant les conséquens 12 et 10 par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 et 12, on auroit 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$ dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes, ne peut être égal à celui des moyens ; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus, quand même on n'auroit pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$: il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités sont en proportion.*

De-là nous concluons cette seconde propriété des proportions.

205. *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore, si l'on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes.*

206. La même chose aura lieu, c'est-à-dire, *que la proportion subsistera, si l'on échange les places des extrêmes, ou celle des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il est aisé de voir que le produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens.

Ainsi la proportion 3 : 8 : : 12 : 32 peut fournir toutes les proportions suivantes par la seule permutation de ses termes.

3 :	8 : :	12 :	32
3 :	12 : :	8 :	32
32 :	12 : :	8 :	3
32 :	8 : :	12 :	3
8 :	3 : :	32 :	12
8 :	32 : :	3 :	12
12 :	3 : :	32 :	8
12 :	32 : :	3 :	8

Et il en est de même de toute autre proportion.

207. Puisqu'on peut mettre le troisieme terme à la place du second, et réciproquement, on doit en conclure *qu'on peut, sans troubler une proportion, multiplier ou diviser les deux antécédens par un même nombre, et qu'il en est de même à l'égard des conséquens*; car en faisant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport; et les deux conséquens, le second. Ainsi multiplier les deux antécédens de la premiere proportion, revient alors, à multiplier les deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre; ce qui (194) ne change point ce rapport. Par exemple, si j'ai la proportion 3 : 7 : : 12 : 28; je puis en divisant les deux antécédens, par 3, dire 1 : 7 : : 4 : 28, parce que, de la proportion

3 : 7 :: 12 : 28, on peut (182) conclure 3 : 12 :: 7 : 28; et en divisant les deux termes du premier rapport par 3, 1 : 4 :: 7 : 28, qui (206) peut être changée en 1 : 7 :: 4 : 28.

208. *Tout changement fait dans une proportion, de maniere que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou de leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même maniere dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, si l'on a la proportion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

on en pourra conclure les proportions suivantes,

	12 *plus*	3 :	3 ::	32 *plus*	8 :	8
ou	12 *moins*	3 :	3 ::	32 *moins*	8 :	8
ou	12 *plus*	3 :	12 ::	32 *plus*	8 :	32
ou	12 *moins*	3 :	12 ::	32 *moins*	8 :	32

Car, si c'est au conséquent que l'on compare, il est facile de voir que l'antécédent augmenté ou diminué du conséquent, contiendra ce conséquent une fois de plus, ou une fois de moins qu'auparavant; et comme cette comparaison se fait de la même maniere pour le second rapport, qui, par la nature de la proportion, est égal au premier, il s'ensuit nécessairement que les deux nouveaux rapports seront aussi égaux entr'eux.

Si c'est à l'antécédent que l'on compare, le même raisonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion sur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport à la place de son conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent; ce qui est permis (205).

209. Puisqu'en mettant le troisieme terme

d'une proportion à la place du second, et réciproquement, il y a encore proportion, on doit conclure que les deux antécédens se contiennent l'un l'autre, autant de fois que les conséquens se contiennent aussi l'un l'autre.

Donc *la somme des deux antécédens de toute proportion, contient la somme des deux conséquens, ou est contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient son conséquent, ou est contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion :

$$12 : 3 : : 32 : 8$$

12 plus 32 : 3 plus 8 : : 32 : 8, ce qui est évident.

Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second quatre fois, par exemple, la somme des deux antécédens contiendra le second, cinq fois; et par la même raison, la somme des conséquens contiendra le second conséquent cinq fois: donc la somme des antécédens contiendra celle des conséquens, comme le quintuple d'un des antécédens contient le quintuple de son conséquent, c'est-à-dire (194), comme un des antécédens contient son conséquent.

On prouveroit de même, que la différence des antécédens, est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

210. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci: si on a deux rapports égaux, par exemple, celui

de....................	4 : 12
et celui de................	7 : 21
	11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent.

Donc, *si l'on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens, est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens, est à son conséquent.* Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6; on peut dire que 4 *plus* 7 *plus* 2, sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, etc.

Car après avoir ajouté, entr'eux, les antécédens des deux premiers rapports, et leurs conséquens, aussi entr'eux, le nouveau rapport, qui selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisieme; par conséquent on pourra le combiner de même avec celui-ci, et il en résultera encore le même rapport, et ainsi de suite.

211. On appelle *Rapport composé*, celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports dont on multiplie les antécédens entr'eux, et les conséquens entr'eux. Par exemple, si l'on a les deux rapports 12 : 4 et 25 : 5; le produit des antécédens 12 et 25, sera 300, celui des conséquens 4 et 5, sera 20, le rapport de 300 à 20, est ce qu'on appelle rapport composé des rapports de 12 à 4, et de 25 à 5.

212. Ce rapport est le même qui si l'on avoit évalué séparément chacun des rapports compo-

sans, et qu'on eût multiplié entr'eux les nombres qui expriment ces rapports ; en effet, le rapport de 12 à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5; or 3 fois 5 font 15 qui est le rapport de 300 à 20, et on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, et le conséquent pour dénominateur : ainsi le rapport composé doit être une fraction qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, et pour dénominateur le produit des deux conséquens; c'est donc le produit des deux fractions qui exprime les rapports composans.

213. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si l'on n'a multiplié que deux rapports ; *rapport triplé*, si l'on en a multiplié trois ; *quadruplé* si l'on en a multiplié quatre, et ainsi de suite. Par exemple, si l'on multiplie le rapport de 2 à 3, par celui de 4 à 6, qui lui est égal, on aura le rapport composé 8 : 18 qui sera dit rapport *doublé* du rapport de 2 à 3, et de 4 à 6.

214. *Si l'on a deux proportions, et qu'on les multiplie par ordre ; c'est-à dire, le premier terme de l'une, par le premier terme de l'autre, le second par le second, et ainsi de suite ; les quatre produits qui en résulteront, seront en proportion.*

Car en multipliant ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (196); donc les deux rapports composés qui en résultent, doivent être égaux ; donc les quatre produits doivent être en proportion (196).

215.

215. Concluons de-là que *les quarrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion;* puisque, pour former ces puissances, il ne faut que multiplier la proportion, par elle-même, plusieurs fois de suite.

216. *Les racines quarrées, cubiques, et en général les racines semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion;* car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'est autre chose que la racine quarrée du rapport de ces deux termes; et il en est de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes: donc, puisque les deux rapports primitifs sont supposés égaux, leurs racines quarrées sont égales: donc le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, sera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera de même pour les racines cubiques, quatriemes, etc.

Usage des Propositions précédentes.

217. Les propositions que nous venons de démontrer, et qu'on appelle les *Regles des Proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons ici, à celles qui appartiennent à l'Arithmétique, et nous commencerons par celle qu'on peut faire de ce qui a été établi ci-dessus, et qui est la base de presque toutes les autres.

De la Regle de Trois *directe et simple.*

218. On distingue plusieurs sortes de Regles de *Trois* : elles ont toutes pour objet de faire connoitre un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Regle de Trois directe et simple*, est nommée *simple*, parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois sont connues, et la quatrieme est à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y considere, il y en a toujours deux, qui non-seulement sont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de maniere que, de même qu'une des quantités contient l'autre, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la premiere, contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle; c'est-à-dire, d'une maniere plus abrégée, qu'une quantité et sa relative peuvent toujours être, toutes deux, ou antécédens ou conséquens dans la proportion, ce qui n'a pas lieu dans la regle de Trois inverse, comme nous le verrons dans peu.

La méthode, pour trouver le quatrieme terme d'une proportion, et par conséquent pour faire la regle de Trois directe et simple, a été suffisamment exposée; mais il est à propos de faire connoître, par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette regle.

EXEMPLE I.

40 Ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toises d'ouvrage ; on demande combien 60 Ouvriers pourroient en faire dans le même temps ?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des Ouvriers; ensorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, etc. le premier doit devenir aussi double , triple, quadruple, etc. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché, doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60 relatif au premier , contient le nombre 40 relatif au second : il faut donc chercher le quatrieme terme d'une porportion qui commenceroit par ces trois-ci.....................................

$$40 : 60 :: 268^{T} ;$$

Ou, (en divisant les deux premiers termes par 20), ce qui est permis , par ces trois autres.

$$2 : 3 :: 268^{T} ;$$

Ainsi, selon ce qui a été dit ci-dessus, je multiplie 268^{T}, par 3, et je divise le produit 804 par 2; ce qui donne pour le quotient, 402^{T}; et par conséquent 402 pour l'ouvrage que feroient les 60 Ouvriers.

EXEMPLE II.

Un navire a fait , avec le même vent , 275 lieues en 3 jours ; on demande en combien de temps il en feroit 2000, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes ?

Il est évident qu'il faut plus de temps, à proportion du nombre de lieues ; et que par conséquent, le nombre des jours cherché, doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues : il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci..........

$$275 : 2000 :: 3 :$$

Multipliant 2000 par 3, et divisant le produit 6000 par 275, on auroit 21 $^{\text{jours}}\frac{9}{11}$.

Exemple III.

$52^T\ 4^p\ 5^p$ d'ouvrage ont été payées $168^{\#}\ 9^s\ 4^d$.; on demande combien on doit payer pour $77^T\ 1^p\ 8^p$.

Le prix de $77^T\ 1^p\ 8^p$ doit contenir le prix $168^{\#}\ 9^s\ 4d$. des $52^T\ 4^p\ 5^p$, autant que $77^T\ 1^p\ 8^p$ contiennent $52^T\ 4^p\ 5_p$. Il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci........

$$52^T\ 4^p\ 5^p : 77^T\ 1^p\ 8^p :: 168^{\#}\ 9^s\ 4d :$$

C'est-à-dire, qu'il faut multiplier $168^{\#}\ 9^s\ 4d$. par $77^T\ 1^p\ 8^p$, et diviser le produit par $52^T\ 4^p\ 5^p$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 et 128).

Mais il sera encore plus simple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite espece, c'est-à-dire, en pouces; et la question sera réduite à chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres.

$$3797 : 5564 :: 168^{\#}\ 9^s\ 4^d :$$

Alors multipliant $168^{\#}\ 9^s\ 4^d$ par 5564, on aura $937348^{\#}\ 10^s\ 8^d$; et divisant par 3797, le quotient $246^{\#}\ 17^s\ 3^d\ \frac{2789}{3797}$ sera ce qu'on doit payer pour les $77^T\ 1^p\ 8^p$.

S'il y avoit des fractions; après avoir réduit les deux termes de même espece, à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on simplifieroit le rapport de ces deux termes de la maniere qui a été enseignée (192).

De la Regle de Trois *inverse et simple.*

219. La regle de *Trois inverse et simple,* differe de la regle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la question pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent se contenir l'une l'autre, dans un ordre tout opposé à celui des deux autres quantités qui leur sont relatives; ensorte que, lorsque par l'examen de la question, on a donné à ces quantités la disposition convenable pour former une proportion, l'une des quantités principales, et sa relative, forment les extrêmes; et l'autre quantité principale, avec sa relative, forment les moyens.

Au reste, cela n'introduit aucune différence dans la maniere de faire l'opération, c'est toujours le quatrieme terme d'une proportion, qu'il s'agit de trouver; ou du moins, on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques Arithméticiens ont prescrit, pour le cas présent, une regle assujettie à l'énoncé de la question: nous ne suivrons point leur exemple: c'est la nature de la question, et non pas son énoncé, (qui souvent est vicieux), qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE I.

30 Hommes ont fait un certain ouvrage en 25

jours ; combien faudroit-il d'hommes, pour faire le même ouvrage en 10 jours ?

On voit qu'il faut dans ce second cas d'autant plus d'hommes, que le nombre de jours est moindre ; ainsi le nombre d'hommes cherché, doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci..

$$10^{j} : 25^{j} :: 30^{hom}.$$

C'est-à-dire, de multiplier 30 par 25, et de diviser le produit 750 par 10 ; ce qui donne 75 ou 75^{hom}.

EXEMPLE II.

Un équipage n'a plus que pour 15 jours de vivres ; mais les circonstances doivent lui faire tenir encore la mer pendant 20 jours ; on demande à combien on doit réduire la totalité des rations, par jour ?

Représentons par l'unité, la totalité des vivres que l'on consomme par jour ; on voit que ce à quoi on doit se restreindre, doit être d'autant moindre que cette unité, que le nombre 20 des jours, pendant lesquels cette économie doit durer, est plus grand que le nombre de 15 jours ; que par conséquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on auroit consommés pendant chacun de ces 15 jours, doit contenir celle des vivres que l'on consommera pendant chacun des 20 jours :

il faut donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par les trois suivans........

20j : 15j : : 1 :

Ce quatrieme terme fera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$; il faut donc se réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on auroit consommé par jour.

De la Regle de Trois *composée.*

220. Dans les deux regles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée et la quantité de même espece qui entre dans l'énoncé de la question, ont entr'elles un rapport simple et déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la regle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espece qui entre dans l'énoncé de la question, n'est pas donné par le rapport simple de deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la regle est réduite à une regle de Trois simple : les exemples suivans vont éclaircir ce que nous disons.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, en 18 jours; combien 54 hommes en feront-ils, en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-seulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un et à l'autre, il faut considérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que 18 fois 30 hommes, c'est-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant 28 jours, ne font qu'autant que feroient 28 fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La question est donc changée en celle-ci: 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même temps? c'est-à-dire, qu'il faut chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci......

$$540^{h} \,.\, 1512^{h} :: 132^{T} :$$

Multipliant 1512 par 132, et divisant le produit par 540, on trouvera pour réponse à la question, $369^{T}\ 3^{p}\ 7^{p}\ 2^{l}\ \frac{2}{5}$.

EXEMPLE II.

Un Homme marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchoit 10 heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vitesse?

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours qu'il y a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures, chaque jour, dans le second cas, il lui faudroit moins de temps par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la regle de Trois directe, et en partie à la regle de Trois inverse.

On la réduira à une regle de Trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre : il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues; combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question, en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme, dont il s'agit, emploie dix heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrieme terme de la proportion, dont les trois premiers sont......

$$230^l : 600^l : : 210^h :$$

On trouvera que ce quatrieme terme est 547 heures et $\frac{19}{23}$, lesquelles divisée par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours et $\frac{180}{230}$ ou $54^j\ \frac{18}{23}$.

221. Pour appliquer les regles de Trois aux nouvelles unités, soit proposée cette question :

554 livres 12 sols 6 deniers ont rapporté d'intérêt 27 liv. 3 sols 4 den. en 9 mois 15 jours : combien en 6 mois 12 jours rapporteront d'intérêt 216 liv. 7 sols 6 den.?

Il est clair que par les méthodes données, il faudroit multiplier 554 liv. 12 sols 6 den. par $9^m\ 15^j$, et 216 livres 7 sols 6 deniers par $6^m\ 12^j$; ce qui s'exécuteroit comme il suit:

554^{tt}	12^{s}	6^{d}
9^{m}	15^{j}	
4986^{tt}		
4	10^{s}	
1	2	6^{d}
277	6	3
5268^{tt}	18^{s}	9^{d}

216^{tt}	7^{s}	6^{d}
6^{m}	12^{j}	
1296^{tt}		
1	10^{s}	
	15	
43	5	6^{d}
43	5	6
1384^{tt}	16^{s}	0^{d}

Et l'on auroit alors cette proportion $5268^{tt}\ 18^{s}\ 9^{d} : 1384^{tt}\ 16^{s}\ 0^{d} :: 27^{tt}\ 3^{s}\ 4^{d} : x$, ou réduisant les deux premiers termes en deniers $1264545 : 332352 :: 27^{tt}\ 3^{s}\ 4^{d} : x$. Multipliant ensuite 332352 par 27 liv. 3 sols 4 den., et divisant le produit par 1264545, on auroit

332352			
27^{tt} 3^{s} 4^{d}			
2326464			
664704			
33235	4		
16617	12		
5539	4		
9028896		1264545	
177081		$7^{tt}\ 2^{s}\ 9\frac{2}{3}$	à très-peu-près.
20			
3541620			
1012530			
12			
12150360			
769455			

Selon le nouveau systême, la question se seroit énoncée ainsi :

554 francs, 625 ont en 9 mois, 5 rapporté d'intérêt 27 francs, 167 ; combien en 6 mois, 4 rapporteront d'intérêt 216 francs, 375.

Opérant d'une maniere analogue, on eût eu 554 francs, 625 à multiplier par 9 mois 5, ensuite 216 francs, 375 par 6 mois, 4 ; ce qui eût donné,

1°.		2°.
554,625		216,375
9,5		6,4
2773125		865500
4991625		1298250
5268,9375		1384,9000

Ensuite on eût eu cette regle de Trois à résoudre

5268 9375 : 1384.9000

ou 52689375 : 13849000 : : 27 f.,167 : x

On auroit mult. par le 3.^{e} terme 27,167

```
      96 943
     830 94
    1384 9
   96943
  27698
 ---------
 376235 783
```

Puis enfin divisant le produit 376235783 par 52689375 comme il suit, on auroit eu

376235783	52689375
7410158	$7-2-9\frac{3}{4}$ à très-peu près.
20	
148203160	
42824410	
12	
513892920	
39688545	

Remarquez que si l'on eût fait la division par la méthode abrégée déjà citée, on eût eu, à un centieme près, 7 francs, 14, comme on le voit ici

376236	52689
7413	7,14
2144	
36	

Or 7 fr., 14 valent 7 liv. 2 sols 9 den., 6; ce qui ne differe presque en rien des deux valeurs trouvées ci-dessus.

De la Regle de Société.

222. La regle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager, entre plusieurs associés; le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La regle que l'on donne pour cet effet, est fondée sur ce que nous avons établi (197) : nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple suivant.

EXEMPLE I.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2 : l'énoncé de la question fournit ces deux proportions.

4 : 3 : : la premiere partie, est à la seconde.
4 : 2 : : la premiere partie, est à la troisieme.

Ou ces deux autres ....
4 est à la premiere partie : : 3 est à la seconde
4 est à la premiere partie : : 2 est à la troisieme.

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux; 4 est à la premiere partie : : 3 est à la seconde : : 2 est à la troisieme.

Or on sait que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; on peut donc dire ici, que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celles que l'on cherche, est à la somme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles, est à la partie de 120 qui lui répond.

La regle se réduit donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données; 2°. à faire autant de regles de Trois, qu'il y a de parties à trouver, et dont chacune aura, pour premier terme, la somme des parties proportionnelles données; pour second terme, le nombre proposé à diviser; et pour troisieme terme l'une des parties proportionnelles données; ainsi dans la question que nous avons prise pour exemple, on auroit ces trois regles de Trois à faire.

9 : 120 : : 4 :
9 : 120 : : 3 :
9 : 120 : : 2 :

Dont on trouvera que les quatriemes termes sont 53 $\frac{1}{3}$, 40, 26 $\frac{2}{3}$, qui ont entr'eux les rapports demandés, et qui composent, en effet, le nombre 120.

Mais il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de regles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut se dispenser de la derniere, en retranchant du nombre proposé, la somme des autres parties, quand on les a trouvées.

Exemple. II.

Trois personnes ont à partager le bénéfice de la prise d'un vaisseau. La premiere a fait un fonds de 20000#, la seconde de 60000#, la troisieme de 120000#; on demande ce qui revient à chacune, sur la prise estimée 800000 livres, tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000#, en parties, qui aient entr'elles, les mêmes rapports que 20000, 60000, 120000, ou que 2, 6, 12, puisque chacun doit avoir proportionnellement à sa mise; il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles 2, 6, 12, et faire les trois proportions suivantes, ou seulement deux.

20 : 800000 : : 2# : la premiere partie.
20 : 800000 : : 6# : la seconde partie.
20 : 800000 : : 12# : la troisieme partie.

Ces trois parties seront 80000^{tt}, 240000^{tt}, 480000^{tt}.

La question pourroit être plus compliquée, et cependant être ramenée aux mêmes principes, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE III.

Trois personnes ont mis en société; la premiere 3000^{tt}, qui ont été pendant six mois dans la société; la seconde, 4000^{tt} qui y ont été pendant cinq mois; et la troisieme, 8000^{tt} qui y ont resté pendant neuf mois; combien chacune doit-elle avoir sur le bénéfice qui monte à 12050^{tt}?

On réduira toutes les mises à un même temps, en cette maniere :

La mise de 3000^{tt} a dû produire, pendant 6 mois, autant que 6 fois 3000^{tt} ou 18000^{tt}, pendant un mois.

La mise de 4000^{tt} a dû produire, pendant 5 mois, autant que 5 fois 4000^{tt} ou 20000^{tt}, pendant un mois.

Enfin la mise de 8000^{tt} a dû produire en 9 mois, autant que 9 fois 8000^{tt} ou 72000^{tt}, pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre; les mises des trois Associés sont 18000^{tt}, 20000^{tt}, 72000^{tt}; combien revient-il à chacun sur le gain 12050^{tt}.

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera 1971^{tt} 16^{s} 4^{d}. $\frac{4}{11}$, 2198^{tt} 18^{s} 2^{d}. $\frac{2}{11}$, 7887^{tt} 5^{s} 5^{d}. $\frac{5}{11}$.

Remarque au sujet de la Regle précédente.

223. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les commençans. Si l'on proposoit cette question : partager 650 en trois parties, dont la premiere soit à la seconde : : 5 : 4, et dont la premiere soit à la troisieme : : 7 : 3.

On ne peut pas appliquer, ici, la regle précédente, sans une préparation qui consiste à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionelle de l'une des trois parts cherchées; par exemple, celle de la premiere: cela s'exécute aisément, en multipliant les deux termes de chaque rapport par le premier terme de l'autre rapport ; ainsi les deux rapports 5 : 4 et 7 : 3, seront ramenés à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes du premier par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui n'en change pas la valeur, et donne les rapports, 35 : 28 et 35 : 15, ensorte que la question se réduit à partager 650, en trois parties qui soient entr'elles comme les nombres 35, 28 et 15; ce qui se fera aisément par la regle précédente.

Si l'on demandoit de partager un nombre en quatre parties, dont la premiere fût à la seconde : : 5 : 4, la premiere à la troisieme : : 9 : 5, et la premiere à la quatrieme : : 7 : 3; on réduiroit ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux autres: ainsi dans cet exemple on changeroit ces trois rapports, en ces trois autres, 315 : 252 ; 315 : 175 ; 315 : 135; ensorte que la question se réduit

duit à partager le nombre proposé, en quatre parties qui soient entr'elles comme les nombres 315, 252, 175 et 135.

De quelques autres Regles dépendantes des Proportions.

* 224. Quoique les regles suivantes soient d'un usage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre absolument : outre qu'elles ne sont pas sans utilité par elles-mêmes, elles sont d'ailleurs propres à faire sentir les usages des proportions.

225. La premiere dont nous parlerons est la Regle *d'une fausse position.* On l'applique souvent à résoudre des questions, qui appartiennent à la regle de Société, dont elle differe en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles, telles qu'elles sont données par l'énoncé de la question, elle en prend une arbitrairement, et y subordonne les autres conformément à la question ; ce qui rend le calcul un peu plus facile.

EXEMPLE I.

Partager 640#, à trois personnes, dont la seconde ait le quadruple de la premiere, et la troisieme deux fois, et $\frac{1}{3}$, autant que les deux autres ensemble.

Je prends arbitrairement, pour représenter la premiere partie, le nombre 3 dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$.

La premiere partie étant 3, la seconde sera 12, et la troisieme 35.

La question est réduite à partager 640, en trois parties qui soient entr'elles comme les trois nombres 3, 12 et 35, ce qui se fera, comme il a été dit ci-dessus.

La regle de fausse position sert aussi à résoudre des questions qui sont, en quelque façon, l'inverse de celles de la regle de Société ; puisqu'il s'agit de revenir de la somme de quelques parties d'un nombre, à ce nombre même, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$ fassent 808. Je prends un nombre dont je puisse avoir commodément le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$; (ce qui est facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre sera 105; j'en prends le $\frac{1}{3}$ qui est 35, le $\frac{1}{5}$ qui est 21, et les $\frac{3}{7}$ qui sont 45; j'ajoute ces trois nombres, et j'ai 101 qui est composé des parties de 105, de la même maniere que 808 l'est de celles du nombre en question; donc le nombre en question doit avoir même rapport à 808, que 105 à 101; il doit donc être le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci. . . . .

101 : 105 : : 808 :

Ce quatrieme terme est 840, dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$.

235. La seconde regle dont nous parlerons, est celle de deux fausses positions.

Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé, mais seulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés; l'exemple suivant fera connoître la regle et son usage.

EXEMPLE III.

Il s'agit de partager 6954#, entre trois personnes, de maniere que la seconde ait autant que la premiere, et 54# de plus; et que la troisieme ait autant que les deux autres ensemble, et 78# de plus.

Sans les 54 et 78#, il est clair qu'il ne s'agiroit que de partager le nombre proposé, en parties proportionnelles aux nombres 1, 1 et 2; mais puisqu'il faut prélever sur la somme, 54# pour la seconde personne, et 54# plus 78# pour la troisieme; il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé, qu'on doit partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2 : comme cette partie qui est facile à trouver dans l'exemple actuel, peut être plus difficile à appercevoir dans d'autres circonstances, on suit la méthode que voici.

Supposons, pour la premiere part, tel nombre que nous voudrons, par exemple, 1#; la seconde part sera 1# plus 54#; c'est-à-dire, 55#; la troisieme sera 1# plus 55# plus 78#; c'est-à-dire, 134#: la totalité de ces parts est 190#.

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2; la premiere part étant toujours supposée 1#, la seconde seroit 1#, la troisieme seroit 2#, et la totalité seroit 4#, dont la différence avec 190#, c'est-à-dire, 186#, est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954#, ce qui la réduit à 6768#; il reste donc à partager 6768#, en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, selon les regles ci-dessus; et ayant trouvé que la premiere partie est 1692#, on en conclura que les deux autres parts demandées sont 1746# et 3516#; en effet la totalité de ces trois parts est 6954#.

236. On trouve encore, chez les Arithméticiens, plusieurs autres regles qui ne sont autre chose que l'application des regles de Trois, à différentes questions, telles que les questions d'*Intérêt*, de *Change*, d'*Escompte*, etc.

Nous n'entrerons pas dans ces détails qui ne peuvent avoir de difficulté pour ceux qui, ayant bien saisi les principes établis ci-dessus, auront en même temps l'état de la question présent à l'esprit. Nous nous bornerons à un seul exemple.

Une personne a fait à un Marchand, un billet de 2854#, payable dans un an; elle vient acquitter son billet au bout de sept mois, et le Marchand consent de diminuer, pour les cinq mois restans, les intérêts qui ont été compris dans le billet, à raison de 6 pour 100 pour 12 mois; on demande pour quelle somme le Marchand doit rendre ce billet.

Puisque 12 mois produisent 6 pour 100 d'intérêt, 7 mois ont dû produire un intérêt qu'on trouvera en cherchant le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.....

$$12 : 7 :: 6 :$$

Ce quatrieme terme sera $\frac{42}{12}$ ou $3\frac{1}{2}$. Or, quand l'intérêt a été pris à 6 pour 100, on a compté pour 106#, ce qui ne valoit que 100; donc quand l'intérêt est à $3\frac{1}{2}$; on compte pour $103\frac{1}{2}$, ce qui ne vaut que 100; il faut donc actuellement que ce qui devoit être payé 106, ne soit plus payé que $103\frac{1}{2}$. Ainsi la somme cherchée doit être le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers sont........

$$106 : 103\tfrac{1}{2} :: 2854^{\#} :$$

Ce quatrieme terme qui est $2786^{\#}\ 13^{s}\ 9^{d}\ \frac{30}{106}$ ou $\frac{15}{53}$, est la somme que le débiteur doit donner pour retirer son billet.

De la Regle d'Alliage.

226. Les questions qui appartiennent à cette regle, sont de deux sortes.

Dans l'une il s'agit de trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses, dont le nombre et la valeur particuliere de chacune sont connus.

Dans la seconde, il s'agit de connoître les quantités de chaque espece de choses qui entrent dans un ou plusieurs mélanges, lorsqu'on connoît le prix ou la valeur de chaque espece, et le prix ou la valeur totale de chaque mélange.

Nous réservons les questions de la seconde sorte, pour servir d'application dans l'Algebre.

Quant aux questions de la premiere, voici la regle pour les résoudre.

Multipliez la valeur de chaque espece de choses, par le nombre des choses de cette espece; ajoutez tous les produits; et divisez la somme, par le nombre total des choses de toutes les especes.

EXEMPLE.

On emploie 200 Ouvriers, dont 50 sont payés à raison de 40 sols par jour, 70 à raison de 30 sols, 50 à raison de 25 sols, et 30 à raison de 20 sols ; à combien chaque Ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre ?

50 Ouvriers à 40ſ par jour font une dépense

de..........................	2000ſ
70 à 30ſ	2100
50 à 25......................	1250
30 à 20......................	600
	5950ſ

La dépense des 200 Ouvriers est donc de 5950ſ par jour ; et par conséquent (en divisant par 200), chaque Ouvrier revient, l'un portant l'autre, à 29ſ 9 ᵭ par jour. Les autres questions de cette espece sont si faciles à résoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propos de ne pas insister sur cette matiere.

Des Progressions Arithmétiques.

227. La progression Arithmétique est une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précede, ou en est surpassé, de la même quantité.

Par exemple cette suite.................

$\div$ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, etc.

est une progression Arithmétique ; parce que chaque terme y surpasse celui qui le précede, d'une même quantité qui est ici 3.

Les deux points séparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la Progression, sont destinés à marquer qu'énonçant cette Progression, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, en cette maniere, 1 *est à* 4, *comme* 4 *est à* 7; *comme* 7 *est à* 10, etc.

La Progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant; mais comme les propriétés de l'une et de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, ou *ajouter* en *soustraire*, nous la considérerons ici uniquement comme croissante.

228. On voit donc, d'après la définition de la Progression Arithmétique, qu'avec le premier terme et la différence commune, ou la raison de la Progression, on peut former tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison; et que par conséquent:

Le second terme est composé du premier, plus la raison.

Le troisieme est composé du second, plus la raison; et par conséquent du premier, plus deux fois la raison.

Le quatrieme est composé du troisieme, plus la raison; et par conséquent, du premier, plus trois fois la raison, et ainsi de suite.

229. De sorte qu'on peut dire, en général, *qu'un terme quelconque d'une Progression Arithmétique, est composé du premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

230. Donc si le premier terme étoit zéro, tout autre terme de la Progression seroit égal à autant de fois la raison, qu'il y auroit de termes avant lui.

231. Ce principe peut avoir les deux applications suivantes.

1°. Il sert à trouver un terme quelconque d'une Progression, sans qu'on soit obligé de calculer ceux qui le précedent. Qu'on demande, par exemple, quel seroit le centieme terme de cette Progression : ÷ 4 . 9 . 14 . 19 . 24 . etc.

Puisque le terme cherché doit être le centieme, il a donc 99 termes avant lui; il est donc composé du premier terme 4 et de 99 fois la raison 5; il est donc 4 plus 495, c'est-à-dire, 499.

232. 2°. Ce même principe sert à lier deux nombres quelconques, par une suite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de maniere que le tout forme une Progression Arithmétique; ce qu'on appelle *insérer* entre deux nombres donnés, plusieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou simplement plusieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 et 7 par cinq nombres qui fassent une Progression Arithmétique avec 1 et 7; ces nombres sont 2, 3, 4, 5, 6; mais comme il n'est pas toujours aisé de voir, du premier coup d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit régner dans cette Progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés, devant être le dernier terme de la Progression, doit être composé du premier, c'est-à-dire, du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui; donc si du plus grand de ces deux nombres, on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'est-à-dire, qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précedent le plus grand; donc (74) si l'on divise ce reste, par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les deux; donc, *pour insérer, entre les deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand; et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité.* Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la Progression.

Par exemple, si entre 4 et 11, on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques; je retranche 4 de 11, il me reste 7 que je divise par 9, nombre des moyens augmenté de l'unité, le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la Progression qui sera par conséquent...............

$\div 4 \,.\, 4\frac{7}{9} \,.\, 5\frac{5}{9} \,.\, 6\frac{3}{9} \,.\, 7\frac{1}{9} \,.\, 7\frac{8}{9} \,.\, 8\frac{6}{9} \,.\, 9\frac{4}{9} \,.\, 10\frac{2}{9} \,.\, 11.$

Pareillement si l'on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 et 1, retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudroit diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité; ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0, 1 pour la raison. Et par conséquent la Progression sera..........................

$\div 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.1.$

233. On voit par-là qu'entre deux nombres, si voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les Progressions Arithmétiques, que nous ne traitons ici que par rapport aux Logarithmes dont nous parlerons plus bas; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

234. La Progression Géométrique est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précede, ou est contenu en lui, le même nombre de fois. Par exemple cette suite...............

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

est une Progression Géométrique; parce que chaque terme contient celui qui le précede, le même nombre de fois qui est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la Progression.

Les quatre points qui précedent la Progression, ont la même signification que les deux points qui précedent la Progression Arithmétique (238). Mais on en met quatre pour avertir que la Progression est Géométrique.

La Progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la Progression Géométrique, comme croissante, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une et dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviser*, et celui de *contenir*, en celui de *être contenu*.

Puisque le second terme contient le premier, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du premier multiplié par la raison.

Puisque le troisieme terme contient le second, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du second multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, du premier multiplié par le quarré, ou la seconde puissance de la raison.

Puisque le quatrieme terme contient le troisieme, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du troisieme multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par le quarré de la raison; et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, multiplié par le cube, ou la troisieme puissance de la raison.

Par exemple, dans *la Progression ci-dessus*; 6 est composé du premier terme 3 multiplié par la raison 2; 12 est composé du premier terme 3 multiplié par le quarré 4 de la raison 2; 24 est composé du premier terme 3 multiplié par le cube 8 de la raison 2.

235. En continuant le même raisonnement, on voit qu'*un terme quelconque de la Progression Géométrique, est composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précedent ce terme quelconque.*

Donc, si le premier terme de la Progression est l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précedent; car la multiplication par le premier terme qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée ; à la septieme, par exemple, il faut, suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, multiplier ce nombre par lui même, six fois consécutives ; ainsi pour élever 2 à la septieme puissance, je dirois 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, qui seroit la septieme puissance de 2 ; mais on peut abréger l'opération en diverses manieres ; par exemple, je puis d'abord quarrer 2, ce qui fait 4, cuber ce 4, ce qui donne 64, et le multiplier par 2, ce qui fait 128 ; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8, quarrer 8, ce qui donne 64, et multiplier 64 par 2, ce qui donne 128 ; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

236. Le principe que nous venons de poser (234) sur la formation d'un terme quelconque de la Progression, et la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la Progression, sans être obligé de calculer ceux qui le précedent : si l'on demande, par exemple, quel seroit le douzieme terme de la Progression ....

$$\div\!\div 3 : 6 : 12 : 24 :, \text{etc.}$$

Comme je sais (234) que ce douzieme terme doit être composé du premier, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précedent ce douzieme, je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzieme puissance de la raison 2 ; pour former cette onzieme puissance, je cube 2, ce qui me donne 8, je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvieme puissance, et enfin je multiplie 512, neuvieme puissance de la raison, par 4, seconde puissance; et j'ai 2048 pour la onzieme puissance de 2; je multiplie donc 2048 par 3, et j'ai 6144 pour le douzieme terme de la Progression.

237. Une autre application qu'on peut faire du même principe; c'est pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra, entre deux nombres donnés. Si l'on demandoit trois moyens géométriques entre 4 et 64; avec un peu d'attention, on voit que ces trois moyens géométriques sont 8, 16, 32; en effet $\div\!\div$ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 forment une Progression géométrique; mais si l'on proposoit d'autres nombres que 4 et 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouveroit pas aussi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la Progression; parce que quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes, par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 et 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une Progression Géométrique qui commence par 2, et qui doit avoir neuf termes entre le premier et le dernier. 2048 est donc composé du premier terme 2 multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048 ; donc (69), si l'on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048 ; donc en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison : or cette puissance doit être la dixieme, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 et 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048 : donc il faut extraire la racine dixieme du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048 divisé par le plus petit 2.

238. Comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général, que *pour insérer entre deux nombres donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra, il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit ; ce qui donnera un quotient ; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainsi, pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2 ; ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixieme *, elle est 2 ; donc

* Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixieme d'un nombre ; mais il en est de celle-ci comme de la racine quarrée et de la racine cubique ; la racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de deux ; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois ; pareillement la racine dixieme n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de dix ; il en est de même pour les autres racines ; la tren-

la raison est 2 : ainsi pour former les moyens en question, je multiplie le premier terme 2 continuellement par la raison 2; et après avoir formé neuf moyens, je retombe sur 2048, comme on le voit ici..............

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, si l'on demandoit de trouver quatre moyens géométriques entre 6 et 48, je diviserois 48 par 6, et du quotient 8 je tirerois la racine cinquieme; comme 8 n'a pas de racine cinquieme exacte, on ne peut jamais assigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 et 48; mais on peut approcher de cette racine, si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée et de la racine cubique, et que nous ferons connoître dans l'Algebre. En attendant, il suffit qu'on conçoive qu'il est possible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois de suite par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8; et qu'il en est de même pour tout autre nombre et pour toute autre racine; et de-là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, et c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux Logarithmes.

tieme, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de trente chiffres; cela se démontre comme on l'a fait pour la racine quarrée et la racine cubique.

Des Logarithmes.

239. Les *Logarithmes* sont des nombres en Progression Arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en Progression Géométrique. Si l'on a, par exemple, la Progression Géométrique et la Progression Arithmétique suivantes................................

$$\div\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128\ \ 256,\ \text{etc.}$$
$$\div\ 3.\ 5.\ 7.\ \ 9.\ \ 11.\ \ 13.\ \ \ 15\ \ \ 17.\ \text{etc.}$$

Chaque terme de la suite inférieure, est dit le logarithme du terme qui est à pareille place dans la suite supérieure.

240. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puisqu'à la même Progression Géométrique, on peut faire correspondre une infinité de Progressions Arithmétiques différentes. Comme nous ne considérons ici les logarithmes, que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à considérer les différentes Progressions Géométriques et Arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles; nous passons tout de suite à celles qu'on a considérées dans la formation des Tables de Logarithmes,

241. On a choisi pour Progression Géométrique, la Progression décuple; et pour Progression Arithmétique, la suite naturelle des nombres; c'est-à-dire, qu'on a choisi les deux Progressions suivantes.

$$\div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000$$
$$\div\ 0.\ \ 1\ .\ \ 2\ .\ \ 3\ .\ \ 4\ \ .\ \ 5\ \ .\ \ \ 6.$$

242. Ainsi il sera toujours aisé de reconnoître quel est le logarithme de l'unité suivie

de tant de zéros qu'on voudra : il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la suite de cette unité.

Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la Progression décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons exposer ici ; mais nous allons exposer leur formation par une voie, qui à la vérité ne seroit pas la plus expéditive pour calculer les logarithmes, mais qui suffit, tant pour concevoir cette formation, que pour rendre raison des usages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

243. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puisse faire partie de la Progression Géométrique fondamentale. Or quoiqu'on ne voie pas que 3 puisse faire partie de la Progression Géométrique $\div\!\div$ 1 : 10 : 100, etc. cependant on voit que si entre 1 et 10, on inséroit un très grand nombre de moyens géométriques (237), comme on monteroit alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus serrés, que le nombre de ces moyens seroit plus grand, il arriveroit de deux choses l'une, ou que quelqu'un de ces moyens se trouveroit être précisément le nombre 3 ; ou que du moins il s'en trouveroit deux consécutifs, entre lesquels le nombre 3 seroit compris, et dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens insérés seroit plus grand.

Cela posé, si l'on inséroit pareillement entre 0 et 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inséré

inséré de moyens géométriques entre 1 et 10, chaque terme de la Progression Géométrique ayant pour logarithme, le terme correspondant de la Progression Arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 se trouve dans la Progression Géométrique ; ou si 3 n'étoit pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendroit dans la Progression Arithmétique, le terme qui répondroit à celui de la Progression Géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'est ainsi qu'on pourroit s'y prendre en effet, si l'on n'avoit pas de moyens plus expéditifs ; quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

243. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 et 10, pareil nombre entre 10 et 100, pareil nombre entre 100 et 1000, etc. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, pareil nombre entre 1 et 2, pareil nombre entre 2 et 3, etc.; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, et tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la premiere, le nombre le plus approchant de deux ; et on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant, qu'on a cherché de même dans la premiere, le nombre le plus approchant de 3, et qu'on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant ; qu'on en a fait de même successivement, pour les nombres 4, 5, 6, etc. qu'enfin ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres

1, 2, 3, 4, 5, etc. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la Progression Arithmétique, qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoient le plus ; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes, et de leur disposition dans les Tables ordinaires.

Tables des Logarithmes des Nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 200.

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
0	Infini nég.	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0,845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0,954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

Les Logarithmes renfermés dans cette Table, n'ont que six chiffres après la virgule; ils en ont sept dans les Tables ordinaires; mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-après.

244. Remarquons au sujet de cette Table, que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, s'appelle la *Caractéristique*; parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade est compris le nombre auquel appartient ce logarithme; par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, et que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour lo-

garithme que 3 et une fraction; il a donc 3 pour caractéristique, et les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

245. Comme il ne s'agit ici que des logarithmes tels qu'ils sont dans les Tables ordinaires, les propriétés que nous allons exposer, ne regardent que les Progressions Géométriques qui ont l'unité pour premier terme; et les Progressions Arithmétiques qui ont zéro pour premier terme.

Comparons donc encore, terme à terme, une Progression Géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une Progression Arithmétique aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux Progressions suivantes....................

$\because$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, etc.
$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, etc.

Il suit de la nature et de la correspondance parfaite de ces deux Progressions, qu'autant de fois la raison de la premiere est facteur dans l'un quelconque des termes de cette Progression, autant de fois la raison de la seconde est contenue dans le terme correspondant de cette seconde; par exemple, dans le terme 2187, la raison 3 est sept fois facteur, et dans le terme 28, la raison 4 est contenue sept fois.

En effet, selon ce qui a été dit ci-dessus la raison est facteur dans un terme quelconque de la premiere, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là; et dans la seconde, un terme quelconque est composé d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. Or il y a le même nombre de termes de part et d'autre.

Concluons de-là, qu'un terme quelconque de la Progression Géométrique, aura toujours pour correspondant dans la Progression Arithmétique, un terme qui contiendra la raison de celle-ci, autant de fois que la raison de la premiere est facteur dans le terme quelconque, dont il s'agit.

246. Donc, *si l'on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la Progression Géométrique, et si l'on ajoute en même-temps les deux termes correspondans de la progression arithmétique, le produit et la somme seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions.*

Car il est évident que la raison sera facteur dans le produit, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre; et que la raison de la progression arithmétique sera contenue dans la somme autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre.

247. Donc on peut, par l'addition seule de deux termes de la progression arithmétique, connoître le produit des deux termes correspondans de la progression géométrique, en supposant ces deux progressions prolongées suffisamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 et 24 qui répondent à 9 et 729, j'ai 32 qui répond à 6561; d'où je conclus que le produit de 729 par 9, est 6561, ce qui est en effet.

248. Donc, puisque les nombres naturels

composent la premiere colonne de la table ci-dessus, ont été tirés d'une progression géométrique, qui commence par l'unité ; et puisque leurs logarithmes sont les termes correspondans d'une progression arithmétique qui commence par zéro ; il faut en conclure, qu'en *ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De là il est aisé de conclure les usages suivans.

Usages des Logarithmes.

249. *Pour faire une multiplication par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du multiplicande, au logarithme du multiplicateur; la somme sera le logarithme du produit; c'est pourquoi cherchant cette somme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté*; par exemple, si l'on propose de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite table ci-dessus que le logarithme de 14 est.................. 1,146128
et que celui de 13........est......... 1,113943

La somme.............................. 2,260071
répond dans la même table au nombre 182 qui est en effet le produit.

250. Pour quarrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme, puisqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

251. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler son logarithme, et en général, pour élever un nombre à une

puissance quelconque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance; c'est-à-dire, multiplier son logarithme, par le nombre qui marque cette puissance; par exemple, pour élever un nombre à la septieme puissance, il faudra multiplier par 7, le logarithme de ce nombre.

252. Donc réciproquement, pour extraire la racine quarrée, cubique, quatrieme, etc. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre, par 2, 3, 4, etc., c'est-à-dire, en général, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé, dans la table, que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181; je cherche parmi les logarithmes à quel endroit se trouve 1,079181; il répond à 12, qui est par conséquent la racine quarrée de 144.

Si l'on demande la racine septieme de 128, je cherche, dans la table, son logarithme que je trouve être 2,107210; j'en prends le septieme, ou je le divise par 7, et je cherche à quoi répond dans la table, le quotient 0,301030; il répond à 2 qui est en effet la racine septieme de 128.

253. *Pour trouver le quotient de la division d'un nombre, par un autre; il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende; chercher dans la table à quel nombre répond le logarithme restant, ce nombre sera le quotient.*

Par exemple, si l'on veut diviser 187 par 17, je cherche dans la table, les logarithmes de ces deux nombres, et je trouve le logarithme

de 187..	2,271842
celui de 17....................................	1,230449
La différence..............................	1,041393

répond, dans la table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvoit pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouveroit qu'en partie dans la table ; mais nous allons enseigner, ci-après, ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette regle est fondée sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (74), le logarithme du quotient, ajouté (249), au logarithme du diviseur, doit donc composer le logarithme du dividende; et par conséquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviseur.

254. D'après ce que nous venons de dire, il est très-facile de voir que pour faire une regle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du second terme, au logarithme du troisieme ; et de la somme, retrancher le logarithme du premier.

255. Remarquons que lorsqu'on cherche dans les tables ordinaires, un logarithme résultant de quelques opérations sur d'autres logarithmes, si l'on ne trouve de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme, et celui de la table, que sur le dernier chiffre seulement, on doit

regarder cette différence comme nulle; parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septieme ordre près.

Des nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

256. Les fractions et les nombres entiers joints à des fractions n'ont pas leurs logarithmes dans les tables; il en est de même des racines quarrées, cubiques, etc. des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction (89), et ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur. Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91, le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (96).

257. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur; le reste, qui marquera ce

dont il s'en faut que la soustraction n'ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entiérement faite. Ce signe est celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ seroit — 0,917648 *.

258. Ce signe est destiné à rappeller dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés selon une regle toute opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'est-à-dire, que si l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; si au contraire l'on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, et à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opere par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, et retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur: or cet excès est précisément le logarithme de la fraction. A l'égard de la division, la raison en est

* Les nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous les ferons connoitre plus particuliérement dans l'Algebre: en attendant, nous prévenons que c'est en prendre une idée fausse, que de les regarder comme des nombres au-dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

aussi facile à saisir : en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{5}{3}$, c'est-à-dire, la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée, au logarithme de son numérateur.

259. Il peut arriver, et il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier et la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des tables ; par exemple, si l'on demande le logarithme de 53 $\frac{821}{5704}$, ce nombre réduit en fraction, revient à $\frac{303133}{5704}$, dont le numérateur passe les limites les plus étendues.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'est pas rigoureuse : mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires : avant que de l'exposer, observons :

260. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, etc. unités, à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, etc. puisque c'est ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, etc.

2°. Au contraire, si l'on retranche 1, 2, 3, etc. unités, de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, etc.

261. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le reste puisse se trouver dans les tables *. Ici, par exemple, j'en séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui (28) est 100 fois plus petit que le nombre proposé 357859.

Je cherche dans les tables, le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403 ; je prends en même-temps à côté de ce logarithme **, la différence 1214, entre ce même logarithme et celui de 3579, après quoi, je fais cette regle de Trois : si pour une unité de différence entre les deux nombres 3579 et 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes ;

Combien pour 0,59 différence entre les deux nombres 3578, 59 et 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes ; c'est-à-dire, que je cherche le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont...............

$$1 : 1214 :: 0,59 :$$

Ce quatrieme terme est 716, 26, ou simplement 716, en négligeant les décimales ; j'ajoute donc 716 au logarithme 3,5536403 de 3578, et j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578, 59 ; il ne

* Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des tables ordinaires des logarithmes. On en trouvera dans le *Traité de Navigation* qui fait le sixieme volume de ce Cours. Celles de M. Rivard, et celles de feu M. l'Abbé de la Caille sont exactes et commodes.

** Ces différences se trouvent dans les Tables, à côté des logarithmes mêmes.

s'agit plus pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver ; et on aura 5.5537119, pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578, 59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite étoient tous des zéros ; après avoir trouvé, dans les tables le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y auroit autre chose à faire qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique, qu'on auroit séparé de zéros.

262. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avoit pas de virgule; et après l'avoir trouvé, soit immédiatement dans les tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (261), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce qu'ayant considéré le nombre comme s'il n'avoit point de virgule, c'est-à-dire, comme 10, ou 100, ou 1000, etc. fois plus grand qu'il n'est, on doit le rappeller à sa valeur par une diminution convenable sur la caractéristique de son logarithme.

263. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre proposé, on cherchera encore ce nombre dans les tables, comme s'il n'avoit pas de virgule; et ayant pris le logarithme correspondant, on le retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre, et on fera précéder le reste, du signe —; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3 qui est 0,477121 ; je le retranche de deux unités,

et appliquant au reste le signe —, j'ai — 1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'est autre chose que $\frac{3}{100}$; or pour avoir le logarithme de $\frac{3}{100}$, il faut retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, et appliquer au reste le signe —.

Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables.

264. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier; or si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les tables, le logarithme restant, que quand le quotient sera un nombre entier : il y a une infinité d'autres cas de la même espece.

265. Proposons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excéde les limites des tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des tables.

On retranchera de la caractéristique, autant d'unités qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les tables, le nombre cherché, sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les tables, mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique.

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve, (après avoir ôté trois unités à la caractéristique), répondre au nombre 16879, j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467, répond à 16879000.

Si l'on ne trouve, dans les tables, que les premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à sa caractéristique ; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 et 1751 ; le nombre auquel il répond est donc 1750 et une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme 3,2432768, le logarithme de 1750 ; et j'ai pour différence 2288.

Je prends aussi dans les tables, la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 et 1750, après quoi je fais cette regle de Trois.

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 et 1750,

Répondent à une unité de différence entre ces nombres ;

A quelle différence de nombre doit répondre la différence 2288 entre mon logarithme et celui de 1750?

Je trouve pour quatrieme terme $\frac{2288}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre 1750 $\frac{2288}{2481}$ à très-peu de chose près ; par conséquent le logarithme proposé qui appartient à un nombre cent fois plus grand, a pour nombre correspondant 175000 $\frac{228800}{2481}$, c'est-à-dire, 175092 $\frac{548}{2481}$, ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175092,22.

266. Si le logarithme proposé tomboit entre

ceux des tables, il n'y auroit aucune unité à retrancher à la caractéristique, et par conséquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même maniere.

267. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode, n'est pas rigoureusement exacte *, et qu'elle n'approche de la vérité, qu'autant que les nombres cherchés sont grands; si le logarithme proposé tomboit au-dessous de celui de 1500, il faudroit, pour plus d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourroit le faire sans passer les bornes des tables; et ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans les tables, on en sépareroit sur la droite, autant de chiffres par une virgule, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent, mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (264), et réduisant le quatrieme terme en décimales, on mettra celles-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 et de 4, et que le nombre auquel il appartient est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique; c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493,

* Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, et cela suffit pour les usages ordinaires.

et

et 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millieme près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme et celui de 3493, c'est à-dire, 739; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 et 3493, et je chercherai, en raisonnant comme ci-dessus (274), le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci........

$$1243 : 1 :: 739 :$$

Ce quatrieme terme évalué, en décimales, est 0,594; donc le nombre cherché est 3,493594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce que les logarithmes des tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septieme ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance, jusqu'à trois décimales : au surplus, il est rare qu'on ait besoin d'aller jusques-là. La remarque que nous faisons, doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (260 et 274) de la même proportion.

268. Si l'on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. unités, selon l'étendue des tables; et après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme restant, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont on aura retranché le logarithme.

Par exemple, si l'on demande à quelle fraction appartient — 1,532732, je retranche 1,532732 de 4, et il me reste 2,467268 qui, dans les tables, se trouve entre les logarithmes de 293 et de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0293, et 0,0294; c'est à-dire, qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millieme près. En effet, retrancher de 4, le logarithme proposé 1,532732, c'est multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose), c'est multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois trop grand, il faut donc le compter pour des dix-milliemes.

Tout ce que nous venons de dire, trouvera abondamment des applications par la suite. Bornons-nous, quant à présent, à donner une idée, par quelques exemples, des avantages que les logarithmes procurent pour la facilité et la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 12836, approché jusqu'à moins d'un dix-millieme près.

Logarithme de 17954	4,254161
Logarithme de 12836	4,108430
reste..............................	0,145731

Ce reste, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millieme près.

Le logarithme de 53 est........... 1,724276

Son tiers est........................... 0,574759

Ce dernier cherché dans les tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 3756, donc la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode ordinaire. Il ne faut pas pour cela regarder cette derniere comme inutile; car elle s'étend à une infinité de nombres auxquels les logarithmes n'atteindroient pas, par rapport aux bornes des tables.

EXEMPLE III.

Veut-on avoir, à moins d'un centieme près, la racine cinquieme du cube de 5736?

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736, et on aura 11,275827, pour logarithme du cube de 5736. Prenant le cinquieme de ce dernier logarithme, on a 2,255165 pour logarithme de la racine cinquieme du cube de 5736. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centiemes, répond entre les nombres 17995 et 17996; la racine cherchée est donc 179, 95 à moins d'un centieme près.

EXEMPLE IV.

Qu'il soit question de trouver quatre moyens proportionnels géométriques, entre $2\frac{2}{3}$, et $5\frac{3}{4}$?

Il faudroit pour avoir la raison qui doit régner dans la progression, diviser $5\frac{3}{4}$ par $2\frac{2}{3}$, et extraire la racine cinquieme du quotient.

Par logarithmes, cette opération est très-simple. Je détermine par les tables, le logarithme, de $5\frac{3}{4}$ ou $\frac{23}{4}$; c'est 0,759668. Je détermine pareillement le logarithme de $2\frac{2}{3}$; c'est 0,425969. Je retranche donc ce logarithme du premier; et j'ai 0,333699; prenant donc le cinquieme de ce dernier, j'ai 0,066740 pour le logarithme de la raison cherchée. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de 4 unités pour avoir quatre décimales, répond à 11661, à moins d'une unité près; donc la raison est 1,1661, moins d'un dix-millieme près. Il ne s'agit donc plus, pour avoir les moyens proportionnels, que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$, par 1,1661, puis le produit, par 1,1661, et ainsi de suite.

Mais ces opérations peuvent être faites beaucoup plus promptement, à l'aide des logarithmes, en ajoutant consécutivement au logarithme 0,425969 du premier terme $2\frac{2}{3}$, le logarithme 0,066740 de la raison, son double, son triple, et son quadruple; ensorte qu'on aura 0,492709, 0,559449; 0,626189; 0,692929 pour les logarithmes des quatre moyens proportionnels demandés. Et si l'on cherche ces logarithmes, dans les tables, avec trois unités de plus à la caractéristique, on trouve que ces quatre moyens proportionnels sont 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

REMARQUE.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns que l'on doit retrancher, on peut simplifier l'opération, par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier, l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 et chacun des chiffres du nombre proposé à l'exception du dernier, pour lequel on écrit la différence entre 10 et ce chiffre. Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000; je retranche successivement, les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9; et le dernier chiffre, je le retranche de 10, et j'ai 473073 pour reste.

Ce qui reste est ce qu'on appelle *Complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette maniere étant trop simple, pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat, de l'addition et de la soustraction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération, à l'addition. Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 672736, 426452, et de retrancher de leur somme, les deux nombres 432752, 18675 : ce qui exige deux additions et une soustraction ; je substitue à cette opération, la suivante.

	672736
	426452
Complément Arith. de 432752	567248
Complément Arith. de 18675	981325
somme. . . . . , . .	2647761

c'est-à-dire, que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, et les complémens arithmétiques des deux derniers ; la somme est 2647761. Il faut en supprimer le premier chiffre 2, et les chiffres restans 647761 sont le résultat cherché.

La raison de cette opération est facile à sentir, en remarquant que si au lieu de retrancher 432752, comme on le proposoit, j'ajoute son complément arithmétique, c'est-à-dire, 1000000 moins 432752; je fais en même-temps la soustraction proposée, et une augmentation de 1000000, c'est-à-dire, d'une dixaine au premier chiffre du résultat ; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de ceci, aux logarithmes, est évidente.

Qu'il soit question, par exemple, de diviser 3760, par 79. Il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris. . . . .

log. 3760.	3,575188
compl. arith. du log. de 79.	8,102373
somme.	11,677561

Ainsi 1,677561 est le logarithme du quotient, et répond à 47, 59 à moins d'un centieme près.

Supposons, pour second exemple, qu'il soit question de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$; il faudroit multiplier 675, par 952; et 527, par 377; puis diviser le premier produit, par le second. Par logarithmes, on opérera ainsi.................

log. 675..........................	2,829304
log. 952..........................	2,978637
compl. arith. du log. de 527	7,278189
compl. arith. du log. de 377	7,423659
somme.................	20,509789

le logarithme du produit est donc 0,509789 qui, cherché avec trois unités de plus à la caractéristique, répond à 3,234.

On peut faire usage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions sous la même forme que ceux des nombres entiers, et les employer de même dans le calcul; par-là on évitera la distinction des logarithmes négatifs, et des logarithmes positifs. Il suffira de se souvenir, que la caractéristique du logarithme des fractions, proprement dites, est trop forte de dix unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$ qui n'est (96) autre chose que 3 divisé par 4; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3; c'est-à-dire, de retrancher le logarithme de 3, de celui de 4, et de donner au reste le signe— ; au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4;

logarithme 3....................	0,477121
compl. arith. du log. 4.............	9,397940
somme.................	9,875061

Cette somme est le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractéristique est trop forte de 10 unités. Or il n'est pas nécessaire de faire actuellement la diminution ; on peut la rejetter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme.

La même regle s'applique aux fractions décimales. ainsi pour avoir le logarithme de 0,575, qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$, au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arith. du logarithme de 1000.

En employant ainsi, les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en est pas plus difficile de trouver dans les tables, les valeurs, en décimales, de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'un logarithme proposé, est, ou renferme un ou plusieurs complémens arithmétiques ; je sais que sa caractéristique est trop forte, d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques ; ainsi si elle passe ce nombre de dixaines, il sera facile de la diminuer, et de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, et qui sera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais si la caractéristique est au-dessous du nombre des dixaines qu'elle est censée renfermer de trop ; elle appartient certainement à une fraction, que je trouverai en cette maniere :

maniere : je chercherai, par ce qui a été dit, à quel nombre répond le logarithme proposé ; et lorsque je l'aurai trouvé, j'en séparerai, par une virgule, autant de dixaines de chiffres sur la droite, qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractéristique.

Par exemple, si l'on me donnoit 8,732235 pour logarithme résultant d'une opération dans laquelle il est entré un complément arithmétique. Je vois, puisque sa caractéristique est au - dessous d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord quel nombre répond à 8,732235; considéré comme logarithme de nombre entier ; je trouve qu'il répond à 539802500, séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802500 pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un tel dégré de précision, on abrégera, en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celles des tables; et prenant seulement le nombre correspondant, on séparera autant de chiffres de moins que ne le prescrit la regle précédente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique. Ainsi, dans le cas présent, je diminuerois la caractéristique, de 5 unités : et ayant trouvé que le nombre correspondant, est 5398, j'en séparerois seulement cinq chiffres, et j'aurois 0,05398.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer, qu'en multipliant le logarithme, par le nombre qui marque le dégré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi, ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte. Ainsi, en élevant au cube, par exemple ; s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé ; c'est-à-dire, si la caractéristique est trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube sera trop forte de 30 unités ; et ainsi des autres. Il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur.

Dans les extractions des racines, pour éviter toute méprise, lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage, on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique autant de dixaines qu'il est nécessaire pour que ce dont elle sera trop forte, soit précisément d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le dégré de la racine : et ayant, conformément à la regle ordinaire, divisé par le nombre qui marque le dégré de la racine, la caractéristique sera trop forte, précisément de dix unités.

Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547.........

log. 276........................	2,440909
compl. Arith. du log. de 547.....	7,262013
somme.................	9,702922
à la caractéristique de laquelle..............	
j'ajoute......................	20,
	29,702922

afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, et j'ai 29,702922 dont le tiers 9,900974 est le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec dix unités de trop à la caractéristique : ainsi, conformément à ce qui a été observé ci-dessus, je trouve que cette racine cubique est 0,7961 à moins d'un millieme près.

L'usage des complémens arithmétiques, est principalement utile dans les calculs de la Trigonométrie, et par conséquent dans plusieurs des opérations du Pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.

FIN.

Extrait des Registres de l'Académie des Sciences.

Du 21 Novembre 1764.

Clairault et d'Alembert, qui avoient été nommés pour examiner *un Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, par Bezout, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression ; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, le 21 Novembre 1764.

Grandjean de Fouchy, *Secr. perp. de l'Académie des Sciences.*