Brünn, le 17 Juin 1907

Cher Monsieur,

En quelques jours j'essayerai de vous adresser une liste de mes productions mathématiques que vous m'avez fait l'honneur de me demander, aujourdhui je me borne à vous écrire au sujet de la charre vacante à Fribourg. La liste soumise contenait cinq candidats dont deux ne m'ont pas été connus. Je viens de faire la réponse au Décanat fribourgeois où vous êtes nommé seul primo loco, avec deux Autrichiens secundo loco présentés ex aequo.

Comme vous êtes déjà professeur en France, l'Université aura grande satisfaction de vous posséder, car c'est pour Fribourg une distinction que cette ville ne mérite pas. Lorsque vous y passerez quelques semestres, vous verrez pourquoi je ne rappelle pas à ce titre votre haute valeur scientifique, chose qui ne trouve pas grande appréciation à la ville que je suis heureux d'avoir pu quitter.

Il n'est pas habitude de présenter des informations pas demandées, mais ma conscience me tient à vous indiquer quelques détails qui, suivant circonstances, peuvent avoir ~~leur~~ importance, je le fais tout en risquant de passer dans vos yeux pour un naïf.

Il n'est pas exclu qu'on essayera de vous réduire dans vos droits comme examinateur. Un professeur qui n'examine pas ou qui examine peu, n'est pas apprécié à Fribourg. Quant à la mesure qu'elle avait acquise l'intrigue autrefois dirigée contre moi en faveur de Mr Daniëls (homme sans aucune profondeur scientifique), il me suffit de vous faire savoir que la faculté des lettres préférait Mr Daniëls comme examinateur dans un doctorat de Philosophie; la thèse qu'elle accepta porte le titre „Essai philosophique sur les géométries non-euclidiennes, par L. J. Delaporte; Paris, C. Naud, 1903." Elle témoigne d'une ignorance incroyable, non seulement de son auteur, mais aussi de ses rapporteurs (comp. par ex. page 31 et 32)

Beaucoup de chicanes innombrables que j'ai apprises, vous seront épargnées (~~p. ex.~~ deux séances de la faculté s'occupaient de la question si quelque garçon de laboratoire doit être chargé du devoir de laver mon tableau avant la leçon), mais il est d'une toute première importance d'observer que la Bibliothèque mathématique se trouve installée dans une salle malsaine (n° 10 à Pérolles). Vous n'aurez pas d'autre localité pour vous reposer après la leçon. Je suis convaincu que chacun qui fréquente souvent cette bibliothèque finira par devenir poitrinaire. Je vous recommanderais donc d'essayer pour obtenir une autre salle. On ne vous donnera pas les heures qui conviennent pour les mathématiques et vous aurez peu d'auditeurs si ce n'est pas de la France qu'ils viendront exprès pour vos cours. Mais il peut avoir quelque importance de savoir que les mathématiciens ont droit d'enseigner dans la salle de Botanique (au 2e), qui est une des meilleures dans cette originale faculté, et il faudra s'assurer en avance tout ce qu'on a besoin pour pouvoir exercer sa fonction, choses superflues dans d'autres pays. Des informations vous pourront être fournies par Mr Maurice de Thierry, ancien professeur de chimie, l'auteur d'un volume de chimie.

Je crois que Fribourg est pour vous une station pour changer le train dans votre carrière et c'est en vous souhaitant ce changement heureux, que je vous prie d'agréer l'assurance de ma sympathie et de mes sentiments très distingués.

M. Lerch

Monsieur et cher Collègue,

En réponse à votre aimable lettre je m'empresse de vous adresser quelques renseignements sur mes travaux; il serait pénible d'en dresser une liste complète, la liste que je fais pour moi contient main-tenant 178 mémoires. Je me suis contenté de vous indiquer ceux auxquels j'attri-bue quelques valeur durable et qui caracté-risent mon domaine de travail qui est

1° questions sur des classes particulières de fonctions, en particulier la région limitrophe des intégrales définies et des fonctions elliptiques.

2° Théorie des nombres.

La première période de mon activité portait aussi sur la théorie générale des fonctions.

Les renseignements fournis suffiront peut-être pour votre but.

En souhaitant que le séjours de Fribourg remplisse vos voeux et vous conduisse à l'heureuse carrière, je vous prie d'agréer l'assurance de mes sentiments très distingués et de ma sympathie.

M. Lerch

Lerch, Mathias (né à Milínov en Bohême, 1860)

Liste des principaux mémoires :

1. Über die Nichtdifferentiierbarkeit gewisser functionen (Journal de Crelle, 103 ; daté de 1886).

(Le principal résultat du travail : Exemple de fonction non-analytique ayant toutes les dérivées. Les travaux de Du Bois-Reymond sur ce sujet manquent de démonstration sérieuse ; les travaux de Pringsheim ont paru plus tard ; l'existence des fonctions à espace lacunaire ayant toutes les dérivées finies en résultent immédiatement (le travail de M. Fredholm a paru plus tard).

2. Ueber functionen mit beschränktem Existenzbereiche (Abhandlungen der kön. böhm. Gesellschaft der Wiss. ; Prague, 1888). VII Folge, 2 Band

3. Sur une fonction discontinue (Giornale di Matematiche, Vol. XXVI ; 1888)

Donne une série convergente $\sum \varphi_n(x)$, somme des fonctions continues, qui définit une fonction partout discontinue.

4. Sur une fonction continue dont la dérivée est partout discontinue.

(Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, vol IX ; 1889).

5. Sur ~~un~~ théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles (Sitzungsberichte der kön. böhm. Ges. der Wiss.; Prague, 1889).

L'exactitude du théorème fondamental sur l'existence unique de l'intégrale dans le cas régulier a été mise en doute par les critiques de L. Fuchs; la présente notice a établi une démonstration rigoureuse qui est la plus simple jusqu'aujourdhui.

6. Sur un théorème de Kronecker (ibid. 1893)
7. Sur une fonction transcendante " "
8. Généralisation du théorème de Frullani (" ")

La notice 6. traite de la fonction

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^s}$$

aux environs du point $s=1$; des sujets analogues sont traités dans les mémoires n^o 10 et 12.

La notice 7 traite un sujet très important; il s'agit de la série

$$\sum \frac{e^{2\pi i(m_1v_1+m_2v_2+\dots+m_pv_p)}}{(u+c_1m_1+c_2m_2+\dots+c_pm_p)^s}$$

$(m_1 \geqq 0,\ m_2 \geqq 0, \dots\ m_p \geqq 0)$

et de son prolongement analytique en s ; sa théorie contient comme cas particulier celle de la fonction gamma de plusieures variables, elle lie les fonctions elliptiques, modulaires, transcendantes analogues à la fonction $\zeta(s)$ et $R(w,s) = \sum_0^\infty \frac{1}{(w+v)^s}$, aux polynomes généralités de Bernoulli.

Nombreux travaux sur divers sujets du calcul intégral et sur certaines séries ont paru dans les mémoires de l'Académie de Prague (Rozpravy české Akademie); en particulier

9. Généralisation du théorème de Frullani (autre que celle du n° 8) 1891.

10. Des fonctions elliptiques, séries infinies et intégrales définies (1891, deux articles ; 1893 et 1894).

Ce mémoire traite des différents sujets ; je rappelle comme caractéristique quelques résultats :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}\, e^{2nu\pi i}$$

$$= \frac{2\pi}{t} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a} ;$$

Expression de la série $\sum_1^\infty \frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}$ par une intégrale définie formée à l'aide des fonctions théta.

Propriétés fondamentales de la fonction transcendante

$$\Psi(w,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x+\frac{i}{2}-iw\right)^2} \frac{dx}{1+e^{2x\pi}},$$

ses relations avec les fonctions elliptiques de 3^e espèce (quant aux sommes de Gauss, voir Math. Annalen, T. 57).

La transcendante remarquable (voir aussi N° 7)

$$X(z', z'' | \omega, \omega', \omega''; s) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2ns\pi i}{\omega}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z'+n\omega')}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z''+n\omega'')}-1\right)}$$

puis

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w+av_1+n} \, \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(u+nv_2)}-1}$$

(sa théorie absorbe l'article de M. G. Hardy p. 93 et suiv. au Quart. Journ. of Math. XXXVI, 1905)

et plusieurs sujets semblables.

11. Sur les fonctions elliptiques (1891).

12. Théorie des séries malmsténiennes (1891) et Nouvelles études sur les séries malmsténiennes (1894).

Étude approfondie des expressions telles que

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{\left[(w+n)^2+u^2\right]^s}, \quad \sum \frac{e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}}{(u+am^2+bmn+cn^2)^s}$$

 7

des relations avec la théorie de la fonction gamma et des fonctions elliptiques.

13. Sur la fonction génératrice d'Abel (1892) et Acta math. 27 (en relation avec le mémoire n° 14)

Etablit la démonstration du théorème Weierstrass-Picard qu'on attribue à Mr Volterra; donne de ce théorème une application à la théorie des intégrales telles que

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx.$$

14. Sur les intégrales définies 1893; en relation avec le mémoire n° 15 et 16.

15. Questions de calcul intégral (1896)

16. Sur quelques intégrales ayant rapports avec les fonctions elliptiques (Acta math. 22)

L'intégrale

$$L(w,s,\sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{(w^2 + 2wx\cos\sigma\pi + x^2)(1 + x^{\frac{1}{\sigma}})}$$

s'y trouve traitée à l'aide de son rapport au parallélogramme des périodes. Puis, toujours dans les Rozpravy,

17. Sur les dérivées à indices quelconques (1893)

On s'y place sous le point de vue des fonctions réelles et on y étudie les conditions d'existance des dérivées d'ordre fractionnaire. Comme addition, s'y trouve intégrée l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$\mathcal{D}_x^s f(x) = A f(x)$$

par la série

$$f(x) = C \sum_1^\infty \frac{A^{n-1}(x-a)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}.$$

18. Sur une nouvelle catégorie d'expressions analytiques (1899)

Reprend la question n° 16, pour le cas où le rapport des périodes devient réel et irrationnel ; à cette occasion s'introduit la notion du „couple de séries" (rappelée aussi Comptes Rendus T. 138, p. 952 ; 1904)

L'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\log x \, dx}{(w^2+2wx\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2)(1+x^\sigma)}$$

s'y trouve ramené au couple

$$\sum \frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi} + \sum (-w)^m \frac{1}{\sigma}\cot\frac{m\pi}{\sigma}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

lorsque σ est réel et irrationnel, $0<w<1$, $\sigma>0$.

Question analogue a été traitée par G. H. Hardy au Proceedings de la Société math. de Londre, 2e série, T. 3, 1905 p. 441.

D'autres exemples de couples de séries sont mentionnés dans ce mémoire 18.

Parmi les mémoires parus dans d'autres Recueils, je rappelle encore

19. Sur la différentiation d'une ~~certaine~~ classe de séries trigonométriques (Ann. Éc. Normale sup. 1895).

20. Sur la nature analytique d'une fonction considérée par P. Du Bois-Reymond (en allemand aux Monatshefte, 8e année; traduct. française aux Acta, 22).

21. Remarque sur la série de Fourier. Bulletin de M. Darboux 1900; auparavant dans l'Académie de Prague, 1900. La rédaction tchèque contient le théorème d'inversion

$$g(x) = -\int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot (z-x)\pi \, dz$$

$$f(x) = +\int_0^1 [g(z) - g(x)] \cot (z-x)\pi \, dz ,$$

qu'on attribue, sous une forme légèrement modifiée, à M. Hilbert, qui l'a donné quelques ans plus tard.

Je supprime une longue série d'articles sur différents objets d'analyse, et je passe à noter mes travaux sur la théorie des nombres.

22. Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers (Mém. des sav. étrang. T. XXXIII, n° 2).

22ª. Même travail, avec modifications, Acta mathematica T. 29 et 30.

23. Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental (J. de Liouville, 1903)

24. Sʳ qqˢ. applications d'un théorème arithmétique de Jacobi (Académie de Cracovie, 1904).

25. Zur Theorie des Fermatschen Quotienten $\frac{a^{p-1}-1}{p} = q(a)$ (Math. Annalen, LX; 1905)

26. Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat (C.R. T. CXLII).

27. Sur quelques théorèmes d'Arithmétique (Sitzungsberichte Prag, 1894) avec deux autres notices dans la même année.

28. Sur quelques applications des sommes de Gauss.
Annali di Matematica, T. XI, 3ᵉ série.

—

Monsieur

Vte R. de Montessus de Ballore
Professeur à la Faculté libre des Sciences
de Lille (France)

8, rue Ste Geneviève

Monsieur et cher Collègue,

Je viends à vous remercier du précieux cadeau que vous avez bien voulu me faire parvenir et dont je m'occuperai l'hiver prochain de plus près. J'étais très satisfait de l'étude de votre méthode de la convergence des fractions continues qui est ingénieuse et très simple en même temps, et qui m'a été très utile dans quelques recherches que j'avais entreprises l'hiver passé et sur lesquelles je devrai revenir dans les vacances qui vont commencer.

En passant, je prends la liberté de vous écrire un mot au sujet d'une question que vous avez insérée à l'Intermédiaire, si je ne me trompe au cahier du décembre. Je n'ai pas encore vu

les cahiers récents qui pourraient contenir quelque réponse, et dans l'hypothèse que vous vous intéressez du sujet, voici les remarques suivantes: La série trigonométrique de Weierstrass $f(x) = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x$, ($a$ entier impair), est une fonction bornée dont Mr Camille Jordan a prouvé dans le T. I de son Cours qu'elle n'est pas à variation bornée.
Il est difficile de se donner un image géométrique de cette fonction; ainsi, dans tout intervalle il y a des points x_0 tels que les parallèles $y = f(x_0)$ coupent la courbe en une infinité des points ayant x_0 pour limite de leurs abscisses.
On peut quand même interpréter la courbe comme la limite de deux régions planes bien séparées. Il suffira d'ombrer les ordonnées $y = f(x)$; la courbe sépare alors la région ombrée et la région non ombrée.

La ~~place~~ chaire de Mathématiques pures à l'Université de Fribourg n'est pas encore occupée.

Il paraît que le gouvernement attend lorsque un de mes anciens étudiants, Mr Plancherel, finira ses études à l'étranger; il a des bonnes relations à Fribourg, son père est le gérant de la „Liberté", journal principal du gouvernement. Les recherches qu'on a faites en France ou ailleurs n'ont été que des farces; on a voulu probablement montrer les yeux aimables à Mr Jean Brunhes. Je n'ai d'ailleurs aucune information réelle, ce n'est qu'une impression. La chaire est suppléée par le professeur de mathématiques appliquées, gendre d'un conseiller d'Etat fribourgeois; on va probablement augmenter son traitement, le jeune homme pouvant se contenter d'une somme modeste.

Je partirai demain pour la Bavière où je passerai quelques jours, vers la fin du mois je serai de nouveau à Brünn; au commencement d'août je partirai pour Bohême, pour rester pendant deux mois à Sušice, ville de mon département natal. Dans le semestre d'hiver prochain je prendrai la liberté de vous demander les citations de Laguerre "passim" que j'ai vainement cherchées dans le C. I.

Veuillez agréer, Monsieur et cher collègue, l'assurance de mes sentiments très distingués.

M. Lerch

Brünn, le 5 juillet 1908

Autriche

rue d'archiduc Rainer, 62