

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

THÈSES

DE

MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE,

SOUTENUES

PAR C.-F. VASNIER,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, AGRÉGÉ DES SCIENCES,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÈGE DE DIJON.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, N° 12, DERRIÈRE L'ÉCOLE DE MÉDECINE.

1859

PROGRAMME

DE LA

THÈSE

DE MÉCANIQUE.

Attraction et figure des planètes.

Expressions générales des composantes suivant trois axes rectangulaires de l'attraction d'un corps sur un point quelconque. Elles sont les différentielles partielles de la fonction qui exprime la somme des molécules du corps divisée par leurs distances au point attiré. Équation aux différentielles partielles à laquelle satisfait cette fonction. On en déduit très simplement l'attraction d'une sphère ou d'une couche sphérique, que le point attiré soit intérieur ou extérieur. Dans le nombre infini de lois qui rendent l'attraction très petite à de grandes distances, celle de la nature est la seule pour laquelle une sphère agit sur un point extérieur comme si elle était concentrée à son centre; c'est aussi la seule qui rend nulle l'attraction d'une couche sur un point intérieur.

Attraction d'un ellipsoïde homogène. Si le point attiré est dans l'intérieur d'une couche terminée par deux surfaces elliptiques et

semblables, l'attraction est nulle. L'attraction exercée par un ellipsoïde sur un point de sa propre masse, se réduit à celle d'un ellipsoïde terminé par une surface semblable à la sienne et passant par le point attiré. Les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur sont proportionnelles à la distance du point attiré au plan principal qui est perpendiculaire à la direction de la composante.

Si le point attiré est intérieur, on peut intégrer deux fois les expressions des composantes de l'attraction lorsque l'ellipsoïde est quelconque. Lorsqu'il est de révolution, on peut intégrer complètement en logarithmes ou en arcs-tangentes, suivant que l'ellipsoïde est allongé ou aplati. Si le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde, le problème devient très compliqué, mais on peut éluder la difficulté au moyen du beau théorème de M. Ivory.

Développement en séries de la fonction V d'où dépendent les attractions des sphéroïdes. Examen du cas où le sphéroïde diffère peu d'une sphère. Équation fondamentale en V qui a lieu à sa surface. On en déduit très simplement l'attraction sur un point extérieur ou intérieur, lorsque le rayon du sphéroïde se trouve développé sous une forme particulière très importante dans la théorie de la figure des planètes.

En désignant par Y^i et Z^i deux fonctions de cette forme, on a $\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y^i Z^i d\mu d\varpi = 0$, à moins que $i = i'$.

Ce théorème général et d'une application continue permet de simplifier l'expression du rayon du sphéroïde et son attraction quand on fixe l'origine des coordonnées à son centre de gravité.

Conditions pour qu'un point situé au dedans d'une couche soit également attiré.

Extension des formules au cas où le sphéroïde est hétérogène.

Examen du cas où le sphéroïde est quelconque. Forme générale de la quantité désignée par Y^i .

Intégration de $\int Y'Z' d\mu d\omega$.

Figure d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation uniforme.

On peut démontrer qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux satisfait à l'équilibre. Deux de ses axes étant pris à volonté, on peut trouver le troisième ainsi que la vitesse de rotation ; mais, en outre, il y a deux ellipsoïdes de révolution qui satisfont à l'équilibre.

Relation entre la pesanteur et la latitude.

Lorsque la vitesse de rotation ne dépasse pas une certaine limite, il n'y a que deux ellipsoïdes de révolution qui satisfassent à l'équilibre ; si la vitesse dépasse cette limite, aucune figure elliptique n'y satisfait ; mais la masse peut se modifier de manière à rendre la vitesse plus petite, et elle se fixe à la longue à une figure elliptique permanente qui est unique et dépend des forces primitivement imprimées à la masse fluide.

Figure d'un sphéroïde peu différent d'une sphère et recouvert d'une couche fluide en équilibre.

Équation générale de l'équilibre. Expressions du rayon de la surface du sphéroïde, et de la pesanteur lorsque la couche fluide et le sphéroïde sont homogènes. Si les forces étrangères sont nulles, le sphéroïde est un ellipsoïde de révolution dont l'ellipticité est $\frac{5}{4}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur ; la diminution du rayon de l'équateur au pôle est proportionnelle au carré du sinus de la latitude, et l'accroissement de la pesanteur suit la même loi.

Laplace avait démontré directement, sans recourir aux séries, que la figure elliptique est la seule qui convienne à l'équilibre ; mais sa démonstration est incomplète, comme l'a reconnu M. Liouville qui a substitué une autre démonstration ; mais comme elle est un peu compliquée, il vaut mieux se servir de celle que M. Poisson a donnée de la même proposition, parce qu'elle a l'avantage de se rapprocher de la méthode de Laplace.

Examen du cas où le sphéroïde contient un noyau solide de densité différente de celle de la couche fluide.

Équation générale de l'équilibre des couches fluides de densités variables qui recouvrent un sphéroïde.

Si le sphéroïde est entièrement fluide, et n'est point sollicité par des forces étrangères, sa figure est celle d'un ellipsoïde de révolution; les limites de l'aplatissement sont $\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{2}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur.

Le fluide se dispose toujours à la surface du sphéroïde de manière que le centre de gravité des couches de niveau coïncide avec celui du sphéroïde.

Conditions pour que le sphéroïde tourne autour d'un de ses trois axes principaux.

Rapports très simples de la pesanteur, de la longueur du pendule et des degrés du méridien à l'expression du rayon du sphéroïde.

Si le sphéroïde n'est sollicité par aucune force étrangère et formé de couches elliptiques ayant leurs centres au centre de gravité du sphéroïde, les variations des rayons, de la pesanteur et des degrés du méridien sont proportionnelles au carré du sinus de la latitude. La variation totale de la longueur du pendule de l'équateur au pôle, divisée par sa longueur à l'équateur, est autant au-dessus ou au-dessous de $\frac{5}{4}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur que l'ellipticité est au-dessous ou au-dessus de la même quantité.

Expression de l'attraction des sphéroïdes elliptiques sur un point extérieur; l'attraction exercée sur les points du parallèle dont le carré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$, est la même que celle qui serait exercée par une sphère de même masse que la Terre et passant par ce parallèle.

Expression de la pesanteur à la surface des sphéroïdes homogènes quelle que soit la loi de l'attraction. Elle est proportionnelle au carré du sinus de la latitude ; elle est partout la même quand l'attraction est proportionnelle au cube de la distance.

Les théories précédentes supposent la possibilité de développer sous une forme particulière toute fonction de deux variables θ et ψ , θ étant compris entre 0 et π et ψ entre 0 et 2π .

Démonstration de cette importante proposition par M. Poisson.

Différentes formes à donner à la fonction V suivant que le point attiré est extérieur, ou qu'il est au dedans d'une couche, ou qu'il fait partie du sphéroïde de telle sorte que la sphère décrite avec le rayon vecteur de ce point soit entièrement comprise dans le sphéroïde, ou enfin que cette sphère coupe le sphéroïde.

On en déduit aisément la formule fondamentale

$$r \frac{d^2 r V}{dr^2} + d \cdot \frac{\sin \theta \frac{dV}{d\theta}}{\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta}} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 V}{d\psi^2} = 0,$$

qui devient égale à $-4\pi q r^2$ lorsque le point attiré est intérieur au sphéroïde.

Développements de la valeur de V en séries pour les cas où le point attiré est intérieur ou extérieur à un sphéroïde peu différent d'une sphère.

Prouver que ces formules conviennent encore au cas où le point est voisin de la surface.

Déduire de ces formules générales la formule fondamentale

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{2a} + \frac{2\pi q a}{3} = 0,$$

qui sert de base à la théorie des sphéroïdes de Laplace.

La différence d'action d'une couche sur deux points situés sur un

même rayon, l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur, est proportionnelle à l'épaisseur de la couche.

Expressions de V relatives à un sphéroïde hétérogène.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,

13 septembre 1839,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

Pour l'Inspecteur général des études, chargé de l'administration,
de l'Académie de Paris, absent par congé,

l'Inspecteur de l'Académie délégué,

CAY X.

THÈSE

D'ASTRONOMIE.

Théorie des perturbations des mouvements planétaires.

1. Si les planètes étaient uniquement soumises à l'action du Soleil, les lois de leur mouvement seraient très simples; mais en vertu de leurs actions réciproques, ces lois éprouvent des modifications connues sous le nom d'*inégalités*. On en distingue deux espèces: les unes sont *périodiques*, c'est-à-dire qu'elles reprennent les mêmes valeurs quand les planètes reviennent à la même position; les autres sont encore *périodiques*, mais leurs périodes sont incomparablement plus grandes; voilà pourquoi on les appelle *séculaires*; comme elles croissent avec beaucoup de lenteur, on peut les regarder comme proportionnelles au temps pendant un grand nombre de siècles. Elles affectent les excentricités, les inclinaisons, les longitudes des nœuds et des périhélie des orbites. Quant aux moyens mouvements et aux grands axes, ils restent constants, abstraction faite des inégalités périodiques.

Pour les développer, je prends les équations du mouvement d'une planète sollicitée par le Soleil et par les autres planètes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \frac{dR}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \frac{dR}{dy} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \frac{dR}{dz} = 0;$$

R étant égal à

$$m'(xx' + yy' + zz') - \frac{m'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \text{etc.}$$

On déduit aisément de ces équations

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2f dR = 0, \quad (Q)$$

$$\frac{d^2 \cdot r \delta r}{dt^2} + \frac{\mu r \delta r}{r^3} + 2 f \delta dR + \delta r R' = 0, \quad (S)$$

dR étant la différentielle partielle de R par rapport à x, y et z , δr étant une fonction de t et d'une quantité α qui, étant multipliée par dz et intégrée ensuite par rapport à cette variable, fera connaître la valeur complète de r , ordonnée suivant les puissances des masses perturbatrices, lorsqu'on fera $\alpha=1$, et rR' étant égal à

$$x \frac{dR}{dx} + y \frac{dR}{dy} + z \frac{dR}{dz};$$

et pour déterminer l'angle décrit par la planète, on aura la formule

$$d\delta v = \frac{d(dr\delta r + 2r\delta\delta r) + dt^2(3f\delta dR + 2r\delta R' + R'\delta r)}{r^2 dv}. \quad (T)$$

Quand on néglige les carrés et les produits des masses perturbatrices, ces formules se simplifient; alors δR et $\delta r R'$ ne sont autre chose que les valeurs de R et rR' dans lesquelles les coordonnées sont relatives au mouvement elliptique; si l'on prend pour plan fixe celui de l'orbite de m à une époque donnée, z est de l'ordre des masses perturbatrices, $z \frac{dR}{dz}$ doit donc être négligé; de plus, l'angle v ne diffère de sa projection que de quantités du deuxième ordre par rapport aux masses.

En ayant égard à ces diverses circonstances, on trouve les trois formules

$$\delta r = \frac{a \cos v \int n dt r \sin v \left(2f dR + r \frac{dR}{dr} \right) - a \sin v \int n dt r \cos v \left(2f dR + r \frac{dR}{dr} \right)}{\mu \sqrt{1-e^2}}; \quad (X)$$

$$\delta v = \frac{\frac{2rd \cdot \delta r + dr \delta r}{a^2 n dt} + \frac{3a}{\mu} \int n dt dR + \frac{2a}{\mu} \int n dt r \frac{dR}{dr}}{\sqrt{1-e^2}}; \quad (Y)$$

$$\delta s = \frac{a \cos \nu f n d t r \sin \nu \frac{dR}{dz} - a \sin \nu f n d t r \cos \nu \frac{dR}{dz}}{\mu \sqrt{1-e^2}}; \quad (Z)$$

elles feront connaître les perturbations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude de la planète.

Au moyen de ces formules, la détermination de δr , $\delta \nu$, δs est ramenée aux quadratures, puisque les quantités contenues sous les signes f sont des fonctions connues du temps; il faut remarquer que z est nul dans la valeur de R et $\frac{dR}{dr}$, puisqu'on a pris pour plan xy celui de la planète à une époque donnée.

2. Ces perturbations, qui se présentent ici sous une forme finie, peuvent se développer en séries de sinus et de cosinus d'angles croissants proportionnellement au temps, en ayant égard au peu d'excentricité et d'inclinaison respective des orbites des planètes. En effet, si l'on pose

$$Q = 2f dR + r \frac{dR}{dr},$$

on a l'équation

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + Q = 0.$$

Si $Q = 0$, r^2 est fonction de $e \cos(nt + \epsilon - \varpi)$, $nt + \epsilon - \varpi$ étant l'anomalie moyenne et e l'excentricité; si l'on suppose donc

$$e \cos(nt + \epsilon - \varpi) = u \quad \text{avec} \quad r^2 = \phi(u),$$

on pourra encore conserver la même relation entre r^2 et u dans le cas du mouvement troublé; mais u devra être augmenté d'un terme dû aux forces perturbatrices que l'on trouvera au moyen de la formule

$$\frac{d \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u - 4 \frac{\phi''(u)}{\phi'(u)^3} \int Q du \phi'(u) + \frac{2Q}{\phi'(u)} = 0;$$

et il est à remarquer que dans les termes dépendants de Q on doit

supposer u égal à $e \cos (nt + \epsilon - \varpi)$, si l'on néglige le carré de la force perturbatrice.

En mettant pour $\phi'(u)$ et $\phi''(u)$, leurs valeurs approchées aux quantités de l'ordre e^4 , on sera conduit à l'équation différentielle du second ordre

$$(X')_0 = \begin{cases} \frac{d^2 \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u - \frac{1}{a^2} \left[1 + \frac{1}{4} e^2 - e \cos (nt + \epsilon - \varpi) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{4} e^2 \cos (2nt + 2\epsilon - 2\varpi) \right] \left(2f dR + r \frac{dR}{dr} \right) \\ \quad - \frac{2e}{a^2} \int n dt \left\{ \sin (nt + \epsilon - \varpi) [1 + e \cos (nt + \epsilon - \varpi)] \left(2f dR + r \frac{dR}{dr} \right) \right\}. \end{cases}$$

Quand on aura déduit de cette équation la valeur de δu on obtiendra δr par la formule

$$(Y') \quad \delta r = -a \delta u \left[1 + \frac{3}{4} e + 2e \cos (nt + \epsilon - \varpi) + \frac{9}{4} e^2 \cos (2nt + 2\epsilon - 2\varpi) \right],$$

et ensuite δv au moyen de la formule (γ) n° 1. Quant à δs , il s'obtiendra comme δr , au moyen des formules (x') et (γ') dans lesquelles on aurait remplacé

$$2f dR + r \frac{dR}{dr} \quad \text{par} \quad \frac{dR}{dz}.$$

3. Il s'agit donc de développer R , et pour simplifier, je suppose que l'on ne considère que deux planètes m et m' , je prends le plan xy peu incliné aux orbites afin que z et z' soient très petites; je fais en outre :

$$\begin{aligned} x &= r \cos v, & x' &= r' \cos v', & r &= a(1 + u_1), & r' &= a'(1 + u'_1), \\ y &= r \sin v, & y' &= r' \sin v', & v &= nt + \epsilon + v_1, & v' &= n't + \epsilon' + v'_1; \end{aligned}$$

u_1, u'_1, v_1, v'_1 , étant des quantités très petites.

Si on les remplace ensuite par leurs valeurs elliptiques, les termes de R seront de la forme

$$m'k \cos (i'n't - int + A),$$

i et i' étant entiers, k une série dont le premier terme est de l'ordre $i' - i$, le deuxième de l'ordre $i' - i + 2$, etc., comme il est facile de le reconnaître d'après les formules du mouvement elliptique. De plus, si l'on rejette les termes supérieurs à l'ordre $i' - i$, l'expression de k sera composée de termes de la forme

$$H e g e^{g'} \operatorname{tang}^{g''} \left(\frac{1}{2} \phi \right) \operatorname{tang}^{g'''} \left(\frac{1}{2} \phi' \right) \cos (i' n' t - i n t + i' \epsilon' - i \epsilon - g x - g' x' - g'' \varpi - g''' \vartheta - g^{(4)} \vartheta'),$$

g, g', g'', g''' étant positifs et satisfaisant à l'équation

$$i' - i - g - g' - g'' - g''' = 0.$$

Il est facile de s'assurer en outre que

$$r \frac{dR}{dr} = a \frac{dR}{da},$$

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\epsilon},$$

pourvu que $\epsilon - \varpi$ et $\epsilon - \theta$ soient constants dans la différentielle de k par rapport à ϵ . Quant à dR , on l'obtiendra en faisant seulement varier nt dans R , et regardant comme constant $n't$ d'où dépendent les coordonnées de m' .

4. Le développement de R étant supposé connu, nous allons nous proposer de trouver δr , δv et δs en portant l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Il suffit alors de remplacer dans le développement de R u par $-e \cos (nt + \epsilon - \varpi)$, u' , par $-e' \cos (n't + \epsilon' - \varpi')$, v , par $2e \sin (nt + \epsilon - \varpi)$ et v' , par $2e' \sin (n't + \epsilon' - \varpi')$, et de négliger les carrés et les produits de ces quantités, ainsi que de z et de z' .

Cette valeur étant connue, rien n'est plus simple que de calculer $2 \int dR + r \frac{dR}{dr}$ qui entre dans l'équation en δu . On intègre ensuite

et l'on déduit la valeur de δr , puis celle de δv que je me dispense d'écrire pour abréger.

Ces valeurs de δr et δv étant réunies aux valeurs elliptiques de r et de v , on aura les valeurs complètes du rayon vecteur et de la longitude.

5. Pour que le mouvement soit complètement connu il ne reste plus qu'à trouver les perturbations du mouvement en latitude.

Or, en ayant égard au degré de précision que nous cherchons ici, on a

$$\delta s = - a \delta u',$$

et

$$\frac{\delta' \delta u'}{dt^2} + n^2 \delta u' - \frac{1}{a^2} \frac{dR}{dz} = 0,$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{m' z'}{a'^3} - \frac{m' z'}{2} \Sigma B^i \cos i \alpha,$$

et

$$z' = a' \gamma \sin (n't + \epsilon' - \Pi).$$

En prenant pour plan fixe celui de l'orbite primitive de m , désignant par γ la tangente de l'inclinaison de l'orbite de m' , sur l'orbite primitive de m et Π , la longitude du nœud ascendant de la première de ces orbites sur la seconde; d'où l'on déduit aisément une équation différentielle en $\delta u'$ que l'on intègre, et d'où résulte ensuite δs .

Pour avoir la latitude de m au-dessus d'un plan fixe peu incliné à celui de son orbite primitive, je désigne par ϕ son inclinaison sur ce plan fixe, et par θ la longitude de son nœud; la quantité qu'il faut ajouter à δs est

$$\text{tang } \phi \sin (\nu - \theta),$$

ou approximativement

$$\text{tang } \phi \sin (nt + \epsilon - \theta),$$

et par conséquent

$$S = \text{tang } \phi \sin (nt + \epsilon - \theta) + \delta s.$$

Les formules précédentes renferment la théorie complète du mouvement des planètes quand on borne les approximations aux premières puissances des excentricités et des inclinaisons. Si l'on voulait avoir égard aux quantités d'ordres supérieurs, on aurait de nouveaux termes dépendants de nouveaux arguments; de plus, on reproduirait les arguments d'où dépendent les approximations précédentes, mais avec des coefficients de plus en plus petits, puisqu'un terme qui apparaît pour la première fois, et se trouve de l'ordre r , n'est reproduit que parmi les quantités de l'ordre $r+2$, $r+4$. Ainsi les termes qui sont de la forme

$$t \frac{\sin}{\cos} (nt + \epsilon)$$

dans $\delta\epsilon$, δs et $\delta\nu$, et d'où dépendent les inégalités séculaires, ne se reproduiraient pas si l'on avait égard aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons; ils sont approchés jusqu'aux quantités du troisième ordre.

Quant aux masses m'' , m''' , etc., elles donneront des termes analogues à ceux que produit m' , et qui s'ajouteront évidemment avec eux si l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices.

Enfin, les perturbations de m étant connues, celles de m' s'en déduiront aisément par un changement convenable des quantités qui se rapportent à m , dans celles qui se rapportent à m' , et réciproquement.

Inégalités séculaires.

6. Il résulte des formules indiquées nos 5 et 6 que les forces perturbatrices introduisent dans les expressions de r , $\frac{dv}{dt}$ et le temps t hors des signes sinus et cosinus; les termes qui en sont affectés croissant indéfiniment rendraient ces expressions fautives; mais ils proviennent du développement des constantes qui sont fonctions du

temps, et l'on peut déterminer ces fonctions de manière à faire disparaître les termes qui contiennent le temps explicitement. Ainsi, pour qu'ils disparaissent de l'expression de ε et de $\frac{dv}{dt}$, qui contiennent les constantes a , n , ε , h et l , on trouve les conditions

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= 0, \\ \frac{dh}{dt} - l \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{m'n}{2} (lC + l'D) &= 0, \\ \frac{dl}{dt} + h \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{m'n}{2} (hC + h'D) &= 0.\end{aligned}$$

La première nous apprend que n ainsi que a est constant en vertu de l'équation $n^2 = \frac{1}{a^3}$.

Les deux autres sont insuffisantes pour déterminer h , l et ε ; mais en vertu de l'équation

$$nt + \varepsilon = \int n dt,$$

on a

$$t \frac{dn}{dt} - \frac{d\varepsilon}{dt} = 0; \quad \text{d'où} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

et par conséquent ε est constant. Quant aux variations de h et l , et par conséquent des périhélies et des excentricités qui en dépendent, elles sont déterminées par les deux équations

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{m'n}{2} (lC + l'D), \quad (1)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{m'n}{2} (hC + h'D). \quad (2)$$

En appliquant la même méthode pour faire disparaître le temps qui se trouve explicitement dans l'expression de la latitude, on est conduit aux deux équations

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{m'n}{4} a^2 a' B' (q - q'), \quad (3)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'n}{4} a^2 a' B' (p - p'). \quad (4)$$

Ces équations font connaître les variations de p et de q , et par conséquent celles des inclinaisons et des longitudes des nœuds des orbites.

7. L'équation $\frac{dn}{dt} = 0$ nous montre que les moyens mouvements et les grands axes des orbites sont constants; mais cette équation n'est approchée qu'aux quantités du premier ordre, et il pourrait se faire que les termes des ordres supérieurs introduisissent dans v un terme de la forme kt^2 , et alors, au lieu de l'équation précédente, on aurait $\frac{dn}{dt} = 2k$; et le moyen mouvement ne serait plus uniforme; mais nous reviendrons plus tard sur les moyens mouvements, et nous démontrerons qu'ils sont uniformes, quelles que soient les excentricités et les inclinaisons des orbites, à moins qu'il n'existe un rapport presque commensurable entre les moyens mouvements des planètes.

8. Reprenons les équations (1) et (2) et désignons par (01) la quantité $= -\frac{m'nC}{2}$ et par [01] la quantité $\frac{m'nD}{2}$. Ces quantités peuvent être déterminées fort simplement.

Si l'on désigne de même par (02) [0,2] ce que deviennent ces quantités quand on y remplace ce qui est relatif à m' dans ce qui est relatif à m'' , et ainsi de suite;

Si de plus on désigne par

$$(10) [10] \dots (12) [12]$$

ce que deviennent

$$(01) [0,1] \quad (02) [0,2],$$

quand on y remplace ce qui est relatif à m par ce qui est relatif à m' , on déduira des équations (1) et (2) le système d'équations

$$(A) \begin{cases} \frac{dh}{dt} = [(0,1) + (0,2) + (0,3) + \dots] l - [01] l' - [02] l'' - [03] l''' \dots \\ \frac{dl}{dt} = -[(01) + (02) + (03) + \dots] h + [01] h' + (02) h'' + (03) h''' + \dots \end{cases}$$

On aurait des équations analogues pour h' , l' , etc.

9. Pour les intégrer nous ferons.

$$\begin{aligned} h &= N \sin (gt + \beta), & l &= N \cos (gt + \beta), \\ h' &= N' \sin (gt + \beta), & l' &= N' \cos (gt + \beta). \end{aligned}$$

etc.

En substituant ces valeurs dans le système des deux équations précédentes, et supposant que le nombre des corps soit égal à i , nous obtiendrons i équations entre N, N', N'' et g , qui, par l'élimination, donneront une équation en g du degré i . Soient g, g_1, g_2 , etc., les diverses valeurs de g que l'on en tirera.

Soient N, N_1, N_2, N_3 , les valeurs correspondantes de N , et désignons de la même manière les différentes valeurs de N', N'' , etc.; les intégrales des équations précédentes seront :

$$h = N \sin (gt + \beta) + N_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin (g_2 t + \beta_2) + \dots$$

et de même pour h', h'' , etc.; $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant des constantes arbitraires.

On aura des équations analogues pour les quantités l, l', l'' , etc., et comme pour chaque valeur de g il y a une des quantités N, N', N'' , qui reste arbitraire, il y aura $2i$ constantes arbitraires dans les $2i$ équations que nous obtenons; elles seront donc les intégrales complètes des équations précédentes.

Quant aux constantes arbitraires, on pourra les déterminer d'après les valeurs des excentricités et des longitudes des périhéliees données par l'observation à une certaine époque; car les quantités h, h', h'' , etc., l, l', l'' , etc., qui en dépendent, sont aussi connues par les relations $h = e \sin \varpi$, $l = e \cos \varpi$. En effet, on déduit aisément du système des équations (A)

$$\begin{aligned} Nml\sqrt{a} + N'm'l'\sqrt{a'} + N''m''l''\sqrt{a''} \dots \\ = (N^2m\sqrt{a} + N'^2m'\sqrt{a'} + N''^2m''\sqrt{a''} + \dots) \cos (gt + \beta), \\ Nm h\sqrt{a} + N'm'h'\sqrt{a'} + \dots = (N^2m\sqrt{a} + N'^2m'\sqrt{a'} + \dots) (\sin gt + \beta); \end{aligned}$$

d'où

$$\tan g \beta = \frac{Nm h\sqrt{a} + N'm'h'\sqrt{a'} + \dots}{Nml\sqrt{a} + N'm'l'\sqrt{a'} + \dots}$$

en fixant l'origine du temps au point pour lequel $h, h' \dots l, l' \dots$ sont connus.

β étant connu, on aura, au moyen d'une des équations précédentes, l'indéterminée du système $N, N', N'',$ etc.

Quant aux autres arbitraires, elles se détermineront de la même manière.

Les quantités $h, h',$ etc., $l, l', l'',$ etc., une fois connues, les excentricités et les longitudes des périhélie s'en déduiront aisément.

10. Comme les résultats précédents sont fondés sur le peu d'excentricité des orbites, il importe de démontrer que ces excentricités resteront très petites. En substituant pour h et l leurs valeurs dans l'expression de e^2 , on verrait que e resterait constamment plus petit que la somme des coefficients $N + N_1 + N_2 + \dots$ si les racines $g, g',$ etc., étaient toutes réelles et inégales; dans le cas contraire, il y aurait dans l'expression de e_2 des exponentielles ou des arcs de cercle croissant indéfiniment avec le temps, et les orbites deviendraient fort excentriques; mais on peut démontrer que ce dernier cas n'arrivera jamais, car on déduit du système des équations (A)

$$e^2 m \sqrt{a} + e'^2 m' \sqrt{a'} + \dots = \text{const.},$$

d'où résulte que les excentricités sont toujours très petites et que la somme de leurs carrés multipliés par les masses et les racines carrées des grands axes est constante pourvu que les planètes circulent dans le même sens. En outre, les quantités $h, h', h'',$ etc., ne contiennent ni exponentielles ni arcs de cercle.

11. Les variations que subissent les excentricités et les longitudes des périhélie étant peu sensibles, on peut les supposer proportionnelles au temps pendant un grand intervalle, et il est utile pour la pratique de les avoir sous cette forme: c'est à quoi l'on parvient aisément au moyen des équations (A), et l'on

trouve

$$\frac{de}{dt} = [01] e' \sin (\varpi' - \varpi) + [02] e'' \sin (\varpi'' - \varpi) + \text{etc.}$$

On aurait des expressions analogues pour $\frac{de'}{dt}$, $\frac{de''}{dt}$, etc.

De l'équation $\text{tang } \varpi = \frac{h}{l}$ on déduit de même

$$\frac{d\varpi}{dt} = (01) + (02) + \dots - [01] \frac{e'}{e} \cos (\varpi' - \varpi) - [02] \frac{e''}{e} \cos (\varpi'' - \varpi) + \text{etc.};$$

on aurait des valeurs semblables pour $\frac{d\varpi'}{dt}$, $\frac{d\varpi''}{dt}$, etc. : on pourra ensuite obtenir, au moyen des équations précédentes, les valeurs de $\frac{d^2e}{dt^2}$, $\frac{d^3e}{dt^3}$, etc., $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d^2\varpi}{dt^2}$, etc. ; et ensuite l'excentricité e , au bout d'un temps quelconque devient

$$e + t \frac{de}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \frac{d^2e}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3} \frac{d^3e}{dt^3} + \dots$$

Pour les planètes, il suffit, dans la comparaison des anciennes observations, d'avoir égard au carré du temps.

12. Revenons maintenant aux équations (3) et (4)

$$\frac{dp}{dt} = (01) (q' - q),$$

$$\frac{dq}{dt} = (01) (p - p').$$

Si l'on a égard aux actions réciproques des corps m, m', m'' , on obtient un système d'équations différentielles analogue au système (A) que je désigne par (C) et que je me dispense d'écrire parce qu'il ne diffère du précédent qu'en ce que h, l, h', l' sont remplacés par q, p, q', p' et $[0, 1]$ par $(0, 1)$, $[1, 0]$ par $(1, 0)$.

On trouve donc en suivant la même marche :

$$Q = N \cos (gt + \beta) + N_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + \dots$$

$$P = N \sin (gt + \beta) + N_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + \text{etc.}$$

etc.

Mais ici l'une des racines de l'équation du degré i en g est nulle, parce que le système des équations (C) se trouve vérifié quand on y suppose p, p', p'' égaux et constants, ainsi que q, q', q'' , etc.

Les arbitraires se déterminent ici comme au n° 9, et par l'analyse du n° 10

$$\text{const.} = (p^2 + q^2) m \sqrt{a} + (p'^2 + q'^2) m' \sqrt{a'} + \dots;$$

d'où l'on conclut que p, p', q, q' ne contiennent ni arcs de cercle ni exponentielles, et par conséquent l'équation en g a toutes ses racines réelles et inégales.

Du système des équations (C) on déduit encore les deux intégrales

$$\text{const.} = mq \sqrt{a} + m'q' \sqrt{a'} + \dots$$

$$\text{const.} = mp \sqrt{a} + m'p' \sqrt{a'} + \dots$$

p, q, p', q' étant connus, on obtiendra les inclinaisons et les longitudes des nœuds des orbites par les formules

$$\text{tang } \varphi = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \text{tang } \theta = \frac{p}{q},$$

et il résulte de la première que les inclinaisons des orbites resteront très petites ainsi que les excentricités si les corps m, m', m'' , circulent dans le même sens.

Ici l'on peut encore, pour les usages astronomiques, supposer les variations des inclinaisons et des longitudes des nœuds proportionnelles au temps; mais comme on rapporte les mouvements célestes au plan de l'orbite mobile de la Terre, on détermine ces variations relativement à l'écliptique.

13. Les relations que nous avons trouvées entre les éléments des orbites supposent, ainsi que les équations (1), (2), (3) et (4) dont elles ont été déduites, les excentricités et les inclinaisons fort petites; mais on peut, en s'appuyant sur le principe des aires et le principe des forces vives, obtenir des relations plus générales, quelles que soient les excentricités et les inclinaisons.

Ces relations sont

$$C = m \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1 + \tan^2 \varphi}} + m' \sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1 + \tan^2 \varphi'}} + \dots$$

$$C' = mp \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1 + \tan^2 \varphi}} + mp' \sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1 + \tan^2 \varphi'}} + \dots;$$

relativement à q, q' , etc. on aurait une équation analogue.

Enfin l'application du principe des forces vives nous conduit à l'équation remarquable

$$C = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \dots$$

De ces équations il est facile de déduire celles qui se rapportent aux n^{os} (10) et (12).

Après avoir indiqué comment on parvient à déterminer les inégalités séculaires des éléments des orbites, nous pourrions nous arrêter ici, mais comme ces éléments peuvent être affectés d'inégalités à très longues périodes qui dépendent des rapports des moyens mouvements qui se déterminent assez facilement par une autre méthode fondée sur la variation des paramètres, nous allons exposer cette méthode.

Lorsque l'on n'a égard qu'à l'action du Soleil sur les planètes, elles décrivent des ellipses dont cet astre occupe un des foyers; mais en vertu des petites forces provenant de leurs actions réciproques elles s'écartent un peu du mouvement elliptique. Néanmoins, on peut encore supposer qu'elles se meuvent sur des ellipses dont les éléments sont variables; mais ces variations sont telles, que les équations finies du mouvement et leurs équations différentielles du premier ordre sont les mêmes que celles du mouvement non troublé. Quant à celles-ci, on peut les différentier en regardant seulement comme variables les éléments des orbites et les différentielles du premier ordre des coordonnées, pourvu qu'au lieu de leurs différentielles du deuxième ordre, on ne substitue que la partie de leurs valeurs due aux forces perturbatrices. Ces résultats sont des

conséquences du mouvement elliptique ou se démontrent par des considérations purement analytiques.

Cela posé, on déduit des équations du mouvement elliptique, les sept équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{xdy - ydx}{dt}, & C' &= \frac{x dz - z dx}{dt}, & C'' &= \frac{y dz - z dy}{dt}, \\ 0 &= f' + x \left(\frac{\mu}{r} - \frac{dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) + \frac{y dy}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{z dz}{dt^2} \frac{dx}{dt}, \\ 0 &= f' + y \left(\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} \right) + \frac{x dx}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{z dz}{dt^2} \frac{dy}{dt}, \\ 0 &= f'' + z \left(\frac{\mu}{r} - \frac{dy^2 + dx^2}{dt^2} \right) + \frac{x dx}{dt^2} \frac{dz}{dt} + \frac{y dy}{dt^2} \frac{dz}{dt}, \\ 0 &= \frac{\mu}{a} - \frac{2\mu}{r} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}. \end{aligned} \right\} (p)$$

En différentiant les trois premières et remplaçant les quantités d^2x , d^2y , d^2z par leurs valeurs dues aux forces perturbatrices

$$- dt^2 \frac{dR}{dx}, \quad - dt^2 \frac{dR}{dy}, \quad - dt^2 \frac{dR}{dz},$$

on a trois équations différentielles qui servent à déterminer les valeurs variables de c , c' , c'' , et par suite le paramètre de l'ellipse variable, son inclinaison et la position du nœud, d'après les équations

$$\text{tang } \varphi = \sqrt{\frac{c'^2 + c''^2}{c^2}}, \quad \text{tang } \theta = \frac{c''}{c'}, \quad \mu a(1 - e^2) = c^2 + c'^2 + c''^2,$$

φ étant l'inclinaison de l'orbite sur le plan xy , θ la longitude de son nœud.

En opérant de la même manière sur les trois équations suivantes, on obtiendra trois équations qui serviront à déterminer les valeurs variables de f , f' , f'' , et par conséquent, la longitude du périhélie et l'excentricité au moyen des équations

$$\text{tang } \varpi = \frac{f'}{f}, \quad \mu e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2};$$

quant à la dernière des équations (*p*), elle donne par la même méthode,

$$d\frac{\mu}{a} = 2dR.$$

Si l'on désigne par ζ le moyen mouvement, on aura, en vertu de la relation $n = a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\mu}$,

$$\zeta = \frac{3}{\mu} \iint a n \, dt \, dR.$$

14. Nous avons fait connaître, n° 3, le moyen de développer *R* en série de sinus et cosinus de la forme

$$m'K \cos (i'n't - int + A);$$

A et *K* étant fonctions des éléments des orbites, il faut y remplacer $i'n't$ par $i' \int n' dt$ ou par $i'\zeta'$, et de même int par $i\zeta$; mais si l'on néglige les carrés des masses perturbatrices, on devra supposer $\zeta = nt$ et $\zeta' = n't$; on trouvera de la même manière en ayant seulement égard au terme précédent de *R*,

$$\frac{1}{a} = \frac{2im'nk}{\mu(i'n' - in)} \cos (i'n't - int + A),$$

$$\zeta = - \frac{3im'an^2k}{\mu(i'n' - in)^2} \sin (i'n't - int + A).$$

Ces résultats nous font voir que le grand axe et le moyen mouvement ne contiennent que des inégalités périodiques à moins que l'on n'ait $i'n' - in = 0$, auquel cas les moyens mouvements seraient commensurables, ce qui n'a pas lieu dans le système planétaire.

Cependant si les moyens mouvements approchaient beaucoup d'être commensurables, à cause de la petitesse du diviseur $(i'n' - in)^2$, il y aurait dans ζ et ζ' des inégalités qui croissant avec beaucoup de lenteur, pourraient faire croire que les moyens mouvements des deux corps *m* et *m'* ne sont pas uniformes. C'est

ce qui a lieu pour Jupiter et Saturne, pour lesquels deux fois le moyen mouvement de Jupiter égale à peu près cinq fois celui de Saturne, en sorte que $5n' - 2n$ n'est pas égal à $\frac{n}{74}$.

La petitesse de ce diviseur rend très sensible le terme correspondant de ζ , quoique du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Il existe entre les inégalités de ce genre que l'action de m' produit dans le moyen mouvement de m et celles qui sont produites par m dans le moyen mouvement de m' , la relation très simple

$$\zeta' = - \frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}} \zeta;$$

relation que l'on peut très simplement déduire de l'équation du principe des forces vives citée n° 13.

Il en résulte que si les deux corps se meuvent dans le même sens, le moyen mouvement de l'un est accéléré et celui de l'autre retardé; et comme le rapport de cette accélération et de ce retardement pour Jupiter et Saturne diffère peu de celui que la comparaison des observations anciennes aux modernes a fait connaître à Halley, il s'ensuit qu'il y a pour Jupiter et Saturne une inégalité d'une fort longue période et dépendante de leur action mutuelle.

Les grandes inégalités dont nous venons de parler produisent des termes sensibles dépendants du carré des masses perturbatrices. Pour les obtenir, il n'y a qu'à augmenter dans les valeurs de ζ et ζ' , nt et $n't$ de leurs inégalités séculaires, et développer.

15. Occupons-nous maintenant des variations des excentricités et des périhélies des orbites. Considérons pour cela les valeurs de df , df' , df'' , dont nous avons indiqué plus haut la formation. En prenant pour coordonnées la projection du rayon vecteur sur le plan xy , l'angle qu'il fait avec l'axe des x , et enfin la latitude de m au-dessus du plan xy , il sera facile d'exprimer df , df' , df'' , au moyen de ces coordonnées, et négligeant ensuite les

carrés et les produits des inclinaisons des orbites dans leurs expressions générales, on trouvera

$$df = - (dr \sin \nu + 2r d\nu \cos \nu) \frac{dR}{d\nu} - r^2 d\nu \sin \nu \frac{dR}{dr},$$

$$df' = (dr \cos \nu - 2r d\nu \sin \nu) \frac{dR}{d\nu} + r^2 d\nu \cos \nu \frac{dR}{dr}.$$

Il est à remarquer que si l'on prend pour plan fixe celui de l'orbite primitive de m , la longitude I du périhélie ne différera de la longitude de ce point rapportée au plan de l'orbite que par les quantités de l'ordre des carrés des forces perturbatrices multipliées par le carré de l'inclinaison respective des orbites; en sorte que si on la désigne par ϖ , on aura

$$\varpi = I, \quad \text{et par conséquent} \quad \text{tang } \varpi = \frac{f'}{f}.$$

D'un autre côté l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe étant alors de l'ordre des forces perturbatrices, c' et c'' se trouvent du même ordre, et par conséquent aussi f'' , en vertu de l'équation $f'' = \frac{f'c' - fc''}{c}$. Donc

$$\mu e = \sqrt{f'^2 + f''^2 + f'^2} \quad \text{devient} \quad \mu e = \sqrt{f'^2 + f'^2};$$

d'où résulte

$$\mu e \sin \varpi = f', \quad \mu e \cos \varpi = f.$$

Ces équations détermineront la position du périhélie et l'excentricité.

Si dans les expressions de df , df' , on substitue les valeurs de r , dr et $r^2 d\nu$, qui se rapportent au mouvement elliptique, on trouvera facilement

$$ed\varpi = - \frac{andt}{\mu \sqrt{1-e^2}} \sin(\nu - \varpi) [2 + e \cos^2(\nu - \varpi)] \frac{dR}{d\nu} \\ + \frac{a^2 ndt \sqrt{1-e^2}}{\mu} \cos(\nu - \varpi) \frac{dR}{dr},$$

$$ede = \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{\mu} \frac{dR}{dv} - \frac{a(1-e^2)}{\mu} dR.$$

On parviendrait encore à cette dernière formule au moyen de l'équation $\frac{de}{dt} = -\frac{dR}{dv}$, en faisant attention que $C = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$.

16. Nous avons vu n° 14 que les variations du grand axe et du moyen mouvement ne contiennent que des inégalités périodiques. Il n'en est pas ainsi des variations des excentricités et des inclinaisons des orbites ; leurs différentielles renferment des termes qui, s'ils étaient rigoureusement constants, produiraient, par l'intégration, des termes proportionnels au temps, qui rendraient à la longue les orbites fort excentriques et très inclinées ; mais ces termes dépendent des éléments des orbites et varient très lentement. Il en résulte des inégalités considérables nommées *inégalités séculaires*.

Pour les déterminer, reprenons l'expression de df , qui devient après y avoir substitué les valeurs de r , dr et dv , relatives au mouvement elliptique,

$$df = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}} \left[2 \cos v + \frac{3}{2} e \cos \varpi + \frac{1}{2} e \cos(2v - \varpi) \right] \frac{dR}{dv} \\ - a^2 ndt \sqrt{1-e^2} \sin v \left(\frac{dR}{dr} \right).$$

On peut développer cette expression ainsi que celle de df' , et dans le développement négliger les carrés des excentricités et des inclinaisons, et conserver parmi les termes dépendants des excentricités ceux qui sont constants. Si l'on pose alors

$$e \sin \varpi = h, \quad e \cos \varpi = l,$$

il en résulte

$$f = \mu l = l, \quad f' = \mu h = h.$$

En prenant M pour unité et négligeant m , on trouvera, en sui-

vant cette marche et en ayant égard aux notations du n° 9,

$$\frac{dh}{dt} = [(0,1) + (02) + (03) + \dots] l - [01] l' - [02] l'' + \dots (Y),$$

$$\frac{dl}{dt} = - [(0,1) + (02) + (03) + \dots] h + [01] h' + [02] h'' + \dots (X);$$

(Y) et (X) désignant la somme des termes périodiques.

Il est à remarquer que l'intégration de la partie périodique prise à part, fait connaître les inégalités périodiques des éléments, tandis que la partie non périodique donne les inégalités séculaires, et n'est autre chose que le système des équations n° 8.

17. Nous avons vu n° 14 comment le rapport des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne peut introduire des inégalités sensibles dans leurs moyens mouvements; la même cause en produit également de sensibles dans les excentricités et dans la position des périhélies; on peut aisément les déterminer en partant de l'équation

$$ede = \frac{andt \sqrt{1-e^2}}{\mu} \frac{dR}{dv} - a \frac{(1-e^2)}{\mu} dR,$$

dans laquelle on négligera e^2 .

On prendra dans R le terme qui dépend du rapport des moyens mouvements; on calculera les valeurs correspondantes de $\frac{dR}{dv}$ et de dR ; on les substituera dans l'équation précédente, et il en résultera, dans la valeur de e , un terme qui contiendra en dénominateur $i'n' - in$, et non le carré de cette quantité, comme cela arrive pour les moyens mouvements; cependant cette inégalité, qui affecte l'excentricité, pourra être plus considérable que celle qui correspond au moyen mouvement, parce que l'exposant de e dans son coefficient est inférieur d'une unité.

Cette inégalité une fois connue, on trouvera celle qui affecte le périhélie par la considération de l'équation

$$df = \mu de \cos \varpi - \mu e d\varpi \sin \varpi.$$

On trouvera de même que le terme de cette inégalité ne contient que $i'n' - in$ en dénominateur ; mais que l'exposant de e est encore inférieur d'une unité.

Ces inégalités sont liées à celles des moyens mouvements de la manière suivante.

La variation de l'excentricité est

$$\frac{1}{3in} \frac{d^2\zeta}{dedt} ; \quad \text{celle du périhélie} \quad \frac{i'n' - in}{3ine} \frac{d\zeta}{de}.$$

Les variations correspondantes pour l'autre planète sont

$$-\frac{1}{3i'n'} \frac{d^2\zeta'}{de'dt}, \quad -\frac{(i'n' - in)}{3i'n'e'} \frac{d\zeta'}{de'},$$

et dans ces dernières formules on peut facilement exprimer ζ' en fonction de ζ .

18. Occupons-nous actuellement des variations des nœuds et des inclinaisons des orbites. Reprenons pour cela les équations

$$\begin{aligned} dc &= dt \left(y \frac{dR}{dx} - x \frac{dR}{dy} \right), \\ dc' &= dt \left(z \frac{dR}{dx} - x \frac{dR}{dz} \right), \\ dc'' &= dt \left(z \frac{dR}{dy} - y \frac{dR}{dz} \right). \end{aligned}$$

En supposant que l'on ne considère que les actions de deux corps m et m' , on peut facilement exprimer les seconds membres de ces équations en fonction de leurs coordonnées, puis en posant

$$p = \frac{c''}{c}, \quad q = \frac{c'}{c},$$

on détermine les inclinaisons et la position des nœuds au moyen des formules

$$\text{tang } \varphi = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \text{tang } \theta = \frac{p}{q},$$

A l'aide de ces équations et des suivantes

$$z = qy - px, \quad z' = qy' - p'x',$$

on peut trouver les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ et de $\frac{dq}{dt}$ en fonction de x', y', z', x, y, z ; alors si l'on suppose

$$x = r \cos \nu, \quad y = r \sin \nu, \quad x' = r' \cos \nu', \quad y' = r' \sin \nu',$$

r étant égal à a , ν à $nt + \epsilon$, r' à a' , ν' à $n't + \epsilon'$.

Quand on néglige les carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ se trouvent exprimées en séries de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps.

Si dans ces séries on suppose $i = -1$, les termes correspondants sont constants, tous les autres sont périodiques; en sorte que l'on obtient pour déterminer ces quantités, des équations qui se traitent comme celles du n° 16.

19. Enfin, en partant des équations

$$\tan \phi = \sqrt{\frac{c'^2 + c''^2}{c}} \quad \tan \theta = \frac{c''}{c},$$

on pourra trouver les inégalités dépendantes du rapport presque commensurable des moyens mouvements.

Si l'on pose $p = \tan \phi \sin \theta$ et $q = \tan \phi \cos \theta$, les inégalités de ces quantités seront

$$p = \frac{gm'kan}{\mu(i'n' - in)} (\tan \phi')^{g-1} \sin [i'n't - int + A - (g-1)\theta'],$$

$$q = \frac{gm'kan}{\mu(i'n' - in)} (\tan \phi')^{g-1} \sin [i'n't - int + A - (g-1)\theta'].$$

Quant à celle de la latitude, elle s'en déduira par la formule

$$s = q \sin \nu - p \cos \nu.$$

Ces inégalités, bien qu'elles ne contiennent en diviseur que la

première puissance de $i'n' - in$, peuvent être plus sensibles que celles qui affectent les moyens mouvements, parce que leurs coefficients sont d'un ordre inférieur par rapport aux inclinaisons.

Quand on aura déterminé par les méthodes exposées précédemment les éléments des orbites des planètes, on les substituera dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, et l'on obtiendra ainsi les trois variables à l'aide desquelles les astronomes fixent la position des corps célestes.

20. Dans toutes les recherches précédentes, nous avons généralement négligé les termes de l'ordre du carré des masses perturbatrices. En ayant égard à ces quantités, M. Poisson est parvenu, à l'aide d'une savante analyse insérée dans le XV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, à démontrer plusieurs théorèmes très importants sur les moyens mouvements et la stabilité du système planétaire; dans l'exposition de ces résultats nous admettons les valeurs des variations δr et δv du rayon vecteur, déduites, par M. Poisson, des formules du mouvement elliptique.

21. Lagrange a le premier démontré l'invariabilité du moyen mouvement quand on fait abstraction des inégalités périodiques, quelles que soient les excentricités et les inclinaisons, quand on s'arrête à la première puissance des masses perturbatrices, en faisant usage de la formule

$$\zeta = \frac{3}{\mu} \iint f \sin i dt dR,$$

comme nous l'avons exposé dans le n^o 14.

Lorsqu'on veut déterminer les inégalités séculaires de ce moyen mouvement, dépendantes du carré des masses, on ne doit plus considérer an comme constant; en effet, en vertu de l'équation

$$an = \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{1}{a}} \quad \text{et de} \quad d\frac{1}{a} = \frac{2}{\mu} dR,$$

on obtient

$$an = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \int dR,$$

et, par conséquent,

$$\zeta = \frac{3\sqrt{a}}{\mu\sqrt{\mu}} \iint dt dR \delta R,$$

et en considérant les termes dépendants d'un argument quelconque $i'n't - int$ réduits à un seul, on reconnaît aisément qu'il en résulte dans ζ une inégalité périodique dépendante de l'argument $2i'n't - 2int$.

Il est donc inutile de faire varier an dans la recherche des inégalités séculaires de ζ .

22. Il faut donc rechercher seulement les termes non périodiques de l'ordre du carré des masses qui se trouvent dans dR .

Ceux qui proviennent des coordonnées de la planète troublée, sont donnés par la formule

$$\delta R = \frac{dR}{dr} \delta r + \frac{dR}{dv} \delta v + \frac{dR}{dz} \delta z.$$

Or, si l'on conçoit les quantités $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dv}$, $\frac{dR}{dz}$, δr , δv et δz , développées en séries de cosinus et sinus des angles nt et $n't$, il est certain qu'il n'y aura de termes non périodiques dans δR que ceux qui proviennent de la combinaison des termes dépendants du même argument.

Ainsi, en représentant par

$$m'B \cos(i'n't - int + h),$$

et

$$m'B' \cos(i'n't - int + h'),$$

les termes de $\frac{dR}{dr}$ et δr dépendants du même argument, on trouvera facilement, en ayant soin de différentier par rapport à t , tous les termes qui proviennent de δr , et seulement le terme nt dans ceux qui proviennent de $\frac{dR}{dr}$, que le terme non périodique de

$d\delta R$ est

$$i'n'dtm'^2 \frac{BB'}{2} \sin(h' - h);$$

un pareil terme donnerait dans ζ un terme proportionnel au carré du temps; mais la somme de tous ces termes non périodiques et en nombre infini est nulle.

Les valeurs de δr , δv et δz que nous avons indiquées contiennent le temps t hors des signes sinus et cosinus; on peut les faire disparaître en regardant les éléments de l'orbite comme variables; mais alors le terme de R répondant à i et i' égaux à zéro, est une fonction de ces éléments; si on le différencie, on obtient des termes de l'ordre du carré des masses et indépendants de nt et $n't$; mais cette différentielle est nulle, comme on le démontrera plus tard. Il est donc inutile de considérer cette partie de dR .

23. Il est bon de remarquer pour la simplification du calcul des termes non périodiques de $d\delta R$, que d'après la nature du développement de R , ces termes seront de la forme

$$in'dt' \frac{m^2}{2} e^{g+l} e^{g'+l'} \lambda^{2g''+2l''} ce' \sin[(g-l)\varpi + (g'-l')\varpi' + 2(g''-l'')\theta],$$

en prenant pour plan xy celui de l'orbite de m à une époque donnée, λ étant l'inclinaison de l'orbite de m' sur celle de m , θ la longitude du nœud de m' comptée sur le plan de l'orbite de m , avec la condition

$$g + g' + g'' = l + l' + l'',$$

d'où résulte qu'aucun des termes non périodiques n'est de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et enfin que ceux du deuxième ordre, auxquels nous bornerons l'approximation, contiennent tous pour facteur $ee' \sin(\varpi - \varpi')$, et par conséquent $\frac{dR}{dz} dz$ doit être rejeté, puisqu'il contient λ^2 comme facteur et ne produit pas de termes non périodiques du deuxième ordre; car il est encore à remarquer que tous les termes qui ont pour facteur

une seule des quantités e, e', λ disparaissent. Cela posé, voici la marche à suivre pour calculer les termes non périodiques contenus dans $\frac{dR}{dz} \delta r + \frac{dR}{dv} \delta v$.

On prend le développement de R , en ayant seulement égard aux termes indépendants des excentricités, à ceux qui contiennent comme facteur e, e' et ee' .

A l'aide de ce développement, on calcule facilement la valeur de $\frac{dR}{dv}$ et la partie de δv qui provient des deux derniers termes de la formule (γ) n° 1, et en combinant entre eux les termes de ces deux développements qui dépendent du même argument, et donnent pour facteur $ee' \sin(\varpi - \varpi')$, on obtient la partie non périodique de $d\delta R$.

Pour avoir celle qui dépend de δr , remarquons qu'en vertu du premier terme de la formule (γ) que nous venons de citer, on a

$$\frac{dR}{dv} \delta v = \frac{dR}{dv} \frac{dr}{dt} \frac{\delta r}{a'n} + 2r \frac{dR}{dv} \frac{d\delta r}{a^2 n dt} = \left(\frac{dR}{dr} \frac{dr}{dt} - \frac{2dr}{dt} \frac{dR}{dv} \right) \frac{\delta r}{a^2 n} + \frac{2dr}{a^2 n dt} \frac{dR}{dv} \delta r.$$

Le dernier terme étant une différentielle complète, ne donne pas de terme périodique et doit être rejeté; enfin en ajoutant à l'expression précédente $\frac{dR}{dr} \delta r$, on obtient

$$\left(\frac{dR}{dr} + \frac{dR}{dv} \frac{dr}{a^2 n dt} - \frac{d \cdot r}{a^2 n dt} \frac{dR}{dv} \right) \delta r.$$

Le développement de δr est connu; on calcule celui de son coefficient, et l'on combine comme précédemment les termes de ces deux développements; les termes non périodiques que l'on trouve sont ajoutés avec ceux que l'on connaît déjà; on a ainsi

$$\delta' \delta R = a n^2 n' dt m^2 e e' \sin(\varpi' - \varpi) \Sigma U^i,$$

U^i étant une fonction assez compliquée des coefficients de R , qui

se réduit à zéro quand on y remplace les coefficients de termes en e et en ee' dans l'expression de R par leurs valeurs en fonction de ceux des termes en e' et des termes indépendants de e .

Ainsi les variations des coordonnées de la planète troublée n'introduisent pas le terme non périodique de l'ordre du carré des masses; un calcul semblable ferait voir qu'il en est de même de celles de la planète perturbatrice.

24. Mais nous allons démontrer que si les variations de la planète troublée ne donnent pas de termes non périodiques, celles de la planète perturbatrice n'en donneront pas non plus, en ayant égard à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons; comme les premières contiennent le facteur m'^2 et les autres mm' , cela revient à démontrer que s'il n'y a pas de termes contenant m'^2 , il n'y en aura pas non plus qui contiennent mm' .

On y parvient au moyen du principe des forces vives, que l'on peut écrire ainsi :

$$\begin{aligned} m \left(1 - \frac{m}{M+m+m'} \right) \int d'R + m' \left(1 - \frac{m}{M+m+m'} \right) \int d''R' &= \frac{m^2}{M+m+m'} \frac{1}{r} \\ &+ \frac{m'^2}{M+m+m'} \frac{1}{r'} - \frac{mm' (dx dx' + dy dy' + dz dz')}{(M+m+m') dt} \\ &+ \frac{mm'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \text{const.} \end{aligned}$$

Cette équation doit subsister en ayant seulement égard aux termes non périodiques; si $d'R$ et $d''R'$ en contiennent, ils seront de la forme

$$mm' P dt, \quad mm' P' dt,$$

et le premier membre se réduit, en négligeant les termes du quatrième ordre par rapport aux masses, à

$$m^2 m' f P dt + m'^2 m f P' dt.$$

La partie non périodique de $\frac{1}{r}$, réduite en série des cosinus mul-

tiples de $nt + z - \varpi$ étant $\frac{1}{a}$, il est visible qu'en vertu de l'équation

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\mu} \int d'R = \frac{2mm'}{\mu} \int P dt,$$

le premier terme du deuxième membre disparaît; il en est de même du deuxième, comme étant du cinquième ordre par rapport aux masses.

Quant à

$$dx dx' + dy dy' + dz dz',$$

elle ne donne de termes non périodiques qu'en ayant égard aux variations des coordonnées; par conséquent les termes de cette espèce contenus dans le troisième terme sont de la forme

$$mm' (Qm + Q'm').$$

Enfin le radical du quatrième terme contient des termes non périodiques provenant, les uns des valeurs elliptiques des coordonnées, et les autres de leurs variations, en sorte que l'on peut les représenter ainsi :

$$mm'L + m^2m'S + m'^2mS'.$$

On a donc l'équation

$$m^2m'fPdt + m'^2mfP'dt = mm' (Qm + Q'm') \\ + mm' (Sm + S'm') + mm'L + \text{const.}$$

Q, Q', S, S', L , sont les fonctions des éléments des orbites. En différentiant cette équation, et négligeant les termes du quatrième ordre, il vient

$$mPdt + m'P'dt = dL.$$

Or on peut prouver que $dL = 0$; il suffit pour cela de démontrer que le premier terme de R , qui est

$$\frac{m(xx' + yy' + zz')}{r^3},$$

ne renferme pas de termes non périodiques quand on y substitue les valeurs elliptiques des coordonnées, savoir :

$$\frac{x'}{r'^3} = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad \frac{y'}{r'^3} = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad \frac{z'}{r'^3} = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 z'}{dt^2};$$

et c'est ce qui résulte de la forme que prend cette expression. Ainsi le radical du quatrième terme renferme donc les mêmes termes non périodiques que R , quand on a seulement égard aux coordonnées du mouvement elliptique; mais la différentielle de cette partie est nulle pour R . Donc

$$dL = 0, \quad \text{et par suite} \quad P = 0, \quad P' = 0.$$

Le théorème que nous avons en vue se trouve donc démontré, et peut être étendu de la même manière à un nombre quelconque de planètes.

Enfin, il est bon d'observer que $d'R$ ne peut contenir aucun terme non périodique indépendant de m provenant des variations de deux planètes perturbatrices m' et m'' , et contenant $m'm''$ comme facteur; car un pareil terme serait dû aux variations des coordonnées des deux planètes provenant de leur action réciproque : cette partie étant indépendante du moyen mouvement nt ne saurait le faire disparaître; il faudrait donc considérer la partie de R qui en est indépendante, et alors la différentielle $d'R$ serait nulle, puisqu'on la prend par rapport à nt .

25. Il résulte de ce qui précède que le moyen mouvement ne contient aucune inégalité séculaire de l'ordre du carré des masses et du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et comme ces quantités, si elles existent, sont d'un ordre pair, elles sont au moins du quatrième ordre; mais nous allons démontrer que quelque loin que l'on pousse l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, les variations des coordonnées de la planète troublée n'introduisent aucune inégalité séculaire, et

cela aura lieu également pour les variations des coordonnées des planètes perturbatrices.

D'abord la variation du moyen mouvement ne saurait en introduire. En effet, on a

$$\delta R = \frac{d'R}{d\zeta} \delta \zeta, \quad \delta \zeta = \frac{3}{\mu} \iint a n d t d'R,$$

$$\delta R = \frac{3 d'R}{\mu d\zeta} \iint a n d t d'R.$$

Dans cette formule an est constant.

$$\zeta = nt \frac{d'R}{d\zeta} = \frac{d'R}{ndt},$$

d'où

$$\delta R = \frac{3a}{\mu} \frac{d'R}{dt} \iint d t d'R.$$

Au moyen de cette formule on démontre aisément que les termes non périodiques qui résultent d'un argument quelconque $i'n't - int$ sont nuls, soit que l'on suppose tous les termes de R qui en dépendent réduits à un seul et de la forme $A \cos(i'n't - int + k)$, ou qu'ils ne soient pas réduits à un seul, et que l'on ait

$$R = A \cos(i'n't - int + k) + B \cos(i'n't - int + h).$$

26. Voyons actuellement si δz , δr et δv introduisent des termes non périodiques.

Considérons d'abord la variation δz , on a

$$\delta R = \frac{dR}{dz} \delta z;$$

d'où

$$\delta R = \frac{dR}{dz} \delta z = \frac{P f Q dt - Q \int P dt}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}},$$

en faisant pour abrégér

$$P = \frac{dR}{dz} r \cos \varphi, \quad Q = \frac{dR}{dz} r \sin \varphi,$$

on peut développer P et Q en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples du temps; soit $A \cos(i'n't - int + k)$ un terme de P dépendant de l'argument $i'n't - int$; soit $B \cos(i'n't - int + h)$ le terme correspondant de Q, la valeur précédente de δR devient

$$\delta R = \frac{AB}{\mu a \sqrt{(1-e^2)}} [\cos(i'n't - int + k) f \cos(i'n't - int + h) - \cos(i'n't - int + h) f \cos(i'n't - int + k)].$$

Pour avoir $d'\delta R$ il faut différentier par rapport à tous les termes qui proviennent de δz et seulement les termes en nt qui proviennent de $\frac{dR}{dz}$; ainsi, sous le signe $\int$ tous les termes doivent être considérés comme variables; au dehors, au contraire, il n'y aura que $-int$; en ayant égard à cette observation on trouve que $d'\delta R$ ne contient pas de termes non périodiques.

Si l'on substitue les valeurs de δr et δv dans $\delta R = \frac{dR}{dr} \delta r + \frac{dR}{dv} \delta v$, on trouvera plusieurs parties semblables à la valeur de $\frac{dR}{dz} \delta z$, et sur lesquelles on pourra répéter tout ce que nous venons de dire.

Nous ne parlons pas des termes dépendants de $\delta \zeta$; car nous avons vu qu'ils n'introduisent pas de termes non périodiques dans le moyen mouvement.

Si les quantités P et Q étaient constantes, on aurait

$$\int P dt = l + Pt, \quad \int Q dt = l' + Qt.$$

Ces termes disparaîtraient de $P \int Q dt - Q \int P dt$, et par conséquent de δR qui se compose de plusieurs parties semblables; or les termes Pt et Qt proviennent des inégalités séculaires des éléments de la planète; donc la partie de R qui se réduit à une fonction des éléments elliptiques ne varie pas quand on augmente chacun des éléments de la planète m de son inégalité séculaire.

Nous avons démontré que le moyen mouvement ne peut conte-

nir d'inégalités séculaires provenant de la variation de an , que la variation $d'R$ provenant de $\delta\zeta$, et de δr , δv et δz n'en introduit pas davantage, et qu'il en est de même des variations des coordonnées des planètes perturbatrices; le moyen mouvement est donc uniforme, abstraction faite des inégalités périodiques, et le grand axe qui est déterminé par l'équation $\frac{1}{a} = \frac{2}{\kappa} \int d'R$ est constant.

27. Nous avons vu, numéros 10 et 12, que les excentricités et les inclinaisons, en ayant égard à leurs inégalités séculaires du premier ordre par rapport aux masses, restent toujours très petites; M. Poisson a démontré que le même théorème est encore vrai eu égard aux inégalités séculaires de l'ordre du carré des masses.

Il s'est servi pour cela du principe des aires, que l'on peut exprimer par la formule

$$m(M+m')(ydx - xdy) + m'(M+m)(y'dx' - x'dy') \\ = mm'(ydx' + y'dx - xdy' - x'dy) + \text{const.}$$

En désignant par α et α' les inclinaisons du plan de l'orbite de m et m' sur le plan xy , et posant

$$M+m = n^2 a^3, \quad M+m' = n'^2 a'^3,$$

il vient

$$ma^2 a'^3 nn'^3 \sqrt{1-e^2} \cos \alpha + m' a'^4 n'^3 n^2 \sqrt{1-e'^2} \cos \alpha' \\ = mm' \frac{(ydx' + y'dx - xdy' - x'dy)}{dt} + C.$$

Il est aisé de voir que le premier terme du second membre ne contient pas de termes non périodiques d'un ordre inférieur par rapport aux masses; il est donc constant, si l'on néglige les termes du quatrième ordre; de même si l'on substitue les valeurs variables des éléments dans le premier membre, il n'en résultera pas de termes non périodiques d'un ordre inférieur au troisième, et ces termes seront donc encore constants, et par conséquent on aura

entre les inégalités séculaires de e, e', α, α' , l'équation

$$ma^2a'^3nn'^2 \sqrt{1-e^2} \cos \alpha + m'a^3a'^2n^2n' \sqrt{1-e'^2} \cos \alpha' = C.$$

Cette équation est exacte jusqu'aux quantités du quatrième ordre par rapport aux masses; si on borne l'approximation aux quantités du troisième ordre, on peut regarder $aa'nn'$ comme constants et par conséquent on a

$$ma'n' \sqrt{1-e^2} \cos \alpha + m'an \sqrt{1-e'^2} \cos \alpha' = C.$$

Relativement au plan des yz et des xz on aurait des équations analogues, et la combinaison de ces trois équations conduit à la relation

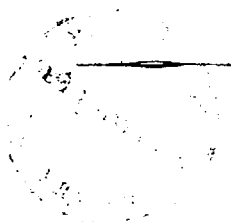
$$m^2a'^2n^2e^2 + m'^2a'^2n^2e'^2 + 2mm'aa'nn' \frac{e^2 \sqrt{1-e'^2} \cos \delta}{1 + \sqrt{1-e^2}} \\ + 2mm'aa'nn' \frac{e'^2 \cos \delta}{1 + \sqrt{1-e'^2}} + 2mm'aa'nn' \frac{\sin^2 \delta}{1 + \cos \delta} = K,$$

δ désignant l'inclinaison respective du plan des orbites.

Si les excentricités sont très petites à une époque donnée, ainsi que les inclinaisons, la constante K sera très petite, et par suite les excentricités et l'inclinaison resteront très petites; en effet, si les planètes ne circulent pas dans le même sens, on pourra toujours regarder n et n' comme positifs, pourvu que δ soit alors compris entre 100° et 200° ; quand ils circuleront dans le même sens, δ sera $< 100^\circ$.

Si donc à une époque donnée les planètes circulent dans le même sens et dans des orbites peu inclinées, δ est $< 100^\circ$. Pour qu'il puisse devenir plus grand, il faudrait auparavant que $\sin \delta$ devint presque égal à l'unité; mais alors le dernier terme ne serait plus très petit: δ ne peut donc pas même atteindre un angle droit; les termes du premier membre resteront donc toujours positifs; d'où résulte que e, e' et δ resteront toujours très petits. Cette démonstration étant

applicable à un nombre quelconque de planètes circulant dans le même sens, il en faut conclure qu'en ayant même égard aux inégalités séculaires de l'ordre du carré des masses, les excentricités et les inclinaisons resteront très petites.



Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,

13 septembre 1839,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

Pour l'Inspecteur général des études, chargé de l'administration
de l'Académie de Paris, absent par congé,

l'Inspecteur de l'Académie délégué,

CAYX.