THÈSE

DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

SUR LA

DISTRIBUTION DE LA CHALEUR

DANS UNE COUCHE SPHÉRIQUE HOMOGÈNE,

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

Par F. LAROQUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

PARIS,

DE L'IMPRIMERIE D'HIPPOLYTE TILLIARD,

RUE SAINT-HYACYNTHE-SAINT-MICHEL, 30.

1838.

PROFESSEURS.

MM. THÉNARD, Doyen.
LACROIX.
BIOT.
POISSON.
FRANCOEUR.
BEUDANT.
GEOFFROY-ST-HILAIRE.
MIRBEL.
MM. DE BLAINVILLE.
POUILLET.
CONSTANT PRÉVOST.
DUMAS.
AUG. SAINT-HILAIRE.
LIBRI.
PONCELET.

PROFESSEURS SUPPLÉANTS.

MM. LEFEBURE DE FOURCY.
ISIDORE GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.

THÈSE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

SUR

LA DISTRIBUTION DE LA CHALEUR

DANS UNE COUCHE SPHERIQUE HOMOGÈNE.

Nous nous proposons dans cette thèse d'étudier le mode de distribution de la chaleur dans une couche sphérique homogène et dont tous les points également distants du centre possèdent à chaque instant une même température.

Nous admettrons, comme résultat de l'expérience et de l'analogie, que la communication de la chaleur dans les corps se fait de proche en proche par rayonnement moléculaire ; ou du moins, en vertu de ce rayonnement par un échange de chaleur entre des parties très voisines des corps. Ces parties seront supposées avoir des dimensions insensibles et renfermer néanmoins des nombres immenses de molécules.

Il est incontestablement établi en physique, surtout par les belles expériences de M. Melloni, que tous les corps sont plus ou moins diathermanes. Il en est, les métaux par exemple, dans lesquels la diathermanéité est insensible. Nous supposerons la couche formée avec l'un de ces corps exceptionnels. L'existence de l'athermanéité sera exprimée en disant que le rayonnement moléculaire ne s'étend qu'à une distance insensible.

Les divers corps, sous le même volume, n'exigent pas la même quantité de chaleur, pour éprouver, sans changer d'état, la même variation de température. Nous appellerons chaleur spécifique d'un corps, la quantité de chaleur qu'exige l'unité de volume de ce corps pour élever la température de 1 degré. Cette température sera supposée donnée par un thermomètre à air ayant une masse insensible, eu égard à celle des parties du corps avec lesquelles il doit être mis en contact.

Chacune des deux surfaces de la couche étant partout dans le même état, et la température extérieure restant constante, au bout du temps t, la température inconnue d'un point quelconque de la couche ne sera fonction que de deux variables, la distance au centre et le temps, lorsqu'en outre la température initiale ne sera fonction que de la distance au centre.

Considérons, à la surface extérieure de la couche, une portion très petite que nous prendrons pour la base d'un cône ayant son sommet au centre de la couche. Vu l'homogénéité du corps et la nature de la fonction qui doit exprimer la température d'un point quelconque, il nous suffira d'étudier le mouvement de la chaleur dans ce cône suivant son axe, pour connaître le mode de distribution de la chaleur dans la couche à laquelle nous donnons une épaisseur de $h'-h$.

Cela posé, partageons le cône en tranches normales à l'axe et d'une épaisseur assez petite pour que tous les points de chacune d'elles puissent être considérés comme ayant à chaque instant la même température. Soient $u, \omega, \varepsilon, \delta$, la température, l'aire des deux bases, l'épaisseur, et la densité d'une tranche située à la distance r du sommet ; les mêmes lettres u, ω, ε accentuées seront utilisées pour exprimer les mêmes éléments des autres tranches. Lorsque u variera, les autres éléments $\omega, \varepsilon, \delta$, varieront aussi. Nous ferons abstraction de cette variation. La tranche $\omega\varepsilon\delta$ rayonne, dans le sens de l'axe du cône, une certaine quantité de chaleur dont une partie est absorbée par la tranche très voisine $\omega'\varepsilon'\delta'$ située à une distance $r+s$ de l'origine ; elle absorbe aussi une portion de la chaleur émanée de cette dernière. En supposant les dimensions de ω extrêmement grandes par rapport à l'étendue sensible du rayonnement moléculaire, le gain provenant de cet échange fait dans l'instant dt

par la tranche $\omega\varepsilon\delta$ pourra être supposé proportionnel à sa surface ω. Ce gain est aussi proportionnel aux épaisseurs et aux densités des deux tranches ; et comme il est nul, lorsque les températures sont égales ; comme de plus il dépend de la distance des deux tranches et s'anéantit nécessairement lorsque cette distance acquiert une valeur sensible, on pourra le représenter par le produit

$$\omega\varepsilon\varepsilon'\delta^2 P(u'-u)\,dt.$$

dans lequel le coefficient P est positif, et n'a de valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de s; en même temps, et par le même échange, le gain fait par la tranche $\omega'\varepsilon'\delta$ pourra être représenté par :

$$\omega'\varepsilon\varepsilon'\delta^2 P'(u-u').$$

Or, on doit retrouver l'expression précédente par la simple permutation des lettres relatives aux deux tranches, ce qui exige que l'on ait :

$$\omega P = \omega' P'.$$

Cette condition sera satisfaite, et chacune des parties qui composent l'équation variera proportionnellement à ω et ω', si chacune d'elles est exprimée par le produit :

$$\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\varphi(u,u',s).$$

Dès lors, le gain de chaleur fait pendant l'instant dt par la tranche $\omega\varepsilon\delta$ et provenant des échanges de chaleur entre cette tranche et celles qui, situées à une distance plus grande que r, sont comprises dans la sphère du rayonnement d'activité, sera donné par la somme des valeurs de :

$$\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\,\varepsilon\varepsilon'\,\varphi\,(u,u',s)\,(u'-u)\,dt$$

étendue à toutes les valeurs sensibles de la fonction φ. Cette fonction est très rapidement décroissante avec s, et devient nulle, lorsque s atteint une valeur insensible que nous représenterons par d. Elle est de plus symétrique par rapport aux températures u,u' et comprend le carré de la densité, ce qui n'en change pas la nature. De même, si l'on considère une autre tranche $\omega_{,}\varepsilon_{,}\delta$, située à une distance $r-s$ de la tranche

$\omega\varepsilon\delta$, et possédant une température $u_{,}$; la somme de toutes les valeurs sensibles de

$$\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_{,})\varepsilon\varepsilon_{,}\varphi(u,u_{,},s)(u_{,}-u)\,dt$$

exprimera la quantité de chaleur gagnée pendant l'instant dt par la tranche $\omega\varepsilon\delta$, en vertu des échanges de chaleur entre cette tranche et celles qui, situées à une distance du sommet moindre que r, sont néanmoins comprises dans sa sphère de rayonnement d'activité. En réunissant ces deux sommes, on aura le gain total provenant de la communication de la chaleur : ces deux sommes pouvant être remplacées par des intégrales, dans lesquelles, à la place de ε', $\varepsilon_{,}$ on mettra ds, il s'ensuit que le gain fait pendant l'instant dt par la tranche $\omega\varepsilon\delta$ sera exprimé par :

expliquer
r+s
r-s
s
∂ } !

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left(\int_0^d(\omega+\omega')\varphi(u,u',s)(u'-u)\,ds+\int_0^d(\omega+\omega_{,})\varphi(u,u_{,},s)\;(u_{,}-u)\,ds\right)dt$$

Expression qui n'est exacte que pour les tranches situées à une distance des surfaces extrêmes plus grande que d.

Mais d'uneautre part, c représentantla chaleur spécifique, $c\omega\varepsilon du$ exprimera tout le ~~gain de chaleur de~~ la tra~~nche $\omega\varepsilon\delta$~~ correspondant à la variation du de sa tem~~pérature~~. Égalant ces deux expressions d'une même quantité, on obtient :

$$c\omega\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^d\left(\varphi(u,u',s)(\omega+\omega')(u'-u)+\varphi(u,u_{,},s)(u_{,}-u)(\omega+\omega_{,})\right)ds.$$

Dans cette formule, développons, suivant les puissances de s, les quantités comprises sous le signe $\int$. Puisqu'on regarde l'étendue du rayonnement comme insensible, il suffira de borner l'approximation aux termes dépendant du carré de s, alors il viendra en posant $\varphi_{,}=\varphi(u,u,s)$:

$$c\omega\frac{du}{dt}=\frac{d.\omega\frac{du}{dr}\int_0^d\varphi_{,}.s^2\,ds.}{dr.}$$

En étendant jusqu'à l'infini l'intégrale relative à s, et faisant :

$$k=\int_0^\infty\varphi_{,}.s^2\,ds\qquad\omega=\frac{er^2}{h^2}.$$

L'on a :

$$c\,r^2\,\frac{du}{dr} = -\frac{d\,.\,r^2\,k\,\frac{du}{dr}}{dr}.$$

Nous représentons par e l'aire de la base du cône dont la distance au sommet est égale à h. En admettant enfin que la chaleur sphécifique c, et la quantité k, qu'on démontre être le coëfficient de conductibilé, sont indépendantes de u, il vient :

$$\frac{d\,.\,ru}{dt} = a^2\,\frac{d^2\,.\,ru}{dr^2} \qquad a^2 = \frac{k}{c}.$$

Telle est l'équation aux différences partielles qu'il faudra intégrer pour obtenir la température u. Mais l'intégrale générale, donnée par cette équation, contiendra des quantités arbitraires que l'on pourra déterminer en l'assujétissant à satisfaire à d'autres conditions, qui, dans le problême actuel, seront données par l'état initial et par les équations relatives au mouvement de la chaleur aux deux surfaces de la couche. Ces équations peuvent être obtenues d'après l'expression du flux de chaleur, expression maintenant facile à obtenir.

Le flux de chaleur dans la section ω est l'excès de la quantité de chaleur qui la traverse dans un sens sur celle qui la traverse en sens contraire. Pour le calculer, considérons les deux tranches $\omega_{,}\varepsilon_{,}\delta$, $\omega'\varepsilon'\delta$, situées aux distances $s_{,}$, s' de la section intermédiaire ω. Le gain de la première provenant de son échange avec la seconde peut être représenté par

$$\tfrac{1}{2}\,(\omega' + \omega_{,})\,\varphi(u', u_{,}, s' + s_{,})\,(u' - u_{,})\,\varepsilon'\varepsilon_{,}\,dt.$$

Si nous faisons la somme des valeurs que prend cette expression de $s' = o$ à $s' = d - s_{,}$ $s_{,}$ restant constant, et ensuite de $s_{,} = o$ à $s_{,} = d$, nous aurons l'excès de la quantité de chaleur émanée des tranches situées à à une distance plus grande que r, et absorbée par celles situées à une distance moindre, sur la quantité de chaleur émanée des dernières et absorbée par les premières. Cet excès est précisément le flux

Il pourra donc être donné par la double intégrale :

$$\tfrac{1}{2}\,dt\int_o^d\int_o^d(\omega' + \omega_{,})\,\varphi\,(u_{,}, u', s' + s_{,})\,(u' - u_{,})\,ds\,ds$$

en étendant jusqu'à d la limite relative à s'. Ce qui est permis, puisque au-delà de $s' = d - s_,$ la fonction φ devient nulle.

En développant, suivant les puissances de s' $s_,$ sous le double signe $\int\int$, et en ayant le soin de ne conserver que les premières puissances de s' et $s_,$, afin d'obtenir le même degré d'approximation que précédemment, il vient :

$$\omega \frac{du}{dr} dt \int_0^d \int_0^d \varphi(u, u, s'+s_,)(s'+s_,)\, ds'\, ds_,$$

Posons $s_, + s' = s$, alors

$$\int_0^d \varphi(u, u, s'+s_,)(s_,+s')\, ds_, = \int_{s'}^d \varphi(u, u, s)\, s\, ds = S$$

et par suite

$$\int_0^d \int_0^d \varphi(u, u, s + s_,)\, ds'\, ds_, = \int_0^d S'\, ds'.$$

Le second membre intégré par parties donne :

$$\int S'\, ds' = s'\, S' - \int s'\, dS'$$

Or, aux deux limites que nous supposerons zéro et l'infini le terme $s'S'$ est égal à zéro, donc

$$\int_0^\infty S'\, ds' = -\int_0^\infty s'\, dS'.$$

mais

$$dS' = \varphi(u, u, s')\, s'\, ds'$$

ce qui conduit immédiatement au résultat suivant :

$$-k\,\omega \frac{du}{dr}\, dt.$$

Expliquer

Cette expression du flux de chaleur n'est pas applicable aux tranches situées à une distance des surfaces extrêmes moindres que celle qu'embrasse le rayonnement moléculaire. Car, dans les environs de ces surfaces, la fonction φ cesse d'être la même que dans l'intérieur des corps. De plus il n'est pas permis de prendre l'infini pour limite supérieure.

Le flux de chaleur qui a lieu à travers une section située à une distance de la surface égale à celle du rayonnement moléculaire est sensiblement égal, après un temps très court à partir de l'origine, au flux qui traverse la base du cône au même instant. Ce dernier étant supposé proportionnel à l'excès de la température de la surface sur celle de l'extérieur, ce qui est permis pour certaines limites de température, nous pourrons poser

$$-k\,\frac{du}{dr}=\beta(u-\zeta)\;dt,\qquad \text{quand } r=h',$$

h' étant le rayon de la surface extrême et ζ représentant la température extérieure que nous supposons constante et égale à zéro. Le coefficient β est proportionnel au pouvoir rayonnant de la surface et dépend en conséquence de son état et de sa température. Nous n'aurons pas égard à cette dernière variation, de sorte qu'en posant $\frac{\beta}{k}=p$, l'équation ci-dessus pourra être mise sous la forme

$$\frac{du}{dr}+pu=o \quad \text{quand } r=h'.$$

Le vide étant supposé fait dans l'espace terminé par la surface intérieure, les échanges de chaleur entre les différents points de cette surface répondent à des températures égales, alors le flux de chaleur est nul à travers chaque élément de cette surface ; on a par conséquent

$$\frac{du}{dr}=o \quad \text{quand } r=h.$$

La fonction inconnue que nous cherchons devra donc satisfaire aux conditions exprimées par les trois équations différentielles suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\,.\,ru}{dt}=a^2\,\frac{d^2\,ru}{dr^2} && (1)\\
&\frac{du}{dr}+pu=o \quad \text{quand } r=h' && (2)\\
&\frac{du}{dr}=o. \quad \text{quand } r=h. && (3)
\end{aligned}\right\}$$

[illegible] à ces équations.

Les deux dernières se rapportent au mouvement de la chaleur aux

..ux surfaces, et la première au mouvement de la chaleur dans l'intérieur de la couche. Pour obtenir son intégrale, nous emploierons la méthode que M. Poisson a exposée dans son beau *Traité de Physique Mathématique*.

L'équation aux différences partielles

$$\frac{d\,.\,ru}{dt} = a^2 \frac{d.^2\, ru.}{dr^2}$$

étant linéaire, son intégrale générale pourra être mise sous la forme

$$u = \Sigma\, \mathrm{R}\, e^{-a^2 \rho^2 t.},$$

ρ exprimant une constante quelconque, R représentant une fonction de r qui pourra contenir ρ et d'autres constantes indéterminées ; la sommme Σ devra s'étendre à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires de ρ et des autres constantes.

[illegible]

En substituant cette valeur de u, dans l'équation (1), et réunissant tous les termes qui contiennent la même exponentielle, on doit avoir l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d.^2\, r\mathrm{R}}{dr^2} + \rho^2\, r\mathrm{R} = o. \qquad (a)$$

De cette équation différentielle, on tirera

$$r\mathrm{R} = \mathrm{B}\,\mathrm{Sin}\;\rho r + \mathrm{B}'\,\mathrm{Cos}.\;\rho r,$$

B et *B'* représentant deux constantes arbitraires. Alors l'intégrale générale proposée pourra être mise sous la forme

$$u = \Sigma \frac{1}{r} (\mathrm{B}\,\mathrm{Sin}.\,\rho r + \mathrm{B}'\,\mathrm{Cos}.\,\rho r)\, e^{-a^2 \rho^2 t.}$$

Il reste à y substituer les valeurs des constantes B, B', ρ. Pour déterminer ces valeurs, nous assujettirons la valeur de u à satisfaire aux équations (2) et (3), ce qui donnera

B et B' [illegible]

$$\mathrm{B}\left(\frac{(\rho h'-1)\,\mathrm{Sin}.\,\rho h' + \rho h'\,\mathrm{Cos}.\,\rho h'}{h'^2}\right) = -\mathrm{B}'\left(\frac{(\rho h'-1)\,\mathrm{Cos}.\,\rho h' - \rho h'\,\mathrm{Sin}.\,\rho h'}{h'^2}\right),$$

(4)

$$\mathrm{B}\left(\frac{\rho h\,\mathrm{Cos}\;\rho h - \mathrm{Sin}.\,\rho h}{h^2}\right) = \mathrm{B}'\left(\frac{\mathrm{Cos}.\,\rho h + h\rho\,\mathrm{Sin}.\,\rho h}{h^2.}\right).$$

En ajoutant ces deux équations, on aura sous une forme symétrique par rapport aux deux surfaces de la couche,

$$B = A\left(\frac{\text{Cos. } \rho h + h\rho \text{ Sin. } \rho h}{h^2} - \frac{(\rho h' - 1)\text{ Cos. } \rho h' - \rho h' \text{ Sin. } \rho h'}{h'^2}\right),$$

$$B' = A\left(\frac{\rho h \text{ Cos } \rho h - \text{Sin. } \rho h}{h^2} + \frac{(\rho h' - 1)\text{ Sin. } \rho h' + \rho h' \text{ Cos. } \rho h'}{h'^2}\right),$$

A étant une constante indéterminée. Posons

$$h^2 h'^2 r X = k h'^2 \text{ Sin. } \rho(r-h) + k\, h^2 h'^2 \rho \text{ Cos. } \rho(r-h) + k h^2 (\rho h' - 1)\text{ Sin. } \rho(h'-r) + \rho\, h^2 h'^2\, k \text{ Cos. } \rho(h'-r).$$

L'intégrale générale pourra d'après cela être représentée par

$$u = \Sigma A X e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

A constante arbitraire qui est à trouver.

Quant aux valeurs qu'il faudra mettre à la place de ρ, elles seront données par l'équation suivante, que l'on obtient par la combinaison des équations (4) et faisant $(h'-h) = l$,

$$(5) \qquad (\rho^2 hh' + 1 - \rho h')\text{ Sin. } \rho l = (l + \rho hh')\, \rho \text{ Cos. } \rho l,$$

Trouver cette équation, qui doit donner les valeurs de ρ.

équation qui admet une racine égale à zéro, et dont toutes les autres sont réelles, égales deux à deux et de signes contraires. Comme la valeur de X ne fait que changer de signe pour chaque couple de valeur de ρ, en réunissant dans l'intégrale les termes qui contiennent la même exponentielle, la constante arbitraire A n'aura plus la même signification. Il suffira de prendre alors pour ρ les racines positives de l'équation (5), ayant soin toutefois de n'employer qu'une seule des racines égales, lors même que cette équation pourrait en admettre plusieurs.

A change de signification

Pour obtenir la valeur de la constante arbitraire, on multipliera les deux membres de l'équation

$$r\frac{du}{dt} = a^2\left(r\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{du}{dr}\right)$$

par $r X dr$ et on intégrera dans toute l'épaisseur de la couche : il viendra

$$\int_h^{h'} r^2 \frac{du}{dt} X\, dr = a^2 \int_h^{h'} r^2 X \frac{d^2u}{dr^2} dr + 2a^2 \int_h^{h'} r X \frac{du}{dr} dr.$$

ce qui donne en effectuant plusieurs intégrations par parties dans second membre :

$$\int_h^{h'} r^2 \frac{du}{dt} X \, dr = a^2 \left(r^2 X \frac{du}{dr}\right)_{h'} - a^2 \left(r^2 X \frac{du}{dr}\right)_h + a^2 \left(r^2 u \frac{dX}{dr}\right)_h - a^2 \left(r^2 u \frac{dX}{dr}\right)_{h'} + a^2 \int_h^{h'} u \frac{d . r^2 \frac{dX}{dr}}{dr}$$

ou bien.

$$\int_h^{h'} r^2 \frac{du}{dt} X dr - a^2 \int_h^{h'} u \frac{d . r^2 \frac{dX}{dr}}{dr} dr = \left\{ \begin{array}{l} + a^2 \left(r^2 X \frac{du}{dr}\right)_{h'} - a^2 \left(r^2 X \frac{du}{dr}\right)_h \\ + a^2 \left(r^2 u \frac{dX}{dr}\right)_h - a^2 \left(r^2 u \frac{dX}{dr}\right)_{h'}. \end{array} \right.$$

Mais X représentant une valeur particulière de R, en vertu de l'équation (a) qui peut être mise sous la forme

$$\frac{d . r^2 \frac{dR}{dr}}{dr} + \rho^2 r^2 R = o,$$

on aura, en multipliant par $u\,dr$ et en intégrant dans toute l'épaisseur de la couche,

$$\int_h^{h'} u \frac{d . r^2 \frac{dX}{dr}}{dr} dr = -\rho^2 \int_h^{h'} r^2 u X dr.$$

et par suite,

$$\int_h^{h'} r^2 \frac{du}{dt} X \, dr + a^2 \rho^2 \int_h^{h'} r^2 u X \, dr = \left\{ \begin{array}{l} + a^2 \left(r^2 X \frac{du}{dr}\right)_{h'} - a^2 \left(r^2 X \frac{du}{dr}\right)_h. \\ + a^2 \left(r^2 u \frac{dX}{dr}\right)_h - a^2 \left(r^2 u \frac{dX}{dr}\right)_h. \end{array} \right. \quad (b)$$

Or, puisque,

$$\frac{du}{dr} = o \qquad \text{quand } r = h.$$

$$\frac{du}{dr} + pu = o \quad \text{quand } r = h'$$

on a aussi nécessairement ;

$$\frac{dX}{dr} = o \qquad \text{quand } r = h.$$

$$\frac{dX}{dr} + pX = o \quad \text{quand } r = h.$$

Ces deux dernières conditions rendent nul le second membre de l'équation (b). Si donc on pose

$$\int_h^{h'} r^2 u \, X \, dr = V;$$

on aura

$$\int_h^{h'} r^2 \frac{du}{dt} X \, dr = \frac{dV}{dt},$$

et l'équation (b) deviendra

$$\frac{dV}{dt} + a^2 \rho^2 V = o.$$

Cette dernière étant intégrée donne

$$V = D e^{-a^2 \rho^2 t},$$

ou

$$\int_h^{h'} r^2 u \, X \, dr = D e^{-a^2 \rho^2 t}. \qquad (c)$$

Pour déterminer la constante arbitraire D, nous supposons que l'on ait :

$$u = F(r) \quad \text{quand } t = o,$$

de sorte que cette fonction représente l'état initial de la couche dans toute son épaisseur, abstraction faite de l'intervalle de temps pendant lequel elle ne satisfait pas en général aux surfaces extrêmes de la couche. Cet intervalle de temps est supposé assez court, pour que les points situés à une distance sensible de ces surfaces ne changent pas sensiblement de température. Alors on aura

$$D = \int_h^{h'} r^2 \, X F(r) \, dr.$$

et, par la substitution de cette valeur de D dans (c),

$$\int_h^{h'} r^2 u \, X \, dr = e^{-a^2 \rho^2 t} \int_h^{h'} r^2 \, X F(r) \, dr,$$

ρ représentant une racine quelconque de l'équation (5). Considérons une autre racine ρ' de cette même équation, et représentons par Y ce que devient X, lorsque à la place de ρ on met ρ'. On aura

$$\int_h^{h'} r^2 u \mathrm{Y}\, dr = e^{-a^2\rho'^2 t} \int_h^{h'} r^2 \mathrm{Y}\, \mathrm{F}(r)\, dr$$

en faisant remarquer que rien n'a été spécifié sur la racine ρ' prise arbitrairement.

Substituant dans cette dernière relation la valeur de u, nous aurons:

$$\Sigma \mathrm{A}\, e^{-a^2\rho^2 t} \int_h^{h'} r^2 \mathrm{X}\ \mathrm{Y}\ dr = e^{-a^2\rho'^2 t} \int_h^{h'} r^2 \mathrm{Y}\, \mathrm{F}(r)\, dr.$$

[illegible] Exemple : [illegible] [illegible] a, b, c sont racines de $x^3 + [illegible]\, x^2 + N = 0$ [illegible]

Cette équation devant être identique, et toutes les valeurs de ρ étant inégales, il faudra qu'après le développement du premier membre, tous les termes soient zéro, excepté celui dans lequel $\rho = \rho'$. On aura donc,

$$\mathrm{A}\, e^{-a^2\rho'^2 t} \int_h^{h'} r^2 \mathrm{Y}^2\, dr = e^{-a^2\rho'^2 t} \int_h^{h'} r^2 \mathrm{Y}\ \mathrm{F}(r)\, dr. \qquad (d)$$

et

$$\int_h^{h'} r^2 \mathrm{X}\mathrm{Y}\, dr = o. \qquad (e)$$

De l'équation (d) on déduira :

$$\mathrm{A} = \frac{\int_h^{h'} r^2 \mathrm{Y}\ \mathrm{F}(r)\ dr}{\int_h^{h'} r^2 \mathrm{Y}^2\, dr}.$$

L'équation (e) sera utilisée pour démontrer que l'équation (5) n'admet que des racines réelles. En effet, supposons que cette équation put admettre des racines imaginaires, et que X correspondant à la racine $m + n\sqrt{-1}$, Y corresponde à la conjugée $m - n\sqrt{-1}$, nous aurons par la substitution

[illegible] la racine [illegible] complète [illegible] $m + n\sqrt{-1}$

$$\mathrm{X} = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{M} - \mathrm{N}\sqrt{-1},$$

et par suite

$$\int_h^{h'} r^2 \mathrm{X}\mathrm{Y}\, dr = \int_h^{h'} r^2 (\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)\, dr = o\ ;$$

résultat impossible, puisque M et N représentent des quantités réelles.

L'intégrale (d) ne pourra donc jamais devenir nulle pour des racines imaginaires de l'équation (5). Celle-ci n'admettra donc que des racines réelles.

La valeur de A que nous avons déterminée, nous donne pour l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles proposée :

$$u = \Sigma \left(\frac{\int_h^{h'} r^2 \; Y \; F(r) \, dr}{\int_h^{h'} r^2 \; Y^2 \, dr} \right) X \, e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

Tout ce qui précède indique trop bien la marche à suivre lorsqu'on voudra faire usage de cette formule, pour qu'il soit nécessaire de le détailler. Il suffira de rappeler que la somme Σ doit s'étendre à toutes les valeurs positives et inégales de ρ, y compris $\rho = 0$. Quand la quantité p sera nulle, on la supposera infiniment petite : alors l'équation (5) aura une racine de même grandeur indépendamment de $\rho = 0$ et à laquelle il faudra avoir égard.

X que veut-dire de même grandeur ?

Au moyen de cette hypothèse, tenant compte des équations convenables et posant

$$\frac{4\pi}{3}(h'^3 - h^3) = L,$$

on trouve pour le terme qui correspond aux valeurs infiniment petites de p et de ρ

$$u = \frac{4\pi}{L} \int_h^{h'} r^2 \, F(r) \, dr.$$

X

ce qui est la moyenne des températures initiales. Au bout d'un certain temps, les autres termes devenant insensibles, la valeur complète de u n'en diffère plus sensiblement ; ce qui doit avoir lieu dans le cas qui nous occupe, où le flux de chaleur étant nul aux deux surfaces extrêmes, aucune partie de la chaleur ne peut s'échapper ; alors la chaleur initiale doit se distribuer uniformément dans la couche.

longueur.

Supposons les deux surfaces extrêmes maintenues à des températures θ θ' la température intérieure θ étant plus grande que θ', il arrivera un instant, quel que soit l'état initial, à partir duquel chaque couche élémentaire conservera une température constante, dès lors on aura :

$$\frac{d.\,\omega k \frac{du}{dr}}{dr} = 0.$$

Ou bien,

$$\frac{d.\,r^2 \frac{du}{dr}}{dr} = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est :

$$u = -\frac{c}{r} + c', \qquad (f)$$

c et c' représentant deux constantes arbitraires qu'il importe de déterminer. Or, nous savons que :

$$u = \theta \quad \text{quand} \quad r = h.$$
$$u = \theta' \quad \text{quand} \quad r = h'.$$

On aura donc par la substitution de ces valeurs :

$$\theta = -\frac{c}{h} + c'$$

$$\theta' = -\frac{c}{h'} + c'.$$

Ces équations combinées avec l'équation (f) donneront

$$\frac{u - \theta}{\theta - \theta'} = \frac{r - h}{r} \times \frac{h'}{h - h'};$$

formule de laquelle on déduira la température d'un point quelconque de la couche. Soit e l'épaisseur de cette couche, si nous posons $r - h = x$, ce qui revient à transporter l'origine des coordonnées à la distance h du centre; on trouve :

$$\frac{u - \theta}{\theta - \theta'} = -\frac{x}{x + h} \times \frac{h + e}{e}.$$

Dans cette formule, faisant $h = \infty$, ce qui donne aussi $h' = \infty$, la couche sphérique sera transformée en un corps d'une épaisseur finie e, et terminé perpendiculairement à l'axe des x par deux plans indéfinis. Dans ce corps, le mode de distribution de la chaleur sera donné par la formule

$$u = \theta - \frac{\theta - \theta'}{e} x,$$

à laquelle on arrive directement, et qui a conduit les physiciens à un procédé expérimental, pour déterminer le coefficient de conductibilité intérieure des métaux.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences de Paris,

Paris, le 8 octobre 1838.

Pour M. le doyen absent, par autorisation,

BEUDANT, professeur.

Permis d'imprimer,

l'Inspecteur général des études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

PROGRAMME

D'UNE

THESE D'ASTRONOMIE

SUR LES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

Des conditions d'équilibre de l'atmosphère.

Equation différentielle de la trajectoire de la lumière à travers les airs, en supposant les couches de l'atmosphère sphériques et variables de densité avec la hauteur.

Transformation de cette équation en une autre dans laquelle les variables sont : l'angle que fait l'élément de la trajectoire avec la verticale à l'origine, et la densité de la couche correspondante à cet élément. Cette transformation s'obtient en admettant que l'atmosphère conserve la même composition dans toute son étendue.

Pour effectuer l'intégration de cette équation, il faudrait connaître la loi suivant laquelle varie la densité avec la hauteur. Cette loi étant inconnue, on suppose la densité d'abord constante, et ensuite décroissante en progression géométrique pour des hauteurs équidifférentes; hypothèses dont la première correspond au décroissement le plus lent, la deuxième au décroissement le plus rapide.

L'intégration, dans le premier cas, donne une réfraction trop faible; elle donne, au contraire, une réfraction trop forte lorsqu'on suppose la densité décroissante en progression géométrique pour des hauteurs équidifférentes; ou autrement dit, la température uniforme dans toute l'étendue de l'atmosphère.

On obtient une réfraction encore trop faible, mais plus rapprochée de sa valeur exacte que celle qui résulte de la première hypothèse, en admettant que la densité des couches décroît en progression arithmétique, quand la hauteur croît suivant la même loi.

Aucune des trois hypothèses ne doit conduire à un résultat exact, puisqu'aucune d'elles ne représente la vraie constitution de l'atmosphère; mais on peut admettre que la loi vraie est comprise entre la supposition d'une densité décroissante suivant les termes d'une progression géométrique, et celle d'une densité décroissante suivant les termes d'une progression arithmétique.

L'intégration de l'équation différentielle, effectuée dans une hypothèse composée des deux dernières, conduit à des formules qui donnent pour la réfraction et le décroissement de la chaleur des résultats conformes à l'observation.

Lorsque la hauteur apparente des astres surpasse 16°, la formule déduite de l'équation différentielle indique que la réfraction correspondante dépend seulement de la pression et de la température dans le lieu où se fait l'observation.

Détermination du coefficient de la réfraction qui entre dans cette formule, d'après l'observation d'étoiles circompolaires.

Comparaison des hypothèses adoptées dans la mécanique céleste avec celles de MM. Ivory et Biot.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences de Paris,

Paris, le 11 octobre 1838.

Pour M. le doyen absent, par autorisation,

BEUDANT, professeur.

Permis d'imprimer,

l'Inspecteur général des études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

IMPRIMERIE D'HIPPOLYTE TILLIARD, RUE ST-HYACINTHE-ST-MICHEL, 30.