MÉMOIRE

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS RIGIDE,

SOUTENU PAR UN PLAN FIXE;

PAR A. A. COURNOT,

LICENCIÉ-ÈS-SCIENCES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

PARIS,

LIBRAIRIE CLASSIQUE DE L. HACHETTE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

JANVIER 1829.

A M. J.-J. ORDINAIRE,

ANCIEN RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE BESANÇON,

AMI ZÉLÉ DE LA JEUNESSE ET DES ÉTUDES:

TÉMOIGNAGE DE RECONNAISSANCE

ET DE PARFAITE VÉNÉRATION.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. le baron THÉNARD (Doyen), LACROIX, BIOT, le baron POISSON, FRANCŒUR, GAY-LUSSAC, DESFONTAINES, GEOFFROY-SAINT-HILAIRE, BEUDANT.		PROFESSEURS.
MM. MIRBEL, DUCROTAY DE BLAINVILLE, HACHETTE, DULONG, CAUCHY, POUILLET.		PROFESSEURS-ADJOINTS.

M. LEFEBURE DE FOURCY (suppléant.)

THÈSE DE MÉCANIQUE.

MÉMOIRE

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS RIGIDE, SOUTENU PAR UN PLAN FIXE.

M. Poisson a donné, dans son *Traité de Mécanique* (liv. III, chap. VI), les équations du mouvement d'un corps solide sur un plan fixe, en se bornant (comme l'exigeait la nature de cet ouvrage) à considérer deux cas principaux : savoir, celui où le corps roule sur le plan, en le touchant par un point variable de sa surface supposée continue, et celui où le contact avec le plan a lieu par une *pointe*, c'est-à-dire par un point où il y a discontinuité dans sa surface. Ce savant géomètre a montré comment l'on pouvait déduire des intégrales *des aires* et *des forces vives* les solutions approximatives que le problème comporte dans certains cas encore plus restreints, comme lorsqu'il s'agit d'un ellipsoïde, dérangé tant soit peu de sa position d'équilibre, et qui oscille autour d'un de ses axes principaux.

En suivant une marche analogue, il est aisé d'obtenir les équations différentielles du mouvement dans toutes les autres hypothèses. Si le corps ne s'appuie pas sur plus de trois points, ou sur plus de deux en ligne droite, on a le nombre d'équations suffisant pour déterminer séparément toutes les inconnues du problème : savoir, les six élémens du double mouvement de translation et de rotation, et les pressions souffertes par le plan. Si, au contraire, le nômbre des points d'appui excède ceux qu'on vient de dire, les équations fournies par le principe de d'Alembert suffisent bien pour déterminer les six élémens du mouvement, mais non pour assigner les valeurs individuelles des pressions : fait absolument semblable à ce qu'on observe dans toutes les questions analogues de mécanique. Enfin, si le corps est en contact avec le plan par des élémens linéaires ou superficiels, la pression en chaque élément devient (selon les principes ordinaires de mécanique) une fonction différentielle, inconnue, des coordonnées de l'élément; mais les intégrales définies qui en dépendent, et qui entrent dans les équations du mouvement, ont toujours une valeur déterminée.

Tout cela n'a besoin en quelque sorte que d'être indiqué, et l'on sait que la difficulté consiste dans l'intégration complète des équations du mouvement, qu'on n'effectue en général que par des méthodes d'approximation laborieuses, auxquelles l'importance seule des applications peut donner de l'intérêt. Mais il est un autre point de vue, sous lequel le problème offre matière à un assez grand nombre de remarques, qui ne nous semblent point indignes de fixer un moment l'attention, et qui font le sujet principal de ce mémoire.

En effet, il est naturel de supposer que le corps, soit qu'il y ait continuité dans sa surface et qu'il roule sur le plan fixe, soit qu'il y ait au contraire discontinuité et qu'il glisse sur un angle ou une arête de cette surface, peut toujours se détacher du plan. Nous prendrons ce plan pour celui des xy, et nous compterons les z positives du côté où le corps se trouve placé. Les forces auxiliaires qu'on applique à celui-ci pour tenir compte de la résistance du plan seront représentées par des ordonnées parallèles aux z : elles mesureront les *pressions* ou *percussions* que le plan supporte, selon que le corps est soumis à des forces continues, telles que la pesanteur, ou à des forces instantanées, telles que celles développées par le choc. Ceci posé, il est clair qu'au moyen de ce que le corps peut se détacher du plan, les pressions ou percussions sont assujéties à conserver des valeurs positives, et qu'aussitôt que cette condition cessera d'être satisfaite pour quelques-uns des points de contact, le plan cessera de gêner en ces points le mouvement du corps (1). Il faut donc joindre aux équations du mouvement les conditions d'inégalité exprimant que les pressions ou percussions, en chaque point de contact, doivent rester positives; mais afin d'étudier plus simplement les conséquences de ce principe, il convient d'examiner d'abord l'hypothèse où le corps, en contact avec le plan, est tiré du repos par des forces instantanées. De cette manière, on n'a à considérer que des relations algébriques de l'ordre le plus simple, et l'on ne saurait être arrêté dans l'application des formules par des difficultés d'intégration.

(1) Nous avons indiqué, dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, tome VIII, page 165, comment le principe des vitesses virtuelles s'étend aux cas tels que celui-ci, où les liaisons du système sont exprimées par des inégalités; ce qui comprend la démonstration d'un théorème posé par Carnot d'une manière assez confuse, et auquel on avait fait peu d'attention.

On trouve ainsi, comme premier résultat, que, lorsqu'on a le nombre d'équations suffisant pour déterminer individuellement toutes les percussions, et que quelques-unes, ou même toutes, se présentent affectées du signe négatif, ce n'est point en général une raison suffisante pour affirmer que les points correspondans n'exerceront aucune percussion et se détacheront du plan dans le premier instant du mouvement; mais qu'il faut essayer au besoin plusieurs hypothèses, en faisant successivement abstraction de la résistance d'un ou de plusieurs points, jusqu'à ce que les valeurs de toutes les percussions conservées dans le calcul se présentent affectées du signe positif.

Si l'on n'a pas le nombre d'équations nécessaire pour déterminer individuellement les percussions en chaque point, ou si le contact a lieu entre des portions de lignes ou d'aires planes, il est utile de recourir à une considération indirecte, d'où l'on déduit l'expression très-simple des conditions qui doivent être satisfaites, pour que la percussion puisse être censée positive, relativement à tous les points ou à tous les élémens du contact.

Chacun des points par lesquels le corps touche le point fixe, à l'instant où il subit l'application des forces instantanées, donne naissance à une double condition : car il faut, ou que la percussion en ce point soit positive, et dans ce cas que la vitesse du point décomposée perpendiculairement au plan (ce que nous appellerons, pour abréger, la vitesse *normale*) soit nulle; ou que la percussion à son tour soit nulle, et que la vitesse normale soit positive. On regardera peut-être les développemens de cette double condition comme une application intéressante du *calcul des inégalités* : calcul beaucoup moins cultivé que celui des équations, en général plus embarrassé dans sa marche, mais qui jouit aussi d'avantages qui lui sont propres. Il arrive en effet que, par suite de l'indétermination attachée aux conditions d'inégalité, celles-ci comportent souvent des simplifications remarquables. Le calcul des inégalités est, comme celui des équations, intimement lié à l'emploi des considérations géométriques; avec la différence que, si le calcul des équations s'applique avantageusement à la géométrie, c'est la géométrie au contraire qui s'applique au calcul des inégalités, et qui semble indispensable pour en interpréter commodément les résultats.

Qu'on imagine un corps polyédrique, soumis à l'action d'une force instantanée, et reposant sur le plan par une de ses faces dont les angles et les côtés sont en nombre n. La force aura pour effet, ou de détacher entièrement le corps du plan fixe, sans faire éprouver à ce dernier aucune percussion; ou de contraindre le corps à glisser sur sa base, en faisant essuyer au plan une percussion répartie sur toute l'étendue de cette base ; ou de soulever le corps, en le forçant à glisser sur l'une des arêtes, ou sur l'un des angles de la base, qui seul éprouvera une percussion. De là un nombre $2n + 2$ d'hypothèses sur le mouvement du corps, à chacune desquelles se rapporte un système différent d'équations et d'inégalités, qui devront être simultanément satisfaites, pour que cette hypothèse puisse effectivement avoir lieu. D'un autre côté, il est évident *à priori* qu'entre toutes ces hypothèses il doit toujours y en avoir une, et une seule, qui satisfasse ainsi à toutes les conditions voulues ; sans quoi le corps soumis à des forces qui ne s'équilibrent pas ne pourrait prendre aucun mouvement, ou bien il pourrait prendre plusieurs mouvemens différens, sans qu'il y eût aucune raison de supposer qu'un de ces mouvemens se produise plutôt que l'autre, ce qui répugne. Mais si cette double conséquence, que nous vérifierons d'ailleurs sur plusieurs exemples, est évidente *à priori* et par la nature de la question, on ne voit pas comment on pourrait en donner *à posteriori*, et à l'inspection de la forme des équations et des inégalités, une démonstration générale ; ni comment on pourrait, dans un grand nombre de cas, dispenser du tâtonnement qui consiste à essayer successivement plusieurs hypothèses.

Lorsque le corps repose sur une base dont l'arête est formée par une courbe continue, et qu'il se soulève en s'appuyant sur un point de l'arête, il faut d'abord déterminer ce point : question élémentaire et d'une application usuelle, dont pourtant je ne sache pas qu'on ait donné la solution. Au premier coup d'œil, les équations ordinaires du mouvement semblent insuffisantes ; mais d'autres considérations lèvent l'indétermination apparente des coordonnées du point de percussion.

Pour offrir une application simple de ces principes, nous examinons successivement le cas d'un parallélipipède droit à base rectangulaire, et celui d'un cylindre droit à base circulaire ; sur quoi il ne faut pas perdre de vue que les mêmes formules s'étendent, sauf les valeurs numériques des momens d'inertie, à une infinité d'autres solides.

En suivant l'analyse que nous venons d'indiquer sommairement, on parvient à ranger sous deux catégories les points de contact qui existent entre le corps et le plan fixe, à l'instant où agit la force instantanée : 1° ceux dont la vitesse normale est éteinte par la percussion ; 2° ceux qui n'exercent point de percussion et qui se détachent du plan instantanément, avec une vitesse finie. Mais si l'on considère l'élément du temps qui suit immédiatement l'instant de la percussion, les premiers de ces points se distinguent de rechef en deux catégories nouvelles : 1° ceux pont la vitesse normale infiniment petite, acquise pendant le premier élément du temps, se trouve éteinte au moyen de la pression qu'ils exercent contre le plan ; 2° ceux qui, au contraire, se détachent du plan à la fin de cet élément avec une vitesse infiniment petite. Cette distinction repose sur des calculs analogues dans leur forme à ceux qui servent pour la détermination des percussions, et n'exige pareillement aucune intégration. Elle a lieu lors même que le corps n'est soumis à aucune force continue ; et il est d'autant plus nécessaire d'y avoir égard, que, pour l'observation, il n'importe qu'un point se détache du plan instantanément ou au bout d'un temps infiniment petit.

Maintenant il est clair que, si l'on savait intégrer les équations du mouvement, on aurait les valeurs des pressions en fonction du temps ; on saurait pour quel instant du mouvement ces valeurs deviennent négatives ou cessent de satisfaire aux diverses conditions voulues ; et l'on pourrait appliquer à chaque instant du mouvement les raisonnemens et les calculs que nous venons d'indiquer, relativement à l'instant qui suit immédiatement celui de l'application des forces instantanées.

Une conséquence singulière à laquelle on est conduit par cette analyse, c'est que, quand un corps symétrique relativement à l'un de ses axes principaux, et terminé par une base perpendiculaire à cet axe (tel qu'un prisme ou un cylindre droit et homogène), est posé par sa base sur un plan incliné et soumis à l'action de la pesanteur, ce corps ne pourra que glisser sur le plan, sans pivoter autour d'un des angles ou d'une des arêtes de sa base, quelle que soit l'inclinaison du plan à l'horizon, et lors même que la verticale, menée par le centre de gravité, tomberait en dehors de la base. Cette circonstance tient à ce que la direction de la pesanteur passe rigoureusement par le centre de gravité ; car d'ailleurs, pour peu que la résultante des forces dévie de ce centre, le glissement ne peut avoir lieu qu'autant que la résultante rencontre le plan dans l'intérieur de la base. Il en est donc de ce résultat de mécanique rationnelle comme des équilibres instables, qui ne peuvent se réaliser physiquement. Aussi observe-t-on toujours que, lorsque l'inclinaison du plan dépasse certaines limites, et en général lorsque la verticale, menée par le centre de gravité, tombe en dehors de la base, le corps chavire ; ce qu'il faut attribuer au frottement exercé sur le plan, force dont la direction ne passe point par le centre de gravité, et dont nous n'avons pas tenu compte dans nos formules.

Il resterait donc à faire voir comment ces formules devraient être modifiées d'après la considération du frottement : question qui diffère essentiellement d'avec celles qui précèdent, par la nécessité d'admettre des données empiriques sur la nature du frottement, et dans les développemens de laquelle nous ne pourrions entrer ici sans dépasser les bornes que nous devons nous prescrire.

1. Considérons en premier lieu un corps qui se meut en s'appuyant sur le plan fixe par une *pointe*, c'est-à-dire par un point où il y a solution de continuité dans sa surface, tel que serait le sommet d'un cône, ou l'un des angles solides d'un polyèdre. Pour fixer les idées, nous supposerons que la pesanteur est la force continue qui sollicite le corps, et nous tiendrons compte de la résistance du plan fixe par l'application d'une force inconnue R, perpendiculaire à ce plan ; nous rapporterons les points de l'espace à trois axes des x, y, z; le plan fixe étant pris pour celui des xy, et son intersection avec le plan vertical qui lui est perpendiculaire étant prise pour axe des x. Les points du corps seront rapportés aux trois *axes principaux* des x', y', z', menés par le centre de gravité, dont nous désignerons les coordonnées en x, y, z, par α, β, γ. M sera la masse du corps, et A, B, C seront ses momens d'inertie relatifs aux axes principaux des x', y', z'. Nous représenterons par g le coefficient de la gravité, et par ε le complément de l'angle que forme le plan fixe avec la verticale. a, b, c seront les cosinus des angles variables formés par l'axe des z avec ceux des x', y', z'; et ξ, η, ζ, les coordonnées de la pointe, selon ces trois derniers axes. Enfin, si l'on conçoit que l'on prenne, sur la direction de l'axe instantané de rotation, une droite numériquement égale à la vitesse angulaire, p, q, r désigneront les projections variables de cette droite sur les axes des x', y', z'. Leurs signes dépendront du sens de la rotation, suivant les mêmes conventions qui fixent le sens dans lequel est porté l'*axe* d'un *couple*, ou *le moment linéaire* d'une force, d'après la direction de cette force : et à ce sujet nous renverrons le lecteur aux *Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy.

Cette notation convenue, il résulte facilement des principes généraux de dynamique, que le double mouvement de translation et de rotation du corps sera déterminé par les six équations suivantes :

$$(d) \qquad M\frac{d^2\alpha}{dt^2}=0,\quad M\frac{d^2\beta}{dt^2}=Mg\sin\varepsilon,\quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2}=-Mg\cos\varepsilon+R;$$

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} A\,dp+(C-B)\,qr\,dt&=R(\eta c-\zeta b)\,dt,\\ B\,dq+(A-C)\,pr\,dt&=R(\zeta a-\xi c)\,dt,\\ C\,dr+(B-A)\,pq\,dt&=R(\xi b-\eta a)\,dt.\end{aligned}\right.$$

Les variables a, b, c sont liées aux quantités p, q, r par les équations

$$(c) \qquad da = (rb - qc)\,dt,\ db = (pc - ra)\,dt,\ dc = (qa - pb)\,dt;$$

et si l'on désigne par θ l'angle du plan fixe avec celui des $x'\,y'$, par ϕ et ψ, les angles que leur intersection forme respectivement avec les axes des x' et des x, les six variables a, b, c, p, q, r se trouveront dépendre des trois quantités angulaires θ, ϕ, ψ, en vertu des relations suivantes :

$$(d) \qquad a = -\sin\theta\sin\phi,\ b = -\sin\theta\cos\phi,\ c = \cos\theta;$$

$$(e) \qquad \left\{\begin{aligned} pdt &= \sin\theta\sin\phi\, d\psi - \cos\phi\, d\theta, \\ qdt &= \sin\theta\cos\phi\, d\psi + \sin\phi\, d\theta, \\ rdt &= d\phi - \cos\theta\, d\psi. \end{aligned}\right.$$

Nous renvoyons, pour la démonstration de toutes ces formules, à la *Mécanique* de M. Poisson, livre III.

Les six équations (a) et (b) ne renferment donc implicitement que sept inconnues α, β, γ, θ, ϕ, ψ, R, qu'il s'agit d'exprimer, au moyen de deux intégrations, en fonction du temps t. Il suffit par conséquent, pour avoir le nombre suffisant d'équations, d'en obtenir une septième entre ces inconnues. Or, la condition que la pointe doit rester sur le plan fixe, ou que sa coordonnée z doit être nulle, s'exprime par l'équation

$$(f) \qquad \gamma + a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

d'où

$$(f') \qquad \frac{d\gamma}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt} = 0.$$

Les deux premières équations (a) s'intègrent immédiatement : la troisième, jointe aux équations (b) et (f'), suffit, sauf les difficultés de l'intégration, pour déterminer les cinq inconnues qui restent.

2. En multipliant les équations (b) respectivement par a, b, c, les ajoutant, et ayant égard aux relations (c), on trouve :

$$\mathrm{A}\,d\,.\,ap + \mathrm{B}\,d\,.\,bq + \mathrm{C}\,d\,.\,cr = 0;$$

et par conséquent on obtient l'intégrale première

$$(g) \qquad \mathrm{A}ap + \mathrm{B}bq + \mathrm{C}cr = k,$$

dans laquelle k désigne une constante arbitraire. Si l'on multiplie de nouveau ces mêmes équations respectivement par p, q, r, et qu'on les ajoute, en ayant toujours égard aux relations (c), il vient :

$$\mathrm{A}p\,dp + \mathrm{B}q\,dq + \mathrm{C}r\,dr = \mathrm{R}\,(\xi\,da + \eta\,db + \zeta\,dc) = -\mathrm{R}\,d\gamma,$$

en vertu de (f). Substituant la valeur de R, tirée de la troisième équation (a), intégrant et désignant par h^2 une nouvelle constante arbitraire, on obtient en définitive :

$$(h) \qquad \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 + \mathrm{M}\frac{d\gamma^2}{dt^2} + 2\,\mathrm{M}g\cos\varepsilon\,.\,\gamma = h^2.$$

Il n'est pas difficile d'apercevoir que les deux intégrales (g) et (h) résultent plus généralement, la première du principe des aires, la seconde de celui des forces vives. En effet, puisque le corps n'éprouve aucun obstacle parallèlement au plan fixe, et que la force qui le sollicite passe par le centre de gravité, la projection des aires sur ce plan doit rester constante. D'un autre côté, la liaison qui assujétit le corps étant exprimée par l'équation (f), indépendante du temps, le principe des forces vives doit trouver son application. Or on démontre aisément que lorsqu'on rapporte au centre de gravité le double mouvement de translation et de rotation d'un système, la force vive totale est la somme des forces vives relatives aux deux mouvemens, considérés comme indépendans; et cela posé, les formules connues nous apprennent que $\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2$ est la force vive due au mouvement de rotation, tandis que $\mathrm{M}\frac{d\gamma^2}{d^2}$ est celle qui provient du mouvement de translation.

En général, les intégrales fournies par les principes de la conservation du centre de gravité, des aires et des forces vives, sont les seules qu'on obtienne sous forme finie. Le problème qui nous occupe ne sera donc rigoureusement résoluble que lorsque certaines relations entre θ, φ, ψ, réduiront ces variables à deux, par exemple θ et ψ. Alors en éliminant entre (g) et (h), on aura des expressions de la forme $dt = \mathrm{F}(\theta)\,d\theta$, $dt = \mathrm{F}'(\psi)\,d\psi$, d'où l'on tirera par les quadratures les valeurs de θ et γ, par suite celles de ψ et de R en fonction de t et de nouvelles constantes arbitraires.

3. Une analyse exactement semblable s'appliquerait au cas où le corps s'appuierait par deux points sur le plan fixe. On aurait une inconnue de plus, analogue à R, mais aussi une équation de plus, analogue à (f), laquelle établirait une dépendance entre θ, φ, ψ; de sorte que le problème serait susceptible d'une solution complète par les quadratures. Mais au lieu de nous y arrêter, il convient de considérer le cas où le corps s'appuie sur le plan par une arête rectiligne, telle que celles qui terminent les faces des polyèdres. En désignant alors par ds un élément de cette arête, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, et par R la pression qu'il supporte, la troisième équation (a) et celles

(*b*) seront remplacées par les suivantes, où le signe d'intégration se rapporte à toute la longueur de l'arête :

$$(i)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = -Mg\cos\varepsilon + \int R\, ds\,; \\ A\,dp + (C-B)\,qrdt = dt\int R\,(\eta c - \zeta b)ds, \\ B\,dq + (A-C)\,prdt = dt\int R\,(\zeta a - \xi c)\,ds\,, \\ C\,dr + (B-A)\,pqdt = dt\int R\,(\xi b - \eta a)\,ds. \end{cases}$$

Comme la droite qui forme arête est donnée de position, on aura pour ses équations :

$$\eta = m\,\xi + n\,,\ \zeta = m'\,\xi + n';$$

au moyen de quoi substituant dans les équations précédentes, et faisant sortir les lettres a, b, c, m, n, m', n' de dessous le signe d'intégration, on n'aura plus que deux intégrales inconnues $\int R ds$ et $\int R\xi ds$. D'une autre part, ces mêmes valeurs, substituées dans l'équation (*f*), devront la vérifier, indépendamment de ξ. On obtiendra ainsi deux équations auxiliaires, qui, jointes aux quatre équations (*i*), suffiront pour déterminer γ, θ, φ, ψ et les deux intégrales inconnues. Néanmoins la fonction R restera indéterminée, comme cela doit être, lorsqu'on n'a égard qu'aux principes généralement reçus en mécanique.

Admettons, par exemple, que l'arête soit parallèle à l'axe principal des x', ainsi que cela aurait lieu pour un prisme droit et homogène, s'appuyant sur une des arêtes perpendiculaires à ses bases. Dans ce cas m et m' sont nuls, ce qui donne $\gamma + bn + cn' = 0$, et $a = 0$, ou $\sin\theta \sin\varphi = 0$, d'où il est aisé de conclure que c'est l'angle φ qui reste constamment nul. L'équation (*g*) devient

$$d\psi\,(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta) = kdt\,;$$

quant à celle des forces vives, pour la mettre sous sa forme la plus simple, il convient de faire :

$$n = \rho\cos\omega,\ n' = \rho\sin\omega,$$

ρ étant égal à $\sqrt{n^2 + n'^2}$, et ω désignant l'angle que le plan mené par l'arête et par le centre de gravité, fait avec celui des $x'\,y'$. Alors cette équation devient :

$$A\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{d\psi^2}{dt^2}(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta) + \rho^2\cos^2(\theta M - \omega)\,.\,\frac{d\theta^2}{dt^2}$$
$$+ 2Mg\cos\varepsilon\,.\,\rho\sin(\theta - \omega) = h^2.$$

Lorsque $B = C$, on a $\frac{d\psi}{dt} = const.$ Le terme en $\frac{d\psi^2}{dt^2}$ disparaît de l'équation précédente, comme compris dans la constante h^2; mais elle ne peut toujours s'intégrer qu'approximativement par les quadratures.

4. Si le corps glisse sur le plan fixe, en s'appuyant sur une face plane, on pourra encore employer les équations (i), pourvu que ds représente un élément d'aire plane, et que les termes où il entre comme facteur soient affectés d'un double signe d'intégration. D'ailleurs le plan qui comprend cette face aura pour équation

$$\zeta = m\xi + m'\eta + m''.$$

Substituant cette valeur de ζ dans les équations (i), elles ne contiendront plus que trois intégrales inconnues

$$\iint \mathrm{R}\,ds,\ \iint \mathrm{R}\,\xi\,ds,\ \iint \mathrm{R}\,\eta\,ds.$$

D'un autre côté si l'on fait la même substitution dans l'équation (f) qui devra alors être satisfaite, indépendamment de ξ et de η, on obtiendra trois équations auxiliaires, qui complèteront le nombre nécessaire pour la détermination des éléments du mouvement, et des intégrales inconnues : seulement la fonction R restera, comme précédemment, indéterminée.

En effectuant le calcul, on trouve :

$$\gamma + c\,m'' = 0,\ a + mc = 0,\ b + m'c = 0,$$

d'où

$$-\frac{a}{c} = -tg\,\theta \sin\phi = m,\ -\frac{c}{b} = -tg\,\theta\cos\phi = m';$$

$$tg\,\phi = \frac{m}{m'}, = const.$$

en sorte que les deux angles θ, ϕ sont l'un et l'autre constants : L'équation des aires se réduit donc à $\frac{d\psi}{dt} = const.$, et il en résulte encore que les quantités γ, p, q, r, a, b, c, comme aussi les trois intégrales inconnues, ont des valeurs constantes pendant toute la durée du mouvement.

5. Considérons maintenant un corps terminé par une surface continue, et qui roule en s'appuyant toujours sur le plan par un point de cette surface. Il est clair que les équations (a), (b), (f) s'appliqueront à l'hypothèse actuelle, sauf que les coordonnées ξ, η, ζ, au lieu d'être constantes, comme dans le cas du numéro 1, seront variables et inconnue. Mais aussi on aura trois nouvelles

équations pour déterminer ces coordonnées, savoir : l'équation même de la surface, et les deux qui expriment que le plan tangent à cette surface, au point (ξ, η, ζ) se confond avec celui des xy. Les équations des aires et des forces vives subsisteraient, comme lorsque les coordonnées ξ, η, ζ sont invariables. Cela est évident pour la première, qui s'obtient indépendamment de ces coordonnées; d'ailleurs on aurait, en différentiant l'équation (f) :

$$d\gamma + \xi\, da + \eta\, db + \zeta\, dc = -(a\, d\xi + b\, d\eta + c\, d\zeta).$$

Mais a, b, c étant les cosinus des angles que forment les axes des x', y', z' avec la normale à la surface, au point (ξ, η, ζ), le second membre de cette équation s'évanouit, ce qui la rend identique avec (f') : au moyen de quoi l'on arrive comme précédemment à l'équation des forces vives.

Si le corps est terminé par une surface cylindrique ou conique, il roulera en s'appuyant sur le plan le long d'une génératrice de cette surface. Prenons pour exemple un cylindre droit et homogène, à base elliptique, dont les génératrices soient parallèles à l'axe des x', et dont les directrices aient pour équation :

$$\varpi^2 z'^2 + \sigma^2 y'^2 = \varpi^2 \sigma^2;$$

Le calcul sera le même que dans le cas traité à la fin du numéro 3, si ce n'est que les quantités ρ et ω cesseront d'être constantes. Le cylindre étant tangent au plan fixe, on aura :

$$tg\,\theta = \frac{dz'}{dy'}, = -\frac{\sigma^2 y'}{\varpi^2 z'}$$

$$\rho\cos\omega = y' = \frac{\varpi^2 \sin\theta}{\sqrt{\varpi^2 \sin^2\theta + \sigma^2\cos^2\theta}},\ \rho\sin\omega = z' = -\frac{\sigma^2\cos\theta}{\sqrt{\varpi^2\sin^2\theta + \sigma^2\cos^2\theta}};$$

Et il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs dans l'équation des forces vives. Lorsque le cylindre est circulaire, auquel cas $B = C$, $\varpi = \sigma$, $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ se réduisent à des constantes; les quantités b, c, q, r, s'expriment par des sinus et cosinus du temps : tandis que d'après le calcul, les intégrales $\int R\,ds$, $\int R\xi\,ds$ conservent des valeurs constantes. Observons que les limites de ces intégrales ne seront plus constantes en général, comme dans le cas du numéro 3, et qu'on déterminerait au besoin ces limites à l'aide des équations des courbes qui terminent la portion de surface roulant sur le plan; mais ce calcul est étranger à la détermination du mouvement.

6. Si le corps roulait sur une arête curviligne, telle que celle qui termine la

base d'un cylindre, il faudrait encore employer les formules (a), (b), (f); les coordonnées ξ, η, ζ du point de contact seraient variables et inconnues, mais on aurait trois équations pour les déterminer, savoir: les deux qui définissent, relativement aux axes principaux, la courbe qui forme arête; et celle

$$(k) \qquad a\,\delta\xi + b\,\delta\eta + c\,\delta\zeta = 0,$$

exprimant que la tangente à cette courbe, au point (ξ, η, ζ), est comprise dans le plan fixe, et dans laquelle il faudrait substituer les valeurs de $\frac{\delta\xi}{\delta\zeta}$, $\frac{\delta\eta}{\delta\zeta}$, tirées des équations de la courbe. Nous employons ici la caractéristique δ, voulant réserver celle d pour indiquer les différentiations par rapport à t.

En réunissant les cas divers qu'on vient d'analyser, et quelques autres qui se résolvent par les mêmes principes, on pourrait, sauf les difficultés inhérentes à l'intégration, suivre dans toutes ses circonstances le mouvement d'un corps de forme quelconque sur un plan fixe. C'est ainsi qu'un cône pourrait se mouvoir successivement, en s'appuyant sur son sommet, puis en roulant sur sa surface convexe, ensuite sur l'arête curviligne qui la termine, et enfin en glissant sur le plan de sa base. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, il y aurait en général solution de continuité, percussion soufferte par le plan, déperdition de force vive; et les valeurs des élémens du mouvement, à la fin du premier état, serviraient à déterminer les constantes arbitraires, dans les formules relatives à l'état subséquent.

7. Les constantes arbitraires qui entrent dans les équations du mouvement, après les deux intégrations, sont de deux sortes : les unes dépendent de la position initiale du corps, et l'on peut toujours placer l'origine et les axes des x, y, z, de manière à les rendre nulles. Les autres dépendent des valeurs initiales des six quantités

$$(l) \qquad \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt},\ p,\ q,\ r,$$

qui peuvent être données immédiatement; et alors leur substitution dans les intégrales premières, telles que celles des aires et des forces vives, fournira immédiatement aussi les valeurs des constantes arbitraires : mais si l'on assigne seulement, en grandeurs et directions, les forces instantanées qui sollicitent le corps à l'origine et le tirent de l'état de repos, il faudra d'abord en déduire les valeurs initiales des quantités (l).

Considérons un corps qui repose sur le plan fixe par un point (ξ, η, ζ), et qui est tiré de l'état de repos par l'application d'un système de forces instantanées, dont la résultante a pour projection suivant les axes des x, y, z, les forces X, Y, Z. Désignons par L', M', N' les momens du système estimés relativement aux axes des x', y', z', et par P la percussion que le plan éprouve au point (ξ, η, ζ). D'après une application facile du principe de d'Alembert, on aura, pour déterminer les valeurs initiales des quantités (l), les six équations suivantes :

$$(a') \qquad M\frac{d\alpha}{dt}=X,\ M\frac{d\beta}{dt}=Y,\ M\frac{d\gamma}{dt}=Z+P;$$

$$(b') \qquad \begin{cases} Ap=L'+P(\eta c-\zeta b), \\ Bq=M'+P(\zeta a-\xi c), \\ Cr=N'+P(\xi b-\eta a). \end{cases}$$

Il y faut joindre, en vertu des équations (f') et (c), cette équation auxiliaire, que nous mettons à dessein sous trois formes différentes :

$$(m) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt}+\xi(rb-qc)+\eta(pc-ra)+\zeta(qa-pb)=0, \\ \dfrac{d\gamma}{dt}+p(\eta c-\zeta b)+q(\zeta a-\xi c)+r(\xi b-\eta a)=0, \\ \dfrac{d\gamma}{dt}+a(q\zeta-r\eta)+b(r\xi-p\zeta)+c(p\eta-q\xi)=0. \end{cases}$$

Sous cette dernière forme, elle exprime plus explicitement que la vitesse du point $(\xi\eta, \zeta)$, estimée perpendiculairement au plan fixe (ce que nous sommes convenus d'appeler plus brièvement la vitesse *normale*), est nulle; et d'après la remarque du numéro 5, elle subsiste également, soit qu'il y ait en ce point continuité ou discontinuité dans la surface.

Il est essentiel d'observer que, si le corps est tiré de l'état du repos par l'action de forces continues, les valeurs initiales de p, q, r seront nulles; et alors les équations (a), (b), deviendront les mêmes que (a'), (b'), si ce n'est que P sera remplacé par R, les quantités (l) par

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2},\ \frac{d^2\beta}{dt^2},\ \frac{d\gamma}{dt^2},\ \frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt}.$$

et que les lettres X, Y, Z, au lieu de désigner des forces instantanées, désigneront des forces continues. D'ailleurs l'équation (m) donnant par la différentiation.

$$(m') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c - \zeta b) + \frac{dq}{dt}(\zeta a - \xi c) + \frac{dr}{dt}(\xi b - \eta a) \\ &= -\left\{ p\,\frac{d.(\eta c - \zeta b)}{dt} + q\,\frac{d.(\zeta a - \xi c)}{dt} + r\,\frac{d.(\xi b - \eta a)}{dt} \right\}, \end{aligned} \right.$$

le second membre de (m') s'évanouira à cause de $o = p = q = r$, et alors elle deviendra la même que (m), lorsqu'on fait dans celle-ci les substitutions qu'on vient de dire. D'où il faut conclure, qu'en discutant l'hypothèse où le corps est tiré du repos par des forces instantanées, nous nous trouverons avoir traité celle où il sort du même état par l'action de forces continues.

8. Faisons, pour simplifier :

$$\eta c - \zeta b = \lambda, \quad \zeta a - \xi c = \mu, \quad \xi b - \eta a = \nu,$$

l'élimination entre (a'), (b') et la seconde équation (m), donne :

$$P = -\frac{\frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{M'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C}}{\frac{1}{M} + \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}},$$

expression dont le dénominateur est essentiellement positif. Si P est négatif, ce sera la preuve que le plan n'éprouve aucune percussion au point (ξ, η, ζ), et que ce point, considéré comme appartenant au corps, doit se détacher du plan, ou que sa vitesse normale est positive. Alors pour déterminer les élémens du mouvement, il faudra faire $P = o$ dans (a'), (b') ; et les valeurs de ces élémens devront satisfaire à l'inégalité

$$(n) \qquad \frac{d\gamma}{dt} + p\lambda + q\mu + r\nu > o,$$

dont le premier membre exprime la vitesse normale du point (ξ, η, ζ). Or, au moyen de ce qu'on a fait $P = o$, ce premier membre se réduit à

$$\frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{M'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C};$$

l'inégalité est donc satisfaite, par cela seul que dans le précédent calcul on a eu $P < o$.

9. S'il y a deux points de contact entre le corps et le plan, les équations (a'), (b') deviennent, en accentuant les lettres relatives au second point :

$$M\frac{d\gamma}{dt}=Z+P+P';$$

$$Ap=L'+P\lambda+P'\lambda', Bq=M'+P\mu+P'\mu', Cr=N'+P\nu+P'\nu';$$

et de plus on a les deux équations de condition :

$$\frac{d\gamma}{dt}+p\lambda+q\mu+r\nu=0, \frac{d\gamma}{dt}+p\lambda'+q\mu'+r\nu'=0.$$

Faisant pour abréger :

$$S=\frac{1}{M}+\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\frac{\nu^2}{C},\ T=\frac{1}{M}+\frac{\lambda\lambda'}{A}+\frac{\mu\mu'}{B}+\frac{\nu\nu'}{C},$$

$$U=\frac{Z}{M}+\frac{L'\lambda}{A}+\frac{M'\mu}{B}+\frac{N'\nu}{C}, \text{ etc.}$$

on trouve :

$$P=\frac{U'T-S'U}{SS'-T^2}, P'=\frac{UT-SU'}{SS'-T^2}.$$

Le dénominateur de P et P' peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{M}\left\{\frac{(\lambda-\lambda')^2}{A}+\frac{(\mu-\mu')^2}{B}+\frac{(\nu-\nu')^2}{C}\right\}$$

$$+\frac{(\lambda\mu'-\lambda'\mu)^2}{AB}+\frac{(\lambda\nu'-\lambda'\nu)^2}{AC}+\frac{(\mu\nu'-\mu'\nu)^2}{BC}:$$

et par conséquent il est essentiellement positif, en sorte que les signes de P et P' dépendront uniquement de ceux de leurs numérateurs. Si P, par exemple, est négatif, il faudra recommencer le calcul en supposant P nul, et alors on aura $P' = -\frac{U'}{S'}$. De plus, l'inégalité (n) devra être satisfaite : mais son premier membre se réduit dans ce cas à $P'T'+U>0$, ou $S'U-U'T>0$, en substituant la valeur précédente de P', et observant que S' est essentiellement positif. Cette inégalité est donc vérifiée, par cela même que l'on a eu précédemment $P<0$.

Si les deux valeurs de P et P' étaient négatives, et que de plus T fût positif, l'inégalité (n) et son analogue, relative à (ξ', η', ζ'), se réduisant, lorsqu'on fait abstraction de la résistance des deux points, à $U>0$, $U'>0$, seraient encore satisfaites d'elles-mêmes, et le corps se détacherait entièrement du plan.

En effet, de $U'T - S'U < o$, $UT - SU' < o$, on tire, en divisant la première inégalité par S' et la seconde par T, qui sont des nombres positifs :

$$U > \frac{U'T}{S'}, \quad U < \frac{SU'}{T},$$

partant $U'(SS' - T^2) > o$, ou $U' > o$, à cause que $SS' - T^2$ est essentiellement positif. De la même manière on trouverait $U > o$.

Mais si T est négatif, on pourrait seulement démontrer que l'une des quantités U, U' est positive ; par conséquent, de ce qu'on aurait trouvé dans ce cas P et $P' < o$, il ne s'ensuivrait pas que les deux points n'éprouvent aucune percussion : il faudrait en outre que U et U' fussent simultanément positifs. On arriverait à des résultats analogues en supposant trois points de contact.

10. Dans le cas où leur nombre se réduit toujours à deux, on trouve, en retranchant de la première équation (m), son analogue, relative à (ξ', η', ζ') :

$$(o) \quad (\xi - \xi')(rb - qc) + (\eta - \eta')(pc - ra) + (\zeta - \zeta')(qa - pb) = o;$$

équation qui peut s'interpréter géométriquement. Pour cela, menons par l'axe instantané de rotation un plan perpendiculaire au plan fixe des xy, et soit

$$lx' + my' + nz' = o,$$

l'équation de ce plan. En vertu de ce qu'il comprend l'axe instantané, on aura $lp + mq + nr = o$; et au moyen de ce qu'il est perpendiculaire au plan xy, $la + mb + nc = o$. Son équation deviendra donc

$$(p) \qquad (rb - qc)x' + (pc - ra)y' + (qa - pb)z' = o;$$

et si l'on mène une perpendiculaire à ce plan, elle fera, avec les axes des x', y', z', des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels à $rb - qc$, $pc - ra$, $qa - pb$. D'un autre côté, l'intersection du plan (p) avec celui des xy, contient la projection de l'axe instantané sur ce dernier plan, et cette projection est perpendiculaire à la droite menée dans le plan fixe perpendiculairement au plan (p), laquelle, en vertu de (o), est elle-même perpendiculaire à la droite qui joint les deux points de contact. Cette équation (o) exprime donc que la projection de l'axe instantané sur le plan fixe est parallèle à la droite joignant les deux points de contact. D'ailleurs, si l'on porte sur l'axe instantané une longueur numériquement égale à la vitesse angulaire, la valeur de sa projection sur le plan fixe sera $\sqrt{(rb - qc)^2 + (pc - ra)^2 + (qa - pb)^2}$: car on a pour sa projection, perpendiculairement au même plan, $pa + qb + rc$, et $\quad (rb - qc)^2 + (pc - ra)^2 + (qa - pb)^2 + (pa + qb + rc)^2 = p^2 + q^2 + r^2.$

Si le point (ξ', η', ζ') venait à se détacher du plan, on aurait :

$$\frac{d\gamma}{dt} + \xi'(pb - qc) + \eta'(pc - ra) + \zeta'(qa - pb) > 0;$$

et l'équation (o) se trouverait remplacée par l'inégalité

$$(\xi - \xi')(rb - qc) + (\eta - \eta')(pc - ra) + (\zeta - \zeta')(qa - pb) < 0,$$

laquelle exprime géométriquement que la perpendiculaire à la projection de l'axe instantané sur le plan fixe forme un angle obtus avec la droite menée du point (ξ, η, ζ) au point (ξ', η', ζ').

11. Si ces deux points sont les extrémités d'une arête, par laquelle le corps s'appuie sur le plan fixe, il est aisé de déduire de ce qui précède les équations qui devront donner les valeurs des quantités (l), et des intégrales

$$\int P\,ds,\ \int P\,\xi\,ds,\ \int P\,\eta\,ds.$$

Pour que la percussion s'exerce le long de cette arête, il faudra que la fonction inconnue P puisse être censée positive dans toute l'étendue des intégrations. Or l'on s'assure si cette condition est ou non satisfaite, à l'aide des considérations suivantes.

Les coordonnées x, y de l'arête, rapportées aux axes fixes dans l'espace, sont, au premier instant du mouvement, des fonctions linéaires et connues de ses coordonnées ξ, η, ζ, rapportées aux axes principaux. On pourra donc exprimer $\int P\,x\,ds$, $\int P\,y\,ds$, en fonction de $\int P\,\xi\,ds$, etc. Alors si l'on fait

$$\frac{\int P\,x\,ds}{\int P\,ds} = x_1,\ \frac{\int P\,y\,ds}{\int P\,ds} = y_1,$$

il faudra, pour que la fonction P puisse être censée constamment positive, 1° que $\int P\,ds$ ait elle-même une valeur positive ; 2° que le point, dont les coordonnées en xy sont x_1, y_1, tombe sur l'arête rectiligne entre ses deux points extrêmes (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'). Telles sont en effet les conditions démontrées en statique, pour qu'un corps qui s'appuie le long d'un plan fixe par une arête rectiligne ne soit pas soulevé, et la démonstration ne reposant que sur la nécessité de regarder la fonction P comme constamment positive, subsiste, quelle que soit la signification attribuée à P.

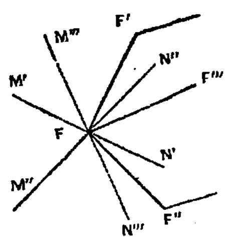
12. Lorsqu'il existe, à l'origine du mouvement, trois points de contact entre

le corps et le plan fixe, on a trois équations semblables à la première (m), qui donnent, en les combinant deux à deux par voie de soustraction, trois autres équations semblables à (o); et de celles-ci on déduit, pourvu que les trois points ne soient pas en ligne droite :

$$\frac{d\gamma}{dt}=0,\ rb-qc=0,\ pc-ra=0,\ qa-pb=0,$$

équations dont la dernière est contenue dans les deux précédentes, et qui expriment : 1° que la distance du centre de gravité au plan fixe reste constante; 2° que l'axe instantané est perpendiculaire à ce plan. Dès-lors on voit que, s'il existait plus de trois points de contact, on n'aurait pas le nombre suffisant d'équations pour déterminer individuellement les percussions souffertes par ces points, ni pour s'assurer directement que leurs valeurs sont positives. Mais en suivant le raisonnement des numéros précédens, il est clair qu'on pourrait toujours calculer les valeurs des termes sommatoires $\Sigma\, P$, $\Sigma.\, P\xi$, etc., par suite celles de $\Sigma.\, Px$ et $\Sigma.\, Py$; et qu'en faisant alors $\Sigma.\, Px=x_1\Sigma P$, $\Sigma.\, Py=y_1\Sigma P$, il faudrait, pour que le corps pût se mouvoir en glissant sur le plan fixe, et exerçant ainsi une percussion sur tous les points de contact : 1° que ΣP fût positif; 2° que le point dont les coordonnées en $x\,y$ sont x_1, y_1, tombât dans l'intérieur du *polygone convexe*, qui se forme en joignant deux à deux les points de contact, de manière à n'en laisser aucun à l'extérieur du polygone. Si le corps s'appuyait sur une portion d'aire plane, on arriverait aux mêmes conclusions, en remplaçant P par $P\,ds$, et Σ par un double signe d'intégration.

13. Lorsque les conditions nécessaires pour le glissement du corps sur le plan fixe ne sont pas satisfaites, il se présente trois cas : ou le corps se soulève en s'appuyant sur l'un des sommets du polygone convexe, dont il vient d'être question, comme sur une pointe ; ou il s'appuie en se soulevant, sur les deux extrémités d'un des côtés du même polygone; ou enfin il se détache entièrement du plan et ne lui fait éprouver aucune percussion.



Dans la première hypothèse, soit $(\xi,\ \nu,\ \zeta)$ ou F le sommet qui éprouve une percussion, et (ξ', n', ζ'), (ξ'', n'', ζ''), ou F', F'', les deux sommets dont l'un suit, et l'autre précède F immédiatement sur le contour du polygone. Non seulement il faudra que la valeur de P, calculée comme dans le numéro 9, soit positive; mais d'après l'observation qui termine le numéro 10, les deux inégalités

$$(q) \left\{ \begin{array}{l} (\xi-\xi')(rb-qc)+(n-n')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb)<0, \\ (\xi-\xi'')(rb-qc)+(n-n'')(pc-ru)+(\zeta-\zeta'')(qa-pb)<0, \end{array} \right.$$

devront être satisfaites ; et le système de ces inégalités exprime que la perpendiculaire abaissée de F sur la projection de l'axe instantané sur le plan fixe, doit tomber dans l'angle M'FM'', supplément de F' F F'', et formé par les droites N' M', N'' M'', respectivement perpendiculaires à FF', FF''. Pour un autre point quelconque F''', situé sur le contour ou dans l'intérieur du polygone, on devrait avoir pareillement :

$$(q')\ (\xi-\xi''')(rb-qc)+(n-n''')(pc-ra)+(\zeta-\zeta''')(qa-pb)<0;$$

et si l'on mène N''' M''' perpendiculaire à F F''', que l'on combine (q') avec chacune des inégalités (q), il résultera de leur système que la perpendiculaire abaissée de F sur la projection de l'axe instantané, doit tomber dans l'intérieur de l'angle M''' F M'', ou de M'FN'''. Or, le polygone étant convexe, et par suite F F''' tombant toujours dans l'angle F' F F'', il est clair que quand les inégalités (q) sont satisfaites, (q') l'est *à fortiori*; qu'ainsi il suffit d'avoir égard aux inégalités (q) et à celles $P > 0$.

Quand la projection du centre de gravité sur le plan fixe tombe dans l'intérieur de l'angle F' F F'', on peut prendre cette projection pour le point F''', et alors on a $\xi'''=-a\gamma$, $n'''=-b\gamma$, $\zeta'''=-c\gamma$: d'ailleurs comme la fonction $a(rb-qc)+b(pc-ra)+c(qa-pb)$ est identiquement nulle, (q') se réduit dans ce cas à

$$\xi(rb-qc)+n(pc-ra)+\zeta(qa-pb)<0,$$

ou, en vertu de l'équation (m), à

$$(q'') \qquad \frac{d\gamma}{dt}>0.$$

Dans la seconde hypothèse sur le mouvement du corps, FF' étant le côté du polygone sur lequel il s'appuie en se soulevant, soit que la percussion ne s'exerce qu'aux deux points extrêmes F, F', ou qu'elle soit répartie sur toute la longueur de l'arête FF', on aura à appliquer les formules des numéros 9, 10 et 11.

En outre, dans l'un et l'autre cas, il faudra que l'inégalité (q') soit vérifiée pour un point quelconque F''', situé sur le contour ou dans l'intérieur du polygone. Or, si l'on abaisse de F une perpendiculaire sur la projection de l'axe instantané en xy, cette droite, d'après ce qui a déjà été dit, sera en même-temps perpendiculaire à FF' : l'inégalité (q') exprime qu'elle devra faire un angle obtus avec FF'''; et dès-lors il est visible que cette condition étant satisfaite pour le point F''', le sera pour tous ceux qui sont situés, par rapport à FF', du même côté que F'''. Elle sera donc simultanément satisfaite pour tous les points situés sur le contour ou dans l'intérieur du polygone, puisque, par hypothèse, ce polygone est convexe. Profitant de cette remarque, on peut d'après ce qui précède, simplifier l'expression de la condition (q'), et la réduire à (q''), dans le cas où la projection du centre de gravité en xy, tombe, par rapport à FF', du même côté que les autres sommets du polygone.

Enfin, dans la dernière hypothèse où le corps ne fait éprouver aucune percussion au point fixe, et se meut comme s'il était libre, la vitesse normale de chacun des points de contact doit être positive; ce qui entraîne de nouvelles conditions : $U > 0$, $U' > 0$, $U'' > 0$, etc. U et ses analogues conservant la signification qui leur a été attribuée au numéro 9. Lorsque le corps repose sur une portion de ligne ou d'aire plane, le nombre des points de contact étant infini, la vérification de l'inégalité $U > 0$ ne peut se faire pour chacun d'eux; mais d'abord il est visible que, si elle est satisfaite pour tous les sommets du polygone convexe dont nous venons de parler, elle le sera pour tous les autres points. En outre, si l'on observe que $U = 0$ (en remplaçant dans U les coordonnées déterminées ξ, η, ζ par les coordonnées courantes x', y', z') est l'équation d'un plan, et que l'inégalité $U > 0$ subsiste pour tous les points de l'espace situés d'un même côté de ce plan, on verra qu'il suffit de construire la droite résultant de l'intersection du plan fixe avec celui $U = 0$; que, si cette droite laisse d'un même côté tous ces points de contact, et que de plus l'inégalité $U > 0$ soit satisfaite pour un de ces points, elle le sera pour tous les autres.

Chaque sommet du polygone pouvant être pris successivement pour le point F, et chacun de ses côtés pour l'arête FF', si n désigne le nombre de ses sommets, on pourra faire $2n$ hypothèses différentes sur le mouvement du corps, sans compter celle ou il glisse sur le plan, et celle où il s'en détache entièrement. Parmi ces $2(n+1)$ hypothèses, à chacune desquelles se rapporte un système différent d'équations et d'inégalités, il faudra, comme on l'a dit en commençant, qu'il y en ait toujours une et une seule pour laquelle le système correspondant d'inégalités soit complètement vérifié.

14. Si au polygone dont il vient d'être question l'on substitue une courbe convexe et continue, comme dans le cas d'un cylindre assis sur sa base, et que d'ailleurs on ait vérifié que le corps ne pouvait pas glisser sur cette base, il semble d'après ce qui précède, qu'on devrait essayer autant d'hypothèses qu'il y a de points sur la courbe, c'est-à-dire une infinité; ce qui répugne. D'un autre côté, si l'on se reporte au numéro 6, on verra que l'équation (k), qui doit servir à déterminer le point (ξ, η, ζ) sur lequel le corps s'appuie en roulant sur une arête curviligne, se trouve identiquement satisfaite à l'origine du mouvement; puisque, par hypothèse, la courbe qui forme arête est alors entièrement comprise dans le plan fixe.

Il est néanmoins facile de lever cette indétermination apparente : et d'abord si l'on passe, selon le principe des limites, du polygone à la courbe continue, il résultera des n^{os} 10 et 13, que la tangente à la courbe, au point (ξ, η, ζ), sur lequel le corps s'appuie en se soulevant, doit être parallèle à la projection de l'axe instantané en xy, d'où l'on tire :

$$(k') \qquad (rb-qc)\,\delta\xi+(pc-ra)\,\delta\eta+(qa-pb)\,\delta\zeta=0;$$

et cette équation qui remplacera (k), servira, conjointement avec celles de la courbe, à déterminer complètement ξ, η, ζ. Mais sans recourir à cette considération indirecte, on peut dériver immédiatement (k') de (k). En effet, puisque cette dernière équation doit être satisfaite pendant toute la durée du mouvement, elle donnera :

$$da\,\delta\xi+db\,\delta\eta+dc\,\delta\zeta=-(a\,d\delta\xi+b\,d\delta\eta+c\,d\delta\zeta).$$

Or, par hypothèse, (k) est satisfaite identiquement, c'est-à-dire, indépendamment de ξ, η, ζ; le second membre de l'équation précédente sera donc identiquement nul, ce qui la réduit à (k'), au moyen des relations (c).

Le point (ξ, η, ζ) étant connu, il faudra que la valeur de P, calculée par les formules du n° 8, soit positive; et que pour un autre point quelconque $(\xi''', \eta''', \zeta''')$, situé sur le contour ou dans l'intérieur de la base, on vérifie l'inégalité (q'), qui se réduit à (q''), quand la projection du centre de gravité en xy tombe dans l'intérieur de la base. Si ces conditions n'étaient pas satisfaites, ce serait une preuve que le corps se détache entièrement du plan fixe : alors il faudrait qu'en éliminant entre les équations de la courbe, et celles de l'intersection du plan fixe avec celui $U=0$, les racines de l'équation finale fussent imaginaires, et que pour un point arbitrairement choisi sur cette courbe, ou dans l'aire qu'elle enveloppe, on eût $U>0$.

Quand l'équation (k'), jointe à celle de la courbe, donne une équation finale à plusieurs racines réelles, il ne doit y avoir, comme nous le vérifierons, qu'un système de valeurs (ξ, ν, ζ), qui satisfasse aux conditions d'inégalité. Enfin, si la base était terminée par plusieurs portions de courbes, il faudrait essayer des calculs analogues relativement à chaque portion de courbe, et ensuite relativement à chacun de leurs points de jonction, le corps pouvant s'appuyer sur l'un d'eux, comme sur une pointe, avec la condition que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la projection de l'axe instantané, tombe dans l'angle supplémentaire de celui que forment les tangentes menées par ce point aux deux portions de courbes contiguës.

15. On peut faire, des formules qui précèdent, une application curieuse, qui s'étend à une classe nombreuse de solides. Supposons que le corps, à l'origine du mouvement, tende à glisser sur une face perpendiculaire à l'axe principal des z', et que la résultante des forces qui le sollicitent passe par le centre de gravité. On aura $0 = L' = M' = N'$; et en prenant les axes des x, y, respectivement parallèles à ceux des x', y' (ce qui, dans ce cas, ne diminue en rien la généralité des formules), il viendra : $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, d'où (n° 12) :

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, p = 0, q = 0,$$

et par suite :

$$\iint P\,dx\,dy = -Z, \iint Px\,dx\,dy = 0, \iint Py\,dx\,dy = 0;$$

l'origine des x, y étant d'ailleurs supposée la même que celle des x', y'. Or, pour que la fonction P puisse être censée constamment positive, et conséquemment pour que le glissement du corps sur sa base puisse avoir lieu, il suffira (n° 12) que Z soit négative, et que le point dont les coordonnées en xy sont nulles, c'est-à-dire la projection du centre de gravité sur le plan de la base, tombe dans l'intérieur de cette base.

Cette dernière condition est évidemment satisfaite, dans le cas de l'homogénéité, à l'égard des prismes, cylindres et cônes droits, des pyramides régulières, et d'un grand nombre d'autres solides, qui ont d'ailleurs une de leurs faces ou bases perpendiculaires à l'un de leurs axes principaux. Si donc un semblable corps repose par sa base sur un plan fixe, et qu'on lui communique une impulsion passant par le centre de gravité, il glissera sur sa base, ou se détachera entièrement du plan, selon que Z sera négative ou positive, mais dans aucun cas, il ne pourra pivoter sur l'un des angles, ou l'une des arêtes de sa base. La conclusion sera la même, en vertu de l'observation qui termine le numéro 7, si le corps est tiré du repos par l'action de la pesanteur; quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison du plan fixe à l'horizon: car la pesanteur est une force qui passe toujours par le centre de gravité. Enfin cette conclusion subsiste non seulement pour le premier instant du mouvement, mais pour tous ceux qui suivront : car on sait (n° 4) que les valeurs de $\iint \mathrm{R}x dx dy$, $\iint \mathrm{R}y dx dy$ étant nulles au premier instant, demeureront constamment nulles; et la condition de R positive dans toute l'étendue des intégrations, étant satisfaite à l'origine du mouvement, le sera pour toute sa durée.

16. Afin d'appliquer nos formules à un exemple, considérons un parallélipipède rectangle et homogène, posé sur le plan xy par une de ses faces. Prenons les axes des x, y respectivement parallèles aux côtés de la base, et faisons $\mathrm{M} = \mathrm{AK} = \mathrm{BK}'$. Soient $2f$, $2g$, $2h$ les longueurs des arêtes, parallèles aux axes des x, y, z; il s'agit d'examiner successivement les quatre hypothèses suivantes.

1°. Le parallélipipède peut glisser sur le plan fixe, auquel cas :

$$\iint \mathrm{P}\, dx dy = -\mathrm{Z}, \iint \mathrm{P}x dx dy = -\mathrm{L}', \iint \mathrm{P}y dx dy = \mathrm{M}';$$

d'où résultent (n° 12) les conditions

$$(r) \qquad \mathrm{Z} < 0, -\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{Z}} > -f, -\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{Z}} < f, \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{Z}} > -g, \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{Z}} < g,$$

en se rappelant toujours que les signes $<$ et $>$ n'excluent pas le cas d'égalité.

Les quatre dernières inégalités ne peuvent être satisfaites par $\mathrm{Z} = 0$, à moins qu'on n'ait en même temps $0 = \mathrm{L}' = \mathrm{M}'$, ce qui rentre dans le cas du numéro précédent. Ainsi l'on doit supposer que la résultante perce le plan xy en un point (x'', y''), auquel cas on sait que L', M' se réduisent à $\mathrm{Z}y''$, $-\mathrm{Z}x''$. Ces inégalités expriment donc géométriquement que le point (x'', y'') tombe dans l'intérieur de la base du parallélipipède.

2°. Si le corps tourne, en s'appuyant sur un des angles de sa base (ξ, η), on aura (nos 7 et 8) :

$$\mathrm{P} = -\frac{\mathrm{Z} + \mathrm{K}\eta \mathrm{L}' - \mathrm{K}'\xi \mathrm{M}'}{1 + \mathrm{K}\eta^2 + \mathrm{K}'\xi^2}, \ \mathrm{A}p = \mathrm{P}\eta + \mathrm{L}', \ \mathrm{B}q = -\mathrm{P}\xi + \mathrm{M}'.$$

Les inégalités (q) du numéro 13 se réduiront à $p\eta < 0$, $q\xi, > 0$, à cause qu'on y doit faire $\xi' = \xi$, $\eta' = -\eta$; $\xi'' = -\xi$, $\eta'' = \eta$. D'ailleurs on doit avoir

$P > 0$; au moyen de quoi les inégalités relatives à cette hypothèse sont les trois suivantes :

$$(s)\qquad \left\{\begin{array}{r} Z + K\eta L' - K'\xi M' < 0, \\ L'\eta - Z\eta^2 + K'\eta\xi\,(\xi L' + \eta M') < 0, \\ M'\xi + Z\xi^2 + K\eta\xi\,(\xi L' + \eta M') > 0, \end{array}\right.$$

dans lesquelles il faudra combiner les valeurs $\pm f$ pour ξ, avec celles $\pm g$ pour η, ce qui donnera quatre systèmes d'inégalités, relatifs à chacun des angles de la base.

3°. Si le corps s'appuie sur l'une des deux arêtes parallèles aux x, l'équation (o) du n° 10 se réduisant à $q = 0$, on aura :

$$\int P\,dx = -\frac{Z + K\eta L'}{1 + K\eta^2},\ \int P\,x\,dx \quad M',\ A\,p = L' + \eta \int P\,dx.$$

L'inégalité (q'') du numéro 13 se réduira à $p\eta < 0$, et de plus en vertu des conditions signalées dans le numéro 11, on obtiendra ce système d'inégalités :

$$(t)\quad Z + K\eta L' < 0,\ L'\eta - Z\eta^2 < 0,\ -\frac{M'(1 + K\eta^2)}{Z + K\eta L'} > -f,\ -\frac{M'(1 + K\eta^2)}{Z + K\eta L'} < f,$$

dans lesquelles il faudra faire $\eta = \pm g$, relativement à chacune des deux arêtes parallèles aux x. L'analogie indique suffisamment quelles seraient les formules qui se rapportent aux arêtes parallèles aux y.

4°. Enfin, si le parallélipipède vient à se détacher entièrement du plan, l'inégalité

$$(u)\qquad Z + K\eta L' - K'\xi M' > 0,$$

devra être satisfaite (n°. 13) relativement à chacun des quatre angles de la base : c'est-à-dire qu'il faudra combiner dans la formule précédente, les valeurs $\pm f$ pour ξ, avec celles $\pm g$ pour η; ce qui donnera quatre inégalités différentes, lesquelles devront dans ce cas être vérifiées simultanément. C'est ce qui ne pourra avoir lieu lorsque Z est nulle, à moins qu'on n'ait en même temps $0 = L' = M'$. En outre, on déduit de ces quatre inégalités, combinées selon les règles d'élimination qui leur sont propres :

$$(u')\quad Z > 0,\ Z + Kg L' > 0,\ Z - Kg L' > 0,\ Z - K'f M' > 0,\ Z + K'f M' > 0;$$

ce qui démontre *à posteriori* l'incompatibilité du système des inégalités (u), (u') avec chacun des systèmes (r), (s), (t).

Il ne semble pas aussi facile de démontrer algébriquement l'incompatibilité de chacun de ces derniers systèmes avec tous les autres, et en tous cas cela entraînerait bien des longueurs; mais on peut aisément vérifier cette incompatibilité sur autant d'exemples numériques que l'on voudra. Si l'on fait entre autres : $f = 1$, $g = 2$, $h = 2$, d'où $K = \frac{3}{8}$, $K' = \frac{3}{5}$, et qu'on suppose de plus $Z = -1$, $L' = -6$, $M' = 3$, on aura $P = \frac{73}{31}$, $p = -\frac{15}{32 . 31}$, $q = \frac{3}{8 . 31}$. Le seul système (s) sera vérifié complètement pour les valeurs $\xi = 1$, $\eta = 2$.

Il est à propos d'observer que cette analyse ne dépendant que de la forme du contour de la base, et de la direction des axes principaux, s'applique de même à la pyramide régulière à base rectangulaire, et à une infinité d'autres solides.

17. Occupons-nous maintenant du mouvement d'un cylindre droit, à base circulaire, qui repose par cette base sur le plan fixe, et appelons ρ le rayon de la base, en observant que les momens d'inertie A, B, ou les nombres K, K' deviennent égaux entre eux. Si le cylindre glisse sur le plan, on obtiendra, par des considérations semblables à celles du numéro précédent, les conditions :

$$(v) \qquad Z < 0, \quad L'^2 + M'^2 < \rho^2 Z^2 ;$$

d'où l'on conclurait de même : 1°. que Z ne peut être nulle, à moins que L' et M' ne le soient aussi ; 2° que la résultante doit percer le plan fixe dans l'intérieur de la base.

Quand le cylindre se soulève, en s'appuyant sur un point (ξ, η) de l'arête circulaire qui termine sa base, on a d'abord :

$$P = -\frac{Z + K(\eta L' - \xi M')}{1 + K\rho^2}, \quad Ap = \frac{L' - Z\eta + K\xi(\xi L' + \eta M')}{1 + K\rho^2},$$

$$Aq = \frac{M' + Z\xi + K\eta(\xi L' + \eta M')}{1 + K\rho^2}.$$

Les coordonnées ξ, η sont déterminées par l'équation de l'arête

$$(w) \qquad \xi^2 + \eta^2 = \rho^2,$$

et par l'équation (k') du numéro 14, qui se réduit alors à $p\xi + q\eta = 0$, ou, quand on y substitue les valeurs précédentes de p, q, à

$$(k'') \qquad \xi L' + \eta M' = 0.$$

L'inégalité $P > 0$ doit être satisfaite, de même que celle (q'') du numéro 13, laquelle se réduit à $q\xi - p\eta > 0$. Faisant les substitutions convenables, il en résulte :

$$(x) \qquad Z + K(\eta L' - \xi M') < 0, \quad \rho^2 Z - \eta L' + \xi M' > 0.$$

L'élimination de Z, entre ces deux inégalités, donne

$$(y) \qquad \eta L' - \xi M' < 0;$$

et comme on tire des équations (w) et (k'') :

$$\xi = \pm \frac{\rho M'}{\sqrt{L'^2 + M'^2}}, \quad \eta = \mp \frac{\rho L'}{\sqrt{L'^2 + M'^2}},$$

on voit que (y) ne peut être vérifiée, à moins qu'on ne choisisse les signes supérieurs dans les valeurs précédentes de ξ, η. Ainsi, parmi les deux points que détermine le système des équations (w) et (k''), il ne saurait y en avoir qu'un seul qui satisfasse aux conditions du problème.

Si Z n'est pas nulle, on peut mettre (k'') sous la forme $\xi y'' - \eta x'' = 0$, (x'', y'') étant toujours le point où la résultante perce le plan fixe. Il en résulte que le point (ξ, η) est l'intersection de la circonférence (w) avec le diamètre mené par le point où la résultante pénètre le plan fixe. Le plan mené par ce diamètre et par l'axe du cylindre comprendra la résultante, dans le cas particulier où elle coupe l'axe. L'inégalité (y) devenant $Z(\xi x'' + \eta y'') < 0$, se résout en $\xi x'' + \eta y'' <$ ou > 0, selon que Z est positive ou négative : en conséquence, dans le premier cas, le centre de la circonférence tombera entre les deux points (ξ, η), (x'', y''); et dans le second, ces deux points seront situés du même côté, par rapport au centre.

Si Z est nulle, (k'') se réduit à $\eta X - \xi Y = 0$, équation d'une droite menée par le centre, parallèlement à la résultante. On a pour (y) : $z''(\eta Y + \xi X) > 0$, z'' étant la distance du centre de gravité au plan qui comprend la résultante, et qui est parallèle à celui des xy. Selon que z'' est positive ou négative, l'inégalité précédente devient $\eta Y + \xi X >$ ou < 0, c'est-à-dire que, dans le premier cas, le rayon mené du centre au point (ξ, η) sera dirigé dans le même sens que la résultante ; et dans le second, il sera dirigé en sens contraire.

Par la substitution des valeurs de ξ, η, les inégalités (x) deviennent :

$$(x') \qquad Z - K\rho\sqrt{L'^2 + M'^2} < 0, \quad \rho Z + \sqrt{L'^2 + M'^2} > 0.$$

D'un autre côté, en ayant égard à la première condition (v), la seconde peut s'écrire :

$$\rho Z < -\sqrt{L'^2 + M'^2};$$

ce qui vérifie *à posteriori*, et d'une manière générale, que le système (v) et le système (x) ou (x') sont incompatibles.

Il reste encore à considérer l'hypothèse où le cylindre se détache entièrement du plan. Il faut alors (n° 14), 1° que les racines de l'équation finale, résultant de l'élimination entre l'équation (w) et celle $U=0$, ou $Z + K(\eta M' - \xi M') = 0$, soient imaginaires; 2° que pour un point pris arbitrairement sur la circonférence (w) ou dans son intérieur, on ait $Z + K(\eta L' - \xi M') > 0$. Effectuant les calculs relatifs à la première condition, et prenant ensuite pour le point arbitraire le centre même du cercle, il vient :

$$(z) \qquad Z^2 - K^2 \rho^2 (L'^2 + M'^2) > 0, \quad Z > 0.$$

Cette dernière condition exclut l'existence simultanée des systèmes (v) et (z) : en y ayant égard, l'autre peut s'écrire :

$$Z > K\rho \sqrt{L'^2 + M'^2};$$

ce qui démontre encore l'incompatibilité du système (z) avec celui (x') ou (x).

Ajoutons à cela que la même analyse s'applique non seulement au cylindre, mais au cône droit, et généralement à tout corps de révolution homogène, reposant sur une base perpendiculaire à l'axe de révolution.

18. Ainsi qu'on l'a observé en commençant, il peut se faire que les points du corps qui exercent une percussion sur le plan, et dont la vitesse normale est nulle au premier instant du mouvement, s'en détachent avec une vitesse normale infiniment petite dans l'instant qui suit immédiatement, ce qui dépendra de l'intensité et de la direction des forces continues qui sollicitent le corps, comme aussi des vitesses acquises par l'impulsion initiale. Afin d'éclaircir cette observation par un exemple bien simple, on peut se représenter un corps pesant venant frapper de bas en haut un plan fixe horizontal. Il est clair que certains points du corps exerceront une percussion sur le plan, et que leur vitesse verticale deviendra nulle à l'instant du choc; ce qui ne les empêchera pas de se détacher du plan immédiatement après, par l'action de la pesanteur, avec une vitesse verticale infiniment petite.

Pour indiquer quelle serait, en pareil cas, la marche du calcul, supposons toujours que la pesanteur soit la force continue qui sollicite le corps, et ne considérons d'abord qu'un seul point de contact. Les équations (a) et (b) du n° 1 s'appliqueront à cette hypothèse; et quand on y aura substitué les valeurs de p, q, r, relatives au premier instant du mouvement, et déterminées conformément à ce qu'on a vu dans les numéros précédens, de même que celles de u,

b, c, qui sont connues, elles donneront, par de simples calculs algébriques, les valeurs de

$$(l')\qquad \mathrm{R},\ \frac{d^2\alpha}{dt^2},\ \frac{d^2\beta}{dt^2},\ \frac{d^2\gamma}{dt^2},\ \frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt},$$

relatives au premier élément du temps. Il faut y joindre l'équation (m') du n° 7, dont nous représenterons le second membre par $-\mathrm{V}$, en observant que, d'après les relations (c), on a :

$$\mathrm{V} = (p\eta - q\xi)(qa - pb) + (r\xi - p\zeta)(pc - ra) + (q\zeta - r\eta)(rb - qc).$$

Selon que la valeur de R, déduite de ces sept équations, sera positive ou négative, le point (ξ, η, ζ) exercera ou non une pression sur le plan, et sa vitesse normale sera nulle, ou positive et infiniment petite, après l'élément dt.

Admettons que l'on ait, comme dans les n^{os} 15 et suivans, $a=0$, $b=0$, $c=1$, et, de plus, que la force instantanée qui sollicite le corps à l'origine passe par l'axe des z', ce qui entraîne $\mathrm{N}'=0$; d'où, en vertu de la troisième équation (b'), $r=0$. L'équation (m') se réduira à :

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} - \zeta(p^2+q^2) = 0,$$

ce qui donne

$$\mathrm{R} = \frac{g\cos\varepsilon + \zeta(p^2+q^2)}{\frac{1}{\mathrm{M}} + \frac{\eta^2}{\mathrm{A}} + \frac{\xi^2}{\mathrm{B}}}.$$

Remarquons maintenant qu'en vertu de nos hypothèses le corps est situé, par rapport au plan xy, du côté des z positives, et que les z' sont comptées parallèlement aux z et dans le même sens, en sorte qu'on a z' ou $\zeta = z - \gamma$, γ étant positive. Relativement au point (ξ, η, ζ), qui repose sur le plan xy, on a donc $\zeta = -\gamma$, et le terme $\zeta(p^2+q^2)$ est essentiellement négatif. Ainsi, R est négatif toutes les fois que ce terme est numériquement supérieur à $g\cos\varepsilon$, et, à plus forte raison, quand g est nul, ou quand on fait abstraction de la pesanteur. Dans ce dernier cas, le corps se détache du plan, à la fin de l'élément dt, en vertu de la seule force d'impulsion, et avec une vitesse normale infiniment petite, égale à $-\zeta(p^2+q^2)\,dt$.

Si un second point (ξ', η', ζ') avait exercé une percussion contre le plan, on aurait une nouvelle équation de même forme que (m'); et, en la retranchant de (m'), il viendrait une autre équation de même forme que celle (o) du n° 10, par rapport aux inconnues du problème, sauf l'addition d'un terme constant V—V′ dans son premier membre; ce qui modifierait les résultats que nous avons obtenus dans ce numéro. Mais on aurait toujours le nombre d'équations suffisant pour déterminer individuellement R et R′, et pour reconnaître, au signe de ces quantités, les points qui se détachent du plan, à la fin de dt. V est nul quand la direction de l'axe instantanée passe par le point (ξ, η, ζ); car alors $p\eta - q\xi = 0$, $r\xi - p\zeta = 0$, $q\zeta - r\eta = 0$. Il est encore nul, quel que soit le point (ξ, η, ζ), lorsque l'axe instantané est perpendiculaire au plan fixe, puisqu'alors $qa - pb = 0$, $pc - ra = 0$, $rb - qc = 0$. Si donc il y a eu, à l'origine, plus de deux points non en ligne droite exerçant une percussion sur le plan, comme les termes V s'évanouissent, on aura entre les inconnues (l') des relations de même forme que celles des nos 12 et suivans, par rapport aux inconnues (l); ainsi, il suffira d'appliquer la même analyse pour en déduire les mêmes conséquences.

Au reste, les remarques de ce numéro s'étendent à telle époque du mouvement que l'on voudra considérer, pourvu qu'en cet instant les valeurs des six quantités p, q, r, a, b, c, soient données par l'intégration ou autrement.

Addition au numéro 15.

Comme le résultat auquel on parvient dans ce numéro, et sur lequel nous avons appelé l'attention en commençant, semblerait peut-être paradoxal, il ne sera pas hors de propos de le démontrer encore par une autre voie, et de le généraliser ainsi qu'il suit :

1°. Si le corps pouvait se soulever, en s'appuyant sur un point du contour de sa base, les équations (b') et (m) donneraient, à cause de $0 = L' = M' = N'$, quelle que soit d'ailleurs la direction des axes principaux :

$$\frac{d\gamma}{dt} \quad - P\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}\right).$$

P devrait être positif; donc $\frac{d\gamma}{dt}$ serait négatif, ce qui est en contradiction avec l'inégalité (q'') du numéro 13, qui subsiste sous la seule condition que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan fixe tombe dans l'intérieur de la base.

2°. Le corps ne peut pas davantage se soulever en s'appuyant sur une arête rectiligne; car on aurait dans ce cas, en supposant $a = 0$, $b = 0$, $c \quad 1$:

$$M\frac{d\gamma}{dt} \quad Z + \int P ds, \; Ap = \int P \eta\, ds, \; Bq = -\int P \xi\, ds.$$

Prenons pour équation de l'arête : $\eta = m\xi + n$, d'où $\int P\eta\, ds = m\int P\xi\, ds + n\int P\, ds$; l'équation (o) donnera : $-q(\xi - \xi') + p(\eta - \eta') = 0$, ou $mp = q$, et l'équation (m) : $\frac{d\gamma}{dt} = q\xi - p\eta = -np$. De là on tire, toutes réductions faites :

$$\int P ds = -\frac{Z(A + m^2 B)}{A + m^2 B + n^2 M}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{n^2 Z}{A + m^2 B + n^2 M}.$$

Puisque $\int P ds$ doit toujours être positive, il résulte de la première de ces deux équations que Z est négative; et par suite, en vertu de la seconde, $\frac{d\gamma}{dt}$ serait négative, ce qui est encore en contradiction avec l'inégalité (q''). Quoique cette dernière partie de la démonstration s'appuie sur la condition que l'axe des z' soit perpendiculaire au plan xy, on conçoit aisément qu'on pourrait, sauf la complication des calculs, lui donner la même généralité qu'à la première partie de cette démonstration : et il en résulte que le théorème du numéro 15 subsiste, quelle que soit la direction des axes principaux, sous la seule condition que la résultante passe par le centre de gravité, et que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan fixe, tombe dans l'intérieur de la base. Ainsi ce que nous avons dit des prismes, cylindres et cônes droits, s'appliquera également aux prismes, cylindres et cônes obliques, pourvu que l'obliquité ne dépasse pas certaines limites. Ces corps pourront être supposés imparfaitement réguliers et homogènes, et le frottement exercé sur le plan, ou la résistance de l'air, seront les seules causes qui les feront chavirer.

Nous observerons encore que les forces instantanées, qui ont été désignées dans tout ce qui précède par les lettres X, Y, Z, sont censées données en nombres; mais si l'on connaissait seulement la masse et la vitesse d'un autre corps qui vient frapper celui en repos sur le plan fixe, on déduirait sans peine de la théorie ordinaire des chocs les valeurs numériques des projections et des momens de la force instantanée, développée par ce choc. Enfin si le corps dont nous avons désigné la masse par M, au lieu d'être en repos sur le plan, et d'être tiré de cet état par l'action d'une force instantanée, venait lui-même choquer le plan fixe, nos formules seraient les mêmes, en remplaçant X, Y, Z, L', M', N', par les valeurs qu'avaient les quantités

$$M\frac{d\alpha}{dt},\ M\frac{d\beta}{dt},\ M\frac{d\gamma}{dt},\ Ap,\ Bq,\ Cr.$$

immédiatement avant le choc.

PROGRAMME

DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE.

De la Figure des Corps célestes.

§ Ier.

Equations générales de l'équilibre des fluides. — Méthode d'Euler. — Examen du nouveau principe d'équilibre, employé par M. Ivory, dans le cas où les molécules fluides s'attirent mutuellement (*a*). — Du cas singulier, remarqué par d'Alembert, où l'équilibre n'a pas lieu, quoique la fonction $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit une différentielle exacte. — Montrer comment cette exception, déduite par d'Alembert de la considération des canaux rentrans, résulte plus simplement encore de la méthode d'Euler (*b*).

§ II.

De l'attraction exercée sur un point matériel par les corps de dimensions finies, dont les molécules gravitent suivant la loi newtonienne. — Propriétés de l'intégrale V, ou de la somme des molécules divisées par leurs distances au point attiré.—Les composantes de la force attractive sont égales aux coefficiens différentiels du premier ordre de la fonction V. — Cette fonction est en général discontinue dans le passage des points intérieurs à la masse aux points extérieurs. — La discontinuité se manifeste par la forme même de la fonction, dans le petit nombre de cas où elle peut s'obtenir sous forme finie, et plus généralement par le renversement de la fraction suivant laquelle il faut ordonner les séries pour les rendre convergentes. — Ambiguité qui en résulte dans l'expression des coefficiens différentiels de V, et de la force attractive, relativement aux points situés à la surface même du corps. Observations nouvelles à ce sujet (*c*). — On peut toujours placer l'origine des intégrations, de manière à ce que le développement de la fonction V en série, ne comporte que deux formes, l'une pour les points intérieurs, l'autre pour les points extérieurs. — Application à la sphère et à l'ellipsoïde. — Points correspondans; théorème de M. Ivory.

§ III.

De la figure d'une masse fluide, homogène, gravitant suivant la loi newtonienne, et douée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe permanent. — Théorèmes de Mac-Laurin. La figure de l'ellipsoïde de révolution satisfait à la condition d'équilibre ou de permanence. — Cet ellipsoïde ne peut être allongé vers les pôles. Simplification apportée à la démonstration de Laplace (*d*). — Des deux ellipsoïdes qui correspondent à un même mouvement de rotation, il n'y en a qu'un qui corresponde à la même force primitive, ou à la même valeur de la somme des aires.

§ IV.

Equation à la surface des sphéroïdes peu différens d'une sphère. Recherches de Laplace, de Lagrange et de M. Poisson. — Objections récentes de deux géomètres anglais, MM. Ivory et Airy. — Eclaircissemens relatifs au *postulatum* sur lequel repose la démonstration de l'équation à la surface, ainsi que le développement des fonctions en série de termes de la forme connue Y_n. — Théorèmes de M. Legendre. Il n'y a qu'une figure de la masse fluide, qui satisfasse à la condition d'équilibre, quand on la suppose peu différente d'une sphère. — Cette figure est celle d'un ellipsoïde de révolution, dont on obtient le rayon développé suivant les puissances de l'aplatissement.

REMARQUES.

(*a*) Voyez la théorie de M. Ivory exposée dans les *Transactions philosophiques* pour 1824, page 85, et dans une série d'articles du *Philosophical Magazine*; les réponses de M. Poisson dans les *Annales de chimie et de physique*, tome XXVII, page 225; les observations de M. Lacroix dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, tome III, page 333, et deux autres articles du même recueil, tome V, page 87, et tome IX, page 155. Les conditions de l'équilibre des fluides, déduites du principe de l'égalité de pression en tous sens par les méthodes de Clairaut et d'Euler, résultent pareillement du principe plus général des vitesses virtuelles, comme Lagrange l'a fait voir; et toutes ces méthodes si diverses, s'accordant à les présenter comme suffisantes, il ne saurait rester aucun doute sur ce point de doctrine. Voici en substance l'argumentation de M. Ivory: « Si l'on imagine une masse fluide M en équilibre, et « dans l'intérieur de celle-ci une masse μ, terminée par une surface de ni- « veau, et telle d'ailleurs qu'elle demeurerait en équilibre après l'anéantisse- « ment de la couche $M — \mu$, cette couche agira sur μ : 1° par la pression qu'elle « exerce sur la surface de la masse intérieure μ, 2° par son attraction sur cha- « cune des molécules de μ; et la résultante de toutes ces forces devra être « nulle; puisque, par hypothèse, μ reste en équilibre avant comme après l'a- « néantissement de la couche supérieure $M — \mu$. Or la pression étant la même « en chaque point de la surface de μ (attendu que celle-ci est une surface de « niveau de la masse totale M), ne saurait troubler l'équilibre de μ. Donc il « faut que l'attraction de la couche sur chaque point compris dans l'intérieur « de μ, se réduise à zéro. »

A cela on doit répondre avec M. Poisson que, pour assurer l'équilibre de μ dans les hypothèses précitées, il suffit, au contraire, 1° que l'attraction de la couche ne trouble pas l'équilibre d'un canal quelconque rentrant sur lui-même;

et mené dans l'intérieur de μ ; condition qui sera toujours satisfaite, ainsi que Clairaut l'a fait voir. 2° Que l'attraction de la couche sur un point quelconque de la surface de μ soit normale à cette surface, ce qui est la conséquence implicite de la construction et des raisonnemens employés aux pages 231 et 232 du volume cité des *Annales*. Mais cette dernière condition doit être regardée comme un simple corollaire de la théorie de Clairaut, et nullement comme un principe nouveau qui puisse, sans double emploi, servir concurremment avec les principes ordinaires à la détermination de la figure de M ou de μ. Elle est d'ailleurs restreinte à la double hypothèse de laquelle part M. Ivory ; c'est-à-dire qu'il faut à la fois 1° que la masse μ soit séparément en équilibre ; 2° que la surface de μ soit une surface de niveau de la masse totale M. Car, dans le cas de l'homogénéité, de ce que μ reste en équilibre, avant comme après la superposition de la couche $M - \mu$, il ne s'ensuit pas que μ ait dans les deux circonstances les mêmes surfaces de niveau, ni par conséquent que la surface extérieure de μ, soit une surface de niveau de la masse M, ni enfin que l'attraction de la couche superposée, sur un point quelconque de la surface de μ, soit normale à cette surface.

(*b*) C'est le sujet d'une courte observation, insérée au *Bulletin des sciences mathématiques*, tome IX, page 158. Il est assez singulier que l'hypothèse choisie par d'Alembert comme un exemple abstrait, ait été regardée, en dernier lieu, comme l'expression d'une classe de phénomènes électro-dynamiques. Que dans l'ordre physique, une loi semblable, si elle s'observe, passe pour un fait primitif ou secondaire, réel ou apparent, il nous semble au moins d'après cela que sa rencontre n'est point tellement improbable, qu'on ne puisse, abstraction faite même de la rigueur de la théorie, accorder à l'exception de d'Alembert, dans les Traités élémentaires, une mention qu'elle n'a point obtenue jusqu'ici. D'ailleurs il est facile de voir que les théorèmes sur les forces vives, et en général tous ceux où l'on a occasion de considérer la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ comme une différentielle exacte, comportent la même exception.

(*c*) Aux points où il y solution de continuité dans l'expression de V, les valeurs de la force attractive, déduites de V par la différentiation, doivent en général être multiples pour les mêmes valeurs numériques de V ; de la même manière que dans une courbe discontinue, formée de plusieurs arcs de courbe, pour les mêmes valeurs numériques des ordonnées qui correspondent aux points de jonction, il y a plusieurs directions différentes de la tangente. Mais si l'on considère directement la fonction V' qui mesure la force attractive, sans la déduire de V par voie de différentiation, il est clair que cette fonction V' sera aussi discontinue, mais toujours telle que pour chacun des points de l'espace elle ait une valeur unique et déterminée, ainsi qu'il arrive à la fonction V elle-même. Cette valeur unique de V' différera en général de chacune des valeurs obtenues par la différentiation de V. Dans le cas de la sphère, ou du sphéroïde peu différent d'une sphère, elle sera moyenne entre ces deux valeurs ; et l'analogie, ainsi que la théorie du développement des fonctions, exposée par M. Poisson dans les derniers volumes du *Journal de l'École polytechnique*, donnent lieu de croire qu'il en doit être de même en général. On voit du reste que l'ambiguité de la valeur du coefficient différentiel de V influera sur toutes les relations où ce coefficient se trouve combiné avec V, ainsi qu'il arrive pour l'équation à la surface des sphéroïdes peu différens d'une sphère.

Quant à la manière d'interpréter physiquement, et pour le cas actuel, ce fait général d'analyse, elle nous semble comporter plus d'arbitraire. Le célèbre géomètre que nous venons de citer l'explique par la différence des deux attractions qu'exerce une couche matérielle, d'une très-petite épaisseur, sur deux points situés sur la même normale, l'un à la surface supérieure de la couche, l'autre à la surface intérieure. Mais si nous substituons à la couche d'une très-petite épaisseur une couche dont l'épaisseur soit rigoureusement nulle, c'est-à-dire une surface géométrique, l'élément de volume $r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ sera remplacé dans les formules par l'élément de surface $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$, et les conséquences seront les mêmes, sauf que le facteur dr, qui mesurait l'épaisseur de la couche, aura disparu. Que si l'on objecte qu'il n'y a point dans la nature de surfaces géométriques ou sans épaisseur, douées de pouvoir attractif, nous répondrons qu'il n'y a pas non plus de points inétendus sur lesquels l'attraction des couches puisse s'exercer; et qu'en attribuant à la molécule attirée des dimensions très-petites, on peut aussi bien supposer que la première valeur de $\frac{dV}{dr}$ est relative au cas où la molécule est *posée* sur la convexité de la surface; la seconde à celui où la même molécule est posée sur la concavité de la surface, et enfin la valeur moyenne V′ au cas où la surface partage la molécule en deux parties égales. Non que cette explication nous paraisse préférable; mais nous avons seulement voulu faire voir que la raison physique de la difficulté se trouvait dans la contradiction qu'il y a à supposer qu'un corps étendu agisse par attraction sur un point inétendu.

(*d*) Cette proposition que Laplace démontre d'une manière assez longue, au moyen de la décomposition d'une intégrale en ses élémens (*Mécanique céleste*, livre III, n° 20), devient évidente par le seul passage des arcs imaginaires aux logarithmes, ainsi que nous en avons fait la remarque dans le *Bulletin des sc. math.*, t. VI, p. 35.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences, 10 janvier 1829,

Signé Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général des Etudes, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

Signé ROUSSELLE.