# THÈSE

# DE MÉCANIQUE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR M. J.-B. FOURESTEY.

# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. LE B^ON THÉNARD, Doyen.
LACROIX.
BIOT.
LE B^ON POISSON.
FRANCOEUR.
BEUDANT.
GEOFFROY-S^T-HILAIRE.
MIRBEL.
POUILLET.
PONCELET.
DE BLAINVILLE.
CONSTANT PRÉVOST.
DUMAS.
AUGUSTE S^T-HILAIRE.
LIBRI.
DESPRETZ.

*Professeurs.*

MM. LEFÉBURE DE FOURCY.
ISIDORE G.-S^T-HILAIRE.
STURM.

*Suppléants.*

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

## THÈSE DE MÉCANIQUE.

# MOUVEMENT DE LA CHALEUR DANS UNE SPHÈRE,

## ET APPLICATION AUX TEMPÉRATURES TERRESTRES.

1. La théorie mathématique de la chaleur, depuis les importants travaux de Fourier et de M. Poisson, est devenue, pour l'analyse, un des plus vastes sujets d'application. Les limites dans lesquelles je suis obligé de me renfermer, ne me permettant d'en donner qu'une idée très incomplète, j'établirai d'abord l'équation générale du mouvement de la chaleur dans les corps solides; je traiterai succinctement le mouvement de la chaleur dans une sphère homogène, supposée d'abord dans un milieu dont la température est constante, puis dans un milieu dont la température est une fonction du temps; je considérerai le cas où cette température est périodique, et j'en ferai une courte application aux températures terrestres, en ne tenant compte que des circonstances les plus importantes dans un problème dont les éléments sont si complexes, et pour la plupart desquels on n'a même pas toutes les données physiques nécessaires. J'ai principalement consulté dans ce travail les Mémoires de Fourier, ceux de M. Duhamel, et la *Théorie mathématique*

*de la Chaleur*, de M. Poisson, où se trouvent réunis tous les résultats d'observation que l'expérience ait pu fournir jusqu'ici à l'analyse.

2. Je pars de la loi de Newton sur le refroidissement. Pour exprimer analytiquement cette loi, il faut rappeler la relation qui existe entre une quantité quelconque de chaleur introduite dans un corps, et l'élévation de température qu'elle y produit. Soient $m$ la masse d'un corps supposé assez petit pour que tous ses points puissent être regardés à chaque instant comme ayant la même température; $c$ sa chaleur spécifique, $\alpha$ la quantité de chaleur donnée, et $x$ l'élévation de température: on a

$$x = \frac{\alpha}{mc}.$$

Cela posé, soient $u$ l'excès de température d'un corps de dimensions très petites, sur celle de l'enceinte où il est placé, $m$ sa masse, $c$ sa chaleur spécifique, $h$ le coefficient de conductibilité extérieure: il perdra dans l'instant $dt$ une quantité de chaleur égale à $hudt$. On aura donc, d'après la formule précédente,

$$du = -\frac{hudt}{mc};$$

d'où l'on tire, en désignant par $u_0$ la température correspondante à $t = 0$,

$$u = u_0 e^{-\frac{ht}{mc}},$$

formule qui exprime la loi de Newton.

3. Cherchons maintenant l'expression de la quantité que Fourier a appelée flux de chaleur, et qui est la quantité de chaleur qui passe au travers d'un élément de surface dans un temps infiniment petit, mais rapportée à l'unité de surface et de temps.

Soit $d\varepsilon$ un élément de surface plane infiniment petit pris en un point M dans l'intérieur du corps, et considérons un angle solide infiniment petit, dont l'ouverture, à l'unité de distance de son sommet est $d\omega$: on aura, pour le volume M′ d'un élément de cet angle solide, à une distance $r$ du sommet, $r^2 d\omega dr$; et pour le volume M″ de l'élément d'un autre angle solide, dont le sommet serait au centre de M′ et dont la surface serait circonscrite à l'élément $d\varepsilon$, $\frac{(r+s)^2}{r^2}\cos\theta\, d\varepsilon\, ds$; $s$ étant la distance de ce second élément au sommet du premier angle solide, et $\theta$ l'angle que fait son axe avec la normale à l'élément de surface $d\varepsilon$. Soient en outre

$u = f(x, y, z)$ la température au point M,
$u' = f(x+x', y+y', z+z')$ celle de l'élément de volume M′,
$u'' = f(x+x'', y+y'', z+z'')$ celle de M″,

$F(r+s, \alpha, \beta, \gamma)$ la fonction à laquelle est proportionnelle l'action calorifique de M′ sur M″; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les angles que fait l'axe M″M′ des deux angles solides avec les axes coordonnés, et la conductibilité étant supposée variable avec la direction autour du point O. La quantité de chaleur qui traverse $d\varepsilon$ pendant l'instant $dt$, en vertu de cette action réciproque, sera

$$d\varepsilon\, dt\, d\omega\, dr\, ds \cos\theta\, (u''-u')\,(r+s)^2\, F\,(r+s, \alpha, \beta, \gamma).$$

Si l'on substitue à $u''-u'$ son développement en fonction des coordonnées en remplaçant $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$ par $-(r+s)\cos\alpha$; $-(r+s)\cos\beta$, $-(r+s)\cos\gamma$, et remarquant que $F\,(r+s, \alpha, \beta, \gamma)$ n'a de valeurs sensibles que pour des valeurs $r+s$ extrêmement petites, on aura pour l'expression du flux de chaleur rapportée à l'unité de temps et de surface,

$$P = -\int d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dr\, ds\,(r+s)^3 \cos\theta\, F\,(r+s, \alpha, \beta, \gamma)\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right).$$

Or la partie $\int_{-\infty}^{\infty} ds\,(r+s)^3\, F(r+s, \alpha, \beta, \gamma)$ de l'intégrale, est une fonction de $r$ qu'on peut désigner par $\varphi(r)$; et l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(r)\,dr$ est indépendante de $r$. En la désignant par K, appelant $a$, $b$, $c$ les angles de la normale à l'élément avec les axes, puis posant :

$$(a)\left\{\begin{array}{lll}\int \mathrm{K}d\omega \cos^2\alpha = \mathrm{A}, & \int \mathrm{K}d\omega \cos^2 6 = \mathrm{B}, & \int \mathrm{K}d\omega \cos^2\gamma = \mathrm{C}, \\ \int \mathrm{K}d\omega \cos\alpha \cos 6 = \mathrm{D}, & \int \mathrm{K}d\omega \cos\alpha \cos\gamma = \mathrm{E}, & \int \mathrm{K}d\omega \cos 6 \cos\gamma = \mathrm{F};\end{array}\right.$$

on aura pour l'expression du flux,

$$\mathrm{P} = -\left[\cos a\left(\mathrm{A}\frac{du}{dx} + \mathrm{D}\frac{du}{dy} + \mathrm{E}\frac{du}{dz}\right) + \cos b\left(\mathrm{D}\frac{du}{dx} + \mathrm{B}\frac{du}{dy} + \mathrm{F}\frac{du}{dz}\right) + \cos c\left(\mathrm{E}\frac{du}{dx} + \mathrm{F}\frac{du}{dy} + \mathrm{C}\frac{du}{dz}\right)\right]$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(b) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{X}\cos a + \mathrm{Y}\cos b + \mathrm{Z}\cos c,$$

en posant

$$\mathrm{X} = -\left(\mathrm{A}\frac{du}{dx} + \mathrm{D}\frac{du}{dy} + \mathrm{E}\frac{du}{dz}\right), \quad \mathrm{Y} = -\left(\mathrm{D}\frac{du}{dx} + \mathrm{B}\frac{du}{dy} + \mathrm{F}\frac{du}{dz}\right), \quad \mathrm{Z} = -\left(\mathrm{E}\frac{du}{dx} + \mathrm{F}\frac{du}{dy} + \mathrm{C}\frac{du}{dz}\right).$$

Les quantités X, Y, Z, seront les composantes du *flux maximum*, et il sera facile de conclure l'existence de ce flux, ainsi que la direction et les équations de la ligne suivant laquelle il aura lieu.

4. Pour déduire de l'équation du flux l'équation générale du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps, supposons le corps décomposé en parallélépipèdes rectangles infiniment petits, dont les faces soient parallèles aux plans coordonnés. La quantité de chaleur acquise par un de ces éléments $dxdydz$, pendant l'instant $dt$, sera

$$-\,dxdydz\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)dt.$$

En la divisant par le produit de la masse par la chaleur spécifique, on a l'élévation de température $du$. On trouvera après la substitution des valeurs de $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{Y}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{Z}}{dz}$, tirées de leurs expressions,

$$(c)\left\{\begin{array}{l}\frac{du}{dt} = \frac{1}{cd}\left(\mathrm{A}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2u}{dy^2} + \mathrm{C}\frac{d^2u}{dz^2} + 2\,\mathrm{D}\frac{d^2u}{dxdy} + 2\,\mathrm{E}\frac{d^2u}{dxdz} + 2\,\mathrm{F}\frac{d^2u}{dydz}\right) \\ \quad + \frac{du}{dx}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{D}}{dy} + \frac{d\mathrm{E}}{dz}\right) + \frac{du}{dy}\left(\frac{d\mathrm{D}}{dx} + \frac{d\mathrm{B}}{dy} + \frac{d\mathrm{F}}{dz}\right) + \frac{du}{dz}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy} + \frac{d\mathrm{C}}{dz}\right).\end{array}\right.$$

Quand la conductibilité ne varie pas avec la position, mais seulement avec la direction, le second membre de cette équation se réduit à la première ligne. Quand, au contraire, la conductibilité est la même pour toutes les directions autour d'un même point, et variable seulement d'un point à l'autre, on a $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, $A = B = C$; et l'équation précédente devient

$$(d) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{cd}\left(\frac{d.A\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.A\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.A\frac{du}{dz}}{dz}\right).$$

Il faut encore établir l'équation générale relative à la surface. En désignant par $\zeta$ la température du milieu dans lequel le corps est placé, par $u$ la température d'un point infiniment voisin de la surface, par X, Y, Z les composantes du flux maximum, et par $a$, $b$, $c$ les angles que fait avec les axes la partie extérieure de la normale en ce point, on aura pour cette équation

$$(e) \qquad X\cos a + Y\cos b + Z\cos c = h(u - \zeta),$$

$h$ étant le coefficient de conductibilité extérieure.

Les deux équations $(d)$ et $(e)$ jointes aux conditions initiales, donneront la température $u$ de chaque point au bout d'un temps quelconque $t$.

5. Pour faire une application de ces deux équations, supposons une sphère d'un rayon $l$, dont tous les points à égale distance du centre soient à chaque instant à la même température. En plaçant l'origine au centre, et désignant par $r$ la distance de ce point à un point quelconque dont la température est $u$, on aura

$$d.\frac{A\frac{du}{dx}}{dx} = \frac{x^2}{r^2}\,d.\frac{A\frac{du}{dr}}{dr} + A\frac{du}{dr}\left(\frac{r^2 - x^2}{r^3}\right),$$

$$d.\frac{A\frac{du}{dy}}{dy} = \frac{y^2}{r^2}\,d.\frac{A\frac{du}{dr}}{dr} + A\frac{du}{dr}\left(\frac{r^2 - y^2}{r^3}\right),$$

$$d.\frac{A\frac{du}{dz}}{dz} = \frac{z^2}{r^2}\,d.\frac{A\frac{du}{dr}}{dr} + A\frac{du}{dr}\left(\frac{r^2 - z^2}{r^3}\right);$$

d'où

$$(f) \qquad \frac{d.\,r^2u}{dt} = \frac{1}{cd}\, d.\frac{Ar^2\,\frac{du}{dr}}{dr}.$$

L'équation ($e$), en ayant égard à ce que deviennent, dans notre supposition, les quantités X cos $a$, Y cos $b$, Z cos $c$, se réduit à

$$(g) \qquad \frac{du}{dr} + \frac{h}{A}(u - \zeta) = 0, \quad \text{pour } r = l.$$

Enfin la température $u$ ne pouvant être supposée infinie pour aucun point de la sphère, on aura pour troisième condition

$$(h) \qquad ru = 0 \qquad \text{pour} \quad r = 0.$$

Les quantités A et $c$ sont en général des fonctions de $u$, au moins pour de hautes températures. Si on les suppose seulement fonctions de $r$, les équations précédentes seront linéaires; et la température $u$, au bout d'un temps quelconque $t$, ne dépendra que de $r$ et de $t$. L'hypothèse d'une température commune pour tous les points à égale distance du centre, suppose qu'on ait

$$(i) \qquad u = f(r) \qquad \text{pour } t = 0,$$

$f$ indiquant une fonction quelconque de $r$.

**6.** Quand la sphère est homogène, A et $c$ sont constants. Supposons en outre que la température $\zeta$ du milieu soit constante, et prenons-la pour le zéro de l'échelle : en posant

$$\frac{A}{cd} = a^2, \quad \frac{h}{A} = p,$$

les conditions auxquelles la fonction cherchée $u$ devra satisfaire seront les suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d.ru}{dt} = a^2\,\frac{d.ru}{dr^2},$$

(2) $$\frac{du}{dr} + pu = 0 \ldots \quad \text{pour } r = l,$$

(3) $$ru = 0 \ldots\ldots\ldots \quad \text{pour } r = 0,$$

(4) $$u = f(r) \ldots\ldots \quad \text{pour } t = 0, \text{ de } r = 0 \text{ à } r = l.$$

7. Posons $u = e^{-a^2\rho^2 t}\,\mathrm{V}$, $\rho$ étant une constante, et V une fonction de $r$, qu'il s'agit de déterminer. En substituant dans les équations (1), (2) et (3), on a

$$\frac{d^2 r\mathrm{V}}{dr^2} + \rho^2 r\,\mathrm{V} = 0,\ \frac{d\mathrm{V}}{dr} + p\mathrm{V} = 0,\ r\mathrm{V} = 0,$$

d'où l'on tire en intégrant, et ayant égard à l'équation (3),

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}\ \frac{\sin \rho r}{r}.$$

En mettant $\frac{1}{\rho}$ au lieu de A, qui est une constante arbitraire, on aura

(5) $$\mathrm{V} = \frac{\sin \rho r}{\rho r} \quad \text{et} \quad u = e^{-a^2\rho^2 t}\,\frac{\sin \rho r}{\rho r}.$$

Cette fonction devant satisfaire à l'équation (2), on trouve, en substituant et faisant $r = l$,

(6) $$\rho l \cos \rho l = (1 - pl) \sin \rho l,$$

équation qui détermine les valeurs qu'on peut attribuer à $\rho l$; mais il faudra écarter la valeur 0.

8. L'équation (6) admet pour $\rho l$ un nombre infini de valeurs, qui sont toutes réelles, comme l'a prouvé M. Sturm, à l'aide d'une théorie générale qui s'applique à une classe très étendue d'équations transcendantes. Mais il est facile de la démontrer dans le cas qui nous occupe, comme l'a fait Fourier, par des considérations géométriques.

En effet, il est évident qu'en posant

(7) $$\mathrm{Y} = \tang \rho l, \qquad y = \frac{\rho l}{1 - pl},$$

$Y$ et $y$ étant les ordonnées d'une courbe et d'une droite, dont l'abscisse commune est $\rho l$, tous les points donnés par les intersections de ces lignes, correspondront à des valeurs de $\rho l$ qui satisferont à l'équation (6).

Supposons d'abord $pl < 1$, les ordonnées de la droite seront positives du côté des abscisses positives; et en négligeant toujours la valeur zéro, il y aura une valeur de $\rho l$ comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$; une autre entre $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$; une troisième entre $2\pi$ et $\frac{5\pi}{2}$;...une $n^{ième}$ entre $(n-1)\pi$ et $(2n-1)\frac{\pi}{2}$. Si $pl > 1$, la première valeur de $\rho l$ sera comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$; la deuxième entre $\frac{3\pi}{2}$ et $2\pi$;...la $n^{ième}$ entre $\frac{(2n-1)}{2}\pi$ et $n\pi$. On peut donc conclure, quel que soit le signe de $1-pl$, qu'entre zéro et $n\pi$ il y a $n$ valeurs de $\rho l$, qui toutes satisfont à l'équation (6), la première comprise entre o et $\pi$; la deuxième entre $\pi$ et $2\pi$;... la $n^{ième}$ entre $(n-1)\pi$ et $n\pi$.

Du côté des abscisses négatives, on trouverait la répétition des mêmes valeurs de $\rho l$, et rien de plus.

Pour prouver que $\rho l$ n'a pas de valeurs imaginaires, supposons $\rho_m$, $\rho_n$ deux valeurs différentes de $\rho$, et $V_m$, $V_n$ les valeurs de $V$ correspondantes; nous aurons

$$\frac{d^2 rV_m}{dr^2} + \rho_m^2\, rV_m = o,$$

$$\frac{d^2 rV_n}{dr^2} + \rho_n^2\, rV_n = o.$$

Par une combinaison très simple, on en déduit l'équation

$$dr\left(rV_n\,\frac{d^2.\,rV_m}{dr^2} - rV_m\,\frac{d^2.rV_n}{dr^2}\right) = (\rho_n^2 - \rho_m^2)\, r^2\, V_m\, V_n\, dr,$$

ou

$$r\left(V_n\,\frac{d.\,rV_m}{dr} - V_m\,\frac{d.\,rV_n}{dr}\right) = (\rho_n^2 - \rho_m^2)\int_0^r r^2\, V_m\, V_n\, dr.$$

Or, en vertu de l'équation (6), le premier membre est nul pour $r=l$;

ce qui donne

(8) $$\int_0^l r^2 V_m V_n \, dr = 0.$$

Cela posé, soit $a + b\sqrt{-1}$ une des valeurs de $\rho$ supposées imaginaires, elle aura sa conjuguée $a - b\sqrt{-1}$. En prenant pour $V_m$ et $V_n$ les valeurs correspondantes de V, on aura

$$V_m = P + Q\sqrt{-1}, \qquad V_n = P - Q\sqrt{-1}.$$

Il en résulterait, par la substitution dans l'équation (8),

$$\int_0^l r^2 (P^2 + Q^2) \, dr = 0,$$

ce qui est absurde; et il demeure prouvé que $\rho l$ ne peut avoir de valeurs imaginaires. M. Sturm a remarqué que cette démonstration ne s'appliquait pas à des valeurs de $\rho$ de la forme $\pm m\sqrt{-1}$, parce qu'alors les deux valeurs de $\rho^2$ seraient égales, et $\rho_n^2 - \rho_m^2$ serait nul. Mais une valeur de la forme $\pm m\sqrt{-1}$ donnerait pour $\frac{dV}{dr}$ et $pV$ des valeurs positives, et leur somme ne pourrait être nulle.

L'équation (8) cesse d'avoir lieu quand $V_m$ et $V_n$ correspondent à des valeurs égales de $\rho l$; cette propriété nous servira à déterminer les coefficients des différents termes de la température $u$ correspondante à $t = 0$.

**9.** Le procédé graphique exposé pour prouver que l'équation (6) a un nombre illimité de racines, peut aussi servir à les obtenir à tel degré d'approximation qu'on voudra. Pour avoir la première, il suffit, par exemple, de se donner une valeur de $\rho l$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, si $1 - pl$ est positif; de prendre l'ordonnée correspondante $y$ pour l'ordonnée Y de la courbe; on en déduira une valeur de $\rho l$ plus approchée de l'abscisse du point cherché que la précédente; puis en continuant de la même manière, on aura des valeurs aussi approchées qu'on le voudra.

Quand $pl$ est très grand, la première valeur de $\rho l$ est peu inférieure à $\pi$.

Soit
$$\rho l = \pi - \varepsilon;$$

en substituant dans l'équation (6), on en déduit

$$\operatorname{tang} \varepsilon = - \frac{\pi - \varepsilon}{1 - \rho l},$$

ou sensiblement,

$$\varepsilon = - \frac{\pi - \varepsilon}{1 - \rho l} = \frac{\pi}{\rho l};$$

ou enfin

$$\rho l = \pi - \frac{\pi}{\rho l},$$

valeur qui approche d'autant plus de $\pi$ que $\rho l$ est plus grand.

**10.** La somme des valeurs particulières de $u$, qu'on obtient en substituant à la place de $\rho$ les différentes racines de l'équation (7), devant encore satisfaire aux équations (1), (2), (3), nous aurons pour la température d'un point quelconque, au bout du temps $t$,

$$(9) \qquad u = \Sigma \left( A_n e^{-a^2 \rho_n^2 t} \frac{\sin \rho_n r}{\rho_n r} \right) = \Sigma \left( A_n e^{-a^2 \rho_n^2 t} V_n \right).$$

Il faut encore que cette valeur de $u$ satisfasse à l'équation (4), ou se réduise à une fonction de $r$, pour $t = 0$, de $r = 0$ à $r = l$. L'équation (9) prend alors la forme

$$f(r) = A_1 V_1 + A_2 V_2 \ldots + A_n V_n.$$

Je suppose admis que le développement en une série de cette forme est possible, et que la série est convergente. Il en résulte un moyen de déterminer les constantes $A_1$, $A_2 \ldots A_n$; car en multipliant chaque membre par $r^2 V_n dr$, et intégrant entre 0 et $l$, tous les termes de ce second membre, en vertu de l'équation (8), s'évanouissent, excepté

$$A_n \int_0^l r^2 V_n^2 dr, \text{ qui se réduit à } \frac{A_n}{\rho_n^2} \int_0^l \sin^2 \rho_n r dr,$$

en mettant la valeur de $V_n^2$.

On trouve par l'intégration

$$A_n = \frac{2\rho_n^2}{l} \frac{\int_0^l r f(r) \sin \rho_n r dr}{\rho_n l - \sin \rho_n l \cos \rho_n l}.$$

Si l'on remplace $\sin \rho_n r$ et $\cos \rho_n r$ par leur valeur tirée de l'équation (6), et qu'on substitue la valeur de $A_n$ dans l'équation (9), on aura pour la valeur complète de $u$,

$$(10) \qquad u = \frac{2}{l} \sum \left( \frac{\rho_n^2 l^2 + (1-pl)^2}{\rho_n^2 l^2 - pl(1-pl)} \frac{\sin \rho_n r}{r} e^{-a^2 \rho_n^2 t} \int_0^l r f(r) \sin \rho_n r dr \right).$$

**11.** Comme la plus petite valeur de $\rho$ diffère sensiblement de la suivante, lorsque $a\sqrt{t}$ sera devenu très grand par rapport à $l$, il suffira de prendre pour $u$ le premier terme de la série qui se rapporte à la plus petite valeur de $\rho$. De cette manière on aura

$$(11) \qquad u = \frac{2}{l} \left( \frac{\rho_1^2 l^2 + (1-pl)^2}{\rho_1^2 l^2 - pl(1-pl)} \right) \frac{\sin \rho_1 r}{r} e^{\frac{-a^2 \pi^2 t}{l^2}} \int_0^l r f(r) \sin^2 \rho_1 r dr.$$

A mesure que $r$ diminue, $\frac{\sin \rho_1 r}{r}$ tend vers la valeur $\rho_1$, ce qui donne pour la température $v$ du centre,

$$v = \frac{2}{l} \frac{\rho_1^2 l^2 + (1-pl)^2}{\rho_1^2 l^2 - pl(1-pl)} \rho_1 \left[ \int_0^l r f(r) \sin \rho_1 r dr \right] e^{\frac{-a^2 \pi^2 t}{l^2}}.$$

On peut donc exprimer la température $u$ d'un point quelconque en fonction de la température du centre,

$$(12) \qquad u = \frac{v \sin \rho_1 r}{\rho_1 r}.$$

On tire de là

$$\frac{du}{dr} = \frac{v \cos \rho_1 r}{\rho_1 r^2} (\rho_1 r - \operatorname{tang} \rho_1 r).$$

La racine $\rho_1$ étant comprise entre o et $\frac{\pi}{l}$, les limites de $\rho r$ sont o et $\pi$; entre ces limites $\frac{du}{dr}$ a toujours un signe contraire à celui de $V_1$. La température $u$ est donc constamment croissante, ou constamment décroissante de la surface au centre.

Lorsque $pl$ est très grand, le coefficient $\frac{\rho_1^2 l^2 + (1-pl)^2}{\rho^2 l^2 - pl(1-pl)}$ diffère très peu de l'unité. L'équation (11) peut donc alors se réduire à la suivante, en mettant $\frac{\pi}{l}$ au lieu de $\rho_1$, qui en diffère très peu,

$$u = \frac{2}{r} \sin \frac{\pi r}{l} e^{\frac{-a^2\pi^2 t}{l^2}} \int_0^l rf(r) \sin \rho_1 r dr.$$

Mais cette équation n'est plus applicable dans le voisinage de la surface, puisque la quantité qu'on néglige devient alors comparable à $\sin \frac{\pi r}{l}$.

Prenons dans ce cas $r = l - x$: en négligeant les puissances de $\frac{x}{l}$ supérieures à la première, qui est toujours supposée très petite, l'équation (11) se réduira à la suivante,

$$(13) \qquad u = \frac{2\pi}{pl^3}(1+px)\left(\int_0^l rf(r) \sin \rho\, rdr\right) e^{\frac{-a^2\pi^2 t}{l^2}},$$

qui donne lieu à plusieurs conséquences. On voit d'abord, 1° que pour les points assez voisins de la surface, la température croît avec la profondeur; 2° qu'elle décroît sur un même point, en progression géométrique pour des accroissements égaux du temps; mais d'autant plus lentement que $l$ est plus grand; elle n'est d'ailleurs applicable que dans le cas où la valeur de $u$ peut se borner à son premier terme, ce qui suppose que $a\sqrt{t}$ soit devenu très grand par rapport à $l$; 3° que $u$ n'est point nul avec $x$, et que la température de la surface, en supposant par exemple que la sphère se refroidit, reste toujours supérieure à celle de l'enceinte, et ne lui sera rigoureusement égale que pour $t = \infty$.

**12.** Supposons actuellement la température du milieu variable avec le temps, en sorte qu'on ait $\zeta = \varphi(t)$.

Posons

$$u = U + u_1,$$

et disposons de U par les conditions :

(1) $$\frac{d.rU}{dt} = a^2 \frac{d^2.rU}{dr^2},$$

(2) $$\frac{dU}{dr} + p(U - \zeta) = 0 \quad \text{pour } r = l,$$

(3) $$rU = 0 \qquad\qquad \text{pour } r = 0;$$

et soit en outre $\psi(r)$ ce que devient U pour $t = 0$, de $r = 0$ à $r = l$ : on aura alors pour $u_1$

$$\frac{d\,ru_1}{dt} = a^2 \frac{d.^2 ru_1}{dr^2}, \quad \frac{du_1}{dr} + pu_1 = 0 \quad \text{pour } r = l,$$

$ru_1 = 0$ pour $r = 0$, et $u_1 = f(r) - \psi(r)$ pour $t = 0$, de $r = 0$ à $r = l$ :

c'est le cas qu'on vient de considérer. Il ne reste donc qu'à satisfaire aux équations (1), (2) et (3).

Si, d'après un théorème connu, on pose

$$\zeta = P_0 + \Sigma\,(P_n \cos \alpha_n t + Q_n \sin \alpha_n t),$$

et qu'on prenne seulement un terme de la série $P_n \cos \alpha_n t + Q_n \sin \alpha_n t$, on trouvera pour valeur correspondante de $rU$, qui satisfera aux trois équations précédentes,

(5) $$\left\{\begin{aligned} rU = {} & e^{\frac{r}{a}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}}}\left[A_n \cos\left(\alpha_n t + \frac{r}{a}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}}\right) + B_n \sin\left(\alpha_n t + \frac{r}{a}\sqrt{\frac{\alpha_m}{2}}\right)\right] \\ & - e^{-\frac{r}{a}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}}}\left[A_n \cos\left(\alpha_n t - \frac{r}{a}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}}\right) + B_n \sin\left(\alpha_n t - \frac{r}{a}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

En substituant dans l'équation (2) les valeurs de U et de $\frac{dU}{dr}$ correspondantes à $r = l$, et en égalant séparément à zéro le coefficient du cosinus et celui du sinus, on aura deux équations de condition au moyen desquelles on déterminera $A_n$ et $B_n$ en fonction de $P_n$ et $Q_n$, qui sont censés connus. Une somme infinie d'expressions semblables au second membre de l'équation (5), donnera la valeur complète $r$U.

**13.** Supposons qu'il s'agisse d'une sphère de très grand rayon, que la température $\zeta$ soit une fonction périodique du temps, et que la durée de la période soit $\theta$ ; en sorte qu'on ait

$$\varphi(t+\theta)=\varphi(t):$$

alors la valeur de $\zeta$ se composera d'une série de sinus et cosinus d'arcs multiples de $\frac{2\pi t}{\theta}$ de la forme

$$(a) \qquad \zeta = P_0 + \Sigma\left(P_n \cos\frac{2n\pi t}{\theta} + Q_n \sin\frac{2n\pi t}{\theta}\right),$$

dans laquelle

$$(b) \qquad P_0 = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \zeta\, dt,\ P_0 = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta \zeta \cos\frac{2n\pi t}{\theta}\, dt,\ Q_n = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta \zeta \sin\frac{2n\pi t}{\theta}\, dt.$$

Cette valeur de $\zeta$ peut toujours se réduire en une série de cosinus seuls

$$(c) \qquad \zeta = P_0 + \Sigma\left[M_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{\theta} + \varepsilon_n\right)\right],$$

dans laquelle $\varepsilon_n$ est l'arc, dont la tangente est $-\frac{Q_n}{P_n}$; et $M_n^2 = P_n^2 + Q_n^2$.

En posant $r = l - x$, les équations (1), (2), (3) du numéro précédent, se réduisent aux trois suivantes :

$$(1) \qquad \frac{dU}{dt} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2},$$

$$(2) \qquad \frac{dU}{dr} - p(U - \zeta) = 0 \quad \text{pour } x = 0,$$

$$(3) \qquad U = 0 \quad \text{pour } x = \infty,$$

qui donnent pour la valeur complète de U,

$$(4)\quad U = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\zeta dt + \sum e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{n\pi}{\theta}}}\left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{\theta} + 5_n - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{n\pi}{\theta}}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{\theta} + \varepsilon_n - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{n\pi}{\theta}}\right)\right].$$

Les coefficients $A_n$, $B_n$ sont fonction de $P_n$ et $Q_n$, ou de $M_n$. Il suffit de déterminer ceux qui correspondent à $n = 1$, pour avoir la forme de leur expression générale. En substituant dans l'équation (2), pour U et $\frac{dU}{dx}$, leur valeur correspondante à $x = 0$, on a l'équation

$$-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\left[A_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right) - A_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right)\right]$$
$$+ pM_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right) - A_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right) - B_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon\right) = 0,$$

qui se partage dans les deux suivantes :

$$p A_1 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}(A_1 + B_1) = pM_1,$$
$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}(A_1 - B_1) - pB_1 = 0,$$

et par conséquent

$$A_1 = \frac{pM_1\left(p + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right)}{\left(p + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right)^2 + \frac{\pi}{a^2\theta}},$$

$$B_1 = \frac{\left(pM_1 \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right)}{\left(p + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right)^2 + \frac{\pi}{a^2\theta}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} = D \sin \delta,$$
$$p + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} = D \cos \delta,$$

et qu'on fasse des substitutions analogues pour chacun des termes de l'équation (4), on aura pour la valeur de U,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} U = {} & \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \zeta\,dt + \frac{pM_1}{D_1}\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\theta} + \varepsilon_1 - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} - \delta_1\right) \\ & + \frac{pM_2}{D_2}\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{\theta}}} \cos\left(\frac{4\pi t}{\theta} + \varepsilon_2 - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} - \delta_2\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

C'est la forme que lui a donnée M. Poisson; elle se prête mieux à l'examen des diverses conséquences qui en résultent, et que j'exposerai en en faisant l'application aux températures terrestres.

*Application aux températures terrestres, en supposant la Terre sphérique, et en négligeant le défaut d'homogénéité.*

**14**. La température de chaque point de la Terre peut être considérée comme provenant de deux causes, l'une intérieure et l'autre extérieure, et doit être étudiée sous ce double rapport.

L'expérience prouve qu'à partir d'une vingtaine de mètres au-dessous de la surface terrestre, la température de chaque point demeure invariable, au moins depuis qu'on a pu l'observer, et va en croissant d'un point à l'autre sur chaque verticale proportionnellement à la profondeur. Cet accroissement de température intérieure ne pouvant s'expliquer par les variations de la température extérieure, a fait supposer une chaleur d'origine que la Terre conserve encore en partie à l'époque actuelle, et qui va en décroissant du centre à la surface. En admettant l'existence de cette chaleur centrale, on peut supposer le temps écoulé depuis son origine assez long, pour que la température de chaque point de la Terre, qui en provient, soit réduite au premier terme de son expression en séries d'exponentielles; ce qui rend la formule (13) du n° **11** immédiatement applicable. Si l'on pose, pour abréger,

$$f = \frac{2\pi}{pl^3}\, e^{-\frac{a^2\pi^2 t}{l^2}} \int_0^l r f(r) \sin \rho r\, dr,$$

et $g = pf$, la valeur de $u_1$ sera exprimée par l'équation

$$u_1 = f + gx.$$

$f$ est l'influence de la chaleur centrale sur la température de la surface, et $g$ l'accroissement de température qu'elle produit pour chaque unité de profondeur. Cette dernière quantité se détermine par l'expérience. Pour Paris, on a trouvé

$$g = 0^{\circ},028.$$

La quantité $p$ a été conclue aussi de l'observation, mais d'une manière indirecte et par un calcul indiqué plus loin. On en déduit

$$f = 0^{\circ},02658.$$

Ainsi, d'après cette valeur, la chaleur centrale de la Terre augmenterait encore la température de sa surface d'environ $\frac{1}{40}$ de degré.

Si l'on désigne par $g_1$ ce que deviendra $g$ au bout d'un temps $t + \tau$, on aura, d'après la valeur de $g$ du numéro précédent,

$$g_1 = g e^{-\frac{\pi a^2 \tau}{l^2}}.$$

En prenant le mètre pour unité linéaire, et l'année pour unité de temps, on a pour la valeur de $a$, à Paris,

$$a = 5,1165.$$

Pour que le coefficient d'accroissement de températures terrestres fût réduit à moitié, on trouve, d'après cette formule, qu'il faudrait plus de 1000 millions de siècles.

**13.** La température $\zeta$ du milieu dans lequel la Terre se meut, résulte du rayonnement des astres. Ce serait la température de l'enceinte stellaire si ce rayonnement était le même dans toutes les directions; mais comme cela n'a pas lieu, on imagine une enceinte fictive dont tous les points auraient la même température, et qui enverrait à l'élément considéré de la Terre la même quantité de chaleur qu'elle reçoit de l'enceinte réelle. Il s'agit de trouver l'expression de cette quantité pour l'élément donné.

En admettant que la quantité de chaleur rayonnée par les étoiles soit la même en tout sens, et prenant pour le zéro de l'échelle la température constante qu'elle produirait, nous n'aurons à tenir compte que de la quantité de chaleur solaire qui varie d'une époque à une autre, pour chaque élément.

Soit $s$ l'excès de la température du Soleil sur celle de l'espace stellaire, $\omega$ sa surface rapportée à l'unité de distance, D sa déclinaison, $\gamma$ l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, $\delta$ l'angle du plan horaire avec le méridien, $l$ la latitude du lieu, et $h$, $h'$ les constantes auxquelles sont proportionnelles les actions respectives d'un élément de l'enceinte et du disque du Soleil sur l'élément de surface de la Terre.

Cette quantité étant en même temps proportionnelle à la température cherchée $\zeta$ de notre enceinte fictive, on aura donc

$$\zeta = \frac{h'}{h\pi} s\omega(\sin l \sin \mathrm{D} + \cos l \cos \mathrm{D} \cos \delta).$$

En regardant le mouvement du Soleil dans l'écliptique comme uniforme, on pourra remplacer sin D et cos D par $\sin \gamma \sin \frac{2\pi t}{\theta}$, et $\cos \frac{365 . 2\pi t}{\theta}$ en prenant pour $\theta$ l'année équinoxiale, et regardant le jour comme $\frac{1}{365}$ de l'année.

Alors la valeur de $\zeta$ devient

$$\zeta = \left(\frac{h'\omega}{h\pi} s\right)\left(\sin l \sin \gamma \sin \frac{2\pi t}{\theta} + \cos l \cos \frac{365 . 2\pi t}{\theta} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \frac{2\pi t}{\theta}}\right).$$

Si dans cette formule on néglige le terme multiplié par $\sin^2 \gamma$, qui ne surpasse pas $\frac{1}{5}$, on aura pour $\zeta$ une valeur dont la période ne contient que deux termes, relatifs, l'un à l'inégalité annuelle, l'autre à l'inégalité diurne : il en résultera pour la température U de la Terre une valeur périodique correspondante aux mêmes inégalités. Mais en ayant égard aux variations du mouvement sur l'écliptique, et en conservant le terme sous le radical, on aura pour $\zeta$ une fonction périodique qui se développera en une série de la forme $(a)$, et donnera pour U le second membre de l'équation (5).

**16.** Le premier terme donne la température moyenne de l'année: elle est la même que celle de $\zeta$. Elle dépend de la latitude; mais elle est indépendante de la profondeur et de la nature du terrain.

Chacun des termes suivants, dans la valeur de $\zeta$ et de U, exprime une inégalité périodique. Dans le temps $\theta$, la première inégalité passe deux fois par toutes les valeurs positives et négatives, et redevient la même au bout de ce temps: en général, l'inégalité exprimée par le $n^{\text{ième}}$ terme, passera deux fois par les mêmes valeurs dans le temps $\frac{\theta}{n}$ qui exprime la durée de sa période. A chaque inégalité du dehors correspond, à l'intérieur, une égalité qui a la même période. Les coefficients $M_1$, $M_2$,... sont les *amplitudes* des diverses inégalités extérieures, et $\frac{pM_1}{D_1}$, $\frac{pM_2}{D_2}$ les amplitudes des inégalités correspondantes de U pour la surface.

Elles sont respectivement moindres que celles du dehors, à cause que D est plus grand que $p$; et d'autant moindres que leur durée est plus petite.

L'amplitude de chaque inégalité décroît en progression géométrique à mesure que $x$ croît en progression par différence. Cette amplitude varie aussi avec $a$, d'après la même loi, mais en sens inverse. Si l'on compare deux inégalités dont la période est différente, le décroissement d'amplitude est d'autant plus rapide que la période est plus courte; et les profondeurs auxquelles ces inégalités cessent d'être sensibles, sont proportionnelles aux racines carrées de la durée des périodes.

**17.** D'après ces deux dernières conséquences, si l'on supposait dans $\zeta$ une inégalité périodique d'une durée assez longue, son effet pourrait s'étendre à des profondeurs que nous ne saurions atteindre; et dans toutes celles qui nous sont accessibles, au-delà d'une vingtaine de mètres, la température serait constamment croissante ou constamment décroissante à mesure que $x$ augmenterait, suivant que l'inégalité correspondante, dans la valeur de U, serait négative ou positive. Supposons, par exemple, que le système solaire passe dans des milieux dont la température varie de $-100°$ à $+100°$ dans l'intervalle de 1 000 000 d'années. On posera dans la valeur de $\zeta$, $M_1 = 100$, $\theta = 1\,000\,000$; cette inégalité produira dans l'expression de U un terme de la forme

$$B\, e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{1000a}} \cos\left(\frac{2\pi t}{1000000} + \varepsilon - \frac{x\sqrt{\pi}}{1000a} - \delta\right),$$

qui sera croissant avec $x$ si le cosinus est négatif. Si on le développe suivant les puissances ascendantes de $x$, il prendra la forme $f + gx$, tant que $x$ restera assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances de $\frac{x\sqrt{\pi}}{1000a}$ supérieures à la première.

C'est ainsi que M. Poisson explique l'accroissement de température intérieure sur chaque verticale : il montre qu'en choisissant convenablement les nombres $M_1$ et $\theta$, du reste entièrement arbitraires, on peut en déduire pour $g$ une valeur sensiblement égale à celle que donne l'expérience.

**18.** Le maximum d'inégalité a lieu pour $\zeta$, lorsque $\frac{2n\pi t}{\theta} + \varepsilon_n$ est un multiple de $\pi$; et pour U, à la surface, lorsque $\frac{2\pi n t}{\theta} + \varepsilon_n - \delta_n$ est ce multiple.

Ce maximum, à la surface, est donc en retard sur celui de l'inégalité extérieure d'une quantité égale à $\frac{\delta_n \theta}{2n\pi}$.

Il augmente proportionnellement à la profondeur; à une profondeur $x$, il sera $\frac{\delta\theta}{2\pi} + \frac{x}{2a}\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}$

La vitesse avec laquelle le maximum d'inégalité se propage sur une même verticale est $2a\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$.

Pour une profondeur $x$ un peu considérable, la partie périodique de U se réduit sans erreur appréciable à son premier terme. Si donc on désigne par $X_1$, $X_2$ les amplitudes de l'inégalité annuelle à deux profondeurs différentes $x_1$, $x_2$ assez grandes pour que l'effet des autres inégalités soit insensible, on pourra déterminer $X_1$ et $X_2$ par l'observation; et la relation

$$X_2 = X_1 \, e^{-\frac{(x_2 - x_1)}{a}\sqrt{\frac{\pi}{6}}}$$

donnera le moyen de déterminer la quantité $a$. C'est de cette manière que M. Poisson la détermine, au moyen des observations faites par M. Arago, sur des thermomètres placés à diverses profondeurs dans le jardin de l'Observatoire.

La quantité $p$ se détermine par le retard du maximum de température à une profondeur assez grande pour que les inégalités annuelles soient les seules sensibles. Ce retard de l'arrivée du maximum à une profondeur $x$, sur l'époque du maximum de $\zeta$, est $\frac{\delta}{2\pi} + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}$.

$\delta$ représente l'angle dont la tangente est $\dfrac{\frac{1}{a}\sqrt{\pi}}{p + \frac{1}{a}\sqrt{\pi}}$. Le résultat de plusieurs observations faites aussi dans le jardin de l'Observatoire, a donné pour $p$, d'après les calculs de M. Poisson,

$$p = 1,05.$$

*Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences,*

18 Novembre 1839.

**Baron THÉNARD.**

PERMIS D'IMPRIMER :

*L'Inspecteur général des Études, chargé de l'Administration de l'Académie de Paris.*

**ROUSSELLES.**