THÈSE DE MÉCANIQUE

SOUTENUE LE 26 JUILLET 1824 DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS;

SUIVIE DU PROGRAMME

DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE

qui a été soutenue le 29 juillet 1824 devant la même Faculté,

PAR HIPPOLYTE VERNIER,

Ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques élémentaires au Collége royal de Caen.

PARIS,

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,

RUE DU JARDINET, N° 12.

1824.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

PROFESSEURS.

MM. THÉNARD, DOYEN.
LACROIX.
BIOT.
DESFONTAINES.
POISSON.
GAY-LUSSAC.
FRANCOEUR.
GEOFFROY SAINT-HILAIRE.
BEUDANT.
DINET.
MIRBEL.
HACHETTE.
DE BLAINVILLE.
DULONG.
CAUCHY.

AVERTISSEMENT.

On trouvera ci-après les deux Programmes des Thèses de Mécanique et d'Astronomie, tels qu'ils ont été présentés à la Faculté des Sciences. Ce qui précède est le développement du dernier article du programme de la Thèse de Mécanique.

THÈSE

DE MÉCANIQUE.

DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS.

Cas de trois sphères en contact, dont les deux extrêmes sont égales, et les centres sur une même ligne. Intégration des équations relatives à ce cas.

1. Monsieur Poisson, dans deux Mémoires (*) sur la distribution de l'Électricité à la surface des corps conducteurs, a posé les principes généraux qui réduisent le problème à l'intégration d'équations aux différences finies variables, et a résolu ces équations dans le cas de deux sphères, soit en contact, soit à distance. Partout où les expériences de Coulomb avaient prévenu le calcul, il règne, entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience, un accord bien étonnant, si l'on considère toutes les causes d'erreur que le physicien a dû prévenir.

Je rappellerai d'abord les équations relatives au cas de deux sphères, pour y joindre quelques développemens qui trouveront leur application dans le cas que je me propose de considérer.

La fonction qui représente la somme des molécules de la couche électrique divisées par leur distance au point attiré, n'est pas la même pour un point intérieur et pour un point extérieur. Soient a et b les rayons des deux sphères, x le rayon vecteur du point attiré, et μ

(*) Tome XII des Mémoires de l'Institut, année 1811.

le cosinus de l'angle que le rayon vecteur fait avec la ligne des centres; si la somme des molécules de la couche du rayon a, divisées par leur distance à un point intérieur, est représentée par $4\varpi a\varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)$, la même somme, pour un point extérieur, sera $4\varpi\frac{a^2}{x}\varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right)$. De même, pour la sphère du rayon b, si la première somme est désignée par $4\varpi b\psi\left(\mu, \frac{x_1}{b}\right)$, la seconde le sera par $4\varpi\frac{b^2}{x_1}\psi\left(\mu, \frac{b}{x_1}\right)$, en nommant x_1 la distance du point attiré au centre de la sphère du rayon b. D'ailleurs la somme des molécules des deux couches, divisées par leur distance au point attiré, donnera, par ses différentielles relatives à trois coordonnées rectangulaires, les actions de la couche dans le sens de ces trois coordonnées, et pour que ces actions soient nulles pour les points situés dans l'intérieur de chaque sphère, on aura les deux équations.

$$a\varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{x_1}\psi\left(\mu, \frac{b}{x_1}\right) = h, \quad \frac{a^2}{x}\varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right) + b\psi\left(\mu, \frac{x_1}{b}\right) = \gamma.$$

Mais si l'on ne considère que les points situés sur la ligne des centres, on a $\mu = 1$, et les fonctions φ et ψ se réduisent à de simples fonctions de x, que je désignerai par f et F.

On peut voir d'ailleurs, dans le Mémoire cité, comment tout le problème de la distribution de l'électricité se réduit, en dernier lieu, à la détermination de ces deux fonctions, c'est-à-dire, à l'intégration des deux équations

$$af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{x_1}F\left(\frac{b}{x_1}\right) = g, \quad \frac{a^2}{x}f\left(\frac{a}{x}\right) + bF\left(\frac{x_1}{b}\right) = g,$$

dont la première aura lieu depuis $x = a$ jusqu'à $x = -a$, et la seconde, depuis $x = b$ jusqu'à $x = -b$, et où les deux constantes sont égales, comme on le reconnaît en faisant $x = a$ dans la première, et $x_1 = b$ dans la seconde.

2. Éliminant la fonction $F(x)$, on obtient l'équation (page 52 du premier Mémoire)

$$(1) \qquad f(x) - \frac{b}{b + (1+b)(1-x)}f\left(\frac{1-b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = g - \frac{gb}{1+b-x}.$$

On a d'abord, en négligeant le second membre;

$$f(x)=\frac{P}{1-x},$$

nommant P la fonction arbitraire; mais cette solution doit être négligée, pour que l'épaisseur ne soit pas infinie au contact des deux sphères.

Conservant le second membre, on a

$$f(x)=\frac{bg}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\, t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}\,dt;$$

intégrale qui suffit pour déterminer entièrement la distribution du fluide.

3. Je remarque maintenant que l'équation (1), considérée avec son second membre, sera aussi satisfaite, en supposant

$$fx=-\frac{bg}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\, t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}\,dt;$$

intégrale qui se déduit de la précédente, en changeant x en $\frac{1}{x}$, et divisant par x. Cette seconde solution se peut conclure directement des principes généraux de la théorie et de la première solution; mais il suffira, pour notre objet, de la vérifier par la substitution immédiate dans l'équation (1).

Changeant x en $\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}$, dans la seconde valeur de fx, on trouve

$$f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right)=-\frac{g[1+(1+b)(1-x)]}{1-x}\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\, t^{-\frac{b+(1+b)(1-x)}{(1+b)(1-x)}}\,dt;$$

d'où

$$fx - \frac{b}{b+(1+b)(1-x)} f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right)$$

$$= -\frac{bg}{(1+b)(1-x)}\left(\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\, t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}} dt - \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\, t^{-\frac{b+(1+b)(1-x)}{(1+b)(1-x)}} dt\right)$$

$$= \frac{bg}{(1+b)(1-x)}\left(\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}-\frac{b+(1+b)(1-x)}{(1+b)(1-x)}} - t^{-\frac{1}{1+b}-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}}{1-t} dt\right.$$

$$\left. - \int \frac{t^{-\frac{b+(1+b)(1-x)}{(1+b)(1-x)}} - t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}}{1-t} dt \right)$$

$$= \frac{bg}{(1+b)(1-x)}\left(\int_0^1 t^{-\frac{1}{1+b}-\frac{b+(1+b)(1-x)}{(1+b)(1-x)}} dt - \int t^{-\frac{b+(1+b)(1-x)}{(1+b)(1-x)}} dt\right)$$

$$= \frac{bg}{(1+b)(1-x)}\left(-\frac{(1+b)(1-x)}{1-x+b} + \frac{(1+b)(1-x)}{b}\right)$$

$$= g - \frac{bg}{1+b-x}.$$

Toutefois, cette seconde intégrale n'indique pas une nouvelle distribution de l'électricité dans le cas dont il s'agit. Elle doit être négligée d'après la théorie, comme devenant infinie pour des valeurs de x comprises entre 1 et -1. Pour le faire voir, je la transforme en faisant $t = \theta^{(1-x)(1+b)}$ désignant par θ une nouvelle variable dont les limites seront toujours 0 et 1. Il viendra

$$f(x) = -bg\int_0^1 \frac{\theta^{-(1-x)} - 1}{1-\theta^{(1-x)(1+b)}}\, \theta^{-x-bx} d\theta.$$

Et développant suivant les puissances de $\theta^{(1-x)(1+b)}$,

$$f(x) = -bg\int_0^1 \Sigma\theta^{-(1+bx)+n(1+b)(1-x)} d\theta + bg\int_0^1 \Sigma\theta^{-x-bx+n(1+b)(1-x)} d\theta,$$

et en effectuant l'intégration,

$$f(x) = -bg\Sigma\frac{1}{n(1+b)(1-x)-bx} + bg\Sigma\frac{1}{n(1+b)(1-x)-x-bx+1}.$$

Or, le terme de rang n devient infini dans la première série, quand

$$x = \frac{n(1+b)}{n(1+b)+b};$$

et dans la seconde, quand

$$x = \frac{n(1+b)+1}{n(1+b)+1+b}.$$

Ces deux valeurs sont positives et moindres que 1. Ainsi, $f(x)$ sera finie depuis 0 exclusivement jusqu'à -1 inclusivement, mais infinie pour un nombre infini de valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

4. Avant de quitter le cas de deux sphères en contact, je transformerai l'équation (1), en faisant

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x},$$

on aura

$$\frac{\varphi(x)}{1-x} - \frac{1}{1-x}\varphi\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = g - \frac{gb}{1+b-x};$$

et à cause des deux valeurs de $f(x)$, on aura les deux valeurs de $\varphi(x)$,

$$\varphi^{(1)}(x) = \frac{bg}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}-1}}{1-t}\, t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}\, dt,$$

$$\varphi^{(2)}(x) = -\frac{bg}{1+b}\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}-1}}{1+t}\, t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}\, dt;$$

dont la différence $\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(2)}(x)$ satisfera à l'équation ci-dessus, abstraction faite du second membre, puisque chacune isolément rend le premier membre égal au second. D'ailleurs, si dans la même équation on remplace partout x par $1+b-x$, ce qui ne change rien aux valeurs qui y satisfont, elle pourra s'écrire ainsi :

$$(a)\ldots -\frac{1}{b-x}\left[\varphi(1+b-x) - \varphi\left(\frac{x}{(1+b)x-b^2}\right)\right] = g\,\frac{b-x}{x}.$$

Ces remarques trouveront plus loin leur application.

5. Je viens au cas que je me propose de traiter. Soit a le rayon des sphères extrêmes, b celui de la sphère du milieu. Désignons par F, comme dans le cas de deux sphères, la fonction relative à la sphère du milieu et de rayon b, fonction d'où dépend toute la solution du problème, et par f la fonction analogue pour la sphère extrême de la droite, laquelle sera aussi la même pour la sphère extrême à gauche, à cause de la disposition symétrique du fluide. Désignant par x et x_1 les distances des points de la ligne des centres aux centres de la sphère du rayon b, et de celle du rayon a, qui est à droite, on désignera par x_2 les distances analogues au centre de la sphère extrême de la gauche; et alors x, x_1 et x_2 sont liés par les deux équations, $x+x_1=c$, $x_2-x=c$, en faisant $c=a+b$.

Cela posé, la condition que l'action des trois sphères sur un point de la ligne des centres, pris à l'intérieur de chacune d'elles, soit égale à zéro, fournira les deux équations,

$$bF\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{a^2}{x_1}f\left(\frac{a}{x_1}\right)+\frac{a^2}{x_2}f\left(\frac{a}{x_2}\right)=g,$$
$$af\left(\frac{x_1}{a}\right)+\frac{b^2}{x}F\left(\frac{b}{x}\right)+\frac{a^2}{x_2}F\left(\frac{a}{x_2}\right)=g.$$

La première aura lieu depuis $x=b$ jusqu'à $x=-b$, la seconde, depuis $x=a$ jusqu'à $x=-a$.

On reconnaît que la constante g est la même dans les deux équations, parce que, si l'on fait $x=b$ dans la première, d'où $x_1=a$, $x_2=a+2b$, et $x_1=a$ dans la seconde, d'où $x=b$, $x_2=a+2b$, le premier membre de chacune d'elles devient égal à

$$bF(1)+af(1)+\frac{a^2}{a+2b}f(1).$$

Remplaçant, dans la première équation, x_1 et x_2 par leurs valeurs en x tirées des équations $x+x_1=c$, $x_2-x=c$; et dans la seconde, remplaçant x et x_2 par leurs valeurs en x_1 tirées des mêmes équations; on aura

$$(1)\qquad bF\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{a^2}{c-x}f\left(\frac{a}{c-x}\right)+\frac{a^2}{c+x}f\left(\frac{a}{c+x}\right)=g,$$
$$(2)\qquad af\left(\frac{x_1}{a}\right)+\frac{b^2}{c-x_1}F\left(\frac{b}{c-x_1}\right)+\frac{a^2}{2c-x_1}f\left(\frac{a}{2c-x_1}\right)=g.$$

On éliminera F (x) comme dans le cas de deux sphères, en faisant, dans la première équation,

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c-x'},$$

x' étant une nouvelle variable qui pourra recevoir toutes les valeurs comprises depuis $x'=a$ jusqu'à $x'=-a$, car il n'en résultera pour x que des valeurs comprises entre b et $-b$. L'équation (1) devient alors

$$b\mathrm{F}\left(\frac{b}{c-x'}\right)+\frac{a^2(c-x')}{c^2-b^2-cx'}f\left(\frac{a(c-x')}{c^2-b^2-cx'}\right)+\frac{a^2(c-x')}{c^2+b^2-cx'}f\left(\frac{a(c-x')}{c^2+b^2-cx'}\right)=g.$$

On la multipliera par $\frac{b}{c-x'}$, on en retranchera l'équation (2), et il restera en supprimant les accens, puisque x' et x_{1} varient toutes deux dans les limites $+a$ et $-a$, et en faisant, pour simplifier, $a=1$,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{c^2-b^2-cx}f\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right)+\frac{b}{c^2+b^2-cx}f\left(\frac{c-x}{c^2+b^2-cx}\right)\\ \qquad -f(x)-\frac{1}{2c-x}f\frac{1}{2c-x}\end{array}\right\}=\frac{gb}{c-x}-g.$$

On peut remplacer partout x par $c-x$, ou $1+b-x$, seulement l'équation qui avait lieu depuis 1 jusqu'à -1, c'est-à-dire, dans l'étendue du diamètre de la sphère extrême à laquelle appartient la fonction f, aura lieu maintenant depuis la valeur de x, qui donne $1+b-x=1$, jusqu'à celle qui donne $1+b-x=-1$; c'est-à-dire, depuis $x=b$ jusqu'à $x=b+2$. D'ailleurs, l'équation ci-dessus va être résolue identiquement; et on a déjà vu, dans le cas de deux sphères, que la considération des limites n'était nécessaire que pour exclure les solutions qui n'ont pas de rapport à la question Physique. Le remplacement de x par $1+b-x$ donne

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{cx-b^2}f\left(\frac{x}{cx-b^2}\right)+\frac{b}{cx+b^2}f\left(\frac{x}{cx+b^2}\right)\\ -f(1+b-x)-\frac{1}{c+x}f\left(\frac{1}{c+x}\right)\end{array}\right\}=g\,\frac{b-x}{x}.$$

Je fais maintenant

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x},$$

et substituant, remplaçant c par $1+b$, j'ai l'équation

$$(\mathrm{A})\ldots \left.\begin{array}{l} \frac{1}{b+x}\left[\varphi\left(\frac{x}{b^2+(1+b)x}\right) - \varphi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)\right] \\ -\frac{1}{b-x}\left[\varphi\left(\frac{-x}{b^2-(1+b)x}\right) - \varphi(1+b-x)\right] \end{array}\right\} = g.\frac{b-x}{x},$$

équation qui ne diffère de l'équation (a) du n° 4 que par l'addition au second membre de la partie

$$\frac{1}{b+x}\left[\varphi\left(\frac{x}{b^2+(1+b)x}\right) - \varphi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)\right].$$

6. Faisant d'abord abstraction du second membre, on satisfait évidemment en supposant $\varphi(x)$ égale à une constante, ou à une fonction de x assujettie à ne pas changer quand on remplacera x par trois fonctions différentes. Et comme on a fait

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x},$$

on aura

$$f(x) = \frac{c}{1-x}.$$

Si c est une constante, elle est nulle dans le problème dont il s'agit, sans quoi, $\mathrm{F}(x)$ serait infinie pour $x = 1$, d'où l'on déduirait une épaisseur infinie au point de contact des deux sphères. Si c est une fonction de x, il faudra qu'elle soit nulle pour $x = 1$.

7. La partie du premier membre de l'équation (A), qui renferme le diviseur $b+x$, se conclurait par le simple changement de x en $-x$ de la partie qui contient le diviseur $b-x$, si au lieu de la fonction $\varphi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)$, elle renfermait la fonction $\varphi(1+b+x)$. Donc, toute fonction qui ne changerait pas par le changement de x en $\frac{1}{x}$, et qui donnerait

$$(1)\qquad -\frac{1}{b-x}\Big[\varphi\left(\frac{-x}{b^2-(1+b)x}\right)-\varphi(1+b-x)=0$$

donnerait aussi

$$\frac{1}{b+x}\Big[\varphi\left(\frac{x}{b^2+(1+b)x}\right)-\varphi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)\Big]=0.$$

Ainsi, cette fonction rendra nulles les deux parties du premier membre de l'équation (A), et étant multipliée par une constante, elle sera une nouvelle solution générale de l'équation (A) sans second membre.

Or, on a posé (n° 4), que l'équation (1) était satisfaite en faisant

$$\varphi(x)=\varphi^{(1)}(x)-\varphi^{(2)}(x)=\frac{bg}{1+b}\left(\int_0^1\frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\,t^{\frac{bx}{(1+b)(1+x)}}dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1\frac{t^{-\frac{1}{(1+b)}}-1}{1-t}\,t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}dt\right).$$

D'ailleurs, cette fonction ne change pas par le changement de x en $\frac{1}{x}$; donc elle satisfait à l'équation (A) sans second membre, et à cause de $f(x)=\frac{\varphi x}{1-x}$, on aura, en multipliant par une constante c', dans laquelle on comprendra le coefficient $\frac{bg}{1+b}$,

$$fx=\frac{c'}{1-x}\int_0^1\frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\left(t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}+t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}dt\right)$$

Mais nous avons remarqué aussi que la seconde partie de cette intégrale devenait infinie pour un nombre infini de valeurs de x comprises entre 0 et 1.

8. Je prends maintenant l'équation complète

$$(\mathrm{A})\ldots\left.\begin{array}{l}\frac{1}{b+x}\Big[\varphi\left(\frac{x}{b^2+(1+b)x}\right)-\varphi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)\Big]\\ -\frac{1}{b-x}\Big[\varphi\left(\frac{-x}{b^2-(1+b)x}\right)-\varphi(1+b-x)\end{array}\right\}=g\frac{b-x}{x};$$

et j'essaie d'y satisfaire, en ayant égard à son second membre, par une fonction de la forme $\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, en examinant cette équation, on reconnaît qu'il suffira de déterminer une fonction $\varphi(x)$, qui satisfasse à la fois aux deux équations

$$(1)\quad \frac{1}{b+x}\varphi(1+b+x)+\frac{1}{b-x}\varphi(1+b-x)=-g,\ \varphi(x)=-\varphi\left(\frac{1}{x}\right);$$

car, changeant x en $\frac{b^2}{x}$ dans la première, on aura, en multipliant par b, et divisant par x,

$$(2)\quad \frac{1}{b+x}\varphi\left(\frac{b^2+(1+b)x}{x}\right)-\frac{1}{b-x}\varphi\left(\frac{b^2-(1+b)x}{-x}\right)=-\frac{gb}{x};$$

et à cause de $\varphi(x)=-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, les équations (1) et (2) pourront s'écrire ainsi :

$$-\frac{1}{b+x}\varphi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)+\frac{1}{b-x}\varphi(1+b-x)=-g,$$

$$\frac{1}{b+x}\varphi\left(\frac{x}{b^2+(1+b)x}\right)-\frac{1}{b-x}\varphi\left(\frac{-x}{b^2-(1+b)x}\right)=\frac{gb}{x};$$

et en les ajoutant, on reproduit l'équation (A). Cela posé, l'équation $\varphi(x)=-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ est satisfaite pour toute fonction de la forme

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il reste donc à déterminer $\psi(x)$ de manière que l'équation (1) le soit aussi, ou que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{b+x}\left[\psi(1+b+x)-\psi\left(\frac{1}{1+b+x}\right)\right]\\ +\frac{1}{b-x}\left[\psi(1+b-x)-\psi\left(\frac{1}{1+b-x}\right)\right]\end{array}\right\}=-g.$$

Pour satisfaire à cette équation, il suffira que l'on ait

$$(\mathrm{B})\quad \frac{1}{b+x}\psi(1+b+x)-\frac{1}{b-x}\psi\left(\frac{1}{1+b-x}\right)=-\tfrac{1}{2}g+u;$$

nommant u une fonction arbitraire de x assujettie à la seule condition de ne changer que de signe par le changement de x en $-x$; car, changeant x en $-x$ dans l'équation (B), et ajoutant, on reproduira la première équation en ψ.

Ainsi, la fonction ψ est donnée par une équation dont le second membre renferme une fonction arbitraire de x d'une espèce très générale ; et autant on donnera de formes particulières à u, autant on déterminera d'équations différentes en ψ. On remarquera seulement que ces diverses valeurs de ψ contiendront toutes la même fonction arbitraire, puisque ces équations auront toutes le même premier membre.

Je fais dans l'équation (B),

$$\psi(x) = (x-1)\varpi(x),$$

et elle devient, en faisant $1+b=c$,

$$\varpi(c+x) + \frac{1}{c-x}\varpi\left(\frac{1}{c-x}\right) = -\tfrac{1}{2}g + u.$$

On a fait successivement,

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x}, \quad \varphi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right), \quad \psi(x) = (x-1)\varpi(x);$$

d'où l'on déduit que quand $\varpi(x)$ sera connu, on aura

$$\varphi(x) = (x-1)\varpi(x) - \frac{1-x}{x}\varpi\left(\frac{1}{x}\right) = (x-1)\left[\varpi x + \frac{1}{x}\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

et par conséquent,

$$f(x) = -\left[\varpi(x) + \frac{1}{x}\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

9. Considérons d'abord l'équation sans second membre,

$$\varpi(c+x) + \frac{1}{c-x}\varpi\left(\frac{1}{c-x}\right) = 0,$$

ou, en remplaçant x par $x-c$,

$$\varpi(x) + \frac{1}{2c-x}\varpi\left(\frac{1}{2c-x}\right) = 0.$$

Je pose

$$\varpi(x) = \frac{\varpi'(x)}{1+mx};$$

m étant une constante que l'on déterminera convenablement ; il vient

$$\frac{1}{1+mx}\varpi'(x) + \frac{1}{2c-x+m}\varpi'\left(\frac{1}{2c-x}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{1}{1+mx}\varpi'(x) - \frac{m}{mx-2cm-m^2}\varpi'\left(\frac{1}{2c-x}\right) = 0.$$

Si donc on fait

$$-2cm - m^2 = 1, \quad \text{ou} \quad m^2 + 2cm + 1 = 0,$$

on aura, en multipliant toute l'équation par $1+mx$,

$$\varpi'(x) - m\varpi'\left(\frac{1}{2c-x}\right) = 0.$$

Cela posé, soient m, m', les deux racines de l'équation

$$1 + 2cm + m^2 = 0,$$

racines toutes deux négatives à cause de $c = 1+b$. Si l'on change x en $\frac{1}{2c-x}$, dans la fonction $\frac{1+mx}{1+m'x}$, elle devient

$$\frac{2c-x+m}{2c-x+m'} = \frac{m'}{m}\cdot\frac{2cm+m^2-mx}{2cm'+m'^2-m'x} = \frac{m'}{m}\cdot\frac{1+mx}{1+m'x}.$$

Soit donc

$$\varpi'(x) = \left(\frac{1+mx}{1+m'x}\right)^n;$$

nommant n un exposant inconnu, il faudra que l'on ait

$$\left(\frac{1+mx}{1+m'x}\right)^n - m\left(\frac{m'}{m}\cdot\frac{1+mx}{1+m'x}\right)^n = 0;$$

d'où $\qquad n = \frac{1}{2}$, à cause de $mm' = 1$.

Ainsi, nommant c'' une fonction qui ne change pas par le changement de x en $\frac{1}{2c-x}$, on aura

$$\varpi'(x) = c''\sqrt{\frac{1+mx}{1+m'x}};$$

d'où

$$\varpi(x) = \frac{c''}{1+mx}\sqrt{\frac{1+mx}{1+m'x}} = \frac{c''}{\sqrt{1-2cx+x^2}}.$$

Une remarque nécessaire, c'est que, si l'on voulait vérifier cette valeur de $\varpi(x)$, par la substitution immédiate dans l'équation en ϖ, il faudrait substituer la valeur, non simplifiée,

$$\varpi(x) = \frac{c''}{1+mx}\sqrt{\frac{1+mx}{1+m'x}};$$

car si l'on substituait la valeur simplifiée, le résultat de la substitution se composerait de deux parties égales, mais de même signe, et ne serait pas zéro.

Connaissant $\varpi(x)$, on en conclut $f(x)$, comme il a été dit précédemment par la relation

$$F(x) = -\left[\varpi(x) + \frac{1}{x}\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

cette valeur de $\varpi(x)$ a été déterminée par un calcul tout-à-fait analogue à celui de l'article (1) du second Mémoire de M. Poisson. Elle est la même, à quelque différence près, que l'intégrale de l'équation relative au cas de deux sphères non en contact, et considérée sans second membre. La fonction c'' se déterminera comme dans le Mémoire cité, en observant que la fonction $\frac{1+mx}{1+m'x}$ devenant $\frac{m'}{m}\cdot\frac{1+mx}{1+m'x}$ par le changement de x en $\frac{1}{2c-x}$, son logarithme augmente de la quantité $L.\frac{\mu'}{\mu}$, que je désignerai par μ; de sorte que l'on aura, nommant π une fonction entièrement arbitraire,

$$c'' = \pi\left[\cos\left(\frac{2\varpi}{\mu}L.\frac{1+mx}{1+m'x}\right),\quad \sin\left(\frac{2\varpi}{\mu}L.\frac{1+mx}{1+m'x}\right)\right].$$

Mais on démontrera, comme dans le Mémoire cité, que cette fonction doit être nulle dans le problème dont il s'agit, puisque $f(x)$ demeure réelle et finie depuis $x=1$ jusqu'à $x=-1$.

10. Je reprends l'équation (B), en ayant égard au terme $-\frac{1}{2}g$ de son second membre. On peut satisfaire à l'équation

$$\varpi(x)+\frac{1}{2c-x}\varpi\left(\frac{1}{2c-x}\right)=-\frac{g}{2},$$

en posant

$$\varpi(x)=-\frac{g}{2}\left[\psi_0(x)+\psi_1(x)+\ldots+\psi_n(x)\ldots\right],$$

représentant par $\psi_n(x)$ une fonction telle que l'on ait

$$\psi_0(x)=1,\quad \text{et}\quad \psi_{n+1}(x)+\frac{1}{2c-x}\psi_{(n)}\left(\frac{1}{2c-x}\right)=0.$$

On fera pour cela,

$$\psi_n(x)=\frac{1}{A_n+B_n.x};$$

car on aura, pour déterminer A_n et B_n, l'équation

$$\frac{1}{A_{n+1}+B_{n+1}.x}+\frac{1}{A_n(2c-x)+B_n}=0;$$

d'où

$$A_{n+1}=-2cA_n-B_n,\quad B_{n+1}=A_n;$$

d'où l'on tire aisément

$$B_n=p\alpha^n+q\alpha'^n,\quad A_n=p\alpha^{n+1}+q\alpha'^{n+1},$$

nommant p et q deux constantes arbitraires; et α, α' les deux racines de l'équation

$$\alpha^2+2c\alpha+1=0.$$

On aura donc

$$\psi_n(x)=\frac{1}{p\alpha^{n+1}+q\alpha'^{n+1}+(p\alpha^n+q\alpha'^n)x}.$$

Les constantes p et q se détermineront par la condition $\psi_0(x)=1$; car, posant $n=0$, on aura

$$\frac{1}{p\alpha + q\alpha' + (p+q)x} = 1;$$

d'où

$$p = \frac{1}{\alpha - \alpha'}, \quad q = -\frac{1}{\alpha - \alpha'};$$

par conséquent,

$$\psi_n(x) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1} + (\alpha^n - \alpha'^n)x};$$

d'où

$$\varpi(x) = -\frac{g}{2}\Sigma\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1} + (\alpha^n - \alpha'^n)x};$$

et à cause de l'équation n° (8),

$$f(x) = -\left[\varpi(x) + \frac{1}{x}\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

il viendra

$$f(x) = \frac{g}{2}\Sigma\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1} + (\alpha^n - \alpha'^n)x} + \frac{g}{2}\Sigma\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha^n - \alpha'^n + (\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1})x},$$

séries nécessairement convergentes à cause de $\alpha\alpha' = 1$.

La première ne deviendra pas infinie depuis $x = 1$ jusqu'à $x = -1$; il faudrait pour cela que l'on pût avoir

$$\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1} + (\alpha^n - \alpha'^n)x = 0;$$

d'où

$$x = -\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha^n - \alpha'^n} = -\frac{\alpha^n + \alpha^{n-2} + \alpha^{n-4} + \ldots + \alpha^{-n}}{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha^{-(n-1)}},$$

à cause de $\alpha\alpha' = 1$, ou bien :

$$x = -\frac{\alpha[\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha^{-(n+1)}]}{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha^{-(n-1)}};$$

et comme on peut supposer que α soit celle des deux racines dont la valeur absolue est plus grande que l'unité, la valeur de x sortirait des limites -1 et $+1$.

Mais la seconde série devient infinie, pour une infinité de valeurs négatives de x; car l'équation

$$\alpha^n - \alpha'^n + (\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1})x = 0$$

donne

$$x = -\frac{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha^{-(n-1)}}{\alpha[\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha^{-(n-1)}]},$$

valeur négative moindre que 1, puisque α est négatif et celle des deux racines qui est plus grande que 1.

11. Réunissons maintenant les résultats des articles 6, 7, 9, 10. Désignons pour abréger, par $c''\varpi(x)$ la solution

$$\frac{c''}{1+mx}\sqrt{\frac{1+mx}{1+m'x}}$$

de l'article 9, et par $\varphi(x)$ toute valeur satisfaisant à l'équation (B) de l'article 8, dans les différentes formes que l'on peut donner à la fonction u, et l'on aura pour intégrale de l'équation en f,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{c}{1-x} + \frac{c'}{1-x}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{2}{1+b}-1}}{1+t}\left(t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}} + t^{-\frac{b}{(1+b)(1-x)}}\right)dt \\ - c''\left[\varpi(x) + \frac{1}{x}\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \left[\varphi(x) + \frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ + \frac{g}{2}\Sigma\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1}+(\alpha^n-\alpha'^n)x} + \frac{g}{2}\Sigma\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha^n-\alpha'^n+(\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1})x}. \end{aligned}$$

Ce qui reste à faire, c'est d'exclure de cette solution générale tout ce qui est étranger à la question, et d'en déduire une intégrale toujours réelle et finie, depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$ inclusivement, qui puisse servir à déterminer la distribution du fluide électrique sur la surface des trois sphères, et cette partie du problème, la plus importante sous le rapport physique, sera l'objet de nouvelles recherches que nous nous proposons d'entreprendre.

PROGRAMME

DE LA THÈSE DE MÉCANIQUE.

De la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.

Notions de Physique nécessaires pour l'application du calcul.

L'action de la couche électrique qui recouvre un corps de forme quelconque, dépend de la fonction qui représente la somme des molécules de la couche, divisées par leur distance au point attiré. Cette fonction n'est pas la même pour un point extérieur et pour un point intérieur. Son expression en série, dans les deux cas.

Condition nécessaire à la permanence de l'état électrique de plusieurs corps soumis à leur influence mutuelle. Cette condition comprend celle de l'équilibre des couches fluides qui recouvrent leur surface.

Épaisseur de la couche fluide à la surface des sphéroïdes peu différens de la sphère, et, en particulier, à la surface de l'ellipsoïde.

La répulsion électrique, à la surface d'un corps de forme quelconque, est proportionnelle à l'épaisseur de la couche.

Distribution de l'électricité à la surface de deux sphères en contact.

La fonction qui représente la somme des molécules de chaque couche, divisées par leur distance à un point attiré extérieur à la couche, se peut déduire de la fonction qui représente la même somme pour un point attiré intérieur.

Ces fonctions se simplifient pour les points situés sur la ligne des centres, et quand on les connaîtra dans ce cas particulier, on en pourra conclure celles qui sont relatives à un point situé hors de la ligne des centres. On connaîtra aussi l'épaisseur de la couche en un point quelconque.

Équations aux différences variables, d'où dépendent ces fonctions.

Intégration de ces équations.

L'épaisseur est nulle au contact des sphères.

Rapport des épaisseurs moyennes de la couche électrique qui recouvre chacune des deux sphères.

L'épaisseur moyenne est toujours la plus grande sur chacune des deux sphères, bien que la quantité totale d'électricité soit toujours la plus grande sur la sphère du plus grand rayon, et le rapport des épaisseurs moyennes augmente à mesure que le plus petit rayon diminue. Mais ce rapport a une limite égale au sixième du carré de la circonférence dont le diamètre est l'unité, qu'il atteindrait si le plus petit rayon devenait infiniment petit.

Épaisseurs aux extrémités des diamètres opposés au point de contact. Leur rapport, à mesure que le plus petit rayon diminue, tend vers une limite indépendante du plus petit rayon, et égale à 4,20721.

Cas de trois sphères en contact, dont les centres sont sur une même ligne, et les deux sphères extrêmes de même rayon. Intégration des équations relatives à ce cas.

PROGRAMME

DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE.

Figures des Planètes.

Expressions en intégrales triples des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur et sur un point extérieur.

Si le point attiré est à l'intérieur, ou à la surface de l'ellipsoïde, on peut intégrer deux fois de suite, et ramener la question aux quadratures. La troisième intégration s'effectue si l'ellipsoïde est de révolution.

Théorème au moyen duquel les formules de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur se réduisent de celles qui sont relatives à un point extérieur.

Une masse fluide homogène, et douée d'un mouvement de rotation, peut demeurer en équilibre avec la figure d'un ellipsoïde de révolution.

L'équation qui détermine le rapport du demi-axe de l'équateur à celui du pôle, admet alors deux racines réelles, d'où résulte un premier sphéroïde peu différent de la sphère, où le rapport des axes, dans le cas particulier de la Terre, est celui de 230,7 à 231,7; et un second sphéroïde très aplati où ce rapport est celui de 1 à 680,9.

Une masse fluide homogène, d'une densité égale à la moyenne densité de la Terre, ne peut être en équilibre avec une figure elliptique, si le temps de sa rotation est moindre que 0^j.10090, et si la densité de la masse fluide est différente de celle de la Terre; on aura le temps de rotation dans lequel l'équilibre cesse d'être possible, en multipliant $0^{l},10090$ par la racine carrée du rapport de la densité moyenne de la Terre à celle de la masse fluide.

Du développement des fonctions en séries de quantités périodiques. Ce mode de développement ne représente la fonction que dans des limites déterminées.

Propriétés analytiques des termes de ce développement.

Après avoir établi la légitimité de ce mode de développement, et le sens que l'on doit y attacher, on en conclut aisément l'expression en séries convergentes des attractions d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, homogène ou hétérogène, sur un point extérieur et sur un point intérieur.

Equation générale de l'équilibre d'une masse fluide de figure peu différente de celle de la sphère, homogène ou hétérogène, tournant autour d'un axe fixe, et sollicitée par des attractions variables en raison inverse du carré de la distance. Cette équation suppose le rayon du sphéroïde développé en séries de quantités périodiques, et sert à déterminer le terme général du développement.

Expression de la pesanteur à la surface.

Si la masse fluide est homogène, et n'est sollicitée que par la force centrifuge et l'attraction de ses molécules, elle ne peut être qu'un ellipsoïde de révolution, sur lequel les accroissemens de la pesanteur et les diminutions de rayon sont, à très peu près, proportionnels au carré du sinus de la latitude. Ainsi, la figure elliptique et de révolution n'est pas seulement, comme on l'a vu, compatible avec l'équilibre, mais elle en est une condition nécessaire.

Vu et approuvé,

le doyen de la Faculté des Sciences,

THÉNARD.

Permis d'imprimer

Pour S. Ex. le Grand-Maître de l'Université,

L'inspecteur général délégué,

ROUSSELLE.