

H.F. n. f. 166 (23) 1a

2700

N° D'ORDRE :

681.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. E. CARVALLO,

Professeur au Lycée Saint-Louis.



1<sup>re</sup> THÈSE. — INFLUENCE DU TERME DE DISPERSION DE BRIOT SUR LES LOIS DE LA DOUBLE RÉFRACTION.

2<sup>e</sup> THÈSE. — MÉTHODE PRATIQUE POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES OU TRANSCENDANTES.

Soutenues le 27 février 1890, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*  
APPELL, } *Examineurs.*  
POINCARÉ, }



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890



# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
<b>DOYEN</b> .....	DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
<b>PROFESSEURS HONORAIRES</b> ..	{ PASTEUR.	
	{ DUCHARTRE.....	Botanique.
	HÉBERT, Doyen honoraire.	Géologie.
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE .....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	O. BONNET.....	Astronomie.
	TISSERAND.....	Astronomie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
<b>PROFESSEURS</b> .....	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ.....	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
<b>PROFESSEURS ADJOINTS</b> .....	{ WOLF.....	Physique céleste.
	{ CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY.....	Chimie.
<b>SECRETARE</b> .....	PHILIPPON.	

A M. CORNU,

A M. BOUTY,

A M. POINCARÉ.

Hommage de reconnaissance.

E. CARVALLO.

---

# PREMIÈRE THÈSE.

---

## MÉMOIRE SUR L'OPTIQUE.

---

### INFLUENCE DU TERME DE DISPERSION DE BRIOT

SUR LES  
LOIS DE LA DOUBLE RÉFRACTION.

---

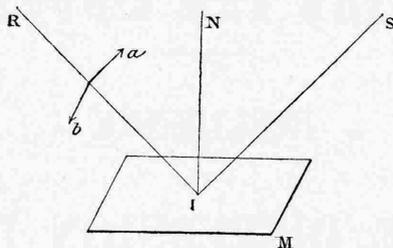
#### INTRODUCTION.

1. En étudiant la dispersion de la lumière dans le spath d'Islande, j'ai rencontré des particularités dont les conséquences peuvent apporter d'importants documents sur la théorie de la lumière. Celle qui m'a paru le plus remarquable, et que je me propose d'approfondir surtout dans ce Mémoire, est relative au terme de Briot : elle permet de trancher entre l'hypothèse de Fresnel et celle de Mac-Cullagh et Neumann sur la position de la vibration lumineuse par rapport au plan de polarisation d'un rayon polarisé rectilignement.

Considérons un faisceau lumineux parallèle, réfléchi par le miroir M (*fig. 1*) et suivant le chemin SIR. Pour une incidence convenable, le rayon IR est *polarisé* : la vibration lumineuse est rectiligne, perpendiculaire au rayon; de plus, elle est ou dans le plan de polarisation, suivant *a*, ou perpendiculaire à ce plan, suivant *b*. C'est une conséquence mathématique de l'expérience de Fresnel et Arago, dans laquelle *deux rayons polarisés et sensiblement parallèles interfèrent si les plans de polarisation sont parallèles et n'interfèrent pas si ces plans sont perpendiculaires.*

Tout le monde est d'accord sur ce point. Mais la vibration est-elle perpendiculaire au plan de polarisation, suivant l'hypothèse de Fresnel? Est-elle au contraire dans le plan de polarisation, comme le

Fig. 1.



veulent Mac Cullagh et Neumann? Telle est la grande et longue querelle.

« Il paraît difficile, dit Lamé, de décider par l'expérience laquelle de ces deux directions est la véritable; car, quelle que soit celle qu'on adopte, les deux rayons réfractés (dans un milieu biréfringent) sont polarisés à angle droit, et toutes les conséquences relatives à la polarisation sont les mêmes. »

En parlant ainsi, le célèbre physicien n'entend s'occuper que du terme principal de l'équation du mouvement lumineux. Je pense que la question peut au contraire être résolue par l'étude des termes de dispersion, et j'espère pousser la démonstration assez loin pour convaincre la généralité des physiciens et des géomètres en ne leur demandant que des choses admises par tous. Mais cette question m'a conduit à diverses recherches dont plusieurs ont été fructueuses et que je dois faire connaître, notamment sur les formules d'interpolation et les formules de dispersion, et sur les erreurs systématiques des mesures goniométriques. Le Mémoire sera partagé en quatre Chapitres. Le premier traite des formules d'interpolation, préliminaire nécessaire au deuxième Chapitre; celui-ci, par l'étude des formules de dispersion, pose les bases du troisième Chapitre, où l'on s'occupe de l'influence de la dispersion sur les lois de la double réfraction. Enfin, le quatrième fournit le contrôle de la théorie par l'étude expérimentale dans le spath d'Islande.



## CHAPITRE I.

## FORMULES D'INTERPOLATION ET DE DISPERSION.

2. Une formule de *dispersion* est une relation à coefficients numériques applicable à une certaine étendue du spectre et qui lie l'indice de réfraction à la longueur d'onde. Dans la recherche d'une pareille formule, comme dans celle de toute formule d'*interpolation*, on rencontre deux sortes de difficultés : c'est d'abord le choix de la forme analytique qu'on doit adopter; celle-ci dépend des idées théoriques particulières au sujet; j'en remets donc l'étude à un autre Chapitre et me contente de dire ici que, résultant d'un développement en série, la formule sera linéaire par rapport aux coefficients inconnus. La forme étant choisie, il s'agit de faire concourir toutes les observations, chacune avec le poids qui lui convient, à la détermination des coefficients en nombre moindre que contient la formule.

Deux méthodes principales sont usitées pour cet objet, celle de Cauchy inventée tout exprès pour ses études sur la dispersion, et celle de Legendre (méthode des moindres carrés). La deuxième seule est conforme au Calcul des Probabilités; néanmoins la première lui est généralement préférée, à cause des grands avantages pratiques qu'elle présente.

La divergence des deux méthodes vient de ce que les formules de Cauchy, prises dans leur sens restreint, fixent d'une façon absolue, et différente de celle des moindres carrés, les combinaisons à faire des observations. J'ai pu heureusement leur donner une grande généralité. La souplesse qu'elles y gagnent permet de leur faire représenter telles combinaisons que l'on veut des observations, par suite de les adapter à la méthode des moindres carrés en conservant tous leurs avantages pratiques.

Bien plus, elle permet de modifier, dans le cours des calculs, le poids d'une ou plusieurs observations. Ces modifications sont quelque-

fois nécessitées par une évaluation erronée de la précision des expériences; d'autres fois, elles simplifient les calculs sans leur faire perdre de leur exactitude; dans tous les cas, elles permettent de faire la part de ce que la méthode des moindres carrés présente d'utiles indications et de ce qu'elle offre de dangereuses illusions.

J'exposerai la méthode de Cauchy, puis la généralisation et l'adaptation de ses formules à la méthode des moindres carrés; enfin je présenterai quelques observations critiques sur les deux méthodes.

### § I. — Méthode de Cauchy.

3. Soit à déterminer les coefficients  $a, b, c, \dots$  de la formule

$$(1) \quad y = au + bv + cw + \dots,$$

dans laquelle des systèmes de valeurs simultanées des variables  $y, u, v, w, \dots$  peuvent être déterminés expérimentalement. A chaque observation correspond une égalité telle que la précédente, de sorte que l'observation de rang  $i$  donne

$$y_i = au_i + bv_i + cw_i + \dots$$

Généralement, le second membre de la formule (1) résulte d'un développement en série, de sorte que les termes décroissent rapidement; cette remarque a conduit Cauchy à procéder par approximations successives.

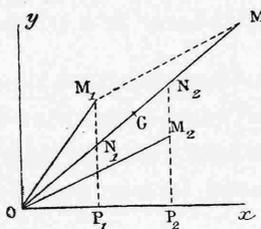
4. *Première approximation.* — Je suppose d'abord que les termes qui suivent le premier sont négligeables; alors les observations, au nombre de  $n$ , donnent, pour déterminer  $a$ , les égalités

$$y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2, \quad \dots, \quad y_n = au_n.$$

Je prends deux axes coordonnés  $Ox, Oy$  (*fig. 2*); je considère le point  $M_1$ , qui a pour coordonnées  $OP_1 = u_1, P_1M_1 = y_1$ , et je joins  $OM_1$ . Le coefficient angulaire de  $OM_1$  est  $\frac{y_1}{u_1}$ ; c'est donc la valeur qui résulterait pour  $a$  de la première des égalités (1). A chaque égalité répond de même une droite dont le coefficient angulaire est une détermination

de  $a$ . Si donc les observations étaient exactement concordantes, toutes ces droites coïncideraient en direction; mais il n'en est pas généralement ainsi. La solution de Cauchy consiste à prendre la résultante  $OM$  (1) des droites  $OM_1, OM_2, \dots, OM_n$  et à adopter pour valeur de l'inconnue  $a$  le coefficient angulaire de cette résultante  $OM$ . Pour obtenir celle-ci, il suffit, comme on sait, de joindre le point  $O$  au centre

Fig. 2.



de gravité  $G$  des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$  et de porter sur la droite obtenue le segment  $OM = n OG$ . Reste à représenter l'écart entre l'observation et le calcul. La valeur de  $y$  correspondante à  $u_1$  est, par la première observation,  $y_1 = P_1M_1$ ; si j'appelle  $N_1$  l'intersection de  $P_1M_1$  avec  $OM$ , la valeur correspondante à l'abscisse  $u_1$  est  $au_1 = P_1N_1$ .

L'écart entre l'observation et le calcul est donc

$$P_1M_1 - P_1N_1 = N_1M_1.$$

Cette explication géométrique, que j'ai cru devoir substituer à l'explication analytique de Cauchy, conduit aux conclusions suivantes :

1° On reconnaît dans la solution adoptée une généralisation de la moyenne arithmétique;  $G$  mérite bien le nom de *point moyen*,  $OG$  celui de *direction moyenne*; d'après une propriété des centres de gravité, la somme algébrique des écarts  $N_1M_1, N_2M_2, \dots$  est égale à zéro comme pour les moyennes arithmétiques.

2° On doit supposer toutes les valeurs de  $u$  positives; si  $u_1$ , par exemple, était négatif, on devrait, pour ne pas diminuer la précision du résultat, changer les signes des deux membres de la première égalité. Il suffit, pour s'en convaincre, d'imaginer le cas extrême où la somme  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  serait nulle. Le point  $M$ , qui aurait pour abscisse

(1) La figure représente la construction pour deux points  $M_1, M_2$ .

cette somme nulle ne pourrait pas faire connaître la direction moyenne cherchée.

3° De ce qui précède résulte cette règle :

*Ajouter membre à membre les égalités*

$$(1) \quad y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2, \quad \dots, \quad y_n = au_n,$$

*après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles par +1 ou -1, suivant que la valeur correspondante de u est positive ou négative.*

J'appelle  $y_a$  et  $u_a$  les sommes obtenues dans le calcul de  $a$ , et que (pour me servir d'une expression empruntée à la Mécanique) j'appelle *valeurs résultantes* des nombres  $y$  et des nombres  $u$  affectés des poids +1 ou -1. L'équation ainsi formée pour le calcul de l'inconnue  $a$  s'écrit

$$(2) \quad y_a = au_a,$$

d'où l'on tire

$$(A) \quad a = \frac{y_a}{u_a}.$$

Les écarts entre l'observation et le calcul sont

$$\Delta y_1 = y_1 - \frac{y_a}{u_a} u_1, \quad \Delta y_2 = y_2 - \frac{y_a}{u_a} u_2, \quad \dots, \quad \Delta y_n = y_n - \frac{y_a}{u_a} u_n.$$

Comme vérification des calculs numériques, la valeur résultante de ces différences doit être nulle; car elle a pour expression

$$[\Delta y]_a = \left( y - \frac{y_a}{u_a} u \right)_a = y_a - \frac{y_a}{u_a} u_a = 0.$$

5. *Deuxième approximation.* — Ces écarts doivent présenter les caractères d'erreurs accidentelles; s'il n'en est pas ainsi, c'est que certains termes négligés doivent être rétablis, et l'équation (1) doit s'écrire, en introduisant par exemple le deuxième terme,

$$(1) \quad y = au + bv.$$

L'équation résultante (2) de la première approximation s'écrira

alors

$$(2) \quad y_a = au_a + bv_a.$$

Je vais combiner les égalités (1) et (2) de manière à mettre en évidence les différences du premier ordre. Pour cela, je retranche membre à membre ces égalités après avoir multiplié les deux membres de (2) par  $\frac{1}{u_a} u$ ; j'obtiens l'égalité

$$(3) \quad y - \frac{y_a}{u_a} u = b \left( v - \frac{v_a}{u_a} u \right),$$

que j'écris avec Cauchy

$$(3') \quad \Delta y = b \Delta v,$$

en représentant d'une façon générale par  $\Delta X$  la différence  $X - \frac{X_a}{u_a} u$ . L'égalité (3') écrite pour chacune des  $n$  observations fournit  $n$  nouvelles égalités ne renfermant plus que l'inconnue  $b$  et sur lesquelles j'opère comme dans la première approximation. Je les ajoute membre à membre après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles par  $+1$  ou  $-1$ , suivant que la valeur correspondante de  $\Delta v$  est positive ou négative. Je représente par l'indice  $b$  les valeurs résultantes fournies par les nouveaux poids et, au lieu de  $[\Delta y]_b$  par exemple, j'écris  $\Delta y_b$ , ce qui ne risque pas d'apporter de confusion.

J'obtiens ainsi, pour déterminer  $b$ , l'équation

$$(4) \quad \Delta y_b = b \Delta v_b.$$

Le système des équations (2) et (4) donne, pour les inconnues  $a$  et  $b$  de la deuxième approximation, les valeurs

$$(B) \quad \begin{cases} b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b}, \\ a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a}. \end{cases}$$

Les différences entre l'observation et le calcul s'obtiennent en écri-

C.

2

vant, pour les  $n$  observations, la formule

$$\Delta^2 y = \Delta y - \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v.$$

Elles offrent les vérifications suivantes :

$$\Delta^2 y_a = 0, \quad \Delta^2 y_b = 0.$$

6. *Troisième approximation.* — Si ces différences ne présentent pas les caractères d'erreurs accidentelles, les égalités précédentes doivent s'écrire, en ajoutant un troisième terme,

$$(1) \quad y = au + bv + cw,$$

$$(2) \quad y_a = au_a + bv_a + cw_a,$$

$$(3) \quad y - \frac{y_a}{u_a} u = b \left( v - \frac{v_a}{u_a} u \right) + c \left( w - \frac{w_a}{u_a} u \right),$$

$$(3') \quad \Delta y = b \Delta v + c \Delta w,$$

$$(4) \quad \Delta y_b = b \Delta v_b + c \Delta w_b.$$

Multipliant les deux membres de l'égalité (4) par  $\frac{1}{\Delta v_b} \Delta v$  et retranchant membre à membre de l'égalité (3'), j'obtiens la formule

$$(5) \quad \Delta y - \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v = c \left( \Delta w - \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v \right),$$

que j'écris, toujours avec Cauchy,

$$(5') \quad \Delta^2 y = c \Delta^2 w.$$

Je forme cette égalité pour chacune des  $n$  observations et j'en déduis, pour déterminer la seule inconnue restante  $c$ , l'équation résultante

$$(6) \quad \Delta^2 y_c = c \Delta^2 w_c.$$

Les équations résultantes (2), (4) et (6) déterminent les trois

inconnues  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Il vient ainsi, pour les formules de résolution,

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c}, \\ b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b}, \\ a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a}. \end{array} \right.$$

Les différences entre l'observation et la théorie s'obtiennent en écrivant pour les  $n$  observations la formule

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w.$$

Elles offrent les vérifications

$$\Delta^3 y_a = 0, \quad \Delta^3 y_b = 0, \quad \Delta^3 y_c = 0.$$

Si ces différences ne présentent pas les caractères d'erreurs accidentelles, on ajoute un terme aux équations précédentes et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne des différences qui satisfassent à cette condition. La loi de formation des diverses équations est d'ailleurs mise en évidence; pour ne pas alourdir les explications suivantes, je supposerai la formule (1) limitée à trois termes.

## § II. — Généralisation des formules de Cauchy. Adaptation de ces formules à la méthode des moindres carrés.

7. Dans le but de donner plus de généralité aux formules, je remplace les poids  $+1$  et  $-1$  de Cauchy par des poids arbitraires; dès lors l'équation

$$(2) \quad y_a = au_a + bv_a + cw_a \quad (\text{p. 10, n}^\circ 6)$$

représente telle combinaison que l'on veut des  $n$  égalités (1). De même, les équations (4) et (6) (p. 10, n<sup>o</sup> 6) représentent telles autres combinaisons que l'on veut des égalités (3') et (5') et, par suite, des

égalités (1) d'où elles sont déduites. En conséquence, les formules (C) qu'on tire des équations (2), (4), (6) donnent les valeurs des inconnues qui résultent de trois combinaisons arbitraires des égalités (1); autrement dit, si l'on dispose convenablement des poids arbitraires, on peut faire représenter aux formules (C) telles combinaisons que l'on veut des observations; ces formules renferment donc toutes les solutions imaginables et, en particulier, celle des moindres carrés.

8. Or voici cette solution :

Multiplier les deux membres de chacune des égalités (1) par le multiplicateur  $u$  de  $a$  dans cette égalité et ajouter membre à membre les égalités obtenues; on aura une première équation résultante relative à  $a$ . Former de même deux autres équations relatives à  $b$  et  $c$  à l'aide de poids égaux aux valeurs observées de  $v$  et  $w$ . Si je désigne par les indices  $a$ ,  $b$  et  $c$  les valeurs résultantes formées de ces trois manières, les trois équations obtenues pour déterminer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  s'écrivent

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & y_a = au_a + bv_a + cw_a, \\ (\beta) \quad & y_b = au_b + bv_b + cw_b, \\ (\gamma) \quad & y_c = au_c + bv_c + cw_c. \end{aligned}$$

Par cette solution, la somme des carrés des écarts entre l'observation et le calcul est rendue minimum, et la probabilité de l'apparition simultanée de ces écarts, maximum. Je me contente de rappeler ces résultats bien connus.

9. Pour ramener les équations ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) aux formules de Cauchy généralisées, je tire  $a$  de la première et je porte la valeur obtenue dans les deux autres; il vient

$$\begin{aligned} (\alpha)_1 \quad & a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a}, \\ (\beta)_1 \quad & y_b = \left( \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a} \right) u_b + bv_b + cw_b, \\ (\gamma)_1 \quad & y_c = \left( \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a} \right) u_c + bv_c + cw_c. \end{aligned}$$

L'équation  $(\beta)_1$  s'écrit, en ordonnant par rapport à  $b$  et  $c$ ,

$$y_b - \frac{y_a}{u_a} u_b = b \left( v_b - \frac{v_a}{u_a} u_b \right) + c \left( w_b - \frac{w_a}{u_a} u_b \right).$$

Or je remarque que  $y_b - \frac{y_a}{u_a} u_b$  représente la différence

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i v_i - \frac{y_a}{u_a} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left( y_i - \frac{y_a}{u_a} u_i \right) v_i$$

qui s'écrit avec les notations adoptées  $\sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i v_i$  ou encore  $\Delta y_b$ .

De cette façon, les équations  $(\beta)_1$ ,  $(\gamma)_1$  prennent la forme

$$(\beta)_2 \quad \Delta y_b = b \Delta v_b + c \Delta w_b,$$

$$(\gamma)_2 \quad \Delta y_c = b \Delta v_c + c \Delta w_c.$$

Je tire  $b$  de l'équation  $(\beta)_2$  et je porte la valeur obtenue dans l'équation  $(\gamma)_2$ . J'obtiens de la même manière que dans la première substitution

$$(\beta)_3 \quad b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b},$$

$$(\gamma)_3 \quad \Delta^2 y_c = c \Delta^2 w_c.$$

D'après les formules  $(\gamma)_3$ ,  $(\beta)_3$ ,  $(\alpha)_1$ , les formules de résolution sont, comme dans la méthode de Cauchy,

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c}, \\ b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b}, \\ a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a}. \end{array} \right.$$

10. Le calcul se fera de même et présentera les mêmes vérifications : il n'y aura de différence que dans la manière de former les valeurs résultantes; mais cette différence est essentielle, car les poids

donnés par la méthode des moindres carrés sont seuls conformes au Calcul des Probabilités, tandis que les poids  $\pm 1$  adoptés par Cauchy ne le sont pas. Enfin le calcul de ces valeurs résultantes ne sera guère plus compliqué que dans la méthode de Cauchy, si l'on observe que les poids, étant de simples coefficients de confiance, ne comportent pas la précision assignée par la méthode des moindres carrés; que, par suite, il est naturel de les remplacer par des valeurs grossièrement approchées; ainsi le poids  $5274$  sera remplacé par  $5000$ , de façon à éviter l'usage des Tables de logarithmes. Je reviendrai sur ce point comme sur d'autres considérations théoriques; mais auparavant, je vais donner le Tableau des formules et deux applications numériques.

### § III. — Applications.

11. Voici le Tableau des formules à employer :

1<sup>o</sup> *Calcul des différences.*

$$\begin{array}{ll}
 1^{\text{re}} \text{ approximation..} & \Delta y = y - \frac{y_a}{u_a} u, \\
 2^{\text{e}} \text{ approximation..} & \Delta v = v - \frac{v_a}{u_a} u, \quad \Delta^2 y = \Delta y - \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v, \\
 3^{\text{e}} \text{ approximation..} & \Delta w = w - \frac{w_a}{u_a} u, \quad \Delta^2 w = \Delta w - \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v, \quad \Delta^3 y = \Delta^2 y - \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w, \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots
 \end{array}$$

2<sup>o</sup> *Vérifications.* — X représentant une quelconque des variables  $v$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ..., on a

$$\begin{array}{llll}
 \left[ \frac{X_a}{u_a} u \right]_a = X_a, & \Delta X_a = 0, & \left[ \frac{\Delta X_b}{\Delta v_b} \Delta v \right]_a = 0, & \Delta^2 X_a = 0, \quad \left[ \frac{\Delta^2 X_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w \right]_a = 0, \quad \Delta^3 X_a = 0, \quad \dots, \\
 & & \left[ \frac{\Delta X_b}{\Delta v_b} \Delta v \right]_b = \Delta X_b, & \Delta^2 X_b = 0, \quad \left[ \frac{\Delta^2 X_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w \right]_b = 0, \quad \Delta^3 X_b = 0, \quad \dots, \\
 & & & \left[ \frac{\Delta^2 X_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w \right]_c = \Delta^2 X_c, \quad \Delta^3 X_c = 0, \quad \dots, \\
 & & & \dots
 \end{array}$$

3° *Calcul des coefficients.*

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots, \\ c &= \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} - \dots, \\ b &= \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} - \dots, \\ a &= \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a} - \dots \end{aligned}$$

4° *Erreurs moyennes.* — Les erreurs sur les observations de  $y$  sont données par les dernières différences formées. L'erreur sur  $y_i$  étant  $\eta_i$ , l'erreur moyenne pour  $m$  équations à  $p$  inconnues est, comme on sait,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \eta_i^2}{m - p}}.$$

Ces formules sont aussi bien applicables aux deux méthodes ; mais celle des moindres carrés permet en outre d'évaluer simplement les erreurs moyennes qui en résultent pour les valeurs des inconnues  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , .... Ces erreurs sont données par les formules suivantes (1), où chaque lettre grecque représente l'erreur de la lettre romaine correspondante

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots, \\ \gamma^2 &= \frac{\varepsilon^2}{\Delta^2 w_c} + \dots, \\ \beta^2 &= \frac{\varepsilon^2}{\Delta v_b} + \gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2 + \dots, \\ \alpha^2 &= \frac{\varepsilon^2}{u_a} + \beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 + \gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

12. A titre d'exemple et dans un but de comparaison, je vais appliquer les deux méthodes au calcul des formules de dispersion pour le rayon ordinaire du quartz. Les résultats seront d'ailleurs utilisés

---

(1) Voir la démonstration de ces formules, n° 19.

dans la suite. J'emploierai pour ces calculs les valeurs inscrites dans le Tableau suivant où la première ligne indique la raie du spectre; la deuxième, la longueur d'onde  $\lambda$ ; la troisième, l'indice ordinaire  $n$ ; la quatrième, l'erreur moyenne  $\varepsilon$ .

	A.	a.	B.	C.	D.
$\lambda$ .....	0 $\mu$ ,760 40	0 $\mu$ ,718 36	0 $\mu$ ,686 74	0 $\mu$ ,656 21	0 $\mu$ ,588 91
$n$ .....	1,539 19	1,540 17	1,541 00	1,541 90	1,544 25
$\varepsilon$ .....	$\pm$ 0,8	$\pm$ 0,4	$\pm$ 0,6	$\pm$ 0,8	$\pm$ 0,6

	E.	F.	G.	h.	H.
$\lambda$ .....	0 $\mu$ ,526 90	0 $\mu$ ,486 07	0 $\mu$ ,432 56	0 $\mu$ ,410 12	0 $\mu$ ,396 72
$n$ .....	1,547 17	1,549 69	1,554 13	1,556 50	1,558 16
$\varepsilon$ .....	$\pm$ 0,4	$\pm$ 0,4	$\pm$ 0,8	$\pm$ 0,7	$\pm$ 1,7

Ces déterminations d'indices, dues à M. Macé de Lépinay (1), ont été faites avec une très grande précision et m'ont paru mériter plus de confiance que les mesures faites antérieurement. J'ai adopté, pour la formule de dispersion, la forme (2)

$$\frac{1}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2 \dots,$$

dans laquelle  $n$  représente l'indice;  $l = \frac{\lambda}{n}$  est la longueur d'onde dans le cristal, quotient de la longueur d'onde dans le vide par l'indice;  $a, b, c, \dots$  sont les coefficients à déterminer. Les valeurs de  $\frac{1}{n^2}, l^{-2}, l^2$  se calculent facilement au moyen des données précédentes  $n$  et  $\lambda$ . Elles représentent les valeurs de  $y, v, w$  des formules générales (n° 11). On doit faire ici  $u = 1$ . Je donnerai d'abord le calcul par la méthode de Cauchy, puis le calcul par celle des moindres carrés; les premières différences étant les mêmes dans les deux méthodes, je ne répéterai pas cette partie du calcul dans la deuxième.

(1) *Journal de Physique*, avril 1887.

(2) Voir plus loin, Chap. II, § I.

13. Voici le calcul d'une formule de dispersion pour le rayon ordinaire du quartz, par la méthode de Cauchy :

1° *Calcul des différences.*

Raies.	$\nu = \frac{1}{\lambda^2}$ .	$\Delta\nu$ .	$-\frac{\Delta\nu_b}{\Delta\nu_b} \Delta\nu$ .	$\Delta^2\nu$ .	$-\frac{\Delta^2\nu_c}{\Delta^2\nu_c} \Delta^2\nu$ .	$\Delta^3\nu$ .
A.....	0,422101	+ 4345	- 4191	+ 154	- 153	+ 1
a.....	0,421563	+ 3807	- 3742	+ 65	- 62	+ 3
B.....	0,421109	+ 3353	- 3349	+ 4	- 4	0
C.....	0,420618	+ 2862	- 2913	- 51	+ 45	- 6
D.....	0,419338	+ 1582	- 1696	- 114	+ 118	+ 4
E.....	0,417757	+ 1	- 128	- 127	+ 132	+ 5
F.....	0,416400	- 1356	+ 1257	- 99	+ 104	+ 5
G'....	0,414025	- 3731	+ 3721	- 10	+ 5	- 5
h.....	0,412764	- 4992	+ 5063	+ 71	- 65	+ 6
H.....	0,411885	- 5871	+ 5981	+ 110	- 117	- 7

$$\frac{\nu_a}{u_a} = 0,417756 \quad \Delta\nu_b = -28961 \quad \Delta^2\nu_c = + 805$$

$$\frac{\Delta\nu_b}{\Delta\nu_b} = -0,0008979, \quad \frac{\Delta^2\nu_c}{\Delta^2\nu_c} = +0,00480.$$

Raies.	$\nu = \lambda^{-2}$ .	$\Delta\nu$ .	$w = \lambda^2$ .	$\Delta w$ .	$-\frac{\Delta w_b}{\Delta\nu_b} \Delta\nu$ .	$\Delta^2 w$ .
A..	4,097	- 4,668	0,2440	+0,1027	-0,0708	+0,0319
a..	4,597	- 4,168	0,2175	+0,0762	-0,0632	+0,0130
B..	5,035	- 3,730	0,1986	+0,0573	-0,0565	+0,0008
C..	5,521	- 3,244	0,1811	+0,0398	-0,0491	-0,0093
D..	6,876	- 1,889	0,1454	+0,0041	-0,0286	-0,0245
E..	8,622	- 0,143	0,1160	-0,0253	+0,0022	-0,0275
F..	10,165	+ 1,400	0,0984	-0,0429	+0,0212	-0,0217
G'..	12,909	+ 4,144	0,0775	-0,0638	+0,0627	-0,0011
h...	14,404	+ 5,639	0,0694	-0,0719	+0,0854	+0,0135
H..	15,426	+ 6,661	0,0648	-0,0765	+0,1008	+0,0243

$$\frac{\nu_a}{u_a} = 8,765 \quad \Delta\nu_b = 32,254 \quad \frac{w_a}{u_a} = 0,1413 \quad \Delta w_b = -0,4882 \quad \Delta^2 w_c = +0,1676$$

2° *Calcul des coefficients.*

$$\frac{\Delta^2\nu_c}{\Delta^2\nu_c} = +0,00480 \quad \frac{\Delta\nu_b}{\Delta\nu_b} = -0,0008979 \quad \frac{\nu_a}{u_a} = +0,417756$$

$$-c \frac{\Delta w_b}{\Delta\nu_b} = +0,0000727 \quad -b \frac{\nu_a}{u_a} = +0,007233$$

$$-c \frac{w_a}{u_a} = -0,000678$$

$$c = +0,00480$$

$$b = -0,0008252$$

$$a = +0,424311$$

C.

3

14. Voici le même calcul fait par la méthode des moindres carrés :

1° *Calcul des différences.* — Les colonnes poids indiquent les multiplicateurs approchés que j'ai substitués aux multiplicateurs exacts.

Raies.	$\Delta y.$	Poids.	$-\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v.$	$\Delta^2 y.$	Poids en 0,01.	$-\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta w.$	$\Delta^3 y.$
A.....	+0,004345	$\times -4,7$	-4180	+ 165	$\times +3,4$	-162	+3
a.....	+0,003807	-4	-3733	+ 74	+1,5	- 71	+3
B.....	+0,003353	-3,7	-3340	+ 13	0	- 13	0
C.....	+0,002862	-3	-2905	- 43	0	+ 36	-7
D.....	+0,001582	-2	-1692	-110	-2,3	+110	0
E.....	+0,000001	0	- 128	-127	-2,7	+129	+2
F.....	-0,001356	+1	+1254	-102	-2,2	+105	+3
G'.....	-0,003731	+4	+3711	- 20	0	+ 15	-5
h.....	-0,004992	+5,6	+5050	+ 58	+1,0	- 49	+9
H.....	-0,005871	+6,7	+5965	+ 94	+2,0	- 98	-4
$\Delta v_b = -0,143375$			$100 \Delta^2 y_c = +1738$				

$$\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} = -0,00089551, \quad \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} = +0,00470.$$

Raies.	$\Delta v.$	Poids.	$\Delta w.$	$-\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v.$	$\Delta^2 w.$	Poids en 0,01.
A.....	- 4,668	$\times -4,7$	+0,1027	-682	+0,0345	$\times +3,4$
a.....	- 4,168	-4	+0,0762	-610	+0,0152	+1,5
B.....	- 3,730	-3,7	+0,0573	-545	+0,0028	0
C.....	- 3,244	-3	+0,0398	-474	-0,0076	0
D.....	- 1,889	-2	+0,0041	-276	-0,0235	-2,3
E.....	- 0,143	0	-0,0253	- 21	-0,0274	-2,7
F.....	+ 1,400	+1	-0,0429	+205	-0,0224	-2,2
G'.....	+ 4,144	+4	-0,0638	+606	-0,0032	0
h.....	+ 5,639	+5,6	-0,0719	+824	+0,0105	+1,0
H.....	+ 6,661	+6,7	-0,0765	+973	+0,0208	+2,0
$\Delta v_b = 160,106$			$\Delta w_b = -2,3404$		$100 \Delta^2 w_c = +0,3695$	

$$\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} = -0,014618.$$

2° *Calcul des coefficients a, b, c.*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} &= +0,00470 & \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} &= -0,0008955 & \frac{y_a}{u_a} &= +0,417756 \\ -c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} &= +0,000687 & -b \frac{v_a}{u_a} &= +0,007247 \\ & & -c \frac{w_a}{v_a} &= -0,000664 \\ c &= +0,00470 & b &= -0,0008268 & a &= +0,424339 \end{aligned}$$

3° *Erreurs moyennes.* — Je les évalue en unités du sixième chiffre décimal.

Raies.	$\tau_i^2$ .		
A.....	9		
a.....	9		
B.....	0		
C.....	49		
D.....	0		
E.....	4		
F.....	9		
G'.....	25		
h.....	81		
H.....	16		
	$\Sigma \tau_i^2 = 202$	$\varepsilon^2 = 29$	$\varepsilon = \pm 5,4$
	$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2 \omega_c} = 8000$	$\frac{\varepsilon^2}{\Delta \nu_b} = 0,18$	$\frac{\varepsilon^2}{u_a} = 2,9$
	$\gamma^2 \left( \frac{\Delta \omega_b}{\Delta \nu_b} \right)^2 = 1,70$	$\beta^2 \left( \frac{\nu_a}{u_a} \right)^2 = 146$	
		$\gamma^2 \left( \frac{\omega_a}{u_a} \right)^2 = 160$	
	$\gamma^2 = 8000$	$\beta^2 = 1,9$	$\alpha^2 = 309$
	$\gamma = \pm 90$	$\beta = \pm 1,4$	$\alpha = \pm 17$

En résumé, les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés sont les suivants :

$$\varepsilon = \pm 5,4,$$

$$c = + 0,00470, \quad b = - 0,0008268, \quad a = + 0,424339.$$

$$\pm 9 \qquad \qquad \qquad \pm 14 \qquad \qquad \qquad \pm 17$$

Comme on va voir, ce calcul n'est pas absolument correct, parce qu'on n'a pas tenu compte de ce que l'auteur des mesures a fait connaître l'erreur moyenne de chaque détermination.

§ IV. — Cas de la précision variable; formules complémentaires.

15. La solution précédente des moindres carrés suppose que toutes les observations ont été exécutées avec la même précision. Cette hypothèse, qui peut être quelquefois suffisamment vérifiée, est, dans certains cas, très contraire à la vérité. Je considère le cas de la préci-

sion variable qui a été traité par Gauss : je suppose que la valeur  $y_i$  soit la moyenne de plusieurs mesures, de façon qu'on connaisse l'erreur moyenne  $\varepsilon_i$  et, par suite, le poids  $h_i = \frac{1}{\varepsilon_i^2}$  de  $y_i$ .

La solution qui rend maximum la probabilité des écarts qui en résultent entre l'observation et le calcul est donnée par les équations

$$(\alpha)' \quad \Sigma h_i u_i \times y_i = a \Sigma h_i u_i \times u_i + b \Sigma h_i u_i \times v_i + c \Sigma h_i u_i \times w_i,$$

$$(\beta)' \quad \Sigma h_i v_i \times y_i = a \Sigma h_i v_i \times u_i + b \Sigma h_i v_i \times v_i + c \Sigma h_i v_i \times w_i,$$

$$(\gamma)' \quad \Sigma h_i w_i \times y_i = a \Sigma h_i w_i \times u_i + b \Sigma h_i w_i \times v_i + c \Sigma h_i w_i \times w_i,$$

où les sommes  $\Sigma$  s'étendent de  $i = 1$  à  $i = n$ . Ces équations peuvent s'écrire comme les équations  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (n° 8). Les mêmes transformations (n° 9) s'y appliquent et, par suite, aussi les formules définitives C (n° 9). Seulement  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  représenteront, non plus  $\Sigma u_i X_i$ ,  $\Sigma v_i X_i$ ,  $\Sigma w_i X_i$ , mais  $\Sigma h_i u_i X_i$ ,  $\Sigma h_i v_i X_i$ ,  $\Sigma h_i w_i X_i$ .

16. THÉORÈME. — On peut, sans changer la valeur de la différence  $\Delta^p X$ , intervertir l'ordre des lettres par rapport auxquelles sont prises les différences.

Pour indiquer par la notation l'ordre de ces différences, je pose,  $X$  désignant une variable quelconque,

$$(1) \quad X - \frac{X_a}{u_a} u = \Delta_a X, \quad X - \frac{X_b}{v_b} v = \Delta_b X,$$

$$(2) \quad \Delta_a X - \frac{[\Delta_a X]_b}{[\Delta_a v]_b} \Delta_a v = \Delta_b (\Delta_a X) = \Delta_{ab}^2 X.$$

Je calcule  $\Delta_{ab}^2 X$  afin de vérifier que cette expression est symétrique par rapport à  $u$  et  $v$ ,  $a$  et  $b$ .

On a, d'après les notations,

$$(3) \quad \Delta_a X = X - \frac{X_a}{u_a} u$$

et, par suite,

$$(4) \quad [\Delta_a X]_b = X_b - \frac{X_a}{u_a} u_b = \frac{1}{u_a} [u_a X_b - X_a u_b].$$

On a de même, en remplaçant  $X$  par  $v$ ,

$$\Delta_a v = v - \frac{v_a}{u_a} u, \quad [\Delta_a v]_b = \frac{1}{u_a} (u_a v_b - v_a u_b).$$

Portant ces valeurs dans l'expression de  $\Delta_{ab}^2 X$ , il vient

$$\Delta_{ab}^2 X = X - \frac{X_a}{u_a} u - \frac{u_a X_b - X_a u_b}{u_a v_b - v_a u_b} \left( v - \frac{v_a}{u_a} u \right).$$

Le coefficient du terme en  $u$ , dans cette expression, est

$$-\frac{X_a}{u_a} + \frac{u_a X_b - X_a u_b}{u_a v_b - v_a u_b} \times \frac{v_a}{u_a} = \frac{v_a X_b - v_b X_a}{u_a v_b - v_a u_b}.$$

J'obtiens ainsi

$$\Delta_{ab}^2 X = X + \frac{v_a X_b - v_b X_a}{u_a v_b - v_a u_b} u + \frac{u_b X_a - u_a X_b}{u_a v_b - v_a u_b} v.$$

Cette expression est bien symétrique par rapport à  $u$  et  $v$ ,  $a$  et  $b$ , et l'on a l'identité symbolique

$$(5) \quad \Delta_{ab}^2 = \Delta_{ba}^2.$$

Il en résulte plus généralement que la différence  $\Delta_{abc\dots l}^p$  est indépendante de l'ordre des indices. C. Q. F. D.

17. THÉORÈME. — On a

$$\sum h. \Delta^p X. \Delta^p Y = \sum h X. \Delta^p Y = \sum h Y. \Delta^p X.$$

Les signes  $\Sigma$  s'étendent aux valeurs de 1 à  $n$  données à l'indice  $i$  qui a été supprimé ici pour simplifier l'écriture.

Je considère d'abord les différences du premier ordre.

J'ai la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \sum h. \Delta_a X. \Delta_a Y &= \sum h \left( X - \frac{X_a}{u_a} u \right) \left( Y - \frac{Y_a}{u_a} u \right) \\ &= \sum h X \left( Y - \frac{Y_a}{u_a} u \right) - \frac{X_a}{u_a} \sum h u \left( Y - \frac{Y_a}{u_a} u \right) \\ &= \sum h X. \Delta_a Y - \frac{X_a}{u_a} \left( Y_a - \frac{Y_a}{u_a} u_a \right) \end{aligned}$$

et, en remarquant que le second terme de cette expression est nul,

$$\sum h \cdot \Delta_a X \cdot \Delta_a Y = \sum h X \cdot \Delta_a Y.$$

J'obtiens ainsi

$$(6) \quad \sum h \cdot \Delta_a X \cdot \Delta_a Y = \sum h X \cdot \Delta_a Y = \sum h Y \cdot \Delta_a X.$$

J'étends ensuite cette formule aux différences d'ordre plus élevé. Je considère, par exemple, les différences du troisième ordre.

J'ai la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \sum h \cdot \Delta_{abc}^3 X \cdot \Delta_{abc}^3 Y &= \sum h \cdot \Delta_c(\Delta_{ab}^2 X) \cdot \Delta_c(\Delta_{ab}^2 Y), & \text{d'après les notations,} \\ &= \sum h \cdot \Delta_{ab}^2 X \cdot \Delta_c(\Delta_{ab}^2 Y), & \text{d'après l'identité (6),} \\ &= \sum h \cdot \Delta_b(\Delta_a X) \cdot \Delta_b(\Delta_{ac}^2 Y), & \text{d'après l'identité (5),} \\ &= \sum h \cdot \Delta_a X \cdot \Delta_b(\Delta_{ac}^2 Y), & \text{d'après l'identité (6),} \\ &= \sum h \cdot \Delta_a X \cdot \Delta_a(\Delta_{bc}^2 Y), & \text{d'après l'identité (5).} \end{aligned}$$

J'applique encore une fois les identités (6) et (5).

J'obtiens, en définitive, la formule

$$\sum h \cdot \Delta_{abc}^3 X \cdot \Delta_{abc}^3 Y = \sum h X \cdot \Delta_{abc}^3 Y.$$

De même, le premier membre a aussi pour valeur  $\sum h Y \cdot \Delta_{abc}^3 X$ .

C. Q. F. D.

18. Le second théorème (n° 17) montre que, pour calculer  $\Delta^2 X_c$ , par exemple, on peut appliquer aux  $\Delta^2 X$  les masses  $h \Delta^2 \varpi$  au lieu des masses  $h \varpi$ , ce qui est généralement plus avantageux pour le calcul; car on évite ainsi des termes négatifs qui se présenteraient dans la somme  $\sum h \varpi \Delta^2 X$ , tandis que tous les termes de la somme  $\sum h \cdot \Delta^2 \varpi \cdot \Delta^2 X$  sont positifs. De plus, les coefficients se groupent mieux, de façon qu'on peut souvent appliquer un coefficient moyen à la somme de plusieurs  $\Delta^2 X$ . Enfin ce mode de calcul se rapproche davantage de la méthode de Cauchy, ce qui facilite la comparaison des deux méthodes. Pour ces raisons, je l'ai appliqué dans l'exemple précédent (n° 14).

19. Voici un artifice basé sur le théorème précédent, et par lequel

on peut établir intuitivement les formules des erreurs moyennes sur les résultats. Soit à évaluer l'erreur du terme  $\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c}$ .

On a, par l'application du théorème (n° 17),

$$\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} = \frac{\sum h \cdot \Delta^2 w \cdot \Delta^2 y}{\sum h (\Delta^2 w)^2}$$

On reconnaît là l'expression de la moyenne des valeurs  $\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 w}$  affectées des poids  $h(\Delta^2 w)^2$ . Le poids de la moyenne est donc

$$\sum h (\Delta^2 w)^2 = \Delta^2 w_c$$

et le carré de son erreur moyenne est  $\frac{1}{\Delta^2 w_c}$ .

On en conclut, pour les erreurs commises sur les quantités,

$$c = \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c}, \quad b = \frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} - c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b}, \quad a = \frac{y_a}{u_a} - b \frac{v_a}{u_a} - c \frac{w_a}{u_a},$$

les formules

$$\gamma^2 = \frac{1}{\Delta^2 w_c}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\Delta v_b} + \gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2, \quad \alpha^2 = \frac{1}{u_a} + \beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 + \gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2.$$

Je viens de traiter le cas où  $h = \frac{1}{\varepsilon^2}$  est variable; s'il est constant, il se met en facteur dans l'expression du poids  $\sum h (\Delta^2 w)^2$  qui devient  $\frac{\sum (\Delta^2 w)^2}{\varepsilon^2}$  et s'écrit, dans ce cas, avec les notations correspondantes,  $\frac{\Delta^2 w_c}{\varepsilon^2}$ .

On trouve ainsi les formules précédemment données (n° 11).

20. Je vais maintenant justifier cette simplification par laquelle on remplace les poids exacts par des valeurs grossièrement approchées.

Les multiplicateurs  $h_i u_i = \frac{u_i}{\varepsilon_i^2}$  ne comportent pas une plus grande précision que les facteurs  $\frac{1}{\varepsilon_i^2}$ . Or, si l'on se reporte aux nombres de M. Macé de Lépinay (n° 12), on voit que l'erreur relative de  $\frac{1}{\varepsilon_i^2}$  monte au moins à 0,1; il serait donc illusoire de calculer  $\frac{u_i}{\varepsilon_i^2}$  avec une plus grande

approximation. Il y a plus : si l'auteur avait omis de donner les valeurs de  $\varepsilon$  ou, *a fortiori*, s'il n'avait fait qu'une mesure de  $n$  pour chaque radiation, on devrait, faute de mieux, supposer tous les  $\varepsilon$  égaux et employer les multiplicateurs  $u_i$  comme je l'ai fait dans le calcul précédent (n° 14). Ces poids sont erronés des facteurs  $\frac{1}{\varepsilon_i^2}$  dont les rapports varient de 1 à 16. Quel intérêt y aurait-il alors à employer, par exemple, le multiplicateur 5274 au lieu de 5000, quand ce multiplicateur peut être erroné de seize fois sa valeur? Ces remarques s'étendent à toutes les mesures, tout particulièrement aux observations astronomiques, où la précision des pointés dépend de tant de circonstances variables.

21. Il me reste à calculer la perte de poids dont sont affectés les résultats par la substitution des valeurs approchées aux multiplicateurs exacts. Soient deux déterminations  $a_1$  et  $a_2$  de poids  $p_1$  et  $p_2$ . Désignant par  $M$  la moyenne proprement dite et par  $P$  son poids, on aura

$$(1) \quad M = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2}{p_1 + p_2}, \quad P = p_1 + p_2.$$

Si, au lieu des poids  $p_1$  et  $p_2$ , on emploie pour multiplicateurs  $p_1 x_1$  et  $p_2 x_2$ , on aura une nouvelle moyenne

$$M' = \frac{a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2}.$$

J'évalue le poids de cette détermination.

J'ai successivement, le poids étant l'inverse du carré de l'erreur moyenne,

Carré de l'erreur moyenne sur $a_1$ .....		$\frac{1}{p_1}$ ,
»	$a_1 p_1 x_1$ .....	$\frac{1}{p_1} (p_1 x_1)^2 = p_1 x_1^2$ ,
»	$a_2 p_2 x_2$ .....	$\frac{1}{p_2} (p_2 x_2)^2 = p_2 x_2^2$ ,
»	$a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2$ .....	$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2$ ,
»	$\frac{a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2}$ .....	$\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)^2}$ .

J'obtiens, pour la nouvelle moyenne, les formules

$$(2) \quad M' = \frac{a_1 p_1 x_1 + a_2 p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2}, \quad P' = \frac{(p_1 x_1 + p_2 x_2)^2}{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2} = f(x_1, x_2).$$

Elles reproduisent les formules (1) quand on y remplace les  $x$  par l'unité. Je calcule l'accroissement  $\Delta P = \Delta f(x_1, x_2)$  obtenu en augmentant de  $dx_1$  et  $dx_2$  ces valeurs égales à l'unité. J'écris, en bornant l'approximation au second ordre,

$$\Delta P = df + \frac{d^2 f}{2}.$$

Je pose

$$f(x_1, x_2) = \frac{X}{Y}, \quad X = (p_1 x_1 + p_2 x_2)^2, \quad Y = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2;$$

il vient

$$\begin{aligned} df &= dX \cdot Y^{-1} + X \cdot dY^{-1}, \\ d^2 f &= d^2 X \cdot Y^{-1} + 2 dX \cdot dY^{-1} + X \cdot d^2 Y^{-1}, \\ dX &= 2(p_1 x_1 + p_2 x_2)(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 X &= 2(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2, \\ dY^{-1} &= -2(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)^{-2}(p_1 x_1 dx_1 + p_2 x_2 dx_2), \\ d^2 Y^{-1} &= 4(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)^{-3}(p_1 x_1 dx_1 + p_2 x_2 dx_2)^2 \\ &\quad - 2(p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)^{-2}(p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2). \end{aligned}$$

Faisant  $x_1 = x_2 = 1$  et remplaçant  $p_1 + p_2$  par  $P$ , il vient

$$\begin{aligned} X &= P^2, \\ dX &= 2P(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 X &= 2(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2; \\ Y &= P, \\ dY^{-1} &= -2P^{-2}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 Y^{-1} &= 4P^{-3}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2 - 2P^{-2}(p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2) \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs dans les expressions de  $df$  et de  $d^2 f$ ,

$$\begin{aligned} df &= 2P(p_1 dx_1 + p_2 dx_2) P^{-1} - P^2 \cdot 2P^{-2}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \\ d^2 f &= 2(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2 P^{-1} + 2 \cdot 2P(p_1 dx_1 + p_2 dx_2) [-2P^{-2}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)] \\ &\quad + P^2 [4P^{-3}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2 - 2P^{-2}(p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2)]. \end{aligned}$$

C.

4

J'obtiens, en définitive,

$$df = 0, \quad \frac{1}{2} d^2f = - \frac{(p_1 dx_1 + p_2 dx_2)^2}{P} - (p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2).$$

Par ces formules, on vérifie bien que la moyenne  $M$  a le poids maximum; on en déduit, pour la perte relative de ce poids,

$$(3) \quad - \frac{\Delta P}{P} = \left( \frac{p_1 dx_1 + p_2 dx_2}{P} \right)^2 + \frac{p_1 dx_1^2 + p_2 dx_2^2}{P}.$$

De plus, dans l'évaluation approchée du poids, on remplace ce poids  $P = p_1 + p_2$  par une valeur erronée justement de  $p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ .

L'erreur relative de cette évaluation est

$$(4) \quad \frac{p_1 dx_1 + p_2 dx_2}{P}.$$

Il importe en première ligne que cette erreur ne dépasse pas la limite qu'on s'impose pour l'évaluation du poids, par exemple  $\frac{1}{20}$ . Un coup d'œil suffit pour réaliser cette condition. Dès lors les termes de la formule (3) sont négligeables devant le terme (4), et l'on sera certain que l'inexactitude du calcul n'entraîne pas sur le poids même du résultat ni sur son évaluation une erreur relative égale à  $\frac{1}{20}$ . Ces erreurs sont bien inférieures, comme je l'ai expliqué, à l'erreur imposée par la nature même de la question.

Pour simplifier, j'ai considéré seulement la moyenne de deux déterminations; mais, quel que soit leur nombre, la démonstration subsiste, et le problème général de l'interpolation se ramène par mes formules à des questions de moyennes.

22. Comme application, je traite par la méthode de Gauss le problème précédemment traité par la méthode de Cauchy; seulement, pour simplifier les calculs, je prends pour inconnues les corrections  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  qu'il faut porter aux résultats fournis par la méthode de Cauchy (n° 13). De cette façon,  $y$  représentera non plus  $\frac{1}{n^2}$ , mais la différence entre la valeur calculée et la valeur observée de  $\frac{1}{n^2}$ . Les valeurs de cette différence sont empruntées à la colonne  $\Delta^3 y$  (n° 13); celles de  $\varepsilon$

sont les données de M. Macé de Lépinay (n° 12). Ces valeurs se rapportent, il est vrai, à  $n$ ; mais, à cause de la faible variation de l'indice dans le spectre visible, les erreurs de  $\frac{1}{n^2}$  leur sont sensiblement proportionnelles. Il suffira, pour avoir les erreurs moyennes sur les résultats, de multiplier les valeurs trouvées pour  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  par la valeur absolue de  $\frac{d}{dn} \frac{1}{n^2}$  qui est  $\frac{2}{n^3} = 5,5$ .

1° Calcul des différences.

Raies.	$\varepsilon$ .	$h$ .	$y$ .	$hy$ .	$\Delta y$ .	$\Delta y_b$ .	$-\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v$ .	$\Delta^2 y$ .	$\frac{\Delta^2 y_c}{\times 100}$ .	$-\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} \Delta^2 w$ .	$\Delta^2 y$ .	
A.....	0,8	1,6	+1	+ 1,6	-1,8	+10,8	+0,6	- 1,2	- 6,0	+1,7	+0,5	
a.....	0,4	6,2	+3	+18,7	+0,2	- 4,2	+0,5	+ 0,7	+ 5,6	+0,7	+1	
B.....	0,6	2,8	0	0	-2,8	+22,4	+0,5	- 2,3	- 0,0	+0,1	-2	
C.....	0,8	1,6	-6	- 9,4	-8,8	+35,2	+0,4	- 8,4	+ 8,4	-0,4	-9	
D.....	0,6	2,8	+4	+11,1	+1,2	- 3,6	+0,2	+ 1,4	- 8,4	-1,2	0	
E.....	0,4	6,2	+5	+31,2	+2,2	+ 8,8	-0,1	+ 2,1	-27,3	-1,2	+1	
F.....	0,4	6,2	+5	+31,2	+2,2	+30,8	-0,4	+ 1,8	-12,6	-0,7	+1	
G'.....	0,8	1,6	-5	- 7,8	-7,8	-62,4	-0,8	- 8,6	-17,2	+0,7	-8	
h.....	0,7	2,0	+6	+12,2	+3,2	+41,6	-1,0	+ 2,2	+13,2	+1,7	+4	
H.....	1,7	0,3	-7	- 2,4	-9,8	-29,4	-1,2	-11,0	-11,0	+2,4	-9	
		$u_a = +31,3$	$y_a = +86,4$			$\Delta y_b = +50,0$			$100 \Delta^2 y_c = -55,3$			
				$\frac{y_a}{u_a} = + 2,8$			$\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} = + 0,16$			$\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 w_c} = -55,4$		

Raies.	$v = l^{-2}$ .	$hv$ .	$\Delta v$ .	$h \Delta v$ .	$\Delta v_b$ .	
A.....	4,1	6,4	-3,9	- 6	+ 23,4	
a.....	4,6	28,7	-3,4	-21	+ 71,4	
B.....	5,0	13,9	-3,0	- 8	+ 24,0	
C.....	5,5	8,6	-2,5	- 4	+ 10,0	
D.....	6,9	19,2	-1,1	- 3	+ 3,3	
E.....	8,6	53,7	+0,6	+ 4	+ 2,4	
F.....	10,2	63,7	+2,2	+14	+ 30,8	
G'.....	12,9	20,2	+4,9	+ 8	+ 39,2	
h.....	14,4	29,4	+6,4	+13	+ 83,2	
H.....	15,4	5,3	+7,4	+ 3	+ 22,2	
		$v_a = +249,1$			$\Delta v_b = +309,9$	
		$\frac{v_a}{u_a} = + 8,0$				

Raies.	$w = \lambda^2.$	$hw.$	$\Delta w.$	$\Delta w_b.$	$-\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v.$	$\Delta^2 w.$	$h \Delta^2 w.$	$\frac{\Delta^2 w_c}{\times 100}.$	
A. . . .	0,244	0,390	+0,097	-0,582	-0,066	+0,031	+0,05	+0,155	
$\alpha$ . . . .	0,217	1,348	+0,070	-1,470	-0,057	+0,013	+0,08	+0,104	
B. . . .	0,199	0,557	+0,052	-0,416	-0,051	+0,001	0,00	0,000	
C. . . .	0,181	0,290	+0,034	-0,136	-0,042	-0,008	-0,01	+0,008	
D. . . .	0,145	0,406	-0,002	-0,006	-0,019	-0,021	-0,06	+0,126	
E. . . .	0,116	0,719	-0,031	-0,124	+0,010	-0,021	-0,13	+0,273	
F. . . .	0,098	0,607	-0,049	-0,686	+0,037	-0,012	-0,07	+0,084	
G' . . .	0,077	0,124	-0,070	-0,560	+0,083	+0,013	+0,02	+0,026	
$h$ . . . .	0,069	0,138	-0,078	-1,014	+0,108	+0,030	+0,06	+0,180	
II. . . .	0,065	0,020	-0,082	-0,246	+0,125	+0,043	+0,01	+0,043	
	$w_a =$	4,599		$\Delta w_b =$	-5,240			$100 \Delta^2 w_c =$	+0,999
	$\frac{w_a}{u_a} =$	+0,147		$\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} =$	-0,0169				

## 2° Calcul des coefficients et des erreurs moyennes.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 \gamma_c}{\Delta^2 w_c} &= -55 & \frac{\Delta \gamma_b}{\Delta v_b} &= +0,16 & \frac{\gamma_a}{u_a} &= +2,76 \\ & & -c' \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} &= -0,98 & -b' \frac{v_a}{u_a} &= -6,52 \\ & & & & -c' \frac{w_a}{u_a} &= +8,08 \\ \frac{c'}{+0,004800} &= -55 & \frac{b'}{-0,0008252} &= -0,82 & \frac{a'}{0,424311} &= +4,32 \\ c = +0,004745 & \pm 55 & b = -0,0008260 & \pm 10 & a = 0,424315 & \pm 11 \\ \frac{1}{\Delta^2 w_c} &= 101 & \frac{1}{\Delta v_b} &= 0,003 & \frac{1}{u_a} &= 0,03 \\ \gamma^2 \left( \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \right)^2 &= 0,029 & \beta^2 \left( \frac{v_a}{u_a} \right)^2 &= 2,02 \\ \gamma^2 \left( \frac{w_a}{u_a} \right)^2 &= 2,20 \\ \gamma^2 &= 101 & \beta^2 &= 0,032 & \alpha^2 &= 4,2 \\ \gamma &= 10 & \beta &= 0,18 & \alpha &= 2,05 \end{aligned}$$

§ V. — Remarques critiques sur les trois méthodes.

23. Voici le résumé des valeurs que nous avons obtenues pour les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de la formule de dispersion  $\gamma = a + bl^{-2} + cl^2$  et la comparaison des nombres calculés aux observations de M. Mouton (1) pour les radiations calorifiques :

*Quartz, rayon ordinaire.*

	$a$ .	$b$ .	$c$ .
(1) Cauchy .....	+0,424311	-0,0008252	+0,00480
(2) Moindres carrés ...	+0,424339	-0,0008268	+0,00470
	±17	±14	±9
(3) Gauss .....	+0,424315	-0,0008260	+0,00475
	±11	±10	±6

$\lambda$ .	$n$ .	$\frac{1}{n^2}$ observé.	$\frac{1}{n^2}$ obs. — $\frac{1}{n^2}$ calc.		
			(1).	(2).	(3).
$\mu$					
2,14 .....	1,5191	0,43334	-14	+ 8	- 3
1,77 .....	1,5247	0,43016	- 2	+10	+ 5
1,45 .....	1,5289	0,42780	+ 9	+15	+14
1,08 .....	1,5338	0,42507	+ 3	+ 7	+ 6
0,88 .....	1,5371	0,42325	-12	-12	-10

Je ne fais pas la même comparaison pour les radiations ultra-violettes, parce qu'elle serait peu significative : on verra, en effet, que ces radiations sont affectées d'un nouveau terme de dispersion.

Voici, d'autre part, les résultats de calculs faits pour le rayon extraordinaire par les trois méthodes et dont j'épargnerai la reproduction au lecteur. On remarquera que la méthode de Cauchy et celle de Gauss ont donné le même résultat.

*Quartz, rayon extraordinaire.*

	$a$ .	$b$ .	$c$ .
(1) Cauchy et Gauss ...	+0,419507	-0,0008295	+0,00484
	±11	± 7	±6
(2) Moindres carrés ....	+0,419494	-0,0008288	+0,00489
	±16	±14	±7

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 967, 1078, 1189; 1879.

$\lambda.$	$n$	$\frac{1}{n^2}$ observé.	$\frac{1}{n^2}$ obs. — $\frac{1}{n^2}$ calc.	
			(1).	(2).
$2^{\mu}$ 2,14.....	1,5278	0,42842	-15	-24
1,77.....	1,5335	0,42524	-8	-13
1,45.....	1,5377	0,42292	+5	+2
1,08.....	1,5427	0,42018	0	-1
0,88.....	1,5460	0,41839	-12	-12

24. Je constate sur ces nombres les faits suivants :

1° *Rayon ordinaire.* — La formule (3) de Gauss est la plus conforme aux observations de M. Mouton; les formules (1) de Cauchy et (2) des moindres carrés s'en écartent également de part et d'autre.

2° *Rayon extraordinaire.* — La formule (1) que concordent à donner les deux méthodes de Cauchy et de Gauss est nettement meilleure que la formule (2) des moindres carrés.

Pour les deux rayons, les écarts entre les observations de M. Mouton et les formules (1) présentent une uniformité remarquable : il ne serait pas impossible qu'il y eût, sur les radiations extrêmes,  $\lambda = 2^{\mu}, 14$  et  $\lambda = 0^{\mu}, 88$ , des erreurs systématiques voisines de  $-14$  et  $-12$ ; cela est assez vraisemblable aux extrémités du champ observable par la pile thermo-électrique; j'en ai moi-même constaté l'existence quand on met l'écran trop près de la pile. Je vais exposer d'autres remarques basées sur la comparaison des erreurs probables de chaque détermination.

25. Voici le Tableau des erreurs probables données par M. Macé de Lépinay :

Radiation.....	A	$\alpha$	B	C	D	E	F	G'	h	H
Rayon ordinaire.....	0,8	0,4	0,6	0,8	0,6	0,4	0,4	0,8	0,7	1,7
» extraordinaire..	1,2	0,9	0,7	1,0	0,5	0,8	0,5	0,7	0,5	0,4

Le hasard n'a-t-il pas une grosse part dans la détermination de ces erreurs? Pourquoi l'indice de la raie H a-t-il pour erreurs moyennes 1,7 et 0,4? Aucune raison ne permet de penser que les pointés ont été quatre fois plus précis pour le rayon extraordinaire que pour le rayon ordinaire, alors que les pointés de la raie  $\alpha$  auraient été deux fois

moins précis dans le premier cas que dans le second. La méthode de Gauss commande d'affecter les observations de poids inversement proportionnels aux carrés de ces nombres si incertains. Quel joueur consentirait à mettre ainsi des enjeux proportionnels aux carrés de nombres dont les rapports peuvent être erronés de huit fois leurs valeurs? Ce serait jouer trop *gros jeu*. Faut-il donc attribuer la variation des erreurs au simple hasard et considérer les observations comme formant une seule série de même erreur moyenne? C'est la méthode des moindres carrés que commande alors le calcul des probabilités. Les résultats nous avertissent que cette solution est la plus *imprudente* des trois. En voici la cause :

Malgré les contradictions signalées, le Tableau précédent donne à penser que les observations extrêmes (A et H) sont les moins précises. Or c'est à ces observations extrêmes que la méthode attribue le poids prépondérant dans le calcul de  $b$  et  $c$ . Ces difficultés d'ordre purement pratique se reproduisent sans doute dans toutes les questions. La précision des observations n'est-elle pas toujours variable et d'une façon à peu près inconnue? N'est-elle pas plus faible pour les éléments extrêmes que nos sens et nos instruments puissent atteindre? S'il en est ainsi, la méthode des moindres carrés n'est jamais applicable; celle de Gauss l'est seulement si l'on connaît la précision des diverses déterminations qui doivent, pour cela, résulter d'un grand nombre de mesures.

26. Il y a plus. Imaginons le cas idéal supposé par la théorie : un observateur habile, nullement impressionnable, a observé un phénomène toujours aussi net, débarrassé de toute erreur systématique, avec un instrument connu, d'un régime parfaitement régulier. La solution *la plus probable* est, d'après la théorie, celle qui rend minimum la somme des carrés des erreurs accidentelles.

« ..... Nous devons signaler d'abord une différence essentielle entre la valeur la plus probable et la meilleure valeur à adopter. » Ainsi s'exprime M. Bertrand dans son admirable *Calcul des probabilités* (1). Voici le développement de cette pensée : « La valeur la plus

---

(1) Page 176.

probable est celle dont la probabilité est la plus grande. Peu importent les autres. Elles doivent toutes cependant diriger le choix à faire. S'il est utile d'accroître la probabilité des petites erreurs, il est désirable aussi de diminuer celle des grandes. S'attacher seulement à choisir la valeur la plus probable, c'est imiter le joueur qui, pouvant espérer un grand nombre de gains différents et craindre un grand nombre de pertes, prendrait ses décisions de manière à accroître la chance de gagner le gros lot sans aucunement se soucier des autres.

» En disant : « En présence de plusieurs mesures d'une même grandeur, le parti le meilleur est d'adopter la moyenne », et « la moyenne entre plusieurs mesures est la valeur la plus probable », on énonce deux propositions différentes. On a eu tort de les confondre. »

Cela est incontestable. La deuxième proposition qui est le fondement de la théorie des moindres carrés de Gauss est-elle bien certaine? La solution la plus probable a-t-elle même une existence objective? Il y a bien lieu d'en douter : la probabilité d'un écart déterminé dans un système de mesures de précision connue peut être définie et calculée en admettant la loi des écarts de Gauss. C'est une approximation très satisfaisante. Mais les mesures une fois faites, les erreurs sont déterminées quoique inconnues ; on n'a pas d'action sur elles. Les valeurs des inconnues sont aussi déterminées ; elles ont une existence certaine et non probable. La solution la plus probable, s'il est permis d'employer une pareille expression, est celle qui répond aux valeurs véritables des inconnues, et il y a tout à parier que ces valeurs ne rendent pas minimum la somme des carrés des écarts. J'admets que ces objections sont rejetées. La solution la plus probable a une existence réelle ; est-elle la plus prudente à adopter? Pas plus que d'« accroître la chance de gagner le gros lot sans aucunement se soucier des autres », sans se soucier non plus des pertes possibles.

Le premier énoncé, plus vague que le second, est une indication du bon sens : il n'a pas de prétention scientifique. Par mesure de simple *prudence*, on adopte pour la grandeur mesurée la valeur qui laisse la même masse d'écarts de part et d'autre. Ce principe de prudence est rigoureusement conservé dans la méthode de Cauchy ; il est violé dans celle des moindres carrés.

27. Soit à déterminer, en effet, le coefficient angulaire  $a$  de la droite

$$(1) \quad y = au.$$

Pour diverses valeurs exactes de  $u$ , on a mesuré les valeurs approchées de l'ordonnée  $y$  avec la même précision. Le premier principe des moyennes est exactement applicable; la prudence commande d'adopter la valeur de  $a$  qui laisse la même masse d'écart de  $y$  dans les deux sens. D'après la méthode des moindres carrés, on doit attacher un plus grand poids aux plus grandes valeurs de  $y$  et déplacer la droite fournie par la méthode de Cauchy, pour la rapprocher des points de grande abscisse qui prennent ainsi une influence prépondérante. N'est-ce pas supposer que le hasard change la loi des écarts quand  $y$  cesse d'être fixe pour devenir variable? Les plus grandes valeurs de  $y$  seraient-elles sujettes aux plus petites erreurs absolues? Si le hasard a voulu que la plus grande valeur de  $y$  soit la plus erronée, la valeur de  $a$  sera fortement viciée par cette détermination à laquelle on a attribué l'influence prépondérante.

28. Voici une autre considération d'un ordre purement arithmétique : en ajoutant membre à membre les égalités telles que (1), comme dans la méthode de Cauchy, on a de grandes chances pour que les erreurs, indifféremment positives ou négatives, se détruisent en grande partie. Multiplions au contraire les deux membres de chaque équation par la valeur de  $u$  correspondante, comme dans la méthode des moindres carrés : les erreurs des premiers membres deviendront tout à fait inégales, et cela d'une façon systématique, les plus grandes répondant aux plus grandes valeurs de  $u$ . Elles ne se réduiront donc que si les plus grandes valeurs de  $u$  sont voisines et nombreuses. Quant aux valeurs plus petites, autant vaudrait les supprimer, tant elles ont peu d'influence sur le calcul.

Cette dernière considération conduit à l'extension naturelle de la méthode de Cauchy au cas où la précision des observations est variable : si l'on estime, par exemple, que les mesures de l'indice  $n$  sont affectées d'erreurs dix fois plus fortes pour les radiations calorifiques que pour les radiations lumineuses, on les affectera d'un coefficient dix fois plus faible, et non cent fois plus faible comme le veut la

méthode des moindres carrés. Les erreurs qui s'ajoutent seront ainsi de même ordre et offriront de grandes chances de réduction.

---

## CHAPITRE II.

### FORMULES DE DISPERSION.

---

#### § I. — Choix de la formule.

29. Une formule de dispersion est une relation entre l'indice de réfraction et la longueur d'onde. De nombreuses formules ont été proposées, résultant de théories dont les principales sont dues à Cauchy, Briot, von Helmholtz. M. Ketteler les a discutées dans un Mémoire publié en 1887 (<sup>1</sup>). De toutes ces formes, plusieurs sont à rejeter comme contraires à l'expérience; les théories correspondantes sont au moins incomplètes. D'autres sont acceptables à peu près également; c'est un argument en faveur des théories qui y conduisent, mais non une preuve de leur exactitude. Ne peut-on pas suivre une marche inverse : se dégager d'hypothèses rendues peu vraisemblables par leur précision même et chercher une formule de dispersion en se basant sur les faits et s'aidant seulement d'idées générales communes à toutes les théories? puis tirer de cette formule, en quelque sorte expérimentale, des conséquences théoriques? Tel est le but que je me propose.

30. Pour simplifier les écritures, je considère une onde plane *polarisée rectilignement dans un milieu isotrope très peu absorbant*. L'élongation n'a qu'une composante  $\xi$ ; celle-ci dépend du temps  $t$  et d'une seule coordonnée  $x$  normale au plan d'onde; enfin les trois équations générales du mouvement lumineux se réduisent à une seule. Dans ces

---

(<sup>1</sup>) WIEDEMANN, *Annalen der Physik und Chemie*, Band 30.

conditions, le principe généralement admis (au moins comme approximation) est celui-ci :

*L'équation du mouvement lumineux est linéaire, à coefficients constants relativement à  $t$  et  $x$ , et cette équation réduite à ses termes principaux devient*

$$(1) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \frac{d^2 \xi}{dx^2},$$

*qui est l'équation du mouvement dans le vide.*

Cet énoncé est conforme à toutes les théories, même à celle de Helmholtz quand on suppose l'absorption très faible : cela suffit. Cependant quelques points de cet énoncé ne constituent pas des hypothèses, mais sont l'expression ou la conséquence des faits : l'équation est linéaire, c'est la conséquence nécessaire des phénomènes d'interférence ; dire que les coefficients sont indépendants de  $t$  et  $x$ , c'est exprimer que le milieu est homogène et dans un état permanent.

31. Soient, pour une radiation déterminée,  $n$ ,  $T$ ,  $\lambda$ ,  $l$  l'indice de réfraction, la période vibratoire, les longueurs d'onde dans le vide et dans le milieu. On a, pour cette radiation,

$$(2) \quad u = \sin\left(\frac{2\pi x}{l} - \frac{2\pi t}{T} + \varphi\right), \quad l = \frac{\lambda}{n},$$

$\varphi$  étant la phase.

Je porte cette valeur de  $u$  dans l'équation simplifiée (1). Multipliant les deux membres de l'équation obtenue par  $\frac{l^2}{4\pi^2 u}$  et remarquant que  $\frac{l^2}{T^2}$  est le carré de la vitesse de propagation  $v^2$ , il vient  $v^2 = A$ . D'ailleurs, l'indice de réfraction est le rapport des vitesses de la lumière dans le milieu et dans le vide ; je suis ainsi conduit à diviser les deux membres par  $V^2$ , carré de la vitesse dans le vide.

J'obtiens ainsi, en désignant par  $a$  le rapport de  $A$  au carré de la vitesse de la lumière dans le vide,

$$(3) \quad \frac{1}{n^2} = a.$$

Maintenant j'introduis dans l'équation différentielle (1) une dérivée d'ordre pair  $K \frac{d^p u}{dx^q dt^r}$ .

La valeur de  $u$  portée dans l'équation (1) donne, pour ce terme,

$$K \frac{(2\pi)^p}{l^q T^r} u;$$

celui-ci, multiplié par  $\frac{l^2}{4\pi^2} u$ , puis divisé par  $V^2$ , devient

$$K (2\pi)^{p-2} l^{-q+2} T^{-r} V^{-2};$$

je remplace  $T$  et  $l$  par leurs valeurs

$$T = \frac{\lambda}{V}, \quad l = \frac{\lambda}{n};$$

il vient

$$K (2\pi)^{p-2} \times \lambda^{-q+2} n^{q-2} \times \lambda^{-r} V^r \times V^{-2} = K (2\pi)^{p-2} V^{r-2} \times \lambda^{-p+2} n^{q-2},$$

terme en  $\lambda^{-p+2} n^{q-2}$  dont le coefficient  $k = K (2\pi)^{p-2} V^{r-2}$  ne diffère de  $K$  que par le facteur connu  $(2\pi)^{p-2} V^{r-2}$ .

*Il en résulte, dans la formule de dispersion, un terme en  $\lambda^{-p+2} n^{q-2}$ .*

Je ne supposerai pas qu'on puisse introduire dans l'équation (1) de termes d'ordre impair : ces termes sont incompatibles avec la propagation inaltérée d'une vibration rectiligne de période quelconque; ils donnent des phénomènes, tels que l'absorption et la polarisation rotatoire.

32. La méthode que nous avons suivie permet d'énoncer la réciproque de la proposition précédente, puisqu'à chaque terme de l'équation différentielle correspond un terme de la formule de dispersion :

*Si l'on est certain que la formule de dispersion prise sous la forme*

$$\frac{1}{n^2} = a + \dots$$

*contient un terme en  $\lambda^{-p+2} n^{q-2}$ , on peut affirmer que l'équation différentielle contient un terme en  $\frac{d^p u}{dx^q dt^r}$ .*

Le coefficient de ce terme pourra même être calculé au moyen du coefficient correspondant de la formule de dispersion.

Quand on cherche expérimentalement quel terme on doit introduire dans la formule de dispersion, on peut bien hésiter sur l'exposant de  $n$ , mais non sur celui qu'il faut attribuer à  $\lambda$  dont la variation est beaucoup plus rapide. Un terme en  $\lambda^{-2}$  s'impose, et l'on peut hésiter seulement entre les formes  $\lambda^{-2}n^2$ ,  $\lambda^{-2}n$ , ...,  $\lambda^{-2}n^{-2}$ , lesquelles répondent aux dérivées du quatrième ordre  $\frac{d^4u}{dx^4}$ ,  $\frac{d^4u}{dx^3 dt}$ , ...,  $\frac{d^4u}{dt^4}$ . D'autre part, l'étude des radiations calorifiques montre la nécessité d'un terme en  $\lambda^2$ . Celui-ci répond à une dérivée d'ordre zéro, c'est-à-dire à un terme en  $u$ ; il n'y a donc pas à hésiter ici : *ce terme est nécessairement de la forme*

$$c\lambda^2 n^{-2} = cl^2.$$

C'est le *terme de Briot*, qui a été contesté tant qu'on s'est borné au spectre visible. La nécessité de ce terme a été démontrée pour la première fois par M. Mouton <sup>(1)</sup>, et cela de la façon la plus complète. Elle a été confirmée ensuite par les expériences de M. Langley <sup>(2)</sup> sur le sel gemme, comme je l'ai montré <sup>(3)</sup>.

33. Ces considérations sont subordonnées seulement à l'hypothèse précédente (n° 30) qu'il semble bien difficile de contester. Elles justifient le choix d'une formule de la forme

$$\frac{1}{n^2} = a + \dots$$

De plus, pour les radiations calorifiques et les grandes valeurs de  $\lambda$ , elles conduisent, comme on vient de voir, à prendre pour variable  $l^2$ . Pour les valeurs petites de  $\lambda$  (radiations ultra-violettes), on peut prendre pour variable  $\lambda^{-2}$  ou  $l^{-2}$ ; mais le choix précédent de  $l^2$  conduit à choisir  $l^{-2}$ .

D'ailleurs, il paraît assez naturel de prendre la longueur d'onde dans

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 967, 1078, 1189; 1879.

(2) *Annales de Chim. et de Phys.*, 6<sup>e</sup> série, t. IX; 1886.

(3) *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII; avril 1889.

le milieu plutôt que la longueur d'onde dans le vide. J'ai été ainsi amené à construire pour chaque corps deux espèces de courbes de la forme

$$(1) \quad \frac{I}{n^2} = f(l^2), \quad \text{favorable à l'étude des radiations calorifiques;}$$

$$(2) \quad \frac{I}{n^2} = \varphi(l^{-2}), \quad \text{» » » ultra-violettes.}$$

Ces courbes ont très nettement la forme d'hyperboles <sup>(1)</sup>. Leur examen dispense de toute discussion numérique; leurs équations sont très sensiblement

$$(1) \quad y = a + \frac{b}{x} + cx,$$

$$(2) \quad y = a + bx + \frac{c}{x}.$$

La formule de dispersion est donc, avec une grande approximation,

$$\frac{I}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2.$$

D'après ce qui précède, le principe (n° 30) étant admis, il n'y a pas à hésiter sur les termes  $a + cl^2$ ; le terme en  $l^{-2} = \lambda^{-2}n^2$  est moins certain et n'en exclut pas d'autres en  $\lambda^{-2}n \dots \lambda^{-2}n^{-2}$ , puis en  $\lambda^{-4} \dots$ . On peut même constater sur les courbes  $\frac{I}{n^2} = \varphi(l^{-2})$  que, pour l'extrême ultra-violet, elles s'affaissent sensiblement au-dessous de l'hyperbole; un terme en  $l^{-4}$  ramène bien la concordance entre la formule et l'expérience. D'autre part, on constate que, si on laisse l'ultra-violet pour ne s'occuper que des rayons visibles et calorifiques, la formule à trois termes

$$\frac{I}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2$$

représente très bien les observations, tandis que, si l'on remplace le terme en  $l^{-2}$  par un terme en  $\lambda^{-2}$ , il faut ajouter un terme en  $\lambda^{-4}$ . C'est là un nouvel argument en faveur du choix des variables  $l^{-2}$  ou  $l^2$  au lieu de  $\lambda^{-2}$  ou  $\lambda^2$ .

---

(1) Voir ces courbes (nos 35, 38, 95, 96 et 99).

## § II. — Applications.

34. Je vais appliquer la formule de dispersion au sel gemme et aux deux rayons ordinaire et extraordinaire du quartz. Plus loin, on trouvera son application au spath d'Islande pour les deux indices principaux et le rayon extraordinaire à 30° de l'axe optique. Si j'ai choisi ces corps et m'y suis borné, c'est parce qu'ils offrent les séries de beaucoup les plus étendues dans les deux sens. L'application de la formule à d'autres corps serait bien moins concluante. On trouvera (nos 35, 38, 95, 96 et 99), pour chaque corps, deux courbes ayant pour ordonnées  $\frac{1}{n^2}$  et pour abscisses respectivement  $l^2$  et  $l^{-2}$ . L'échelle des  $\frac{1}{n^2}$  est de 1<sup>mm</sup> pour 0,0002 (1). Or, dans le spectre visible, les erreurs sur cette quantité montent à peine à 0,00001 pour des expériences bien faites; dans le spectre ultra-violet, la précision est la même pour les déterminations photographiques; elle est dix à vingt fois plus faible pour les déterminations à l'oculaire fluorescent et aussi dans le spectre calorifique. Les premières erreurs sont donc inappréciables sur le graphique; les autres se traduisent par des écarts d'environ 1<sup>mm</sup>. Pour calculer  $l^2$  et  $l^{-2}$ , j'ai évalué  $\lambda$  en microns (1 micron = 0<sup>mm</sup>,001). L'échelle des  $l^2$  est de 1<sup>mm</sup> pour 0,01; celle des  $l^{-2}$ , de 1<sup>mm</sup> pour deux unités. Avec ces renseignements, la considération des courbes est tellement nette qu'elle me dispensera de toute discussion numérique pour justifier la forme adoptée pour la formule de dispersion, l'existence de chaque terme et la valeur pratique de chaque formule numérique. On remarquera aussi sur ces courbes la faible étendue du spectre visible, et l'on comprendra combien il était difficile d'y découvrir le terme de Briot, la courbe  $\frac{1}{n^2} = f(l^{-2})$  étant très sensiblement une droite dans cette région.

35. *Sel gemme.* — Par l'application de mes formules à la méthode des moindres carrés, j'ai traité les nombres de M. Langley (2). Je me

(1) Mes dessins ont été réduits pour la gravure.

(2) LANGLEY, *Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. IX, p. 433; 1886.

contente de reproduire les données et les résultats de ce calcul (1) :

	$\lambda.$	$n.$	$\frac{1}{n^2}.$	$l^{-2}.$	$l^2.$	$\Delta^3 y.$
	$\mu$					
	5,301	1,5186	0,433624	0,08206	12,1855	-0,00015
	4,712	1,5201	432769	0,10407	9,6091	— 2
	4,123	1,5215	431972	0,13617	7,3435	+ 7
	3,534	1,5227	431292	0,18564	5,3868	+ 19
	2,945	1,5243	430387	0,26788	3,7330	+ 2
	2,356	1,5254	429767	0,41920	2,3855	+ 12
	1,767	1,5272	428754	0,74700	1,3387	— 6
	1,178	1,5301	427130	1,68713	0,5927	0
A.....	0,75940	1,53670	423470	4,09484	0,24421	— 08
C.....	0,65630	1,54051	421377	5,50965	0,18150	— 10
D <sub>2</sub> .....	0,58961	1,54414	419399	6,85872	0,14580	— 01
b <sub>1</sub> .....	0,51838	1,54975	416368	8,93773	0,11188	+ 18
F.....	0,48614	1,55323	414503	10,2082	0,09796	+ 14
H.....	0,39687	1,56833	406560	15,6163	0,06404	— 11

Ces diverses colonnes donnent pour chaque radiation les quantités marquées par les en-têtes; les deux premières sont empruntées au Mémoire de M. Langley; les trois suivantes s'en déduisent par le calcul. La colonne  $\Delta^3 y$  est le résultat définitif du calcul d'interpolation; on y trouve les valeurs de l'excès  $\frac{1}{n^2}$  observé —  $\frac{1}{n^2}$  calculé, exprimées en unités du cinquième chiffre décimal pour la partie calorifique, et en unités du sixième chiffre pour la partie visible du spectre. La formule obtenue est

$$\frac{1}{n^2} = a + bt^{-2} + ct^2,$$

avec

$$a = + 0,429\ 373, \quad b = - 0,001\ 461\ 6, \quad c = + 0,000\ 371,$$

$$\pm 12, \quad \pm 22, \quad \pm 18.$$

Je reproduis la comparaison de cette formule (1), que j'appelle *formule de Briot*, et de celle de M. Ketteler (2)

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0,000\ 858\ 0, \quad D = 1,141\ 0, \\ a^2 = 2,328\ 83, \quad \lambda_m^2 = 0,016\ 21, \end{array} \right.$$

(1) *Journal de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII; avril 1889.

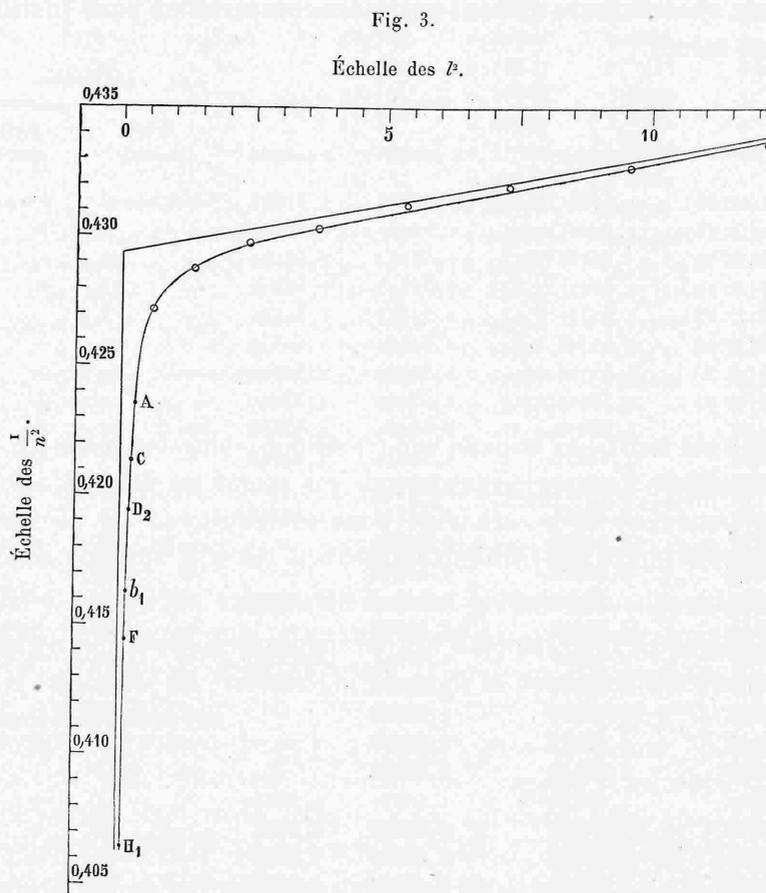
(2) *Dispersion-Formeln* (*Wied. Ann.*, t. XXX).

avec les observations de M. Langley et celles de M. Joubin (1), que je distingue par des caractères gras. L'écart entre ces dernières et la formule serait diminué par un terme en  $t^{-4}$ ; mais les déterminations des deux observateurs ne sont pas assez comparables pour justifier ce nouveau calcul.

$\lambda$ .	$n$ observé.	Différences.			
		Briot. — $n$ calculé.	Ketteler. — $n$ calculé.	Briot obs.-calc.	Ketteler obs.-calc.
$5,301(\pm 65)$	1,5186( $\pm 2$ )	1,51834	1,51835	+0,00026	+0,00025
4,712( $\pm 43$ )	1,5201( $\pm 2$ )	1,52007	1,52007	+ 3	+ 3
4,123( $\pm 29$ )	1,5215( $\pm 1$ )	1,56162	1,56162	— 12	— 12
3,534( $\pm 19$ )	1,5227( $\pm 2$ )	1,52303	1,52302	— 33	— 32
2,945( $\pm 13$ )	1,5243( $\pm 0$ )	1,52433	1,52431	— 3	— 1
2,356( $\pm 9$ )	1,5254( $\pm 1$ )	1,52561	1,52559	— 21	— 19
1,767( $\pm 5$ )	1,5272( $\pm 1$ )	1,52710	1,52712	+ 10	+ 8
1,178( $\pm 2$ )	1,5301( $\pm 1$ )	1,53010	1,53007	0	+ 3
0,75940	1,53670	1,53069	1,53666	+ 1	+ 4
65630	1,54051	1,54049	1,54048	+ 2	+ 3
<b>64370</b>	<b>1,54151</b>	<b>1,54111</b>	»	+ 40	
58901	1,54414	1,54412	1,54413	+ 2	+ 1
<b>53771</b>	<b>1,54839</b>	<b>1,54802</b>	»	+ 37	
<b>53363</b>	<b>1,54875</b>	<b>1,54840</b>	»	+ 35	
51838	1,54975	1,54977	1,54979	— 2	— 4
<b>50844</b>	<b>1,55116</b>	<b>1,55079</b>	»	+ 37	
48614	1,55323	1,55324	1,55327	— 1	— 4
<b>47986</b>	<b>1,55436</b>	<b>1,55404</b>	»	+ 32	
<b>46765</b>	<b>1,55596</b>	<b>1,55568</b>	»	+ 28	
<b>44145</b>	<b>1,55982</b>	<b>1,55955</b>	»	+ 27	
<b>39856</b>	<b>1,56810</b>	<b>1,56793</b>	»	+ 17	
39687	1,56833	1,56832	1,56830	+ 1	+ 3
<b>36090</b>	<b>1,57877</b>	<b>1,57832</b>	<b>1,5783</b>	+ 45	+ 47
<b>34655</b>	<b>1,58391</b>	<b>1,58340</b>	<b>1,5833</b>	+ 51	+ 61
<b>34015</b>	<b>1,58641</b>	<b>1,58591</b>	<b>1,5858</b>	+ 50	+ 61
<b>32470</b>	<b>1,59330</b>	<b>1,59272</b>	<b>1,5925</b>	+ 58	+ 80
<b>27467</b>	<b>1,62790</b>	<b>1,62647</b>	<b>1,6251</b>	+ 143	+ 275
<b>25713</b>	<b>1,64870</b>	<b>1,64547</b>	<b>1,6430</b>	+ 313	+ 570
<b>23125</b>	<b>1,68855</b>	<b>1,68682</b>	<b>1,6808</b>	+ 173	+ 775
<b>22645</b>	<b>1,69900</b>	<b>1,69836</b>	<b>1,6900</b>	+ 164	+ 900

(1) Thèse pour le doctorat (*Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 136 et 139).

Voici la courbe que j'obtiens (*fig. 3*) en prenant pour abscisses les  $l^2$  et pour ordonnées les  $\frac{1}{n^2}$ .



36. *Quartz, rayon ordinaire.* — A l'aide de l'oculaire fluorescent, M. Sarazin a déterminé <sup>(1)</sup> les indices du rayon ordinaire du quartz dans le spectre ultra-violet jusqu'à la raie 32 de l'aluminium. En comparant ses nombres à la formule que j'ai obtenue par la méthode de Cauchy pour le spectre visible (n° 13), j'obtiens les résultats suivants :

(1) SARAZIN, *Comptes rendus*, t. LXXXV, p. 1230.

	$\lambda$ .	$n$ .	$l^{-2}$ .	$l^2$ .	$\frac{1}{n^2}$ observé.	$\frac{1}{n^2}$ calculé.	Diff. O. — C.	
Cd.	9.....	0,36090	1,56348	18,768	0,0533	0,409087	0,409080	+ 7
	10.....	34655	1,56617	20,424	490	407683	407692	- 9
	11.....	34015	1,56744	21,234	470	407022	407014	+ 8
	12.....	32470	1,57094	23,408	427	405210	405200	+ 10
	17.....	27467	1,58750	33,405	299	396800	396889	- 89
	18.....	25713	1,59624	38,538	260	392469	392634	-165
	23.....	23125	1,61402	48,715	205	383869	384210	-341
	24.....	22645	1,61816	51,062	196	381908	382268	-360
Zn.	25.....	21935	1,62502	54,885	182	378689	379107	-418
	26.....	0,21431	1,63040	57,878	0,0173	0,376194	0,376633	-439
	27.....	0,20988	1,63569	60,738	0,0165	0,373764	0,374269	-505
	28.....	20610	1,64041	63,349	158	371618	372057	-439
Al.	29.....	0,20243	1,64566	66,089	0,0151	0,369250	0,369846	-596
	30.....	0,19881	1,65070	68,938	0,0145	0,366998	0,367493	-495
	31.....	19311	1,65990	73,884	135	362941	363407	-466
	32.....	0,18562	1,67500	81,430	0,0123	0,356427	0,367175	-748

Si l'on forme une courbe qui a pour abscisses les valeurs de  $l^{-2}$  et pour ordonnées les différences  $\frac{1}{n^2}$  observé —  $\frac{1}{n^2}$  calculé, on reconnaît que cette courbe a une forme parabolique, ce qui conduit à introduire dans la formule de dispersion un terme en  $l^{-4}$ . Quelle méthode employer pour ce nouveau calcul d'interpolation? La méthode des moindres carrés proprement dite? Mais la précision des observations est tout à fait variable. La solution de Gauss ne peut être non plus appliquée, puisqu'on ignore la précision de chaque observation. Il y a plus, l'indécision porte non seulement sur la mesure de  $n$ , mais aussi sur celle de  $\lambda$ ; le calcul montre, en effet, qu'une erreur de deux unités du quatrième chiffre sur la valeur de  $\lambda$  produit sur le terme  $bl^{-2}$  de la formule de dispersion une erreur qui, pour la raie 32 (aluminium), entraîne sur l'indice une erreur d'environ 20 unités du cinquième chiffre décimal. Ainsi les erreurs sur la détermination de  $\lambda$ , qui étaient sans influence dans le spectre visible, deviennent ici prépondérantes, en sorte qu'il serait presque plus raisonnable de calculer  $\lambda$  au moyen de l'indice à l'aide de la formule de dispersion que de déterminer la formule de dispersion par le concours des valeurs de  $n$  et  $\lambda$  pour les raies extrêmes de l'ultra-violet.

Il en serait rigoureusement ainsi, si un terme en  $t^{-4}$  ne venait ajouter son influence. On le voit, de graves difficultés surgissent; encore pourraient-elles être résolues si l'on connaissait l'erreur moyenne de chaque détermination de  $n$  et  $\lambda$ , mais on est dans l'ignorance complète de ces erreurs. La méthode de Cauchy s'impose donc par ses qualités de prudence; mais, malgré sa simplicité, l'effort qu'elle réclame n'est pas justifié par le peu de valeur des données du problème d'interpolation. Faut-il donc renoncer à faire concourir toutes les observations au calcul des coefficients? A coup sûr, moins que jamais, car une observation isolée peut se trouver très défectueuse. Voici donc la méthode à laquelle je me suis arrêté et qui paraît réunir, dans une mesure convenable, les avantages de simplicité et d'exactitude. J'ai groupé les observations en plusieurs séries; pour chacune d'elles, j'ai pris la moyenne des équations qu'elle contient. Enfin j'ai traité ces équations moyennes en nombre beaucoup moindre par la méthode de Cauchy, modifiée conformément aux observations que j'ai présentées (n° 28) pour le cas de la précision variable. Les groupes, au nombre de cinq, sont indiqués dans le Tableau suivant, dont la dernière colonne indique le multiplicateur employé pour la modification de la méthode de Cauchy.

	Nombre d'observations.	Observateurs.	Multiplicateurs.
I. Radiations calorifiques....	5	Mouton.	0,5
II. A, $\alpha$ , B, C.....	4	Macé de Lépinay.	4
III. D, E, F.....	3	Id.	3
IV. G', h, H.....	3	Id.	3
V. Raies 9 à 32.....	16	Sarazin.	0,5

De cette façon, les groupes II, III, IV servent exclusivement pour le calcul des coefficients  $a$  et  $b$  et contribuent à la détermination des deux autres; le groupe I est prépondérant pour le calcul de  $c$ , et le groupe V, pour le calcul de  $d$ . J'ai ainsi obtenu, pour les coefficients de la formule de dispersion,

$$\frac{1}{n^2} = a + bt^{-2} + ct^2 + dt^{-4},$$

les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a &= +0,424301, & b &= -0,0008222, \\ c &= +0,00479, & d &= -0,000000164. \end{aligned}$$

Voici le Tableau général de la comparaison des valeurs de  $n$  observé et de  $n$  calculé. Segmenté en quatre groupes pour faciliter la lecture, il offre comme variantes les nombres de Rudberg et de M. Mascart.

	$\lambda$ .	Rudberg.	Mascart.	$n$ obs.	$n$ calc.	Diff. O. — C.
	$\mu$					
	2,14	»	»	1,5191.	1,5190.	+ 1.
	1,77	»	»	1,5247.	1,5247.	0.
	1,45	»	»	1,5289.	1,5291.	- 2.
	1,08	»	»	1,5338.	1,5339.	- 1.
	0,88	»	»	1,5371.	1,5370.	+ 1.
A.....	0,76040	»	1,53902	1,53919	1,53919	0
$\alpha$ .....	71836	»	»	1,54017	1,54017	0
B.....	68674	1,54090	1,54099	1,54100	1,54100	0
C.....	65621	1,54181	1,54188	1,54190	1,54189	+ 1
D.....	58920	1,54418	1,54423	1,54425	1,54424	+ 1
E.....	52690	1,54711	1,54718	1,54717	1,54717	0
F.....	48607	1,54965	1,54966	1,54969	1,54969	0
G'.....	43256	»	»	1,55413	1,55411	+ 2
$h$ .....	41012	»	»	1,55650	1,55652	- 2
H.....	39672	1,55817	1,55816	1,55816	1,55815	+ 1
L.....	38190	»	1,56019	»	1,56018	+ 1
M.....	37288	»	1,56150	»	1,56154	- 4
9.....	36090	»	»	1,56348	1,56352	- 4
N.....	35802	»	1,56400	»	1,56402	- 2
10.....	34655	»	»	1,56617	1,56618	- 1
O.....	34401	»	1,56668	»	1,56670	- 2
11.....	34015	»	»	1,56744	1,56750	- 6
P.....	33602	»	1,56842	»	1,56839	+ 3
12.....	32470	»	»	1,57094	1,57102	- 8
17.....	27467	»	»	1,58750	1,58751	- 1
18.....	25713	»	»	1,59624	1,59618	+ 6
23.....	23125	»	»	1,61402	1,61383	+ 19
24.....	22645	»	»	1,61816	1,61800	+ 16
25.....	21935	»	»	1,62502	1,62485	+ 17
26.....	21431	»	»	1,63040	1,63028	+ 12
27.....	20988	»	»	1,63569	1,63553	+ 16
28.....	20610	»	»	1,64041	1,64038	+ 3
29.....	20243	»	»	1,64566	1,64551	+ 15
30.....	19881	»	»	1,65070	1,65089	- 19
31.....	19311	»	»	1,65990	1,66040	- 50
32.....	0,18562	»	»	1,67500	1,67525	- 25

37. *Quartz, rayon extraordinaire.* — Les mêmes considérations montrent qu'il faut introduire un terme en  $l^{-4}$  dans la formule de dispersion si on veut lui faire embrasser les déterminations de M. Sarazin. D'ailleurs, il suffit de regarder les courbes de la *fig. 4* pour voir que la loi de dispersion est sensiblement la même pour le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire du quartz. J'ai donc opéré comme dans le calcul précédent. Seulement l'expérience du premier calcul m'ayant appris que la précision des observations est assez bonne jusqu'à la raie 18, pour devenir brusquement plus mauvaise à partir de la raie 23, j'ai fait un groupe de plus; le cinquième groupe allant de la raie 9 à la raie 18 du cadmium, et le sixième, de la raie 23 du cadmium à la raie 32 de l'aluminium.

J'ai ainsi obtenu la formule

$$\frac{1}{n^2} = a + bl^{-2} + cl^2 + dl^{-4},$$

avec

$$\begin{aligned} a &= + 0,419480, & b &= - 0,0008256, \\ c &= + 0,00485, & d &= - 0,0000001253. \end{aligned}$$

Enfin je compare les valeurs de  $n$  observé et de  $n$  calculé; le Tableau suivant, disposé comme pour le rayon ordinaire, présente des écarts de même ordre.

	$\lambda$ .	Rudberg.	Mascart.	$n$ obs.	$n$ calc.	Diff. O. — C.
	$\mu$					
	2,14	»	»	1,5278.	1,5276.	+ 2.
	1,77	»	»	1,5335.	1,5334.	+ 1.
	1,45	»	»	1,5377.	1,5378.	- 1.
	1,08	»	»	1,5427.	1,5427.	0.
	0,88	»	»	1,5460.	1,5458.	+ 2.
A .....	0,76040	»	1,54812	1,54813	1,54816	- 3
a .....	71836	»	»	1,54915	1,54917	- 2
B .....	68674	1,54990	1,55002	1,55000	1,55001	- 1
C .....	65621	1,54083	1,55095	1,55093	1,55093	0
D .....	58920	1,55328	1,55338	1,55336	1,55337	- 1
E .....	52690	1,55631	1,55636	1,55640	1,55639	+ 1
F .....	58607	1,55894	1,55897	1,55899	1,55899	0
G' .....	43256	»	»	1,56357	1,56356	+ 1
h .....	41012	»	»	1,56604	1,56602	+ 2
H .....	0,39672	1,56772	1,56770	1,56775	1,56774	+ 1

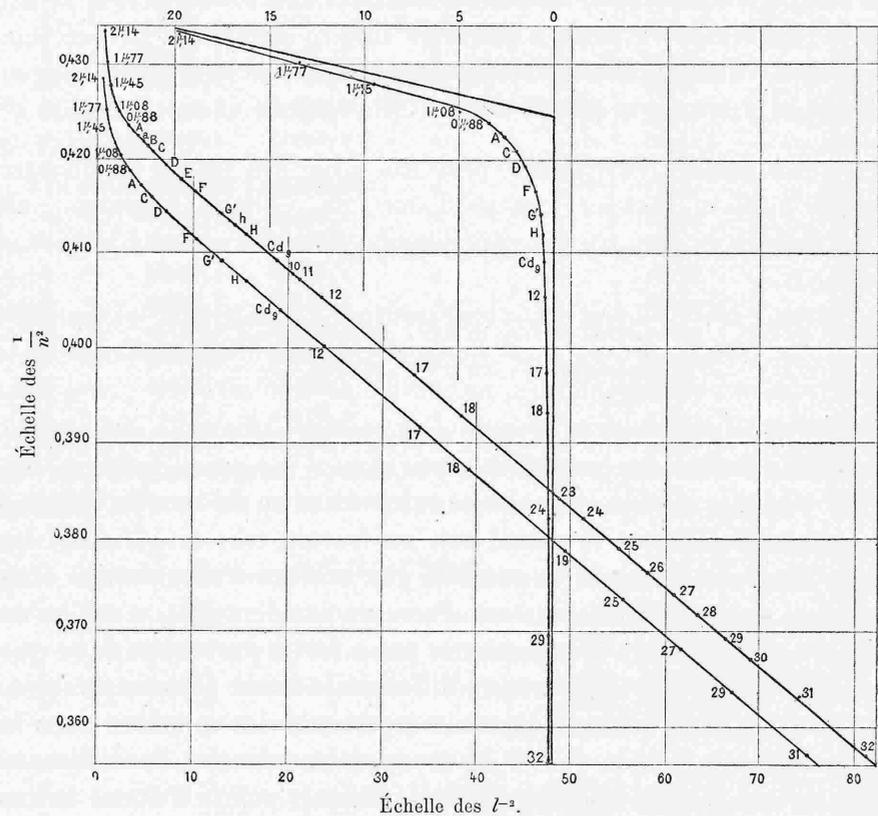
	$\lambda$ .	Rudberg.	Mascart.	$n$ obs.	$n$ calc.	Diff. O. — C.
L.....	$\mu$ 0,38190	»	1,56974	»	1,56985	— 11
M.....	37288	»	1,57121	»	1,57124	— 3
9.....	36090	»	»	1,57319	1,57329	— 10
N.....	35802	»	1,57381	»	1,57381	0
10.....	34655	»	»	1,57599	1,57606	— 7
O.....	34401	»	1,57659	»	1,57659	0
11.....	34015	»	»	1,57741	1,57741	0
P.....	33602	»	1,57822	»	1,57834	— 12
Q.....	32856	»	1,57998	»	1,58011	— 13
12.....	32470	»	»	1,58097	1,58106	— 9
R.....	31798	»	1,58273	»	1,58292	— 19
17.....	27467	»	»	1,59812	1,59815	— 3
18.....	25713	»	»	1,60713	1,60714	— 1
23.....	23125	»	»	1,62561	1,62550	+ 11
24.....	22645	»	»	1,62992	1,62982	+ 10
25.....	21935	»	»	1,63705	1,63695	+ 10
26.....	21431	»	»	1,64268	1,64261	+ 7
27.....	20988	»	»	1,64813	1,64807	+ 6
28.....	20610	»	»	1,65308	1,65312	— 4
29.....	20243	»	»	1,65852	1,65847	+ 5
30.....	19881	»	»	1,66410	1,66415	— 5
31.....	19311	»	»	1,67410	1,67415	— 5
32.....	0,18562	»	»	1,68910	1,68957	— 47

38. Pour les rayons ordinaire et extraordinaire du quartz, l'accord entre l'observation et le calcul est, on le voit, très satisfaisant; les écarts sont certainement imputables aux erreurs d'observation. S'ils n'ont pas toujours les caractères d'erreurs accidentelles, c'est qu'en effet il y a des erreurs systématiques assez fortes provenant de ce que les séries dues à des observateurs différents ne sont pas comparables. Ce fait est mis en évidence par la comparaison des nombres dans la partie visible : pour la raie B du rayon extraordinaire, la différence entre les nombres de Rudberg et de M. Mascart monte à douze unités du cinquième chiffre décimal. Cette différence, beaucoup plus grande que les écarts entre la formule et les nombres de M. Macé de Lépinay, est de l'ordre des autres écarts. Deux seulement sont bien forts : — 50 pour la raie 31 du rayon ordinaire et — 47 pour la raie 32 du rayon extraordinaire. Ce sont à coup sûr des accidents explicables dans ces observations difficiles. Comme je l'ai montré, il faudrait tenir compte

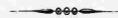
aussi de l'influence considérable des erreurs de  $\lambda$  dans cette région extrême du spectre.

Si maintenant on considère sur la *fig. 4* l'étendue énorme des courbes, on sera convaincu que la forme adoptée pour la formule possède une remarquable aptitude à représenter le phénomène de la

Fig. 4.

Échelle des  $l^2$ .

dispersion. C'est là une preuve sérieuse à l'appui de notre postulat (n° 30). Elle est de nature à donner un grand poids aux importantes conséquences que nous allons étudier dans le Chapitre suivant.



## CHAPITRE III.

## DISPERSION ET DOUBLE RÉFRACTION.

## § I. — Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction.

39. La double réfraction a provoqué bien des théories : illustrée par les noms de Fresnel, Cauchy, Lamé, Mac Cullagh, Neumann, elle a été l'objet de travaux remarquables de MM. Maxwell, Sarrau, Bousinesq.

Quoique très différentes par les hypothèses, l'analyse et les résultats, ces théories ont des caractères communs : partir d'hypothèses précises plus ou moins vraisemblables, mais nullement nécessaires; en déduire les formules du mouvement lumineux; enfin vérifier que ces formules conduisent aux lois expérimentales de la double réfraction. On néglige d'ailleurs les phénomènes accessoires. La dispersion est l'objet de théories spéciales.

On vient de lire dans la première Partie une marche inverse et qui consiste à remonter de l'expérience à la théorie en partant seulement d'idées générales qui sont en quelque sorte l'expression même des faits observés : c'est la méthode expérimentale. Dans cette voie, M. Maurice Lévy a donné <sup>(1)</sup> tous les systèmes d'équations capables de représenter les lois de la double réfraction pour une lumière homogène. Ils sont nombreux. Combien de théories pourraient enrichir encore le nombre de celles qui existent déjà! Toutes seraient aussi incertaines. Au contraire, l'examen attentif des faits et leur comparaison conduit à des conséquences nécessaires. Une seule de ces conséquences peut renverser tout un groupe de théories; aucune ne saurait

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, t. CV, p. 1044; 1887.

être mise en suspicion par les conséquences d'hypothèses qui, pour être très précises, n'en sont que moins probables. Je n'exposerai pas les recherches que j'ai poursuivies dans la même voie que M. Maurice Lévy. Elles sortiraient du cadre de ce travail que je tiens à limiter aux résultats positifs et utiles et ne pourraient guère être exposées sans le secours puissant des systèmes linéaires. La simplicité d'écriture que donne cette méthode de Laguerre, jointe à celle des quaternions, m'a permis d'aborder les termes de dispersion dans l'étude de la double réfraction et de découvrir les conséquences que je vais exposer après les avoir dégagées de ces recherches.

40. J'ai appliqué la formule de dispersion de Briot

$$\frac{1}{n^2} = cl^2 + a + bl^{-2} + \dots$$

aux nombres donnés par M. Mascart (1) pour les rayons ordinaire et extraordinaire du spath d'Islande. Les calculs, faits par la méthode de Cauchy, montrent comment la méthode permet de s'arrêter juste au nombre de termes nécessaires pour renfermer les observations dans une même formule, trois termes pour le rayon ordinaire et deux pour le rayon extraordinaire. Il importe de remarquer que cet avantage est entièrement conservé par l'usage des formules que j'ai données pour l'application de la méthode des moindres carrés. C'est là un résultat nouveau dont l'intérêt pratique n'échappera à personne. Ces considérations me décident à reproduire les calculs, qui offrent d'ailleurs cet intérêt d'être l'origine du présent Mémoire. Mais voici d'abord le Tableau des données de M. Mascart :

Raies.	$\lambda$ .	$n_o$ .	$n_e$ .
A.....	0,76040	1,65012	1,48285
B.....	68671	1,65296	1,48409
C.....	65607	1,65446	1,48474
D.....	58920	1,65846	1,48654
E.....	52678	1,66354	1,48885
F.....	0,48607	1,66793	1,49084

(1) *Comptes rendus*, t. LVII.

Raies.	$\lambda$ .	$n_o$ .	$n_e$ .
G.....	0,43075	1,67620	1,49470
H.....	39681	1,68330	1,49777
L.....	38190	1,68706	1,49941
M.....	37288	1,68966	1,50054
N.....	35802	1,69441	1,50256
O.....	34401	1,69955	1,50486
P.....	33602	1,70276	1,50628
Q.....	32856	1,70613	1,50780
R.....	0,31775	1,71155	1,51028

Dans ce Tableau, la colonne  $\lambda$  donne les longueurs d'onde; les colonnes  $n_o$  et  $n_e$ , les indices ordinaire et extraordinaire du spath, pour les raies indiquées par la première colonne. On déduit de là les valeurs de  $\frac{1}{n^2}$ ,  $t^{-2}$ ,  $l^2$  qui servent au calcul d'interpolation. Celui-ci étant disposé comme les précédents ne demande aucune explication.

41. *Spath, rayon ordinaire.*

Raies.	$y = \frac{1}{n^2}$ .	$\Delta y$ .	$-\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} \Delta v$ .	$\Delta^2 y$ .	$-\frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 v_c} \Delta^2 v$ .	$\Delta^3 y$ .
A.....	0,36726	+ 1275	- 1252	+23	-19	+4
B.....	36600	+ 1149	-1138	+11	- 8	+3
C.....	36533	+ 1082	-1078	+ 4	- 4	0
D.....	36357	+ 906	- 911	- 5	+ 4	-1
E.....	36135	+ 684	- 696	-12	+ 8	-4
F.....	35945	+ 494	- 504	-10	+10	0
G.....	35592	+ 141	- 149	- 8	+ 9	+1
H.....	35292	- 159	+ 154	- 5	+ 7	+2
L.....	35135	- 316	+ 314	- 2	+ 5	+3
M.....	35027	- 424	+ 422	- 2	+ 4	+1
N.....	34830	- 621	+ 619	- 2	+ 2	0
O.....	34620	- 831	+ 832	+ 1	- 1	0
P.....	34490	- 961	+ 966	+ 5	- 3	+2
Q.....	34354	- 1097	+1102	+ 5	- 5	0
R.....	34136	- 1315	+1319	+ 4	- 9	-5

$$\frac{y^a}{u_a} = 0,35451 \quad \Delta y_b = -11455 \quad \Delta^2 y_c = +99$$

$$\frac{\Delta y_b}{\Delta v_b} = -0,001058, \quad \frac{\Delta^2 y_c}{\Delta^2 v_c} = +0,00346.$$

Raies.	$v = l^{-2}$ .	$\Delta v$ .	$w$ .	$\Delta w$ .	$-\frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} \Delta v$ .	$\Delta^2 w$ .
A....	4,709	- 11,838	0,2124	+0,1276	-0,0713	+0,0563
B....	5,795	- 10,753	1726	+ 878	- 648	+ 230
C....	6,359	- 10,188	1573	+ 725	- 614	+ 111
D....	7,934	- 8,614	1261	+ 413	- 519	- 106
E....	9,973	- 6,574	1003	+ 155	- 396	- 241
F....	11,780	- 4,767	848	+ 2	- 287	- 285
G....	15,143	- 1,404	660	- 187	- 85	- 272
H....	18,003	+ 1,456	556	- 292	+ 88	- 204
L....	19,515	+ 2,968	512	- 335	+ 179	- 156
M....	20,533	+ 3,986	487	- 360	+ 240	- 120
N....	22,399	+ 5,852	447	- 401	+ 353	- 48
O....	24,408	+ 7,861	410	- 438	+ 474	+ 36
P....	25,679	+ 9,132	389	- 458	+ 550	+ 92
Q....	26,964	+ 10,417	371	- 476	+ 628	+ 152
R....	29,015	+ 12,468	345	- 503	+ 751	+ 248

$$\frac{v_a}{u_a} = 16,547 \quad \Delta v_b = +108,276 \quad \frac{w_a}{u_a} = +0,0847 \quad \Delta w_b = -0,6525 \quad \Delta^2 w_c = +0,2864$$

$$\frac{\Delta^2 Y_c}{\Delta^2 w_c} = +0,00346$$

$$\frac{\Delta Y_b}{\Delta v_b} = -0,001058$$

$$\frac{Y_a}{u_a} = +0,35451$$

$$-c \frac{\Delta w_b}{\Delta v_b} = + 21 \quad -b \frac{v_a}{u_a} = + 1716$$

$$-c \frac{w_a}{u_a} = - 29$$

$$c = +0,00346$$

$$b = -0,001037$$

$$a = +0,37138$$

#### 42. *Spath, rayon extraordinaire.*

Raies.	$y = \frac{1}{n^2}$ .	$\Delta y$ .	$-\frac{\Delta Y_b}{\Delta v_b} \Delta v$ .	$\Delta^2 y$ .
A.....	0,45479	+ 800	-796	+ 4
B.....	45403	+ 724	-721	+ 3
C.....	45363	+ 684	-682	+ 2
D.....	45253	+ 574	-574	0
E.....	45113	+ 434	-436	- 2
F.....	44992	+ 313	-313	0
G.....	44760	+ 81	- 87	- 6
H.....	44577	- 102	+103	+ 1
L.....	44480	- 199	+203	+ 4
M.....	44413	- 266	+271	+ 5
N.....	44293	- 386	+392	+ 6
O.....	44158	- 521	+523	+ 2
P.....	44075	- 604	+606	+ 2
Q.....	43987	- 692	+689	- 3
R.....	43842	- 837	+821	-16

$$\frac{Y_a}{u_a} = 0,44679 \quad \Delta Y_b = -7217$$

$$\frac{\Delta Y_b}{\Delta v_b} = -0,00086.$$

Raies.	$\nu = l^{-2}$ .	$\Delta\nu$ .
A.....	3,803	- 9,248
B.....	4,671	- 8,380
C.....	5,121	- 7,930
D.....	6,374	- 6,677
E.....	7,988	- 5,063
F.....	9,412	- 3,640
G.....	12,041	- 1,010
H.....	14,253	+ 1,202
L.....	15,415	+ 2,364
M.....	16,194	+ 3,143
N.....	17,614	+ 4,563
O.....	19,136	+ 6,085
P.....	20,095	+ 7,044
Q.....	21,060	+ 8,009
R.....	22,591	+ 9,540

$$\frac{\nu_a}{u_a} = 13,051 \quad \Delta\nu_b = +83,896$$

$$\frac{\Delta\nu_b}{\Delta\nu_b} = -0,00086 \quad \frac{\nu_a}{u_a} = +0,44679$$

$$-b \frac{\nu_a}{u_a} = + 1121$$

$$b = -0,00086 \quad a = +0,45800$$

43. Portons notre attention sur le coefficient  $c$  qui, nous l'avons vu, a par la certitude de sa signification une grande importance théorique. Pour le rayon extraordinaire, sa valeur  $c_e$  est tellement petite que les observations de M. Mascart ne permettent pas de la déterminer. Au contraire, pour le rayon ordinaire, ce terme a la valeur notable  $c_o = +0,00346$ .

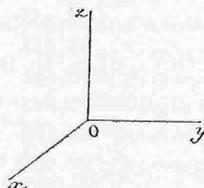
Étudions les conséquences de cette remarque, en nous rappelant que, dans la détermination des indices principaux, le plan de l'onde passe par l'axe du cristal, le prisme ayant ses arêtes parallèles à l'axe.

Soient  $Oz$  l'axe du spath,  $Ox$  et  $Oy$  deux axes perpendiculaires entre eux et à  $Oz$ . Faisons arriver une onde plane parallèle à  $xOz$ .

I. *Système de Fresnel.* — Dans ce système, la vibration du rayon extraordinaire est dirigée suivant  $Oz$  (*fig. 5*); celle du rayon ordinaire, suivant  $Ox$ . Dès lors, la réaction proportionnelle à l'écart est sensiblement nulle pour une élongation parallèle à  $Oz$ , puisque  $c_e$  est in-

sensible; elle a une valeur notable correspondante à  $c_o$  pour toute élongation parallèle à  $Ox$ , et par suite aussi pour toute élongation située dans le plan  $xOy$ . Si l'on fait tourner le plan d'onde autour de  $Ox$ , depuis  $xOz$  jusqu'à  $xOy$ , la vibration ordinaire demeure suivant  $Ox$ ; la réaction proportionnelle à l'écart ne change donc pas, et, par

Fig. 5.



suite, le coefficient de dispersion relatif au rayon ordinaire conserve la valeur  $c_o$  pour toutes les directions d'ondes planes. Au contraire, pour le rayon extraordinaire, la vibration se déplace de  $Oz$  à  $Oy$  et le coefficient  $c$  doit croître de  $c_e$  à  $c_o$ .

II. *Système de Mac Cullagh*. — Pour l'onde plane  $xOz$ , ce système suppose que la vibration du rayon extraordinaire est dirigée suivant  $Ox$ , celle du rayon ordinaire suivant  $Oz$ . Dès lors, le coefficient  $c$  a une valeur notable  $c_o$  pour une vibration parallèle à  $Oz$ ; il a la valeur sensiblement nulle  $c_e$  pour une vibration parallèle à  $Ox$  et, par suite, pour toute vibration située dans le plan  $xOy$ . Si l'on fait tourner le plan d'onde autour de  $Ox$  de  $xOz$  à  $xOy$ , la vibration ordinaire tournera de  $Oz$  à  $Oy$ ; donc pour ce rayon ordinaire  $c$  décroîtra de  $c_o$  à  $c_e$ . Au contraire, la vibration extraordinaire demeurant suivant  $Ox$ , le coefficient  $c$  conservera pour le rayon extraordinaire la valeur insensible  $c_e$ .

En résumé, si l'hypothèse de Fresnel est vraie, le coefficient  $c$  relatif au rayon ordinaire aura la valeur constante  $c_o$ , quelle que soit l'onde plane considérée; il croîtra de  $c_e$  à  $c_o$  pour le rayon extraordinaire. Au contraire, dans le système de Mac Cullagh, le coefficient  $c$  relatif au rayon extraordinaire conservera la valeur insensible  $c_e$ ; pour le rayon ordinaire, il décroîtra de  $c_o$  à  $c_e$ .

A ces conclusions nettement contradictoires, l'expérience répond d'une façon aussi nette, comme on verra plus loin.

44. Ces considérations géométriques suffisent. Elles ont le double avantage d'être intuitives et très générales, n'attribuant pas une forme particulière aux équations de la lumière. Il y a plus, si le langage suppose élongation et force, ce n'est là qu'une fiction commode ; en réalité, le raisonnement est général et s'applique à toute autre hypothèse sur la nature de la lumière, pourvu qu'on admette le principe relatif à l'équation différentielle du phénomène lumineux (n° 30) ; mais il importe de voir comment le terme de Briot affecte les équations auxquelles conduisent les principales théories. Notre assertion sur la généralité du raisonnement géométrique en ressortira d'ailleurs plus nette. Pour simplifier, je supposerai négligeables les termes de dispersion qui contiennent les puissances négatives de  $\lambda$ , de façon à ne conserver que le terme principal et le terme de Briot. Pour que cette simplification soit justifiée, il suffit de considérer les radiations infra-rouges d'une longueur d'onde assez grande ; la refuser ne servirait qu'à entraver la démonstration sans changer sa force, en obligeant à des digressions longues et peu fructueuses sur des termes difficiles à bien connaître.

§ II. — Terme de Briot dans les diverses théories de la double réfraction.

45. Je désigne par  $x, y, z$  les coordonnées d'un point du milieu ; par  $\xi, \eta, \zeta$  les composantes en ce point du vecteur qu'on appelle généralement *élongation*, mais qui peut représenter tout élément dirigé (vitesse, force, rotation, etc.). Les valeurs de  $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ , composantes de l'accélération, sont dans une première approximation des fonctions linéaires des dérivées secondes de  $\xi, \eta, \zeta$  par rapport à  $x, y, z$ , savoir  $\frac{d^2\xi}{dx^2}, \frac{d^2\xi}{dy^2}, \frac{d^2\xi}{dz^2}, \frac{d^2\xi}{dx dy}, \dots; \frac{d^2\eta}{dx^2}, \dots; \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \dots$ . Si je désigne ces fonctions par  $F, F_1, F_2$ , les équations différentielles s'écrivent, dans cette première approximation,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = F, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = F_1, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = F_2.$$

Tenons compte maintenant du terme de dispersion de Briot. Nous savons qu'à ce terme correspondent *nécessairement* dans les équations

différentielles des termes proportionnels à l'élongation. Les équations seront donc de la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = F - G\xi - H\eta - K\zeta,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = F_1 - G_1\xi - H_1\eta - K_1\zeta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = F_2 - G_2\xi - H_2\eta - K_2\zeta.$$

N'ayant pour objet que le spath, je suppose le cristal muni de trois plans de symétrie rectangulaires, et je choisis ces plans comme plans coordonnés. Les conditions de symétrie réduisent les équations à la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = F - G\xi,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = F_1 - H\eta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = F_2 - K\zeta.$$

Je vais maintenant étudier ces équations, en remplaçant  $F, F_1, F_2$  successivement par les expressions particulières qui résultent de la théorie de Fresnel, puis de celles de MM. Maxwell, Boussinesq, Sarrau, enfin de celles de Lamé, Neumann, Mac Cullagh.

46. *Équations de Lamé.* — Ces équations ordonnées et complétées par les termes de Briot s'écrivent <sup>(1)</sup> :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left( B \frac{d^2}{dz^2} + C \frac{d^2}{dy^2} \right) \xi - C \frac{d^2\eta}{dx dy} - B \frac{d^2\zeta}{dz dx} - G\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -C \frac{d^2\xi}{dx dy} + \left( C \frac{d^2}{dx^2} + A \frac{d^2}{dz^2} \right) \eta - A \frac{d^2\zeta}{dy dz} - H\eta, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -B \frac{d^2\xi}{dz dx} - A \frac{d^2\eta}{dy dz} + \left( A \frac{d^2}{dy^2} + B \frac{d^2}{dx^2} \right) \zeta - K\zeta. \end{array} \right.$$

Je considère une onde plane dont la normale a pour cosinus direc-

<sup>(1)</sup> LAMÉ, *Élasticité*, 2<sup>e</sup> édition, p. 234. Les lettres  $u, v, w; a^2, b^2, c^2$  de Lamé sont remplacées respectivement par  $\xi, \eta, \zeta; A, B, C$ .

teurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les équations du mouvement de cette onde sont de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = Le^p, & \eta = Me^p, & \zeta = Ne^p, \\ P = \frac{2\pi i}{l}(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt), \end{cases}$$

où  $l$  représente la longueur d'onde et  $v$  la vitesse de la lumière dans le cristal;  $L, M, N$  sont les amplitudes des trois vibrations composantes suivant les axes.

Je substitue les valeurs (2) dans les équations (1). La première de ces équations devient

$$\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^2 v^2 \xi = \left(\frac{2\pi i}{l}\right)^2 [(B\gamma^2 + C\beta^2)\xi - C\alpha\beta\eta - B\gamma\alpha\zeta] - G\xi.$$

Désignant par  $V$  la vitesse de la lumière dans le vide, je divise les deux membres par

$$\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^2 V^2 = -\frac{4\pi^2 V^2}{l^2}.$$

Je rappelle que l'on a, avec les notations précédemment employées,

$$(3) \quad \frac{v^2}{V^2} = \frac{1}{n^2}, \quad \frac{A}{V^2} = a, \quad \frac{G}{4\pi^2 V^2} = g, \quad \dots$$

Il vient

$$\frac{1}{n^2} \xi = (b\gamma^2 + c\beta^2)\xi - c\alpha\beta\eta - b\gamma\alpha\zeta + gl^2 \xi.$$

J'ordonne cette équation par rapport à  $\xi, \eta, \zeta$ , et j'écris les deux autres équations qui résultent de même du système (1).

J'obtiens ainsi

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{n^2} - b\gamma^2 - c\beta^2 - gl^2\right)\xi + c\alpha\beta\eta + b\gamma\alpha\zeta = 0, \\ c\alpha\beta\xi + \left(\frac{1}{n^2} - c\alpha^2 - a\gamma^2 - hl^2\right)\eta + a\beta\gamma\zeta = 0, \\ b\gamma\alpha\xi + a\beta\gamma\eta + \left(\frac{1}{n^2} - a\beta^2 - b\alpha^2 - kl^2\right)\zeta = 0. \end{array} \right.$$

Je vais appliquer ces équations au spath d'Islande. Je choisis pour  $Oz$  l'axe optique; pour  $Ox$ , la trace du plan de l'onde sur le plan per-

C.

8

pendiculaire à  $Oz$ . La normale à l'onde sera dans le plan  $yOz$ , et, si je désigne par  $\theta$  l'angle qu'elle fait avec  $Oz$ , les cosinus directeurs de cette normale auront pour valeurs

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sin \theta, \quad \gamma = \cos \theta.$$

On aura d'ailleurs

$$b = a, \quad g = h.$$

Enfin, pour simplifier l'écriture et me conformer à la notation que j'ai employée dans les formules de dispersion, je remplacerai les lettres

$$a, b, c; \quad g, h, k; \quad \frac{1}{n^2}$$

respectivement par

$$a, a, a'; \quad c, c, c'; \quad s.$$

Les équations précédentes s'écrivent alors

$$(5) \quad \begin{cases} (s - a \cos^2 \theta - a' \sin^2 \theta - cl^2) \xi & = 0, \\ (s - a \cos^2 \theta - cl^2) \eta + a \sin \theta \cos \theta \zeta & = 0, \\ a \sin \theta \cos \theta \eta + (s - a \sin^2 \theta - c'l^2) \zeta & = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont satisfaites par

$$(6) \quad s = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + cl^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

La vibration est dirigée suivant  $Ox$ ; elle répond au rayon extraordinaire; la vitesse de propagation, représentée par la première de ces trois formules, donne en particulier :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } \theta = 0 \dots\dots\dots & s_0 = a + cl^2 \\ \text{Pour } \theta = 1^{\text{dr}} \dots\dots\dots & s_1 = a' + cl^2 \end{array}$$

Si la valeur de  $l^2 = \frac{\lambda^2}{n^2}$  était la même dans ces deux égalités, en les multipliant respectivement par  $\cos^2 \theta$  et  $\sin^2 \theta$ , et ajoutant, on obtiendrait

$$s_0 \cos^2 \theta + s_1 \sin^2 \theta = s,$$

qui représente la loi connue des vitesses de propagation du rayon extraordinaire. Comme l'hypothèse n'est pas exacte, cette loi est légèrement altérée.

On peut encore satisfaire aux équations (5) en posant

$$(7) \quad \begin{vmatrix} s - a \cos^2 \theta - cl^2 & a \sin \theta \cos \theta \\ a \sin \theta \cos \theta & s - a \sin^2 \theta - c'l^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} \xi &= 0, \\ \frac{\eta}{\zeta} &= \frac{a \sin \theta \cos \theta}{-s + a \cos^2 \theta + cl^2}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux vibrations dans le plan des  $yz$ . Si l'on néglige  $c$  et  $c'$ , ces solutions deviennent

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & s = 0, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \text{tang } \theta; \\ 2^\circ \quad & s = a, \quad \frac{\eta}{\zeta} = -\text{cot } \theta. \end{aligned}$$

La première représente une vibration longitudinale incapable de se propager; la seconde donne une vibration transversale, dans le plan de polarisation, et qui se propage avec une vitesse constante. Elle répond au rayon ordinaire. Si l'on tient compte maintenant des termes en  $c$  et  $c'$ , les vibrations restent dans le plan de polarisation  $yOz$ , mais deviennent quasi longitudinale et quasi transversale. Pour la première, qui est parasite,  $s$  est de l'ordre de  $cl^2$ . Pour le rayon ordinaire, la valeur de  $s$  s'obtient en développant et ordonnant l'équation (7). Il vient ainsi

$$s^2 - [a + (c + c')l^2]s + a(c \sin^2 \theta + c' \cos^2 \theta)l^2 + cc'l^4 = 0$$

et, en résolvant,

$$s = \frac{a + (c + c')l^2}{2} + \sqrt{\frac{[a + (c + c')l^2]^2}{4} - a(c \sin^2 \theta + c' \cos^2 \theta)l^2 - cc'l^4}.$$

Les lois relatives au rayon ordinaire sont donc altérées par les termes de Briot. Si l'on néglige les termes du second ordre par rapport à  $\frac{cl^2}{a}$  et  $\frac{c'l^2}{a}$ , la dernière formule donne

$$(8) \quad s = a + (c \cos^2 \theta + c' \sin^2 \theta)l^2.$$

On a, en particulier,

$$\begin{aligned} \text{Pour } \theta = 0 \dots\dots\dots s_0 &= a + cl^2 \\ \text{Pour } \theta = 1^{\text{dr}} \dots\dots\dots s_1 &= a + c'l^2 \end{aligned}$$

Les formules (6) et (8), relatives aux vitesses du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, sont tout à fait accessibles à l'expérience; elles sont conformes aux conséquences que nous avons tirées par la Géométrie (n° 43) de l'hypothèse de Neumann et Mac Cullagh.

47. *Équations de M. Boussinesq* (1). — Ordonnées et complétées par les termes de Briot, elles s'écrivent

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = A \left[ \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \xi - \frac{d^2}{dx dy} \eta - \frac{d^2}{dz dx} \zeta \right] - G\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = B \left[ -\frac{d^2}{dx dy} \xi + \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) \eta - \frac{d^2}{dy dz} \zeta \right] - H\eta, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = C \left[ -\frac{d^2}{dz dx} \xi - \frac{d^2}{dy dz} \eta + \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \zeta \right] - K\zeta. \end{cases}$$

En substituant dans ces équations les valeurs (2) (n° 46), comme précédemment, j'obtiens les équations

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{n^2} - a(\beta^2 + \gamma^2) - gl^2 \right] \xi - a\alpha\beta \cdot \eta - a\alpha\gamma \cdot \zeta = 0, \\ -b\alpha\beta \cdot \xi + \left[ \frac{1}{n^2} - b(\gamma^2 + \alpha^2) - hl^2 \right] \eta - b\beta\gamma \cdot \zeta = 0, \\ -c\gamma\alpha \cdot \xi - c\beta\gamma \cdot \eta + \left[ \frac{1}{n^2} - c(\alpha^2 + \beta^2) - kl^2 \right] \zeta = 0. \end{array} \right.$$

Appliquées au spath avec le choix d'axes et le changement de notations expliqué précédemment (n° 46), les équations (4') deviennent

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} (s - a - cl^2)\xi = 0, \\ + (s - a \cos^2 \theta - cl^2)\eta - a \sin \theta \cos \theta \cdot \zeta = 0, \\ - a' \sin \theta \cos \theta \cdot \eta + (s - a' \sin^2 \theta - c'l^2)\zeta = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations admettent d'abord la solution

$$(6') \quad s = a + cl^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Elle répond au rayon ordinaire dont les lois ne sont pas altérées ici par les termes de Briot : la vibration, dirigée suivant  $Ox$ , se propage

(1) Voir M. POINCARÉ, *Théorie mathématique de la lumière*, p. 277 (n° 176).

avec une vitesse constante quelle que soit l'orientation du rayon lumineux.

On a ensuite deux autres solutions données par les équations

$$(7') \quad \left\{ \begin{array}{l} s^2 - [a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c + c') l^2] s \\ \quad + (ac' \cos^2 \theta + ca' \sin^2 \theta) l^2 + cc' l^4 = 0, \\ \xi = 0, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{a \sin \theta \cos \theta}{s - a \cos^2 \theta - cl^2}. \end{array} \right.$$

Les vibrations sont dans le plan  $\gamma O z$ ; quand on néglige  $c$  et  $c'$ , on obtient

$$1^\circ \quad s = 0, \quad \frac{\eta}{\zeta} = -\tan \theta;$$

$$2^\circ \quad s = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{a}{a'} \cot \theta.$$

De ces deux solutions, la première représente une vibration longitudinale parasite sans vitesse de propagation; la seconde, une vibration quasi transversale répondant au rayon extraordinaire.

Tenant compte maintenant des termes  $c$  et  $c'$ , nous aurons d'abord une vibration quasi longitudinale, dont la vitesse de propagation est de l'ordre de  $cl^2$ ; puis, pour le rayon extraordinaire, une vibration quasi transversale: la vibration est dans un azimut perpendiculaire au plan de polarisation et la vitesse de propagation est donnée par la formule

$$s = \frac{a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c + c') l^2}{2} + \sqrt{\frac{[a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c + c') l^2]^2}{4} - (ac' \cos^2 \theta + ca' \sin^2 \theta) l^2 - cc' l^4}$$

ou, en négligeant le second ordre relativement aux rapports de  $cl^2$  et  $c'l^2$  à  $a$  et  $a'$ ,

$$(8') \quad s = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + \frac{ac \cos^2 \theta + a' c' \sin^2 \theta}{a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta} l^2.$$

Faisant successivement  $\theta = 0$  et  $\theta = 1^{\text{dr}}$ , il vient

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } \theta = 0. & \dots\dots\dots s_0 = a + cl^2 \\ \text{Pour } \theta = 1^{\text{dr}} & \dots\dots\dots s_1 = a' + c'l^2 \end{array}$$

On n'a pas exactement

$$s = s_0 \cos^2 \theta + s_1 \sin^2 \theta,$$

mais la différence entre les deux membres est très petite, comme on le verra (n° 97). La loi de la vitesse du rayon extraordinaire n'est donc pas sensiblement altérée.

48. *Équations de M. Poincaré.* — M. Poincaré a montré (1) que les résultats de la théorie de Fresnel conduisent aux équations

$$(1'') \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \xi - B \frac{d^2}{dx dy} \eta - C \frac{d^2}{dz dx} \zeta, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -A \frac{d^2}{dx dy} \xi + B \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) \eta - C \frac{d^2}{dy dz} \zeta, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -A \frac{d^2}{dz dx} \xi - B \frac{d^2}{dy dz} \eta + C \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \zeta. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients symboliques de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  se déduit de celui de M. Boussinesq en le faisant tourner autour de sa diagonale principale. Si donc on introduit les termes de Briot, on obtiendra la même équation pour les vitesses de propagation. La vibration ordinaire sera dirigée suivant  $Ox$ . La vibration du rayon extraordinaire est transversale quand on néglige  $c$  et  $c'$ , mais quasi transversale quand on en tient compte. Une vibration quasi longitudinale parasite se propage avec une vitesse qui est de l'ordre de  $cl^2$  et  $c'l^2$ .

On arrive à des conséquences tout à fait analogues en partant des équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= A \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \xi - \frac{d}{dx} \left( A \frac{d}{dx} \xi + B \frac{d}{dy} \eta + C \frac{d}{dz} \zeta \right) - A \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right), \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= B \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \eta - \frac{d}{dy} \left( A \frac{d}{dx} \xi + B \frac{d}{dy} \eta + C \frac{d}{dz} \zeta \right) - B \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right), \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= C \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \zeta - \frac{d}{dz} \left( A \frac{d}{dx} \xi + B \frac{d}{dy} \eta + C \frac{d}{dz} \zeta \right) - C \frac{d}{dz} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right), \end{aligned}$$

qui répondent à la forme attribuée à l'équation de la surface de pola-

(1) *Théorie mathématique de la lumière*, p. 257.

risation par M. Poincaré (1), savoir

$$\Pi = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

L'auteur a montré que cette forme satisfait aussi aux lois de Fresnel relatives aux deux rayons lumineux. Il importe d'ajouter qu'elle donne lieu à des vibrations longitudinales; en ce sens, elle ne répond pas aux idées de Fresnel.

De leur côté, les équations (1'') ne sont pas l'expression des principes du grand physicien, mais donnent seulement les mêmes résultats; il n'est donc pas étonnant que l'addition des termes de Briot dans les seconds membres de ces équations conduise à des résultats contraires à ces principes : vibration lumineuse à peu près transversale au lieu de l'être rigoureusement, vibration quasi longitudinale parasite.

49. *Théorie de Fresnel.* — Prenons maintenant pour point de départ les principes mêmes de Fresnel, ou mieux, les hypothèses équivalentes, mais plus correctes, par lesquelles M. Poincaré les remplace, savoir :

1° L'éther offre une résistance infinie à la compression.

2° L'ellipsoïde de polarisation est indépendant du plan de l'onde. L'équation d'incompressibilité est, comme on sait,

$$\frac{d}{dx}\xi + \frac{d}{dy}\eta + \frac{d}{dz}\zeta = 0.$$

Pour une onde plane, dont la normale a pour cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , cette équation devient

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0.$$

Elle constitue donc une *liaison* par laquelle le mouvement a nécessairement lieu dans le plan de l'onde. D'après cela, la seule composante efficace d'une force quelconque est sa projection sur le plan d'onde. C'est le principe admis par Fresnel pour les réactions élastiques de

---

(1) *Théorie mathématique de la lumière*, p. 257, équation (7).

l'éther, et qui doit être étendu à toute force, en particulier à celle de Briot.

En second lieu, l'ellipsoïde de polarisation étant supposé fixe, ses axes coïncident en direction avec ceux du cristal; son équation est donc

$$(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1.$$

Pour remonter de là aux forces élastiques de l'éther, il suffit de prendre les demi-dérivées par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et de remplacer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  respectivement par  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d}{dz}$ ;  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  devient  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ , symbole qu'on a l'habitude de désigner par  $\Delta$ . Il vient ainsi, pour les trois composantes de la force élastique,  $A\Delta\xi$ ,  $B\Delta\eta$ ,  $C\Delta\zeta$ . A ces forces, s'ajoutent les termes de Briot  $-G\xi$ ,  $-H\eta$ ,  $-K\zeta$ , et les composantes de la réaction de liaison  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . D'après cela, les équations complètes, avec la condition de liaison, s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = (A\Delta - G)\xi + N, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = (B\Delta - H)\eta + P, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = (C\Delta - K)\zeta + Q, \end{cases} \quad \frac{d}{dx}\xi + \frac{d}{dy}\eta + \frac{d}{dz}\zeta = 0.$$

Dans ces équations, je remplace  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  par les valeurs (2), n° 46. La réaction de liaison étant alors normale au plan d'onde,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  deviennent proportionnels à  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Il vient donc, avec les notations adoptées (3), n° 46, et en appelant  $r$  la valeur algébrique de la réaction de liaison,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{n^2}\xi = (a + gl^2)\xi + \alpha r, \\ \frac{1}{n^2}\eta = (b + hl^2)\eta + \beta r, \\ \frac{1}{n^2}\zeta = (c + kl^2)\zeta + \gamma r, \end{cases} \quad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0.$$

Ces quatre équations homogènes par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $r$  ne sont satisfaites que pour les valeurs de  $\frac{1}{n^2}$  qui annulent le déterminant de

leurs coefficients : elles déterminent alors des quantités proportionnelles à ces inconnues. J'applique ces équations au spath, avec le changement de notations et le choix d'axes précédemment employés (n° 46).

Il vient

$$(5) \quad \begin{cases} s\xi = (a + cl^2)\xi, \\ s\eta = (a + cl^2)\eta + r \sin \theta, & \eta \sin \theta + \zeta \cos \theta = 0. \\ s\zeta = (a' + c'l^2)\zeta + r \cos \theta, \end{cases}$$

On n'a plus que deux solutions pour le problème, la quatrième équation (5) mettant obstacle aux vibrations longitudinales. La première est

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad r = 0, \quad s = a + cl^2.$$

La vibration est dirigée suivant  $Ox$  : sa vitesse de propagation est constante, quelle que soit la direction du plan d'onde. Les propriétés du rayon ordinaire ne sont pas changées par l'introduction des termes de Briot.

La deuxième solution répond au rayon extraordinaire, elle donne

$$\xi = 0, \quad \frac{\eta}{\zeta} = -\cot \theta.$$

La vibration est donc dans le plan d'onde perpendiculaire à la première; c'est bien la loi de Fresnel. La vitesse de propagation s'obtient en tirant  $\eta$  et  $\zeta$  des deuxième et troisième équations (5) et portant dans la quatrième. Il vient ainsi

$$\eta = \frac{r \sin \theta}{s - a - cl^2}, \quad \zeta = \frac{r \cos \theta}{s - a' - c'l^2},$$

$$r \left[ \frac{\sin^2 \theta}{s - a - cl^2} + \frac{\cos^2 \theta}{s - a' - c'l^2} \right] = 0.$$

La dernière donne, pour la vitesse de propagation,

$$s = (a + cl^2) \cos^2 \theta + (a' + c'l^2) \sin^2 \theta.$$

Cette formule reproduirait exactement la loi de Fresnel pour la vitesse du rayon extraordinaire, si  $l$  était indépendant de  $n$ .

Comme il n'en est pas ainsi, cette loi est légèrement altérée.

C.

50. Voici une remarque intéressante qui résulte des observations de M. Poincaré (1). L'hypothèse sur la fixité de l'ellipsoïde de polarisation n'est pas nécessaire pour arriver aux lois de Fresnel : il suffit que son équation soit de la forme

$$\begin{aligned} \Pi = & (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ & + 2D(A\alpha\xi + B\beta\eta + C\gamma\zeta)(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) + E(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 = 1, \end{aligned}$$

qui reproduit celle qu'on a précédemment adoptée, en faisant

$$D = E = 0.$$

En effet, si l'on adopte cette nouvelle forme plus générale, il faut, dans les deux membres des équations (4), ajouter les termes qui proviennent des nouveaux termes de  $\Pi$  et qui s'en déduisent en les dérivant par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . La demi-dérivée par rapport à  $\xi$  donne

$$(DA + E)\alpha(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) + \alpha D(A\alpha\xi + B\beta\eta + C\gamma\zeta).$$

Le premier de ces deux termes est nul en vertu de la liaison; le deuxième terme se compose de deux facteurs, dont l'un est  $\alpha$  et l'autre une fonction symétrique. On pourra donc, en mettant  $\alpha$  en facteur, joindre ce terme au terme de liaison  $\alpha r$  de la première équation (4). Si donc on désigne maintenant par  $r$  l'ancienne valeur de  $r$  augmentée de cette fonction symétrique  $A\alpha\xi + B\beta\eta + C\gamma\zeta$ , les équations (4) conservent la même forme et conduisent aux mêmes conséquences. On le voit, les termes ajoutés dans l'équation de l'ellipsoïde de polarisation n'ont pour effet que de changer la réaction de la liaison. En particulier, cette remarque s'applique aux équations déjà signalées de M. Poincaré (n° 48), en faisant  $D = -1$ ,  $E = 0$ . Elle s'applique aussi aux premières équations de M. Poincaré qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= A \Delta\xi - \frac{d}{dx} \left( A \frac{d\xi}{dx} + B \frac{d\eta}{dy} + C \frac{d\zeta}{dz} \right), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= B \Delta\eta - \frac{d}{dy} \left( A \frac{d\xi}{dx} + B \frac{d\eta}{dy} + C \frac{d\zeta}{dz} \right), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= C \Delta\zeta - \frac{d}{dz} \left( A \frac{d\xi}{dx} + B \frac{d\eta}{dy} + C \frac{d\zeta}{dz} \right), \end{aligned}$$

(1) *Théorie mathématique de la lumière*, p. 156 et 157.

quoique ces équations ne donnent pas lieu à un ellipsoïde de polarisation proprement dit. On voit que notre remarque s'applique également aux équations de M. Boussinesq, dont la première se met sous la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Lambda \Delta\xi - \Lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \xi + \frac{d}{dy} \eta + \frac{d}{dz} \zeta \right).$$

### § III. — Sur l'incompressibilité de l'éther.

51. De ce qui précède résulte un moyen de conclure sur l'incompressibilité de l'éther, ou, si l'on préfère le langage des faits à celui des hypothèses, sur la transversalité rigoureuse des vibrations. Nous avons dit que seules les théories du groupe de Fresnel restent à discuter, l'hypothèse de Mac Cullagh et Neumann conduisant à des conclusions nettement contraires aux faits de la dispersion, et nous avons trouvé que, si l'on assujettit les vibrations lumineuses à être rigoureusement transversales, les équations différentielles de toutes les théories connues de ce groupe conduisent à la même formule, non seulement pour le rayon ordinaire, mais aussi pour l'indice du rayon extraordinaire, savoir

$$(1) \quad \frac{1}{n^2} = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + (c \cos^2 \theta + c' \sin^2 \theta) l^2.$$

La condition de transversalité supprimée, le premier terme peut bien conserver la même forme, comme dans les théories de MM. Boussinesq, Sarrau, Maxwell, comme aussi avec les équations de M. Poincaré; mais le terme de Briot est changé. Dans ces cas, nous avons en effet trouvé

$$(2) \quad \frac{1}{n^2} = a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta + \frac{ac \cos^2 \theta + a'c' \sin^2 \theta}{a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta} l^2.$$

La différence entre les formules (1) et (2), quoique faible, est accessible à l'expérience, comme on verra plus loin (n° 100). L'expérience peut donc un jour renseigner sur la rigoureuse transversalité des vibrations.

52. Pour donner plus de généralité à ce résultat, j'en reprends

l'étude par la méthode géométrique, dont j'ai déjà signalé les avantages (n° 44).

Soient

$C$  la réaction de Briot pour un déplacement égal à 1 suivant  $Oy$  (*fig. 6*);

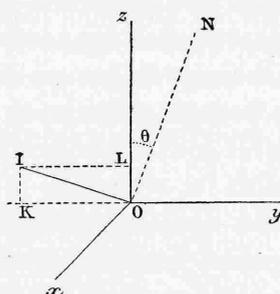
$C'$  la réaction de Briot pour un déplacement égal à 1 suivant  $Oz$ ;

$ON$  la normale au plan d'onde, située dans le plan  $yOz$ ;

$\theta$  l'angle que fait cette normale avec l'axe optique  $Oz$ ;

$OI$  l'élongation rigoureusement transversale et égale à 1.

Fig. 6.



Je décompose  $OI$  suivant  $Oy$  et  $Oz$  en deux composantes

$$OK = \cos \theta, \quad OL = \sin \theta.$$

Ces composantes donnent lieu aux forces

$$\begin{array}{ll} C \cos \theta & \text{suivant } Oy, \\ C' \sin \theta & \text{» } Oz, \end{array}$$

dont les composantes efficaces, dirigées suivant  $OI$ , sont

$$C \cos^2 \theta \quad \text{et} \quad C' \sin^2 \theta.$$

Le terme de dispersion de Briot sera donc, quelles que soient les réactions élastiques de l'éther,

$$(c \cos^2 \theta + c' \sin^2 \theta) l^2.$$

Si la vibration n'est pas rigoureusement transversale et fait avec le plan de l'onde un angle constant  $\omega$ , compté positivement quand la vibra-

tion se rapproche de l'axe  $Oz$ , on trouve de même, pour le terme de Briot,

$$[c \cos^2(\theta + \omega) + c' \sin^2(\theta + \omega)]l^2.$$

Si l'on connaît  $c$ ,  $c'$ ,  $\theta$  et la valeur numérique du coefficient de  $l^2$ , on peut, jusqu'à un certain point, en déduire  $\omega$  regardé comme indépendant de  $\lambda$ . Ainsi, sans admettre d'autre idée préconçue que le principe fondamental adopté (n° 30), on peut, par l'étude expérimentale du terme de Briot, non seulement savoir si la vibration est dans le plan de l'onde, mais encore mesurer jusqu'à un certain point l'angle qu'elle fait avec ce plan. Ce dernier résultat est, il est vrai, moins certain, car l'angle  $\omega$  peut varier un peu quand on passe d'une radiation à une autre.

#### § IV. — Vérification expérimentale des théories précédentes.

53. Mes observations, je dois le dire, ne permettent pas de résoudre cet important problème de la transversalité rigoureuse des vibrations; mais elles touchent de bien près à la solution, et je ne doute pas que celle-ci ne puisse être atteinte par des moyens supérieurs à ceux dont j'ai pu disposer. Donc je m'abstiendrai de conclure dans ce Mémoire sur l'incompressibilité de l'éther, pour m'attacher seulement aux hypothèses de Fresnel et de Mac Cullagh et Neumann; mais je ferai l'examen expérimental de ces hypothèses avec tous les soins et tous les développements que mérite une si grave controverse.

54. Tout d'abord, il faut assurer la base de l'analyse précédente par une bonne détermination des coefficients de dispersion  $c$  et  $c'$  relatifs aux deux indices principaux. Les valeurs déduites des nombres de M. Mascart n'ont pas une précision suffisante. Cette base, solidement posée, je rappelle les conclusions à vérifier. Dans l'*hypothèse de Fresnel*, le coefficient du terme de Briot a la valeur constante  $c_o$  pour le rayon ordinaire; ce coefficient augmente de  $c_e$  à  $c_o$  pour le rayon extraordinaire quand l'angle de l'onde plane avec l'axe croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Dans le *système de Neumann*, c'est l'inverse: constant pour le rayon extraordinaire, il décroît de  $c_o$  à  $c_e$  pour le rayon ordinaire.

55. Voici d'abord un fait incontesté :

*L'indice de réfraction de chaque radiation est constant pour le rayon ordinaire, quelle que soit la direction de l'onde plane.*

Compatible avec la première hypothèse, cette loi est manifestement contraire à la deuxième. Quelle est donc sa certitude? Quelles expériences ont été faites pour la contrôler? Verdet rapporte <sup>(1)</sup> celle de Brewster <sup>(2)</sup>, qui est seulement qualitative, et celles de Swan <sup>(3)</sup>. Ce savant mesure l'indice ordinaire du spath au moyen de prismes taillés dans différentes directions; il emploie la méthode du minimum de déviation et opère avec la lumière de l'alcool salé. Il obtient les résultats suivants :

	Indice ordinaire du spath.
Rayon réfracté parallèle à l'axe.....	1,658367
» perpendiculaire à l'axe.....	66
» » .....	61
» » .....	84
» à 45° de l'axe.....	85
» à 60° de l'axe.....	89
Moyenne.....	<u>1,658375</u>

Les différences ne portent que sur le cinquième chiffre décimal; elles sont de l'ordre des erreurs d'observation. D'autre part, pour la raie D et d'après les calculs précédents (nos 41 et 42), la valeur de  $c_o l^2$  serait 0,000436, tandis que celle de  $c_e l^2$  est négligeable. Ainsi, dans l'hypothèse de Neumann, l'indice ordinaire varierait d'environ 43,6 unités du cinquième chiffre décimal, quand on passe du rayon parallèle au rayon perpendiculaire à l'axe optique du spath. La réponse est éclatante.

56. Cependant, malgré leur précision, ces expériences laissent place au doute : peut-être une compensation s'établit-elle entre la variation du terme de Briot et celle des autres termes de dispersion, de façon à maintenir approximativement la constance de l'indice ordinaire de la

(1) *Leçons d'Optique physique*, t. I, p. 530.

(2) 13<sup>th</sup> *Rep. of. Brit. Assoc.*, p. 7.

(3) *Edimb. Trans.*, t. XVI, p. 375.

raie D? Pour lever cette objection, il faut observer les indices ordinaires dans une grande étendue du spectre. La constance de tous ces indices entraînera nécessairement celle du terme de Briot et même aussi celle des autres termes de dispersion. Telles sont les vérifications faciles et décisives qu'on peut opérer sur le rayon ordinaire.

57. Pour faire la démonstration plus complète, on doit étudier la variation du terme de Briot pour le rayon extraordinaire. Aucune vérification n'a été faite dans ce sens; cependant on sait que, pour une onde plane perpendiculaire à l'axe, le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire coïncident. La constance du coefficient  $c$  du rayon ordinaire une fois établie, il résulte de cette loi que, pour le rayon extraordinaire, le coefficient de Briot varie de  $c_e$  à  $c_o$ , quand l'angle de l'onde plane avec l'axe du cristal varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Mais, cette démonstration a l'inconvénient de faire rentrer la nouvelle vérification dans la première, relative au rayon ordinaire; aussi déterminerai-je les valeurs du terme de Briot, pour le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire, dans un azimut intermédiaire entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

58. Voici le plan d'expériences que ces considérations m'ont conduit à adopter :

1° Reprendre la détermination des formules de dispersion pour les indices principaux du spath;

2° Mesurer les indices ordinaire et extraordinaire des différentes radiations pour une onde plane faisant avec l'axe un angle constant connu, de façon à en déduire les formules de dispersion pour les deux rayons dans cette direction.

Les grandes longueurs d'onde influent le plus sur le terme de dispersion de Briot : des calculs précédents il résulte (nos 35, 36, 37, 41, 42) que, dans le spectre ultra-violet, le terme de Briot est négligeable; dans le spectre visible il est sensible, pour devenir prépondérant dans le spectre infra-rouge. Les courbes montrent ces faits avec évidence. J'ai donc borné à ces deux dernières régions du spectre mes recherches qui, à cet égard, se divisent en deux parties :

1° Observations des raies de Fraunhofer avec le goniomètre ordinaire;

2° Observations des radiations calorifiques par la méthode de M. Mouton.

La précision des pointés est au moins dix fois plus forte dans le premier cas que dans le second; de là la nécessité, pour les premières observations, d'une étude minutieuse des erreurs systématiques; cette étude devient à peu près inutile dans le second cas.

---

## CHAPITRE IV.

### ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR LE SPATH D'ISLANDE.

---

#### § I. — Observations dans le spectre visible.

##### GONIOMÈTRE ET PRISME.

59. Ces observations ont été faites à l'École Polytechnique, au laboratoire de M. Cornu, avec un goniomètre de Babinet, construit par MM. Brunner. Cet admirable instrument, que mon ancien professeur m'a fait l'honneur de me confier, a été décrit par lui-même (1). Le cercle est divisé dans le sens des aiguilles d'une montre; la division extrême du vernier donne les 3". Je comptais employer aussi le prisme de spath qui lui a servi dans son second Mémoire sur le spectre normal du Soleil (2). L'utilisant lui-même pour la suite de ce travail, M. Cornu a poussé la bienveillance jusqu'à m'offrir d'en commander un à mon gré à M. Pellin.

Voici la taille que j'ai adoptée.

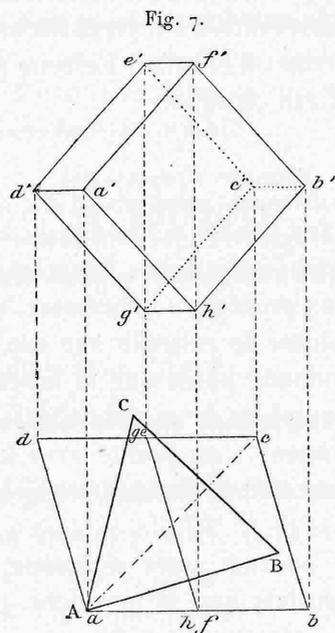
60. Soit  $decg, afbh, d'e'$ ... le rhomboèdre de spath, appuyant par sa face  $d'e'c'g'$  sur le plan vertical et ayant son axe  $ac, a'c'$  horizontal. Le

---

(1) *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 15.

(2) *Ibid.*, 2<sup>e</sup> série, t. IX; 1880.

plan horizontal de cet axe découpe dans le cristal un parallélogramme  $abcd$ . Je choisis les bases du prisme parallèles à ce plan; par suite, les arêtes sont verticales. Enfin, pour définir l'orientation des faces latérales du prisme, je mène deux plans AB, AC (*fig. 7*), faisant avec l'axe  $ac$  des



angles de  $30^\circ$ , puis un troisième plan BC perpendiculaire à l'axe. J'obtiens ainsi le prisme équilatéral ABC, tel que l'axe est, dans le plan de la section droite, la bissectrice de l'angle  $\hat{A}$ . Pour reconnaître les angles, j'ai inscrit les lettres A, B, C, en tournant de droite à gauche sur la base supérieure. Des petites faces naturelles, que j'ai fait conserver comme faces témoins sur les sommets, permettent de définir exactement l'orientation cristallographique des faces du prisme.

61. Les avantages que j'ai trouvés dans cette taille sont les suivants : d'abord les faces naturelles laissées sur les arêtes verticales A et C sont très propres à définir la position de l'axe dans le plan de la base du prisme; puis, si l'on observe successivement à travers les trois angles A, B, C, l'onde plane passera par l'axe, puis fera avec lui, de

C.

10

part et d'autre, des angles de  $30^\circ$ . Pour le rayon ordinaire, on pourra vérifier la constance de l'indice; de plus, les deux positions symétriques devant, dans toutes les théories, donner le même indice, la variation de celui-ci fera connaître la grandeur des erreurs accidentelles. Pour le rayon extraordinaire, l'observation à travers A donne l'indice minimum; puis la double observation à travers les angles B et C constitue un retournement qui permet d'éliminer l'erreur provenant de l'indécision sur la position de l'axe optique.

## MÉTHODES D'OBSERVATION.

62. Le réglage a été fait par les méthodes de M. Cornu (<sup>1</sup>), sauf de légères modifications que j'indiquerai. Pour la mesure de l'angle réfringent, on connaît deux procédés: le premier, utilisant l'*oculaire nadiral* qui permet de pointer le réticule sur son image par réflexion normale, a dû être abandonné parce que la lunette ne possédait plus cet oculaire. J'ai alors employé la méthode qui consiste à mesurer le double de l'angle réfringent: on pointe avec la lunette successivement les images de la fente du collimateur réfléchies par les deux faces du prisme.

Contrairement à une opinion assez répandue, cette méthode peut donner d'aussi bons résultats que la première, pourvu qu'on ait soin d'éliminer les erreurs systématiques.

Pour l'indice du rayon ordinaire, la méthode employée est celle du minimum de déviation; elle s'applique au rayon extraordinaire observé à travers l'angle A; mais, dans les angles B et C, la variation de l'indice avec la position du rayon lumineux fait que, dans la position du minimum de déviation, les rayons incident et émergent cessent d'occuper des positions symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle réfringent, et la formule classique

$$n = \frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

(<sup>1</sup>) *Spectre normal du Soleil*, 2<sup>e</sup> Partie (*Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. X; 1880).

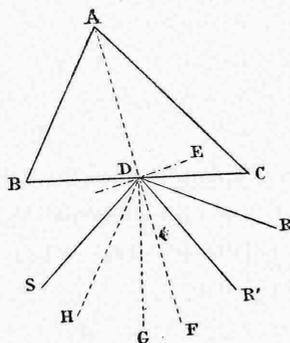
n'est plus vraie. Il faudrait employer les formules de M. Cornu <sup>(1)</sup>, qui exigent la mesure difficile des angles d'incidence et d'émergence. Il y a plus, les diverses radiations inégalement réfrangibles suivraient dans le cristal des chemins différents, circonstance peu favorable à l'étude de la dispersion dans une direction déterminée. J'ai préféré faire l'observation dans la position symétrique, de façon que, dans le cristal, le rayon lumineux soit toujours perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent. J'ai utilisé dans ce but l'image du collimateur réfléchi sur la troisième face du prisme.

63. Il suffirait, en effet, de faire coïncider l'image réfléchi et l'image réfractée si la troisième face était rigoureusement perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent; mais il n'en est pas ainsi. Soient

ABC la section droite du prisme (*fig. 8*);  
 ADF la bissectrice de l'angle A;  
 DG la normale à BC.

On peut assimiler le rayon réfracté dans la position symétrique à un rayon réfléchi sur une face idéale DE, dont la normale est ADF. Dès

Fig. 8.



lors, soient SD le rayon incident, DR et DR' les rayons réfléchis sur les faces DE, BC. J'imagine que toutes les droites menées par D sont limi-

(1) *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 238.

tées à un cercle qui a pour centre ce point, puis je mesure les angles par les arcs interceptés sur sa circonférence et comptés positivement de gauche à droite, dans le sens de la graduation du goniomètre. On a ainsi

$$(1) \quad \text{lecture } R' - \text{lecture } R = RR' = 2FG.$$

Pour évaluer FG au moyen des angles du triangle, je mène DH parallèle à AB; il vient

$$FG = FH + HB + BG.$$

Or on a

$$FH = + \frac{\hat{A}}{2}, \quad HB = + \hat{B}; \quad BG = - \frac{\pi}{2}.$$

Portant ces valeurs dans l'égalité (1), j'obtiens

$$\text{lecture } R' - \text{lecture } R = \hat{A} + 2\hat{B} - \pi = \hat{B} - \hat{C}.$$

Si l'on désigne par *réfl.* la lecture du cercle gradué pour la position de la lunette pointant le rayon réfléchi, par *réfrac.* la lecture pour le rayon réfracté, enfin, si l'on joint au précédent résultat ceux qu'on obtient pour les autres angles, on a

A	travers A,	réfl. — réfrac.....	.....	$\hat{B} - \hat{C}$
»	B,	»	.....	$\hat{C} - \hat{A}$
»	C,	»	.....	$\hat{A} - \hat{B}$

64. Avant de passer à l'étude des causes d'erreurs, il importe de savoir avec quelle précision il faut pointer l'image réfléchie pour que l'erreur commise sur ce pointé n'entraîne pas une erreur sensible sur la valeur de l'indice. L'indice  $n$  du rayon extraordinaire qui fait avec l'axe optique du cristal un angle  $\theta$  est donné par la formule

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \theta,$$

où  $n_o$  et  $n_e$  représentent les indices principaux ordinaire et extraordinaire.

Cette formule différenciée donne

$$dn = -\frac{n^3}{2} \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin 2\theta d\theta.$$

Si l'on fait  $\theta = 30^\circ$ , puis qu'on remplace les indices par les valeurs relatives à la raie D, et  $d\theta$  par la mesure trigonométrique de l'arc de  $i'$ , on trouve

$$dn = 0,000\ 047.$$

Si donc on veut que  $dn$  ne dépasse pas  $\frac{1}{2}$  unité du cinquième chiffre décimal, il faudra que  $d\theta$  ne dépasse pas  $0',1$ . D'ailleurs, la variation  $d\theta$  égale la variation  $dr$  de l'angle de réfraction; or, de la formule

$$\sin i = n \sin r,$$

on déduit

$$di = n \frac{\cos r}{\cos i} dr.$$

Faisant, dans ces formules,

$$r = 30^\circ, \quad n = 1,6,$$

il vient

$$di = 2,3 dr.$$

Ainsi, l'angle  $i$ , et par suite la position du prisme sur la plate-forme devra être déterminée à  $0',2$  près. Enfin, la rotation de l'image réfléchie étant double de celle du prisme, le pointé de cette image devra être fait à moins de  $0',4$  ou  $24''$ . Cette précision très grossière sera facilement atteinte malgré la mauvaise qualité de l'image réfléchie, qui est fortement dépointée quand la lunette est disposée pour la mesure de la déviation du rayon réfracté.

## § II. — Erreurs systématiques.

65. La principale cause d'erreur dans les mesures d'indices est due aux dépointements que la courbure des faces du prisme conduit à faire subir à la lunette. Dans la mesure de l'angle réfringent par la méthode que j'ai employée, une autre cause grave d'erreur résulte de la difficulté de régler le collimateur, de façon que la fente soit exactement au

foyer principal de l'objectif. M. Cornu, qui a signalé ces causes d'erreurs, en a donné la théorie et calculé les formules de correction (1). Je vais reprendre cette double étude à un point de vue différent et plus général; je comparerai les formules obtenues par les deux méthodes; enfin, je montrerai quels avantages présentent les miennes.

Dans l'observation des raies de Fraunhofer, l'usage d'une lentille collectrice placée en avant de la fente fait que le pinceau lumineux couvre tout le prisme; de cette façon, son axe passe par les centres des faces. C'est là une condition nécessaire à l'établissement de la théorie; car, si l'axe du pinceau perce les faces du prisme en des points qui varient d'une façon inconnue, l'angle réfringent n'est pas exactement défini et varie d'une observation à l'autre. Il en résulte une grande incertitude sur l'indice malgré la finesse des images et la précision des pointés qui devient illusoire quand on ne fait pas usage de la lentille collectrice. D'ailleurs, pour conserver la finesse des images, il suffit, comme l'indique M. Cornu, de diaphragmer le prisme afin d'éviter l'influence des bords des faces; cette opération doit être faite avec soin pour que les diaphragmes des trois faces se correspondent exactement dans la position symétrique du prisme pour la mesure de la déviation du rayon réfracté. Le prisme ainsi diaphragmé, réglé avec soin par les méthodes de M. Cornu, a été centré sur la plate-forme par le procédé des tourneurs.

Je me suis assuré, en outre, que l'axe du tirage de la lunette coïncide avec son axe optique. Pour cela, j'ai pointé la lunette directement sur le collimateur, puis j'ai fait varier le tirage. J'ai ainsi constaté que le réticule, dans son mouvement, reste au centre de l'image dépointée du collimateur. Cette condition n'est utile à remplir que si l'on ne fait pas les pointés à droite et à gauche avec le même tirage. Elle n'était donc pas nécessaire pour mes observations définitives, où, naturellement, cette précaution a été prise, mais seulement pour celles qui ont servi à vérifier les formules que je vais établir.

---

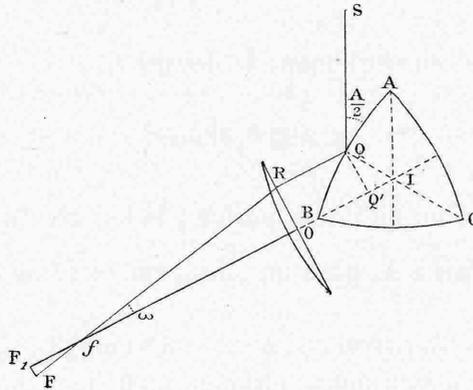
(1) *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. X; 1880.

## INFLUENCE DU DÉPOINTEMENT DE LA LUNETTE.

66. *Sur l'azimut du rayon réfléchi.* — Soient

- ABC le prisme supposé convexe (*fig. 9*);  
 I la trace de l'axe de l'instrument et le centre du prisme;  
 Q le centre de la face AB;  
 SQ l'axe du pinceau incident supposé parallèle à AI;  
 QR l'axe du pinceau réfléchi à gauche;  
 fO la position de l'axe optique de la lunette supposé parallèle à QR;  
 f la position du réticule dans le plan focal principal;  
 O le centre optique de l'objectif.

Fig 9



Le rayon SQ, réfléchi suivant la droite QR parallèle à l'axe optique  $fO$ , vient passer par le foyer principal  $f$ . Mais le pinceau qui a pour axe QR est divergent en vertu de la convexité des faces du prisme; il vient donc converger, après avoir traversé l'objectif, en un point  $F$  de  $Rf$  situé au delà de  $f$ . On devra donc commencer par donner à la lunette un dépointement

$$\partial f = + f F_1.$$

Le réticule étant alors en  $F_1$ , il faudra faire tourner la lunette d'un angle correspondant à  $F_1F$ , de façon à amener le réticule de  $F_1$  en  $F$ . Ce mouvement aura pour effet de diminuer la lecture du rayon réfléchi

à gauche et, par suite, la mesure de  $\widehat{A}$ . On devra donc appliquer à cette lecture (ou à l'angle  $\widehat{A}$ ) une correction positive  $\delta A$ . Pour l'évaluer, je mène  $QQ'$  parallèle à  $OR$ , puis je désigne par  $p$  l'apothème  $IQ$  du triangle  $ABC$ , par  $\omega$  l'angle  $\widehat{RfO}$  et par  $f$  la distance focale principale de la lunette. On a successivement

$$OR = QQ' = IQ \sin \widehat{QIQ'} = p \cos \frac{A}{2},$$

$$\omega = \frac{OR}{Of} = \frac{p}{f} \cos \frac{A}{2},$$

$$FF_1 = \omega f F_1 = \frac{p}{f} \cos \frac{A}{2} \delta f,$$

$$\text{Angle correspondant à } FF_1 \text{ ou } \delta A = \frac{FF_1}{OF_1} = \frac{p}{f} \cos \frac{A}{2} \delta f : (f + \delta f);$$

d'où, en définitive, en négligeant  $\delta f$  devant  $f$ ,

$$(1) \quad \delta A = + \frac{p}{f^2} \delta f \cos \frac{A}{2}.$$

Telle est la correction qu'il faut porter à la lecture du rayon réfléchi à gauche ou par ce fait à  $\widehat{A}$ , pour un allongement  $\delta f$  de la lunette.

67. *Sur l'azimut du rayon réfracté.* — Soit  $SPQR$  (*fig. 10*) la marche de l'axe du pinceau lumineux réfracté à gauche. Pour avoir la valeur exacte de la déviation  $\Delta$ , je devrais placer l'axe de la lunette suivant  $fO$  parallèle à  $QR$ . Dans cette position,  $QR$  parallèle à l'axe optique se réfracte suivant  $Rf$ , et, comme le pinceau  $QR$  est rendu convergent par la convexité du prisme, son foyer est sur  $Rf$  en deçà de  $f$ , quelque part en  $F$ . On est donc conduit à raccourcir d'abord la lunette en amenant le réticule de  $f$  en  $F_1$ . Je désigne ce dépointement par

$$\delta f = -fF_1.$$

On fera ensuite tourner la lunette de façon à amener le réticule de  $F_1$  en  $F$ . Cette opération a pour effet de diminuer la lecture du rayon réfracté à gauche et, par suite, la déviation  $\Delta$  d'un angle correspon-

nant à  $F_1F$ . Il faut donc porter à cette lecture ou à  $\Delta$  une correction positive  $\delta\Delta$  dont voici le calcul :

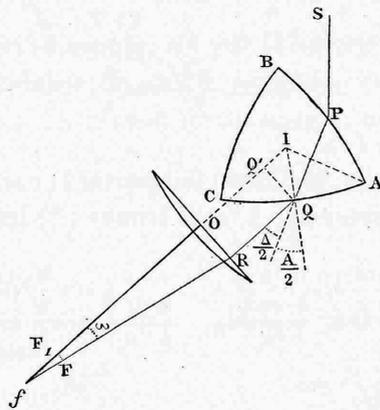
$$OR = QQ' = IQ \sin QIQ' = p \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

$$\omega = \frac{OR}{Of} = \frac{p}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

$$FF_1 = \omega \cdot f F_1 = \frac{p}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2} (-\delta f) = -\frac{p \delta f}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2},$$

Angle correspondant à  $FF_1$  ou  $\delta\Delta = \frac{FF_1}{OF_1} = -\frac{p \delta f}{f} \sin \frac{A + \Delta}{2} : (f + \delta f),$

Fig. 10.



d'où l'on tire en définitive, en négligeant  $\delta f$  devant  $f$ ,

$$(2) \quad \delta\Delta = -\frac{p}{f^2} \delta f \sin \frac{A + \Delta}{2}.$$

68. Remarquons que, dans les formules (1) et (2), la ligne trigonométrique  $\cos \frac{A}{2}$  ou  $\sin \frac{A + \Delta}{2}$  qui multiplie  $\frac{p}{f^2} \delta f$  représente toujours  $\sin QIQ'$ ; de sorte que, si, dans l'observation du rayon réfléchi, au lieu de considérer un rayon incident parallèle à AI, comme dans la *fig.* 9, on considère le rayon qui se réfléchit dans la position du minimum de réfraction (*fig.* 10), l'angle  $QIQ'$  est égal à  $\frac{A + \Delta}{2}$ , et la correction qu'il

faut porter à la lecture du rayon réfléchi à gauche devient

$$\delta A = + \frac{\rho \delta f}{f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2}.$$

69. Je vais maintenant montrer que les formules (1) et (2) concordent avec celles de M. Cornu.

Correspondante à la formule (1), l'éminent physicien trouve (1)

$$\delta \frac{A}{2} = \frac{\rho}{f^2} \cot \frac{A}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{x}{f^2} = \frac{2}{\rho \cos i}, \quad i = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},$$

où  $x$  représente le dépointement  $\delta f$ . On en déduit

$$\delta A = \frac{2\rho}{f^2} \cot \frac{A}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{2}{\rho} = \frac{\delta f}{f^2} \sin \frac{A}{2};$$

d'où l'on tire

$$\delta A = \frac{\rho \delta f}{f^2} \cos \frac{A}{2},$$

ce qui est la formule (1).

Dans le deuxième cas, M. Cornu fait porter la correction sur l'angle  $A$ , au lieu de la faire porter sur  $\Delta$ , et il trouve (2) les formules

$$\delta' \frac{A}{2} = \frac{\rho}{f^2} \operatorname{tang} \frac{A + \Delta}{2}, \quad \frac{2}{\rho} = \frac{y \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A + \Delta}{2}}{f^2 \sin \frac{\Delta}{2}},$$

où  $y$  représente  $-\delta f$ .

Je tire de là

$$\delta' A = \frac{2}{\rho} \operatorname{tang} \frac{A + \Delta}{2} = \frac{\rho y}{f^2} \frac{\sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A + \Delta}{2} \sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{A + \Delta}{2}},$$

et en remplaçant  $\frac{\rho y}{f^2} \sin \frac{A + \Delta}{2}$  par  $\delta \Delta$ , d'après ma formule (2),

$$\delta' A = \delta \Delta \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Delta}{2}}.$$

(1) *Spectre normal du Soleil*, II<sup>e</sup> Partie, p. 59 et 61.

(2) *Ibid.*, p. 58 et 64.

Si, au lieu de faire porter la correction sur  $A$ , on veut la faire porter sur  $\Delta$ , comme dans ma formule, on doit différentier la formule qui donne  $n$  en laissant  $n$  constant; il vient

$$\begin{aligned}\sin \frac{A + \Delta}{2} &= n \sin \frac{A}{2}, \\ \cos \frac{A + \Delta}{2} (dA + d\Delta) &= n \cos \frac{A}{2} dA, \\ d\Delta &= \frac{n \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A + \Delta}{2}}{\cos \frac{A + \Delta}{2}} dA;\end{aligned}$$

remplaçant, dans cette formule,  $dA$  par la valeur  $\delta A$  de M. Cornu, on aura la valeur équivalente de  $d\Delta$ ; je remplace en même temps  $n$  par  $\frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$ ; il vient

$$\begin{aligned}d\Delta &= \delta\Delta \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A + \Delta}{2} \frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{A + \Delta}{2}} \\ &= \frac{\delta\Delta}{\sin \frac{\Delta}{2}} \left( \sin \frac{A + \Delta}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A + \Delta}{2} \sin \frac{A}{2} \right),\end{aligned}$$

ou enfin

$$d\Delta = \delta\Delta.$$

Ainsi la valeur de  $d\Delta$  qu'on déduit de la formule de M. Cornu est égale à la valeur  $\delta\Delta$  donnée par ma formule (2).

70. On le voit, il y a bien concordance entre les formules de M. Cornu et les miennes; mais elles présentent une différence essentielle. Dans mes formules, je fais intervenir, non pas le rayon de cour-

bure  $\rho$  des faces du prisme, mais le dépointement même de la lunette. Si l'on s'abstient, par exemple, d'exécuter le changement de mise au point provoqué par la courbure des faces, les corrections données par mes formules (1) et (2) s'annulent.

Les corrections de M. Cornu supposent, au contraire, qu'on opère exactement la mise au point de la lunette à chaque pointé. Si, dans cette opération qui est toujours un peu indécise, on commet une erreur  $df$ , il en résulte, sur les corrections mêmes, des erreurs proportionnelles à  $df$ , et que font connaître mes formules.

Un autre avantage est dans la démonstration même que j'ai employée. Celle-ci distingue explicitement l'axe du pinceau lumineux et l'axe optique de la lunette. Elle ne permet donc pas, entre ces éléments, la confusion que la théorie de M. Cornu paraît avoir laissé échapper à M. Macé de Lépinay (1). Cet habile observateur pense éliminer l'influence de la courbure des faces sur la mesure de  $\Delta$  par l'usage de la lentille collectrice. « Par là, dit-il, les *axes des faisceaux lumineux* percent les faces du prisme en leurs centres. » Cela est vrai. Les angles réfringents, conclut l'auteur, sont formés par les plans tangents au prisme en ces points. Là est la confusion. La conclusion est vraie à proprement parler; elle est vraie dans ma théorie, mais il n'en faut pas moins appliquer la correction de dépointement de ma formule (2). Elle doit être regardée comme fausse dans la théorie de M. Cornu.

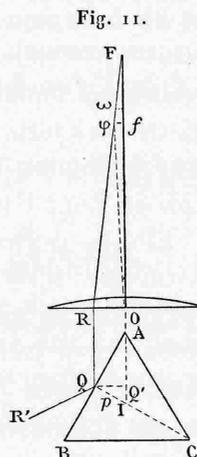
Ici en effet, par un élégant artifice de démonstration, on regarde comme angle réfringent l'angle des plans tangents au prisme aux points où celui-ci est percé, non par les *axes des faisceaux lumineux*, mais par les *axes optiques des lunettes*. Ma méthode de démonstration ne permet pas le doute à cet égard. Heureusement, la courbure des faces du prisme était très faible dans les recherches en question (les résultats de la mesure des angles en sont la preuve), de sorte qu'il n'en est pas résulté d'erreur sensible sur les indices. Ceux-ci demeurent très bons (2).

(1) *Journal de Physique*, p. 192, avril 1887.

(2) D'après l'auteur, l'erreur commise sur  $\hat{A}$  est 6", sur  $\frac{A}{2}$  elle est 3"; on en déduit, par

INFLUENCE D'UN DÉFAUT DE MISE AU POINT DU COLLIMATEUR.

71. *Sur la mesure de l'angle réfringent.* — Soient O (fig. 11) le centre optique de l'objectif et F la fente du collimateur. FO coupe en  $f$



le plan focal principal, de sorte que le collimateur a subi sur sa position normale le dépointement

$$\delta f = + f F.$$

la formule de M. Cornu,

$$\delta \frac{A}{2} = \frac{p}{\rho} \operatorname{tang} \frac{A}{2},$$

$$\frac{p}{\rho} = 0,000\ 008.$$

La correction qu'il faut appliquer à l'angle réfringent, dans la mesure de l'indice, est donnée par la seconde formule de M. Cornu

$$\delta' \frac{A}{2} = \frac{p}{\rho} \operatorname{tang} \frac{A + \Delta}{2}.$$

Pour  $\frac{A + \Delta}{2} = 50^\circ$ , elle donne

$$\delta' \frac{A}{2} = 0,000\ 01 = 2'' = 0',03.$$

Il en résulte sur l'indice l'erreur, à peu près négligeable,

$$0,000\ 01.$$

Soit  $FRQR'$  la marche de l'axe du pinceau réfléchi à gauche.  $FR$  coupe le plan focal principal en  $\varphi$ . Dès lors,  $RQ$  est parallèle à  $O\varphi$  au lieu de l'être à  $Of$ . La lecture du rayon réfléchi et, par suite, la valeur de  $A$  doit donc subir la correction

$$\delta A = -f\hat{O}\varphi.$$

Je calcule cet angle; j'ai successivement, en désignant par  $\omega$  l'angle  $OFR$  et confondant  $OR$  avec  $QQ'$  qui n'en diffère que d'une quantité de l'ordre de  $\delta f$ ,

$$OR = QQ' = IQ \sin QIQ' = p \cos \frac{A}{2}, \quad \omega = \frac{OR}{OF} = \frac{p}{f + \delta f} \cos \frac{A}{2},$$

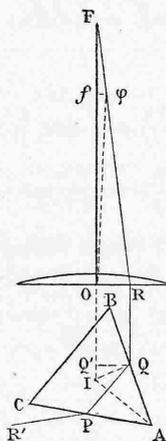
$$f\varphi = \frac{p \delta f}{f} \cos \frac{A}{2}, \quad f\hat{O}\varphi = \frac{f\varphi}{Of} = \frac{p \delta f}{f^2} \cos \frac{A}{2}.$$

Portant cette valeur dans l'expression de  $\delta A$ , j'obtiens enfin

$$(3) \quad \delta A = -\frac{p \delta f}{f^2} \cos \frac{A}{2}.$$

72. *Sur la mesure de la déviation du rayon réfracté.* — Soit  $FRQPR'$  (*fig. 12*) la marche de l'axe du pinceau qui traverse le prisme.  $FR$

Fig. 12.



coupe le plan focal principal du collimateur en  $\varphi$ . Dès lors,  $QR$  est parallèle à  $O\varphi$  au lieu de l'être à  $Of$ .

La lecture du rayon réfracté, et par suite la déviation  $\Delta$ , doit donc subir la correction

$$\delta\Delta = -f\hat{O}\varphi.$$

Comme précédemment, cet angle se calcule au moyen de l'angle  $QIQ'$  qui a pour valeur  $\frac{A+\Delta}{2}$ ; on a, en définitive,

$$(4) \quad \delta\Delta = -\frac{p}{f^2} \delta f \sin \frac{A+\Delta}{2}.$$

Je vais maintenant examiner quelques conséquences des quatre formules que je viens d'établir.

73. Pour simplifier les explications, je supposerai que le collimateur et la lunette ont même distance focale principale; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire aux conclusions. J'imagine qu'on ait pu régler exactement les deux instruments sur l'infini. Je passe à la mesure de l'angle  $\hat{A}$ ; je suis conduit à changer la mise au point de la lunette. Si les faces du prisme sont convexes, il faut allonger le tirage. Au lieu d'opérer cet allongement tout entier sur la lunette, je le répartir également sur la lunette et sur le collimateur. Soit  $\delta f = \delta_1 f$  la valeur commune des deux allongements; je dois ajouter à la lecture du rayon réfléchi, à gauche, les corrections données par mes formules (1) et (3), savoir

$$(1) \quad \delta A = +\frac{p}{f^2} \delta f \cos \frac{A}{2},$$

$$(3) \quad \delta_1 A = -\frac{p}{f^2} \delta_1 f \cos \frac{A}{2},$$

dont la somme est nulle.

*Ainsi l'erreur qu'entraîne la courbure des faces sur la mesure de  $\hat{A}$  peut être éliminée.*

Au contraire, les formules (2) et (4) donnant des corrections de même signe, ce procédé ne permet pas d'éliminer la même cause d'erreur dans la mesure de  $\Delta$ . Cette erreur est constante quel que soit le système adopté pour les tirages conjugués du collimateur et de la lunette.

74. Je viens de supposer que la fente du collimateur a été primitivement placée au foyer principal de l'objectif. Mais c'est là le point le plus difficile du réglage. Cette difficulté était encore augmentée pour moi par l'absence d'oculaire nadiral. Ce qu'on peut faire avec une grande précision, c'est de régler un des instruments sur l'autre. Si donc le collimateur possède le dépointement  $\delta f$ , la lunette est par là affectée d'un dépointement  $\delta_1 f = -\delta f$ , de sorte que la somme des corrections données par les formules (1) et (3) sera

$$+ \frac{2p \delta f}{f^2} \cos \frac{\Lambda}{2}.$$

Au contraire, la somme des corrections données par les formules (2) et (4)

$$(2) \quad \delta \Delta = - \frac{p \delta f}{f^2} \sin \frac{\Lambda + \Delta}{2},$$

$$(4) \quad \delta_1 \Delta = - \frac{p \delta_1 f}{f^2} \sin \frac{\Lambda + \Delta}{2}$$

est ici nulle.

*Ainsi l'influence d'une erreur sur le réglage du collimateur est doublée dans la mesure de  $\hat{\Lambda}$  et compensée dans la mesure de  $\Delta$  par le dépointement conjugué de la lunette.*

75. L'erreur de mise au point du collimateur est la plus grave parce qu'elle est inconnue, tandis que les dépointements causés par la courbure des faces étant connus, on en peut tenir compte par le calcul. J'ai pu l'éliminer grâce aux qualités de mon prisme. Les trois faces sont sensiblement parallèles à une même droite et leurs courbures peu différentes. J'ai pu alors conserver le même tirage pour les pointés sur les trois faces. L'erreur commise sur les trois angles est ainsi la même, et l'excès de la somme des trois sur  $180^\circ$  fait connaître le triple de l'erreur commise sur chacun d'eux. Ce procédé, employé par M. Macé de Lépinay, permet d'éliminer en même temps l'influence du dépointement de la lunette quand on n'établit pas la compensation précédente (n° 73). Cependant les calculs de correction n'étant qu'approchés, et les circonstances n'étant pas rigoureusement les mêmes dans les mesures des trois angles, il est préférable d'éviter les grands écarts et d'effec-

tuer cette compensation, au moins en partie. Comme vérification, j'ai opéré avec divers systèmes de tirages conjugués.

76. D'après ce qui précède (n° 74), l'erreur de réglage du collimateur n'a pas d'influence sur la mesure de  $\Delta$ ; au contraire, l'effet du dépointement dû à la courbure des faces du prisme ne peut pas être compensé comme dans la mesure de l'angle réfringent. Pour la partie moyenne du spectre visible, il suffit d'appliquer la formule de correction (2). L'achromatisme des objectifs rend  $f$  sensiblement constant, de façon que  $\delta f$  est donné par le dépointement que subit la lunette quand on vise l'image de la fente du collimateur directement, puis à travers le prisme. Mais, pour les radiations extrêmes, la valeur de  $f$ , variable avec chaque radiation est mal connue; renonçant alors à mesurer  $\delta f$  et, par suite, à calculer la correction, j'ai songé à faire disparaître l'erreur. Or, d'après ce qui précède (n° 67), elle provient de ce que l'axe du rayon lumineux SPQR (*fig. 10*) ne pénètre pas dans l'objectif de la lunette par son centre optique, mais s'en écarte de OR. Si donc on fait glisser le prisme sur la plate-forme parallèlement à la bissectrice de l'angle  $\hat{A}$  d'une quantité convenable, l'axe PQ du pinceau qui traverse le prisme passera par les centres optiques des objectifs, et les changements de tirage de la lunette et du collimateur seront sans effet sur la lecture du rayon réfracté. Je vais montrer que cette propriété est conservée quand on passe de la déviation à gauche, à la déviation à droite, sans nouveau déplacement du prisme sur la plate-forme.

77. Le principe est celui-ci :

Je considère une figure quelconque  $A_1 B_1 C_1 D_1$  (*fig. 13*), et une droite  $ID_1$  coupant l'axe en I. Si l'on amène la figure dans la position  $A_2 B_2 C_2 D_2$  en la faisant tourner autour de l'axe I de l'angle

$$D_1 I D_2 = 2 D_1 I O;$$

si ensuite on retourne la figure autour de  $ID_2$ , de façon à lui faire occuper la position  $A_3 B_3 C_3$ , cette dernière position est symétrique de la première par rapport à IO. Ce principe, assez intuitif, est démontré par

C.

les égalités suivantes entre les arcs comptés sur la circonférence que décrit le point  $A_1$  :

$$D_1 A_1 = D_2 A_2 = D_3 A_3,$$

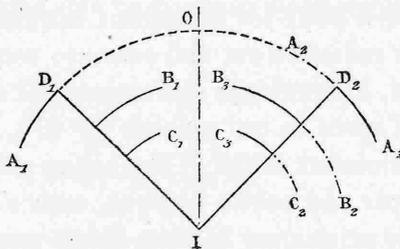
$$OD_1 = \dots = OD_2;$$

d'où l'on déduit, par addition,

$$OA_1 = OA_3.$$

De cette égalité résulte que  $A_1$  et  $A_3$  sont symétriques par rapport à  $IO$ , et il en est de même pour les autres points.

Fig. 13.



Si la figure donnée est symétrique par rapport à  $ID_1$ , le dernier retournement ne fait qu'échanger entre eux les points symétriques; donc la deuxième figure  $A_2 B_2 C_2$  est, dans ce cas, symétrique de la première par rapport à  $IO$ ; seulement les points symétriques des deux figures ne sont pas homologues.

78. Voici l'application de ce principe à la mesure des indices.

Soient

$I$  le centre de la plate-forme (*fig. 14*);

$O, f, O_1, f_1$  les axes optiques du collimateur et de la lunette;

$A_0 B_0 C_0$  le prisme centré dans la position du minimum de déviation;

$E_0$  le centre de la face  $A_0 C_0$ ;

$E_0 G$  la parallèle à  $O_1 f_1$  coupant la bissectrice de  $\hat{A}_0$  au point  $G$ .

Je transporte le prisme parallèlement à lui-même de  $A_0 B_0 C_0$  en  $A_1 B_1 C_1$ , de la quantité  $A_0 A_1 = GI$ , de façon que le centre  $E_0$  de la face vienne se placer en  $E_1$  sur l'axe optique  $O_1 f_1$ .

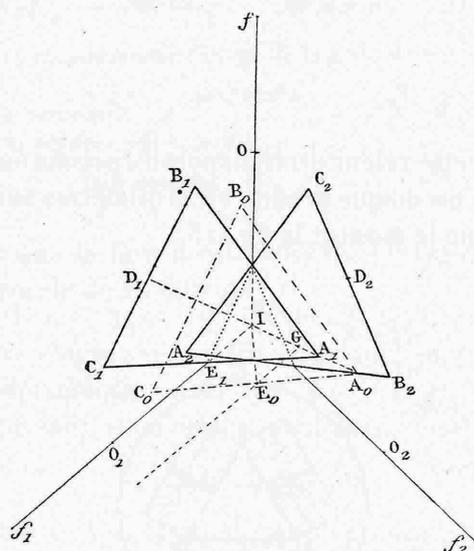
En même temps, l'axe optique du collimateur percera la face  $A_1B_1$  en son centre.

Pour la déviation à droite, j'amène le prisme dans la position  $A_2B_2C_2$ , en faisant tourner la plate-forme de l'angle

$$D_1ID_2 = 2D_1IO = O_1IO = 180^\circ - \Delta.$$

D'après le théorème précédent, la nouvelle position du prisme est symétrique de la première par rapport à  $IO$ . La condition théorique est

Fig. 14.



donc encore réalisée, à savoir que les axes optiques  $O_1f_1$  et  $O_2f_2$  du collimateur et de la nouvelle position de la lunette percent les faces du prisme en leurs centres.

79. La longueur  $GI$ , dont il faut faire glisser le prisme et que je désigne par  $e$ , se calcule à l'aide du triangle  $E_0IG$  dans lequel on a

$$GI = IE_0 \frac{\sin \hat{E}_0}{\sin \hat{G}},$$

avec

$$GI = e, \quad \hat{G} = 90^\circ - \frac{\Delta}{2},$$

$$IE_0 = p, \quad \hat{E}_0 = 180^\circ - \hat{I} - \hat{G} = \frac{A + \Delta}{2};$$

on en déduit

$$e = \frac{p \sin \frac{A + \Delta}{2}}{\cos \frac{\Delta}{2}} = p \cdot n \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{\Delta}{2}}.$$

Pour

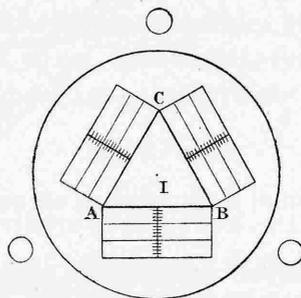
$$p = 1^c, \quad n = 1,66, \quad \frac{\Delta}{2} = 26^\circ, \quad \frac{A}{2} = 30^\circ,$$

on trouve

$$e = 0^c,92.$$

Pour mesurer cette valeur du transport du prisme sur la plate-forme, j'ai fixé à celle-ci un disque gradué en millimètres suivant trois directions à  $60^\circ$ , comme le montre la *fig. 15*.

Fig. 15.



Dans cette figure, ABC représente le prisme supposé centré ou plutôt le support concentrique du prisme. De  $5^{\text{mm}}$  en  $5^{\text{mm}}$  les traits sont prolongés suivant toute la longueur de ce support, pour servir de directrices. On évalue à l'œil le dixième de millimètre. Ce dispositif m'a donné d'excellents résultats.

80. Dans l'observation du rayon extraordinaire à travers les angles  $\hat{B}$

et  $\hat{C}$ , j'ai dit (n° 63) que je fixe la position du prisme par la distance de l'image réfléchie et de l'image réfractée de la fente du collimateur; les positions de ces images sont affectées des erreurs étudiées (nos 66 et 67). Ces erreurs étant de signes contraires se détruiraient en partie; mais on les annule, la première en faisant porter le dépointement moitié sur la lunette, moitié sur le collimateur, la seconde en déplaçant le prisme comme je viens de l'indiquer.

81. Voici quelques observations destinées à vérifier les formules précédentes et à montrer l'importance des erreurs qu'elles représentent.

*Tirages de la lunette pointée sur l'image de la fente du collimateur,  $\theta = 22^\circ$ .*

Directement.....	$26,86$ <sup>mm</sup>
Par réflexion sur la face $a$ .....	$18,82$
Dépointement : $\delta f$ .....	$- 8,04$

On en conclut que la face  $a$  est concave. Le rayon de courbure se calcule par la formule de M. Cornu (1)

$$\rho = \frac{2f^2}{\delta f \cos i}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f = 44^c, \\ i = 60^\circ, \\ \delta f = - 8^{\text{mm}}, 04. \end{cases}$$

On obtient

$$\rho = - 96^{\text{m}}, 50.$$

La face est relativement très bonne, sa courbure faible; les autres faces sont aussi concaves et ont des courbures peu différentes de la première. Il m'a fallu, pour arriver à ce résultat, rendre plusieurs fois le prisme au constructeur en lui indiquant les modifications à apporter à chaque face.

J'ai fait ensuite varier le tirage de la lunette. Pointant, pour chaque tirage, l'image réfléchie à droite sur la face  $a$  et lisant un seul microscope, j'ai obtenu les résultats suivants :

(1) *Spectre normal du Soleil*, II<sup>e</sup> Partie, p. 63.

Tirages.	$\delta f$ .	Microscope droit.	$\delta C$ .		Différence O. — C.
			obs.	calc.	
<sup>mm</sup> 26 .....	»	300.32.51"	»	»	»
24 .....	— 2	32.30	+21	+17	+ 4
22 .....	— 4	32.18	33	35	— 2
20 .....	— 6	31.54	57	52	+ 5
18 .....	— 8	31.48	63	70	— 7
16 .....	—10	31.24	87	87	0
14 .....	—12	300 31.15	96	96	0

Dans ce Tableau, toutes les différences sont rapportées à la première observation; la colonne  $\delta f$  donne les dépointements;  $\delta C$  obs. représente ce qu'il faut ajouter à chaque observation pour reproduire la première;  $\delta C$  calc. est la correction calculée par la formule

$$\delta \hat{C} = - \frac{p \delta f}{f^2} \cos \frac{A}{2} \quad (1),$$

où l'on fait

$$p = 0^{\circ}, 95, \quad f = 44^{\circ}, \quad \frac{C}{2} = 30^{\circ}.$$

La vérification est, on le voit, très bonne et indique que l'axe du tirage de la lunette coïncide très exactement avec son axe optique. Le Tableau montre que, pour le tirage qui correspond à la mise au point exact (environ 18<sup>mm</sup>), l'erreur commise sur  $\hat{C}$  par le fait du dépointement est environ 1'. Pour  $n = 1,66$ , cette erreur entraîne sur  $n$  l'erreur énorme 0,00025. Avec une courbure double de la face, ce qui n'est pas exagéré dans le cas du spath, il en résulterait une erreur égale à 0,0005. Si l'on observe avec deux prismes de courbures inverses, l'écart des deux observations sera doublé. Les erreurs sur la mesure de  $\Delta$  sont de même ordre. On voit combien la précision des pointés et des lectures du cercle peut devenir illusoire. On ne doit donc pas s'étonner des grands écarts que présentent les déterminations des différents physiciens pour le corps qui nous occupe, et il convient de les attribuer bien plutôt aux causes signalées qu'à la variété des

(1) Le changement de signe de cette correction vient de ce que l'image est réfléchie à droite et non à gauche comme dans la formule (1) (n° 66).

échantillons employés pour la matière transparente du prisme. C'est là d'ailleurs un point qui a été très bien mis en lumière par M. Cornu dans son Mémoire souvent cité sur le spectre normal du Soleil.

## CORRECTIONS DE TEMPÉRATURE.

82. D'après M. Fizeau (1),  $\theta$  étant la température exprimée en degrés,  $n_o$  et  $n_e$ , les deux indices principaux du spath, on a, pour la raie D,

$$\frac{dn_o}{d\theta} = 0,00000565,$$

$$\frac{dn_e}{d\theta} = 0,0000108.$$

Dans mes expériences, l'écart de température n'a jamais dépassé  $10^\circ$ ; j'ai donc pu négliger la variation de  $n_o$ . Celle de  $n_e$  est notable; je ramènerai toutes les observations à la température de  $22^\circ$ , qui est celle du plus grand nombre de mes expériences.

L'influence de la température est surtout très grande sur la variation des angles réfringents. M. Fizeau (2) donne en effet pour coefficients de dilatation du spath,

Dans la direction de l'axe optique .....  $\alpha = + 0,000026796$   
 Dans la direction perpendiculaire à l'axe optique .....  $\alpha' = - 0,00005327$

On en déduit facilement

$$\frac{d\frac{A}{2}}{d\theta} = - 0',048, \quad \frac{d\frac{B}{2}}{d\theta} = \frac{d\frac{C}{2}}{d\theta} = + 0',024.$$

Ces valeurs coïncident avec celles que j'ai obtenues par l'observation directe des angles, comme on verra plus loin (n° 83).

Pour  $\delta\theta = + 10^\circ$ , on aurait  $\delta\frac{A}{2} = - 0',48$ . Sur l'indice 1,66, cette variation  $\delta\frac{A}{2}$  entraîne la correction considérable

$$\delta n = + 0,000245.$$

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXVI, p. 460.

(2) *Ibid.*, p. 467, 468 et 471.

## § III. — Résultats des mesures dans le spectre visible.

83. *Angles du prisme.* — Voici le Tableau des valeurs brutes obtenues pour la mesure de chaque angle, avec l'indication de la température  $\theta$  et du tirage  $\tau$  de la lunette :

N <sup>os</sup> .	$\theta$ .	2A.	2B.	2C.	Dates.	$\tau$ .
1.....	20°.5	120°.15',62	119°.32',78	120°.15',55	4 août 1888	23 <sup>mm</sup>
2.....	27	14,60	33,57	16,75	14 »	21
3.....	27	14,55	33,23	16,65	» »	»
4.....	27	14,67	33,42	16,85	» »	»
5.....	22	15,73	33,32	15,95	16 »	»
6.....	22	15,80	33,13	16,02	» »	»
7.....	20	16,05	32,87	15,85	21 »	»
*8.....	22	13,60	30,98	13,82	23 »	25
*9.....	12	16,05	30,22	13,32	7 déc. 1888	»
*10.....	12	120°.15',48	119°.30',32	120°.12',75	» »	»

\* Les observations 8, 9, 10 marquées d'un astérisque sont les seules où le dépointement ait été réparti sur la lunette et le collimateur.

L'observation 8, faite à 22°, comparée à la moyenne des observations 9 et 10, faites à 12°, donne pour les coefficients de dilatation des angles les valeurs précédemment déduites des données de M. Fizeau (n° 82). Ces observations, corrigées des erreurs de dépointement de la lunette (n° 75) et ramenées à 22° (n° 82), deviennent

N <sup>os</sup> .	2A.	2B.	2C.
1.....	120°.14',01	119°.31',60	120°.14',37
2.....	13,92	31,45	14,63
3.....	14,03	31,27	14,69
4.....	13,98	31,29	14,72
5.....	14,06	31,65	14,28
6.....	14,15	31,48	14,37
7.....	14,08	31,47	14,45
8.....	14,13	31,51	14,35
9.....	16,19	30,36	13,46
10.....	15,96	30,80	13,23
Moyennes.....	120°.14',125	119°.31',528	120°.14',342

J'ai exclu des moyennes les quatre premières déterminations : ce sont les premières que j'aie faites, elles sont un peu défectueuses ; la température, particulièrement, n'a pas été observée à chaque pointé, mais seulement au commencement et à la fin de la séance, ce qui est très insuffisant. On remarquera la concordance des moyennes avec les nombres de la série 8, à laquelle j'ai porté un soin tout particulier. A titre de vérification, j'ai mesuré en même temps, dans cette série, les déviations du rayon ordinaire à travers les trois angles, pour la flamme du sodium. J'ai obtenu, avec les valeurs trouvées pour les angles,

A travers A.....	1,658398
» B.....	398
» C.....	390
Moyenne.....	<u>1,658395</u>

La concordance de ces trois nombres est un contrôle précieux de la mesure des angles réfringents. Le même accord se soutient d'une façon très suffisante dans toutes les mesures des indices ordinaires, comme on va voir. D'après cela, nous avons adopté, pour les moitiés des angles réfringents, les formules définitives qui ont servi au calcul des indices

$$\frac{A}{2} = 30^{\circ} 3', 54 - 0', 048(\theta - 22),$$

$$\frac{B}{2} = 29^{\circ} 52', 88 + 0', 024(\theta - 22),$$

$$\frac{C}{2} = 30^{\circ} 3', 58 + 0', 024(\theta - 22).$$

#### MESURES D'INDICES.

84. Toutes les mesures sont réunies dans les cinq Tableaux suivants, donnant le numéro de l'observation, la date, le tirage  $\tau$  de la lunette, la température  $\theta$ , l'indication de l'angle réfringent  $\alpha$ , le double de la déviation  $2\Delta$ , la raie spectrale observée, enfin la valeur conclue pour l'indice  $n$ .

## I.

Numéro.	Date.	$\tau$ .	$\theta$ .	$\alpha$ .	$2\Delta$ .	Raie.	$n$ .
1.....	6 août 1888	<sup>mm</sup> 26,85	20,9	A	104.26,60	D <sub>o</sub>	1,65840
2.....	»	34	21,0	A	28,33	D <sub>o</sub>	1,65838
3.....	»	26,85	20,4	A	72.15,15	D <sub>e</sub>	1,48646
4.....	»	31,3	20,2	A	16,18	D <sub>e</sub>	1,48645
5.....	7 »	26,85	20,2	B	103.18,58	D <sub>o</sub>	1,65833
6.....	»	39	20,0	B	22,23	D <sub>o</sub>	1,65835
7.....	»	26,85	21,2	B	93.44,88	D <sub>e</sub>	1,60969
8.....	»	38	21,3	B	48,30	D <sub>e</sub>	1,60973
9.....	9 »	26,85	22,6	C	104.26,16	D <sub>o</sub>	1,65837
10.....	»	35	22,6	C	29,08	D <sub>o</sub>	1,65842
11.....	»	26,85	23,7	C	94.46,40	D <sub>e</sub>	1,61002
12.....	»	35	23,7	C	49,32	D <sub>e</sub>	1,60999

## II.

1.....	21 août 1888	37	20,1	A	104.29,35	D <sub>o</sub>	1,65837
2.....	»	37	20,1	B	103.21,97	D <sub>o</sub>	39
3.....	»	37	20,1	C	104.29,15	D <sub>o</sub>	41
4.....	23 »	37	22,0	A	104.29,10	D <sub>o</sub>	398
5.....	»	37	22,0	B	103.22,35	D <sub>o</sub>	398
6.....	»	37	22,0	C	104.29,28	D <sub>o</sub>	390
7.....	»	37	22,2	A	104.26,12	D <sub>o</sub>	40
8.....	»	27	22,2	A	104.26,10	D <sub>o</sub>	1,65840

## III.

1.....	13 nov. 1888	30,24	15,5	A	104.28,43	D <sub>o</sub>	1,65841
2.....	»	33,21	16,5	B	103.18,97	D <sub>o</sub>	42
3.....	»	31,23	17,7	C	104.25,72	D <sub>o</sub>	39
4.....	»	30,24	15,1	A	104.28,37	D <sub>o</sub>	40
5.....	»	33,21	16,5	B	103.18,62	D <sub>o</sub>	39
6.....	»	31,23	17,2	C	104.25,50	D <sub>o</sub>	38
7.....	»	30,24	16,2	A	72.15,97	D <sub>e</sub>	1,486470
8.....	»	33,21	17,2	B	93.45,05	D <sub>e</sub>	1,609778
9.....	»	31,23	17,0	C	94.45,90	D <sub>e</sub>	1,610056
10.....	»	30,24	17,5	A	72.15,85	D <sub>e</sub>	1,486477
11.....	»	33,21	17,0	B	93.44,82	D <sub>e</sub>	1,609763
12.....	»	31,23	17,5	C	94.45,58	D <sub>e</sub>	1,610030

## IV.

Numéro.	Date.	$\tau$ .	$\theta$ .	$\alpha$ .	$2\Delta$ .	Raie.	$n$ .
1.....	8 août 1888	39 <sup>mm</sup>	21,9	B	102.16,48	B <sub>o</sub>	1,65292
2.....	»	39	21,9	B	92.56,75	B <sub>e</sub>	1,605214
3.....	»	39	20,5	B	105.18,58	F <sub>o</sub>	1,66787
4.....	»	39	20,9	B	95.19,40	F <sub>e</sub>	1,617640
5.....	»	39	21,5	B	106.56,80	G' <sub>o</sub>	1,67579
6.....	»	39	21,4	B	96.35,70	G' <sub>e</sub>	1,624206
7.....	11 »	35	26,1	C	103.22,40	B <sub>o</sub>	1,65296
8.....	»	35	25,5	C	93.56,75	B <sub>e</sub>	1,605547
9.....	»	35	26,1	C	106.26,92	F <sub>o</sub>	1,66783
10.....	»	35	25,5	C	96.22,15	F <sub>e</sub>	1,618000
11.....	»	35	26,1	C	108. 7,78	G' <sub>o</sub>	1,67583
12.....	»	35	25,5	C	97.40,05	G' <sub>e</sub>	1,624595
13.....	13 »	34	25,1	A	103.19,83	B <sub>o</sub>	1,65292
14.....	»	31	25,3	A	71.50,96	B <sub>e</sub>	1,484100
15.....	»	34	25,0	A	106.25,45	F <sub>o</sub>	1,66788
16.....	»	31	25,5	A	73. 1,63	F <sub>e</sub>	1,490947
17.....	»	34	25,0	A	108. 5,38	G' <sub>o</sub>	1,67582
18.....	»	31	25,5	A	73.39,30	G' <sub>e</sub>	1,494576

## V.

1.....	24 août 1888	32	20,5	A	102.43,97	A <sub>o</sub>	1,650054
2.....	»	32	21,4	B	101.38,55	A <sub>o</sub>	1,650061
3.....	»	32	21,7	C	102.43,82	A <sub>o</sub>	1,650057
4.....	»	32	20,5	A	71.36,72	A <sub>e</sub>	1,482737
5.....	»	32	21,5	B	92.26,85	A <sub>e</sub>	1,602887
6.....	»	32	22,1	C	93.26,40	A <sub>e</sub>	1,603153
7.....	»	34	22,4	A	109.38,28	H <sub>o</sub>	1,683205
8.....	»	34	22,7	B	108.26,68	H <sub>o</sub>	1,683228
9.....	»	33	21,7	C	109.38,68	H <sub>o</sub>	1,683209
10.....	»	32	22,5	A	74.13,12	H <sub>e</sub>	1,497880
11.....	25 »	35	22,0	B	97.44,65	H <sub>e</sub>	1,630369
12.....	24 »	33	22,0	C	98.49,95	H <sub>e</sub>	1,630700

Les séries I, II, III ont été faites avec la lumière du sodium; les séries IV et V, avec le Soleil. Dans les séries III et V et dans les cinq dernières mesures de la série II, on a fait usage du disque gradué. Ces mesures n'ont donc pas à subir la correction de dépointement (n° 76). La série I, faite dans le but de vérifier la formule de cette correction,

offre pour chaque observation deux pointés. Tandis que le second est fait en mettant l'image bien au point, on a pour le premier laissé le réticule au foyer principal de la lunette; la première de ces deux mesures n'a donc pas non plus à subir la correction de dépointement. Pour toutes les autres mesures, il a fallu porter à la demi-déviatiou la correction

$$\delta \frac{\Delta}{2} = - \frac{p \delta f}{2f^2} \sin \frac{\Delta + \Delta}{2},$$

avec

$$p = 0^{\circ}, 95, \quad f = 44^{\circ}, \quad \delta f = \tau - 2^{\circ}, 685.$$

#### § IV. — Observations dans le spectre calorifique.

85. L'étude du spectre infra-rouge dans le spath a été faite au laboratoire d'enseignement de M. Bouty, qui m'a offert la plus bienveillante hospitalité. Je dois aussi mes remerciements à M. Mouton, qui m'a autorisé à employer les appareils dont il s'est lui-même servi dans ses recherches sur la dispersion du flint et du quartz. Je renverrai à ses travaux (1) pour l'étude détaillée de sa méthode. Le principe consiste à prendre comme points de repère les franges du spectre cannelé de MM. Fizeau et Foucault, obtenu par l'interposition d'une lame de quartz entre deux polariseurs. Les lames que j'ai employées sont celles dont s'est servi M. Mouton. En voici la désignation :

Numéro.	<i>e</i> .	Ondes.
1.....	125 <sup>μ</sup>	2
2.....	181	3
3.....	247	4
4.....	303,6	5
5.....	616	10

Les trois colonnes de ce Tableau donnent respectivement un numéro d'ordre, l'épaisseur *e* en microns; enfin la colonne *Ondes* indique en

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. XVIII, et *Comptes rendus*, t. LXXXVIII; 1879.



nombres ronds les valeurs de  $\frac{n - n'}{\lambda} e$  pour la lumière blanche

$$\frac{n - n'}{\lambda} = 0,016.$$

Ces lames ont été employées, tantôt isolément, tantôt superposées de façon à obtenir de plus grandes épaisseurs.

J'ajouterai seulement à ces renseignements les modifications auxquelles j'ai été conduit, une description sommaire du dispositif expérimental, enfin les résultats.

86. Une modification essentielle résulte de la nécessité où j'étais de remplacer les deux prismes à 30° de M. Mouton par un prisme unique à 60°. Cette nécessité est double : tout d'abord, pour avoir de l'intensité, il faut de gros prismes ; je devais donc, à cause du prix élevé du spath, utiliser les prismes existants à 60°. De plus, je me proposais de prolonger l'étude du rayon extraordinaire à 30° de l'axe. Avec deux prismes, l'orientation cristallographique du rayon lumineux eût été mal définie, ne pouvant être rigoureusement la même dans les deux prismes. On sait que l'avantage de ceux-ci est de maintenir toujours le rayon lumineux dans la position symétrique qui correspond au minimum de déviation d'un rayon d'indice constant. J'obtiens ce résultat par la même méthode qui m'a servi dans le spectre visible, en utilisant l'image réfléchie sur la face du prisme qui est opposée à l'angle réfringent.

L'appareil de polarisation destiné à produire le spectre cannelé a reçu lui aussi une importante simplification : il se compose, comme on sait, d'une lame de quartz comprise entre un polariseur et un analyseur. J'ai remarqué que le prisme, étant biréfringent, peut lui-même remplacer l'analyseur. J'ai donc supprimé cette pièce encombrante qui a l'inconvénient de faire perdre une partie de l'intensité calorifique.

87. La disposition expérimentale est suffisamment expliquée par la *fig. 16* et la légende suivante, dont l'ordre suit la marche des rayons lumineux.

1. *Appareil d'éclairage de la fente.*

L, lanterne.

B, lampe Bourbouze.

l, lentille collectrice donnant une image de B en F.

2. *Appareil de polarisation.*

R, rhomboïdre de spath servant de polariseur.

Q, lame de quartz parallèle à l'axe.

L'analyseur est le prisme P lui-même.

3. *Goniomètre.*

Construit par M. Lutz pour M. Mouton, qui d'ailleurs n'a pas eu l'occasion de s'en servir, il contient les pièces suivantes :

F, fente } formant collimateur.  
O, objectif }

P, prisme placé sur la plate-forme centrale.

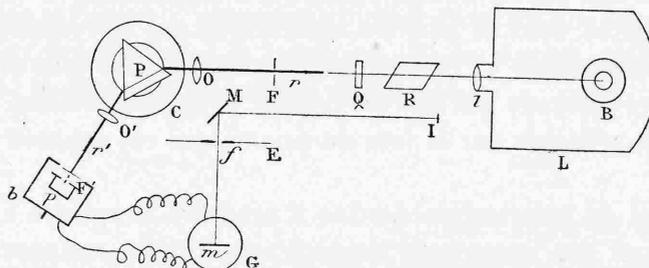
O', objectif } formant lunette.  
F', fente }

r, r', règles portant le collimateur et la lunette.

C, cercle gradué mesurant les rotations de r'.

Les graduations du cercle représentent les 10'; deux verniers sont entraînés par la

Fig. 16.



rotation de r'; ils sont au vingtième, de sorte que leur lecture donne la demi-minute. La graduation étant très bonne, j'ai eu avantage à lire un seul vernier. Les objectifs, achromatisés pour la lumière blanche, sont en crown et flint. Leur distance focale est 0<sup>m</sup>, 29.

4. *Appareil thermo-électrique.*

p, pile fixée derrière la fente F'.

b, boîte surmontant la pile et munie d'une glace sans tain sur la face antérieure.

G, galvanomètre fermant le circuit de la pile.

m, miroir concave fixé au fil de suspension de l'aiguille.

5. *Lecture des déviations du galvanomètre.*

I, bec de gaz.

M, miroir fixe.

*f*, fenêtre munie d'un fil vertical.

*m*, miroir concave tournant avec l'aiguille du galvanomètre.

E, échelle transparente divisée en millimètres.

La lumière de I se réfléchit sur M, éclaire la fente *f* en la traversant, se réfléchit sur le miroir *m* qui donne une image de *f* sur l'échelle E. Cette image, observée par transparence, mesure par son déplacement la rotation du miroir *m* et, par suite, la déviation de l'aiguille du galvanomètre.

## PRISMES.

88. Les observations effectuées sont de deux sortes. Les premières ont pour but de déterminer de bonnes formules de dispersion pour les indices principaux du spath d'Islande. Elles ont été faites avec un prisme de M. Lutz, qui appartient au laboratoire. Très limpide, il offre une belle dimension et une taille très parfaite. Ses arêtes sont parallèles à l'axe, ce qui assure la constance des angles réfringents. Ceux-ci, mesurés à l'École Polytechnique, au grand goniomètre de Brunner, ont donné

$$\frac{A}{2} = 30^{\circ} 0', 05,$$

$$\frac{B}{2} = 29^{\circ} 59', 85,$$

$$\frac{C}{2} = 30^{\circ} 0', 10.$$

J'ai utilisé seulement l'angle A.

La deuxième partie des observations avait pour but de prolonger les études faites à l'École Polytechnique, avec le prisme de M. Pellin, sur le rayon extraordinaire à  $30^{\circ}$  de l'axe et sur la constance du rayon ordinaire. Ce prisme, de dimensions plus petites et dont les angles varient avec la température, rend les observations plus difficiles. J'ai observé seulement à travers l'angle B, à cause de la facilité que présente cet angle pour mettre le prisme dans la position symétrique par rapport à la marche des rayons lumineux en faisant coïncider l'image réfractée de la fente F avec son image réfléchie par la face opposée à l'angle

réfringent. On a en effet obtenu, pour l'observation dans cet angle, la formule (nos 63 et 83)

$$\text{réflex.} - \text{réfract.} = \hat{C} - \hat{A} = 0',08 \quad (\text{à } 22^\circ).$$

Cette valeur, négligeable dans le cas actuel des observations à la pile thermo-électrique, doit être encore diminuée, parce que ces observations ont été faites à une température inférieure à  $22^\circ$ , environ  $15^\circ$ .

#### RÉSULTATS DES MESURES D'INDICES DANS LE SPECTRE CALORIFIQUE.

89. Ces résultats sont résumés dans les Tableaux suivants, dont les diverses colonnes offrent un numéro d'ordre, la date, les renseignements relatifs aux lames de quartz employées, la longueur d'onde  $\lambda$  et l'indice obtenu  $n$ .

Avec le prisme de M. Lutz :

$$\frac{\hat{A}}{2} = 30^\circ 0',0.$$

#### VI. — Rayon extraordinaire.

Nos.	Dates.	Lames.			$\lambda$ .	$n_e$ .
		Nos.	Ondes.	$e$ .		
*1.....	3 et 4 août 1888	4	5	303,6 <sup><math>\mu</math></sup>	1,08	1,48019
2.....	4 et 6 déc. 1888	4	5	303,6	1,08	1,47988
3.....	30 juillet 1888	3	4	247	1,45	1,47789
4.....	1 et 2 août 1888	4	5	303,6	1,77	1,47661
*5.....	9 juillet 1888	1	2	125	2,15	1,47456
6.....	2 février 1889	1	2	125	2,15	1,47534

#### VII. — Rayon ordinaire.

Nos.	Dates.	Lames.			$\lambda$ .	$n_o$ .
		Nos.	Ondes.	$e$ .		
1.....	20 juillet 1888	4	5	303,6 <sup><math>\mu</math></sup>	1,08	1,6424
2.....	15 février 1889	5	10	616	1,22	1,6403
3.....	25 juillet 1888	3	4	247	1,45	1,6361
4.....	15 février 1889	5	10	616	1,54	1,6350
*5.....	23 juillet 1888	4	5	303,6	1,77	1,6308
6.....	1 <sup>er</sup> mars 1889	5 et 2	13	797	1,98	1,6279
*7.....	30 juin 1888	5	10	616	2,14	1,6239

Avec le prisme de M. Pellin :

$$\frac{\hat{B}}{2} = 29^{\circ}52',7; \quad \theta = 15^{\circ} \quad (\text{valeur moyenne}).$$

VIII. — *Rayon à 30° de l'axe optique du cristal.*

Nos.	Dates.	Lames.			$\lambda$ .	$n_o$ .
		Nos.	Ondes.	$e$ .		
1....	12 avril 1889	5	10	616 <sup><math>\mu</math></sup>	1,54	1,6350 (rayon ordinaire)
2....	5 »	5	10	616	1,54	1,5907 (rayon extraordinaire)
3....	6 »	5 et 2	13	797	1,98	1,5853 (rayon extraordinaire)

Les observations 1 et 5 du Tableau VI, 5 et 7 du Tableau VII, marquées d'un astérisque, sont défectueuses pour la raison que voici : l'écran qui doit intercepter la marche de la lumière et qui doit être levé à l'instant où l'on veut mesurer l'intensité du rayon réfracté avait été placé contre la glace même de la boîte *b* (*fig.* 16). Dans ces conditions, quand on lève l'écran, la chaleur rayonnée vers la pile et qui détermine le mouvement de l'aiguille du galvanomètre provient non seulement du rayon réfracté, mais aussi de toute la salle, en particulier de l'observateur et de la lanterne. M'étant aperçu de cette cause d'erreur qui influe beaucoup plus sur les régions extrêmes du spectre, je l'ai évitée en plaçant l'écran devant la fente F du collimateur. Pour la raison que je viens de dire, les observations 1 et 5 du Tableau VI sont remplacées par les valeurs 2 et 6. Si je n'ai pas repris les observations 5 et 7 du Tableau VII, c'est parce que les bandes pointées étaient trop larges pour donner une bonne détermination; j'ai préféré leur substituer les observations 2, 4, 6 qui portent sur des bandes plus resserrées. J'abandonnerai donc pour les calculs les résultats 5 et 7, ne les retenant que pour les tracés graphiques.

90. Je dois ajouter que ces déterminations par la pile sont très longues; elles sont, de plus, très énervantes dans les conditions où j'étais placé par la nécessité. La lampe Bourbouze se trouvant, en effet, dans la même salle que le goniomètre gêne l'observateur par son bruit étourdissant et trouble les indications de la pile par la chaleur qu'elle dé-

C.

gage. Il faut attendre un certain état d'équilibre pour que la lecture de la déviation ne soit pas entachée de l'erreur qui provient d'une marche régulière de l'aiguille. Au bout d'un certain temps les indications deviennent de nouveau défectueuses, l'aiguille prenant, en général, une marche inverse de celle de la première période. D'ailleurs, la fatigue de l'observateur devient une nouvelle cause d'erreur. Enfin, dans le temps intermédiaire le plus propice à l'observation, il est bon d'apporter une certaine vitesse moyenne aux observations pour que l'état d'équilibre atteint ne soit pas changé par des irradiations inégales sur la pile. On ne s'étonnera pas que, très ignorant au début de toutes ces difficultés, j'aie modifié plusieurs fois ma manière d'opérer dans le cours de ces longues observations. Il serait fastidieux d'entrer dans ces détails; cela serait aussi peu utile, le mieux étant d'éviter la principale difficulté en plaçant, comme M. Mouton, la lampe dans une autre salle.

#### § V. — Nouvelles réductions; indices conclus.

##### CORRECTIONS DE TEMPÉRATURE.

91. Ces corrections, inutiles pour le rayon ordinaire, sont importantes pour le rayon extraordinaire. Je ramènerai tous les indices à la température  $\theta = 22^\circ$ , en faisant usage du coefficient de M. Fizeau

$$(1) \quad \frac{dn_e}{d\theta} = 0,0000108$$

relatif à l'indice minimum. Ce coefficient n'est, il est vrai, déterminé que pour la raie D; mais il est peu variable dans l'étendue du spectre visible; de plus, les écarts de température sont très faibles; il n'y aura donc pas d'erreur sensible à employer le même coefficient pour toutes les radiations.

Pour l'indice du rayon extraordinaire à  $30^\circ$  de l'axe, on a

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 30^\circ + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 30^\circ;$$

d'où, en différenciant par rapport à  $n_e$  et divisant par  $d\theta$ ,

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{n^3}{n_e^3} \sin^2 30^\circ \frac{dn_e}{d\theta}.$$

Je remplace  $\frac{n^3}{n_e^3} \sin^2 30^\circ$  par sa valeur 0,32 relative à la raie D et  $\frac{dn_e}{d\theta}$  par la valeur (1); j'obtiens

$$\frac{dn}{d\theta} = 0,0000035.$$

J'applique ces coefficients aux valeurs de  $n$  dans le spectre visible, le premier pour les observations à travers l'angle  $\hat{A}$ , le second pour les observations à travers les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ . J'obtiens le Tableau suivant qui s'explique de lui-même :

IX. — *A* travers l'angle *A*.

Raie.	$d\theta$ .	$dn$ .	$n$ observé.	$n$ conclu pour $\theta = 22^\circ$ .
A.....	+ 1,5	+0,000016	1,482737	1,482753
B.....	- 3,3	- 36	1,484100	1,484064
D.....	+ 5,8	+ 63	1,486470	1,486533
D.....	+ 4,5	+ 49	1,486477	1,486526
F.....	- 3,5	- 38	1,490947	1,490909
G'.....	- 3,5	- 38	1,494576	1,494538
H.....	- 0,5	-0,000005	1,497880	1,497875

X. — *A* travers l'angle *B*.

A.....	+ 0,5	+0,000002	1,602887	1,602889
B.....	+ 0,1	0	1,605214	1,605214
D.....	+ 4,8	+ 17	1,609778	1,609795
D.....	+ 5,0	+ 17	1,609763	1,609780
F.....	+ 1,1	+ 4	1,617640	1,617644
G'.....	+ 0,6	+ 2	1,624206	1,624208
H.....	0,0	0,000000	1,630369	1,630369

XI. — *A* travers l'angle *C*.

A.....	- 0,1	0,000000	1,603153	1,603153
B.....	- 3,5	- 12	1,605547	1,605535
D.....	+ 5,0	+ 17	1,610056	1,610073
D.....	+ 4,5	+ 16	1,610030	1,610046
F.....	- 3,5	- 12	1,618000	1,617988
G'.....	- 3,5	- 12	1,624595	1,624583
H.....	0,0	0,000000	1,630700	1,630700

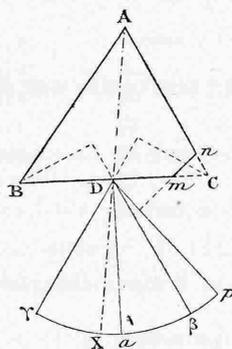
## CORRECTIONS D'AZIMUT DU RAYON EXTRAORDINAIRE A 30° DE L'AXE.

92. Ces observations demandent une autre correction pour ramener l'indice à la valeur qu'il aurait à 30° de l'axe exactement. Le rayon réfracté, en effet, est dirigé, non pas dans cette direction précise, mais suivant la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent. Je détermine donc d'abord l'orientation cristallographique des faces du prisme, ce que je fais à l'aide de la facette naturelle laissée comme témoin, le long de l'arête verticale de l'angle C.

Soient

ABC la section droite du prisme (*fig. 17*);

Fig. 17.



$mn$  la facette naturelle;

ADX l'axe cristallographique;

$Da$  la normale à la face BC;

$Dp$  la normale à la face  $mn$ .

Je compte les angles sur une circonférence de centre D. J'obtiens

Moyenne de trois observations, 9 et 11 mai 1889 ( $\theta = 17^\circ$ environ)...	$pa = 44^\circ.27'.40''$
D'après M. Cornu <sup>(1)</sup> ( $\theta = 17^\circ, 2$ ) . . . . .	$pX = 44.37.10$
	$aX = + 9.30$

(1) Réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque (*Ann. de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 23).

Dès lors, soient  $D\beta$  et  $D\gamma$  les normales aux bissectrices des angles B et C; on a

$$\begin{array}{rcl} \beta a = \frac{B}{2} = 30^\circ - 7',1 & & a\gamma = \frac{C}{2} = 30^\circ + 3',6 \\ aX = \frac{+9,5}{30 + 2,4} & & -aX = \frac{-9,5}{30 - 5,9} \\ \beta X = & & X\gamma = \end{array}$$

Tels sont les azimuts des rayons réfractés. La petitesse de l'angle  $aX$  dispense de tenir compte de sa dilatation. Il n'en est pas de même de ces derniers angles  $\beta X$  et  $X\gamma$  dont la dilatation est sensible dans mes observations de la raie D.

Les azimuts  $\omega$  des rayons réfractés dans les angles B et C devront donc être corrigés respectivement de

$$-2',4 - \frac{d\frac{B}{2}}{d\theta} d\theta \quad \text{et} \quad +5',9 - \frac{d\frac{C}{2}}{d\theta} d\theta.$$

La correction correspondante sur l'indice se calcule par la formule

$$(1) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 \omega + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \omega;$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{2} \sin 2\omega \cdot n^3 \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right).$$

Dans cette formule, je remplace  $2\omega$  par  $60^\circ$ ; puis  $n$ ,  $n_o$ ,  $n_e$  par les valeurs trouvées pour chaque radiation. J'obtiens les résultats consignés dans le Tableau suivant :

## XII. — A travers $\hat{B}$ .

Raie.	$d\omega$ .	$\frac{dn}{d\omega}$ .	$\frac{dn}{d\omega} d\omega$ .	$n$ observé.	$n$ conclu à $30^\circ$ de l'axe.
$\mu$					
1,98.....	- 2,4	- 40,9	+ 10.	1,58532.	1,58542.
1,54.....	- 2,4	- 42,0	+ 10.	1,59067.	1,59077.
A.....	- 2,4	- 45,4	+ 109	1,602889	1,602998
B.....	- 2,4	- 46,4	+ 111	1,605214	1,605325
D.....	- 2,3	- 46,9	+ 107	1,609795	1,609902
D.....	- 2,3	- 46,9	+ 107	1,609780	1,609887
F.....	- 2,4	- 48,1	+ 115	1,617644	1,617759
G'.....	- 2,4	- 49,4	+ 119	1,624208	1,624327
H.....	- 2,4	- 50,7	+ 121	1,630369	1,630490

XIII. — *A* travers  $\hat{C}$ .

Raie.	$d\omega$ .	$\frac{dn}{d\omega}$ .	$\frac{dn}{d\omega} d\omega$ .	$n$ observé.	$n$ conclu à 30° de l'axe.
A.....	+ 5,9	— 45,4	— 268	1,603153	1,602885
B.....	+ 5,9	— 46,4	— 274	1,605535	1,605261
D.....	+ 6,0	— 46,9	— 281	1,610073	1,609792
D.....	+ 6,0	— 46,9	— 281	1,610046	1,609765
F.....	+ 5,9	— 48,1	— 284	1,617988	1,617704
G'.....	+ 5,9	— 49,4	— 292	1,624583	1,624291
H.....	+ 5,9	— 50,7	— 299	1,630700	1,630401

93. Les valeurs de  $n$  déduites des observations faites dans l'angle  $\hat{C}$  diffèrent notablement de celles qu'on obtient par l'angle  $\hat{B}$ . Ces dernières concordent d'ailleurs beaucoup mieux avec la formule (1) (n° 92), qui représente la loi de Fresnel. J'ai cherché la cause de cet écart dans mes cahiers d'observation, et j'ai trouvé l'erreur systématique que voici :

Dans l'observation à travers l'angle  $\hat{C}$ , au lieu d'employer la formule

$$\text{réfl.} - \text{réfrac.} = A - B,$$

j'ai pris pour cette quantité  $\frac{A-B}{2}$ . La lecture du rayon réfléchi aurait donc dû être augmentée (1) de  $\frac{A-B}{2}$ ; pour cela, il aurait fallu faire tourner le prisme de  $\frac{A-B}{4}$ . Par là, l'angle d'incidence  $i$ , dans la position ABC correspondante au rayon réfracté à gauche, serait augmenté de

$$di = \frac{A-B}{4},$$

et il en résulterait, pour l'angle de réfraction  $r$ , l'accroissement qu'on déduit de la formule

$$\sin i = n \sin r,$$

savoir

$$dr = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} di.$$

(1) Dans ce raisonnement, je néglige la variation de la lecture du rayon réfracté qui résulte de la rotation du prisme; cette variation est en effet petite relativement à celle du rayon réfléchi.

Faisant dans cette formule

$$n = \frac{\sin \frac{C + \Delta}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \quad r = \frac{C}{2}, \quad i = \frac{C + \Delta}{2}, \quad di = \frac{A - B}{4},$$

il vient

$$dr = \operatorname{tang} \frac{C}{2} \cot \frac{C + \Delta}{2} \times \frac{A - B}{4}.$$

Le rayon réfracté subirait ainsi, dans l'intérieur du cristal, la rotation

$$d\omega_1 = -dr.$$

L'indice de réfraction doit donc subir la nouvelle correction

$$dn_1 = \frac{dn}{d\omega} d\omega_1.$$

En voici le calcul avec

$$\frac{A - B}{4} = + 5', 33, \quad \frac{C}{2} = 30^\circ.$$

#### XIV.

Raie.	$\frac{C + \Delta}{2}$ .	$d\omega_1 = -dr$ .	$\frac{dn}{d\omega}$ .	$\frac{dn}{d\omega} d\omega_1$ .	$n$ valeur précédente.	$n$ conclu à $30^\circ$ de l'axe.
A.....	53,4	-2,28	-45,4	+104	1,602885	1,602989
B.....	53,5	-2,28	-46,4	+106	1,605261	1,605367
D.....	53,7	-2,26	-46,9	+106	1,609792	1,609898
D.....	53,7	-2,26	-46,9	+106	1,609765	1,609871
F.....	54,1	-2,23	-48,1	+107	1,617704	1,617811
G'.....	54,5	-2,20	-49,4	+109	1,624291	1,624400
H.....	54,8	-2,18	-50,7	+110	1,630401	1,630511

Les observations à travers l'angle  $\hat{B}$  devraient à la rigueur subir une correction semblable, car j'ai commis la même erreur. Mais la petitesse de l'angle

$$\frac{C - A}{4} = + 0', 01$$

rend cette correction insignifiante.

Les nombres observés ayant subi toutes les corrections voulues, j'en peux désormais déduire les conclusions que je poursuis.

### § VI. — Conclusions.

#### CONSTANCE DE L'INDICE DU RAYON ORDINAIRE DU SPATH.

94. Je reporte ici les résultats trouvés (n<sup>os</sup> 84 et 89) :

	1 <sup>re</sup> , 54.	A.	B (1).	D (2).	F (1).	G' (1).	H.
$\hat{A}$ .....	1,6350	1,650054	1,65292	1,658398	1,66788	1,67582	1,683205
$\hat{B}$ .....	1,6350	061	92	398	87	79	228
$\hat{C}$ .....	»	057	96	390	83	83	209
Moy..	1,6350	1,650057	1,652933	1,658395	1,667860	1,675813	1,683214

On le voit, les écarts entre les trois valeurs de chaque indice sont certainement dus aux erreurs d'observation. Dans le spectre visible, la valeur de l'indice trouvée par l'angle A coïncide, à une unité près de l'ordre du cinquième chiffre décimal, soit avec la moyenne des valeurs trouvées par les angles B et C, soit avec l'une de ces valeurs. La conclusion est donc incontestable :

*A l'approximation des expériences, l'indice ordinaire est indépendant de l'azimut du rayon lumineux dans toute l'étendue du spectre calorifique et du spectre visible.*

#### FORMULES DE DISPERSION POUR LES TROIS INDICES.

95. *Rayon ordinaire.* — J'ai adopté, pour les indices ordinaires dans le spectre visible, les moyennes précédentes (n<sup>o</sup> 94). Pour le spectre

(1) Les observations des raies B, F, G' proviennent du Tableau IV (n<sup>o</sup> 84). Elles sont un peu moins précises que celles des raies A, D, H. Pour cette raison, je donne seulement le cinquième chiffre décimal.

(2) Parmi toutes les déterminations de la raie D, je reporte seulement les observations 4, 5, 6 du Tableau II (n<sup>o</sup> 84). Elles ont été faites avec un soin tout particulier, et leur moyenne coïncide avec la moyenne générale de toutes mes déterminations.

calorifique, j'ai pris les valeurs inscrites au Tableau VII (n° 89). A ces nombres, j'ai joint, pour le spectre ultra-violet, les déterminations de M. Cornu <sup>(1)</sup> de la raie O à la raie U, et celles de M. Sarazin <sup>(2)</sup> (premier prisme) de la raie g à la raie 26 du cadmium. J'ai ainsi obtenu la formule

$$\frac{1}{n^2} = cl^2 + a + bl^{-2} + dl^{-4},$$

avec les valeurs numériques

$$\begin{aligned} a &= +0,37107, & b &= -0,001011, \\ c &= +0,0047, & d &= -0,0000005. \end{aligned}$$

La comparaison de la formule aux observations que je viens de dire est contenue dans le Tableau suivant XV.

Sectionné suivant les régions du spectre, pour faciliter la lecture, ce Tableau offre, à titre de variantes, les nombres non adoptés, trouvés par d'autres observateurs. On y remarquera les particularités suivantes.

Mes nombres présentent avec ceux de M. Cornu, dans la partie visible, un écart systématique de 7 à 8 unités du cinquième chiffre. Cet écart n'étant pas trop grand, je n'ai pas porté aux observations la correction qui serait nécessaire pour les rendre comparables. De là, la différence sensiblement constante + 3 dans le spectre visible, et la différence - 5 pour la raie O. Celle-ci, retranchée de + 3, donne bien l'écart systématique + 8 entre mes observations et celles de M. Cornu.

Cette réserve faite, la concordance entre l'observation et la formule est meilleure même qu'il n'était permis de l'espérer, surtout si l'on considère les écarts énormes qui existent entre les déterminations des divers physiciens.

<sup>(1)</sup> *Spectre normal du Soleil (Annales de l'École Normale, 2<sup>e</sup> série, t. IX; 1880).*

<sup>(2)</sup> *Journal de Physique, 2<sup>e</sup> série, t. II; 1883.*

XV. — *Dispersion du rayon ordinaire.*

	$\lambda$ .	Rudberg.	Mascart.	Sarazin.	Cornu.	$n$ observé.	$n$ calculé.	Diff. O. — C.
	$\mu$							
	1,984					1,6279.	1,6279.	0.
	1,54					1,6350.	1,6350.	0.
	1,45					1,6361.	1,6363.	—2.
	1,22					1,6403.	1,6399.	+4.
	1,08					1,6424.	1,6423.	+1.
A....	0,76040		1,65012	1,65000		1,65006	1,65003	+03
B....	68674	1,65308	1,65296	1,65285		1,65293	1,65293	0
D....	58920	1,65850	1,65846	1,65839	1,65832	1,65840	1,65837	+ 3
F....	48607	1,66802	1,66793	1,66783	1,66779	1,66786	1,66783	+ 3
G'...	43256					1,67581	1,67578	+ 3
H....	39672	1,68330	1,68330	1,68319		1,68321	1,68318	+ 3
9....	36090					1,69325	1,69325	0
10...	34655					1,69842	1,69835	+ 7
O....	34397		1,69955			1,69928	1,69933	— 5
P....	33592		1,70276			1,70251	1,70263	—12
Q....	32850		1,70613			1,70583	1,70593	—10
R....	31790		1,71155			1,71112	1,71116	— 4
r....	31442					1,71303	1,71303	0
S <sub>2</sub> ...	30998		1,71580 (S)			1,71550	1,71551	— 1
304..	30418					1,71901	1,71897	+ 4
T....	30198		1,71939			1,72034	1,72037	+ 7
298..	29840					1,72269	1,72270	— 1
U....	29479					1,72525	1,72519	+ 6
17...	27467					1,74151	1,74139	+12
18...	25713					1,76050	1,76042	+ 8
23...	23125					1,80248	1,80223	+25
24...	22645					1,81300	1,81284	+16
25...	21935					1,83090	1,83101	—11
26...	21441					1,84580	1,84598	—18

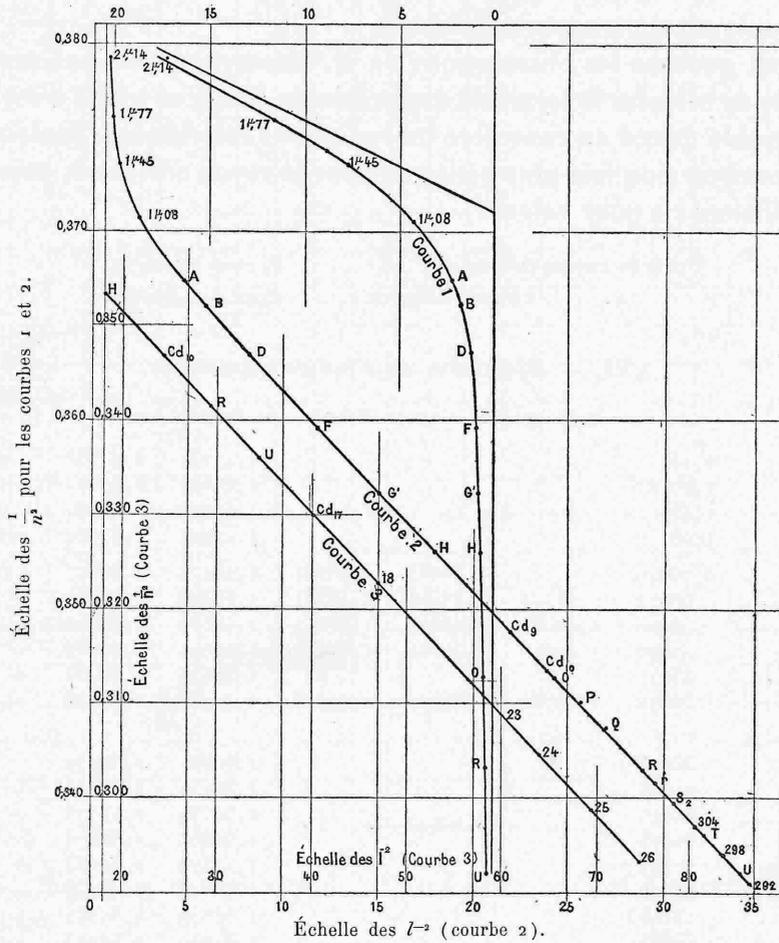
Voici les courbes obtenues en prenant pour ordonnées  $\frac{1}{n^2}$ , et pour abscisses, soit  $l^2$  (courbe 1), soit  $l^{-2}$  (courbes 2 et 3) (*fig.* 18).

96. *Indice minimum.* — J'ai adopté mes nombres pour les spectres calorifique et visible (n° 89, Tableau VI, et n° 91). Pour le spectre ultra-violet, il était naturel de prendre encore les nombres de M. Sarazin (premier prisme). Seulement, les différences entre les nombres de ce physicien et les miens sont ici un peu fortes, comme on en jugera par le Tableau suivant :

	Carvallo.	Sarazin.	Différence.
A.....	1,48275	1,48261	+ 14
B.....	1,48406	1,48391	+ 15
D.....	1,48653	1,48644	+ 9
F.....	1,49091	1,49079	+ 12
H.....	1,49788	1,49774	+ 14
Moyenne.....			+ 13

Fig. 18.

Échelle des  $l^2$ .



J'ai donc ajouté + 13 aux nombres de M. Sarazin. J'ai ainsi obtenu,

pour les coefficients de la formule de dispersion,

$$\begin{aligned} a &= + 0,45778, & b &= - 0,000840, \\ c &= + 0,00098, & d &= - 0,00000084. \end{aligned}$$

Dans le Tableau XVI, on trouve la comparaison des nombres observés et des nombres calculés avec les variantes de Rudberg et de MM. Mascart et Sarazin. Les nombres de celui-ci n'ont pas été changés; mais, pour ses observations, on a augmenté de +13 la différence entre  $n$  observé et  $n$  calculé. On y verra que l'accord entre l'observation et la formule est encore très satisfaisant.

Ainsi, quoique les observations de M. Mascart n'aient pas permis (n° 42) de calculer le terme de dispersion de Briot, ce terme n'est pas négligeable quand on considère les radiations calorifiques. Seulement il est environ cinq fois plus petit que pour le rayon ordinaire, puisque le coefficient  $c$  a pour valeurs

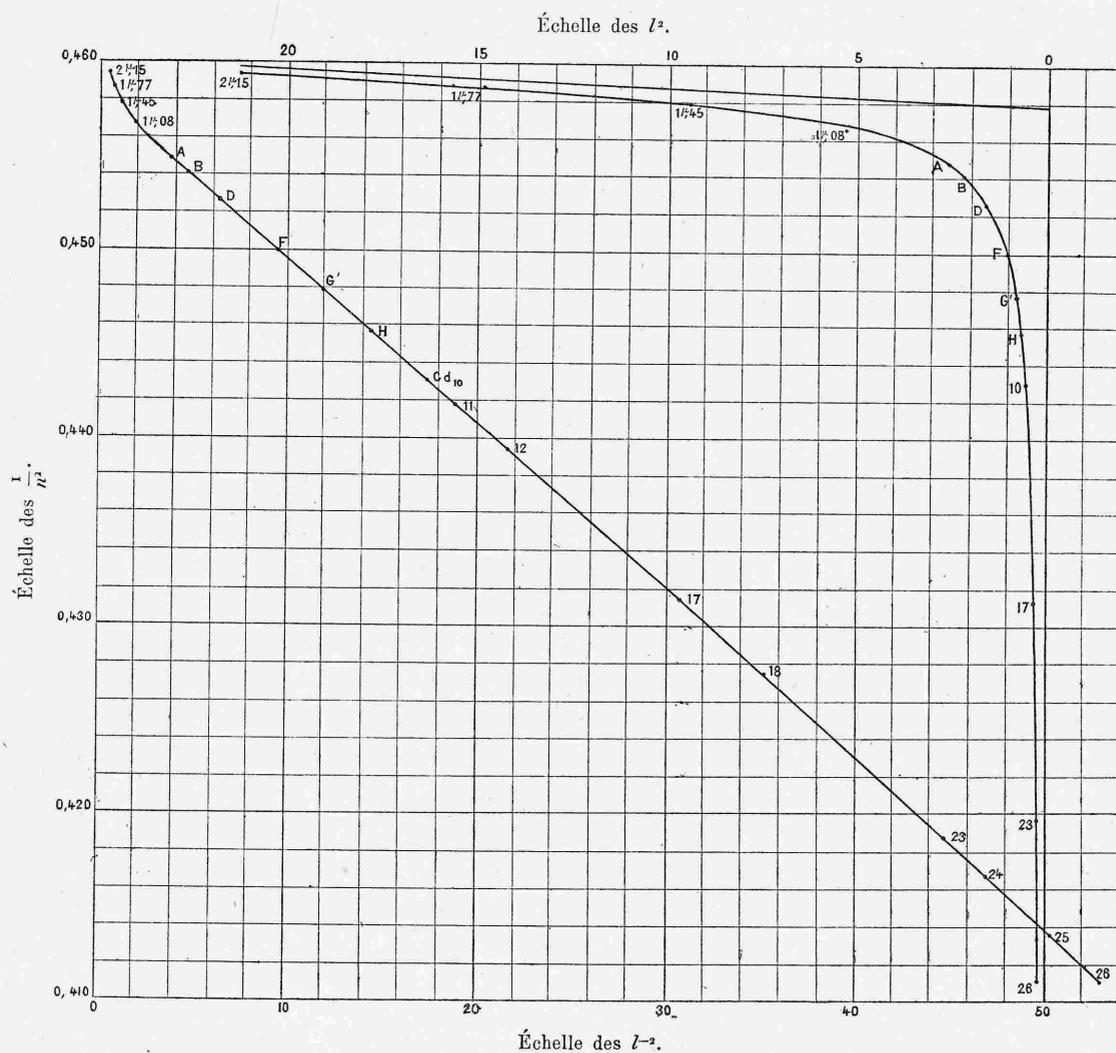
$$\begin{aligned} \text{Pour le rayon ordinaire} \dots\dots\dots c_o &= + 0,00470, \\ \text{» extraordinaire} \dots\dots\dots c_e &= + 0,00098. \end{aligned}$$

#### XVI. — Dispersion de l'indice minimum.

	$\lambda$ .	Rudberg.	Mascart.	Sarazin.	$n$ observé.	$n$ calculé.	Dif. O.—C.
	$\mu$						
	2,15				1,4753.	1,4753.	0.
	1,77				1,4766.	1,4767.	-1.
	1,45				1,4779.	1,4779.	0.
	1,08				1,4799.	1,4797.	+2.
A.....	0,76040		1,48285	1,48261	1,48275	1,48277	-02
B.....	68674	1,48391	1,48409	1,48391	1,48406	1,48405	+1
D.....	58920	1,48635	1,48654	1,48644	1,48653	1,48650	+3
F.....	48607	1,49075	1,49084	1,49079	1,49091	1,49087	+4
G'.....	43256				1,49454	1,49451	+3
H.....	39672	1,49780	1,49777	1,49774	1,49788	1,49788	0
							O.—C.+13.
9.....	36090				1,50228	1,50240	+1
10.....	34655				1,50452	1,50465	0
11.....	34015				1,50559	1,50576	-4
12.....	32475				1,50857	1,50874	-4
17.....	27467				1,52276	1,52283	+6
18.....	25723				1,53019	1,53033	-1
23.....	23135				1,54559	1,54562	+10
24.....	22655				1,54920	1,54923	+10
25.....	21945				1,55514	1,55520	+7
26.....	21441				1,55993	1,55997	+9

Voici les courbes de dispersion pour l'indice minimum (fig. 19).

Fig. 19.



97. Rayon extraordinaire à  $30^\circ$  de l'axe. — Tout d'abord, avec la formule

$$(1) \quad \frac{I}{n^2} = \frac{I}{n_o^2} \cos^2 30^\circ + \frac{I}{n_e^2} \sin^2 30^\circ,$$

qui exprime la loi admise pour les vitesses du rayon extraordinaire, je calcule les valeurs de  $n$  qu'on déduit des valeurs observées de  $n_o$  et  $n_e$  (nos 95 et 96). Seulement, les valeurs de  $n_e$  pour  $1^{\mu},98$  et  $1^{\mu},54$  n'ayant pu être observées, je les ai calculées par la formule d'interpolation (n° 96). Puis, je compare les valeurs de  $n$  ainsi calculées aux valeurs observées au moyen des angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  (n° 92, XII, et n° 93, XIV). Ces nombres se trouvent dans les trois premières colonnes du Tableau suivant :

XVII. — *Rayon extraordinaire à 30° de l'axe.*

	n observé		n calculé	
	angle B.	angle C.	formule (1).	formule (2).
$\mu$				
1,98 .....	1,5854	»	1,5855	1,5856
1,54 .....	1,5908	»	1,5909	1,5909
A.....	1,60300	1,60299	1,60298	1,60297
B.....	1,60533	1,60537	1,60537	1,60538
D.....	1,60990	1,60990	1,60990	1,60990
F.....	1,61776	1,61781	1,61778	1,61778
G'.....	1,62433	1,62440	1,62438	1,62438
H.....	1,63049	1,63051	1,63051	1,63051

Par leur comparaison, on voit que la loi représentée par la formule (1) est plus exacte que n'aurait pu le faire prévoir la double réfraction si intense du spath avec des termes de dispersion si différents pour les indices principaux. Il est à penser, que pour le rayon extraordinaire à 30° de l'axe, la même forme convient à la formule de dispersion que pour les indices principaux. Si donc on remplace dans la formule (1)  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{1}{n_o^2}$  et  $\frac{1}{n_e^2}$  par leurs développements dont les deux derniers sont connus et dont le premier est de même forme

$$\frac{1}{n^2} = ct^2 + a + bt^{-2} + dt^{-4},$$

on pourra calculer les coefficients inconnus  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  au moyen des coefficients connus relatifs aux deux indices principaux, en identifiant les deux membres après les avoir développés en séries suivant les puissances de  $\lambda^2$ . A la vérité, j'ai dû modifier très légèrement les ré-

sultats de ce calcul pour rendre la concordance plus parfaite. Ce fait, un peu paradoxal, s'explique en remarquant que les données du calcul sont quelque peu incertaines. J'ai ainsi adopté pour les coefficients de la formule de dispersion

$$(2) \quad \frac{1}{n^2} = cl^2 + a + bl^{-2} + dl^{-4},$$

les valeurs

$$\begin{aligned} a &= + 0,392734, & b &= - 0,000985, \\ c &= + 0,0037, & d &= - 0,000006. \end{aligned}$$

Les nombres déduits de cette formule (2) sont inscrits dans la dernière colonne du Tableau XVII. La comparaison des deux dernières colonnes montre l'identité à peu près complète des formules (1) et (2). La comparaison aux deux premières colonnes montre que ces deux formules représentent bien les observations.

CONCLUSIONS THÉORIQUES.

98. *Hypothèses de Fresnel et de Neumann.* — Les diverses valeurs du coefficient  $c$  du terme de Briot obtenues (nos 95, 96, 97) sont :

Pour le rayon ordinaire.....	$c_a = + 0,0047$
»           extraordinaire { perpendiculaire à l'axe....	$c_e = + 0,00098$
{ à 30° de l'axe.....	$c_{30} = + 0,0037$

Voici les valeurs qui en résultent pour le terme  $cl^2$  du rayon ordinaire :

	$c_0 l^2.$	$c_{30} l^2.$	$c_e l^2.$
$\mu$ 1,98.....	+ 0,00698	+ 0,00550	+ 0,00145
1,54.....	417	328	87
A.....	100	78	21
D.....	59	47	12
H.....	26	20	5

Dans l'hypothèse de Neumann, le terme  $cl^2$  devrait (n° 43), pour le rayon ordinaire, prendre successivement les valeurs  $c_0 l^2$ ,  $c_{30} l^2$ ,  $c_e l^2$  quand l'angle du rayon lumineux avec l'axe est égal à 90°, 30° et 0°. Il en résulterait une variation énorme de l'indice, environ double de

la variation de  $\frac{1}{n^2}$ . Cette variation affecterait donc le deuxième chiffre décimal pour la raie 1<sup>re</sup>, 98, le troisième pour la raie A. Mes expériences précédemment exposées et celles de Schwab répondent catégoriquement qu'il n'en est pas ainsi, mais que l'indice du rayon ordinaire est constant, conformément à l'hypothèse de Fresnel (n° 43). Il en est de même d'une série d'expériences que j'ai faites à Rennes, au laboratoire de M. Gripon, et dans lesquelles j'ai observé aussi à 60° et à 0° de l'axe sur toute l'étendue du spectre visible. Malheureusement je ne connaissais pas alors les beaux travaux de M. Cornu, et mes nombres sont entachés des erreurs dues à la courbure qui était considérable. Ils ne méritent donc pas la publicité; mais ils suffisent pour la démonstration actuelle.

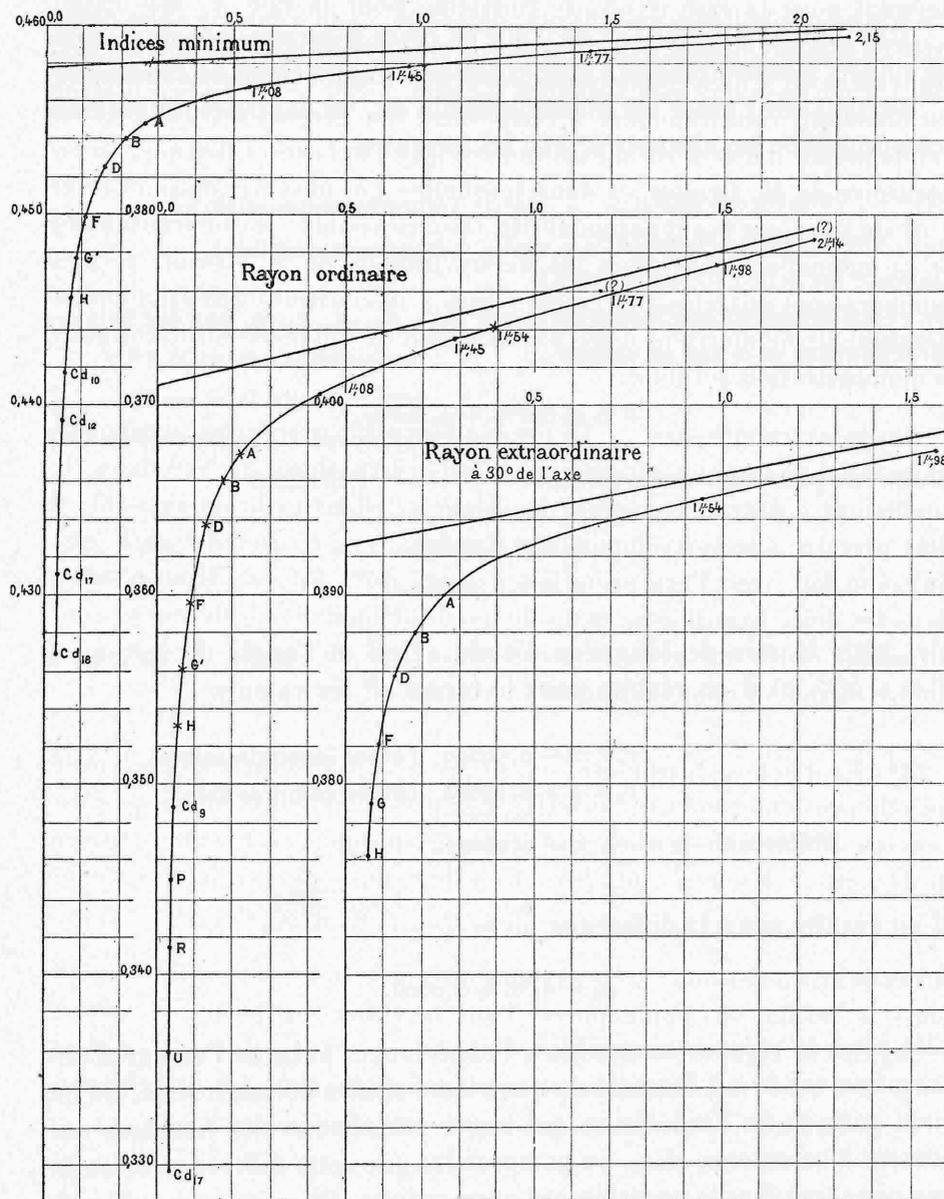
*Rayon extraordinaire.* — La preuve fournie par le rayon extraordinaire n'est pas moins catégorique. Dans l'hypothèse de Neumann, le coefficient  $c$  devrait conserver la valeur  $c_e$ ; dans celle de Fresnel, il doit prendre successivement les valeurs  $c_e, c_{30}, c_0$  quand l'angle que le rayon fait avec l'axe prend les valeurs 90°, 30°, 0°. Il en résulte, dans les deux hypothèses, des valeurs de  $cl^2$  dont les différences sont du même ordre que pour le rayon ordinaire. Ici encore, l'expérience donne raison à Fresnel d'une façon absolue.

99. La discussion numérique, que je n'ai pas voulu négliger parce qu'elle présente toujours l'intérêt de la précision, n'est même pas nécessaire à la démonstration. Les tracés graphiques suffisent en raison de la netteté des faits (*fig.* 20). La valeur de  $c$  est, en effet, le coefficient angulaire de l'asymptote non verticale de la courbe  $\frac{1}{n^2} = f(l^2)$ . A l'échelle du dessin (1), les erreurs d'observation sont environ de 1<sup>mm</sup> pour les radiations calorifiques. Pour le rayon ordinaire, les points 1<sup>re</sup>, 54, A, B, D, F, G', H marqués d'une croix ont été observés à 90° et à 30° de l'axe. On voit avec quelle certitude ces coefficients angulaires se conforment aux conséquences de l'hypothèse de Fresnel, contrairement à celle de Neumann.

---

(1) Mon dessin a été réduit de  $\frac{1}{2}$  par la gravure.

Fig. 20.



## INCOMPRESSIBILITÉ DE L'ÉTHÉR.

100. Je l'ai déjà dit (n° 53), sur ce point je ne puis conclure, mais je tiens à montrer combien mes expériences approchent de la solution.

Suivant que l'éther est incompressible ou, au contraire, infiniment compressible, on obtient (n° 51) les formules

$$(1) \quad c_1 = c_o \cos^2 \omega + c_e \sin^2 \omega \quad (\text{éther incompressible}),$$

$$(2) \quad ac_2 = a_o c_o \cos^2 \omega + a_e c_e \sin^2 \omega \quad (\text{éther compressible}).$$

Je remplace dans ces formules  $\omega$  par  $30^\circ$ ,  $a_o$ ,  $a_e$ ,  $c_o$ ,  $c_e$  par les valeurs précédentes et  $a$  par sa valeur

$$a = a_o \cos^2 \omega + a_e \sin^2 \omega.$$

J'obtiens pour  $c$  les deux valeurs

$$(1) \quad c_1 = + 0,00377,$$

$$(2) \quad c_2 = + 0,00360.$$

Or, pour la raie de longueur d'onde  $1^{\mu},98$  et l'angle de  $30^\circ$ , on a  $l^2 = 1,566$ , et il en résulte pour le terme  $cl^2$  les valeurs

$$c_1 l^2 = + 0,00590 \quad (\text{éther incompressible}),$$

$$c_2 l^2 = + 0,00563 \quad (\text{éther compressible}),$$

$$\text{Différence : } \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = + 0,00027.$$

Il en résulte sur  $n$  la différence

$$n_2 - n_1 = + 0,0006.$$

Elle est à la rigueur accessible à l'expérience, puisque l'erreur d'observation est de 2 à 3 unités du quatrième chiffre décimal. Mais, si l'on tient compte de l'indécision qui règne sur chacun des nombres qui servent à calculer  $c_1$  et  $c_2$ , on comprendra que cette différence ne suffit pas pour trancher la question qui nous occupe. On voit aussi qu'il suffirait de pouvoir pousser les déterminations un peu plus avant dans le

spectre calorifique, de perfectionner un peu les méthodes d'observation ou seulement de trouver un cristal plus favorable encore que le spath pour arriver à une conclusion. Qu'il nous soit donc permis d'espérer connaître aussi un jour la solution de ce nouveau problème si important par ses liens avec toutes les branches des Sciences physiques.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 26 novembre 1889.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 26 novembre 1889.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

	Pages
INTRODUCTION .....	3
<i>CHAPITRE I. — Formules d'interpolation.</i>	
§ I. — Méthode d'interpolation de Cauchy .....	6
§ II. — Généralisation des formules de Cauchy; adaptation de ces formules à la méthode des moindres carrés .....	11
§ III. — Applications .....	14
§ IV. — Méthode de Gauss pour le cas de la précision variable; formules complémentaires .....	19
§ V. — Remarques critiques sur les trois méthodes .....	29
<i>CHAPITRE II. — Formules de dispersion.</i>	
§ I. — Choix de la formule .....	34
§ II. — Applications .....	39
<i>CHAPITRE III. — Dispersion et double réfraction.</i>	
§ I. — Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction (démonstration géométrique) .....	49
§ II. — Terme de Briot dans les diverses théories de la double réfraction (Fresnel, Maxwell, Boussinesq, Sarrau, Lamé, Neumann, Mac-Cullagh) .....	55
§ III. — Sur l'incompressibilité de l'éther .....	67
§ IV. — Vérifications expérimentales des théories précédentes .....	69
<i>CHAPITRE IV. — Études expérimentales sur le spath d'Islande.</i>	
§ I. — Observations dans le spectre visible .....	72
§ II. — Erreurs systématiques .....	77
§ III. — Résultats des mesures dans le spectre visible .....	96

	Pages
§ IV. — Observations dans le spectre calorifique.....	100
§ V. — Nouvelles réductions; indices conclus.....	106
§ VI. — Conclusions :	
Constance de l'indice du rayon ordinaire.....	112
Formules de dispersion pour les trois indices.....	112
Conclusions théoriques.....	119
Incompressibilité de l'éther.....	122

