So. . . t. III
H. F. II. f 166
(III, 29 et 30)

THÈSES

DE MÉCANIQUE

ET D'ASTRONOMIE

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

LE 25 OCTOBRE 1847,

Par M. J.-A. SERRET.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

Rue du Jardinet, 12.

1847.

1579

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. DUMAS, doyen,
BIOT,
FRANCOEUR,
DE MIRBEL,
PONCELET,
POUILLET,
LIBRI,
STURM,
DELAFOSSE,
LEFÉBURE DE FOURCY,
DE BLAINVILLE,
CONSTANT PREVOST,
AUGUSTE SAINT-HILAIRE,
DESPRETZ,
BALARD,
MILNE EDWARDS,
CHASLES,
LE VERRIER,

Professeurs.

DUHAMEL,
VIEILLE,
MASSON,
PELIGOT,
DE JUSSIEU,
HERVÉ DE LA PROVOSTAYE,
BERTRAND,
PAYER,

Agrégés.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR LE

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ATTIRÉ PAR DEUX CENTRES FIXES,

EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DES DISTANCES.

§ I.

Euler a le premier traité le problème de la détermination du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances. En supposant que le mouvement s'accomplisse dans un plan, il est parvenu à séparer les variables et à ramener la question aux quadratures (*). Lagrange en a donné ensuite une solution nouvelle, qui n'est plus bornée au cas du plan, et il a même ajouté un troisième centre fixe placé au milieu de la droite qui joint les deux autres, et doué d'une action attractive ou répulsive, proportionnelle à la distance (**). Legendre, à son tour, a approfondi les détails de la question avec un soin tout particulier (***). On lui doit cette remarque importante, que les variables employées par Euler peuvent être considérées comme les paramètres d'ellipses et d'hyperboles qui ont pour foyers les centres fixes, et dont l'intersection détermine le point mobile; par où l'on voit que les coordonnées elliptiques, dont

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1760.

(**) *Mécanique analytique*, tome II, page 108, et *Anciens Mémoires de Turin*, tome IV.

(***) *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 411.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les géomètres ont fait un si grand usage dans ces derniers temps, se sont présentées, pour la première fois, dans un problème de mécanique. Enfin M. Jacobi a pris cette question des deux centres fixes pour un des exemples de l'application de son principe du dernier multiplicateur (*), et M. Liouville s'en est occupé dernièrement aussi dans une étude générale sur différents cas où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. M. Liouville a donné deux méthodes (**), qui l'une et l'autre s'appliquent à notre problème. L'une est fondée sur la considération des équations aux différentielles partielles; l'autre, qui conduit à des résultats moins étendus, est peut-être plus élémentaire : mais M. Liouville ne l'a développée que pour le cas du plan, en observant toutefois qu'elle peut aussi s'étendre au cas général de l'espace. C'est cette extension de la méthode de M. Liouville que nous nous proposons de présenter ici.

§ II.

La position d'un point sur un plan, ou plus généralement sur une surface quelconque, est déterminée par deux coordonnées α et β, qui sont des fonctions prises à volonté, de ses coordonnées rectangulaires. Tout déplacement infiniment petit ds du point sur la surface s'exprimera par les accroissements $d\alpha$, $d\beta$ de ces coordonnées, et son carré aura la forme

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2,$$

toutes les fois que les équations

$$\alpha = \text{constante}, \qquad \beta = \text{constante}$$

seront celles de deux systèmes de lignes orthogonales. Cette condition, qui est nécessaire, est également suffisante; en sorte qu'il existera pour chaque surface une infinité de systèmes de coordonnées, dans lesquels ds^2 aura la forme précédente.

Si maintenant on considère un point situé d'une manière quelconque dans l'espace, et que l'on fasse passer un plan par ce point et par une droite fixe, on pourra déterminer la position du point dans ce plan,

(*) *Journal de Crelle*, tomes XXVII et XXIX.

(**) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tomes XI et XII.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par deux coordonnées α, β du genre de celles qu'on vient d'indiquer, et l'on achèvera de fixer sa position dans l'espace à l'aide d'une troisième coordonnée γ, dont les différentes valeurs correspondront aux différentes positions que peut prendre le plan que nous considérons autour de l'axe qu'il contient. Par exemple, on pourra prendre pour γ l'angle que fait ce plan avec un plan fixe mené par l'axe fixe.

Cela posé, si ds désigne le déplacement infiniment petit du point correspondant aux accroissements $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ de ses trois coordonnées, ds' le déplacement obtenu en ne faisant varier que α et β, et enfin λ'' le carré de la distance du point à l'axe fixe, on aura évidemment

$$ds^2 = ds'^2 + \lambda'' d\gamma^2,$$

et, par conséquent,

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2 + \lambda'' d\gamma^2.$$

Dans cette formule, les quantités λ, λ', λ'' ne renferment que les deux coordonnées α et β, qui peuvent être choisies d'une multitude de manières différentes; quant à la coordonnée γ, sa signification géométrique est parfaitement déterminée par ce qui précède. Au reste, la forme de l'expression de ds^2 resterait la même, si l'on prenait pour α, β, γ les paramètres de trois systèmes quelconques de surfaces orthogonales; alors λ, λ', λ'' pourraient être des fonctions des trois coordonnées α, β, γ. Mais, loin d'avoir besoin de ce degré de généralité, nous nous restreindrons encore à un cas plus particulier, celui où $\lambda' = \lambda$, que M. Liouville a considéré dans le cas du plan. Ainsi, désormais nous prendrons

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) + \lambda'' d\gamma^2,$$

λ et λ'' étant, nous le répétons, indépendants de γ.

§ III.

Considérons maintenant le mouvement d'un point matériel déterminé par les trois coordonnées α, β, γ dont il vient d'être question, et supposons que le principe des forces vives ait lieu; on aura, en désignant par ds l'élément parcouru pendant le temps dt, par U la fonc-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion des forces accélératrices, et par C une constante arbitraire,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

ou

$$\lambda\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \lambda'' \frac{d\gamma^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}). \tag{1}$$

Cette équation, qu'il est plus simple et plus convenable de former directement, se déduit aussi des équations du mouvement, qui, d'après les principes de la *Mécanique analytique*, et en se rappelant que λ et λ'' ne contiennent pas γ, sont :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d\lambda''}{d\alpha}\frac{d\gamma^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha},\\
&\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\beta}\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d\lambda''}{d\beta}\frac{d\gamma^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\beta},\\
&\frac{d.\lambda''\frac{d\gamma}{dt}}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Nous supposons que la dérivée $\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}$ est toujours nulle, ou que U ne dépend pas de la coordonnée γ. Cela arrivera nécessairement toutes les fois que les forces agissant sur le mobile, seront toutes situées à chaque instant dans le plan déterminé par l'angle γ correspondant, circonstance qui se présentera dans le problème que nous nous sommes proposé de résoudre. Ayant ainsi

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma} = 0,$$

la dernière des équations précédentes nous donnera

$$\frac{d.\lambda''\frac{d\gamma}{dt}}{dt} = 0,$$

et, en intégrant,

$$\lambda''\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\mathrm{B}}, \tag{3}$$

B désignant une constante arbitraire; alors l'équation (1) des forces

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vives donnera

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} = \frac{2(\mathrm{U}+\mathrm{C}) - \frac{\mathrm{B}}{\lambda''}}{\lambda}.$$

En vertu des équations (3) et (4), les deux premières des équations (2) deviendront

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{U}+\mathrm{C})\frac{d\lambda}{d\alpha} + \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha} - \frac{\mathrm{B}}{2\lambda\lambda''^2}\left(\lambda''\frac{d\lambda}{d\alpha} - \lambda\frac{d\lambda''}{d\alpha}\right),$$

$$\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{U}+\mathrm{C})\frac{d\lambda}{d\beta} + \frac{d\mathrm{U}}{d\beta} - \frac{\mathrm{B}}{2\lambda\lambda''^2}\left(\lambda''\frac{d\lambda}{d\beta} - \lambda\frac{d\lambda''}{d\beta}\right).$$

Ces équations, respectivement multipliées par $2\lambda d\alpha$, $2\lambda d\beta$, prennent la forme très-simple

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} d\left(\lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right) = \dfrac{d\left(2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}\right)}{d\alpha}\,d\alpha, \\ d\left(\lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2}\right) = \dfrac{d\left(2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}\right)}{d\beta}\,d\beta, \end{cases}$$

dont l'une résulte de l'autre en vertu de l'équation des forces vives, ou plutôt en vertu des équations (3) et (4).

Elles ne diffèrent de celles qui sont relatives au plan, que par le terme $\mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}$ qui disparaîtrait dans ce cas, et qui n'apporte d'ailleurs aucune complication.

Les équations (5) pourront évidemment être intégrées une fois si leurs seconds membres ne contiennent respectivement, l'un que α, l'autre que β; c'est-à-dire si l'on a

$$\text{(6)} \qquad 2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''} = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta),$$

les fonctions $f(\alpha)$ et $\mathrm{F}(\beta)$ ne contenant la première que α, la seconde que β: alors les équations (5) deviennent

$$d\left(\lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right) = f'(\alpha)\,d\alpha,$$

$$d\left(\lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2}\right) = -\mathrm{F}'(\beta)\,d\beta;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où, par l'intégration,

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{d\alpha^2}{dt^2} = f(\alpha) - \mathrm{A}, \\ \lambda^2 \dfrac{d\beta^2}{dt^2} = \mathrm{A} - \mathrm{F}(\beta). \end{cases}$$

Nous mettons la même constante A dans ces deux équations, afin que l'équation (4) soit satisfaite.

§ IV.

La double intégration qui vient d'être effectuée repose sur l'hypothèse que nous avons faite, et en vertu de laquelle la quantité $2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}$ a la forme $f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta)$. Il pourra arriver, dans certains problèmes, que cette condition ne soit pas remplie généralement, mais qu'elle puisse cependant être satisfaite pour certaines valeurs particulières attribuées aux constantes arbitraires B et C; ce qui se traduira par des relations équivalentes entre les circonstances initiales du mouvement: et quand ces relations auront lieu, on pourra toujours appliquer la méthode précédente. Mais cette méthode est surtout intéressante dans le cas où la condition exprimée par l'équation (6) a lieu indépendamment des valeurs attribuées aux constantes B et C; car on pourra toujours, comme on va voir, résoudre complétement le problème correspondant, et cela pour un état initial quelconque. Il faut alors que chaque terme du premier membre de l'équation (6) soit de même forme que le second membre.

Soit donc

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda = \varphi(\alpha) - \Phi(\beta), \\ \lambda\mathrm{U} = \psi(\alpha) - \Psi(\beta), \\ \dfrac{\lambda}{\lambda''} = \varpi(\alpha) - \Pi(\beta), \end{cases}$$

d'où résultera

$$(9)\qquad \begin{cases} f(\alpha) = 2\psi(\alpha) + 2\mathrm{C}\varphi(\alpha) - \mathrm{B}\varpi(\alpha), \\ \mathrm{F}(\beta) = 2\Psi(\beta) + 2\mathrm{C}\Phi(\beta) - \mathrm{B}\Pi(\beta), \end{cases}$$

et voyons comment on pourra achever, dans ce cas, l'intégration des équations du mouvement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ V.

Les équations (7) donnent immédiatement, par la division.

(10) $$\frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{A - F(\beta)}},$$

équation différentielle où les variables sont séparées, et qui sera l'une de celles de la trajectoire du mobile, ou, si l'on veut, l'équation de la trajectoire du point dans le plan mobile.

Pour avoir la seconde équation de la trajectoire, nous combinerons l'une quelconque des deux équations (7), la première par exemple, avec l'équation (3); on obtient ainsi

$$\frac{\lambda}{\lambda''}\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sqrt{f(\alpha) - A}}{\sqrt{B}},$$

d'où, en mettant au lieu de $\frac{\lambda}{\lambda''}$ sa valeur écrite précédemment,

$$d\gamma = \sqrt{B}\,\frac{\varpi(\alpha) - \Pi(\beta)}{\sqrt{f(\alpha) - A}}\,d\alpha,$$

et, à cause de l'équation (10).

(11) $$d\gamma = \sqrt{B}\left(\frac{\varpi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - A}} - \frac{\Pi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A - F(\beta)}}\right).$$

Cette équation, où les variables sont séparées, est la deuxieme équation de la trajectoire du mobile. Il ne reste donc plus que la valeur du temps à déterminer.

On pourra, de l'une quelconque des équations (7), tirer la valeur de l'élément du temps; la première, par exemple, donne

$$dt = \frac{\lambda\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - A}},$$

ou, en mettant au lieu de λ, sa valeur

$$dt = \frac{\varphi(\alpha) - \Phi(\beta)}{\sqrt{f(\alpha) - A}}\,d\alpha;$$

et, en vertu de l'équation (10),

(12) $$dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - A}} - \frac{\Phi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A - F(\beta)}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équation où les variables sont encore séparées. On voit, par les équations (10), (11) et (12), que le problème se trouve ramené aux quadratures. La forme de ces équations mérite d'être remarquée : on voit, par exemple, que l'expression du temps ne dépend que des coordonnées α et β, et qu'on pourra la déterminer sans connaître la coordonnée γ.

En posant

$$\Theta = \int \sqrt{2\psi(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - B\varpi(\alpha) - A}\,.\,d\alpha$$
$$+ \int \sqrt{-2\Psi(\beta) - 2C\Phi(\beta) + B\Pi(\beta) + A}\,.\,d\beta + \gamma\sqrt{B},$$

on donne a ces équations une forme remarquable.

En effet, les intégrales des équations (10), (11) et (12) pourront s'écrire comme il suit :

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t - t_0,$$

A', B' et t_0 désignant trois nouvelles constantes arbitraires. C'est sous cette forme qu'elles se présentent d'elles-mêmes, quand on fait usage de la méthode d'intégration fondée sur l'emploi d'une équation aux différentielles partielles dont nous avons parlé au § I.

§ VI.

Les résultats qui précèdent ne cesseront pas d'avoir lieu si l'on substitue à α une fonction quelconque d'une nouvelle variable μ, et à β une fonction d'une variable ν ; si l'on pose, en un mot,

$$d\alpha = \sqrt{m}d\mu, \quad d\beta = \sqrt{n}d\nu,$$

ce changement, insignifiant au point de vue théorique, nous sera commode pour l'application de nos formules. L'expression de ds^2 sera alors

$$ds^2 = \lambda(md\mu^2 + nd\nu^2) + \lambda'' d\gamma^2,$$

λ et λ'' représentant des fonctions des variables μ et ν.

Les équations (8) deviendront

$$(13) \quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \varphi(\mu) - \Phi(\nu), \\ \lambda U &= \psi(\mu) - \Psi(\nu), \\ \frac{\lambda}{\lambda''} &= \varpi(\mu) - \Pi(\nu), \end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où les fonctions φ, Φ, etc., n'ont plus évidemment la même signification qu'au § IV. Quant aux équations (10), (11) et (12), qui font connaître la trajectoire du mobile et l'expression du temps, elles seront

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} = \frac{\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}},\\ &d\gamma = \sqrt{B}\frac{\varpi(\mu)\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} - \sqrt{B}\frac{\Pi(\nu)\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}},\\ &dt = \frac{\varphi(\mu)\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} - \frac{\Phi(\nu)\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}}.\end{aligned}\right.$$

§ VII.

Considérons trois axes rectangulaires, dont l'un, celui des x par exemple, soit la droite fixe autour de laquelle tourne le plan déterminé par l'angle γ; prenons aussi pour γ l'angle que fait le plan mobile avec le plan xy, en sorte que cet angle soit nul, quand le plan mobile coïncide avec le plan xy. Cela posé, nous prendrons pour μ et ν les paramètres de deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles homofocales situées dans le plan mobile, et qui, lorsque celui-ci coïncidera avec le plan xy, auront pour équations

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}=1.$$

Ces équations donnent

$$b^2x^2=\mu^2\nu^2,\quad b^2y^2=(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2),$$

et

$$dx^2+dy^2=(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2-b^2}+\frac{d\nu^2}{b^2-\nu^2}\right).$$

En outre, comme la quantité désignée par λ'' n'est autre que la valeur de y^2 que nous venons d'écrire, on aura cette valeur de ds^2,

$$ds^2=(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2-b^2}+\frac{d\nu^2}{b^2-\nu^2}\right)+\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2}d\gamma^2;$$

on aura donc alors

$$m=\frac{1}{\mu^2-b^2},\quad n=\frac{1}{b^2-\nu^2},\quad \lambda=\mu^2-\nu^2,\quad \lambda''=\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{b^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - \nu^2};$$

en sorte que les quantités λ et $\frac{\lambda}{\lambda''}$ ont bien la forme exigée au § VI, et que l'on pourra appliquer la méthode que nous avons indiquée, toutes les fois que la fonction des forces U aura la forme

$$\frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

M. Liouville a démontré que le systeme des coordonnées elliptiques est le seul dans lequel la quantité λ a la forme exigée; il est remarquable que, dans le cas plus général de l'espace, la quantité $\frac{\lambda}{\lambda''}$ ait aussi la même forme, ce qui nous a permis de faire cette extension de la méthode.

Nous pourrons donc poser

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \qquad \Phi(\nu) = \nu^2,$$
$$\varpi(\mu) = \frac{b^2}{\mu^2 - b^2}, \qquad \Pi(\nu) = \frac{-b^2}{b^2 - \nu^2};$$

en sorte que les équations (14) deviendront

$$(15)\begin{cases} \dfrac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} = \dfrac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}}, \\ d\gamma = b^2\sqrt{B}\,\dfrac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} - b^2\sqrt{B}\,\dfrac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}}, \\ dt = \dfrac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} - \dfrac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}}, \end{cases}$$

et résoudront tout problème de mouvement d'un point, dans lequel la fonction des forces sera de la forme

$$(16) \qquad U = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Il est presque superflu d'ajouter ici que, pour obtenir tous les points du plan mobile, il est nécessaire de donner aux quantités ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives. On sait, du reste, que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les géomètres font disparaître cette difficulté relative aux signes en introduisant un angle θ à la place de ν, savoir, en posant

$$\nu = b\cos\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = b\sin\theta.$$

Nous allons actuellement faire l'application de la méthode précédente au problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances, et nous ajouterons même, avec Lagrange, un troisième centre placé au milieu de la droite qui joint les deux premiers, et doué d'une action proportionnelle à la distance.

§ VIII.

Prenons pour les trois centres fixes les foyers et le centre des ellipses et des hyperboles orthogonales dont il vient d'être question, et désignons par r, r' et R les rayons vecteurs issus de ces centres; la fonction des forces aura pour valeur

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + KR^2,$$

g, g' et K désignant trois constantes données, que l'on peut supposer à volonté positives ou négatives.

Mais on a évidemment

$$r = \mu + \nu, \quad r' = \mu - \nu, \quad R^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2;$$

donc

$$\begin{aligned} U &= \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + K(\mu^2 + \nu^2 - b^2) \\ &= \frac{[(g+g')\mu - Kb^2\mu^2 + K\mu^4] - [(g-g')\nu - Kb^2\nu^2 + K\nu^4]}{\mu^2 - \nu^2}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction U a, dans ce cas, la forme exigée par notre méthode d'intégration, et, en comparant sa valeur à l'équation (16), on pourra poser

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= (g + g')\mu - Kb^2\mu^2 + K\mu^4, \\ \Psi(\nu) &= (g - g')\nu - Kb^2\nu^2 + K\nu^4; \end{aligned}$$

d'où il suit qu'en substituant ces valeurs de $\psi(\mu)$ et $\Psi(\nu)$, les équations (15) feront connaître la solution du problème qui dépendra, dans le cas général, des fonctions abéliennes. Toutefois, ces transcendantes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

se réduiront à de simples fonctions elliptiques, si l'on ne considère que les deux premiers centres fixes, c'est-à-dire si l'on fait $K = 0$.

En posant, pour abréger,

$$M = (\mu^2 - b^2)[2K\mu^4 + 2(C - Kb^2)\mu^2 + 2(g + g')\mu - A] - Bb^2,$$
$$N = (\nu^2 - b^2)[2K\nu^4 + 2(C - Kb^2)\nu^2 + 2(g - g')\nu - A] - Bb^2,$$

les équations (15) donneront

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mu}{\sqrt{M}} = \dfrac{d\nu}{\sqrt{N}}, \\ d\gamma = b^2\sqrt{B}\left[\dfrac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{M}} - \dfrac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{N}}\right], \\ dt = \dfrac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \dfrac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}. \end{cases}$$

Celles-ci fourniront la solution générale de notre problème, et l'on reviendrait au cas du plan en posant $B = 0$.

Quant aux trois constantes A, B, C qui entrent dans les équations (17), on les déterminera aisément par les conditions initiales du mouvement. Ainsi, en désignant par μ_0, ν_0, γ_0, μ'_0, ν'_0, γ'_0 les valeurs de μ, ν, γ, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ pour $t = 0$, et par V la vitesse initiale dont l'expression dépend de ces six quantités, on aura

$$C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{g}{\mu_0 + \nu_0} - \frac{g'}{\mu_0 - \nu_0} - K(\mu_0^2 + \nu_0^2 - b^2),$$
$$B = \frac{(\mu_0^2 - b^2)^2(b^2 - \nu_0^2)^2}{b^4}\gamma'^2_0,$$

et enfin A se déterminera par l'une des équations

$$M_0 = (\mu_0^2 - \nu_0^2)^2\mu'^2_0, \qquad N_0 = (\mu_0^2 - \nu_0^2)^2\nu'^2_0,$$

où M_0 et N_0 désignent ce que deviennent M et N par le changement de μ et ν en μ_0 et ν_0. Les constantes étant ainsi déterminées, on pourra écrire les équations suivantes, qui font connaître la trajectoire du mobile et l'expression du temps :

$$(18)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \int_{\nu_0}^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{N}}, \\ \displaystyle\gamma = \gamma_0 + b^2\sqrt{B}\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{M}} - b^2\sqrt{B}\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{N}}, \\ \displaystyle t = \int_{\mu_0}^{\mu}\frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \int_{\nu_0}^{\nu}\frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il résulte des principes de la théorie des fonctions elliptiques, que dans une infinité de cas, et si $K = 0$, la première des équations (17) admettra une intégrale générale algébrique, et qu'ainsi à la première des équations (18), qui est transcendante, on pourra substituer une équation algébrique qui sera celle de la trajectoire du mobile dans le plan, variable ou invariable, que détermine l'angle γ; cette équation renfermera d'ailleurs les deux quantités μ et ν, qui seront par conséquent toutes deux variables. Cependant il peut arriver que, quelle que soit la valeur de K, la trajectoire du mobile soit une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers et pour centre les trois centres fixes, auquel cas son équation sera

$$\mu = \text{une constante}, \quad \text{ou} \quad \nu = \text{une constante}.$$

C'est ce que nous allons maintenant expliquer.

§ IX.

La première des équations (17), où A, B, C ont des valeurs déterminées, admet, outre son intégrale générale, la solution particulière

$$MN = 0;$$

en sorte que l'on pourra la vérifier en prenant pour μ l'une des racines de $M = 0$, ou pour ν l'une des racines de $N = 0$. Mais pour que cette solution particulière de l'équation différentielle puisse convenir à notre problème, il faut d'abord que l'on ait

$$M_0 = 0, \quad \text{ou} \quad N_0 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mu'_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \nu'_0 = 0,$$

auquel cas la trajectoire du mobile aurait pour équation

$$\mu = \mu_0, \quad \text{ou} \quad \nu = \nu_0.$$

En outre, cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante; car la trajectoire indiquée par la solution particulière ne saurait évidemment convenir que dans le cas où la solution générale fournie par les équations (18) serait en défaut, ce qui ne peut arriver que si quelques-unes des intégrales définies qu'elles contiennent, deviennent

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

infinies. Or, pour que l'intégrale

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}},$$

dont l'élément est supposé infini pour $\mu = \mu_0$, soit elle-même infinie, il faut évidemment que le polynôme M contienne le facteur $\mu - \mu_0$ au moins à la seconde puissance, ou, en d'autres termes, que l'équation

$$M = 0$$

ait au moins deux racines égales à μ_0.

Ainsi la trajectoire du mobile sera l'ellipse $\mu = \mu_0$, ou l'hyperbole $\nu = \nu_0$, si l'on a

$$M_0 = 0, \quad \left(\frac{dM}{d\mu}\right)_0 = 0,$$

ou

$$N_0 = 0, \quad \left(\frac{dN}{d\nu}\right)_0 = 0.$$

C'est le résultat auquel est parvenu Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, à l'aide de considérations qui me semblent moins élégantes et moins rigoureuses que les précédentes (*).

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une trajectoire elliptique, et ne considérons, pour plus de simplicité, que le cas où l'on a $K = 0$ et $B = 0$, c'est-à-dire le cas où le mobile se meut dans un plan fixe, et n'est attiré que par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances; on aura simplement

$$M = (\mu^2 - b^2)[2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A],$$
$$N = (\nu^2 - b^2)[2C\nu^2 + 2(g - g')\nu - A].$$

Nous voulons que l'équation $M = 0$ ait deux racines égales à μ_0; nous supposons, d'ailleurs, que μ_0 n'est pas égal à b, ce qui correspondrait à un mouvement rectiligne : il faudra donc que l'équation

$$2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A = 0$$

(*) *Mécanique analytique*, tome II, page 115.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ait ses deux racines égales à μ_0, ce qui exige que l'on ait

$$C = -\frac{g+g'}{2\mu_0}, \qquad A = (g+g')\mu_0;$$

d'où il résulte, pour la vitesse initiale dirigée suivant la tangente à l'ellipse μ_0,

$$V^2 = \frac{g(\mu_0 - \nu_0)^2 + g'(\mu_0 + \nu_0)^2}{\mu_0(\mu_0^2 - \nu_0^2)};$$

et alors l'expression du temps sera donnée par l'équation

$$t = \sqrt{\mu_0}\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\mu_0^2 - \nu^2)\,d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{g(\mu_0-\nu)^2 + g'(\mu_0+\nu)^2}}.$$

§ X.

Il est remarquable que cette solution du problème par l'orbite elliptique ou hyperbolique constitue une solution particulière des équations différentielles du mouvement. Ce cas étant certainement digne d'intérêt, il me paraît convenable de montrer qu'on peut déduire de suite les résultats qui précèdent, des équations ordinaires du mouvement.

En se bornant, comme précédemment, au cas du plan, ces équations seront

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g(x+b)}{r^3} - \frac{g'(x-b)}{r'^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{r^3} - \frac{g'y}{r'^3};\end{aligned}\right.$$

et, en faisant

$$x = \frac{\mu\nu}{b}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b}, \text{ et } \mu = \text{une constante},$$

ces équations se changeront dans celles-ci :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{d^2\nu}{dt^2} &= -\frac{g(\mu\nu+b^2)}{(\mu+\nu)^3} - \frac{g'(\mu\nu-b^2)}{(\mu-\nu)^3},\\ \nu\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{b^2}{b^2-\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 &= \frac{g(b^2-\nu^2)}{(\mu+\nu)^3} + \frac{g'(b^2-\nu^2)}{(\mu-\nu)^3},\end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui, elles-mêmes, peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(21)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2\nu}{dt^2} = -\dfrac{g(\mu\nu + b^2)}{(\mu+\nu)^3} - \dfrac{g'(\mu\nu - b^2)}{(\mu-\nu)^3}, \\ \left(\dfrac{d\nu}{dt}\right)^2 = \dfrac{b^2-\nu^2}{\mu}\left[\dfrac{g}{(\mu+\nu)^2} + \dfrac{g'}{(\mu-\nu)^2}\right]; \end{cases}$$

et il est facile de s'assurer que la première de ces deux équations s'obtient en différentiant la seconde, et, par suite, qu'elle se trouvera vérifiée en même temps qu'elle. On peut donc effectivement supposer μ constant, auquel cas la dernière équation fera connaître l'expression du temps, qui sera la même que celle écrite plus haut. Quant à la vitesse initiale, sa valeur se trouve essentiellement déterminée par les coordonnées à l'origine du mouvement.

Si V désigne toujours cette vitesse initiale, v et v' les deux valeurs qu'elle prend quand on fait successivement $g' = 0$, $g = 0$, on aura

$$V^2 = v^2 + v'^2;$$

d'où résulte ce théorème donné pour la première fois par Legendre :

Soit A *un point d'une ellipse dont* F *et* F' *sont les deux foyers; soit* v *la vitesse nécessaire pour qu'un point matériel placé en* A *décrive l'ellipse sous l'influence d'une force attractive en raison inverse du carré de la distance émanant du foyer* F; *soit pareillement* v' *la vitesse nécessaire pour que le même point décrive l'ellipse sous l'influence d'une force attractive, en raison inverse du carré de la distance émanant du foyer* F' : *si ces deux forces attractives agissent à la fois sur le mobile, et que sa vitesse initiale* V *soit telle que l'on ait* $V^2 = v^2 + v'^2$, *il décrira encore la même ellipse.*

Ce théorème n'est, au surplus, qu'un corollaire d'une proposition beaucoup plus générale donnée par M. Bonnet (*).

§ XI.

Dans l'examen du cas particulier que nous venons de faire, nous avons supposé la quantité μ_0 différente de b, et nous sommes parvenu à cette conséquence, que la vitesse initiale du mobile doit avoir une

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* tome IX, page 113.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur convenablement déterminée pour chaque mouvement elliptique; mais on sent que cette condition n'est plus nécessaire dans le cas où $\mu_0 = b$, qui est celui d'un mouvement rectiligne, et que ce mouvement pourra subsister quelle que soit la vitesse initiale : il est d'ailleurs évident que l'analyse du paragraphe précédent ne s'applique pas à ce cas, car les équations (20) ne résultent des équations (19) qu'après la suppression du facteur $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, qui est alors nul; en sorte que la seconde des équations (21) est impropre à représenter le mouvement rectiligne, ce qui, du reste, résulte aussi de ce que cette équation, qui est seulement du premier ordre, ne renferme aucune constante arbitraire. Mais les considérations exposées au § IX nous feront connaître aisément la solution dans ce cas particulier. Nous avons vu que l'équation

$$M = (\mu^2 - b^2)\left[2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A\right] = 0$$

doit avoir deux racines égales à b; il suffit donc que l'on ait

$$2Cb^2 + 2(g + g')b - A = 0,$$

et la constante C ne sera assujettie qu'à la seule condition

$$C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{g}{b + \nu_0} - \frac{g'}{b - \nu_0};$$

à l'aide des deux équations précédentes, on déterminera les deux constantes A et C, qui seront exprimées à l'aide de la vitesse initiale V, laquelle pourra être prise arbitrairement, et alors le temps sera donné par la formule

$$dt = \frac{\sqrt{b^2 - \nu^2}\, d\nu}{\sqrt{-2C\nu^2 - 2(g - g')\nu + A}}.$$

Ce cas très-simple peut se traiter directement, mais il nous a paru convenable de le déduire de notre analyse.

§ XII.

Enfin, pour compléter cette discussion, il nous reste à indiquer comment on peut déduire de notre solution générale les résultats connus relatifs au mouvement d'un point matériel attiré par un seul centre fixe. Il suffira évidemment de poser $g' = 0$ en même temps que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$K = 0$, et l'on aura pour l'équation de la trajectoire

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(2C\mu^2 + 2g\mu - A)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(2C\nu^2 + 2g\nu - A)}};$$

celle-ci est l'équation d'Euler, qui admet, comme on sait, une intégrale algébrique. En formant cette intégrale, on devra retrouver l'équation d'une conique ayant le centre fixe unique pour l'un de ses foyers; et, réciproquement, connaissant l'équation de la conique, on aurait l'intégrale de l'équation précédente : mais on peut obtenir une démonstration mécanique plus simple du théorème d'Euler, ainsi que l'a remarqué M. Jacobi; car si l'on suppose que g est nul en même temps que g' et K, le corps n'étant sollicité par aucune force se mouvra en ligne droite : or on pourra former l'équation de cette ligne droite, entre les deux coordonnées μ et ν. D'ailleurs, en posant, pour abréger,

$$\frac{A}{2C} = e,$$

la même ligne droite sera aussi représentée par l'équation

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - e)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - e)}};$$

en sorte que l'on aura de suite l'intégrale de cette équation différentielle.

Vu et approuvé,

Le 25 Octobre 1847.

Pour le Doyen de la Faculté des Sciences, en congé,

Le Professeur délégué, G. DELAFOSSE.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général de l'Université,

Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LA

DÉTERMINATION DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

§ I.

Attraction d'un ellipsoïde sur un point de l'intérieur ou de la surface.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation à la surface de l'ellipsoïde, et α, β, γ les coordonnées du point attiré M situé dans l'intérieur du corps.

Nous supposerons l'ellipsoïde homogène, nous désignerons par ρ sa densité, par f la quantité qui mesure l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, et nous ferons égale à 1 la masse du point attiré.

Cela posé, si l'on conçoit au point M un angle solide infiniment petit $d\omega$, et que l'on coupe cet angle par des sphères concentriques infiniment voisines, la portion de volume de l'ellipsoïde qu'il intercepte se trouvera décomposée en éléments dont l'expression sera

$$r^2 dr d\omega\,;$$

par suite, l'action de l'un de ces éléments sur le point M sera $f\rho\, dr d\omega$, et en faisant la somme des actions exercées par les divers éléments de l'angle solide $d\omega$, on aura

$$f\rho\, r d\omega,$$

formule dans laquelle r désigne la distance du point M à un point de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la surface ellipsoïdale comprise dans l'angle $d\omega$. En appelant ξ, η, ζ les angles que fait la direction du rayon r avec les axes coordonnés, les composantes de l'action de notre angle solide auront pour valeurs

$$f\rho r \cos\xi\, d\omega, \quad f\rho r \cos\eta\, d\omega, \quad f\rho r \cos\zeta\, d\omega.$$

Si l'on considère aussi les composantes de l'action de la portion du corps qui est comprise dans l'angle solide opposé au premier par le sommet, on déduira leurs valeurs des expressions qui précèdent, en changeant ξ, η, ζ en leurs supplémentaires, et r en $-r'$; ces nouvelles composantes seront donc

$$f\rho r' \cos\xi\, d\omega, \quad f\rho r' \cos\eta\, d\omega, \quad f\rho r' \cos\zeta\, d\omega,$$

où il faut bien faire attention que r' désigne la valeur négative du rayon vecteur. En les ajoutant aux premières, on aura

$$f\rho(r+r')\cos\xi\, d\omega, \quad f\rho(r+r')\cos\eta\, d\omega, \quad f\rho(r+r')\cos\zeta\, d\omega.$$

Pour avoir les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde entier, il faudra faire la somme de toutes les quantités de cette espèce, en prenant successivement pour $d\omega$ tous les éléments d'une demi-sphère décrite du point M comme centre, avec l'unité pour rayon.

Pour transformer ces expressions, je ferai, dans l'équation de l'ellipsoïde,

$$x = \alpha + r\cos\xi, \quad y = \beta + r\cos\eta, \quad z = \gamma + r\cos\zeta :$$

cette équation prendra la forme

$$kr^2 + 2gr - h = 0,$$

et aura pour racines r et r'; en sorte que l'on aura

$$r + r' = -\frac{2g}{k},$$

en faisant, pour abréger,

$$k = \frac{\cos^2\xi}{a^2} + \frac{\cos^2\eta}{b^2} + \frac{\cos^2\zeta}{c^2},$$

$$g = \frac{\alpha\cos\xi}{a^2} + \frac{\beta\cos\eta}{b^2} + \frac{\gamma\cos\zeta}{c^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Observons, enfin, que $\frac{g}{k}$ ne fait que changer de signe quand les angles ξ, η, ζ se changent dans leurs supplémentaires, et, par conséquent, les produits $\frac{g\cos\xi}{k}$, $\frac{g\cos\eta}{k}$, $\frac{g\cos\zeta}{k}$ ne changent pas; d'où il suit qu'on pourra prendre pour $d\omega$ les éléments de la sphère entière décrite du point M comme centre, avec l'unité comme rayon, pourvu que l'on ne prenne que la moitié des résultats. Si donc X, Y, Z désignent les composantes de l'action totale de l'ellipsoïde sur le point M, on aura

$$X = -\sum f\rho\frac{g\cos\xi}{k}d\omega,\quad Y = -\sum f\rho\frac{g\cos\eta}{k}d\omega,\quad Z = -\sum f\rho\frac{g\cos\zeta}{k}d\omega.$$

Enfin, en mettant au lieu de g sa valeur, et remarquant que les quantités

$$\sum f\rho\frac{\cos\xi\cos\eta}{k}d\omega,\quad \sum f\rho\frac{\cos\xi\cos\zeta}{k}d\omega,\quad \sum f\rho\frac{\cos\eta\cos\zeta}{k}d\omega$$

sont nulles, on aura plus simplement

$$X = -\frac{\alpha}{a^2}\sum f\rho\frac{\cos^2\xi}{k}d\omega,\quad Y = -\frac{\beta}{b^2}\sum f\rho\frac{\cos^2\eta}{k}d\omega,\quad Z = -\frac{\gamma}{c^2}\sum f\rho\frac{\cos^2\zeta}{k}d\omega.$$

Prenons, au lieu des trois angles ξ, η, ζ, les deux angles habituels θ, ψ des coordonnées polaires; on aura

$$\cos\xi = \cos\theta,\quad \cos\eta = \sin\theta\cos\psi,\quad \cos\zeta = \sin\theta\sin\psi,$$

et

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

en sorte que l'on aura, pour la valeur de la composante X, dont on déduira aisément les deux autres,

$$X = -\frac{f\rho\alpha}{a^2}\int\int\frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}},$$

l'intégrale par rapport à ψ étant prise de o à 2π, et celle par rapport à θ de o à π. Mais il suffit évidemment de prendre les deux intégrales entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, pourvu que l'on multiplie le résultat par 8.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour effectuer l'intégration relative à ψ, je poserai

$$\operatorname{tang}\psi = v,\quad d\psi = \frac{dv}{1+v^2},\quad \cos^2\psi = \frac{1}{1+v^2},\quad \sin^2\psi = \frac{v^2}{1+v^2};$$

on aura alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{k} = \int_0^{\infty} \frac{dv}{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)+\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)v^2} = \frac{\pi a^2 bc}{2\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta)}},$$

et, par suite,

$$X = -4\pi\rho f bc\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta)}}.$$

Quant aux deux autres composantes Y et Z, on aura immédiatement leurs valeurs en changeant, dans X, a et α en b et β, puis en c et γ, et réciproquement; il viendra ainsi

$$Y = -4\pi\rho f ac\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(b^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta)}},$$

$$Z = -4\pi\rho f ab\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(c^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)}}.$$

Nous allons actuellement donner aux valeurs de ces composantes une forme différente. Considérons d'abord X, et posons

$$\cos\theta = u,\quad \frac{b^2-a^2}{a^2} = \lambda^2,\quad \frac{c^2-a^2}{a^2} = \lambda'^2,\quad \frac{4\pi\rho abc}{3} = M;$$

l'expression de X sera

$$X = -\frac{3Mf}{a^3}\alpha\int_0^1 \frac{u^2\, du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}},$$

où M désignera la masse de l'ellipsoïde.

Pour avoir une autre forme de Y, nous poserons

$$\cos\theta = \frac{b}{a}\frac{u}{\sqrt{1+\lambda^2u^2}},\quad \sin\theta\, d\theta = -\frac{b}{a}\frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'on aura

$$Y = -\frac{3Mf}{a^3}\beta\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)^3(1+\lambda'^2u^2)}};$$

on trouverait pareillement

$$Z = -\frac{3Mf}{a^3}\gamma\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)^3}}.$$

Enfin, si l'on pose

$$U = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}},$$

on aura ces expressions très-simples pour X, Y, Z,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{3Mf}{a^3}\alpha\,U,\\ Y &= -\frac{3Mf}{a^3}\beta\,\frac{d\lambda U}{d\lambda},\\ Z &= -\frac{3Mf}{a^3}\gamma\,\frac{d\lambda' U}{d\lambda'}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, les trois composantes ne dépendront que de la seule quantité U, qui est, comme on sait, une fonction elliptique de seconde espèce.

Les formules précédentes ont lieu pour tous les points intérieurs, en particulier pour les points infiniment voisins de la surface; elles auront donc lieu aussi pour les points de la surface elle-même.

On pourra exprimer sous forme finie la fonction U, toutes les fois que les quantités λ et λ' seront égales, ou que l'une d'elles sera nulle; ce qui est le cas d'un ellipsoïde de révolution. Voyons ce que seront alors les équations (1). En supposant $\lambda = \lambda'$, on a d'abord

$$U = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{1+\lambda^2u^2} = \frac{\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda^3},$$

d'où l'on conclura de suite la valeur de X. Pour avoir celles de Y et Z, on observera que, pour tous les points de l'intérieur des corps, on a, en général,

$$\frac{dX}{d\alpha} + \frac{dY}{d\beta} + \frac{dZ}{d\gamma} = -4\pi f,$$

et, par conséquent,

$$U + \frac{d\lambda U}{d\lambda} + \frac{d\lambda' U}{d\lambda'} = \frac{4\pi a^3}{3M}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour vérifier cette équation, il faudra remplacer $\frac{4\pi a^3}{3M}$ par sa valeur en fonction de λ et λ', et l'équation deviendra

$$(2) \qquad U + \frac{d\lambda U}{d\lambda} + \frac{d\lambda' U}{d\lambda'} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\lambda'^2}}.$$

On intègre aisément cette équation linéaire; car, en la mettant sous la forme

$$\lambda \frac{dU}{d\lambda} + \lambda' \frac{dU}{d\lambda'} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\lambda'^2}} - 3U,$$

on voit qu'elle dépend des deux équations simultanées

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\lambda'}{\lambda'} = \frac{dU}{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\lambda'^2}} - 3U},$$

d'où l'on tire, k désignant une constante arbitraire,

$$\lambda' = k\lambda \quad \text{et} \quad \frac{dU}{d\lambda} + \frac{3U}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+k^2\lambda^2}}.$$

Or cette dernière est aux différentielles ordinaires, et a pour intégrale

$$U = \frac{1}{\lambda^3}\int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+k^2\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda^3}\int_0^\lambda \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}\sqrt{1+k^2\theta^2}} + \frac{c}{\lambda^3},$$

c désignant une autre constante arbitraire; si l'on fait $\theta = \lambda u$, $d\theta = \lambda du$, on aura

$$(3) \qquad U = \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1+\lambda^2 u^2}\sqrt{1+k^2\lambda^2 u^2}} + \frac{c}{\lambda^3}.$$

Maintenant, pour avoir l'intégrale générale de l'équation (2), il faut considérer la constante c comme une fonction arbitraire de $k = \frac{\lambda'}{\lambda}$: on aura donc, enfin, en mettant aussi λ'^2 au lieu de $k^2\lambda^2$,

$$U = \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1+\lambda^2 u^2}\sqrt{1+\lambda'^2 u^2}} + \frac{1}{\lambda^3}\varphi\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right),$$

où φ désigne la fonction arbitraire. En la supposant nulle, on aura la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur de notre fonction U, dont dépendent les trois composantes X, Y, Z.

L'équation (2) donnera la valeur commune des deux dérivées $\frac{d\lambda U}{d\lambda}$, $\frac{d\lambda' U}{d\lambda'}$, lorsqu'on suppose $\lambda' = \lambda$, savoir

$$\frac{d\lambda' U}{d\lambda'} = \frac{d\lambda U}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\lambda^2} - U\right) = \frac{1}{2\lambda^3}\left(\operatorname{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right);$$

on aura donc, pour les valeurs des composantes de l'action d'un ellipsoïde de révolution sur un point intérieur ou situé à la surface,

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{\lambda^3 a^3}(\lambda - \operatorname{arc tang}\lambda),$$

$$Y = -\frac{3Mf\beta}{2\lambda^3 a^3}\left(\operatorname{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$Z = -\frac{3Mf\gamma}{2\lambda^3 a^3}\left(\operatorname{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Notre analyse ne suppose pas que λ soit réel, en sorte que ces formules s'appliqueront au cas de l'ellipsoïde allongé, comme à celui de l'ellipsoïde aplati.

§ II.

De la figure d'équilibre d'une masse liquide homogène, soumise à l'action mutuelle de ses molécules, et animée d'un mouvement de rotation uniforme.

FIGURES ELLIPTIQUES.

Considérons une masse fluide homogène en équilibre sous l'influence des actions mutuelles de ses molécules, et de la force centrifuge résultant d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, que nous prendrons pour l'un des axes coordonnés, celui des x par exemple.

Si l'on désigne par α, β, γ les coordonnées d'un point de la surface, par X, Y, Z les composantes de l'attraction de la masse liquide sur la molécule située en ce point, et par g la force centrifuge à la distance 1 de l'axe de rotation, on aura, pour la condition d'équilibre,

$$X\,d\alpha + (Y + g\beta)\,d\beta + (Z + g\gamma)\,d\gamma = 0, \tag{1}$$

4.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équation qui doit coïncider avec l'équation différentielle de la surface du corps.

La détermination de toutes les figures possibles d'équilibre présente des difficultés qui n'ont point encore été surmontées ; toutefois ce problème a été complétement résolu dans l'hypothèse où la figure du corps diffère peu de la sphère, ce qui suffit pour les besoins de l'astronomie. On a démontré, en effet, dans ce cas, que cette figure d'équilibre de la masse fluide est toujours celle d'un ellipsoïde de révolution dont le petit axe coïncide avec l'axe fixe. On savait, en outre, par un théorème dû à Maclaurin, que, si la vitesse angulaire de rotation ne dépasse pas une certaine limite, deux formes au moins sont possibles et sont comprises toutes deux dans les ellipsoïdes de révolution. Enfin, il y a quelques années, M. Jacobi a annoncé à l'Académie des Sciences, qu'on satisfait à la condition d'équilibre en donnant à la masse fluide la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. La démonstration de ce théorème est très-simple et semblable à celle qui est relative aux ellipsoïdes de révolution exposée au chapitre III du troisième livre de la *Mécanique céleste.*

Soit

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1,$$

ou

$$\frac{\alpha\,d\alpha}{a^2}+\frac{\beta\,d\beta}{b^2}+\frac{\gamma\,d\gamma}{c^2}=0, \tag{2}$$

l'équation d'un ellipsoïde à trois axes inégaux ; les composantes de l'action de l'ellipsoïde sur un point α, β, γ de la surface seront données par les équations (1) du paragraphe précédent ; et en posant, pour abréger,

$$\Delta=\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)},$$

$$M=\frac{4\pi\rho abc}{3},$$

et

$$\left\{\begin{aligned} A&=\frac{3Mf}{a^3}\int_0^1\frac{u^2\,du}{\Delta},\\ B&=\frac{3Mf}{a^3}\int_0^1\frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)\Delta},\\ C&=\frac{3Mf}{a^3}\int_0^1\frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2u^2)\Delta},\end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on aura

$$X = -A\alpha,\quad Y = -B\beta,\quad Z = -C\gamma;$$

en sorte que l'équation (1) d'équilibre deviendra

$$(3)\qquad A\alpha\,d\alpha + (B-g)\beta\,d\beta + (C-g)\gamma\,d\gamma = 0;$$

et pour que les équations (2) et (3) puissent appartenir à la même surface, il faut et il suffit que l'on ait

$$(4)\qquad \frac{A}{\frac{1}{a^2}} = \frac{B-g}{\frac{1}{b^2}} = \frac{C-g}{\frac{1}{c^2}},$$

ou, comme $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \lambda^2$, $\frac{c^2}{a^2} = 1 + \lambda'^2$,

$$(\lambda'^2 - \lambda^2)A = (1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)(B-C),$$

et

$$(1+\lambda^2)(B-g) = (1+\lambda'^2)(C-g).$$

La première de ces équations exprime la condition, entre λ et λ', nécessaire pour que la figure elliptique convienne à l'équilibre; la seconde fera connaître ensuite la valeur de g, c'est-à-dire du carré de la vitesse angulaire de rotation. En remettant au lieu de A, B, C leurs valeurs, elles deviennent

$$(\lambda'^2 - \lambda^2)\left[(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1 \frac{u^4\,du}{\Delta^3} - \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\Delta}\right] = 0,$$

$$(\lambda'^2 - \lambda^2)\left[g - \frac{3Mf}{a^3}\int_0^1 \frac{(1-u^2)u^2\,du}{\Delta^3}\right] = 0.$$

La première équation est satisfaite pour $\lambda' = \lambda$, ce qui indique que l'équilibre peut subsister avec une figure elliptique de révolution; la seconde équation l'étant aussi dans la même hypothèse, ne pourra pas servir à déterminer la vitesse angulaire de rotation; mais alors on prendra, comme nous allons le faire tout à l'heure, une autre combinaison des équations (4). Laissant de côté cette solution, on aura l'équation

$$(5)\qquad (1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1 \frac{u^4\,du}{\Delta^3} - \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\Delta} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui fera connaître la valeur de λ, lorsqu'on aura donné à λ' une valeur arbitraire, mais déterminée. Le carré de la vitesse angulaire de rotation sera ensuite donné par la formule

$$(6) \qquad g = 4\pi\rho f\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\lambda'^2}\int_0^1 \frac{(1-u^2)u^2\,du}{\Delta^3}.$$

Au contraire, si l'on se donne la vitesse angulaire $\sqrt{g}$, ou plus généralement une fonction quelconque de g, λ et λ', en sorte que g soit une fonction connue de λ et λ', les équations (5) et (6) détermineront ces quantités λ et λ', et, dès lors, la forme ellipsoïdale sera entièrement déterminée.

Nous nous occuperons d'abord des ellipsoïdes de révolution, dont la discussion a été complétement faite par Laplace dans sa *Mécanique céleste.*

§ III.

Discussion des figures elliptiques de révolution.

S'il s'agit d'une figure de révolution, on a $\lambda' = \lambda$ et $B = C$, en conservant les notations du paragraphe précédent, et les équations (4) se réduisent à une seule, savoir,

$$g = B - \frac{A}{1+\lambda^2};$$

mais alors on a

$$A = \frac{3Mf}{a^3}\,\frac{\lambda - \text{arc tang}\,\lambda}{\lambda^3} = 4\pi\rho f\,\frac{(1+\lambda^2)(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda)}{\lambda^3},$$

$$B = \frac{3Mf}{2a^3}\,\frac{\text{arc tang}\,\lambda - \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}}{\lambda^3} = 2\pi\rho f\,\frac{(1+\lambda^2)\,\text{arc tang}\,\lambda - \lambda}{\lambda^3},$$

d'où

$$(1) \qquad g = 2\pi\rho f\,\frac{(3+\lambda^2)\,\text{arc tang}\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3},$$

équation qui fera connaître la vitesse angulaire de rotation d'une masse liquide en équilibre, et terminée par une surface elliptique donnée, ou qui, réciproquement, déterminera la valeur de λ qui correspond à un mouvement de rotation donné.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous allons faire voir que si la quantité

$$q = \frac{g}{2\pi\rho f}$$

est supérieure à une certaine limite q', l'équilibre n'est plus possible avec une figure elliptique de révolution, et que, pour toute valeur de q inférieure à q', il y a, au contraire, deux formes ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre.

L'équation (1) peut s'écrire comme il suit :

$$(2) \qquad \varphi = \frac{q\lambda^3 + 3\lambda}{3 + \lambda^2} - \operatorname{arc\,tang} \lambda = 0\,;$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \lambda^2 \frac{q\lambda^4 + (10q - 4)\lambda^2 + 9q}{(1 + \lambda^2)(3 + \lambda^2)^2}.$$

La fonction φ est nulle pour $\lambda = 0$, et la forme de sa dérivée $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ montre qu'elle commencera et finira par être croissante, λ variant de 0 à $+\infty$; et même cette fonction φ sera constamment croissante si les valeurs de λ^2, déduites de l'équation

$$(4) \qquad q\lambda^4 + (10q - 4)\lambda^2 + 9q = 0,$$

sont négatives, ou égales, ou imaginaires. Il résulte de là que s'il existe une valeur réelle de λ correspondante à une valeur donnée de q, il faut que la précédente équation en λ^2 ait ses deux racines réelles inégales et positives : ce qui exige que l'on ait

$$q < \tfrac{1}{4}.$$

Mais cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante. En effet, de ce que l'équation (4) a deux racines réelles et positives, il résulte seulement que la fonction φ a un maximum et un minimum ; mais il ne s'ensuit pas qu'elle puisse s'annuler : il est d'ailleurs évident que cette fonction ne peut s'annuler plus de deux fois, en faisant abstraction de la valeur $\lambda = 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction φ puisse s'annuler est que son minimum ne soit pas positif. Soient q' la valeur qu'il faut donner à q pour que ce minimum soit nul,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et φ' la valeur de φ pour $q = q'$; on aura

$$\varphi = \varphi' + \frac{(q - q')\lambda^3}{3 + \lambda^2}.$$

Or le minimum de φ' est o. Si donc $q > q'$, la fonction φ sera constamment positive, et, par suite, ne pourra s'annuler; d'où il suit que la condition pour que l'équation (2) donne une valeur réelle de λ est que

$$q < \text{ ou } = q'.$$

Dans le second cas, où $q = q'$, l'équation (2) ne donnera qu'une seule valeur pour λ; au contraire, pour $q < q'$, on aura deux valeurs réelles et inégales de λ, puisque alors la fonction φ change de signe quand on fait varier λ de o jusqu'à la valeur qui annule φ', ou depuis cette valeur jusqu'à $+\infty$.

Pour avoir la valeur de φ', il faudra éliminer q de l'équation (2), à l'aide de l'équation (4).

L'équation (4) donne

$$q = \frac{4\lambda^2}{\lambda^4 + 10\lambda^2 + 9}, \tag{5}$$

d'où

$$\varphi' = \frac{7\lambda^5 - 30\lambda^3 + 27\lambda}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)(9+\lambda^2)} - \text{arc tang}\,\lambda.$$

On aura $\frac{d\varphi'}{d\lambda}$ en prenant la dérivée de φ, où l'on considérera q comme fonction de λ: ainsi

$$\frac{d\varphi'}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dq}\frac{dq}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dq}\frac{dq}{d\lambda};$$

puisque $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ est nul en vertu de l'équation (5), on aura donc, en opérant de cette manière,

$$\frac{d\varphi'}{d\lambda} = \frac{-8\lambda^4(\lambda^4 - 9)}{(3+\lambda^2)(1+\lambda^2)^2(9+\lambda^2)^2}.$$

Il résulte de là que si λ croît de zéro jusqu'à $\sqrt{3}$, φ' croîtra à partir de zéro jusqu'à une certaine limite, et décroîtra ensuite constamment

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$, lorsque λ continuera de croître jusqu'à $+\infty$, ce qui montre que φ' ne s'annulera qu'une seule fois, et pour une valeur de λ supérieure à $\sqrt{3}$; c'est à cette valeur λ' de λ que correspondra la valeur q' de q dont nous avons parlé. Laplace a donné, pour cette valeur de λ',

$$\lambda' = 2,5292,$$

d'où résulte, pour q',

$$q' = 0,224671.$$

Comme nous l'avons déjà dit, pour toute valeur de q inférieure à q', l'équation $\varphi = 0$ a deux racines réelles; et comme on a

$$\varphi = \varphi' - \frac{(q'-q)\lambda^3}{3+\lambda^2},$$

ces deux racines seront, l'une plus petite, et l'autre plus grande que $2,5292$.

De l'équation (2) on déduit

$$\varphi = \int_0^\lambda \lambda^2 \frac{q\lambda^4 + (10q-4)\lambda^2 + 9q}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)^2}\, d\lambda;$$

mettons $\lambda\sqrt{-1}$ à la place de λ, on aura

$$\varphi = \sqrt{-1}\int_0^\lambda \lambda^2 \frac{q(1-\lambda^2)(9-\lambda^2)+6\lambda^2}{(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)^2}\, d\lambda.$$

Cette nouvelle fonction φ est relative au cas d'un ellipsoïde allongé, et il faut que $\lambda^2 < 1$, car autrement l'ellipsoïde se changerait en hyperboloïde. Or on voit que, dans l'intégrale précédente, tous les éléments seront positifs si λ varie de 0 jusqu'à une quantité positive quelconque, inférieure à 1; la fonction φ ne pourra donc s'annuler, et, par suite, l'équilibre sera toujours impossible avec un ellipsoïde allongé.

§ IV

Discussion des ellipsoïdes à trois axes inégaux.

La discussion des ellipsoïdes à trois axes inégaux a été faite, pour la première fois, par M. Meyer, géomètre de Kœnigsberg, et a été

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

reprise depuis par M. Liouville, qui en a fait le sujet d'un Mémoire publié dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1846. Nous empruntons au Mémoire de M. Liouville les résultats qui vont suivre.

Les équations (5) et (6) du § II, qui donnent les conditions nécessaires entre λ, λ' et g pour l'équilibre, peuvent être écrites comme il suit :

$$0 = \int_0^1 \frac{(1-u^2)(1-\lambda^2\lambda'^2 u^2)u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$g = 4\pi\rho f\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\lambda'^2}\int_0^1 \frac{(1-u^2)u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous prendrons, au lieu de λ et λ', deux autres variables s et t, telles que l'on ait

$$s = \frac{1}{1+\lambda^2},\quad t = \frac{1}{1+\lambda'^2};$$

nous ferons aussi

$$\frac{g}{2\pi\rho f} = \nu;$$

et, enfin, nous remplacerons la variable u qui entre sous le signe d'intégration par $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$: on aura ainsi, au lieu des deux équations précédentes, et en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \sqrt{(x+1)(sx+1)(tx+1)},$$

$$(1) \qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\mathrm{R}^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\mathrm{R}^3} = 0,$$

$$(2) \qquad \nu = st\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(sx+1)(tx+1)\mathrm{R}}.$$

Les quantités s et t sont, par leur nature, positives; l'équation (1) montre que chacune d'elles, et même leur somme, doit être inférieure à 1; du moins si la somme $s+t=1$, l'une des quantités s ou t devrait être nulle.

Désignons par φ le premier membre de l'équation (1): on trouve

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aisément

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(x+1)(tx+1)}{R^5}[2+(3-s-t)x - stx^2]dx,$$

ou

(3) $$\frac{d\varphi}{ds} = -A_0 - A_1 t,$$

en posant

$$2A_0 = \int_0^\infty \frac{x(x+1)}{R^5}[2+(3-s-t)x - stx^2]dx,$$

$$2A_1 = \int_0^\infty \frac{x^2(x+1)}{R^5}[2+(3-s-t)x - stx^2]dx.$$

Comme φ, A_0 et A_1 sont des fonctions symétriques de s et t, on aura aussi

(4) $$\frac{d\varphi}{dt} = -A_0 - A_1 s;$$

s et t étant positives, et leur somme $s+t$ étant inférieure à 1, M. Liouville a démontré de cette manière que les quantités A_0 et $2A_0 + 3A_1$ sont positives.

On a identiquement

$$d\frac{x^2}{(sx+1)(tx+1)R} = \frac{4x+(3+s+t)x^2 - 2stx^3 - 3stx^4}{2(sx+1)(tx+1)R^3}dx,$$

et, en intégrant de 0 à $+\infty$,

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(x+1)}{R^5}[4+(3+s+t)x - 2stx^2 - 3stx^3]dx.$$

Retranchant cette quantité nulle de la valeur de $2A_0$, on aura

$$2A_0 = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(x+1)}{R^5}(1-s-t+stx^2)dx;$$

ajoutant cette valeur de $2A_0$ avec $3A_1$, on aura

$$2A_0 + 3A_1 = \frac{3}{2}(3-s-t)\int_0^\infty \frac{x^2(x+1)^2}{R^5}dx;$$

ce qui démontre la proposition énoncée, car les quantités $1-s-t$ et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$3 - s - t$ sont essentiellement positives. Il résulte de là que les deux dérivées $\frac{d\varphi}{ds}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ sont toutes deux négatives; car on peut écrire

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\,A_0\left(1 - \tfrac{2}{3}t\right) - \frac{t}{3}(2A_0 + 3A_1),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\,A_0\left(1 - \tfrac{2}{3}s\right) - \frac{s}{3}(2A_0 + 3A_1).$$

Il suit de là que φ est une fonction décroissante de s et de t.

Supposons que l'on donne à t une valeur déterminée, l'équation (1) aura une racine s au moins comprise entre 0 et 1, car on a des résultats de signes contraires en faisant $s = 0$ et $s = 1$ dans cette équation; en outre, comme la dérivée $\frac{d\varphi}{ds}$ de son premier membre est constamment négative, et que, par suite, la fonction φ est décroissante, il s'ensuit qu'elle ne pourra s'annuler qu'une seule fois. Ainsi, pour chaque valeur entre 0 et 1, que l'on attribuera à l'une des quantités s ou t, l'équation (1) donnera une valeur correspondante, aussi comprise entre 0 et 1, pour l'autre quantité. Si l'on fait décroître s à partir de sa plus grande valeur, qui est 1, $\frac{d\varphi}{ds}$ croît, et φ ne pourra plus s'annuler que si l'on fait croître t. Si donc on veut toujours avoir

$$\varphi = 0,$$

il faudra que t augmente lorsque s diminuera. On finira par avoir $t = s$, puis $t < s$; mais comme on peut toujours appeler s la plus grande des deux quantités s et t; qui entrent symétriquement dans les équations (1) et (2), nous supposerons $s =$ ou $> t$.

Soit α la plus grande valeur de t, ce sera aussi la plus petite valeur de s; on aura en même temps $s = t = \alpha$, et α sera déterminé par l'équation

$$(1 - 2\alpha)\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(\alpha x + 1)^3 (x + 1)^{\frac{3}{2}}} - \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(\alpha x + 1)^3 (x + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

où les deux intégrales pourront être exprimées sous une forme finie. On parviendrait aisément à cette transformation par un changement de variables, mais on arrive plus simplement au résultat en prenant,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au lieu de l'équation précédente, l'équation (5) du § II, dans laquelle on fera $\lambda' = \lambda$: il vient ainsi

$$0 = \int_0^1 \frac{(1-u^2)(1-\lambda^4 u^2)u^2}{(1+\lambda^2 u^2)^3}\,du,$$

les quantités α et λ étant unies par la relation

$$\alpha = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Si, dans cette dernière, on fait

$$u = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tang}\theta,$$

elle devient

$$0 = \lambda^2 \int_0^{\operatorname{arc\,tang}\lambda} \operatorname{tang}^2\theta\, d\theta - (\lambda^2+1)^2 \int_0^{\operatorname{arc\,tang}\lambda} \sin^4\theta\, d\theta.$$

D'ailleurs

$$\int_0^{\operatorname{arc\,tang}\lambda} \operatorname{tang}^2\theta\, d\theta = \operatorname{tang}\theta - \theta = \lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda,$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\operatorname{arc\,tang}\lambda} \sin^4\theta\, d\theta &= -\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta \\ &= \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda(5\lambda^2+3)}{8(1+\lambda^2)^2};\end{aligned}$$

et l'on aura enfin

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{13\lambda^3+3\lambda}{3\lambda^4+14\lambda^2+3} = 0.$$

La dérivée du premier membre a pour valeur

$$\frac{16\lambda^4(3\lambda^2+1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^2+1)(3\lambda^4+14\lambda^2+1)^2};$$

cette dérivée ne s'annule qu'une seule fois, savoir, pour $\lambda = 1$, et la fonction s'annulera deux fois, pour $\lambda = 0$ d'abord, puis pour une valeur de λ supérieure à 1.

Pour $\lambda = 1$, le premier membre de l'équation a la valeur négative $\frac{\pi - 3,2}{4}$.

Pour $\lambda = 2$, sa valeur est à peu près égale à 0,06, en sorte que la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

racine λ de l'équation précédente sera comprise entre 1 et 2. On pourrait avoir aisément sa valeur à moins de 0,1 près, et alors la méthode de Newton permettrait de la calculer avec telle approximation que l'on voudrait.

Examinons maintenant comment varie la force centrifuge, ou la quantité v, qui lui est proportionnelle.

On a

$$\frac{dv}{ds} = t\int_0^\infty \frac{x(x+1)^2(tx+1)}{R^5}\left(1-\tfrac{1}{2}sx\right)dx,$$

ou

$$\frac{dv}{ds} = tB_0 + s\left(s-\tfrac{1}{2}t\right)B_1,$$

en faisant

$$B_0 = \int_0^\infty \frac{x(x+1)^2}{R^5}\left(1-\tfrac{1}{2}stx^2\right)dx,$$

$$B_1 = \int_0^\infty \frac{x^2(x+1)^2}{R^5}\,dx.$$

Puisque B_0 et B_1 sont symétriques entre s et t, on aura pareillement

$$\frac{dv}{dt} = sB_0 + s\left(s-\tfrac{1}{2}t\right)B_1.$$

On aperçoit de suite que B_1 est une quantité positive; on peut s'assurer qu'il en est de même de B_0, car, en vertu de l'équation identique

$$0 = \int_0^\infty \frac{x(x+1)}{R^5}\left[4+(3+s+t)x-2stx^2-3stx^3\right]dx,$$

on peut écrire

$$B_0 = \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^2(x+1)}{R^5}\left(1-s-t+stx^2\right)dx;$$

d'où résulte évidemment

$$B_0 > 0.$$

Cela posé, on a

$$dv = \frac{dv}{ds}\,ds + \frac{dv}{dt}\,dt,$$

$$0 = \frac{d\varphi}{ds}\,ds + \frac{d\varphi}{dt}\,dt;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$dv = \frac{dt}{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)}\left(\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

D'ailleurs, on trouve

$$\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{d\varphi}{dt} = (t-s)\left[A_0 B_0 + (s+t) A_0 B_1 + \frac{3}{2} st\, A_1 B_1\right].$$

On aperçoit de suite que le second facteur du deuxième membre est positif, car on peut lui donner la forme

$$A_0 B_0 + \frac{1}{2} st\, B_1 (2 A_0 + 3 A_1) + (s + t - st) A_0 B_1,$$

dont tous les termes sont positifs; quant au second facteur $t - s$, il est, par hypothèse, négatif: donc

$$\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{d\varphi}{dt}$$

est une quantité négative; et comme $\frac{d\varphi}{ds}$ est aussi négatif, il s'ensuit que dv a le même signe que dt. Donc v sera une fonction croissante de t (s est censé remplacé par sa valeur en t dans l'expression de v).

Il est aisé de voir qu'à $t = 0$ répond $v = 0$; en sorte que faisant croître t de 0 jusqu'à $t = \alpha$, cas auquel on aura aussi $s = \alpha$, v augmentera constamment jusqu'à une certaine limite v', qui sera donnée par l'équation

$$v' = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(\alpha x + 1)^3 \sqrt{x+1}},$$

d'où l'on peut faire disparaître l'intégrale. On opère plus simplement en substituant à cette équation l'équation (6) du § II, où l'on fera $\lambda' = \lambda$: on aura ainsi

$$v' = 2(1+\lambda^2)\int_0^1 \frac{(1-u^2)\,u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^3};$$

et l'on a entre a et α la relation $\alpha = \frac{1}{1+\lambda^2}$. Si l'on fait $u = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tang}\theta$, la précédente équation devient

$$v' = \frac{2(1+\lambda^2)}{\lambda^3}\int_0^{\operatorname{arc\,tang}\lambda} \sin^2\theta\, d\theta - \frac{2(1+\lambda^2)^2}{\lambda^5}\int_0^{\operatorname{arc\,tang}\lambda} \sin^4\theta\, d\theta.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'ailleurs, les deux intégrales ont pour valeur

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\lambda \quad \text{et} \quad \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\lambda(5\lambda^2+3)}{8(1+\lambda^2)^2},$$

et l'on aura

$$\nu'=\frac{3}{4}\frac{3\lambda^2+1}{\lambda^4}+\frac{(1+\lambda^2)(\lambda^2-3)}{4\lambda^5}\operatorname{arc\,tang}\lambda:$$

telle est la valeur maxima de la force centrifuge, divisée par $2\pi\rho f$. Nous avons vu que λ pourrait être calculé avec une approximation voulue; on pourra donc aussi connaître la quantité ν'.

Pour toute valeur de ν supérieure à ν', l'équilibre de la masse fluide sera impossible avec une figure ellipsoïdale.

Vu et approuvé,

Le 25 Octobre 1847.

Pour le Doyen de la Faculté des Sciences, en congé,

Le Professeur délégué, DELAFOSSE.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général de l'Université,

Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC