ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

THÈSE

DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PRÉSENTÉE

PAR J. BERTRAND.

Professeurs.

MM. THÉNARD, Doyen.
LACROIX.
BIOT.
POISSON.
FRANCOEUR.
BEUDANT.
GEOFFROY-St-HILAIRE.
MIRBEL.

Professeurs adjoints.

MM. DE BLAINVILLE.
POUILLET.
CONSTANT PRÉVOST.
DUMAS.
AUGUSTE St-HILAIRE.
LIBRI.

Suppléants.

MM. LEFÉBURE DE FOURCY.
DUHAMEL.
BALLARD.
MILNE EDWARDS.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, N° 12, DERRIÈRE L'ÉCOLE DE MÉDECINE.

1838.

THÈSE

DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Sur la théorie des phénomènes thermo-mécaniques.

Lorsque les travaux de Newton eurent conduit à admettre entre les molécules des corps célestes, une action proportionnelle à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance, on fut naturellement porté à penser que cette action vérifiée pour une infinité de distances différentes, aurait encore lieu pour celles qui n'auraient pas été soumises à cette vérification, quelque petites qu'on les supposât. Et en effet, les phénomènes chimiques et l'existence même des corps solides, démontrent l'action moléculaire à une petite distance, mais cette action n'est pas assujétie aux mêmes lois que celle qui détermine les mouvements des corps célestes; c'est ce dont n'ont pas permis de douter les premières tentatives de Newton lui-même, pour y ramener l'explication de tous les phénomènes physiques.

Après ces premiers essais, les géomètres qui se sont occupés des phénomènes qui dépendent de ces actions, ne parvenaient à y appliquer les méthodes analytiques, qu'en faisant des hypothèses plus ou moins rigoureusement justifiées sur la résultante des forces moléculaires en chaque point du corps qu'ils considéraient. C'est ainsi que Jacques Bernoulli supposait, pour résoudre le problème de la lame élastique, que la force développée en chaque point par le changement de forme, était en raison inverse du rayon de courbure de la lame en ce point, et que Dalembert, dans l'hydrodynamique, supposait dans toutes les positions d'un fluide, la pression sur un élément, normale à cet élément.

C'est Laplace qui le premier fit entrer dans ces questions la considération de la fonction inconnue qui exprime les actions moléculaires à de petites distances; et quoique nous ignorions entièrement sa forme, la connaissance que nous avons de son évanouissement pour des distances sensibles, permet de supposer que les sommations, entre quelques limites qu'elles entrent dans les formules, soient supposées prises entre o et ∞ lorsque la variable est la distance. En sorte que cette considération, qui n'altère en rien la vérité des formules, remplace, dans le résultat, la fonction dont la forme était inconnue, par un nombre fini de constantes qui dépendent de la substance considérée, et que des expériences ultérieures peuvent déterminer. Cette difficulté disparaît de la même manière dans la théorie de la chaleur, en sorte que la Géométrie n'a besoin d'emprunter à l'expérience que les faits suivants :

Les corps sont composés de molécules qui ne se touchent pas et qui agissent les unes sur les autres de deux manières distinctes: 1° par des forces qui dépendent de leur distance et de leurs températures, et s'annulent lorsque la distance est appréciable.

2°. Par un échange de calorique, qui n'a de résultat que pour des températures inégales, et des distances très petites lorsque les molécules font partie d'un même corps solide.

De ces deux manières d'agir des molécules résultent deux genres différents de questions, où l'on considère chacune d'elles isolément. M. Poisson est le premier qui ait ramené ces questions à des problèmes de pure analyse, sans admettre l'hypothèse de la continuité des corps, hypothèse évidemment contraire à la nature; il a trouvé néanmoins que les équations qui en avaient été déduites étaient exactes.

Ces équations ne peuvent plus s'appliquer lorsque le corps considéré réunit à la fois les deux genres d'actions, car la chaleur, comme nous l'avons vu, modifie les actions mécaniques des molécules, et l'on sait, en outre, que tout mouvement dans l'intérieur d'un corps occasione des changements dans sa température. Il était donc, dans un grand nombre de cas, nécessaire de considérer ces questions sous un point de vue plus général; M. Duhamel, qui a le premier étendu ainsi ces théories physico-mathématiques, a trouvé, en effet, que des termes provenant de la différence des températures des différents points, devaient être ajoutés aux équations du mouvement des corps élastiques, et que la chaleur dégagée ou absorbée par le mouvement intérieur des corps, modifiait les équations de la propagation de la chaleur. C'est de ces équations ainsi modifiées et des conséquences qu'on en peut tirer, que je me propose de m'occuper ici.

Problème du mouvement des corps élastiques.

Les équations de ce problème sont

$$\left.\begin{aligned}
&D\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=A\left(3\,\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+2\,\frac{d^2y}{dbda}+2\,\frac{d^2z}{dcda}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{2\pi B}{3}\,\frac{dv}{da},\\
&D\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=A\left(3\,\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}+\frac{d^2y}{dc^2}+2\,\frac{d^2x}{dbda}+2\,\frac{d^2z}{dbdc}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{2\pi B}{3}\,\frac{dv}{db},\\
&D\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)=A\left(3\,\frac{d^2z}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}+\frac{d^2z}{db^2}+2\,\frac{d^2x}{dcda}+2\,\frac{d^2y}{dbdc}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{2\pi B}{3}\,\frac{dv}{dc};
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

et pour tous les points de la surface libre, on devra avoir

$$0=\frac{2\pi B\nu}{3}\cos l+X+$$

$$A\left[\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos l+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos m+\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos n\right],$$

$$0=\frac{2\pi B\nu}{3}\cos m+Y+$$

$$A\left[\left(3\frac{dy}{db}+\frac{dx}{da}+\frac{dz}{dc}\right)\cos m+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos l+\left(\frac{dz}{db}+\frac{dy}{dc}\right)\cos n\right],$$

$$0=\frac{2\pi B\nu}{3}\cos n+Z+$$

$$A\left[\left(3\frac{dz}{dc}+\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}\right)\cos n+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos l+\left(\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\right)\cos m\right].$$

Dans ces équations, a, b, c sont les coordonnées d'un point quelconque dans l'état naturel du corps, c'est-à-dire dans son état d'équilibre lorsqu'il est abandonné à lui-même et que tous ses points sont à la même température;

x, y, z les déplacements d'un même point dans le sens de trois axes;

X, Y, Z les composantes de la force qui sollicite la molécule dont les coordonnées sont a, b, c (ces composantes sont rapportées à l'unité de masse);

D représente la densité du corps au point considéré;

A, B des constantes qui dépendent de la nature du corps;

l, m, n les angles formés par la direction intérieure de la normale avec les axes.

Les équations de l'équilibre s'obtiendraient en supprimant dans les équations (1), les termes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

On peut immédiatement, de la forme de ces équations, déduire les conséquences suivantes :

1°. La somme des solutions se rapportant à différentes valeurs de la température et des forces extérieures, est une solution qui se rapporte à la somme de ces valeurs. En sorte que les déplacements sont les mêmes que ceux qui seraient produits par les forces données dans l'état naturel du corps.

2°. On voit que les termes qui proviennent du mouvement de la chaleur dans le corps, sont les mêmes que ceux qui proviendraient de forces normales en chaque point aux surfaces isothermes et proportionnelles au flux maximum.

3°. Une remarque importante à faire, est que toutes les fois que soit pour une question d'équilibre, soit pour une question de mouvement, on aura trouvé pour x, y, z, des valeurs qui satisfassent aux données initiales et aux équations ci-dessus, ces valeurs seront les solutions de la question; en effet : 1° s'il s'agit d'une question de mouvement, on peut supposer les équations indéfinies (1) résolues par rapport à $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; alors chacune de ces quantités sera à chaque instant déterminée en fonction de $\frac{d^2x}{da^2}$. . , qui dépendent seulement de ce qui s'est passé précédemment, en sorte qu'en partant des conditions initiales données il n'y aura qu'un système de valeurs pour x, y, z; 2° quant à ce qui se rapporte à l'équilibre, on sait démontrer que pour un système de points soumis à leurs actions mutuelles, il n'y a, sous l'influence de forces données, qu'une seule position d'équilibre possible; il est donc certain que si le système finit par s'arrêter, ce sera dans cette position; or tout état qui satisfait à toutes les équations assure l'équilibre, donc il ne peut non plus en exister qu'un seul. (Il ne faut pas oublier que tout cela se rapporte à des changements de distances dont les carrés sont négligeables.)

Les équations écrites ci-dessus renferment deux constantes qui ne sont autre chose que des intégrales définies dépendantes de la fonction qui représente l'action de deux molécules. Il est impossible d'arriver à des applications numériques des formules, si l'on ne commence par déterminer d'avance, pour les corps que l'on a à considérer, les valeurs de ces constantes.

Pour arriver à cette détermination, nous allons résoudre la question suivante au moyen des équations.

On élève d'un certain nombre de degrés la température d'une masse solide; on applique en même temps une pression normale uniforme P sur chaque unité de superficie de la surface libre. Quelle sera la nouvelle position d'équilibre de ce corps?

Cette question pouvant se résoudre expérimentalement avec précision, la comparaison des résultats du calcul et de l'expérience nous conduira à trouver les valeurs de A et B.

Les équations deviennent, dans ce cas particulier,

$$3\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+2\frac{d^2y}{dadb}+2\frac{d^2z}{dadc}=0,$$

$$3\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}+\frac{d^2y}{dc^2}+2\frac{d^2x}{dadb}+2\frac{d^2z}{dbdc}=0,$$

$$3\frac{d^2z}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}+\frac{d^2z}{db^2}+2\frac{d^2x}{dadc}+2\frac{d^2y}{dbdc}=0.$$

Et à la surface,

$$P\cos l-\frac{2\pi B\nu\cos l}{3}$$
$$=A\left[\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos l+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos m+\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos n\right],$$

$$P\cos m-\frac{2\pi B\nu\cos m}{3}$$
$$=A\left[\left(\frac{dx}{da}+3\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos m+\left(\frac{dy}{da}+\frac{dx}{db}\right)\cos l+\left(\frac{dz}{db}+\frac{dy}{dc}\right)\cos n\right],$$

$$P\cos n-\frac{2\pi B\nu\cos n}{3}$$
$$=A\left[\left(\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+3\frac{dz}{dc}\right)\cos n+\left(\frac{dx}{da}+\frac{dx}{dc}\right)\cos l+\left(\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\right)\cos m\right].$$

Nous savons que si nous trouvons une solution qui satisfasse à tout, ce sera la véritable.

Posons

$$x=\alpha a,\quad y=\beta b,\quad z=\gamma c;$$

les équations à la surface donneront

$$\alpha = B = \gamma = -\frac{3P + 2\pi B\nu}{15A}.$$

Si l'on fait $P = o$, la dilatation linéaire, qui est toujours, ainsi que la solution que nous venons de trouver le démontre, indépendante de la forme du corps, sera $\delta' = -\frac{2\pi B\nu}{15A}$. Si, au contraire, $\nu = o$, la dilatation devient $\delta = -\frac{P}{5A}$; d'où l'on tire en supposant $P = 1$, $\nu = 1$.

$$A = -\frac{1}{5\delta}, \quad B = \frac{3\delta'}{2\pi\delta},$$

δ étant négatif, on voit que A est toujours positif et B toujours négatif.

La question suivante, traitée pour la première fois par M. Poisson, se prête encore plus facilement à une solution expérimentale.

On applique aux deux bases d'un cylindre des tractions égales. Quel sera son allongement? On trouve par un calcul entièrement semblable au précédent, que cet allongement sera égal à $\frac{\delta}{2}$; par conséquent on peut en déduire la valeur de δ, et par suite celles des constantes.

Nous considérerons encore, comme exemple de l'application des équations, la question de l'équilibre d'une sphère creuse dont l'état thermométrique est donné, et qui est soumise à des pressions normales P et P′ à chacune de ses surfaces.

Il est évident que les déplacements se feront dans le sens du rayon : nous pouvons donc poser

$$x = a\varphi(\rho), \quad y = b\varphi(\rho), \quad z = c\varphi(\rho).$$

Il viendra, en tirant de ces équations la valeur des différents termes celles qui expriment l'équilibre,

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{5\delta'}{3\rho}\frac{dv}{d\rho} = 0.$$

Multiplions par ρ et intégrons, puis multiplions le résultat par ρ^2 et intégrons de nouveau, il viendra

$$\varphi(\rho) = \frac{5\delta'}{3\rho^3}\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{C}{\rho^3} + C_1,$$

C et C_1 étant des constantes arbitraires qui se détermineront par les conditions à la surface.

Les trois équations qui expriment ces conditions, pour chacune des surfaces, se réduisent à

$$5\varphi + 3R'\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\delta v + 5\delta' P' = 0, \quad \rho = R,$$

$$5\varphi + 3R\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\delta v + 5\delta' P = 0, \quad \rho = R'.$$

L'expression de φ devient par la substitution des valeurs de C et C_1, tirées de ces équations

$$\varphi = \frac{5\delta}{3\rho^3}\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{\frac{5\delta R'^3}{3}\int_{R}^{R'} v\rho^2 d\rho + \frac{5}{4}\delta' R^3 R'^3 (P - P')}{R'^3 - R^3}\,\frac{1}{\rho^3}$$
$$+ \frac{\frac{4\delta}{3}\int_{R}^{R'} v\rho^2 d\rho + \delta' (PR^3 - P'R'^3)}{R'^3 - R^3},$$

l'accroissement d'un rayon quelconque sera égal à $\rho\varphi$.

Si dans cette expression on fait $v = 0$, $P = P'$, on aura l'accroissement d'une couche sphérique soumise à ses deux surfaces à des pressions égales; on trouve que les rayons extrêmes sont devenus

$$R(1 - \delta' P), \quad R'(1 - \delta' P);$$

ils ont donc diminué proportionnellement à la pression.

Si en laissant la température variable, on fait $P = P' = 0$, on aura la partie de la dilatation provenant de la chaleur seulement.

On trouve, en remarquant que $\int_{R}^{R'} v\rho^2 d\rho$ est la quantité totale de chaleur introduite, que l'accroissement de longueur des rayons extrêmes ne dépend que de cette quantité et nullement de sa distribution dans l'intérieur du corps.

Les deux cas que nous venons de traiter conduisent à des calculs bien simples; mais, en général, quand on veut résoudre les questions de cette théorie, qui semblent au premier abord les moins compliquées, la difficulté de l'intégration des équations augmente beaucoup; cependant on peut toujours les ramener à une suite d'équations de la forme

$$(a)\ \frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{dc^2}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mathrm{F}(a, b, c, t),$$

$$(b)\ \frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{dc^2}=\mathrm{F}(a, b, c).$$

On sait qu'il suffira d'intégrer complétement ces équations privées de la seconde partie de leur second membre, et d'ajouter cette intégrale à une solution particulière quelconque de l'équation complète. Ces solutions particulières se trouveront toujours, au pis aller, par la formule de Fourier, sous la forme d'une intégrale définie octuple pour la première et sextuple pour la seconde.

Considérons premièrement le cas de l'équilibre. Si l'on différentie la première équation (1) par rapport à a, la seconde par rapport à b, la troisième par rapport à c, on aura, en désignant $\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}$ par φ,

$$\frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{da^2}=\mathrm{F}(a, b, c),$$

$\mathrm{F}(a, b, c)$, dépendant des forces données, et, de l'état supposé connu à chaque instant de la chaleur dans l'intérieur du corps, les équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{2d\varphi}{da}=\mathrm{F}_1(a, b, c),$$

en sorte qu'on peut résoudre la question par une suite d'équations de la forme (b).

Quant au mouvement, on aura, en suivant la même marche,

$$m^2\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\varphi'(a,b,c,t)$$

$$\frac{m^2}{3}\left(\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}\right)+2m^2\,\frac{d\varphi}{da}=\varphi_1(a,b,c),\ldots(3)$$

Dans le cas particulier, où il n'y a pas de forces intérieures et où le corps a une température uniforme, on peut trouver les valeurs de x, y, z, au moyen d'intégrales doubles. En effet, $\varphi(a, b, c)$ est nul dans ce cas, ainsi que $\varphi_1(a, b, c)$, il suffira donc d'intégrer

$$(m)\ \frac{m^2}{3}\left(\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}\right)+\frac{2m^2}{3}\frac{d\varphi}{da}=\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$(n)\ m^2\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Pour y parvenir, M. Poisson pose

$$\varphi=\frac{d^2\varphi'}{dt^2},$$

ce qui ramène l'équation (n) à la forme

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=m^2\left(\frac{d^2\varphi'}{da^2}+\frac{d^2\varphi'}{db^2}+\frac{d^2\varphi'}{dc^2}\right)+Pt+Q,$$

P, Q étant des fonctions arbitraires de a, b, c. Posons

$$\varphi'=\psi+pt+q.$$

On pourra, en déterminant p et q convenablement, réduire l'équation à la forme

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=m^2\left(\frac{d^2\psi}{da^2}+\frac{d^2\psi}{db^2}+\frac{d^2\psi}{dc^2}\right);$$

maintenant, en posant

$$x = x' + m^2\frac{d\psi}{da},\quad y = y' + m^2\frac{d\psi}{db},\quad z = z' + m^2\frac{d\psi}{dc},$$

l'équation (m) se ramènera ainsi que les deux autres analogues relatives à y et à z, à la forme

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{m^2}{3}\left(\frac{d^2x'}{da^2} + \frac{d^2x'}{db^2} + \frac{d^2x'}{dc^2}\right);$$

on trouvera ainsi les valeurs complètes de x', y', z'; mais il ne faudra pas oublier qu'elles doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{dx'}{da} + \frac{dy'}{db} + \frac{dz'}{dc} = 0;$$

de cette manière, l'une des trois variables, z', par exemple, se déduira des deux autres, et en ajoutant aux valeurs de $m^2\frac{d\psi}{da}$, $m^2\frac{d\psi}{db}$, $m^2\frac{d\psi}{dc}$, on aura les valeurs de x, y, z. Mais ces solutions sont, en général, si compliquées, que leur utilité dans la plupart des cas est à peu près nulle.

Tous les calculs précédents supposent que l'on sache intégrer l'équation

$$m^2\left(\frac{d^2\varphi}{da^2} + \frac{d^2\varphi}{db^2} + \frac{d^2\varphi}{dc^2}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Cette équation qui se représente dans un grand nombre de problèmes physico-mathématiques a été intégrée par M. Poisson, son intégrale est

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin p\,\mathrm{F}(a+mt\cos p,\ b+mt\sin p\cos q,\ c+mt\sin p\sin q)\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin p\,\psi(a+mt\cos p,\ b+mt\sin p\cos q,\ c+mt\sin p\sin q)\,dp\,dq.$$

Pour y arriver, posons

$\varphi = \mathrm{A}e^{\alpha t + \beta a + \gamma b + \delta c}$; α, β, γ, δ, étant des constantes, Il faudra que

$$\alpha^2 = (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\, m^2.$$

On peut mettre φ sous la forme

$$\varphi = te^{\beta a + \gamma b + \delta c}\,\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{\alpha t} = te^{\beta a + \gamma b + \delta c}\int_{-1}^{+1} e^{\alpha P t}\,dP.$$

Remplaçant α par sa valeur, on aura, en vertu de la formule

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \mathrm{F}\left(\mu\sqrt{m^2\beta^2 + m^2\gamma^2 + m^2\delta^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\beta m \cos p + \gamma m \sin p \sin q + \delta m \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq:$$

$$\varphi = \frac{t}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{A} \sin p\, dp\, dq\, e^{\beta(a + mt\cos p) + \gamma(b + mt \sin p \sin q) + \delta(c + mt \sin p \sin q)}.$$

β, γ, δ étant des constantes complétement arbitraires, la somme d'un nombre infini de valeurs particulières de l'exponentielle représentera une fonction arbitraire des quantités qui sont multipliées par ces constantes, on aura donc

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin p\, dp\, dq\, \mathrm{F}(a + mt\cos p,\ b + mt \sin p \sin q,\ c + mt \sin p \sin q).$$

Or, d'après la forme de l'équation, si φ satisfait, $\frac{d\varphi}{dt}$ satisfera aussi; de là la seconde partie de la valeur écrite plus haut, qui est la solution générale, car elle renferme deux fonctions arbitraires distinctes.

Problème du mouvement de la chaleur.

L'équation de la propagation de la chaleur, lorsqu'on n'a pas égard au calorique développé par les contractions des différentes parties du corps, est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{C}.\mathrm{P}}\left(\frac{d^2v}{da^2} + \frac{d^2v}{db^2} + \frac{d^2v}{dc^2}\right).$$

Nous admettrons que la chaleur dégagée est proportionnelle à la contraction $\frac{dx}{da} + \frac{dy}{db} + \frac{dz}{dc}$; ce qui, vu la petitesse de ces contractions, n'entraînera pas d'erreurs supérieures aux termes que nous avons négligés jusqu'ici. Alors on trouve immédiatement que l'équation de la propagation doit prendre la forme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{C.D}}\left(\frac{d^2v}{da^2} + \frac{d^2v}{db^2} + \frac{d^2v}{dc^2}\right) - \frac{\frac{c}{c'} - 1}{3\delta'}\left(\frac{d^2x}{dadt} + \frac{d^2y}{dbdt} + \frac{d^2z}{dcdt}\right).$$

La propagation de la chaleur dépendra donc des déplacements x, y, z, des molécules, et comme les déplacements dépendent à chaque instant du mouvement de la chaleur, ces deux problèmes ne pourront pas être résolus complétement l'un sans l'autre, et leur solution commune dépendra de l'intégration de cette équation, jointe aux trois équations du mouvement écrites plus haut. Nous aurons ainsi quatre équations pour déterminer x, y, z et v; ce qui, joint aux équations particulières et aux conditions initiales, sera suffisant à la solution de la question.

Prenons pour application de ces formules la question de la propagation du son dans les corps solides.

Supposons un ébranlement primitif donné dans une petite étendue du corps, cet ébranlement se propagera avec une vitesse qu'il s'agit de déterminer, en ayant égard à la modification apportée par la chaleur dégagée par le changement de densité des points actuellement en vibration. Or, M. Poisson a démontré dans un mémoire sur ce sujet, qu'un ébranlement primitif donne lieu à deux systèmes d'ondes, et que dans un de ces systèmes seulement il y a changement de densité; c'est de ce cas que nous allons nous occuper.

Remarquons d'abord qu'on peut supposer $\mathrm{K} = 0$. En effet, il n'y a à influer que la chaleur dégagée au point même que l'on considère; car la vitesse de la propagation de la chaleur est négligeable par rapport à celle du son.

Alors les équations du problème seront

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{\frac{c}{c'}-1}{3\delta'}\left(\frac{d^2x}{dadt}+\frac{d^2y}{dbdt}+\frac{d^2z}{dcdt}\right),$$

ou

$$\nu = -\frac{\frac{c}{c'}-1}{3\delta'}\,\varphi,$$

ce qui, remis dans les équations du mouvement, les transforme en

$$-5\delta'\mathrm{D}\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4+5\frac{c}{c'}}{3}\,\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{1+5\frac{c}{c'}}{3}\left(\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{dadc}\right),$$

$$-5\delta'\mathrm{D}\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{4+5\frac{c}{c'}}{3}\,\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}+\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{1+5\frac{c}{c'}}{3}\left(\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2z}{dbdc}\right),$$

$$-5\delta'\mathrm{D}\,\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{4+5\frac{c}{c'}}{3}\,\frac{d^2z}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}+\frac{d^2z}{dc^2}+\frac{1+5\frac{c}{c'}}{3}\left(\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2x}{dadc}\right).$$

Ces équations différentiées, la première par rapport à a, la seconde par rapport à b, la troisième par rapport à c, et ajoutées ensuite donnent

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{4+5\frac{c}{c'}}{15\delta'\mathrm{D}}\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}+\frac{d^2\varphi}{db^2}+\frac{d^2\varphi}{dc^2}\right),\quad \frac{4+5\frac{c}{c'}}{15\delta'\mathrm{D}} = \mu;$$

par conséquent, φ devra avoir une valeur de la forme

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin u\,\mathrm{F}(a+\mu t\cos u,\ b+\mu t\sin u\sin\nu,\ c+\mu t\sin u\cos\nu)\,du\,d\nu$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin u\,\mathrm{F}_{,}(a+\mu t\cos u,\ b+\mu t\sin u\sin\nu,\ c+\mu t\sin u\cos\nu)\,du\,d\nu.$$

Il est facile de voir que ces fonctions F et $\mathrm{F}_{,}$ doivent être les valeurs initiales de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$; elles sont par conséquent, données, et si nous supposons l'ébranlement primitif d'une très petite étendue, ces fonctions seront toujours nulles, excepté pour des valeurs très resserrées des trois variables : φ le sera donc aussi pour tous les points pour lesquels on n'aura pas pour certaines valeurs de u et de v,

$$a+\mu t\cos u=x_{,},\quad b+\mu t\sin u\sin v=y_{,},\quad c+\mu t\sin u\cos v=z_{,}.$$

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ étant les coordonnées d'un point quelconque de cet espace primitivement ébranlé.

Ces équations nécessitent

$$(x_{,}-a)^2+(y_{,}-b)^2+(z_{,}-c)^2=\mu t^2:$$

μt est donc la distance à laquelle un point doit être de l'espace primitivement ébranlé pour être en vibration au bout du temps t, et μ, ou $\sqrt{\dfrac{4+5\frac{c}{c'}}{15\delta D}}$ est la vitesse de propagation correspondante aux ondes pour lesquelles il y a changement de densité.

Quant à l'autre système d'ondes, il faudrait intégrer les équations générales du mouvement, en supposant $v=0$, $\varphi=0$, ce qui les rendra isolément de la forme (A) : d'où l'on pourra déduire que la vitesse qui leur correspond est

$$\sqrt{\frac{1}{5\delta D}};$$

δ est toujours la dilatation correspondante à une tension normale égale à l'unité appliquée sur tous les points de la surface libre.

Cette formule a lieu dans tous les systèmes d'unités, car nous n'en avons spécifié aucun : et, en effet, on peut vérifier qu'elle est homogène par rapport à toutes les unités. Du reste, on pourra toujours passer d'un système à un autre au moyen du tableau suivant.

	LONGUEUR.	TEMPS.	FORCE.	TEMPÉRATURE.
Exposant de dimension de				
a	1	0	0	0
X	0	0	1	0
t	0	1	0	0
v	0	0	0	1
k	-1	-1	0	-1
c'	$+1$		0	-1
c	$+1$	0	0	-1
δ	$+2$	0	-1	0
δ'	0	0	0	-1
D	-4	-2	1	0
Unité de vitesse.........	-1	$+1$	0	0
Unité de masse..........	$+1$	$+2$	-1	0
Vitesse pour une même rapidité................	$+1$	-1	0	0
Masse pour un même corps.	-1	-2	$+1$	0

J'entends par exposant de dimension, la puissance de m par laquelle le nombre qui exprime une de ces quantités est multiplié quand on change d'unité pour en prendre une m fois plus petite.

On peut voir, d'après le tableau, que la formule qui donne $\sqrt{\frac{1}{5\delta D}}$ pour une vitesse est homogène par rapport à toutes les unités. Par exemple, par rapport à l'unité de longueur, une vitesse est de dimension 1, δD, de dimension -2, et $\sqrt{\frac{1}{5\delta D}}$ de dimension 1.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,

8 Novembre 1838,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

l'Inspecteur général des études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.