H. F. u. y. 100.

N° D'ORDRE
369.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR H. LÉAUTÉ

Ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des manufactures de l'État.

1re THÈSE. — ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET A TROIS VARIABLES.

2e THÈSE. — DU FROTTEMENT DE PIVOTEMENT.

Soutenues le 15 Février 1876, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
O. BONNET, HERMITE, *Examinateurs.*

TOULOUSE
LOUIS ET JEAN-MATTHIEU DOULADOURE
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
39 — Rue Saint-Rome — 39

1876

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

DOYEN. . . . . MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.

PROFESSEURS HONORAIRES
- DUMAS.
- BALARD.
- PASTEUR.

PROFESSEURS
- DELAFOSSE. . . . . Minéralogie.
- CHASLES. . . . . Géométrie supérieure.
- LE VERRIER. . . . . Astronomie.
- P. DESAINS. . . . . Physique.
- LIOUVILLE. . . . . Mécanique rationnelle.
- PUISEUX. . . . . Astronomie.
- HÉBERT. . . . . Géologie.
- DUCHARTRE. . . . . Botanique.
- JAMIN. . . . . Physique.
- SERRET. . . . . Calcul différentiel et intégral.
- H. Ste-CLAIRE DEVILLE. . Chimie.
- DE LACAZE DUTHIERS. . . Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
- BERT. . . . . Physiologie.
- HERMITE. . . . . Algèbre supérieure.
- BRIOT. . . . . Calcul des probabilités, Physique mathématique.
- BOUQUET. . . . . Mécanique et Physique expérimentale.
- TROOST. . . . . Chimie.
- WURTZ. . . . . Chimie organique.

AGRÉGÉS
- BERTRAND. . . . . } Sciences mathématiques.
- J. VIEILLE. . . . . }
- PÉLIGOT. . . . . Sciences physiques.

SECRÉTAIRE. . . . . PHILIPPON.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A M. CAHOURS

MEMBRE DE L'INSTITUT

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TÉMOIGNAGE D'AFFECTION, DE RECONNAISSANCE ET DE PROFOND RESPECT.

H. LÉAUTÉ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DU PROBLÈME DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET A TROIS VARIABLES.

L'étude des équations différentielles partielles du premier ordre a été, depuis un siècle, le but de nombreux travaux; la théorie de ces équations forme aujourd'hui une des parties les mieux connues et les plus approfondies du calcul intégral. Aussi, depuis 1772, époque à laquelle Lagrange publiait son premier mémoire sur ce sujet, plusieurs méthodes d'intégration ont-elles été successivement indiquées.

Presque toutes ces méthodes, celles de Lagrange (1) (1772-1806), de Pfaff (2) (1814-1815), d'Ampère (3) (1815), de

(1) Lagrange. — *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1772-1774-1779-1785; Théorie des fonctions analytiques, nº 101; Calcul des fonctions, leçon XX.

(2) Pfaff. — *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1814.

(3) Ampère. — *Journal de l'Ecole polytechnique*, 17e cahier, p. 549.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cauchy (1) (1819), de Jacobi (2) (1837), sont analytiques et s'appliquent à un nombre quelconque de variables. Nous ne les rappelons ici que pour mémoire, car elles ne se rattachent en rien à notre sujet.

Le but de ce travail est l'étude géométrique du problème de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre et à trois variables. Cette étude a déjà été faite par l'un des plus grands géomètres qu'ait eus la France, par Monge ; mais sa méthode, juste quant aux résultats, donne lieu sur certains points aux plus sérieuses objections. La première partie de notre travail aura pour but de signaler ces objections et de les résoudre.

Dans la seconde partie, nous donnerons, à l'aide de considérations géométriques, deux nouveaux procédés d'intégration, c'est-à-dire deux manières d'obtenir le système des quatre équations différentielles ordinaires simultanées, à l'intégration duquel on ramène celle des équations différentielles partielles du premier ordre. On sait que dans la méthode de Cauchy, à côté de ces quatre équations qui suffisent pour fournir une solution ayant précisément le degré de généralité de la solution générale, vient s'en placer une cinquième qui se trouve être ainsi surabondante. Cauchy a voulu démontrer directement que cette équation surabondante était toujours satisfaite d'elle-même ; mais sa méthode donne prise à une objection fondamentale ainsi que l'a fait remarquer M. Bertrand (3). Le premier de nos deux procédés d'intégration aura l'avantage de nous conduire à la formule même de Cauchy, formule dont la discussion fera l'objet de notre troisième partie.

L'objection de M. Bertrand, dont nous venons de parler, fut

(1) Cauchy. — *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, tome II, p. 239.

(2) *Journal de Crelle*, tome XVII; *Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, année 1838.

(3) Bertrand. — *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome XLV, p. 617 ; *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome V, p. 156.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faite par lui, en 1856, dans ses leçons au Collége de France ; dès l'année suivante, M. O. Bonnet donnait une démonstration du théorème de Cauchy, démonstration qui était à l'abri de l'objection signalée (1). Le second de nos procédés, analogue à celui de M. O. Bonnet, sera exclusivement géométrique et, comme lui, à l'abri de l'objection de M. Bertrand ; il nous permettra de discuter complétement les cas particuliers auxquels s'applique cette objection.

Ces cas particuliers, dans lesquels les démonstrations de Cauchy et de Jacobi tombent en défaut, ont été l'objet d'un important mémoire analytique de M. Serret (2). Dans ce travail, publié en 1861, cet éminent géomètre donnait une expression remarquable de l'intégrale sur laquelle porte la discussion. Cette expression lui permettait d'examiner les circonstances dans lesquelles l'intégrale en question cessant d'avoir une valeur finie et déterminée, la démonstration de Cauchy tombait en défaut, et lui montrait que dans le cas particulier qu'il étudiait, l'intégrale complète représentait la solution. Notre second procédé d'intégration nous permettra d'établir la formule de M. Serret d'une manière nouvelle et nous conduira, grâce à la marche géométrique que nous aurons employée, à reconnaître qu'à côté du cas étudié par ce géomètre, viennent s'en placer d'autres qui peuvent donner lieu à la même difficulté. Nous arriverons ainsi, et c'est là l'intérêt que peut offrir ce travail, à faire l'étude complète de tous les cas où la méthode de Cauchy tombe en défaut, à reconnaître que le problème peut devenir indéterminé et à voir les circonstances où il le devient, à démontrer enfin que les différents cas particuliers qui se peuvent présenter, tiennent non-seulement à la nature particulière de la courbe par laquelle la surface intégrale est assujettie à passer, mais encore au choix des axes coordonnés.

(1) O. Bonnet. — *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences,* tome XLV, p. 581.
(2) Serret. — *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome LIII, p. 598 et 734.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE PARTIE.

C'est dans l'addition à son immortel ouvrage sur l'application de l'analyse à la géométrie, que Monge (1) traite l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre et à trois variables. La méthode qu'il emploie peut se résumer comme il suit :

Soit une équation

$$f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0$$

dans laquelle α est un paramètre variable ; lorsque α varie, la surface représentée par cette équation varie de forme et de position et la surface-enveloppe touche chaque surface enveloppée mobile suivant une courbe appelée caractéristique.

Les équations de cette caractéristique sont :

$$f = 0 \qquad \frac{df}{d\alpha} = 0$$

et il suffit d'éliminer α entre ces deux équations pour obtenir l'équation de l'enveloppe. Si la forme de la fonction φ est donnée, et par suite celle de sa dérivée $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, l'élimination de α pourra toujours se faire et l'équation de l'enveloppe pourra toujours être obtenue. Mais cette équation contiendra des traces des fonctions φ et $\frac{d\varphi}{d\alpha}$. Si donc on veut que cette équation convienne à toutes les enveloppes, il faut considérer la fonction φ

(1) Monge. — *Application de l'analyse à la géométrie*, 5e édition, revue par M. Liouville, p. 421.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comme arbitraire. Alors l'élimination de α et de φ entre les deux équations n'est plus possible ; on ne peut trouver une équation en termes finis qui satisfasse à toutes les enveloppes et l'on ne peut obtenir qu'une équation différentielle.

Considérons, en effet, les deux équations de l'enveloppe ; la seconde exprime que la différentielle de la première prise par rapport à α est nulle, on a donc

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=o$$

et comme dx et dy sont indépendants, ceci ne peut avoir lieu que si

$$\frac{df}{dx}=o \qquad \frac{df}{dy}=o$$

La première de ces équations est en $p, x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)$; la seconde est en $q, x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)$; si l'on élimine α et $\varphi(\alpha)$ entre ces deux équations et l'équation $f=o$, on obtiendra une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q)=o$$

qui conviendra à toutes les enveloppes.

Après avoir ainsi démontré qu'une surface mobile

$$f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)]=o$$

étant donnée, on peut en déduire une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui convienne à toutes les enveloppes, Monge admet que réciproquement toute équation différentielle partielle du premier ordre est telle que son intégrale peut être considérée comme une enveloppe. Cette réciproque est loin d'être évidente et cependant c'est sur elle que Monge appuie toute sa méthode, puisqu'il ramène la recherche des surfaces intégrales à celle des caractéristiques ; nous revien-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

drons plus tard sur cette objection, mais, tout d'abord, nous allons continuer l'exposition de la méthode elle-même.

Monge considère la suite des caractéristiques situées sur une enveloppe et fait rouler un plan sur ces caractéristiques de manière à engendrer une développable dont les génératrices sont les tangentes à ces courbes. La courbe de contact est ce qu'il nomme la trajectoire. Il remarque ensuite que la développable circonscrite le long de la caractéristique a pour génératrices les tangentes à la trajectoire, ce qui est la propriété, bien connue aujourd'hui, des tangentes conjuguées ; enfin, ceci étant posé, il aborde la recherche des équations de la caractéristique par un procédé que nous allons exposer et discuter.

Soit, dit-il, l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = o \tag{1}$$

si on la différentie aux différences ordinaires, on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq = o$$

dans laquelle X, Y, Z, P, Q, sont connus en x, y, z, p, q; et comme on a toujours

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

l'équation précédente peut s'écrire :

$$(X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy + P\,dp + Q\,dq = o \tag{2}$$

Cela posé, Monge ajoute : « Si l'on considère le plan tangent qui s'appuie sur deux caractéristiques consécutives et qu'on veuille passer sur l'enveloppe du premier point de contact au second, c'est-à-dire parcourir l'élément de la trajectoire, il faut supposer p et q constants puisque les deux points étant sur le même plan tangent, p et q ne changent pas dans le passage ; il faut donc faire dans (2) $dp = o, dq = o$, ce qui donne :

$$(X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy = o \tag{3}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équation qui représente la projection de la trajectoire sur le plan XOY. »

Le raisonnement que nous venons d'exposer n'est pas rigoureux. En effet, lorsqu'on passe du point de la première caractéristique au point de la seconde, on ne se meut pas sur le plan tangent au point pris sur la première, par suite p et q ne sont pas constants. Tout au contraire, dp et dq sont du premier ordre, et l'on ne peut, par suite, dans l'équation (2) négliger les deux termes en dp et dq devant les deux termes en dx et dy qui sont du même ordre. Nous allons essayer, tout en conservant la méthode même de Monge, de substituer au raisonnement qui précède un raisonnement plus satisfaisant comme rigueur.

Reprenons pour cela l'équation (2) et considérons deux courbes (A) et (B) d'intersections successives des enveloppées. Par la tangente AT au point quelconque A de (A) menons un plan qui touche (B) au point B et désignons par BT_1 la tangente en B à (B). Soient aussi, p et q les coefficients angulaires du plan tangent en A à l'une des enveloppées passant par (A), $p+p_1$ et $q+q_1$, $p+p_2$, et $q+q_2$, les coefficients angulaires des plans tangents en B aux deux enveloppées qui déterminent (B); p et q, $p+p_1$ et $q+q_1$, $p+p_2$ et $q+q_2$, doivent satisfaire à l'équation (2) puisque cette équation convient à la fois à l'enveloppe et aux enveloppées, on a donc :

$$(\alpha) \qquad Pp_1+Qq_1+(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy=o$$

$$(\beta) \qquad Pp_2+Qq_2+(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy=o$$

Nous devons maintenant exprimer que AB est l'élément de la trajectoire, c'est-à-dire que les tangentes AT et BT_1 sont dans un même plan; pour cela, il nous suffira d'écrire que BT_1 fait un angle infiniment petit du deuxième ordre avec le plan p, q. Si

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donc on désigne par α et β les coefficients angulaires de la tangente BT_1, la quantité

$$\alpha p+\beta q-1 \tag{a}$$

doit être infiniment petite du deuxième ordre.

Mais la droite BT_1 est dans le plan tangent en B dont les coefficients angulaires sont $p+p_1$ et $q+q_1$, on a donc :

$$\alpha(p+p_1)+\beta(q+q_1)-1=o$$

et, par suite, en tenant compte de la relation (a)

$$\alpha p_1+\beta q_1=o \quad \text{ou} \quad p_1=-\frac{\beta}{\alpha}q_1$$

On aura de même :

$$\alpha p_2+\beta q_2+o \quad \text{ou } p_2=-\frac{\beta}{\alpha}q_2$$

Si donc on porte ces valeurs de p_1 et p_2 dans les équations (α) et (β), on a, en négligeant les infiniments petits du deuxième ordre

$$\frac{Q\alpha-P\beta}{\alpha}p_1+(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy=o$$

$$\frac{Q\alpha-P\beta}{\alpha}p_2+(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy=o$$

ce qui n'est possible, puisque p_1 et p_2 sont différents, que si

$$(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy=o$$

$$Q\alpha-P\beta=o \tag{\gamma}$$

La première équation donne la direction de la projection de l'élément de la trajectoire sur le plan des xy; la deuxième donne le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ c'est-à-dire le coefficient angulaire de la projection de la caractéristique qui se trouve ainsi déterminée par

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Enfin, si dans l'équation (2) on tient compte de l'équation (γ), on a :

$$P\,dp+Q\,dq=o$$

équation d'une surface développable circonscrite à l'enveloppe suivant la trajectoire. Nous avons donc ainsi d'un seul coup toutes les équations dont se sert Monge.

Après avoir établi, comme nous l'avons dit précédemment, les équations de la caractéristique, Monge, dans la seconde partie de son mémoire, se propose de les intégrer. Il divise le problème en deux cas : 1° l'équation est linéaire en p et q ; 2° l'équation n'est pas linéaire.

Dans le cas où l'équation est linéaire

$$(1) \qquad Pp+Qq=L$$

les quatre équations de la caractéristique sont :

$$(2) \qquad P\,dp+Q\,dq+(X+pZ)\,dx+(Y+qZ)\,dy=o$$

$$(3) \qquad (X+pZ)\,dq-(Y+qZ)\,dp=o$$

$$(4) \qquad \frac{dx}{P}=\frac{dz}{L}$$

$$(5) \qquad \frac{dy}{Q}=\frac{dz}{L}$$

Monge fait remarquer que, en désignant par $M=\alpha$ et $N=\beta$ les intégrales des deux équations (4) et (5), ces deux intégrales peuvent représenter toute caractéristique pour un système convenable de valeurs de α et de β. Ceci est incontestable. Mais lorsque Monge, posant $\beta=\varphi(\alpha)$, affirme qu'il suffit d'éliminer α entre $M=\alpha$ et $N=\varphi(\alpha)$ pour avoir une enveloppe $M=\varphi(N)$, il affirme une chose qui n'est pas évidente, qui ne serait pas vraie dans le cas général et qui n'est réalisée que dans le cas particulier que l'on étudie. Il peut être intéressant de montrer pourquoi.

La difficulté est celle-ci : en général, on ne peut obtenir des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

enveloppes que comme intersections successives des enveloppées ; pourquoi, dans le cas de l'équation linéaire, peut-on obtenir ces enveloppes en faisant mouvoir la caractéristique d'une façon quelconque ?

En voici la raison : Si dans les équations $M=\alpha, N=\beta$, de la caractéristique, nous donnons à α et β deux valeurs numériques quelconques, c'est-à-dire si nous considérons une des caractéristiques que définissent les équations (4) et (5) ; si ensuite nous prenons un point x, y, z, de cette caractéristique et que nous nous donnions un système de valeurs de p et de q vérifiant (1) pour ce point là, nous n'aurons qu'à porter ces valeurs dans (3) pour obtenir l'équation de la développable circonscrite le long de la caractéristique. Or, si p et q varient, la caractéristique ne varie pas, puisque les deux équations (4) et (5) ne dépendent pas de p et de q, tandis que la développable circonscrite varie. Il y a donc, dans le cas particulier qui nous occupe, une infinité de développables circonscrites le long d'une même caractéristique, c'est-à-dire que le mouvement de la caractéristique n'est pas déterminé.

On voit bien ainsi que l'on ne peut être sûr d'obtenir une enveloppe en faisant mouvoir la caractéristique d'une manière quelconque, que dans le cas où les équations différentielles

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq}$$

sont indépendantes de p et de q, c'est-à-dire dans le cas où $P, Q, Pp+Qq$, sont des fonctions de x, y, z, seuls.

La méthode que Monge emploie pour l'intégration de l'équation linéaire ne peut donc plus s'appliquer dans le cas général. « En effet, dit-il, la surface ne peut plus alors être considérée comme engendrée par une courbe, elle doit être regardée comme une enveloppe ; il faut donc employer l'équation d'une envelop-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pée. » Aussi ajoute-t-il alors aux équations des projections de la caractéristique l'équation

$$(X+pZ)dq-(Y+qZ)dp=o$$

qui est celle de la développable circonscrite suivant la caractéristique.

Cela fait, il établit en termes finis l'équation de cette développable et obtient ainsi une intégrale de la forme

$$f[x,y,z,\alpha,\varphi(\alpha)]=o$$

α étant une constante arbitraire et φ une fonction arbitraire.

Mais la surface ainsi obtenue est une enveloppée de la surface cherchée ; si donc, on la rend mobile par la variation du paramètre α, le lieu de ses intersections successives sera l'intégrale cherchée, intégrale qui, par suite, sera obtenue en éliminant α entre les deux équations

$$f[x,y,z,\alpha,\varphi(\alpha)]=o \qquad \frac{df}{d\alpha}=o$$

Tel est le procédé de Monge ; nous avons vu à quelles objections il donnait lieu et nous avons cherché à les résoudre ; l'ensemble de la méthode est donc maintenant démontré si l'on admet, à priori, que l'intégrale de toute équation différentielle partielle du premier ordre et à trois variables peut être considérée comme une enveloppe. Or, c'est là un fait qui, pour être vrai, n'est pas évident, et cette non-évidence du principe même sur lequel repose toute la méthode est certes l'objection la plus sérieuse que l'on puisse faire. Aussi nous paraît-il intéressant à ce point de vue, indépendamment des autres résultats que nous pourrons obtenir, d'indiquer des méthodes, géométriques comme celle de Monge, mais n'ayant pas, comme elle, l'inconvénient de supposer à priori, sans démonstration, une propriété non évidente à la surface intégrale. C'est ce que nous allons faire dans la seconde partie de ce travail.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME PARTIE.

Soit l'équation

$$F(x,y,z,p,q)=o \tag{1}$$

qu'il s'agit d'intégrer ; le problème consiste à trouver une surface telle qu'en chacun de ses points les coefficients angulaires p et q de son plan tangent satisfassent à l'équation (1).

Prenons un point quelconque de l'espace x,y,z, portons ses coordonnées dans l'équation (1) et choisissons un système de valeurs de p et q satisfaisant à cette équation, ou si l'on veut, par le point considéré prenons un des plans auxquels la surface cherchée doit être tangente.

Parmi toutes les surfaces tangentes à ce plan au point x,y,z, nous allons chercher s'il en est qui satisfassent à l'équation (1) pour tous les points infiniment voisins du point donné.

Pour cela, remarquons que pour toutes les surfaces tangentes en x,y,z, au plan p,q, on a :

$$dz=p\,dx+q\,dy \tag{2}$$

et que pour celles que nous cherchons, on devra avoir

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+P\,dp+Q\,dq=o \tag{3}$$

équation qui peut s'écrire, en tenant compte de l'équation (2),

$$(X+pZ)\,dx+(Y+qZ)\,dy+P\,dp+Q\,dq=o \tag{4}$$

Et comme on a toujours

$$dp=r\,dx+s\,dy$$

$$dq=s\,dx+t\,dy$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'équation (4) peut encore s'écrire

$$(5) \quad (X+pZ+Pr+Qs)dx+(Y+qZ+Ps+Qt)dy=o$$

Ainsi donc, l'équation (5) représente la condition pour que l'équation (1) étant satisfaite au point x,y,z, le soit aussi au point $x+dx,y+dy,z+dz$; par suite, si nous voulons que cette équation (1) soit satisfaite quels que soient dx et dy, il faut poser

$$(6) \qquad X+pZ+Pr+Qs=o$$

$$(7) \qquad Y+qZ+Ps+Qt=o$$

ou si l'on veut

$$(8) \qquad r=-\frac{Q}{P}s-\frac{X+pZ}{P}$$

$$(9) \qquad t=-\frac{P}{Q}s-\frac{Y+qZ}{Q}$$

ce qui prouve que, pour toutes les surfaces cherchées, la condition de satisfaire à l'équation (1), non-seulement au point choisi, mais encore en tous les points infiniment voisins, équivaut à dire que r et t sont des fonctions de s déterminées par les équations (8) et (9).

De là résulte que pour toutes les surfaces cherchées, s reste complétement arbitraire et que, par suite, il y a une infinité de surfaces passant par un point et tangentes en ce point à un des plans déterminés par l'équation (1) qui satisfont à la question dans le voisinage du point choisi.

Ceci posé, cherchons la signification géométrique de la condition qui précède. Pour cela, remarquons que si dans l'expression

$$(10) \qquad d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on porte les valeurs de r et t tirées des équations (8) et (9), il vient :

$$(11)\quad d^2z=-\frac{X+pZ}{P}dx^2-\frac{Y+qZ}{Q}dy^2+s\left[2dxdy-\frac{Q}{P}dx^2-\frac{P}{Q}dy^2\right]$$

ou encore

$$(12)\quad d^2z=-\frac{X+pZ}{P}dx^2-\frac{Y+qZ}{Q}dy^2-s\left[\sqrt{\frac{Q}{P}}dx-\sqrt{\frac{P}{Q}}dy\right]^2$$

On voit alors que si l'on se meut sur toutes les surfaces en question suivant la direction définie par

$$\sqrt{\frac{Q}{P}}dx-\sqrt{\frac{P}{Q}}dy=o$$

ou par

$$(13)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}$$

toutes ces surfaces ont le même d^2z puisqu'elles ne diffèrent que par la valeur de s et que, pour ces directions, d^2z est indépendant de s; or, elles sont tangentes entre elles et, par suite, ont suivant la direction considérée un contact du deuxième ordre.

Ainsi donc, si l'on considère un point quelconque de l'espace et l'un des plans passant par ce point qui satisfont à l'équation $F(x,y,z,p,q)=o$, il y a une infinité de surfaces passant par ce point et tangentes à ce plan qui satisfont à cette équation pour tous les points infiniment voisins du point choisi; de plus, toutes ces surfaces sont osculatrices entre elles suivant la direction $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$.

Voyons maintenant comment varie le plan tangent lorsqu'on se meut suivant cette direction. Pour cela, portons dans dp et dq

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les valeurs de dx et de dy tirées des équations (13), ce qui donne :

$$dp=\frac{\mathrm{P}r+\mathrm{Q}s}{\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q}dz$$

$$dq=\frac{\mathrm{P}s+\mathrm{Q}t}{\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q}dz$$

Nous exprimerons ainsi que l'on se meut suivant la direction voulue ; il faut exprimer de plus que le chemin suivi est situé sur l'une des surfaces qui satisfont à (1) pour tous leurs points infiniment voisins de x, y, z, et pour cela, il faut tenir compte des équations (6) et (7), c'est-à-dire il faut poser

$$\mathrm{P}r+\mathrm{Q}s=-(\mathrm{X}+p\mathrm{Z})$$

$$\mathrm{P}s+\mathrm{Q}t=-(\mathrm{Y}+q\mathrm{Z})$$

Si donc nous portons ces valeurs dans dp et dq, nous aurons :

$$\frac{dp}{\mathrm{X}+p\mathrm{Z}}=\frac{dq}{\mathrm{Y}+q\mathrm{Z}}=-\frac{dz}{\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{dx}{\mathrm{P}}=\frac{dy}{\mathrm{Q}}=\frac{dz}{\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q}=-\frac{dp}{\mathrm{X}+p\mathrm{Z}}=-\frac{dq}{\mathrm{Y}+q\mathrm{Z}}$$

et ces quatre équations sont précisément celles que donne Monge pour la caractéristique.

D'après ce qui précède, on voit que les quantités dp et dq que nous nous proposions de calculer, étant données par les formules

$$dp=-\frac{\mathrm{X}+p\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}dx$$

$$dq=-\frac{\mathrm{Y}+q\mathrm{Z}}{\mathrm{Q}}dy$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

seront les mêmes pour toutes les surfaces en question, puisque pour toutes ces surfaces x, y, z, p, q, dx et dy sont les mêmes. De là résulte que toutes ces surfaces, qui ont aux infiniments petits du second ordre près, un élément de courbe en commun, ont aussi même plan tangent tout le long de cet élément, ou, si l'on veut, que toutes ces surfaces ont en commun l'élément de développable circonscrite le long de cet élément de courbe (1).

On voit aussi que, réciproquement, toutes les surfaces qui ont en commun l'élément de courbe en question et les deux plans tangents aux points extrêmes définis comme il a été dit précédemment, satisfont à l'équation proposée en tous leurs points voisins de cet élément.

De ce qui précède, on peut conclure que si l'on considère sur l'élément de courbe commun, un point infiniment voisin du point initial, il est possible de construire, à partir de ce second point, un second élément de courbe et un troisième plan tangent tels que toutes les surfaces ayant aux trois points considérés les trois plans tangents déterminés, satisfassent à l'équation (1) dans toute la zône voisine des deux éléments en question. En continuant ainsi de proche en proche, on voit que l'on construit une

(1) Ce résultat pouvait être obtenu d'une autre manière par la considération des indicatrices. Reprenons pour cela l'équation

$$d^2z = -\frac{X+pZ}{P}dx^2 - \frac{Y+qZ}{Q}dy^2 - s\left[\sqrt{\frac{Q}{P}}dx - \sqrt{\frac{P}{Q}}dy\right]^2$$

cette équation, si l'on y suppose d^2z constant et si l'on donne à s toutes les valeurs imaginables, représente toutes les indicatrices, au point initial x, y, z, de toutes les surfaces cherchées ; on voit, d'après la forme même de l'équation, que toutes ces indicatrices sont bi-tangentes en leurs points de rencontre avec la direction définie par

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

En ces points de rencontre toutes ces surfaces auront donc même plan tangent puisqu'elles ont en commun : 1° la tangente à l'élément de courbe qu'elles contiennent toutes ; 2° la tangente commune à toutes les indicatrices.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

courbe qui n'est autre que la caractéristique de Monge et une développable passant par cette courbe ; on voit aussi que toutes les surfaces qui passent par cette caractéristique et qui sont tangentes tout le long de cette courbe à la développable, satisfont à l'équation (1) en tous les points de la zône qui longe la caractéristique considérée.

De l'étude que nous venons de faire il résulte que lorsque l'on se donne un point quelconque de l'espace et l'un des plans, en nombre infini, passant par ce point et satisfaisant à l'équation $F(x,y,z,p,q)=o$, une caractéristique passant par le point et tangente au plan est ainsi définie. Par un point quelconque de l'espace, il passe donc une infinité de caractéristiques et toutes ces caractéristiques sont, au point donné, sur le cône enveloppe des plans que représente l'équation $F(x,y,z,p,q)=o$ quand on y remplace x,y,z, par les coordonnées du point arbitrairement choisi.

Maintenant que nous avons étudié la caractéristique et ses propriétés, il nous faut voir, pour arriver à l'intégration cherchée, s'il est possible d'engendrer une zône infiniment petite de surface intégrale par un déplacement de la caractéristique ; or, nous avons vu, que toutes les surfaces qui satisfont à l'équation $F(x,y,z,p,q)=o$ pour tous les points de la caractéristique, y satisfont aussi pour tous les points d'une certaine zône, située tout le long de cette courbe, sur la développable formée par ses plans tangents ; si donc, sur cette développable, on pouvait trouver une deuxième caractéristique infiniment voisine de la première, on pourrait à partir de celle-là déterminer une nouvelle zône de surface intégrale et, de proche en proche, construire une pareille surface.

Le problème de l'intégration est donc ramené au problème suivant :

Est-il possible, étant donnée une caractéristique, de trouver une caractéristique infiniment voisine qui soit sur la développable formée par les plans tangents à la première ?

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour résoudre cette question, considérons une caractéristique et ses plans tangents ; il est clair que pour qu'une deuxième caractéristique infiniment voisine de la première soit sur la développable des plans tangents, il faut et il suffit qu'en prenant un point quelconque de la première et un point infiniment voisin de celui-là sur la seconde, la distance de ce second point au plan tangent au premier soit du second ordre, quel que soit le premier point choisi sur toute l'étendue de la première caractéristique.

Evaluons donc cette distance pour un point quelconque, et voyons la condition pour qu'elle reste du second ordre, lorsque le point choisi parcourt toute la caractéristique.

Soient x, y, z, les valeurs des coordonnées du point arbitraire de la première caractéristique, p, q, les valeurs choisies en ce point ; soient $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, p+\delta p, q+\delta q$, les valeurs de ces quantités quand on passe à un second point infiniment voisin du premier sur la deuxième caractéristique (1).

Au lieu de prendre la distance du second point $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$, au plan tangent au premier, nous pouvons prendre la différence entre l'ordonnée du second point et l'ordonnée du point du plan tangent qui a même projection sur le plan XOY, car la distance cherchée et cette différence sont évidemment du même ordre, pourvu toutefois que le plan tangent ne soit pas parallèle à l'axe des z.

Cette différence est :

$$\mathrm{I} = \delta z - p\delta x - q\delta y$$

et nous voulons trouver la condition pour que I soit constamment nul, aux infiniments petits du second ordre près, tout le long de la première caractéristique.

(1) Dans tout ce qui va suivre nous désignerons par le signe d les variations qui se rapportent à un déplacement le long d'une même caractéristique, et par le signe δ les variations qui se produisent lorsqu'on passe d'un point d'une caractéristique à un point infiniment voisin de la caractéristique infiniment voisine.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or x, y, z, p, q, satisfont à l'équation

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = o$$

pour chacune des deux caractéristiques et l'on a, par suite,

$$(A) \qquad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + P\delta p + Q\delta q = o$$

Ceci posé, si l'on passe du point x, y, z, p, q, de la première caractéristique à un point infiniment voisin $x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq$, de cette même caractéristique, I variera et on aura :

$$dI = d\delta z - dp.\delta x - dq.\delta y - p\, d\delta x - q.d\delta y$$

Cherchons d'abord à calculer $d\delta x, d\delta y, d\delta z$. Pour cela, posons les équations de la première caractéristique qui peuvent être mises sous la forme

$$dx = P\,d\alpha \qquad dy = Q\,d\alpha \qquad dz = (Pp + Qq)\,d\alpha$$

$$dp = -(X + pZ)\,d\alpha \qquad dq = -(Y + qZ)\,d\alpha.$$

Ces équations appartenant à toute caractéristique appartiendront en particulier à la caractéristique infiniment voisine et l'on aura :

$$d\delta x = \delta P.\,d\alpha + P.\,d\delta\alpha$$

$$d\delta y = \delta Q.\,d\alpha + Q.\,d\delta\alpha.$$

$$d\delta z = \delta(Pp + Qq).\,d\alpha + (Pp + Qq).\,d\delta\alpha.$$

et si l'on porte ces valeurs dans dI, on a toutes réductions faites,

$$dI = d\alpha\left[P.\delta p + Q.\delta q - \frac{dp}{d\alpha}\delta x - \frac{dq}{d\alpha}\delta y\right]$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équation qui devient, si l'on remplace $\frac{dp}{d\alpha}$ et $\frac{dq}{d\alpha}$ pour leurs valeurs tirées des équations de la première caractéristique :

$$dI = d\alpha\left[P\delta p + Q\delta q + (X + pZ)\delta x + (Y + qZ)\delta y\right]$$

ou en tenant compte de l'équation (A) :

$$dI = Z(p\delta x + q\delta y - \delta z)d\alpha$$

c'est-à-dire

$$\frac{dI}{I} = -Z d\alpha$$

ou enfin

$$\text{(B)} \qquad I = I_0 e^{\int -Z d\alpha} = I_0 e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$$

ce qui est la formule donnée par Cauchy.

On voit alors que si la quantité $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ n'est pas infinie, I sera constamment nul tout le long de la caractéristique s'il l'est en un point. Ainsi donc, en laissant de côté le cas de $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ infini sur lequel nous reviendrons plus loin, la condition nécessaire et suffisante pour que, une première caractéristique étant donnée, une seconde caractéristique infiniment voisine soit sur la développable formée par les plans tangents à la première, c'est que, pour un point particulier, le plan tangent à la première contienne un point infiniment voisin appartenant à la seconde.

Nous sommes ainsi ramenés à l'idée de Monge qui menait par un point quelconque de la première caractéristique un plan touchant la seconde, et qui, en faisant rouler ce plan sur les deux caractéristiques, engendrait la développable circonscrite à la sur-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

face intégrale le long de la première courbe ; mais nous voyons que pour que la démonstration de Monge soit rigoureuse, il faut que si l'on considère le plan qui roule sur les deux caractéristiques, il satisfasse dans une de ses positions à $F(x,y,z,p,q)=o$ et alors il y satisfera dans toutes.

En résumé, nous avons démontré jusqu'ici, que si l'on se donnait un point quelconque de l'espace et un plan passant par ce point et satisfaisant à $F(x,y,z,p,q)=o$, il y avait une caractéristique et une seule, tangente en ce point au plan choisi, et que cette caractéristique était déterminée en tous ses points et en tous ses plans tangents ; nous avons reconnu aussi que toutes les surfaces intégrales passant par le point donné et tangentes en ce point au plan choisi, avaient en commun toute la caractéristique en question et toute la zône, voisine de cette courbe, de la développable formée par tous les plans tangents à cette caractéristique ; nous avons vu enfin à quelle condition, une première zône de surface intégrale étant déterminée par une première caractéristique, nous pouvions trouver sur cette zône une seconde caractéristique qui nous permît de trouver une seconde zône et ainsi de suite.

De là résulte qu'une courbe quelconque de l'espace étant donnée, on peut trouver une surface intégrale passant par cette courbe.

En effet, prenons deux points M et M′ infiniment voisins sur cette courbe ; par ces deux points menons un plan satisfaisant à l'équation $F(x,y,z,p,q)=o$ et, cela fait, considérons la caractéristique passant par le premier point et tangente en ce point au plan que l'on vient de déterminer ; cette caractéristique nous fournit toute une zône de la surface intégrale, zône qui, étant formée par tous les plans tangents à la caractéristique, contient évidemment l'élément MM′ de la courbe donnée. Nous avons ainsi une zône de surface intégrale contenant MM′ ; mais nous pouvons alors, en prenant un point M″ infiniment voisin de M′,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faire à partir de ce point M' la construction que nous avons faite à partir de M, et déterminer ainsi une seconde zône contenant un second élément de la courbe donnée. En continuant de proche en proche pour chaque élément successif de la courbe, nous déterminerons de zône en zône une surface intégrale contenant la courbe donnée.

On peut donc par une courbe quelconque faire passer une surface intégrale et la démonstration qui nous a fait voir cette possibilité nous a donné en même temps le moyen de construire cette surface.

Cette démonstration nous montre bien que la surface intégrale serait complétement indéterminée si la courbe donnée était une caractéristique, car alors toutes les zônes successives de surface intégrale que nous obtiendrions seraient superposées suivant la zône voisine de la caractéristique donnée ; on ne connaîtrait donc, dans ce cas, qu'une seule zône de la surface intégrale qui, par suite, ne serait pas déterminée, et l'on voit bien qu'il y aurait une infinité de surfaces intégrales passant par la caractéristique donnée, puisqu'il suffirait, pour en déterminer une, de l'assujettir à passer par une courbe quelconque, à la condition que cette courbe ait un point commun avec la caractéristique considérée et qu'elle touche en ce point le plan tangent de cette caractéristique.

Nous pouvons tirer de ce qui précède une autre conséquence importante.

Nous avons dit que si l'on considérait un point quelconque de l'espace et le cône qu'enveloppent tous les plans passant en ce point et y satisfaisant à l'équation (1), il y avait une infinité de caractéristiques issues de ce point et tangentes chacune à l'un de ces plans. Nous avons vu de plus que pour que deux caractéristiques infiniment voisines fussent sur une surface intégrale, il suffisait que, en un point de l'une, le plan tangent déterminé par l'équation (1) fut tangent à l'autre. Or, si nous considérons l'en-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

semble de toutes les caractéristiques issues d'un même point, il est clair que la condition dont nous parlons est remplie, au point dont il s'agit, par deux de ces caractéristiques quelconques infiniment voisines. La surface formée par toutes ces caractéristiques est donc surface intégrale.

Lagrange a appelé cette surface « intégrale complète », tandis qu'il appelle « intégrale générale », la surface intégrale que l'on peut déterminer en se donnant une courbe quelconque par laquelle elle doit passer; on comprend, en effet, quelle différence capitale existe entre ces deux espèces d'intégrales; la première est déterminée quand on se donne un point, c'est-à-dire qu'elle ne contient que des constantes arbitraires qui sont les coordonnées de ce point; la seconde, au contraire, n'est déterminée que quand on se donne une courbe et contient, par suite, des fonctions arbitraires.

On voit de suite que si l'on prend l'une des surfaces représentées par l'intégrale générale et une caractéristique tracée sur cette surface, l'intégrale générale touchera tout le long de cette caractéristique une infinité d'intégrales complètes qui passent par cette courbe; l'intégrale générale est donc une enveloppe d'intégrales complètes; elle touche ses enveloppées suivant les caractéristiques, et le long d'une de ces courbes de contact il y a une infinité d'enveloppées tangentes à l'enveloppe.

Maintenant que nous savons trouver les équations de la caractéristique, que nous connaissons la condition pour qu'on puisse engendrer une surface intégrale au moyen de cette courbe, et que nous avons démontré que cette surface intégrale était déterminée quand on l'assujettissait à passer par une courbe donnée, il ne nous reste plus qu'à indiquer comment, grâce à ce qui précède, nous pourrons effectuer l'intégration proposée.

Pour cela, nous supposerons intégrées les quatre équations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de la caractéristique ; les équations intégrales peuvent toujours être prises sous la forme

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ z = f_2(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ p = f_3(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ q = f_4(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \end{cases}$$

puisque nous savons qu'il suffit de se donner un point x_0, y_0, z_0, et le plan tangent en ce point p_0, q_0, tels que :

$$(\beta)\qquad F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

pour déterminer complétement la caractéristique et tous ses plans tangents.

Soit maintenant les deux équations de la courbe donnée

$$y = \varphi_1(x) \quad z = \varphi_2(x)$$

elle doit, comme nous l'avons vu, rencontrer la caractéristique ; on doit donc avoir

$$(\gamma)\qquad y_0 = \varphi_1(x_0) \quad z_0 = \varphi_2(x_0)$$

mais de plus sa tangente au point x_0, y_0, doit être dans le plan tangent p_0, q_0, à la caractéristique en ce point ; il faut donc que

$$(\delta)\qquad \varphi'_2(x_0) = p_0 + q_0 \varphi'_1(x_0)$$

Je dis qu'il suffira d'éliminer les cinq quantités x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, entre les deux premières équations (α) et les quatre équations $(\beta), (\gamma), (\delta)$ pour avoir l'équation de la surface intégrale. En effet, les équations (γ) expriment que la courbe donnée rencontre la caractéristique ; en les employant pour éliminer x_0, y_0, z_0, on exprimera donc que le lieu des caractéristiques, qui n'est pas

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

encore surface intégrale, contient la courbe donnée. Mais le lieu des caractéristiques deviendra surface intégrale si l'on se sert pour l'élimination de l'équation (δ), car cette équation exprime que la tangente en un point quelconque de la courbe sur laquelle s'appuient toutes les caractéristiques est dans le plan, tangent en ce point, de la caractéristique qui y passe ; par suite, la caractéristique infiniment voisine de la première, s'appuyant toujours sur la courbe, sera tangente à ce plan tangent, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que cette seconde caractéristique soit sur la développable formée par les plans tangents à la première.

Il ne nous resterait plus pour terminer notre sujet qu'à faire l'étude du cas particulier où $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ est nul, infini ou indéterminé ; mais, auparavant, nous allons donner une seconde méthode d'intégration qui, tout en nous conduisant aux mêmes résultats que celle que nous venons d'exposer, aura l'avantage de placer la question sous un point de vue plus favorable pour l'étude de ce cas particulier.

Nous nous proposons d'intégrer l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

c'est-à-dire de trouver une surface telle que, en chacun de ses points x, y, z, les coefficients angulaires p, q, de sa normale en ce point satisfassent à l'équation (1), ou si l'on veut, telle que la normale en un quelconque de ses points soit sur le cône déterminé pour ce point là par l'équation (1).

Réciproquement, il est bien évident que si nous trouvons une surface telle qu'en chacun de ses points sa normale soit sur ce cône, cela équivaudra à dire que en chaque point de cette surface, l'équation (1) est satisfaite, et par suite, que cette surface est bien une surface intégrale.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le problème que nous étudions est donc ramené au problème suivant :

Si l'on considère tous les cônes que représente l'équation (1) quand on y donne à x, y, z, toutes les valeurs imaginables, trouver sur chacun de ces cônes une génératrice telle que toutes les génératrices ainsi obtenues soient normales à une même surface, lieu des sommets des cônes correspondants.

Pour résoudre ce problème, rappelons d'abord en quelques mots comment on peut exprimer que des droites infiniment voisines sont normales à une même surface.

Soit une normale N en un point A d'une surface ; soit N′ la normale en un autre point B de la surface, infiniment voisin du premier ; soit enfin N″ la normale en un point C situé à la même distance que B du premier point A et sur une direction AC perpendiculaire à AB. On sait que l'angle fait par la normale N′ avec le plan BAN est égal à l'angle fait par la normale N″ avec le plan CAN, et que ces deux angles sont tous deux à l'intérieur du dièdre BACN, ou tous deux à l'extérieur. On sait aussi que, réciproquement, cette condition est suffisante pour que les trois droites infiniment voisines N, N′, N″, soient normales à une même surface.

Ceci posé, considérons une courbe quelconque de l'espace ; nous allons montrer qu'il existe une surface intégrale passant par cette courbe et que cette surface peut être construite au moyen du théorème précédent.

Pour cela, prenons sur la courbe arbitraire donnée, des points A, B, C,... infiniment voisins ; à chacun de ces points correspond un des cônes représentés par l'équation (1) ; la normale à la surface cherchée au point A, par exemple, doit être sur le cône correspondant au point A ; mais elle doit aussi être perpendiculaire en A à la tangente en A de la courbe ABC... ; cette normale en A à la surface cherchée est donc déterminée par l'in-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tersection du plan normal en A à la courbe ABC... et du cône correspondant à A.

Ainsi, en tous les points de la courbe ABC... les normales à la surface cherchée sont déterminées. Mais alors si nous menons à partir du point A, par exemple, dans le plan tangent en A qui est connu, une ligne AA′ perpendiculaire à AB et que nous prenions sur cette direction une longueur AA′ égale à AB, la normale au point A′ ainsi déterminé sera connue ; en effet, cette normale doit faire avec le plan A′AN, AN étant la normale connue au point A, un angle égal à celui que fait la normale connue en B avec le plan BAN ; de plus, cette normale doit être sur le cône correspondant au point A′ ; on pourra donc la construire en prenant l'intersection de ce cône avec un cône de révolution ayant pour sommet A′, pour axe la perpendiculaire en A′ au plan A′AN, et pour angle au sommet le complément de l'angle infiniment petit que fait la normale en B avec le plan BAN.

La normale en A′ étant ainsi déterminée, nous pouvons de même construire les normales en tous les points B′, C′,... obtenus au moyen des points B, C,... comme A′ a été obtenu au moyen de A. Nous avons ainsi une seconde courbe A′B′C′... de la surface intégrale le long de laquelle nous connaissons tous les plans tangents à cette surface ; en opérant, à partir de cette deuxième courbe, comme nous l'avons fait à partir de la première et ainsi de suite, nous déterminerons de proche en proche, par zônes successives, une surface intégrale passant par la courbe donnée.

La démonstration que nous venons de faire, nous a prouvé l'existence de la surface intégrale passant par une courbe donnée, en même temps qu'elle nous donnait un moyen de construire cette surface ; mais chaque normale était fournie par l'intersection de deux cônes ; nous allons indiquer un second procédé de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

construction de la normale qui aura l'avantage de la déterminer par l'intersection d'un plan et d'un cône.

Rappelons d'abord le théorème dont nous allons nous servir et qui repose sur les propriétés de l'indicatrice.

Si l'on considère un point A d'une surface et l'indicatrice correspondant à ce point ; si l'on prend sur cette indicatrice deux points B et C situés sur des directions conjuguées AB et AC, la projection sur le plan de l'indicatrice de la normale à la surface en l'un de ces points est perpendiculaire au diamètre de l'indicatrice passant par l'autre.

Ce théorème va nous permettre, comme le précédent, de construire une surface intégrale en l'assujettissant à passer par une courbe quelconque donnée.

En effet, soit cette courbe ABC... ; nous savons que les normales à la surface intégrale en tous les points de cette courbe sont déterminées. Prenons un point A quelconque sur cette courbe et la normale N correspondante ; puis, par le point A, dans le plan tangent en A, menons la direction AA′ conjuguée de AB, en prenant l'intersection des deux plans tangents en A et en B ; la normale au point A′ infiniment voisin de A sur AA′ doit se trouver d'abord sur le cône représenté par l'équation (1) pour le point A′, et doit être ensuite dans le plan mené par A′ perpendiculairement à l'élément AB, puisque sa projection sur le plan tangent A′AB est perpendiculaire à AB. Nous aurons donc la normale au point A′ par l'intersection d'un plan et d'un cône, et, ceci posé, nous pourrons, comme nous l'avons fait dans le procédé précédent, en déduire une construction par zônes successives de la surface intégrale qui passe par la courbe arbitrairement choisie.

Ceci étant établi, étudions de plus près la question.

Pour cela, prenons pour axe des z la normale en un point O de la surface ; pour plan des xy le plan tangent en O, et pour

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

OX et OY deux droites quelconques rectangulaires. On a en O :

$$p=o \quad q=o$$

Prenons un point A infiniment voisin de O ; les valeurs de p et de q se réduisent, pour ce point, à leurs différentielles dp et dq qui sont liées par l'équation

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz+\mathrm{P}dp+\mathrm{Q}dq=o$$

différentielle totale de l'équation (1), dans laquelle on doit faire $x=o, y=o, z=o, p=o, q=o$.

Les quantités dp et dq définissent la normale au point dx, dy, dz, normale qui est parallèle à la droite menée par l'origine dont les équations sont :

$$\mathrm{X}+dp.\mathrm{Z}=o \quad \mathrm{Y}+dq.\mathrm{Z}=o$$

On voit que cette normale n'est pas déterminée, car dp et dq ne sont assujettis qu'à une seule relation, la relation (2); il y a donc au point A une infinité de normales correspondant à toutes les surfaces intégrales tangentes à XOY en O et passant par A. Or, si nous menons un plan P parallèle à XOY et à la distance -1 de l'origine, dp et dq représenteront les coordonnées du point où la parallèle à la normale menée par l'origine coupe ce plan P. Si donc, nous laissons dx, dy, dz, constants, c'est-à-dire si nous considérons toutes les normales qui passent par le point infiniment voisin de l'origine que l'on a choisi, l'équation (2) représentera une droite, ce qui nous montre que toutes les normales menées par un point infiniment voisin de O peuvent être considérées comme étant dans un même plan, que nous appellerons plan des normales, lequel est parallèle au plan mené par l'origine et par la droite (2) du plan P.

Si maintenant nous choisissons un autre point infiniment

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

voisin de O, dx, dy, dz, varieront, mais P et Q fonctions de x, y, z, p, q, resteront constants ; l'équation (2) représentera donc une droite de même direction que précédemment.

Ainsi, pour tous les points infiniment voisins de O, le plan des normales est toujours parallèle à une même droite située dans le plan tangent en O, $P\,dp + Q\,dq = o$, où l'on considère dp et dq comme les coordonnées courantes.

Tous ces plans de normales étant ainsi parallèles à une même droite, leur mouvement, quand on passe du point O à un point infiniment voisin, dépend uniquement d'une translation et d'une rotation autour d'un axe parallèle à la droite (2). Cherchons à calculer l'amplitude de cette rotation.

Pour cela, considérons les plans menés par O parallèlement aux plans des normales ; ils coupent tous le plan P, comme nous l'avons dit, suivant des droites parallèles à la droite représentée par l'équation (2), droites que nous appellerons les droites (α). Il est clair que la tangente trigonométrique de l'angle de rotation que subit un de ces plans, quand on passe du point O à un point infiniment voisin, est proportionnelle à la distance du point où le plan P coupe l'axe des z à la droite (α) correspondante. Cette tangente est donc proportionnelle à la quantité

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

terme constant de l'équation (2). Or cette expression représente, à un facteur constant près, la distance du point dx, dy, dz, au plan passant par l'origine et dont les coefficients sont X, Y, Z, plan que nous désignerons sous le nom de plan diamétral.

Ainsi donc, quand on passe de l'origine à un point infiniment voisin, l'angle dont tourne le plan des normales est proportionnel à la distance du second point au plan diamétral.

De là résulte que tous les points infiniment voisins de O, qui sont situés dans un plan parallèle au plan diamétral, ont des plans

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de normales parallèles, et qu'en particulier, tous les points situés dans le plan diamétral ont des plans de normales parallèles au plan des normales en O, c'est-à-dire au plan tangent au cône des normales le long de Oz, plan dont l'équation est

$$P\,dp+Q\,dq=o$$

Prenons alors ce plan tangent au cône pour plan des yz; toutes les droites (α) seront parallèles à OY, ce qui nécessite que dans l'équation de ces droites dq disparaisse, c'est-à-dire que Q soit nul. Cette équation devient alors :

$$(2') \qquad X\,dx+Y\,dy+P\,dp=o$$

Considérons maintenant l'intersection D du plan diamétral avec le plan des xy. Pour tous les points de la droite D, les plans des normales seront parallèles au plan YOZ, puisque cette droite est dans le plan diamétral; toutes les normales le long de la droite D se projetteront donc parallèlement à OY, c'est-à-dire perpendiculairement à OX; par suite la droite D est la direction conjuguée de OX et toutes les normales le long de OX se projettent perpendiculairement à D.

De là résulte que la normale en chaque point de OX est entièrement déterminée, puisqu'elle est l'intersection du plan des normales parallèle à OY et du plan mené par le point perpendiculairement à D; de plus, on voit bien que en chaque point de OX il n'y a qu'une seule normale.

Il est évident, aussi, que en chaque point de D la normale est indéterminée, car le plan des normales qui est alors parallèle à YOZ et le plan perpendiculaire à la direction OX sont confondus.

En résumé, la direction OX représente une direction telle que toutes les surfaces qui ont en O la normale OZ, ont même nor-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

male tout le long de l'élément OX ; il est clair, d'après cela, que OX est la direction de la caractéristique en O et que la droite D, qui est conjuguée de OX dans l'indicatrice, est ce que Monge a appelé la trajectoire.

Nous retrouvons ainsi ces deux courbes si remarquables et nous voyons que, tandis que pour tous les points de la caractéristique la normale est déterminée, pour tous les points de la trajectoire, au contraire, la normale est complétement indéterminée.

De ce qui précède on conclut que la direction de la caractéristique étant perpendiculaire au plan tangent au cône des normales

$$\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq=o$$

cette courbe vérifiera les équations

$$\frac{dx}{\mathrm{P}}=\frac{dy}{\mathrm{Q}}=\frac{dz}{\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q}$$

Quant à la trajectoire elle est dans le plan diamétral

$$\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz=o$$

et dans le plan tangent

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

elle est donc donnée par cette dernière équation et par

$$(\mathrm{X}+p\mathrm{Z})\,dx+(\mathrm{Y}+q\mathrm{Z})\,dy=o$$

Enfin, la normale tout le long de la caractéristique sera fournie par les valeurs de dp et de dq satisfaisant à l'équation

$$\frac{dp}{\mathrm{X}+p\mathrm{Z}}=\frac{dq}{\mathrm{Y}+q\mathrm{Z}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

puisqu'elle doit être dans un plan perpendiculaire à la trajectoire.

Nous avons donc en somme tout le long de la caractéristique, en tenant compte de l'équation (2),

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=-\frac{dp}{X+pZ}=-\frac{dq}{Y+qZ}$$

Nous sommes ainsi arrivés par ce second procédé à retrouver les équations de la caractéristique ; à partir de ce moment nous pourrions répéter identiquement ce que nous avons dit en exposant le premier ; mais nous nous trouvons placés à un point de vue tout différent ; tandis que dans l'exposition du premier procédé nous voulions arriver à la formule de Cauchy, puisque c'est cette formule qui doit être la base de toute notre discussion, dans celui-ci, au contraire, il nous faut démontrer, par une méthode autre que celle de Cauchy, que deux caractéristiques voisines appartiennent à une même surface intégrale dès qu'un point de l'une est dans un plan tangent à l'autre. De cette manière les objections que l'on peut faire à la démonstration de Cauchy ne porteront que sur le mode de démonstration et non sur le théorème lui-même.

Pour établir ce théorème, prenons deux caractéristiques infiniment voisines et désignons par A un point de l'une et par B un point infiniment voisin sur l'autre ; si l'on considère le plan tangent en A à la première et le plan tangent en B à la seconde (1), il est clair que pour que ces deux caractéristiques soient sur une même surface, il suffit que l'on puisse construire une courbe allant de A à B, tangente en A au plan issu de A et tangente en B au plan passant par B, car, cela fait, la surface

(1) Nous entendons par plan tangent en A à la caractéristique, le plan mené par A et tangent au cône complémentaire de celui qui est représenté par $F(x, y, z, p, q)=o$, le long de l'élément de la caractéristique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

intégrale contenant l'élément AB contiendra les deux caractéristiques. Or, pour que l'on puisse construire la courbe dont nous parlons, il faut d'abord que le point B soit à une distance infiniment petite du second ordre du plan tangent en A, ce qui démontre le théorème; il faut ensuite que les deux plans tangents en A et B fassent un angle infiniment petit, condition nécessairement satisfaite puisque les deux points A et B sont deux points infiniment voisins de deux caractéristiques infiniment voisines.

Cette propriété fondamentale des caractéristiques voisines que nous venons de déduire du seul fait de l'existence des surfaces intégrales démontrée à priori, peut être mise en évidence d'une autre manière, et cette nouvelle démonstration aura l'avantage, comme nous le verrons dans la troisième partie, de nous conduire à une formule remarquable due à M. Serret, en même temps qu'elle nous amènera directement à l'étude des cas particuliers que nous voulons approfondir.

Nous avons vu précédemment que les plans de normales correspondant aux différents points infiniment voisins de l'origine O d'un même plan diamétral, étaient tous parallèles au plan tangent au cône des normales le long de OZ; de là résulte que les éléments, voisins du plan diamétral, des caractéristiques qui passent par ces divers points (étant perpendiculaires à des droites situées dans un plan passant par OZ, droites qui font des angles infiniment petits du premier ordre avec OZ) font, avec le plan XOY, des angles infiniment petits du second ordre tout en faisant entre eux des angles infiniments petits du premier.

Ainsi, tous les éléments de caractéristiques issus d'un même plan diamétral peuvent être regardés, si l'on néglige les infiniments petits du second ordre, comme parallèles au plan p_0, q_0, ou si l'on veut, à la portion voisine de O de la développable circonscrite à la caractéristique initiale.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dès lors, en appliquant cette propriété de proche en proche, on voit bien que si un point d'une caractéristique est sur la développable circonscrite à une caractéristique voisine, la courbe toute entière y sera située, puisque toutes les caractéristiques voisines d'une caractéristique initiale cheminent parallèlement à la développable circonscrite à la première, lorsqu'on considère comme correspondants les points d'un même plan diamétral.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TROISIÈME PARTIE.

Nous avons vu précédemment que la surface intégrale satisfaisant à une équation aux différentielles partielles du premier ordre et à trois variables était déterminée quand on l'assujettissait à passer par une courbe donnée; nous nous proposons maintenant de voir quels sont les cas singuliers qui peuvent se produire quand la courbe de base présente certaines particularités.

Pour cela, rappelons un des procédés qui nous ont servi à construire la surface intégrale. Nous savons qu'en chaque point de la courbe de base il est facile de construire le plan tangent, et qu'il suffit de considérer la caractéristique déterminée par ce point et ce plan tangent, pour que l'ensemble de toutes les caractéristiques s'appuyant sur la courbe de base et déterminées ainsi, forme la surface intégrale cherchée. Il est clair qu'en général, toutes ces caractéristiques nous fournissent une surface et une seule; la construction même que nous venons d'indiquer nous montre bien que les seuls cas singuliers à examiner sont ceux où l'élément de la courbe de base se trouve coïncider avec l'élément de caractéristique qui vient s'y appuyer.

Or, ceci peut se produire de deux manières, soit parce que la courbe donnée est une caractéristique, soit parce qu'elle est une enveloppe de caractéristiques.

Dans le premier cas, toutes les caractéristiques qui s'appuient sur la courbe de base donnée, devant avoir pour plan tangent, en leur point de rencontre avec cette courbe, le plan tangent de cette courbe, se superposeront toutes suivant la caractéristique de base. On voit ainsi que, dans ce cas, la surface intégrale n'est pas déterminée par l'ensemble de toutes ces caractéristiques,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qu'il y a une infinité de surfaces répondant à la question et que pour déterminer une de ces surfaces, il suffirait, comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, de l'assujettir à passer par une courbe quelconque qui rencontre la caractéristique de base donnée et soit tangente en ce point de rencontre au plan tangent à la caractéristique.

Remarquons encore que dans le cas que nous étudions, toutes les intégrales complètes ayant leur sommet sur la caractéristique donnée seront surfaces intégrales, puisqu'elles contiennent toutes la courbe de base et ont, tout le long de cette courbe, les plans tangents voulus.

Dans le deuxième cas, il est évident que toutes les caractéristiques qui s'appuient sur l'enveloppe de caractéristiques donnée, sont représentées par les caractéristiques dont les éléments forment la courbe de base, et que, par suite, la surface intégrale est parfaitement déterminée. Seulement, dans ce cas, en chaque point de la courbe de base, il y a deux plans tangents, puisqu'il y passe deux caractéristiques ; l'enveloppe de caractéristiques donnée comme courbe de base est donc alors une arête de rebroussement, et c'est là la seule singularité qui se produit.

Nous pourrions terminer ici l'étude que nous avons entreprise puisqu'il est évident, d'après ce qui précède, que le seul cas singulier que puisse présenter le problème est le cas d'indétermination ; mais il est intéressant de voir à quoi correspond ce qu'on a appelé les cas d'exception de la méthode de Cauchy, et ce qui se passe dans ces cas. C'est ce que nous allons aborder maintenant.

Pour cela, précisons la question qui va faire l'objet de cette étude en rappelant brièvement en quoi consistent ces cas d'exception.

On sait que lorsqu'on établit par la méthode de Cauchy les équations de la caractéristique, il vient s'ajouter aux quatre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équations de cette courbe une cinquième équation surabondante qui peut être mise sous la forme.

$$I = I_0 e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$$

Cauchy, pour prouver que cette cinquième équation est satisfaite d'elle-même, fait remarquer que I sera constamment nul, si, pour le point initial, I_0 est nul ; mais cette démonstration donne lieu à une objection fondamentale formulée par M. Bertrand. Nous ne pouvons mieux faire pour en montrer toute la portée que de citer les paroles mêmes de cet éminent géomètre (1) :

« . . . . . Cauchy a voulu établir directement que cette équation surabondante sera toujours satisfaite d'elle-même ; or, la démonstration n'a, suivant moi, aucune force. Je n'ai pas dit, comme on l'a cru, qu'elle peut se trouver en défaut et que des exceptions peuvent se produire ; on ne dit pas même assez, suivant moi, en faisant remarquer que ces exceptions existent dans le cas général. Je vais plus loin en affirmant que, tant qu'on reste dans la théorie générale, la démonstration ne prouve absolument rien, et ne rend pas même vraisemblable le théorème qu'on veut démontrer . . . . . L'assertion de Cauchy est exacte ; l'équation surabondante est, en général, satisfaite d'elle-même, et j'en ai dit la raison : l'exception ne peut se présenter que dans des cas particuliers ; c'est la preuve seulement qui n'est pas acceptable. »

Ce sont précisément ces cas particuliers où $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée que nous voulons étudier. Or, il est intéressant de savoir quelle est la solution du problème dans ces cas ; aussi M. Serret, dans un remarquable mémoire analytique dont nous avons déjà parlé, se proposa-t-il cette étude.

(1) Bertrand. — *Bulletin des sciences mathémathiques et astronomiques*, tome V, p. 156.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans la première partie de son mémoire, M. Serret cherche à mettre la quantité $\frac{I}{I_0}$ sous une forme plus commode que celle de Cauchy pour la discussion, et parvient, par l'analyse, à l'identifier à $\frac{dM}{dz_0}$ en désignant par $z=M$ l'équation de l'intégrale complète, par x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point initial et par $\frac{dM}{dz_0}$ la dérivée de M prise en regardant x_0, et y_0, comme constants.

La formule de M. Serret a ce grand avantage de mettre la quantité $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$, difficile à discuter, sous une forme géométriquement compréhensible ; aussi pour approfondir l'étude des cas d'exception, nous servirons-nous de cette formule ; mais nous allons tout d'abord en donner une démonstration géométrique, parce que les raisonnements dont nous nous servirons pour l'établir, nous permettront de voir plus facilement ce qui se passe dans les cas que nous étudions.

Nous avons vu précédemment que les plans de normales, correspondants aux différents points d'un même plan diamétral, étaient tous parallèles et que, par suite, les éléments des caractéristiques issues de ces points faisaient avec le plan tangent à la caractéristique initiale des angles infiniment petits du second ordre.

De là résulte que si l'on considère une caractéristique origine et deux points infiniment voisins sur une caractéristique infiniment voisine, le rapport des distances de ces deux points à la développable circonscrite à la première caractéristique est constant quand la deuxième varie et que chacun des deux points choisis reste dans le plan diamétral qui le contient.

Pour démontrer cette proposition, désignons par A_0 et B_0 deux points du plan diamétral de O, infiniment voisin de O. Soient A_0A_1 et B_0B_1, les éléments des deux caractéristiques qui y passent, les deux points A_1 et B_1 étant situés dans le plan

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

diamétral du point O_1 infiniment voisin de O sur la caractéristique issue de ce point. Abaissons de A_0 et B_0 les perpendiculaires $A_0\alpha_0, B_0\beta_0$, sur le plan tangent en O, de A_1 et B_1 les perpendiculaires $A_1\alpha_1, B_1\beta_1$ sur le plan tangent en O_1 ; je dis que l'on a

$$\frac{A_0\alpha_0}{A_1\alpha_1}=\frac{B_0\beta_0}{B_1\beta_1} \text{ ou : } \quad \frac{A_0\alpha_0}{B_0\beta_0}=\frac{A_1\alpha_1}{B_1\beta_1}$$

En effet, dans chacun de ces deux derniers rapports, on peut remplacer les distances aux plans tangents par les distances aux diamètres D et D_1, correspondants aux points O et O_1, puisque chaque diamètre est l'intersection du plan diamétral et du plan tangent et que chaque groupe de points considérés est dans un plan diamétral. Si donc nous désignons par a_0 et b_0 les perpendiculaires abaissées de A_0 et B_0 sur le diamètre D, par a_1 et b_1 les perpendiculaires abaissées de A_1 et B_1 sur le diamètre D_1, nous serons ramenés à démontrer que

$$\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_1}{b_1}$$

Or, nous avons vu précédemment que si l'on considérait une caractéristique voisine d'une caractéristique initiale et la développable circonscrite à cette dernière, et que si l'on prenait pour points correspondants ceux qui se trouvent dans un même plan diamétral de la caractéristique initiale, les éléments de la première caractéristique faisaient des angles infiniment petits du deuxième ordre avec les éléments de la développable circonscrite à la caractéristique prise pour origine. Cette propriété existant tout le long de ces courbes, il en résulte qu'elle subsiste encore si l'on remplace : 1° la caractéristique sur laquelle on prend les points par le polygone inscrit dans cette courbe et dont tous les sommets sont dans les plans diamétraux successifs ; 2° la développable circonscrite à la caractéristique origine par la surface polyé-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

drale inscrite formée par les plans qui joignent deux à deux les génératrices de la développable, c'est-à-dire les diamètres successifs.

Mais alors les droites A_0A_1 et B_0B_1 étant parallèles au plan des deux diamètres D et D_1, on voit que si l'on joint A_0B_0 et qu'on prolonge cette ligne jusqu'en son point de rencontre K_0 avec D, que si l'on joint de même A_1B_1 et qu'on prolonge cette ligne jusqu'en son point de rencontre K_1 avec D_1, les trois points A_0, B_0, K_0, et les trois points A_1, B_1, K_1, peuvent être considérés comme les intersections des deux droites $A_0B_0K_0$ et A_1, B_1K_1 avec trois plans parallèles au plan des deux diamètres, ce qui conduit immédiatement à la proposition énoncée.

Ainsi donc, on a :

$$\frac{A_0\alpha_0}{B_0\beta_0}=\frac{A_1\alpha_1}{A_1\beta_1}+\varepsilon_1$$

ε_1 étant du second ordre.

On aurait de même, en considérant les éléments de caractéristiques A_1A_2 et B_1B_2 issus de A_1 et B_1 et limités aux points A_2 et B_2 du plan diamétral en O_2

$$\frac{A_1\alpha_1}{B_1\beta_1}=\frac{A_2\alpha_2}{B_2\beta_2}+\varepsilon_2$$

ε_2 étant du second ordre.

Le théorème subsiste donc pour deux points situés à distance finie puisqu'en faisant la somme d'un nombre infini des rapports précédents, la somme $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots$ n'est encore que du premier ordre.

On arrive ainsi au théorème suivant : Si l'on considère une caractéristique origine et deux points quelconques d'une caractéristique infiniment voisine, le rapport des distances de ces deux points à la développable circonscrite à la caractéristique initiale est constant quand la deuxième caractéristique varie, les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux points choisis restant à une distance infiniment petite de leur première position. Dans ce théorème nous n'avons plus besoin d'assujettir chacun des deux points à rester dans le même plan diamétral comme nous l'avions fait précédemment ; ces deux points sont à distance finie, le rapport de leurs distances à la développable est donc fini et, par suite, nous pouvons faire sur ce rapport une erreur du premier ordre en prenant les points infiniment voisins du plan diamétral.

Il est clair que pour appliquer le théorème que nous venons de démontrer on peut prendre, pour compter les distances des points à la développable, une direction quelconque, pourvu que cette direction ne soit pas parallèle au plan tangent à cette développable ; en particulier, on peut prendre la direction de l'axe des z.

On peut aussi remplacer la développable par toute surface qui lui est tangente le long de la caractéristique, puisqu'en opérant ainsi on ne commet sur les distances du premier ordre qu'une erreur du second et que, par suite, on n'altère leur rapport fini que d'une quantité infiniment petite du premier ordre.

Enfin, au lieu de prendre les distances des différents points de la seconde caractéristique à la développable circonscrite à la première, on peut prendre les distances des points de cette caractéristique initiale à la développable circonscrite à la seconde ou encore à l'une des intégrales complètes passant par cette dernière courbe.

Ceci posé, soient deux points x_0, y_0, z_0 et x, y, z, de la caractéristique initiale ; considérons deux points infiniment voisins de ceux-là et situés sur une même caractéristique et désignons par I_0 et I leurs distances à la développable circonscrite le long de la première caractéristique ; le rapport $\frac{I}{I_0}$ sera constant quelle que soit la caractéristique choisie et, d'après ce qui précède, sera égal au rapport des distances des deux points x, y, z, et x_0, y_0, z_0, à une intégrale complète quelconque infiniment voisine de la caractéristique initiale. Or, si nous prenons pour cette

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

intégrale complète celle que définit le point $x_0, y_0, z_0 + dz_0$, et si nous désignons par $z = M$ celle qui a pour sommet le point x_0, y_0, z_0, la distance de x_0, y_0, z_0, à la première est dz_0, tandis que la distance de x, y, z, est représentée par la variation de z dans $z = M$ quand on fait varier z_0 en laissant x_0 et y_0 constants. On voit donc que le rapport $\frac{I}{I_0}$ est égal à la quantité $\frac{dM}{dz_0}$ définie comme nous venons de le dire.

Il ne faut pas oublier que cette égalité

$$I = I_0 \frac{dM}{dz_0}$$

n'a été établie qu'en négligeant les infiniments petits du deuxième ordre et qu'elle n'est vraie, par suite, que lorsque I et I_0 sont infiniments petits du premier; dans le cas où I_0 est du second, elle ne peut plus être appliquée et ne donne plus le rapport $\frac{I}{I_0}$; elle permet seulement alors de constater que I est du même ordre que I_0, tant que le facteur $\frac{dM}{dz_0}$ n'est pas infini.

C'est ici le lieu de remarquer que la quantité que nous avons désignée par I est bien celle que Cauchy a considérée, puisqu'il représente par ce symbole l'expression $dz - p\,dx - q\,dy$, c'est-à-dire la distance au plan tangent comptée parallèlement à l'axe des z.

Or nous avons trouvé précédemment que la valeur de $\frac{I}{I_0}$ était fournie par $e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx}$ nous avons donc par suite,

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx = Lg \frac{dM}{dz_0}$$

ce qui est la formule de M. Serret.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette formule établie, nous allons l'appliquer aux cas où l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée, c'est-à-dire aux trois cas où $\frac{dM}{dz_0}$ est nul, infini ou indéterminé tout le long de la courbe de base ; pour cela, remarquons que cette quantité $\frac{dM}{dz_0}$ peut s'écrire

$$-\frac{\left(\frac{df}{dz_0}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}$$

Si l'on désigne par $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = 0$ l'équation de l'intégrale complète que nous supposerons mise sous forme entière.

De là résulte, que $\frac{dM}{dz_0}$ est nul quand $\frac{df}{dz_0}$ est nul, est infini quand df est nul ; est indéterminé quand ces deux circonstances se produisent en même temps.

Examinons ces différents cas :

1° $\frac{dM}{dz_0}$ est nul. — Alors $\frac{df}{dz_0}$ est nul, c'est-à-dire que le plan tangent à la caractéristique au point initial est vertical ; en effet, cette caractéristique satisfait à l'intégrale complète $f = 0$; si de plus, elle satisfait à $\frac{df}{dz_0} = 0$, c'est qu'elle est l'intersection de cette intégrale complète avec celle que l'on obtiendrait en laissant x_0 et y_0 constants et changeant z_0 en $z_0 + dz_0$; elle se trouve donc sur la surface intégrale qui contient l'élément dz_0 et enveloppe les deux intégrales complètes ; or cette surface a son plan tangent vertical au point x_0, y_0, z_0, il en est donc de même de la caractéristique.

Nous voyons ainsi que le cas particulier de $\frac{dM}{dz_0}$ nul se pro-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

duira lorsqu'au point initial la caractéristique aura son plan tangent parallèle à l'axe des z, ce qui nous montre bien que ce cas particulier ne dépend que du choix des axes.

On voit aussi que si la singularité que nous venons d'étudier se produit tout le long de la courbe de base, c'est que cette courbe est le contour apparent sur le plan des xy de la surface intégrale qu'elle détermine.

Ce cas particulier n'implique donc rien sur la nature de la courbe de base ; et tant que cette courbe n'est pas une caractéristique, $\frac{dM}{dz_0}$ peut être nul sans que le problème cesse d'être déterminé et sans que la surface intégrale présente aucune particularité.

2° $\frac{dM}{dz_0}$ est infini. — Alors $\frac{df}{dz}$ est nul tout le long de la caractéristique, c'est-à-dire que le plan tangent en tous les points de cette courbe est vertical. La caractéristique est donc alors le contour apparent de l'intégrale complète qui la contient, ou si l'on veut, est contour apparent de la surface intégrale cherchée puisque cette surface touche l'intégrale complète tout le long de la caractéristique. Or, le plan tangent étant vertical en tous les points de cette caractéristique, le sera aussi, en général, au point x_0, y_0, z_0 ; par suite, $\frac{df}{dz_0}$ sera nul et l'on se trouvera dans le cas d'indétermination.

Si donc l'on veut que le cas de $\frac{dM}{dz_0}$ infini se produise en un point de la courbe de base, il faut supposer qu'en ce point se trouvent réunies les trois conditions suivantes : 1° que la caractéristique qui passe en ce point soit formée de deux courbes distinctes; 2° que l'une des portions de cette caractéristique soit contour apparent de l'intégrale complète ; 3° que le point initial considéré se trouve sur l'autre portion.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais si la particularité de $\frac{dM}{dz_0}$ infini se produit tout le long de la courbe de base, il faut d'après ce qui précède que toutes les caractéristiques qui s'appuient sur cette courbe se décomposent en deux portions, la première qui contient le point initial et où $\frac{df}{dz}$ n'est pas nul, la seconde où $\frac{df}{dz}$ est nul ; or on voit bien alors que chacune des dernières portions de ces caractéristiques est contour apparent de la surface intégrale cherchée, ce qui n'est possible, sauf le cas où la courbe de base est elle-même une caractéristique, que lorsque toutes ces portions se trouvent sur un même cylindre parallèle à l'axe des z.

Ainsi donc pour que le cas de $\frac{dM}{dz_0}$ infini puisse se produire tout le long d'une courbe, il faut que la surface intégrale comprenne un cylindre parallèle à l'axe des z et que la courbe de base n'y soit pas située.

3° $\frac{dM}{dz_0}$ est indéterminé. — Alors $\frac{df}{dz}$ et $\frac{df}{dz_0}$ sont tous les deux nuls ; si cette particularité se produit pour un point de la courbe de base, c'est-à-dire pour une des caractéristiques qui s'appuient sur cette courbe, c'est que cette caractéristique est contour apparent de l'intégrale complète et, par suite, de la surface intégrale cherchée ; mais si $\frac{dM}{dz_0}$ est indéterminé tout le long de la courbe de base, c'est que toutes les caractéristiques qui s'appuient sur cette courbe sont contour apparent de la surface cherchée, ce qui n'est possible, sauf le cas où la courbe de base est elle-même une caractéristique, que si cette surface se compose d'un cylindre parallèle à l'axe des z et contenant la courbe de base.

D'après la discussion qui précède, on voit que les cas particuliers que nous venons d'examiner proviennent autant du choix des axes coordonnés que des singularités que présentent la sur-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

face intégrale et la courbe par laquelle on l'assujettit à passer. Il nous reste à donner l'interprétation géométrique du cas où les formules qui donnent la solution dans la méthode de Cauchy deviennent illusoires, c'est-à-dire du cas traité par M. Serret dans le mémoire dont nous avons déjà si souvent parlé.

Or, M. Serret a démontré que dans ces circonstances l'intégrale complète répondait au problème; il résulte de là que toutes les intégrales complètes dont le sommet se trouve sur la courbe de base donnée y satisfont également et que, par suite, cette courbe de base qui leur est ainsi commune est une caractéristique.

On se trouve donc ramené au cas d'indétermination qui a été étudié et l'on sait qu'alors il y a une infinité de solutions, puisqu'on peut assujettir les surfaces intégrales à passer par une courbe quelconque, pourvu que cette courbe rencontre la caractéristique et ait pour plan tangent en ce point de rencontre le plan tangent de la caractéristique.

En somme donc, maintenant que nous voilà arrivés à la fin de ce travail, nous pouvons résumer comme il suit les résultats que nous avons obtenus.

1° Par une courbe quelconque donnée passe toujours une et une seule surface intégrale, enveloppe de toutes les intégrales complètes qui ont leur sommet sur la courbe donnée.

2° Le seul cas singulier qui puisse se produire est le cas d'indétermination ; il a lieu quand la courbe donnée est une caractéristique. Dans ce cas, et dans ce cas seul, toutes les intégrales complètes qui ont leur sommet sur la courbe donnée répondent à la question, ainsi qu'une infinité d'autres surfaces qui leur sont tangentes tout le long de la courbe de base considérée;

3° Quand la courbe donnée est une enveloppe de caractéristiques, la surface intégrale a cette courbe pour arête de rebroussement;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4° Le cas particulier de $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ nul se produit en un point de la courbe de base quand le plan tangent à la surface intégrale en ce point est parallèle à l'axe des z; il se produit tout le long de la courbe de base quand cette courbe est contour apparent sur le plan des xy de la surface intégrale qu'elle détermine;

5° Le cas particulier de $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ infini a lieu en un point de la courbe de base quand la caractéristique qui passe en ce point se dédouble en deux courbes distinctes, l'une de ces portions étant contour apparent de la surface intégrale et le point initial étant pris sur l'autre; il a lieu en tous les points de la courbe donnée quand la surface intégrale comprend un cylindre parallèle à l'axe des z et que cette courbe n'y est pas située.

6° Le cas particulier de $e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$ indéterminé ne peut être obtenu en un point de la courbe de base que si la caractéristique relative à ce point est contour apparent de la surface intégrale; il se présente en tous les points de cette courbe de base quand la surface intégrale est formée par un cylindre parallèle à l'axe des z et que la courbe donnée est située sur ce cylindre.

Vu et approuvé :

Paris, le 24 décembre 1875.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 27 décembre 1875.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

Toulouse, Impr. Louis & Jean-Matthieu Douladoure.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME THÈSE

SUR LE FROTTEMENT DE PIVOTEMENT

Lorsque deux corps solides homogènes sont assujettis à rester en contact, le déplacement relatif de ces deux corps donne lieu à diverses résistances. On sait, que quel que soit ce déplacement, il peut toujours être obtenu par un glissement du point de contact et une rotation autour d'un axe passant par ce point. Cette rotation se décompose elle-même en deux autres; l'une, autour d'un axe situé dans le plan tangent, ce qui constitue un roulement; l'autre, autour d'un axe perpendiculaire au plan tangent, ce qui constitue un pivotement. Tout déplacement relatif de deux surfaces assujetties à rester en contact s'obtient donc par un glissement, un roulement et un pivotement, ce qui montre que les résistances à un déplacement relatif quelconque sont un frottement de glissement, un frottement de roulement et un frottement de pivotement.

Les deux premiers de ces frottements ont été étudiés par la théorie et les résultats trouvés ont été vérifiés par l'expérience; il n'en est pas de même pour le dernier qui, au moins dans sa généralité, n'a été l'objet d'aucune étude. Et cependant, il est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des cas où ce frottement de pivotement existant seul, acquiert par là une importance pratique.

En l'absence d'expériences sur ce frottement, on peut arriver, à l'aide d'une hypothèse simple, à en étudier les principales circonstances; c'est le but de ce travail.

La résistance due au pivotement provient d'un glissement des portions de surfaces voisines du point de contact géométrique; elle dépend donc uniquement de la loi de répartition des pressions autour de ce point puisque le frottement de glissement ne dépend que de la pression.

D'un autre côté, la loi de répartition des pressions dépend elle-même de la loi de déformation; il est vrai que la relation qui les lie nous est inconnue, mais nous pouvons supposer que la pression en chaque point, est proportionnelle à la déformation correspondante de la surface que l'on considère, et cette hypothèse simple, facile à admettre, va nous permettre de faire l'étude complète du frottement de pivotement.

Pour cela, considérons deux surfaces en contact avant que la déformation ne se soit produite, et désignons par A le point de contact géométrique et par P le plan tangent commun en A. Prenons un point M_1 sur l'une des surfaces, un point M_2 sur l'autre, situés sur une même perpendiculaire au plan P et tels qu'ils viennent se confondre en M par la déformation. Enfin désignons par Z_1 et Z_2 les distances des points M_1 et M_2 au plan P, par Z la distance du point M à ce plan, et par δ_1 et δ_2 les dépressions des deux surfaces au point A.

Il est clair que la dépression au point M_1 de la première surface est $Z_1 - z - \delta_1$ et que la dépression au point M_2 de la seconde est $Z_2 - z - \delta_2$. Par suite, d'après l'hypothèse que nous avons faite précédemment, les pressions en M_1 et M_2 seront $\frac{Z_1 - z - \delta_1}{\varepsilon_1}$ et $\frac{Z_2 - z - \delta_2}{\varepsilon_2}$, ε_1 et ε_2 étant deux coefficients qui dépendent de l'élasticité des corps en contact.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais pour qu'il y ait équilibre, il faut qu'il y ait égalité en chaque point entre les pressions des deux surfaces, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{Z_1 - z - \delta_1}{\varepsilon_1} = -\frac{Z_2 - z - \delta_2}{\varepsilon_2}$$

et cette égalité devant avoir lieu en tous les points doit être vérifiée au point A, ce qui exige, puisqu'en ce point z est nul, ainsi que Z_1 et Z_2 :

$$\frac{\delta_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\delta_2}{\varepsilon_2}$$

et par suite

$$\frac{Z_1 - z}{\varepsilon_1} = -\frac{Z_2 - z}{\varepsilon_2}$$

de là on peut tirer :

$$z = \frac{\varepsilon_2 Z_1 + \varepsilon_1 Z_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

formule sur laquelle nous allons revenir plus loin.

Remarquons ici que la pression totale P qui s'exerce entre les deux surfaces étant représentée par $\iint p\, d\omega$, en désignant par p la pression sur l'élément $d\omega$ de la zone de contact, est égale d'après ce qui précède, à $\int \frac{Z_1 - z - \delta_1}{\varepsilon_1}\, d\omega$, ou si l'on veut, à $\frac{V_1}{\varepsilon_1}$ en désignant par V_1 le volume de déformation.

Remarquons encore que cette pression P étant égale aussi bien à $\frac{V_1}{\varepsilon_1}$ qu'à $\frac{V_2}{\varepsilon_2}$, il en résulte que les volumes de déformation sont pour les deux surfaces dans le rapport de ε_1 à ε_2.

Ceci posé, reprenons la valeur de z que nous venons d'obtenir et qui va nous faire connaître la forme de la zone de contact.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soient :

$$Z_1 = a_1 x^2 + 2 b_1 xy + c_1 y^2$$
$$Z_2 = a_2 x^2 + 2 b_2 xy + c_2 y^2$$

les sections des deux surfaces par les plans parallèles au plan P menés par les points M_1 et M_2 ; on aura

$$z = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[(\varepsilon_1 a_2 + \varepsilon_2 a_1) x^2 + 2 (\varepsilon_1 b_2 + \varepsilon_2 b_1) xy + (\varepsilon_1 c_2 + \varepsilon_2 c_1) y^2 \right]$$

Mais la pression en chaque point est

$$p = \frac{Z_1 - z - \delta_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\delta_1}{\varepsilon_1} + \frac{Z_1 - z}{\varepsilon_1}$$

et comme

$$\frac{Z_1 - z}{\varepsilon_1} = \frac{Z_1}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 Z_1 + \varepsilon_1 Z_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \frac{Z_1 - Z_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

on a

$$p = -\frac{\delta_1}{\varepsilon_1} + \frac{Z_1 - Z_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

et si l'on remarque que $-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}$ représente la pression p_0 au point de contact A, il vient :

$$p - p_0 = \frac{Z_1 - Z_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[(a_1 - a_2) x^2 + 2 (b_1 - b_2) xy + (c_1 - c_2) y^2 \right]$$

formule qui nous montre que la loi de répartition des pressions ne dépend que de $Z_1 - Z_2$, c'est-à-dire que de la distance des deux surfaces avant la déformation, cette distance étant comptée sur une parallèle à la normale commune.

Or, cette distance peut être définie pour deux surfaces de la même manière que pour une surface et son plan tangent ; en effet, ce qu'on appelle l'indicatrice sur une surface est le lieu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des points de cette surface équidistants du plan tangent ; nous pourrons prendre de même, dans le cas de deux surfaces en contact, le lieu des points de l'une également distants de l'autre et l'ensemble de ces points pour lesquels on a

$$\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left[(a_1-a_2)x^2+2(b_1-b_2)xy+(c_1-c_2)y^2\right]=\frac{Z_1-Z_2}{\varepsilon_1+\quad_2}$$

où l'on considère Z_1-Z_2 comme une constante, sera ce que nous appellerons l'indicatrice relative.

On voit, d'après cela, que les courbes d'égale pression seront en projection sur le plan tangent, des coniques homothétiques semblables à l'indicatrice relative ; on voit de plus, que d'une conique à l'autre la pression variera proportionnellement au carré du rapport de similitude.

Il ne nous reste plus pour connaître la pression en chaque point qu'à déterminer p_0, c'est-à-dire qu'à trouver la relation qui lie p_0 à P, car la pression totale P est une des données de la question.

Pour cela, rappelons-nous que

$$P=\int\frac{Z_1-z-\delta_1}{\varepsilon_1}d\omega=-\int\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}d\omega+\int\frac{Z_1-z}{\varepsilon_1}d\omega$$

$d\omega$ étant l'élément de zone de contact.

Or la zone de contact étant limitée par l'une des courbes

$$(a_1-a_2)x^2+2(b_1-b_2)xy+(c_1-c_2)y^2=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(Z_1-z)$$

le long desquelles la pression reste constante, nous prendrons pour ω la surface de l'une de ces courbes, c'est-à-dire :

$$\omega=\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{Z_1-z}{\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui nous donne pour $d\omega$

$$d\omega=\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{d(Z_1-z)}{\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}$$

et par suite

$$P=\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\frac{1}{\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}\left[-\int\delta_1 d(Z_1-z)+\int(Z_1-z)d(Z_1-z)\right]$$

les intégrales étant prises depuis $p=-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}$ c'est-à-dire depuis $Z_1-z=o$ jusqu'à $p=o$, c'est-à-dire $Z_1-z=\delta_1$.

De là on tire :

$$P=\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\frac{1}{\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}\left[-(Z_1-z)\delta_1+\frac{1}{2}(Z_1-z)^2\right]_o^{\delta_1}$$

ou encore :

$$P=\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\frac{1}{\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}\left[-\frac{1}{2}\delta_1^2\right]$$

et enfin :

$$P=-\frac{1}{2\varepsilon_1}\left[\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\delta_1}{\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}\right]\delta_1$$

Or, la quantité entre parenthèses représente la surface de l'ellipse

$$(a_1-a_2)x^2+2(b_1-b_2)xy+(c_1-c_2)y^2=-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}=p_o$$

ce qui montre que le volume total de dépression V_1, étant égal à $\varepsilon_1 P$, est égal au volume du demi cylindre ayant pour base cette ellipse et pour hauteur la dépression δ_1 au point initial.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

De la formule précédente on tire la relation cherchée entre p_o et P.

$$p_o = -\frac{\delta_1}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{2P\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$$

d'où l'on déduit pour la pression en un point,

$$p = \frac{(a_1-a_2)x^2+2(b_1-b_2)xy+(c_1-c_2)y^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \sqrt{\frac{2P\sqrt{(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2}}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$$

ce qui va nous permettre de calculer la force de frottement.

La résistance au pivotement est mesurée par la somme des moments des forces de frottement par rapport à la normale commune primitive. Or, la force de frottement sur un élément $d\omega$ est représentée par $fpd\omega$, f étant le coefficient de frottement; si donc nous désignons par r la distance de l'élément $d\omega$ à la normale commune primitive, et par F la résistance au pivotement, nous aurons :

$$F = \int\int fprd\omega$$

C'est cette intégrale double que nous allons calculer maintenant.

Pour cela, prenons pour axes des x et des y les axes principaux de l'indicatrice relative, l'équation de cette courbe sera alors :

$$Ax^2+Cy^2 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(Z_1-z)$$

et si l'on pose :

$$x = \frac{\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\sqrt{A}} \qquad y = \frac{\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{C}}$$

d'où :

$$\rho^2 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(Z_1-z)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on a :

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}$$

$$p=-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}+\frac{Z_1-z}{\varepsilon_1}=-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}+\frac{\rho^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

ce qui nous donne pour F :

$$F=\int\int f.\left(-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}+\frac{\rho^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\left(\rho\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}\right)d\omega$$

Il nous faut maintenant calculer $d\omega$.

Or, si nous appliquons les formules connues pour opérer un changement de variables dans une intégrale double, nous devons remplacer l'élément de surface représenté par $dx\,dy$, par l'élément

$$d\omega=\begin{vmatrix}\frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\varphi}\\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\varphi}\end{vmatrix}d\rho.d\varphi$$

or, en effectuant,

$$d\omega=\begin{vmatrix}\frac{\mathrm{Cos}\varphi}{\sqrt{A}} & \frac{-\rho\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{A}}\\ \frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{C}} & \frac{\rho\mathrm{Cos}\varphi}{\sqrt{C}}\end{vmatrix}d\rho.d\varphi=\frac{\rho}{\sqrt{AC}}d\rho.d\varphi$$

Portons cette valeur dans F et nous aurons :

$$F=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\rho_1}f\left(-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}+\frac{\rho^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}\,\frac{\rho^2}{\sqrt{AC}}d\rho$$

où nous désignons par ρ_1, limite de la seconde intégrale, la valeur de ρ qui correspond à l'ellipse limite de contact.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette valeur de ρ_1 est facile à calculer puisque pour elle p doit être nul, ce qui exige que

$$-\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}+\frac{\rho_1^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}=0$$

d'où l'on tire

$$\rho_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\delta_1}$$

Ceci posé, on a :

$$F=\int_0^{2\pi} d\varphi\left[f\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}\cdot\frac{1}{\sqrt{AC}}\right]\left[-\frac{\delta_1}{3\varepsilon_1}\rho^3+\frac{1}{5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\rho^5\right]_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\delta_1}}$$

ou en effectuant :

$$F=-\frac{2}{15}\frac{f}{\sqrt{AC}}\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{5}{2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}\,d\varphi$$

La valeur de la résistance au pivotement que nous venons d'obtenir peut être mise sous une forme remarquable, si l'on tient compte de la signification géométrique de l'intégrale qui y figure. Cette intégrale représente, en effet, à un facteur constant près, le contour de l'ellipse limite de contact.

Pour le démontrer, remarquons que si dans une ellipse

$$Ax^2+Cy^2=D$$

on pose :

$$x=\frac{\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{A}}\qquad y=\frac{\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\sqrt{C}}$$

ce qui exige :

$$\rho=\sqrt{D}$$

on en déduit :

$$ds\sqrt{D}\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or, si nous voulons que l'ellipse considérée, représente l'ellipse limite de contact, il nous suffit, comme nous l'avons vu, de poser :

$$D=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\delta_1$$

d'où l'on conclut :

$$ds=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{A}+\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{C}}$$

et cette valeur de ds portée dans F, nous donne :

$$F=-\frac{2}{15}\frac{f}{\sqrt{AC}}\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\right)^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int ds$$

Nous voyons ainsi que la somme des moments des forces de frottement prise le long d'une portion d'ellipse est proportionnelle à la longueur de la portion conjuguée, puisque pour évaluer F nous avons posé

$$x=\frac{\rho\,\mathrm{Cos}\varphi}{\sqrt{A}}\qquad y=\frac{\rho\,\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{C}}$$

tandis que pour trouver ds, il nous a fallu poser

$$x=\frac{\rho\,\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{A}}\qquad y=\frac{\rho\,\mathrm{Cos}\varphi}{\sqrt{C}}$$

Ce théorème, important dans la question qui nous occupe, pouvait être démontré, *à priori*, de la manière suivante :

La résistance au pivotement est, comme nous l'avons dit, représentée par la somme des moments des forces de frottement par rapport à la normale commune primitive, c'est-à-dire est représentée par $fff prd\omega$; or si nous prenons pour élément de surface, la zone comprise entre deux ellipses d'égale pression infiniment voisines et deux rayons vecteurs issus de leur centre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et infiniment voisins, nous n'aurons, puisque tout le long de cette zone la pression reste constante, qu'à former la somme de toutes les quantités $rd\omega$ quand le rayon vecteur tourne d'une circonférence, puis ensuite qu'à intégrer une seconde fois cette quantité multipliée par p, r variant de zéro jusqu'à sa valeur pour l'ellipse limite de contact. Or la première intégrale à former, $\int rd\omega$, est égale à $\int rdrds\mathrm{Sin}\theta$ en désignant par θ l'angle de deux diamètres conjugués, et comme dr est proportionnel à r puisque les ellipses successives que l'on considère sont semblables, cette intégrale est proportionnelle à $\int r^2 ds.\mathrm{Sin}\theta$.

Mais, l'on sait que si l'on désigne par r' la longueur du demi diamètre conjugué de r, on a toujours $rr'\mathrm{Sin}\theta = \text{constante}$, si donc on tient compte de cette relation dans l'intégrale à calculer, cette intégrale devient à un facteur constant près $\int \frac{r}{r'} ds$.

Enfin, il est facile de voir que l'on a toujours :

$$rds = r'ds'$$

ce qui réduit l'intégrale à $\int ds'$, expression que nous avons précédemment trouvée.

Nous avons ainsi démontré que la quantité $\int rd\omega$, ou si l'on veut, puisque p est constant le long de l'ellipse, que la somme des moments des forces de frottement prise le long d'une portion de l'ellipse est proportionnelle à la longueur de la portion conjuguée, si donc on prend cette somme de moments pour toute l'ellipse, on voit bien que la résistance au pivotement le long de cette courbe est proportionnelle à sa longueur.

Mais alors pour avoir la résistance totale au pivotement, il faudra faire la somme de toutes les résistances partielles correspondant à chaque ellipse jusqu'à l'ellipse limite; dans chacun des termes de cette somme la longueur de l'ellipse correspondante sera en facteur et comme cette longueur est égale à la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

longueur de l'ellipse limite multipliée par le rapport de similitude, comme p ne dépend que de p_0 et de ce rapport, on voit bien que la résistance totale sera égale à la longueur de l'ellipse limite de contact multipliée par un facteur indépendant de la forme de cette ellipse.

Ce résultat se voit d'ailleurs en intégrant de 0 à 2π la quantité qui donne F, et l'on obtient alors pour la valeur de la résistance totale au pivotement :

$$F=-\frac{2}{15}\frac{f}{\sqrt{AC}}\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\right)^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E$$

en désignant par E la longueur de l'ellipse limite de contact.

On peut mettre la valeur de F sous une forme plus simple, en remarquant que la surface de l'ellipse limite de contact est

$$S=\pi\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\delta_1}{\sqrt{AC}}$$

ce qui nous donne pour la valeur de F

$$F=-\frac{2}{15}f\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\frac{E.S}{\pi}$$

et comme nous avons démontré que le volume V_1 de la dépression était égal au demi cylindre ayant pour base S et pour hauteur la dépression δ_1 au point initial, nous avons :

$$F=-\frac{4}{15\pi}\frac{f}{\varepsilon_1}V_1E$$

ou encore

$$F=-\frac{4}{15\pi}fP.E$$

formule très-simple où f est le coefficient de glissement, P la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pression totale qui est une des données du problème et E le contour de l'ellipse limite de contact.

Maintenant que nous avons ainsi étudié la résistance au pivotement pour deux surfaces données de position, il ne nous reste plus pour terminer le sujet que nous nous sommes proposé, qu'à rechercher comment varie cette résistance lorsque l'une des surfaces tourne autour de la normale commune.

Or, d'après la formule que nous venons d'établir, la résistance au pivotement, ne dépend pour deux surfaces données que du contour de l'ellipse limite de contact; mais cette ellipse est semblable à l'indicatrice relative; nous sommes donc ainsi ramenés à étudier comment varie l'indicatrice relative lorsque l'une des surfaces tourne autour de la normale commune.

Pour cela, prenons pour axes de coordonnées les axes principaux de l'indicatrice de la surface fixe; l'équation de cette indicatrice sera :

$$Z_1 = a_1 x^2 + c_1 y^2$$

et si l'on désigne par α les angles que font les axes de l'indicatrice de la surface mobile avec les axes ainsi choisis, on aura pour équation de cette seconde indicatrice

$$Z_2 = a_2(x\mathrm{Cos}\alpha - y\mathrm{Sin}\alpha)^2 + c_2(x\mathrm{Sin}\alpha + y\mathrm{Cos}\alpha)^2$$

mais on sait que

$$z = \frac{\varepsilon_2 Z_1 + \varepsilon_1 Z_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

d'où l'on tire :

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)z = \varepsilon_2(a_1x^2+c_1y^2) + \varepsilon_1[a_2(x\mathrm{Cos}\alpha - y\mathrm{Sin}\alpha)^2 + c_2(x\mathrm{Sin}\alpha + y\mathrm{Cos}\alpha)^2]$$

Cette équation peut s'écrire :

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)z = (\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2 \mathrm{Cos}^2\alpha + \varepsilon_1 c_2 \mathrm{Sin}^2\alpha)x^2 + \varepsilon_1(c_2 - a_2)\mathrm{Sin}2\alpha . xy + (\varepsilon_2 c_1 + \varepsilon_1 a_2 \mathrm{Sin}^2\alpha + \varepsilon_1 c_2 \mathrm{Cos}^2\alpha)y^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou encore :

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)z=(\varepsilon_2 a_1+\varepsilon_1 a_2)x^2+(\varepsilon_2 c_1+\varepsilon_1 a_2)y^2+\varepsilon_1(c_2-a_2)(x\,\mathrm{Sin}\,\alpha+y\,\mathrm{Cos}\,\alpha)^2$$

ce qui nous montre que dans le mouvement de la surface mobile, toutes les indicatrices relatives restent constamment bi-tangentes à une même conique fixe qui a pour axes les axes de l'indicatrice de la surface fixe, et que la corde de contact est l'un des axes de l'indicatrice de la surface mobile.

On voit de même que l'équation précédente peut être mise sous la forme

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)z=(\varepsilon_2 a_1+\varepsilon_1 c_2)x^2+(\varepsilon_2 c_1+\varepsilon_1 c_2)y^2-\varepsilon_1(c_2-a_2)(x\,\mathrm{Cos}\,\alpha-y\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^2$$

ce qui prouve que toutes les indicatrices relatives sont encore bi-tangentes à une seconde conique fixe ayant les mêmes axes que la première, et que la corde de contact est le second axe de l'indicatrice de la surface mobile.

Ainsi, deux surfaces quelconques étant en contact, si l'une d'elles se déplace par rapport à l'autre en tournant autour de la normale commune, l'indicatrice relative change de forme, mais en restant constamment bi-tangente à deux coniques fixes qui ont toutes deux pour axes les axes de l'indicatrice de la surface fixe, et de telle sorte que les cordes de contact soient dirigées suivant les axes de l'indicatrice de la surface mobile.

Nous connaissons donc la loi de déformation de l'indicatrice relative et, par suite, celle de l'ellipse limite de contact qui à chaque instant lui est semblable.

En résumé, les résultats auxquels nous a conduit cette étude sont les suivants :

Lorsque deux surfaces quelconques étant en contact, l'une d'elles tourne autour de la normale commune, le frottement de pivotement est, à chaque instant, proportionnel au contour de l'ellipse limite de contact ; cette ellipse varie d'une manière continue et nous avons trouvé la loi de sa déformation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Remarquons en terminant que la théorie que nous avons faite en supposant que l'une des surfaces pivote autour de la normale commune, s'appliquerait au cas où les deux surfaces, assujetties à rester en contact, se déplaceraient d'une manière quelconque, car nous avons dit au début que ce déplacement équivalait à un glissement, une rotation et un pivotement. Si donc on décompose ainsi le mouvement quelconque considéré, il est clair qu'on peut appliquer au pivotement, le seul des trois mouvements composants que l'on n'ait pas étudié jusqu'ici, les résultats que nous avons obtenus.

Vu et approuvé :

Paris, le 24 décembre 1875.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 27 décembre 1875.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

Toulouse, Impr. Louis & Jean-Matthieu Douladoure.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC