SUR LA

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

A LA

SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS.

THÈSE DE MÉCANIQUE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Par P. Bourdonnay-Duclésio,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU COLLÉGE DE RENNES.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, 12.

1840.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

PROFESSEURS.

MM.
BIOT, *Doyen*.
THENARD.
LACROIX.
FRANCOEUR.
DE MIRBEL.
GEOFFROY SAINT-HILAIRE.
POUILLET.
PONCELET.
DE BLAINVILLE.
CONSTANT PRÉVOST.
DUMAS.
AUGUSTE SAINT-HILAIRE.
LIBRI.
DESPRETZ.

BEUDANT.

SUPPLÉANTS.

MM.
STURM.
LEFÉBURE DE FOURCY.
I. GEOFFROY SAINT-HILAIRE.
ADRIEN DE JUSSIEU.
PÉLIGOT.
MASSON.
DUHAMEL.
LAURENT.
DELAFOSSE.
BRONGNIART.

A ma Mère.

Témoignage d'amour et de respect.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR LA

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

A LA

SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS.

---

1. En admettant que tous les corps contiennent une quantité inépuisable d'électricité neutre, c'est-à-dire résultant de la combinaison de deux fluides dont chacun attire les molécules de l'autre avec une intensité égale à la force répulsive qu'il exerce sur ses propres molécules; on peut rechercher quelle sera la distribution de ces fluides sur des corps isolés ou sur des corps soumis à leur influence mutuelle, en admettant la loi expérimentale de l'attraction inverse au carré des distances, loi qui dans le cas de la sphère peut se prouver analytiquement comme nous allons bientôt le démontrer.

La solution complète du problème peut être envisagée sous deux points de vue : 1° théorèmes généraux relatifs à un corps quelconque; 2° solution complète dans des cas particuliers.

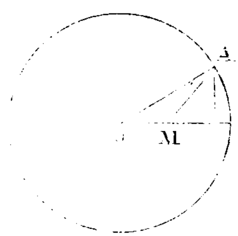
La solution de la première partie présente des difficultés que l'analyse n'a pu vaincre jusqu'ici entièrement. Il est évident qu'il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre, que l'action du fluide libre sur un point intérieur à la masse soit nulle. Comme les composantes de cette action sont exprimées par les différentielles partielles d'une même fonction $V = \int \frac{dm}{r}$, il faut et il suffit que V soit constante.

Il en résulte, comme l'a remarqué M. Bertrand, dans une Note insérée dans le 4e volume du journal de M. Liouville, que l'électricité doit se porter à la surface des corps, et y former une couche infiniment mince; car sans cela V satisferait, comme on sait, pour les points intérieurs, à l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

et ne pourrait par conséquent pas être constante.

Les principaux cas particuliers traités jusqu'ici sont : la sphère, l'ellipsoïde et deux sphères en présence.



2. L'électricité peut évidemment rester en équilibre à la surface de la sphère, lorsqu'elle y forme une couche homogène. Nous allons démontrer qu'il n'y a qu'un état possible, et il en résultera que ce sera celui-là.

Considérons, pour plus de simplicité, la sphère d'un rayon $= 1$, et la fonction V relative à un point M pris sur l'axe que nous prenons pour celui des abscisses. Appelons z l'abscisse de M; x, y, les coordonnées du point A, et ε l'épaisseur électrique en ce point. Alors

$$V = \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi y\, ds\varepsilon}{\sqrt{y^2 + (x-z)^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi\varepsilon\, dx}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}};$$

en développant le radical, on aura, en négligeant 2π,

$$V = \int_{-1}^{+1} \varepsilon dx\,(1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots\; X_n z^n) = \text{constante},$$

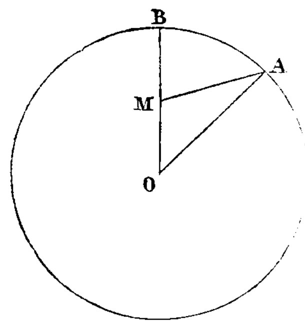
quel que soit z, d'ou

$$\int_{-1}^{+1} \varepsilon dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \varepsilon dx \mathrm{X}_1 = 0, \ldots \int_{-1}^{+1} \varepsilon dx \mathrm{X}_n = 0.$$

Si donc on avait deux solutions $\varepsilon = \psi = \psi'$, on aurait la suite d'équations

$$\int_{-1}^{+1} (\psi - \psi') dx = 0, \int_{-1}^{+1} (\psi - \psi') \mathrm{X}_1 = 0, \ldots \int_{-1}^{+1} (\psi - \psi') \mathrm{X}_n = 0,$$

ce qui exige que $\psi = \psi'$; C. Q. F. D.



5. Nous allons maintenant chercher à déduire de l'homogénéité de la couche, la loi de l'attraction inverse au carré des distances.

Soit r le rayon de la sphère, M le point intérieur, λ la distance AM, u la distance OM, μ l'angle OMA et θ l'angle BOA.

L'attraction de la couche sera, quelle que soit la loi $\varphi(\lambda)$, dirigée suivant OM, et nous aurons pour son expression

$$\mathrm{A} = r^2 dr \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda) \sin\theta d\theta\, d\omega \cos\mu;$$

mais

$$\lambda^2 = u^2 - 2ru\cos\theta + r^2,$$

d'ou

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{u - r\cos\theta}{\lambda} = \cos\mu, \qquad (\alpha)$$

et

$$\lambda\frac{d\lambda}{d\theta} = ru\sin\theta. \qquad (\beta)$$

Si dans l'expression précédente nous remplaçons cos μ par sa valeur, elle deviendra

$$A = 2\pi r^2 dr \int_0^{\pi} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{du} \sin\theta d\theta;$$

il faudra donc, pour l'équilibre, qu'on ait

$$B = \int_0^{\pi} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{du} \sin\theta d\theta = 0.$$

Pour en déduire $\varphi(\lambda)$, posons

$$\varphi_1(\lambda) = \int \varphi(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad V = \int_0^{\pi} \varphi_1(\lambda) \sin\theta d\theta,$$

nous aurons alors

$$B = \frac{dV}{du},$$

et puisque cette quantité doit être nulle, on aura $V = F(r)$. Mais, d'après la valeur de $\sin\theta$, tirée de $(\mathfrak{C})$, on a

$$V = \int_0^{\pi} \varphi_1(\lambda) \frac{\lambda}{ru} \frac{d\lambda}{d\theta} d\theta,$$

et si l'on prend λ pour variable indépendante, il viendra, en posant $\psi(\lambda) = \int \varphi_1(\lambda) \lambda d\lambda$,

$$V = \frac{\psi(r+u) - \psi(r-u)}{ru} = F(r).$$

Il faudra donc déterminer $\psi(r)$ d'après la condition

$$\psi(r+u) - \psi(r-u) = uf(r);$$

différentiant deux fois par rapport à u, il vient

$$\psi''(r+u) - \psi''(r-u) = 0,$$

quels que soient r et u, d'où

$$\psi'' = \text{constante} = c,$$

d'où

$$\psi(\lambda) = c\lambda^2 + A\lambda + B = \int \varphi_1(\lambda) \lambda d\lambda;$$

différentiant,

$$2c\lambda + A = \varphi_1(\lambda) \lambda d\lambda.$$

d'où

$$\varphi(\lambda) = \frac{a'}{\lambda^2}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Du reste, le théorème de M. Ivory, qui est vrai quelle que soit la loi, donnerait d'une manière très simple le même résultat.

Corollaire. De ce qu'il ne peut exister qu'une seule couche homogène, il résulte qu'il ne peut pas y en avoir d'autre d'une forme quelconque; car, supposons qu'un certain état où l'épaisseur serait représentée par une fonction $\varphi(\theta, \psi)$, des coordonnées angulaires, pût exister; en prenant la même fonction par rapport à d'autres axes passant aussi par le centre, on formera d'autres états possibles, puisque cela reviendrait à donner un mouvement commun à tous les points du système. Le nombre en serait infini, et en prenant pour chacun de ces points la moyenne des épaisseurs, on formerait encore un état qui serait homogène; et comme, d'après ce que nous venons de prouver, ce nouvel état est impossible, le premier ne peut pas exister (*).

Distribution de l'électricité à la surface d'un ellipsoïde.

4. Il est facile de prouver que l'action exercée par une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques, sur un point intérieur à cette couche, est nulle.

En effet, considérons l'action d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur. Les composantes de cette action, parallèlement à ses trois axes principaux, seront, comme on le sait, de la forme

$$\begin{aligned} A &= H\int\int r\cos g\,d\omega, \\ B &= H\int\int r\cos h\,d\omega, \\ C &= H\int\int r\cos k\,d\omega, \end{aligned}$$

r étant la distance du point attiré à la surface, ω l'élément de la sphère décrite du même point, avec un rayon égal à 1, et g, h, k les angles de r avec chacun des axes dont je désignerai la grandeur par a, b, c.

En substituant à r la valeur tirée de l'équation de la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, et aux coordonnées rectilignes, les coordonnées

(*) Cette remarque, due à M. Bertrand, est insérée dans le *Journal de Mathématiques*, tome IV, page 500.

angulaires, nous aurons, en négligeant les termes qui s'annullent, et après quelques simplifications,

$$A = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{bc \cos^2\theta \sin\theta d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}},$$

et pour B et C des expressions analogues.

Or, si pour augmenter les axes dans le rapport de $(1 + h)$ à l'unité, c'est-à-dire si nous faisons

$$a' = a(1 + h), \quad b' = b(1 + h), \quad c' = c(1 + h),$$

ce qui augmentera l'ellipsoïde d'une couche comprise entre la surface extérieure et une autre semblable et semblablement placée, les expressions A, B, C ne changeront pas. Donc l'action de cette couche sur un point intérieur sera nulle.

Nous en concluons que l'électricité pourra prendre la forme d'une telle couche; mais on n'est pas parvenu jusqu'ici à démontrer que cette forme était la seule possible.

Distribution de l'électricité à la surface de deux sphères en présence.

5. Nous considérerons, 1° les sphères, lorsqu'elles sont tangentes, 2° lorsqu'elles sont à de grandes distances, 3° enfin dans un cas quelconque.

6. *Cas de deux sphères en contact.* Il est évident qu'il y aura toujours un état possible dans lequel la distribution sera symétrique par rapport à la ligne des centres; nous prouverons ensuite que cet état est unique.

L'action des électricités des deux sphères sur un point quelconque intérieur à chacune d'elles, par exemple sur un point M situé dans la première sur l'axe des centres, doit être nulle.

Appelons x la distance de ce point au centre de la première, a la distance de l'élément attirant à ce centre, μ le cosinus de l'angle de cette ligne et de l'axe, et y la densité électrique au point attirant. Appelons x_1, b, μ_1, y_1, les quantités analogues pour l'autre sphère.

Comme les composantes sont les différentielles partielles de la fonction V, il faudra et il suffira que cette fonction soit constante pour un point quelconque situé dans l'intérieur de chacune d'elles. Donc, en remarquant, comme nous l'avons démontré n° 1, que l'électricité forme une couche infiniment mince, on aura pour un point m intérieur à la première,

$$V = \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi a^2 d\mu\, y}{\sqrt{a^2 - 2a\mu x + x^2}} + \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi b^2 d\mu_1\, y_1}{\sqrt{b^2 - 2b\mu_1 x_1 + x_1^2}};$$

et pour un point m' intérieur à la deuxième,

$$V_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi b^2 d\mu_1\, y_1}{\sqrt{b^2 - 2b\mu_1 x_1 + x_1^2}} + \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi a^2 d\mu\, y}{\sqrt{a^2 - 2a\mu x + x^2}}$$

et si nous posons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y\, d\mu}{\sqrt{1 - 2\mu\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}}} = 2f\left(\frac{x}{a}\right), \quad \int_{-1}^{+1} \frac{y_1\, d\mu_1}{\sqrt{1 - 2\mu_1\frac{b}{x_1} + \frac{b^2}{x_1^2}}} = 2F\left(\frac{b}{x_1}\right),$$

il viendra

$$\frac{V}{4\pi} = \text{const.} = af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{x_1}F\left(\frac{b}{x_1}\right) = h,$$

et

$$\frac{V_1}{4\pi} = \text{const.} = bF\left(\frac{x_1}{b}\right) + \frac{a^2}{x}f\left(\frac{a}{x}\right) = g;$$

puis, si nous remarquons que $x_1 = c - x$ et $x = c - x_1$, elles deviendront

$$(a) \quad \begin{cases} af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x}F\left(\frac{b}{c-x}\right) = h, \\ bF\left(\frac{x_1}{b}\right) + \frac{a^2}{c-x_1}f\left(\frac{a}{c-x_1}\right) = g. \end{cases}$$

Posons

$$\frac{x_1}{b} = \frac{b}{c-x'}, \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{b^2}{c-x'};$$

x et x' pouvant varier entre les mêmes limites, nous les regarderons comme les mêmes; et en substituant dans les équations précédentes, nous obtiendrons deux équations dépendant de la même variable, et entre lesquelles nous pourrons éliminer une des fonctions, la fonction F par exemple, et l'on aura, pour déterminer l'autre fonction, l'équation

$$a f\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a^2 b}{c^2 - b^2 - cx} f\left(\frac{ac - ax}{c^2 - b^2 - cx}\right) = h - \frac{gb}{c - x}.$$

7. La fonction f étant déterminée, la seconde des équations (a) fera facilement connaître F.

De la connaissance de ces deux fonctions nous passerons facilement, comme nous l'exposerons tout-à-l'heure, à la détermination de y et de y_1, c'est-à-dire des épaisseurs électriques, ce qui est le but que nous nous proposons.

C'est donc l'équation précédente qu'il s'agit d'intégrer. Elle renferme deux constantes qu'on regardera comme connues, dans le cours du calcul. Nous les déterminerons ensuite par la condition de retrouver sur chaque sphère la quantité d'électricité primitivement introduite.

8. Dans le cas où ces sphères se touchent, on a $g = h$; et si, pour plus de simplicité, on fait $a = 1$, d'où $c = 1 + b$, l'équation à intégrer deviendra

$$(\alpha) \quad f(x) - \frac{b}{b + (1 + b)(1 - x)} f \frac{1 + b - x}{b + (1 + b)(1 - x)} = h - \frac{hb}{1 + b - x}.$$

Pour intégrer cette équation, on peut poser le premier membre successivement égal à chacun des termes du second, et l'on obtient une solution en ajoutant ces deux résultats. Je prouverai ensuite que cette solution est unique.

Pour le premier cas, M. Poisson pose

$$f(x) = \frac{h'}{1 - x} \int_0^1 \frac{t^{\frac{m}{1+x} + n}}{1 - t} dt,$$

et il trouve

$$m = \frac{b}{1 + b}, \quad n = -1 \quad \text{et} \quad h' = \frac{bh}{1 + b};$$

donc, pour ce cas, on a

$$f(x)=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}\,dt.$$

Dans le deuxième cas il trouve, *à priori*, que l'équation est satisfaite par

$$fx=-\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}\,dt,$$

de sorte qu'une solution de l'équation (α) est

$$f(x)=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \left[\frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1}-t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-\frac{b}{1+b}}}{1-t}\right]dt,$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$fx=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right)t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}\,dt.$$

9. Pour compléter cette solution, M. Poisson trouve qu'il faut lui ajouter un terme de la forme $\frac{P}{1-x}$, P étant une constante ou une certaine fonction de x; et il en conclut que, comme $f(x)$ est de nature à ne jamais devenir infinie, il faudra que P soit constamment nul, sans quoi le terme $\frac{P}{1-x}$ de cette fonction serait infini pour $x=1$. Cette conséquence ne me semblant pas exacte lorsque P est une fonction de x, je vais chercher à démontrer de la manière suivante, qui me paraît très générale, que la solution est unique.

Soit $\varphi(x)$ une solution de $f(x)$, toute autre solution pourra être mise sous la forme

$$f(x)=\varphi(x)+\frac{\psi(x)}{1-x},$$

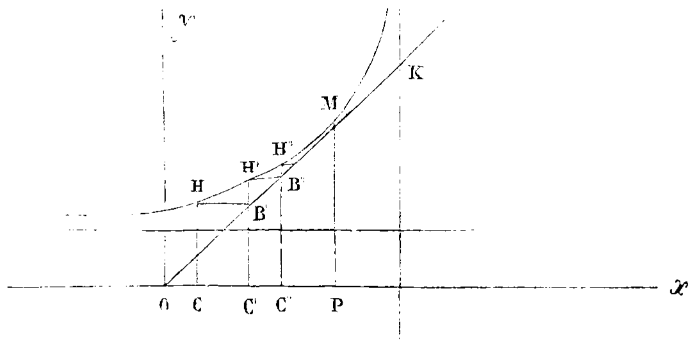
$\psi(x)$ devant s'évanouir pour $x=1$. Or, en substituant cette valeur dans l'équation (α), n° **8**, et ayant égard à ce que $\varphi(x)$ y satisfait, l'équation qui détermine $\psi(x)$ se réduit à

$$(1)\qquad \psi(x)=\psi\left[\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right].$$

Je construis la courbe dont l'équation serait

$$(2) \qquad \mathfrak{C} = \frac{1+b-\alpha}{b+(1+b)(1-\alpha)}.$$

Elle représente une hyperbole équilatère dans la position suivante.



La bissectrice OK, menée par l'origine O, est tangente à la courbe au point M, pour lequel $\alpha = 1$. Soit α l'abscisse OC d'un point quelconque H de la courbe; son ordonnée $\mathfrak{C} = \frac{1+b-\alpha}{b+(1+b)(1-\alpha)}$ sera HC; donc, en vertu de l'équation (1), nous aurons

$$\psi(\text{OC}) = \psi(\text{HC}) = \psi(\text{B'C'}) = \psi(\text{OC'}).$$

De $\psi(\text{OC}) = \psi(\text{OC'})$ nous passerions à $\psi(\text{OC'}) = \psi(\text{OC''})$, et ainsi de suite; et nous finirons par nous rapprocher infiniment de OP. Nous aurons donc à la limite

$$\psi(\text{OP}) = \psi(\text{OP}) = \psi(1) = 0,$$

ou plus généralement

$$\psi(x) = 0; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. Connaissant $f(x)$, il sera facile de déterminer $\mathrm{F}(x)$. Pour cela nous mettrons la deuxième des équations (a), n° **6**, sous la forme

$$b\mathrm{F}\left(\frac{x_1}{b}\right) + \frac{1}{1+b-x_1} f\left(\frac{1}{1+b-x_1}\right) = h;$$

en substituant à $f\left(\frac{1}{1+b-x_1}\right)$ sa valeur tirée de $f(x)$, nous en déduirons la valeur de $bF\left(\frac{x_1}{b}\right)$, et par suite, celle de $bF(x)$. On trouvera ainsi

$$bF(x) = \frac{h}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{\left(t^{\frac{-b}{1+b}} - 1\right) t^{\frac{x}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}\,dt.$$

Maintenant pour compléter la solution, nous allons déterminer h.

Il est facile de voir qu'en appelant e et e_1 les quantités d'électricité répandues sur les sphères dont les rayons sont 1 et b, on aura

$$e = 4\pi f(0) \quad \text{et} \quad e_1 = 4\pi b^2 F(0).$$

Appelant E l'électricité totale qui est connue, il viendra

$$E = \frac{4\pi bh}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{\frac{-1}{1+b}} + t^{\frac{-b}{1+b}} - 2}{1-t}\,dt,$$

équation qui servira à déterminer h.

11. Occupons-nous maintenant de calculer la valeur de y dont la recherche est l'objet de cette analyse. Comme y_1 se calculerait absolument de la même manière, nous ne nous en occuperons pas.

Nous avons pour déterminer y la première équation (m), n° 6, qui devient, dans le cas de $r = 1$,

(1) $$\int_{-1}^{+1} \frac{y\,d\mu}{\sqrt{1 - 2\mu x + x^2}} = 2f(x);$$

y est une fonction de μ, et d'après les propriétés connues des fonctions X_n, coefficients des diverses puissances de x dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\mu x + x^2}}$, cette fonction pourra se développer sous la forme

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots . y_n,$$

ou bien encore

(2) $$y = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots A_n X_n,$$

A_0, A_1,... A_n étant des constantes. Développant le second membre et le radical contenu dans le premier de l'équation (1), il viendra

$$\int_{-1}^{1} y\, X_n\, d\mu = \frac{2d^n f(0)}{dx^n} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Remplaçant y par son développement dont le terme général est $A_n X_n$, et nous rappelant que $\int_{-1}^{+1} X_p X_n \, d\mu = 0$, quand p diffère de m et $= \frac{2}{2n+1}$ quand $p = n$, nous aurons en définitive, pour déterminer A_n, l'équation

$$A_n \times \frac{2}{2n+1} = 2f^{(n)}(0) \times \frac{1}{1.2.3\ldots n};$$

d'où

$$A_n = \frac{2n+1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0).$$

Nous aurons donc pour y le développement

$$X_0 f(0) + 3X_1 f'(0) + \frac{5}{1.2} X_2 f''(0) + \ldots,$$

dans lequel les termes $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont faciles à former.

12. Il est facile de démontrer que pour $\mu = 1$ nous aurons aussi $(a)\; y = 2x \frac{df(x)}{dx} + f(x)$ dans laquelle on ferait $x = 1$ après la différentiation. En effet, nous aurons, d'après l'équation (1),

$$2f(x) = \sum \int_{-1}^{+1} A_n X_n^2 x^n \, d\mu = \sum A_n \frac{2}{2n+1} x^n,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = A_0 + \frac{A_1}{3} x + \frac{A_2}{5} x^2 + \ldots$$

Opérant les calculs indiqués dans le deuxième membre de l'équation (a), et faisant ensuite $x = 1$, il viendra

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

qui est bien la valeur (β) de y, puisque, dans ce cas, μ étant égal à l'unité, on a $X_0 = X_1 = X_2 \ldots = 1$.

13. M. Poisson démontre que quand on est parvenu à développer suivant les puissances ascendantes de x la fonction $f(x)$, où nous avons supposé $\mu = 1$, celle de la fonction générale qu'il appelle $\varphi(\mu, x)$, où μ est quelconque, s'obtient de la première en multipliant respectivement ses termes par X_0, X_1, $X_2 \ldots$ Il prouve aussi que dans ce cas la valeur générale de y est donnée par la formule

$$y = \frac{2xd\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

dans laquelle on fait $x = 1$ après la différentiation. Donc on pourra calculer dans tous les cas la valeur de y qui est l'objet de nos recherches. On trouverait des formules analogues pour l'autre sphère et l'on aurait pour y_1 l'expression

$$y_1 = 2xd. \frac{\Phi(\mu_1, x)}{dx} + \Phi(\mu_1, x).$$

Nous reviendrons plus tard sur la détermination de ces épaisseurs dans le cas général. Nous allons maintenant déduire de cette analyse les principaux résultats donnés par l'expérience dans quelques cas.

14. Démontrons d'abord que l'électricité est nulle au point de contact. Comme la formule (a), n° **9**, conduirait pour l'épaisseur à une indétermination, nous allons donner à $f(x)$ une autre forme. Pour cela posons $t = \theta^{1-x}$, il vient en substituant,

$$f(x) = \frac{bh}{1+b} \int_0^1 \frac{1 - \theta^{\frac{1-x}{1+b}}}{1 - \theta^{1-x}} \theta^{-\frac{1}{1+b}} d\theta.$$

Je développe le numérateur et le dénominateur suivant les puissances de $(1 - x)$, et il vient

$$\int_0^1 \frac{1 - \theta^{\frac{1-x}{1+b}}}{1 - \theta^{1-x}} \theta^{-\frac{1}{1+b}} d\theta = \int_0^1 \frac{1}{1+b}\left[1 - \frac{b \log \theta}{2(1+b)}(1-x) + \ldots\right] \theta^{-\frac{1}{1+b}} d\theta.$$

Effectuant les intégrations indiquées, on trouvera

$$fx = \frac{h}{1+b}\left(1 + \frac{1-x}{2} + \ldots\right), \quad \frac{df(x)}{dx} = -\frac{h}{2(1+b)};$$

substituant dans l'équation

$$y = 2x\frac{df(x)}{dx} + f(x),$$

et faisant $x = 1$, il viendra

$$y = 0; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

15. Cherchons maintenant le rapport β des épaisseurs moyennes B et A de l'électricité sur les deux sphères. On aura, comme il est facile de le voir,

$$B = F(o),$$

et par conséquent

$$B = \frac{h}{b(1+b)} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t}\, dt,$$

et de même

$$A = f(o) \quad \text{ou} \quad A = \frac{bh}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t}\, dt;$$

d'où l'on déduit

$$\beta = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - t^{-\frac{1}{1+b}}}{1-t}\, dt}{\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t}\, dt};$$

et comme $\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{dt}$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad \int_0^1 \left(\frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} + t^{\frac{b}{1+b} - 1} \right) dt = \frac{1+b}{b} + \int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t}\, dt,$$

nous trouverons pour limite, en substituant dans l'expression précédente et réduisant,

$$\beta = \int_0^1 \frac{\log \frac{1}{t}}{1-t}\, dt = 1 + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{n^2},$$

valeur qu'Euler a trouvée $= \frac{\pi^2}{6} = 1,6449$.

16. Calculons maintenant l'épaisseur électrique aux points diamétralement opposés aux points de contact, c'est-à-dire aux points pour lesquels $\mu = -1$ et $\mu_1 = -1$.

Il suffira de faire pour la première sphère $x = -1$ dans l'expression $y = 2x\frac{df(x)}{dx} + f(x)$; on trouvera facilement

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x)}{1-x} - \frac{b^2 h}{(1+b)^2(1-x)^3}\int_0^1 \frac{\left(t^{\frac{-1}{1+b}} - 1\right)t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}\log\frac{1}{t}\,dt.$$

Multipliant par $2x$, ajoutant $f(x)$ et faisant $x = -1$, on trouvera sur la première sphère

$$Y = \frac{b^2 h}{4(1+b)^2}\int_0^1 \frac{\left(t^{\frac{-1}{1+b}} - 1\right)t^{\frac{-b}{2(1+b)}}}{1-t}\log\frac{1}{t}\,dt;$$

on trouverait de même pour l'autre

$$Z = \frac{h}{4b(1+b)^2}\int_0^1 \frac{\left(t^{\frac{-b}{1+b}} - 1\right)t^{\frac{-1}{2(1+b)}}}{1-t}\log\frac{1}{t}\,dt.$$

Ayant ces deux expressions et celles des deux épaisseurs moyennes A et B, on pourra, en les comparant, vérifier la plupart des résultats obtenus expérimentalement par Coulomb. Je vais me borner à en indiquer les principaux.

17. 1°. Quand les deux sphères ont le même rayon 1, on trouve que les quantités d'électricité qu'elles contiennent sont égales, et l'on a

$$Y = h\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{\theta}}{1+\theta^2}\,d\theta \left(\text{en faisant}\quad \theta = t^{\frac{1}{4}}\right)$$
$$= h\left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\ldots \pm \frac{1}{(2n+1)^2}\right] = \text{approximativement } h \times 0{,}916.$$

L'épaisseur moyenne étant alors

$$A = \frac{h}{2}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}} - 1}{1-t}\,dt = h\int_0^1 \frac{d\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} = h\log 2,$$

on trouvera $\frac{Y}{A} = 1{,}322$ au lieu de $1{,}27$ donné par l'expérience.

2°. Le rapport de la plus grande épaisseur sur la plus petite des deux sphères à l'épaisseur moyenne sur la plus grande, c'est-à-dire $\frac{Z}{A}$, tend vers une limite fixe à mesure que b diminue.

En effet, on trouvera en substituant et en ayant égard à la valeur de $\int_0^1 \frac{t^{\frac{-1}{1+b}}-1}{1-t}\,dt$, trouvée précédement (n° **15**),

$$\frac{Z}{A}=\frac{\int_0^1 \frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}}-1\right)t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t}\log\frac{1}{t}\,dt}{4b(1+b)^2+4b^2(1+b)\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}\,dt};$$

développant les deux termes suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$ et simplifiant, on trouvera pour $b=0$,

$$\frac{Z}{A}=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1-t}\log^2\frac{1}{t}\,dt,$$

ou bien, en posant $\theta=t^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{Z}{A}=2\int_0^1 \frac{\log^2\frac{1}{\theta}}{1-\theta^2}\,d\theta=1+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3:$$

en développant, on trouverait enfin

$$\frac{Z}{A}=4{,}20721\ldots,$$

résultat différant peu de celui donné par l'expérience.

3°. Le rapport de la plus grande épaisseur sur la plus grande sphère à son épaisseur moyenne doit évidemment tendre vers l'unité, à mesure que le rayon de l'autre sphère diminue, c'est-à-dire que

$$\lim.\ \frac{Y}{A}=1.$$

En effet, l'expression de Y peut se mettre sous la forme

$$Y=\frac{b^2h}{4(1+b)^2}\left[\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{2(1+b)}}-t^{\frac{-b}{2(1+b)}}}{1-t}\log\frac{1}{t}\,dt+\int_0^1 t^{\frac{b}{2(1+b)}-1}\log\frac{1}{t}\,dt\right],$$

ou bien, en remarquant que la deuxième partie $= \frac{4(1+b)^2}{b^2}$,

$$Y = h + \frac{b^2 h}{4(1+b)^2}(\ldots.).$$

D'après la valeur (1) trouvée n° **15** pour

$$\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t}\,dt,$$

on aura aussi

$$A = h\left[1 + \frac{bh}{1+b}(\ldots.)\right];$$

d'où

$$\frac{Y}{A} = \frac{1 + \frac{b^2}{4(1+b)^2}\int(\ldots.)}{1 + \frac{b}{1+b}\int(\ldots.)},$$

quantité évidemment égale à 1 pour $b = 0$. C. Q. F. D.

18. Après avoir trouvé l'épaisseur y dans les cas particuliers $\mu = 1$ et $\mu = -1$, nous allons chercher son expression dans le cas général. Pour cela nous allons déduire la fonction $\varphi(\mu, x)$ de $f(x)$ d'après la règle citée au n° **13**, et il nous viendra pour la valeur générale de l'épaisseur,

$$y = 2x\frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

dans laquelle on fera $x = 1$ après la différentiation. Pour obtenir $\varphi(\mu, x)$, nous allons développer $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, et nous multiplierons respectivement ses termes par $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$.

Si nous développons le dénominateur de $f(x)$, c'est-à-dire $(1 = t)^{-1}$, nous aurons

$$1 + t + t^2 + \ldots + t^n;$$

d'où

$$f(x) = bh\left\{\frac{1}{b} - \frac{1}{1+b-x} \ldots + \frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} - \frac{1}{(1+b)(1+x)-[1+(1+b)n]x}\right\}.$$

La partie positive du terme général de $f(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{b+n(1+b)}\left[1-\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}x\right]^{-1}$$
$$=\frac{1}{b+n(1+b)}\left[1+\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}x+\frac{n^2(1+b)^2}{[b+n(1+b)]^2}x^2+\ldots\right],$$

et la partie correspondante de $\varphi(\mu, x)$ sera

$$\frac{1}{b+n(1+b)}\left\{1+X_1\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}x+X_2\frac{n^2(1+b)^2}{[b+n(1+b)]^2}x^2+\ldots\right\}.$$

En comparant la quantité entre parenthèses au développement de $(1-2\mu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, qui est

$$1+X_1x+X_2x^2+\ldots,$$

on en conclut que

$$\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x}=\frac{1}{b+n(1+b)}\left\{1-\frac{2\mu n(1+b)}{b+n(1+b)}x+\frac{n^2(1+b)^2}{[b+n(1+b)]^2}x^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Appelons, pour plus de simplicité, le second membre R_n; il viendra

$$R_n=\{[b+n(1+b)]^2-2\mu n(1+b)[b+n(1+b)]x+n^2(1+b)^2x\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous trouverions de même pour l'expression générale de la partie négative de $\varphi(\mu, x)$,

$$R'_n=\{(1+b)^2(1+n)^2-2\mu[1+(1+b)n](1+b)(1+n)x+[1+(1+b)n]^2x^2\}^{-\frac{1}{2}};$$

nous aurons donc pour le développement complet de $\varphi(\mu, x)$,

$$\varphi(\mu, x)=bh(R_0-R'_0+R_1-R'_1+\ldots+R_n-R'_n).$$

Nous passerions facilement de cette valeur à celle de y, d'après ce que nous avons dit au commencement de ce numéro.

19. On peut vérifier cette valeur en la faisant servir à retrouver l'épaisseur électrique dans un des cas précédemment traités; par exemple celle des points opposés au contact dans le cas d'égalité des deux sphères. L'expression générale est

$$y=2x\frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx}-\varphi(\mu, x),$$

dans laquelle on fait $x = 1$ après la différentiation. Dans le cas en question, c'est-à-dire quand $b = 1$, il vient

$$R_n = [(1 + 2n)^2 - 2\mu x 2n \times (2n + 1)x + 2^2 n^2 x^2]^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$R'_n = [2^2(n + 1)^2 - 2\mu(2n + 1)2(n + 1)x + (2n + 1)^2 x^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Si nous faisons

$$K_n = [(1 + n)^2 - 2\mu n(n + 1)x + n^2 x^2]^{-\frac{1}{2}},$$

on aura

$$R_n = K_{2n} \quad \text{et} \quad R'_n = K_{2n+1};$$

d'où

$$\varphi(\mu, x) = h(K_0 - K_1 + K_2 - K_3 + \ldots K_{2n} - K_{2n+1}).$$

Or nous trouvons, après avoir fait $x = 1$, en appelant A_n le terme général,

$$A_n = 2x\frac{dK_n}{dx} + K_n = \frac{2n + 1}{[(1 + n)^2 - 2n(n + 1)\mu + n^2]^{-\frac{3}{2}}}.$$

Si dans cette expression nous faisons $\mu = -1$, il viendra pour le terme général A_n de l'électricité aux points opposés au contact :

$$A_n = \frac{1}{(1 + 2n)^2};$$

donc enfin

$$y = h\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots \pm \left(\frac{1}{2n + 1}\right)^2\right],$$

comme nous l'avions trouvé précédemment.

20. Nous avons trouvé précédemment que l'électricité est nulle au point de contact; nous allons maintenant faire voir qu'elle croît lentement, et qu'elle est insensible dans le voisinage de ce point. Pour cela, il suffira de prouver que si nous développons l'épaisseur suivant les puissances ascendantes de $1 - \mu$, son expression et sa première dérivée sont nulles pour $\mu = 1$; c'est-à-dire que y ne dépendra que de $(1 - \mu)^2$, quantité plus petite que 0,0001 tant que μ correspond à un arc moindre que $9°$.

Nous avons, d'après le n° **18**, en supprimant bh qui est ici inutile,

$$\varphi(\mu, x) = \sum (\mathrm{R}_n - \mathrm{R}'_n);$$

développant suivant les puissances ascendantes de $(1 - \mu)$, il vient

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{b+(1+b)n-(1+b)nx} - \frac{[b+(1+b)n](1+b)nx}{[b+(1+b)n-(1+b)nx]^3}(1-\mu)+\ldots,$$

$$\mathrm{R}'_n = \frac{1}{(1+n)(1+b)-[1+(1+b)n]x} - \frac{(1+n)(1+b)[1+(1+b)n]x}{\{(1+n)(1+b)-[1+(1+b)n]x\}^3}(1-\mu)+\ldots$$

En retranchant ces quantités, la partie indépendante de μ sera de la forme $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}'_n$, et précisément $= f(x)$. D'ailleurs il est facile de voir que

$$\frac{[b+(1+b)n](1+b)nx}{[b+(1+b)n-(1+b)nx]^3} = \frac{x}{2}\frac{d^2.x\mathrm{S}_n}{dx^2},$$

$$\frac{(1+n)(1+b)[1+(1+b)n]x}{\{(1+n)(1+b)-[1+(1+b)n]x\}^3} = \frac{x}{2}\frac{d^2.x\mathrm{S}'_n}{dx^2};$$

nous aurons donc définitivement

$$\varphi(\mu, x) = f(x) - \frac{x}{2}\frac{d^2.xf(x)}{dx^2}(1-\mu)+\ldots$$

Le premier terme $f(x)$ ne donne rien pour la partie qui lui correspond dans la valeur de y, ainsi que nous l'avons vu n° **14**. Il suffit donc de nous occuper de la partie de y provenant du deuxieme terme, et de prouver qu'elle est nulle. On trouvera, d'après la formule

$$y = 2x\frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

que cette partie est égale à

$$-\left[\frac{3x}{2}\frac{d^2.xf(x)}{dx^2} + x^2\frac{d^3xf(x)}{dx^3}\right](1-\mu). \qquad (\alpha)$$

Pour former cette partie, dans laquelle il faudra faire ensuite $x=1$, je pose, comme précédemment, afin d'éviter l'indétermination,

$$t = b^{1-x};$$

alors

$$xf(x) = \frac{bh}{1+b}\int_0^1 \frac{\left(1-\theta^{\frac{1-x}{1+b}}\right)x\theta^{-\frac{1}{1+b}}}{1-\theta^{1-x}}\,d\theta.$$

Développant suivant les puissances de $(1-x)$, il vient

$$\frac{1-\theta^{\frac{1-x}{1+b}}}{1-\theta^{1-x}} = \frac{1}{1+b} - \left[\frac{1}{1+b} + \frac{b\log\theta}{2(1+b)^2}\right](1-x) + \left[\frac{b\log\theta}{2(1+b)^2} - \frac{b(1-b)\log^2\theta}{12(1+b)^3}\right](1-x)$$
$$+\left[\frac{b(1-b)\log^2\theta}{12(1+b)^3} + \frac{b^2\log^3\theta}{24(1+b)^4}\right](1-x)^3 + \ldots.$$

On déduit de cette formule, en faisant $x=1$, après les différentiations, et intégrant ensuite entre 0 et 1,

$$\frac{d^2xf(x)}{dx^2} = -\frac{h}{1+b} - \frac{(1-b)h}{3(1+b)b},\quad \frac{d^3xfx}{dx^3} = -\frac{(1-b)h}{(1+b)b} + \frac{3h}{2(1+b)b}.$$

Remplaçant dans l'expression (α), elle devient nulle. C. Q. F. D.

Cas où les deux sphères sont à une grande distance.

21. Nous allons chercher, comme dans le cas précédent, d'abord $f(x)$ et $F(x)$, et nous en déduirons, par la règle citée n° **13**, $\varphi(\mu, x)$, $\Phi(\mu_1, x)$, et de là celle des épaisseurs

$$y = 2x\frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x)$$

et

$$z = 2x\frac{d.\Phi(\mu_1, x)}{dx} + \Phi(\mu_1, x),$$

dans lesquelles nous ferons $x=1$ après les différentiations. Je supposerai que le rayon d'une des sphères est très petit par rapport à $c-a$, de sorte que je négligerai dans ce qui va suivre les cubes de $\frac{b}{c-a}$ et de $\frac{b}{c}$.

Les équations du problème sont, en remplaçant x par ax, dans la première, et x par bx dans la seconde des équations (a) du n° **6**.

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} afx + \dfrac{b^2}{c-ax}\,F\left(\dfrac{b}{c-ax}\right) = h, \\ bF(x) + \dfrac{a^2}{c-bx}\,f\left(\dfrac{a}{c-bx}\right) = g, \end{array}\right.$$

dans lesquelles on pourra faire varier x entre -1 et $+1$. En développant la deuxième partie du premier membre de la deuxième équation (1), et négligeant le cube et les puissances supérieures de $\frac{b}{c}$, on trouvera pour $bF(x)$ une expression dépendante de $f\left(\frac{a}{c}\right)$, $f'\left(\frac{a}{c}\right)$, $f''\left(\frac{a}{c}\right)$.

Calculant d'après cela $\dfrac{b^2}{c-ax}\,F\left(\dfrac{b}{c-ax}\right)$ et substituant dans la première équation (1), on trouvera pour $af(x)$ une expression dépendant des mêmes quantités, et même on trouvera qu'en négligeant les cubes dont nous avons parlé, elle ne contiendra que $f\left(\frac{a}{c}\right)$. Nous aurons donc

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} bF(x) = \psi\left[x,\ f\left(\dfrac{a}{c}\right),\ f'\left(\dfrac{a}{c}\right),\ f''\left(\dfrac{a}{c}\right)\right], \\ afx = \chi\left[x,\ f\left(\dfrac{a}{c}\right)\right]. \end{array}\right.$$

Différentiant trois fois la dernière de ces équations et substituant $\frac{a}{c}$ à x, on déterminera $f\left(\frac{a}{c}\right)$, $f'\left(\frac{a}{c}\right)$, $f''\left(\frac{a}{c}\right)$. Remplaçant ces quantités par les valeurs calculées, on aura les valeurs de $bF(x)$ et de $af(x)$, dans lesquelles il n'y aura plus à déterminer que les constantes h et g qui y entrent.

Or nous avons vu (n° **15**) que les épaisseurs électriques moyennes A et B qui sont données, étaient égales à $f(0)$ et $F(0)$; faisant $x=0$ dans les deuxièmes membres des équations (2), M. Poisson a trouvé

$$bB = \left(g - \frac{ha}{c}\right)\left[1 + \frac{ab}{c^2-a^2} + \frac{a^2b^2}{(c^2-a^2)^2}\right],$$

$$aA = h\left[1 + \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2b^2}{c^2(c^2-a^2)} - \frac{gb}{c}\left(1 + \frac{ab}{c^2-a^2}\right)\right].$$

La première partie peut être mise sous la forme

$$g - \frac{ha}{c} = b\mathrm{B}\left(1 - \frac{ab}{c^2 - a^2}\right);$$

en la combinant avec l'autre, on trouvera les valeurs de g et de h. Les substituant, on arrivera finalement aux expressions très simples

$$af(x) = a\mathrm{A} + \frac{b^2\mathrm{B}}{c} - \frac{b^2\mathrm{B}}{c - ax},$$

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{B} - \frac{a^2\mathrm{A}}{c^2}x - \frac{a^2b\mathrm{A}}{c^3}x^2.$$

22. Pour trouver $\varphi(\mu, x)$ et $\Phi(\mu_1, x)$, il faudrait multiplier respectivement par $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots$ les coefficients des fonctions précédentes développées par rapport aux puissances ascendantes de x.

$\mathrm{F}(x)$ étant développé, je m'occupe spécialement de trouver $\Phi(\mu_1, x)$; l'autre ne serait pas difficile à former. Comme on a

$$\mathrm{X}_0 = 1, \ \mathrm{X}_1 = \mu_1, \ \mathrm{X}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3\mu_1^2}{2},$$

il viendra

$$\Phi(\mu_1, x) = \mathrm{B} - \frac{a^2\mathrm{A}}{c^2}\mu_1 x + \frac{a^2b\mathrm{A}}{2c^3}(1 - 3\mu_1^2)x^2;$$

et en substituant dans $z = 2x\dfrac{d.\Phi(\mu_1, x)}{dx} + \Phi(\mu_1, x)$, où l'on fera $x = 1$, on arrivera pour l'épaisseur électrique relative à la sphère b, à l'expression suivante :

$$z = \mathrm{B} - \frac{3a^2\mathrm{A}}{c^2}\mu_1 + \frac{5a^2b\mathrm{A}}{2c^3}(1 - 3\mu_1^2).$$

De cette formule on peut déduire les principaux résultats obtenus par l'expérience. Ainsi l'on sait que quand une sphère d'un rayon très petit est mise en contact avec une sphère électrisée positivement, par exemple, et qu'on l'en sépare ensuite progressivement, l'électricité au point le plus rapproché de la deuxième sphère qui était nulle pendant le contact, devient d'abord négative, pour redevenir nulle et passer ensuite au positif.

En effet, si dans la formule précédente nous faisons $\mu_1 = 1$ et que nous négligions la quantité très petite $\frac{5a^2bA}{c^3}$, nous aurons, en nous rappelant que $\frac{B}{A}=\frac{\pi^2}{6}$,

$$z=A\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{3a^2}{c^2}\right);$$

z sera donc négatif tant qu'on aura

$$\frac{c-a}{a}<\frac{3\sqrt{2}}{\pi}-1,\ \text{nul pour}\ \frac{c-a}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{\pi}-1=\text{environ}\ \tfrac{1}{3},$$

et positif au-delà. C. Q. F. D.

23. On démontrerait avec une égale facilité, que si la sphère b était primitivement à l'état naturel, l'influence de la grande sphère que nous supposons électrisée positivement attirera l'électricité négative au point de la petite le plus rapproché de la grande, et refoulera au point opposé l'électricité contraire; qu'entre ces deux points il y aura une section perpendiculaire à la ligne des centres, où l'électricité sera nulle, et que cette section se rapprochera de l'équateur de la petite sphère en même temps que les électricités aux pôles convergeront vers l'égalité, à mesure que le rapport du rayon de la petite sphère à la distance des centres diminuera.

24. On trouverait encore que les électricités étant de même nature, l'électricité conserverait toujours le même signe sur la surface de la sphère b tant qu'on a $B>\frac{3a^2A}{c^2}\left(1+\frac{5b}{3c}\right)$, et que si au contraire $B<\frac{3a^2A}{c^2}\left(1+\frac{5b}{3c}\right)$, l'électricité au pôle voisin de la sphère a serait de nature contraire, tandis qu'à l'autre elle serait de même espèce. Il serait du reste facile de déterminer le plan de séparation des deux fluides.

Dans le cas où les électricités seraient de nature différente, l'électricité au premier pôle sera de même nature que celle qui recouvrait primitivement la sphère b, tandis qu'au deuxième elle sera de même espèce ou d'espèce différente, selon qu'on aura

$$B>\ \text{ou}\ <\frac{3a^2A}{c^2}\left(1-\frac{5b}{3c}\right).$$

Cas où les deux sphères sont à une distance quelconque.

25. Les fonctions f et F étant définies comme dans les problèmes précédents, les équations qui doivent les déterminer seront identiquement les mêmes, si ce n'est qu'on n'aura plus $c = 1 + b$. L'équation résultant de l'élimination de F sera donc encore celle du n° **6**, et si, pour plus de simplicité, je fais $a = 1$, $c^2 - b^2 = k$, elle deviendra

$$(1) \qquad fx - \frac{b}{k-cx} f\left(\frac{c-x}{k-cx}\right) = h - \frac{qb}{c-x};$$

$f(x)$ étant connue, la deuxième des équations (a) du même numéro déterminera $F(x)$. De là je passerai, par la méthode exposée précédemment, n° **13**, à $\varphi(\mu, x)$ et $\Phi(\mu_1, x)$, et enfin à la détermination des épaisseurs y et y_1 données par les équations

$$y = 2x \frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

$$y_1 = 2x \frac{d.\Phi(\mu_1, x)}{dx} + \Phi(\mu_1, x),$$

dans lesquelles on fera $x = 1$ après la différentiation. Comme les calculs sont absolument les mêmes pour trouver y et y_1, je me bornerai à trouver y.

26. Je vais d'abord démontrer qu'il ne peut y avoir qu'une solution et je chercherai ensuite cette solution. On peut démontrer de la manière suivante qu'il n'y a qu'une solution.

Soit $\varphi(x)$ cette solution; toute autre pourra être mise sous la forme

$$(a) \qquad f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{\sqrt{(1-mx)(1-m'x)}},$$

m et m' étant des constantes que nous allons déterminer. Si nous substituons cette solution dans l'équation (1), en ayant égard aux termes qui s'annullent par l'hypothèse $f(x) = \varphi(x)$, il nous viendra

$$\frac{\psi(x)}{\sqrt{(1-mx)(1-m'x)}} = \frac{b}{k-cx} \psi\left(\frac{c-x}{k-cx}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{m(c-x)}{k-cx}\right]\left[1 - \frac{m'(c-x)}{k-cx}\right]}};$$

si nous posons, pour plus de simplicité,

$$(1 - mx)(1 - m'x) = [k - cx - m(c - x)][k - cx - m'(c - x)]\lambda^2,$$

l'équation (a) prendra, après l'élimination du dénominateur, la forme suivante

$$\psi(x) = A\psi\left(\frac{c - x}{k - cx}\right),$$

en appelant A la quantité $b\lambda$. Les quantités λ, m et m' seront déterminées, et l'on trouvera $\lambda = \frac{1}{b}$, d'où $A = 1$. Pour trouver m et m', il suffit de poser

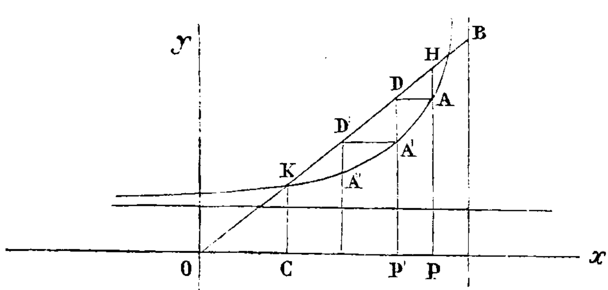
$$1 - mx = \lambda[k - cx - m(c - x)],$$

et nous en déduirons que m et m' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$(d) \qquad c - m = (k - mc)m.$$

Remarquons aussi qu'en vertu de l'équation (a), nous avons $\psi(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{m}$, car $f(x)$ ne peut jamais devenir infinie.

Il suffit donc de prouver qu'on aura toujours $\psi(x) = 0$. Pour cela je construis la courbe $\beta = \frac{c - \alpha}{k - c\alpha}$; ce sera une hyperbole équilatere dans la position suivante :



Si nous menons par l'origine la bissectrice OB, il est facile de voir que m étant la plus grande racine de l'équation (d), $\frac{1}{m}$ sera l'abscisse du point K.

Soit A un point de la courbe dont l'abscisse α est OP; son ordonnée AP sera $\beta = \frac{c-\alpha}{k-c\alpha}$, et nous aurons, en vertu de l'équation (c),

$$\psi(\mathrm{OP}) = \psi(\mathrm{AP}) = \psi(\mathrm{DP}') = \psi(\mathrm{OP}').$$

Nous passerons donc, au moyen de la courbe, de ψ de l'abscisse de A à ψ de l'abscisse de A', puis à ψ de l'abscisse de A'', et nous aurions, en définitive, en appelant x une abscisse quelconque,

$$\psi(x) = \psi(\mathrm{OG}) = \psi\left(\frac{1}{m}\right) = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

27. Cherchons maintenant la solution unique. Nous allons égaler le premier membre de l'équation (1), nº **25**, successivement à chacun des termes du deuxième membre, et nous ajouterons ensuite ces deux solutions; nous aurons d'abord

$$f(x) = h + \frac{b}{k-cx}\, f\left(\frac{c-x}{k-cx}\right).$$

Je pose

$$f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots,$$

nous aurons la suite

$$\psi_0(x) = h, \quad \psi_1(x) = \frac{b}{c-kx}\, \psi_0\left(\frac{c-x}{k-cx}\right),$$

et généralement

$$(1) \qquad \psi_{n+1}(x) = \frac{b}{k-cx}\, \psi_n \frac{c-x}{k-cx}.$$

Or il est facile de voir qu'on satisfait à cette dernière équation en prenant

$$\psi_n(x) = \frac{b^n}{\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n x};$$

on aura donc à déterminer A_n et B_n par la condition suivante, tirée de l'équation (1),

$$\frac{b^{n+1}}{\mathrm{A}_{n+1} + \mathrm{B}_{n+1} x} = \frac{b}{k-cx} \times \frac{b^n}{\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n \frac{c-x}{k-cx}},$$

condition qui sera satisfaite par

$$(g) \qquad A_n k + B_n c = A_{n+1}, \quad A_n c + B_n = -B_{n+1},$$

do nt la première peut se mettre sous la forme

$$A_{n+1} k + B_{n+1} c = A_{n+2}.$$

Éliminant entre ces trois équations B_n et B_{n+1}, nous aurons

$$A_{n+2} + (1-k) A_{n+1} + b^2 A_n = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$A_n = p\alpha^n + q\alpha'^n,$$

p et q étant des constantes arbitraires, et α et α' les racines de l'équation

$$\alpha^2 + (1-k)\alpha + b^2 = 0.$$

La première des équations (g) déterminera facilement B_n, et l'on trouvera pour le terme général

$$\psi_n(x) = \frac{cb^n}{p(c+\alpha x - kx)\alpha^n + q(c+\alpha' x - kx)\alpha'^n}.$$

Déterminons maintenant p et q par la condition $\psi_0(x) = h$, il viendra

$$h = \frac{c}{p(c+\alpha x - kx) + q(c+\alpha' x - kx)},$$

et il suffira de faire $p + q = \frac{1}{h}$, et $p(\alpha - k) + q(\alpha' - k) = 0$; déterminant et substituant, on trouvera

$$\psi_n(x) = \frac{h(\alpha - \alpha')b^n}{(\alpha + 1 - cx)\alpha^n - (\alpha' + 1 - cx)\alpha'^n},$$

d'où enfin la première partie de $f(x)$ sera égale à

$$h(\alpha - \alpha') \sum \frac{b^n}{(\alpha + 1 - cx)\alpha^n - (\alpha' + 1 - cx)\alpha'^n},$$

série qui est convergente dans le cas où les sphères ne sont pas très rapprochées.

28. La seconde partie de $f(x)$ se déterminerait d'une manière identique et nous ne répéterons pas les calculs. De $f(x)$ nous conclurions facilement $F(x)$. Les constantes h et g se détermineront comme précédemment, en remarquant que les épaisseurs initiales moyennes A et B ne sont autre chose que $f(0)$ et $F(0)$; nous déterminerons donc h et g au moyen des équations $A = f(0)$, $B = F(0)$. Si les sphères sont très rapprochées, les séries n'étant plus convergentes, on pourra, d'après une méthode qui exige de très longs calculs, exposée dans le second Mémoire de M. Poisson, leur donner une forme différente en les transformant en intégrales définies qu'on développe ensuite longuement.

29. Maintenant, déterminons $\varphi(\mu, x)$. Nous remarquerons que chacune des deux parties qui composent $f(x)$ est, à un facteur près, un assemblage de termes de la forme $\frac{1}{e-fx}$, dont le développement est

$$\frac{1}{e-fx} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{fx}{e} + \frac{f^2x^2}{e^2} + \ldots\right);$$

et comme l'on a

$$(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 x + X_2 x^2 + \ldots,$$

il viendra, pour la partie correspondante de $\varphi(\mu, x)$, un développement de la forme

$$X_0 + X_1\frac{fx}{e} + X_2\frac{f^2x^2}{e^2} + X_3\frac{f^3x^3}{e^3},$$

ou bien encore

$$(e^2 - 2ef\mu x + f^2x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il en serait de même pour la deuxième partie de $\varphi(\mu, x)$, et nous aurions, en dernière analyse,

$$\varphi(\mu, x) = k\sum(e^2 - 2ef\mu x + f^2x^2)^{-\frac{1}{2}} - k'\sum e'^2 - 2e'f'\mu x + f'^2x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On déterminerait de même $\Phi(\mu_1, x)$ et l'on passerait de là, comme nous l'avons dit n° **13**, aux épaisseurs

$$y = 2x \frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

$$y_1 = 2x \frac{d.\Phi(\mu_1, x)}{dx} + \Phi(\mu_1, x),$$

dans lesquelles on ferait $x = 1$ après les différentiations. D'ailleurs les épaisseurs initiales moyennes qui sont connues nous donneraient le moyen de déterminer les constantes g et h. Le problème est donc entièrement résolu.

Vu et approuvé,

Le Doyen de la Faculté.

J.-B. BIOT.

Permis d'imprimer,

l'Inspecteur général des Études,

chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Règle pour reconnaître, à priori, *si une fonction d'une variable réelle ou imaginaire peut se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable. Moyen d'en déduire la condition pour que le rayon vecteur de l'orbite d'une planète soit développable en série convergente suivant les puissances ascendantes de son excentricité.*

---

1. Il n'entre pas dans les limites de cette thèse de rechercher si une série donnée est ou n'est pas convergente, ni les moyens de développer une fonction en série; la question unique que je me propose est de démontrer que : *une fonction quelconque explicite ou implicite d'une variable réelle ou imaginaire x, sera développable en une série convergente suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module de cette variable conservera une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie et continue, et d'en déduire que le rayon vecteur d'une planète est développable en fonction convergente suivant les puissances ascendantes de l'excentricité de son orbite, toutes les fois que cette excentricité ne dépasse pas le nombre* 0,662742.

Cette importante question d'astronomie a, comme on le sait, été traitée par M. Laplace, qui y a consacré un Mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps* de 1828, et des calculs assez longs. Le théorème que je viens d'énoncer, dû à M. Cauchy, et indiqué dans un des derniers *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* simplifie beaucoup la question, comme je vais essayer de le prouver, après avoir toutefois démontré ce théorème.

2. Rappelons d'abord quelques propriétés des racines $n^{ièmes}$ de l'unité.

On sait que $(1)^{\frac{1}{n}} = e^{\pm\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}$; appelons θ une racine $n^{ième}$ primitive de l'unité, de sorte que $\theta = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$; il est facile de démontrer que, pour obtenir toutes les racines $n^{ièmes}$ de l'unité, il suffit de prendre n termes consécutifs de la progression

$$\theta^{-2},\quad \theta^{-1},\quad 1, \theta, \theta^2 \ldots,$$

et que la somme des $m^{ièmes}$ puissances de ces n racines sera toujours nulle, excepté dans le cas où m est de la forme $m'n$, et alors cette somme est égale à n.

3. Cela posé, soit $x = re^{t\sqrt{-1}}$ une variable dont r soit le module et t l'argument; soient encore $f(x)$ et $f'(x)$ une fonction et sa dérivée qui restent continues pour des valeurs du module r, comprises entre $r = r_0$ et $r = \mathrm{R}$; soit n un nombre entier susceptible de croître indéfiniment, et $\theta = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$ une racine primitive de $x^n = 1$. Je dis que si l'on pose

$$F(r) = \frac{f(r) + f(\theta r) + f(\theta^2 r) + \ldots f(\theta^{n-1} r)}{n}, \quad (m)$$

expression qu'on pourrait appeler *la valeur moyenne de $f(x)$, pour un même module r et pour des valeurs de $\frac{x}{r}$ représentées par les n racines de l'unité;* on aura, pour de très grandes valeurs de n,

$$F(r_0) = F(\mathrm{R}),$$

c'est-à-dire *que cette moyenne est indépendante du module*. Pour le prouver, il suffit de montrer que pour des valeurs très grandes de n, l'expression

$$\frac{f'r + \theta f'(\theta r) + \theta^2 f'(\theta^2 r) + \ldots \theta^{n-1} f'(\theta^{n-1} r)}{n},$$

qui n'est que la dérivée de la précédente, est nulle. Or, nous avons

$$f(x+h) - fx = h[f'(x) + i],$$

i devant s'évanouir avec h.

Si donc nous faisons tour à tour

$$x = r,\ h = r(\theta - 1);\ x = \theta r,\ h = \theta r(\theta - 1), \ldots;\ x = \theta^{n-1} r,\ h = \theta^{n-1} r(\theta - 1),$$

nous aurons, en substituant dans l'équation précédente,

$$\begin{aligned} f(\theta r) - f(r) &= r(\theta - 1)[f'(r) + i], \\ f(\theta^2 r) - f(\theta r) &= r(\theta - 1)\,\theta\,[f'(\theta r) + i_1], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\theta^n r) - f(\theta^{n-1} r) &= r(\theta - 1)\theta^{n-1}[f'(\theta^{n-1} r) + i_{n-1}]; \end{aligned}$$

en ajoutant ces équations et appelant I la moyenne arithmétique des quantités $i,\ i_1,\ i_2, \ldots,\ i_{n-1}$, il viendra

$$\frac{f(\theta^n r) - f(r)}{r(\theta - 1)} = f'(r) + f'(\theta r) + \ldots + f'(\theta^{n-1} r) + n\mathrm{I}:$$

mais le premier membre est nul puisque $\theta^n = 1$, donc le second l'est aussi, et l'on a

$$(a) \qquad \frac{f'(r) + f'(\theta r) + f'(\theta^2 r) + \ldots + f'(\theta^{n-1} r)}{n} = -\mathrm{I}.$$

D'ailleurs, pour de très grandes valeurs de n, chacune des quantités $i,\ i_1, \ldots,\ i_{n-1}$ s'annulle, puisque alors θ, c'est-à-dire $e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$, étant égal à 1, h devient nul; il en sera donc de même de leur moyenne I, et le premier membre de l'équation (a) sera égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. S'il arrivait que $f(0)$ fût nul, la valeur moyenne $F(0)$ serait aussi (n° **3**) constamment égale à zéro.

4. Je dis maintenant que : *Si l'on attribue à la variable x un module inférieur au plus petit de ceux pour lesquels une fonction* F(x) *ou sa dérivée cesse d'être finie et continue,* F(x) *pourra être représentée par la valeur moyenne du produit* $\frac{z}{z-x}$ F(z) *correspondante à un module de z supérieur au module donné de x, et sera par conséquent développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x.*

En effet, posons

$$f(z) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x} z,$$

$F(z)$ désignant une fonction qui reste finie et continue, ainsi que sa dérivée, pour un module r de z compris entre les limites o et R.

Si je pose

$$\varphi(z) = \frac{z}{z-x} F(z) \quad \text{et} \quad \chi(z) = \frac{z}{z-x} F(x),$$

il viendra

$$f(z) = \varphi(z) - \chi(z).$$

En appelant toujours $F(z)$ la valeur moyenne (m), n° **3**, de $f(z)$, et $\Phi(z)$, $X(z)$, les valeurs moyennes de $\varphi(z)$ et $\chi(z)$, j'aurai

$$F(z) = \Phi(z) - X(z).$$

Mais pour de très grandes valeurs de n et pour un module r de z inférieur à R, on aura, puisque $f(0) = 0$, l'équation

$$(p) \qquad F(r) = \Phi(r) - X(r) = 0, \quad \text{d'où} \quad \Phi(r) = X(r).$$

D'ailleurs, de

$$\chi(r) = \frac{r}{r-x} F(x) = F(x)[1 + r^{-1}x + r^{-2}x^2 + \ldots],$$

on déduit

$$X(r) = F(x) \times \frac{1}{n} \left[\begin{array}{l} n + r^{-1}x(1 + \theta^{-1} + \theta^{-2} + \ldots) \\ \quad + r^{-2}x^2(1 + \theta^{-2} + \theta^{-4} + \ldots) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right];$$

or les coefficients de $r^{-1}x$, $r^{-2}x^2 \ldots$ sont nuls comme sommes des puissances semblables des n racines de l'unité; donc $F(x) = X(r)$, et, d'après l'équation (p), on a aussi

$$F(x) = \Phi(r) = \frac{1}{n}\left[\frac{r}{r-x}F(r) + \frac{\theta r}{\theta r - x}F(\theta r) + \ldots \frac{\theta^{n-1} r}{\theta^{n-1} r - x} F(\theta^{n-1} r)\right],$$

equation rigoureuse dans le cas où n est infiniment grand. Or, le terme général $\frac{\theta^k r}{\theta^k r - x} F(\theta^k r)$ est développable en série pour un module de x inférieur au module r de z; il en sera donc de même pour le deuxième membre de l'équation précédente, qui n'est qu'une somme d'expressions de cette espèce; donc enfin le principe énoncé au commencement de ce numéro est vrai pour les fonctions explicites.

5. De là on conclut immédiatement, 1° que les fonctions, telles que $\sin x$, $\cos x$, $\cos(1-x^2)$, e^x... et leurs dérivées ne devenant jamais discontinues, ces fonctions seront toujours développables en séries convergentes; 2° que les fonctions $(1-x)^{-1}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $l(1+x)$.., ou leurs dérivées, devenant discontinues pour $x=1$, ces fonctions sont développables en séries convergentes, seulement pour des valeurs de x dont le module est inférieur à 1; 3° enfin, que les fonctions $e^{\frac{1}{x}}$, $\cos\frac{1}{x}$, $l(x)$ ou leurs dérivées devenant discontinues pour $x=0$, valeur qui a le plus petit module possible, ces fonctions ne seront jamais développables.

6. On en déduit avec une grande facilité et la série de Maclaurin, et le reste de cette série.

En effet, $F(x)$ étant égale à la valeur moyenne de $\frac{z}{z-x}F(z)$, $F(z)$ étant continue ainsi que sa dérivée entre o et R, et les modules de z et de x satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus, on a, en développant, $F(x)$ égale à la valeur moyenne de

$$F(z)+\frac{x}{z}F(z)+\frac{x^2}{z^2}F(z)+\ldots;$$

la valeur moyenne du terme $F(z)$, indépendant de x, sera $F(0)$.

D'une autre part, la valeur moyenne du coefficient de x, $\frac{F(z)}{z}$, est égale à celle de $\frac{F(z)-F(0)}{z}$ ou à $F'(0)$, car il est évident que celle de $\frac{F(0)}{z}=\frac{F(0)}{n}r^{-1}(1+\theta^{-1}+\theta^{-2}+\ldots)$ est nulle.

On prouverait de même que le coefficient de x^2, c'est-à-dire $\frac{F(z)}{z^2}$, est égal à la valeur moyenne de l'expression $\frac{F(z)-F(0)-zF(0)}{z^2}$, c'est-à-dire à $\frac{F''(0)}{2}$; on aura donc

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+F''(0)\frac{x^2}{1.2}+\ldots.$$

Quant au reste de cette série, terminée aux n premiers termes, comme

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)},$$

le reste en question pour $F(x) = \frac{z}{z-x} F(z)$ sera la valeur moyenne de $\frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)} F(z)$, et aura pour module un nombre inférieur à

$$\frac{\rho^n}{r^{n-1}(r-\rho)} R,$$

et par conséquent aussi inférieur au reste de la progression géométrique provenant du développement de $\frac{rR}{r-\rho}$, ρ étant le module de la valeur de x que l'on considère, r celui de z, et R le plus grand de tous les modules de F (z), correspondants au module r; d'où l'on déduit enfin cette proposition :

Une fonction F (x) sera développable par la formule de Maclaurin en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction et sa dérivée cessent d'être finies et continues; et en appelant r cette dernière valeur ou une valeur plus petite, ρ le module de x, et R le module maximum de F (x), les modules du terme général et du reste de la série de Maclaurin seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme $\frac{rR}{r-\rho}$ et dont le reste est $\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} \frac{\rho R}{r-\rho}$.

7. Passons maintenant au développement d'une fonction implicite de x; les conditions de convergence se déduiront encore ici des limites de la continuité de cette fonction et de sa dérivée.

Soit donc l'équation (1) $y = xf(y)$; $f(y)$ étant une fonction explicite qui ne devient, non plus que sa dérivée, ni nulle, ni infinie pour $y = 0$. Parmi les racines de cette équation il y en a évidemment une qui s'évanouit en même temps que x et qui, si l'on fait croître x par degrés insensibles, variera elle-même par degrés insensibles ainsi que sa dérivée par rapport à x, en restant toujours fonction continue de x, jusqu'à ce que cette variable acquière une valeur pour laquelle deux racines de l'équation $y = xf(y)$ deviennent égales, ou, ce qui revient au même, jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur qui satisfasse en même temps à cette équation et à sa dérivée par rapport à y, pourvu toutefois que dans l'intervalle la valeur de $f(y)$, correspondante à la racine dont il s'agit, ne cesse pas d'être continue. Donc, si la fonction $f(y)$ reste continue pour des valeurs quelconques de x, comme dans le cas que nous allons examiner bientôt, celle des racines de l'équation (1) qui s'évanouit avec x sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, pour tout module de cette variable inférieur au plus petit de ceux qui introduisent des racines communes aux équations $y = xf(y)$ et à sa dérivée par rapport à y, c'est-à-dire $1 = xf'(y)$.

8. L'équation

$$y = xf(y) \tag{1}$$

nous ramène à la suivante:

$$u = e \cos u. \tag{2}$$

Or je dis que si e désigne l'excentricité de l'orbite d'une planète, la condition nécessaire et suffisante pour que son rayon vecteur soit développable en série convergente de cette excentricité, est que la racine de l'équation (2) le soit elle-même.

En effet, nous avons en général

$$\left\{\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos v), \\ v &= nt + e\sin v, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et si, pour traiter le cas particulier choisi par M. Laplace, et qui seul nous occupe ici, nous faisons $nt = \frac{\pi}{2}$ et $v = \frac{\pi}{2} + u$, la seconde des équations précédentes se changera en

$$u = e \cos u.$$

D'ailleurs la première des équations (3), qui se change en

$$r = a(1 + e \sin u),$$

nous montre que r est une fonction continue de u, et sera continu tant que u le sera lui-même ; on peut en dire autant de sa dérivée $ae \cos u$. Donc, puisque la loi de convergence se déduit des limites de la continuité, et que d'ailleurs tant que la racine u de l'équation $u = e \cos u$ sera continue, la quantité r, ainsi que sa dérivée, le seront aussi, il suffit de chercher la limite pour laquelle cette racine u cessera d'être continue.

D'après ce que nous avons vu, cette racine sera continue tant que le module de e sera inférieur au plus petit de ceux qui correspondent aux équations simultanées

$$(\alpha) \qquad e = \frac{u}{\cos u}, \quad \frac{\cos u}{u} = -\sin u.$$

Il suffira donc de chercher cette limite de e pour atteindre le but spécial que nous nous proposons.

9. Pour cela mettons la deuxième des équations (α) sous la forme

$$\cos u + u \sin u = 0.$$

Si nous développons $\cos u$ et $\sin u$, elle prendra la forme

$$(1) \qquad 1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{1.2.4} + \frac{u^6}{1.2.3.4.6} + \ldots = 0,$$

ou bien

$$(2) \qquad -\frac{u}{2} + \frac{u^4}{1.2.4} - \frac{u^6}{1.2.3.4.6} + \ldots = 1.$$

Or, en appelant U le module de la variable réelle ou imaginaire u, le module du premier membre de l'équation (2) ne pourra surpasser la somme des modules de ses différents termes, savoir,

$$\frac{U^2}{2} + \frac{U^4}{1.2.4} + \frac{U^6}{1.2.3.4.6} + \ldots,$$

d'où il résulte que l'équation (1) n'admettra pas de racines dont les modules soient inférieurs à la racine positive unique de l'équation

$$(3) \qquad \frac{U^2}{2} + \frac{U^4}{1.2.4} + \frac{U^6}{1.2.3.4.6} + \ldots = 1,$$

qui peut être mise sous la forme

$$(4)\qquad \frac{e^{\mathrm{U}}+e^{-\mathrm{U}}}{2}-\mathrm{U}\frac{e^{\mathrm{U}}-e^{-\mathrm{U}}}{2}=0,$$

ou bien encore

$$(5)\qquad \mathrm{U}=1+\frac{2}{e^{2\mathrm{U}}-1}.$$

D'ailleurs cette racine U sera, en vertu de cette dernière équation (5), plus grande que 1, et en vertu de l'équation (3), plus petite que celle de l'équation

$$\frac{\mathrm{U}^2}{2}+\frac{\mathrm{U}^4}{1.2.4}=1,$$

c'est-à-dire

$$<\sqrt{2+\sqrt{12}}=1,2100\ldots.$$

En considérant donc 1,2 comme une première valeur approchée de U, une des méthodes d'approximation, celle de Newton, par exemple, donnera la valeur approchée à un millionième près

$$\mathrm{U}=1,199678.$$

Cette quantité est donc une limite inférieure des modules de u; mais ces modules peuvent l'égaler, puisqu'on satisfait à l'équation (1), en supposant

$$(6)\qquad u=\mathrm{U}\sqrt{-1}=1,199678\sqrt{-1}.$$

Mais des équations (α), n° **8**, on conclut

$$e=\frac{u}{\cos u}=-\frac{1}{\sin u},$$

d'où

$$e^2=\frac{u^2+1}{\cos^2 u+\sin^2 u}\quad\text{ou}\quad e^2=u^2+1.$$

Or la limite du module U de u étant 1,199678, celle du module correspondant de e^2 sera, en vertu de l'équation (6), égale à U^2-1, et le module de e sera égal ou supérieur à

$$\sqrt{\mathrm{U}^2-1},$$

c'est-à-dire qu'à la limite il sera égal à

$$\sqrt{(1,199678)^2 - 1} = 0,662742,$$

qu'il atteindra si l'on suppose

$$u = 1,199678\sqrt{-1}.$$

Donc le plus petit des modules de e qui répondent aux équations (α), n° **8**, sera

$$0,662742;$$

et par conséquent la plus petite racine de l'équation $u = e\cos u$, ainsi que le rayon vecteur donné par l'équation

$$r = a(1 - e\cos v),$$

sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de e, pour tout module de e inférieur à 0,662742; résultat auquel M. Laplace est parvenu par une autre méthode, et que nous nous proposions uniquement de constater.

Vu et approuvé,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ.

J.-B. BIOT.

Permis d'imprimer,

L'INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES,

chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.