

N° D'ORDRE.

186.

H. F. 11 f. 166 (V, 3)
THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. H. RÉSAL.

THÈSE DE MÉCANIQUE. — SUR LES ÉQUATIONS POLAIRES DE L'ÉLASTICITÉ ET
LEUR APPLICATION A L'ÉQUILIBRE D'UNE CROUTE PLANÉTAIRE.

THÈSE D'ASTRONOMIE. — SUR LES OSCILLATIONS DES FLUIDES QUI RECOUVRENT
LA SURFACE DES PLANÈTES.

Soutenues le 11 Juin 1855 devant la Commission d'examen.

MM. CAUCHY, Président.

LAMÉ,
DELAUNAY, } *Examineurs.*



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Rue du Jardinnet, 42.

1855.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.. Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES.	Le baron THENARD. BIOT. PONCELET. CONSTANT PREVOST..... Géologie. DUMAS..... Chimie. DESPRETZ..... Physique. STURM..... Mécanique. DELAFOSSE..... Minéralogie. BALARD..... Chimie. LEFÉBURE DE FOURCY... Calcul différentiel et intégral. CHASLES..... Géométrie supérieure. LE VERRIER..... Astronomie physique. PROFESSEURS DUHAMEL..... Algèbre supérieure. CAUCHY..... Astronomie mathématique et Mécanique céleste. GEOFFROY-SAINT-HILAIRE. Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie. LAMÉ..... Calcul des probabilités, Physique mathématique. DELAUNAY..... Mécanique physique. PAYER..... Botanique. C. BERNARD..... Physiologie générale. P. DESAINS..... Physique. MASSON..... PELIGOT..... } Sciences physiques. AGRÉGÉS } BERTRAND..... } Sciences mathématiques J. VIEILLE..... } DUCHARTRE..... Sciences naturelles. SECRÉTAIRE E. PREZ-REYNIER.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR LES ÉQUATIONS POLAIRES DE L'ÉLASTICITÉ ET LEUR APPLICATION A L'ÉQUILIBRE D'UNE CROÛTE PLANÉTAIRE.

M. Lamé a eu l'ingénieuse idée d'appliquer la théorie mathématique des corps élastiques à la recherche des conditions d'équilibre d'une croûte planétaire sollicitée par la pesanteur résultant des actions mutuelles de ses molécules, et soumise à des pressions intérieure et extérieure ; les résultats auxquels il est arrivé donnent une explication fort simple de certains faits relatifs aux ruptures de l'écorce terrestre, aux failles, etc.

Dans notre travail, nous reprendrons cette même question en supposant qu'après sa formation, la croûte planétaire, primitivement sphérique, immobile et parfaitement homogène, ait été animée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un diamètre. En admettant que cette hypothèse soit d'accord avec la réalité, la force centrifuge n'a pas dû avoir une notable influence sur les divers phénomènes qui frappent les yeux du géologue ; cependant les conséquences curieuses auxquelles conduit la considération de cette force pourront peut-être servir à expliquer quelques-uns des mystères que présente l'histoire de notre globe, ou du moins à apprécier l'hypothèse des changements de pôle de la Terre, émise par quelques géologues pour se rendre compte des résultats de l'observation.

L'introduction de ce nouvel élément nous a conduit à faire une application des belles méthodes exposées par M. Lamé, dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [*], et où ce savant analyste a donné les intégrales générales des équations d'équilibre des enveloppes sphériques élastiques, quelles que soient les conditions relatives à la surface.

Mais avant d'aborder cette question, nous reprendrons très-rapidement

[*] Février et mars 1854.

les formules fondamentales de la Mécanique moléculaire sur lesquelles nous devons nécessairement nous appuyer pour arriver aux équations générales de l'élasticité en coordonnées polaires.

Définition de la pression dans les corps solides.

La *pression* sur un élément plan pris dans l'intérieur d'un corps solide est la résultante des actions des molécules placées au-dessus de l'élément, supposé prolongé indéfiniment dans tous les sens, sur les molécules situées de l'autre côté, dont les directions traversent le même élément dans l'intérieur du périmètre qui le circonscrit [*].

Soient :

- ω un élément plan pris dans l'intérieur d'un corps solide, sur lequel s'exerce une pression que nous nous proposons de déterminer;
- g le centre de gravité de l'élément ω ;
- r la distance de deux molécules de masses m' , m'' situées de part et d'autre de ω sur une droite qui traverse l'aire de cet élément;
- $f(r)$ la fonction de la distance qui représente l'action mutuelle $m'm''f(r)$ des deux molécules m' et m'' ;
- ρ la densité du corps;
- p la pression sur ω rapportée à l'unité de surface;
- X_z, Y_z, Z_z les composantes de p , parallèles à trois axes rectangulaires dont les deux premiers sont parallèles et le troisième perpendiculaire à ω .

Nous supposerons le corps homogène dans toutes ses parties.

Pour déterminer la résultante $p\omega$ de toutes les actions telles que $m'm''f(r)$, on peut [**] d'abord faire la somme de toutes les actions exercées par les

[*] La pression dans l'intérieur d'un corps solide a été définie pour la première fois, en 1825, par M. Cauchy dans les *Bulletins de la Société Philomatique*, en supposant la matière continue.

La définition ci-dessus de la pression dans les corps solides considérés comme des systèmes de molécules est due à M. de Saint-Venant. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXI.)

[**] Cette démonstration, extrêmement simple, est due à M. de Saint-Venant; on en trouve les premiers éléments dans les *Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy.

molécules m' situées au-dessus de ω , sur celles m'' situées au-dessous, et pour lesquelles la distance r reste constante en grandeur et en direction. Or, les molécules m'' formant un cylindre oblique ayant pour base ω et pour génératrice une parallèle à r , leur masse totale sera

$$\rho \omega r \cos (r, z);$$

d'un autre côté, puisque le corps est homogène, les masses m' sont équivalentes; la somme ci-dessus devient ainsi

$$m' \rho \omega r f(r) \cos (r, z);$$

sa composante parallèle aux x ,

$$m' \rho \omega r f(r) \cos (r, z) \cos (r, x),$$

par suite

$$X_z = \rho \text{ Som } m' r f(r) \cos (r, z) \cos (r, x);$$

le signe *Som* s'étendant à toutes les molécules m' supérieures à ω et à toutes les valeurs de r pour lesquelles la fonction $f(r)$ ne devient pas insensible. Mais cette somme est équivalente à la moitié de la somme, prise entre les mêmes limites, des produits $mr f(r) \cos (r, z) \cos (r, x)$ relatifs à toutes les molécules m situées autour du centre de gravité g de ω et à leur distance r à ce même point; on aura donc

$$X_z = \frac{1}{2} \rho \text{ Som } m r f(r) \cos (r, z) \cos (r, x),$$

et de même

$$Y_z = \frac{1}{2} \rho \text{ Som } m r f(r) \cos (r, z) \cos (r, y),$$

$$Z_z = \frac{1}{2} \rho \text{ Som } m r f(r) \cos^2 (r, z).$$

Expression de la pression en fonction des déplacements.

L'élasticité, comme chacun le sait, est cette propriété en vertu de laquelle les molécules qui constituent un corps solide tendent à reprendre leurs positions primitives, lorsque la cause qui les en avait écartées vient à disparaître. Mais les corps ne sont élastiques que dans certaines limites, généralement très-restreintes, des déplacements relatifs de leurs molécules, et au delà desquelles la matière se désagrège. Nous supposerons dans ce qui suit que ces déplacements sont assez faibles pour que l'on puisse négliger les termes qui les renferment à la seconde puissance.

Soient x, y, z , les coordonnées primitives du centre de gravité g de ω ; $x + h, y + k, z + l$, celles d'une molécule quelconque située dans la sphère d'activité de g . Les expressions ci-dessus pourront s'écrire ainsi, en posant $\frac{f(r)}{r} = \varphi(r)$,

$$X_z^o = \frac{1}{2} \rho \text{Som } m \varphi(r) lh,$$

$$Y_z^o = \frac{1}{2} \rho \text{Som } m \varphi(r) lk,$$

$$Z_z^o = \frac{1}{2} \rho \text{Som } m \varphi(r) l^2,$$

l'indice o étant relatif à l'état naturel du corps.

Supposons que le corps subisse une très-faible déformation : soient ∂ , la caractéristique de la variation de $r, h, k, l, \rho; u, v, w$ les projections sur les trois axes du déplacement de g .

Le rayon de la sphère d'activité de g étant très-petit, les dérivées partielles de u, v, w , par rapport à x, y, z , pourront être considérées comme constantes dans toute son étendue; d'ailleurs, ce sont des quantités de même ordre que u, v, w , et dont on peut ainsi négliger les secondes puissances; il suit de là que le volume $dx dy dz$, relatif à un point quelconque de la sphère d'activité, devient, après la déformation,

$$dx dy dz \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) = dx dy dz \left\{ 1 + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right\}.$$

La dilatation cubique

$$\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

égale à la somme des dilatations linéaires dans les trois directions rectangulaires des axes, restera donc constante pour tous les points de la sphère d'activité de g , et il en sera de même de la nouvelle densité

$$\rho + \partial\rho = \frac{\rho}{1 + \Delta} = \rho(1 - \Delta) = \rho \left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right):$$

que l'on pourra ainsi laisser en facteur commun devant les signes *Som*.

On aura donc, pour les composantes de la pression après la déformation,

$$X_z = \frac{1}{2} \rho \{ \text{Som } m \varphi(r) lh + \text{Som } m \varphi'(r) lh \partial r + \text{Som } m \varphi(r) (l \partial h + h \partial l) \} \\ + \frac{1}{2} \partial \rho \text{Som } m \varphi(r) lh,$$

$$Y_z = \frac{1}{2} \rho \{ \text{Som } m \varphi(r) lk + \text{Som } m \varphi'(r) lk \partial r + \text{Som } m \varphi(r) (l \partial k + k \partial l) \} \\ + \frac{1}{2} \partial \rho \text{Som } m \varphi(r) lk,$$

$$Z_z = \frac{1}{2} \rho \{ \text{Som } m \varphi(r) l^2 + \text{Som } m \varphi'(r) l^2 \partial r + 2 \text{Som } m \varphi(r) l \partial l \} \\ + \frac{1}{2} \partial \rho \text{Som } m \varphi(r) l^2.$$

∂h , par exemple, n'étant autre chose que l'accroissement que prend u quand on y remplace x, y, z par $x + h, y + k, z + l$, on a, en négligeant les termes du deuxième ordre,

$$\partial h = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

$$\partial k = \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$

$$\partial l = \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l,$$

et enfin

$$\partial r = \frac{h \partial h + k \partial k + l \partial l}{r} \\ = \frac{1}{r} \left\{ h^2 \frac{du}{dx} + k^2 \frac{dv}{dy} + l^2 \frac{dw}{dz} + hk \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) + hl \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) + kl \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \right\};$$

valeurs qu'il faudra substituer dans les expressions ci-dessus, en mettant en facteur commun les dérivées partielles de u, v, w .

Les résultats de ces substitutions se simplifient beaucoup si l'on remarque, 1° que, en raison de la symétrie, les *Som* renfermant l'un des facteurs h, k, l à une puissance impaire sont nulles; 2° que le corps, avant la déformation, n'étant sollicité par aucune force, la constante qui représente la pression est nulle, ou autrement que

$$\text{Som } m \varphi(r) l^2 = \text{Som } m \varphi(r) h^2 = \text{Som } m \varphi(r) k^2 = \frac{1}{3} \text{Som } m \varphi(r) r^2 = 0;$$

3° que l'on néglige les termes du deuxième ordre en $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}, \frac{du}{dy}$, etc.,

et l'on arrive ainsi en posant

$$\text{Som } m \varphi' \frac{(r)}{r} h^2 l^2 = \text{Som } m \varphi' \frac{(r)}{r} h^2 k^2 = \text{Som } m \varphi' \frac{(r)}{r} l^2 k^2 = \frac{2}{\rho} \mu,$$

$$\text{Som } m \varphi' \frac{(r)}{r} h^4 = \text{Som } m \varphi' \frac{(r)}{r} k^4 = m \text{Som } \varphi' \frac{(r)}{r} l^4 = \frac{2}{\rho} \nu,$$

à

$$X_z = \mu \left\{ \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right\},$$

$$Y_z = \mu \left\{ \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right\},$$

$$Z_z = \mu \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right\} + \frac{dw}{dz} (\nu - \mu).$$

Or il existe entre les constantes μ et ν une relation résultant de ce qu'elles sont indépendantes du choix des axes coordonnés.

Soient en effet α, β, γ les angles de l'axe des z avec trois nouveaux axes; h', k', l' les coordonnées relatives à ces axes et correspondant à h, k, l .
On a

$$l = h' \cos \alpha + k' \cos \beta + l' \cos \gamma,$$

$$\nu = \frac{\rho}{2} \text{Som } m \varphi' \frac{(r)}{r} l^4$$

$$= \nu (\cos^4 \alpha + \cos^4 \beta + \cos^4 \gamma) + 6\mu (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma),$$

et comme

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$1 - \cos^4 \alpha - \cos^4 \beta - \cos^4 \gamma = 2(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma),$$

il vient

$$\nu = 3\mu,$$

et, par suite,

$$(A) \quad \begin{cases} X_z = \mu \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right), \\ Y_z = \mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ Z_z = \mu \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right). \end{cases}$$

Remarques. 1°. On trouvera, par une simple permutation de lettres, les pressions X_y, Y_y, Z_y et X_x, Y_x, Z_x relatives aux éléments respectivement perpendiculaires aux y et aux x . On déduit de là les relations suivantes

entre les composantes tangentielles :

$$(B) \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y, \quad X_y = Y_x.$$

Ces relations sont indépendantes des hypothèses que nous avons faites plus haut sur la constitution et la grandeur des déplacements du corps, car elles se déduisent des équations des moments appliqués à l'équilibre d'un parallélépipède élémentaire d'un corps, supposé soumis à l'action des forces qui en sollicitent les molécules, et des pressions, quelle que soit d'ailleurs leur nature, exercées sur ses faces. La propriété qu'expriment ces relations se généralise par la considération du tétraèdre élémentaire dont les conditions d'équilibre conduisent au théorème suivant :

Si, en un point d'un solide, on conçoit deux éléments plans, la force élastique relative au premier, projetée sur la normale au deuxième, est égale à la force élastique correspondant à ce dernier, projetée sur la normale au premier.

2°. On a

$$Z_z = \frac{5}{2} \mu \frac{dw}{dz} - \frac{X_x + Y_y}{4};$$

si

$$X_x = 0, \quad Y_y = 0,$$

il vient

$$Z_z = \frac{5}{2} \mu \frac{dw}{dz},$$

formule applicable au cas d'un fil élastique chargé verticalement d'un poids. Si donc E désigne le coefficient d'élasticité de la substance, on a

$$\frac{5}{2} \mu = E, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{2}{5} E [*].$$

Équations de l'élasticité en coordonnées polaires.

La partie essentielle de notre Thèse, comme nous l'avons annoncé, a

[*] *Note sur l'application de la théorie des fonctions isotropes de M. Cauchy, à la recherche des pressions dans un corps élastique homogène.*

On peut, en faisant usage de la théorie des fonctions isotropes de M. Cauchy, arriver très-simplement aux expressions qui représentent les composantes de la pression sur un élément plan compris dans l'intérieur d'un corps élastique.

Concluons, pour cela, que l'on projette les composantes X_x , Y_x , Z_x sur une droite OA

spécialement rapport aux propriétés des sphères élastiques, pour la recherche desquelles l'emploi des coordonnées polaires devient presque indispensable; nous nous bornerons donc ici à poser les équations d'élasticité dans ce système de coordonnées.

Soit r le rayon mené de l'origine des coordonnées à un point M du

dont les cosinus des angles avec les trois axes coordonnés soient respectivement a, b, c ; représentons par α, β, γ les symboles $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ ou D_x, D_y, D_z , en adoptant la notation plus commode de M. Cauchy.

La projection

$$\Gamma_x = aX_x + bY_x + cZ_x,$$

devra conserver constamment la même valeur, en faisant subir un déplacement angulaire quelconque autour de l'axe des x , au système des deux autres axes; en d'autres termes, Γ_x est une fonction *isotrope* par rapport à l'axe des x des grandeurs u, v, w, a, b, c dont elle dépend et une fonction symbolique de D_x, D_y, D_z . D'ailleurs Γ_x est linéaire par rapport à a, b, c et u, v, w , ou du moins approximativement pour les déplacements, en raison de leur petitesse; elle sera donc représentée symboliquement par une fonction isotrope par rapport à l'axe des x de $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, u, v, w$, et sera ainsi de la forme

$$\Gamma_x = Gau + H(bv + cw) + K(bw - cv) + [La + M(\beta b + \gamma c) + N(\beta c - \gamma b)](\beta v + \gamma w) + Pu(\beta b + \gamma c) + [Qa + R(\beta b + \gamma c)](\gamma v - w\beta),$$

$G, H, K, L, M, N, P, Q, R$ étant des fonctions symboliques de $\alpha, \beta^2 + \gamma^2$.

Si nous supposons que Γ_x ne renferme que les dérivées premières de u, v, w , ou qu'elle soit du premier ordre en α, β, γ , les coefficients M, N, R devront être nuls; L, P, Q se réduiront à des constantes; G, H, K seront de la forme

$$G = g + g'\alpha,$$

$$H = h + h'\alpha,$$

$$K = k + k'\alpha,$$

g, g', h, h', k, k' étant des constantes; et l'on aura, par suite,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \Gamma_x = & gau + g'axu + h(bv + cw) + h'\alpha(bv + cw) + k(bw - cv) + k'\alpha(bw - cv) \\ & + La(\beta v + \gamma w) + Pu(\beta b + \gamma c) + Qa(\gamma v - w\beta). \end{aligned} \right.$$

En raison de l'homogénéité du corps, $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ se déduiront de cette formule par une simple permutation de lettres.

La projection sur OA des pressions relatives aux six faces du parallélépipède $dx dy dz$ devant être égale, pour l'équilibre de cet élément de volume, à la projection semblable de l'accélération des forces sollicitant le solide au point (x, y, z) , est indépendante de la direction des axes; en d'autres termes, $D_x \Gamma_x + D_y \Gamma_y + D_z \Gamma_z$ ou l'expression symbolique $\alpha \Gamma_x + \beta \Gamma_y + \gamma \Gamma_z$.

corps, point qui sera en outre défini par sa latitude λ et sa longitude L comptée à partir d'un méridien pris pour origine. Les équations cherchées s'obtiendront en exprimant que l'élément de volume déterminé par deux plans méridiens consécutifs distants de dL , par deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$ et deux cônes circulaires ayant pour sommet le centre des sphères, pour axe la ligne des pôles et pour demi-ouverture $\frac{\pi}{2} - \lambda$, $\frac{\pi}{2} - (\lambda + d\lambda)$, est en équilibre.

est isotrope, relativement aux trois axes, en $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w, a, b, c$, linéaire par rapport aux six dernières de ces quantités, et du second ordre par rapport aux trois premières. Cette expression est donc nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} \alpha \Gamma_x + \beta \Gamma_y + \gamma \Gamma_z = & [m + m'(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)](au + bv + cw) \\ & + n(\alpha a + \beta b + \gamma c)(au + bv + \gamma w) \\ & + p[a(\gamma v - \beta w) + b(\alpha w - \beta u) + c(\beta u - \alpha v)], \end{aligned}$$

m, m', n, p étant des constantes.

Remplaçant dans cette égalité $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ par leurs valeurs déduites de la formule (1), puis identifiant les coefficients de a , on arrive à une équation entre $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ qui doit se réduire à une identité.

En suivant cette marche, on est conduit aux relations

$$g = 0, \quad h = 0, \quad k = 0, \quad k' = 0, \quad Q = 0, \quad g' = m' + n, \quad h' = m', \quad L + P = n,$$

d'où

$$g' = h' + (L + P).$$

Substituant dans la formule (1), à la place de Γ_x , sa valeur $\alpha X_x + b Y_x + c Z_x$, puis identifiant les coefficients de a, b, c , on trouve, en ayant égard aux conditions ci-dessus,

$$X_x = (h' + L + P) \alpha u + L(\beta v + \gamma w),$$

$$Y_x = h' \alpha v + P \beta u,$$

$$Z_x = h' \alpha w + P \gamma u;$$

et comme

$$Y_x = X_y, \quad Z_x = X_z,$$

il faut que

$$h' = P,$$

d'où

$$X_x = 2P D_x u + L(D_x u + D_y v + D_z w),$$

$$Y_x = P(D_x v + D_y u),$$

$$Z_x = P(D_x w + D_z u).$$

Ces formules sont celles dont M. Lamé fait usage dans ses Leçons sur l'élasticité; elles rentrent dans celles que nous avons trouvées plus haut, en y supposant égales les deux constantes indépendantes P et L .

L'égalité entre ces deux constantes, à laquelle nous sommes arrivé par notre première mé-

Cela posé, appelons R_r, M_r, P_r les composantes de la force élastique respectivement dirigées suivant le prolongement du rayon, la méridienne en allant vers le pôle et la tangente au parallèle dans le sens du mouvement du méridien mobile par rapport au méridien fixe, pour un élément plan perpendiculaire à r ; R_m, M_m, P_m les composantes analogues pour un élément plan perpendiculaire à la méridienne; enfin R_p, M_p, P_p les mêmes composantes pour un élément situé dans le plan méridien.

Les composantes de la pression pour la face $r^2 \cos \lambda \, d\lambda \, dL$ perpendiculaire à r , de l'élément de volume considéré, sont

$$- R_r r^2 \cos \lambda \, d\lambda \, dL, \quad - M_r r^2 \cos \lambda \, d\lambda \, dL, \quad - P_r r^2 \cos \lambda \, d\lambda \, dL;$$

pour la face $r \cos \lambda \, dr \, dL$, perpendiculaire à la méridienne, on a de même

$$- R_m r \cos \lambda \, dr \, dL, \quad - M_m r \cos \lambda \, dr \, dL, \quad - P_m r \cos \lambda \, dr \, dL;$$

enfin pour la face $r \, dr \, d\lambda$ située dans le plan méridien,

$$- R_p r \, dr \, d\lambda, \quad - M_p r \, dr \, d\lambda, \quad - P_p r \, dr \, d\lambda.$$

Soient Ox', Oy', Oz' la trace du méridien fixe sur l'équateur, la perpendiculaire menée par le centre O à ce dernier plan, et la ligne des pôles. On a, en supprimant les indices qui affectent les pressions,

$$(C) \begin{cases} \cos(R, x') = \cos \lambda \cos L, & \cos(R, y') = \cos \lambda \sin L, & \cos(R, z') = \sin \lambda, \\ \cos(M, x') = -\sin \lambda \cos L, & \cos(M, y') = -\sin \lambda \sin L, & \cos(M, z') = \cos \lambda, \\ \cos(P, x') = -\sin L, & \cos(P, y') = \cos L, & \cos(P, z') = 0. \end{cases}$$

D'après cela, on pourra très-facilement obtenir les composantes des forces ci-dessus suivant Ox', Oy', Oz' ; en les changeant de signe et les augmentant de leurs différentielles par rapport à r pour celles qui proviennent du premier groupe, à λ pour le deuxième, à L pour le troisième, on aura les expressions analogues pour les faces opposées à celles que nous avons considérées; en faisant la somme des composantes suivant chacune des direc-

thode, ne paraît pas complètement d'accord avec l'expérience. Ainsi M. Wertheim a trouvé, à la suite de plusieurs expériences, que le rapport $\frac{L}{P}$ est sensiblement égal à 2.

Dans l'incertitude où nous trouvons sur la valeur de ce rapport, dont la connaissance est indispensable pour pouvoir calculer L et P en fonctions du *coefficient d'élasticité*, la seule constante que l'on a l'habitude de faire entrer dans les questions de résistance des matériaux, nous avons cru devoir continuer à admettre la relation théorique $L = 2P$, trouvée par MM. Navier, Poisson et Cauchy.

tions Ox' , Oy' , Oz' , les différentielles seules restent et l'on trouve ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \lambda \cos L \frac{dR_r r^2}{dr} + r \cos L \frac{d(R_m \cos^2 \lambda)}{d\lambda} + r \cos \lambda \frac{d(R_p \cos L)}{dL} \\ - \cos \lambda \sin \lambda \cos L \frac{dM_r r^2}{dr} - r \cos L \frac{d(M_m \sin \lambda \cos \lambda)}{d\lambda} - r \sin \lambda \frac{d(M_p \cos L)}{dL} \\ - \cos \lambda \sin L \frac{dP_r r^2}{dr} - r \sin L \frac{d(P_m \cos \lambda)}{d\lambda} - r \frac{dP_p \sin L}{dL} \end{array} \right\} \text{ pour } Ox',$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \lambda \sin L \frac{dR_r r^2}{dr} + r \sin L \frac{d(R_m \sin \lambda \cos \lambda)}{d\lambda} + r \cos \lambda \frac{d(R_p \sin L)}{dL} \\ - \cos \lambda \sin \lambda \sin L \frac{dM_r r^2}{dr} - r \sin L \frac{d(M_m \sin \lambda \cos \lambda)}{d\lambda} - r \sin \lambda \frac{d(M_p \sin L)}{dL} \\ \cos \lambda \cos L \frac{dP_r r^2}{dr} + r \cos L \frac{d(P_m \cos \lambda)}{d\lambda} + r \frac{dP_p \cos L}{dL} \end{array} \right\} \text{ pour } Oy',$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda \sin \lambda \frac{dR_r r^2}{dr} + r \frac{d(R_m \cos \lambda \sin \lambda)}{d\lambda} + r \sin \lambda \frac{dR_p}{dL} \\ \cos^2 \lambda \frac{dM_r r^2}{dr} + r \frac{dM_m \cos^2 \lambda}{d\lambda} + r \cos \lambda \frac{dM_p}{dL} \end{array} \right\} \text{ pour } Oz'.$$

Soient maintenant R_0 , M_0 , P_0 les composantes respectivement parallèles aux R , M , P de l'accélération des forces qui sollicitent la masse élémentaire $\rho r^2 \cos \lambda dr d\lambda dL$; on aura pour les équations d'équilibre :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \lambda \cos L \frac{dR_r r^2}{dr} + r \cos L \frac{dR_m \cos^2 \lambda}{d\lambda} + r \cos \lambda \frac{dR_p \cos L}{dL} \\ - \cos \lambda \sin \lambda \cos L \frac{dM_r r^2}{dr} - r \cos L \frac{d(M_m \sin \lambda \cos \lambda)}{d\lambda} - r \sin \lambda \frac{dM_p \cos L}{dL} \\ - \cos \lambda \sin L \frac{dP_r r^2}{dr} - r \sin L \frac{d(P_m \cos \lambda)}{d\lambda} - r \frac{dP_p \sin L}{dL} \\ + \rho r^2 \cos \lambda \{ R_0 \cos \lambda \cos L - M_0 \sin \lambda \cos L - P_0 \sin L \} = 0, \\ \cos^2 \lambda \sin L \frac{dR_r r^2}{dr} + r \sin L \frac{dR_m \cos^2 \lambda}{d\lambda} + r \cos \lambda \frac{dR_p \sin L}{dL} \\ - \cos \lambda \sin \lambda \frac{dM_r r^2}{dr} - r \sin L \frac{d(M_m \sin \lambda \cos \lambda)}{d\lambda} - r \sin \lambda \frac{dM_p \sin L}{dL} \\ \cos \lambda \sin L \frac{dP_r r^2}{dr} + r \cos L \frac{d(P_m \cos \lambda)}{d\lambda} + r \frac{dP_p \cos L}{dL} \\ + \rho r^2 \cos \lambda \{ R_0 \cos \lambda \sin L - M_0 \sin \lambda \sin L + P_0 \cos L \} = 0, \\ \cos \lambda \sin \lambda \frac{dR_r r^2}{dr} + r \frac{d(R_m \sin \lambda \cos \lambda)}{d\lambda} + r \sin \lambda \frac{dR_p}{dL} \\ \cos^2 \lambda \frac{dM_r r^2}{dr} + r \frac{dM_m \cos^2 \lambda}{d\lambda} + r \cos \lambda \frac{dM_p}{dL} \\ + \rho r^2 \cos \lambda \{ R_0 \sin \lambda + M_0 \cos \lambda \} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on élimine successivement M_0 et P_0 , R_0 et P_0 , M_0 et R_0 entre ces équations, on obtient les relations plus simples :

$$(E) \begin{cases} \frac{dR_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{d\lambda} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dR_p}{dL} + \frac{2R_r - R_m \tan \lambda - M_m - P_p}{r} + \rho R_0 = 0, \\ \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dM_m}{d\lambda} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dM_p}{dL} + \frac{2M_r - M_m \tan \lambda + R_m + P_p \tan \lambda}{r} + \rho M_0 = 0, \\ \frac{dP_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dP_m}{d\lambda} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dP_p}{dL} + \frac{2P_r - P_m \tan \lambda + R_p - M_p \tan \lambda}{r} + \rho P_0 = 0. \end{cases}$$

Ces équations expriment que les sommes des projections des forces sur le rayon, la méridienne, la tangente ou parallèle, sont séparément nulles. On aurait pu y arriver directement sans passer par les axes de projection auxiliaires, mais les calculs sont plus simples et plus uniformes en suivant la marche que nous avons adoptée.

Aux équations (E) il faut joindre les relations (B), qui deviennent ici

$$(B) \quad R_m = M_r, \quad R_p = P_r, \quad M_p = P_m.$$

Il nous reste maintenant à exprimer les pressions en fonction des déplacements W , U , V estimés respectivement suivant le rayon, la méridienne et la tangente au parallèle; ce qui revient à déterminer, en fonction de ces déplacements, les dérivées partielles, par rapport à x , y , z , des déplacements w , u , v rapportés aux directions ci-dessus prises pour axes des z , des y et des x , pour $z = r$, $x = 0$, $y = 0$. Le tout se réduit donc à une transformation de coordonnées, dont nous simplifierons les calculs en ayant recours aux axes auxiliaires des x' , y' , z' qui nous ont servi plus haut. Les formules (C) donnent

$$(C') \quad \begin{cases} \cos(x, x') = -\sin \lambda \cos L, & \cos(x, y') = -\sin \lambda \sin L, & \cos(x, z') = \cos \lambda, \\ \cos(y, x') = -\sin L, & \cos(y, y') = \cos L, & \cos(y, z') = 0, \\ \cos(z, x') = \cos \lambda \cos L, & \cos(z, y') = \cos \lambda \sin L, & \cos(z, z') = \sin \lambda. \end{cases}$$

D'un autre côté, si l'on appelle r' , λ' , L' les coordonnées polaires d'un point quelconque de la sphère, on a

$$x' = r' \cos \lambda' \cos L',$$

$$y' = r' \cos \lambda' \sin L',$$

$$z' = r' \sin \lambda'.$$

Les coordonnées de ce même point rapporté aux axes x , y , z seront, par

suite, en substituant et réduisant,

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(x, x') + y' \cos(x, y') + z' \cos(x, z') \\&= r' \{ \sin \lambda' \cos \lambda - \sin \lambda \cos \lambda' \cos(L' - L) \}, \\y &= x' \cos(y, x') + y' \cos(y, y') + z' \cos(y, z') \\&= r' \cos \lambda' \sin(L' - L), \\z &= x' \cos(z, x') + y' \cos(z, y') + z' \cos(z, z') \\&= r' \{ \sin \lambda \sin \lambda' + \cos \lambda \cos \lambda' \cos(L' - L) \}.\end{aligned}$$

Si l'on différencie ces équations successivement par rapport à x, y, z , puis que dans les résultats on suppose $\lambda' = \lambda, L' = L, r' = r$, on obtient

$$(F) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{r}, & \frac{d\lambda}{dy} = 0, & \frac{d\lambda}{dz} = 0, \\ \frac{dL}{dx} = 0, & \frac{dL}{dy} = \frac{1}{r \cos \lambda}, & \frac{dL}{dz} = 0, \\ \frac{dr}{dx} = 0, & \frac{dr}{dy} = 0, & \frac{dr}{dz} = 1. \end{cases}$$

Par suite, si F est une fonction quelconque de x, y, z , on a, pour les valeurs ci-dessus des variables,

$$(G) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{d\lambda} \cdot \frac{1}{r}, \\ \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dL} \cdot \frac{1}{r \cos \lambda}, \\ \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dr}, \end{cases}$$

formules dont nous trouverons tout à l'heure l'application.

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}&u \cos(x, x') + v \cos(y, x') + w \cos(z, x') \\&= W \cos(W, x') + U \cos(U, x') + V \cos(V, x'), \\&u \cos(x, y') + v \cos(y, y') + w \cos(z, y') \\&= W \cos(W, y') + U \cos(U, y') + V \cos(V, y'), \\&u \cos(x, z') + v \cos(y, z') + w \cos(z, z') \\&= W \cos(W, z') + U \cos(U, z') + V \cos(V, z').\end{aligned}$$

Pour obtenir les cosinus qui multiplient W, U, V , il suffit de recourir

aux formules (B) posées plus haut, en y remplaçant, dans les termes symboliques, R, M, P par les déplacements correspondants, et accentuant les λ , L, r ; en ayant égard à ces formules ainsi qu'aux relations (C'), les équations ci-dessus combinées par addition donnent les suivantes :

$$\begin{aligned} u &= W [\sin \lambda' \cos \lambda - \cos \lambda' \sin \lambda \cos (L' - L)] \\ &\quad + U [\cos \lambda \cos \lambda' + \sin \lambda \sin \lambda' \cos (L' - L)] + W \sin \lambda \sin (L' - L), \\ v &= W \cos \lambda' \sin (L' - L) - U \sin \lambda' \sin (L' - L) + V \cos (L' - L), \\ w &= W [\sin \lambda \sin \lambda' + \cos \lambda \cos \lambda' \cos (L' - L)] \\ &\quad + U [\sin \lambda \cos \lambda' - \sin \lambda' \cos \lambda \cos (L' - L)] - W \cos \lambda \sin (L' - L). \end{aligned}$$

Si l'on différencie ces équations par rapport à l'une quelconque des variables x , y , z , on a, pour $r' = r$, $\lambda' = \lambda$, $L' = L$, les relations symboliques

$$\begin{aligned} du &= dU + V \sin \lambda dL + W d\lambda, \\ dv &= dV + (W \cos \lambda - U \sin \lambda) dL, \\ dw &= dW - U d\lambda - V \cos \lambda dL; \end{aligned}$$

par suite, en ayant égard aux formules (F) et (G),

$$(H) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{r} \frac{dU}{d\lambda} + \frac{W}{r}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dU}{dL} + \frac{V}{r} \tan \lambda, \\ \frac{du}{dz} &= \frac{dU}{dr}, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{r} \frac{dV}{d\lambda}, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dV}{dL} + \frac{1}{r} (W - U \tan \lambda); \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{dV}{dr}, \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{r} \frac{dW}{d\lambda} - \frac{U}{r}, \\ \frac{dw}{dy} &= \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dW}{dL} - \frac{V}{r}, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{dW}{dr}. \end{aligned} \right.$$

La dilatation cubique et les pressions sont alors exprimées [formules (A)]

par

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \frac{1}{r} \frac{dU}{d\lambda} + \frac{1}{r \cos \lambda} \cdot \frac{dV}{dL} + 2 \frac{W - U \tan \lambda}{r} + \frac{dW}{dr}, \\ R_r = Z_z = \mu \left(\Delta + 2 \frac{dW}{dr} \right), \\ M_m = X_x = \mu \left(\Delta + 2 \cdot \frac{1}{r} \frac{dU}{d\lambda} + 2 \frac{W}{r} \right), \\ P_p = Y_y = \mu \left(\Delta + 2 \cdot \frac{1}{r \cos \lambda} \cdot \frac{dV}{dL} + 2 \frac{W - U \tan \lambda}{r} \right), \\ R_m = M_r = Z_x = X_z = \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dW}{d\lambda} - \frac{U}{r}, \\ R_p = P_r = Z_y = Y_z = \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r \cos \lambda} \cdot \frac{dW}{dL} - \frac{V}{r}, \\ M_p = P_m = X_y = Y_x = \frac{1}{r \cos \lambda} \cdot \frac{dU}{dL} + \frac{V}{r} \tan \lambda + \frac{1}{r} \frac{dV}{d\lambda}. \end{array} \right.$$

Ces formules s'obtiennent habituellement en déterminant, en fonction de λ , L , r , les pressions exercées sur trois éléments respectivement perpendiculaires aux x' , aux y' et aux z' ; puis passant de ces pressions aux R , M , P , en faisant usage des relations auxquelles conduit la considération du tétraèdre élémentaire. Mais la marche que nous avons suivie nous a paru au moins aussi naturelle et aussi simple.

Les équations générales de l'élasticité en coordonnées polaires s'obtiennent en substituant les valeurs ci-dessus des pressions dans les équations (L); on trouve ainsi

$$(J) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \left\{ \begin{array}{l} 3 r^2 \cos \lambda \frac{d\Delta}{dr} + \cos \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dW}{d\lambda} - \frac{drU}{dr} \right) \\ - \sin \lambda \left(\frac{dW}{d\lambda} - \frac{drU}{dr} \right) - \frac{d}{dL} \left(\frac{drV}{dr} - \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dW}{dL} \right) \end{array} \right\} + \rho \cos \lambda r^2 R_0 = 0, \\ \mu \left\{ \begin{array}{l} 3 \cos \lambda \frac{d\Delta}{d\lambda} + \frac{1}{r^2 \cos \lambda} \frac{d}{dL} \left(\frac{drU}{dL} - \frac{dr \cos \lambda V}{d\lambda} \right) \\ - \cos \lambda \frac{d}{dr} \left(\frac{dW}{d\lambda} - \frac{drU}{dr} \right) \end{array} \right\} + \rho \cos \lambda r M_0 = 0, \\ \mu \left\{ \begin{array}{l} 3 \frac{1}{\cos \lambda} \frac{d\Delta}{dL} + \frac{d}{dr} \left(\frac{drV}{dr} - \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dW}{dL} \right) \\ - \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{drU}{dL} - \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dr \cos \lambda V}{dr} \right) \end{array} \right\} + \rho r P_0 = 0. \end{array} \right.$$

Les conditions relatives à la surface s'obtiendront en exprimant que les forces élastiques R_r , R_m , R_p sont égales aux composantes estimées suivant

leurs directions des forces qui sollicitent le même point de cette surface.

Les formules que nous venons d'établir peuvent maintenant nous permettre d'aborder la question suivante.

Équilibre d'élasticité d'une croûte planétaire sphérique animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un diamètre, sollicitée par la gravité et soumise à des pressions normales intérieure et extérieure.

Soient :

- g la gravité à la surface,
 r et r_0 les rayons extérieur et intérieur,
 P_i et P_o les pressions extérieure et intérieure,
 e l'épaisseur supposée très-petite de la croûte.

La force centrifuge sera exprimée par $\omega^2 r \cos \lambda$.

Il est manifeste que, après la déformation, la croûte restera toujours un solide de révolution autour de l'axe des pôles, et que les molécules qui la constituent ne seront déplacées que dans leurs méridiens primitifs.

Il résulte de là que $V = 0$ et que les autres déplacements W et U sont indépendants de L ; les formules (I) deviennent ainsi

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \frac{1}{r} \frac{dU}{d\lambda} + \frac{2W - U \tan \lambda}{r} + \frac{dW}{dr}, \\ R_r = \mu \left\{ \Delta + 2 \frac{dW}{dr} \right\}, \\ M_m = \mu \left\{ \Delta + \frac{2}{r} \left(\frac{dU}{d\lambda} + W \right) \right\}, \\ P_p = \mu \left\{ \Delta + 2 \frac{W - U \tan \lambda}{r} \right\}, \\ R_m = M_r = \mu \left(\frac{dU}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dW}{d\lambda} - \frac{U}{r} \right), \\ R_p = P_r = 0, \quad M_p = P_m = 0, \end{array} \right.$$

et les équations (E) qui se réduisent aux deux premières

$$(L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dR_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{d\lambda} + \frac{2R_r - R_m \tan \lambda - M_m - P_p}{r} + \rho \omega^2 r \cos^2 \lambda - \rho g \frac{r}{r_i} = 0, \\ \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dM_m}{d\lambda} + \frac{2M_r - M_m \tan \lambda + R_m + P_p \tan \lambda}{r} - \rho \omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles il faut ajouter les conditions

$$(M) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_m = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_i \quad \text{et} \quad r = r_o, \\ R_r = P_o \quad \text{pour} \quad r = r_o, \\ R_r = P_i \quad \text{pour} \quad r = r_i. \end{array} \right.$$

Si l'on pose

$$U = U' + U'', \quad W = W' + W'',$$

on pourra profiter de l'indétermination qui existe entre ces nouvelles fonctions pour décomposer chacune des deux équations linéaires auxquelles conduit l'élimination des pressions entre (K) et (L) en deux autres: l'une en U' et W' , renfermant seulement la gravité, l'autre en U'' et W'' , contenant uniquement les termes relatifs à la force centrifuge. Quant aux équations de condition, on pourra de même les décomposer en deux autres, de telle sorte que P_0 et P_1 restent seulement dans celles en U' et W' .

Les quantités U' et W' ainsi définies ne seront autre chose que les déplacements qui résulteraient de la seule considération de la gravité et des pressions intérieure et extérieure, et U'' et W'' les déplacements analogues auxquels donnerait lieu la force centrifuge agissant isolément; nous sommes ainsi ramené à résoudre séparément les deux problèmes suivants.

Équilibre d'une croûte sphérique soumise à l'action de la gravité et des pressions normales constantes intérieure et extérieure.

La croûte restant nécessairement sphérique et les déplacements ne pouvant avoir lieu que dans le sens du rayon, U est nul et W est indépendant de λ .

Les formules (K) et (L) se réduisent à

$$\begin{aligned} (K') \quad & \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \frac{dW}{dr} + 2 \frac{W}{r}, \\ R_r &= \mu \left\{ \Delta + 2 \frac{dW}{dr} \right\} = \mu \left\{ 3 \frac{dW}{dr} + 2 \frac{W}{r} \right\}, \\ M_m = P_p &= \mu \left\{ \Delta + 2 \frac{W}{r} \right\} = \mu \left\{ \frac{dW}{dr} + 4 \frac{W}{r} \right\}, \\ R_m = M_r &= 0, \quad R_p = P_r = 0, \quad M_p = P_m = 0. \end{aligned} \right. \\ (L') \quad & \frac{dR_r}{dr} + 2 \frac{(R_r - M_m)}{r} - \rho g \frac{r}{r_1} = 0: \end{aligned}$$

l'élimination des pressions entre (K') et (L') conduit à

$$\frac{d\Delta}{dr} + 2 \left[\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r^2} \right) \right] = \frac{\rho g \frac{r}{r_1}}{\mu},$$

ou

$$3 \frac{d\Delta}{dr} = \frac{\rho g \frac{r}{r_1}}{\mu}.$$

d'où, en posant

$$m = \frac{1}{6} \frac{\rho g}{\mu r_1} = \frac{1}{6} \frac{\varpi}{\mu r_1},$$

ϖ étant le poids spécifique de la substance, et en appelant a une constante arbitraire,

$$\Delta = mr^2 + a.$$

Si dans cette équation on remplace Δ par sa valeur en fonction de W , puis qu'on la multiplie par r^2 , on aura

$$r^2 \frac{dW}{dr} + 2Wr = \frac{dW}{dr} r^2 = mr^4 + ar^2,$$

d'où, en intégrant et désignant par b une nouvelle constante arbitraire,

$$W = \frac{1}{5} mr^3 + \frac{1}{3} ar^2 + \frac{b}{r^2};$$

2

par suite,

$$R_r = \mu \left(\frac{11}{5} mr^2 + \frac{5}{3} a - \frac{4b}{r^3} \right).$$

Les conditions relatives à la surface donneront

$$-P_0 = \mu \left(\frac{11}{5} mr_0^2 + \frac{5}{3} a - \frac{4b}{r_0^3} \right),$$

$$-P_1 = \mu \left(\frac{11}{5} mr_1^2 + \frac{5}{3} a - \frac{4b}{r_1^3} \right),$$

d'où

$$4b = -\frac{11}{5} m \frac{(r_1^3 - r_0^3) r_1^2 r_0^2}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{(P_0 - P_1) r_1^3 r_0^3}{\mu (r_1^3 - r_0^3)},$$

$$\frac{5}{3} a = -\frac{11}{5} m \frac{(r_1^3 - r_0^3)}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{\mu (r_1^3 - r_0^3)},$$

par suite,

$$R_r = \frac{11}{5} m \mu \frac{r^2 (r_1^3 - r_0^3) - r^2 (r_1^3 - r_0^3) + (r_1^3 - r_0^3) r_1^2 r_0^2}{r^2 (r_1^3 - r_0^3)} - \frac{P_0 r_0^3 (r_1^3 - r^3) + P_1 r_1^3 (r^3 - r_0^3)}{r^3 (r_1^3 - r_0^3)}.$$

Le numérateur du terme en m de cette expression est divisible par $(r - r_1)$ et $(r - r_0)$, puisqu'il doit s'annuler pour $r = r_0$ et $r = r_1$; d'ailleurs égalé à 0, il donne une équation du cinquième degré en r qui, ne présentant que deux variations, ne peut avoir d'autres racines positives que r_0 et r_1 . Donc ce numérateur reste constamment négatif pour toutes les valeurs de r comprises entre ces deux limites, et, par suite, R_r est une pression sur toute la sphère de rayon r .

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour déterminer le déplacement W et les deux forces élastiques principales d'égale intensité M_m , P_p . Mais pour simplifier les formules, nous supposons l'épaisseur e de la croûte assez faible pour que l'on puisse en négliger le carré.

Posant donc

$$r = r_0 + \varepsilon,$$

on aura

$$r^2 = r_0^2 + 2 r_0 \varepsilon, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} - \frac{2 \varepsilon}{r_0^3},$$

$$W = \left(\frac{1}{5} m r_0^3 + \frac{1}{3} a r_0 + \frac{b}{r_0^2} \right) + \varepsilon \left(\frac{3}{5} m r_0^2 + \frac{1}{3} a - \frac{2 b}{r_0^3} \right).$$

$$R_r = \mu \left[\frac{11}{5} m r_0^2 + \frac{5}{3} a - \frac{4 b}{r_0^3} + \varepsilon \left(\frac{22}{5} m r_0 + \frac{12 b}{r_0^4} \right) \right],$$

$$- P_0 = \mu \left(\frac{11}{5} m r_0^2 + \frac{5}{3} a - \frac{4 b}{r_0^3} \right),$$

$$- P_1 = \mu \left[\frac{11}{5} m r_0^2 + \frac{5}{3} a - \frac{4 b}{r_0^3} + \varepsilon \left(\frac{22}{5} m r_0 + \frac{12 b}{r_0^4} \right) \right],$$

d'où l'on déduit

$$b = \left(\frac{P_0 - P_1}{\mu \varepsilon} - \frac{22}{5} m r_0 \right) \frac{r_0^4}{12} = \left(\frac{P_0 - P_1}{\varepsilon} - \frac{22}{30} \varpi \right) \frac{r_0^4}{12 \mu},$$

$$a = \frac{3}{5 \mu} \left(-P_0 + (P_0 - P_1) \frac{r_0}{3 \varepsilon} - \frac{11}{18} \varpi r_0 \right).$$

Ces valeurs substituées dans R_r conduisent à

$$R_r = -P_0 + \frac{\varepsilon}{r} (P_0 - P_1),$$

ce qui était évident à priori.

Enfin, on a, pour le déplacement W ,

$$W = \frac{1}{\mu \varepsilon} \left[\frac{3 r_0^2}{20} (P_0 - P_1 - \varpi e) - \frac{P_0 r_0 e}{5} - \frac{\varepsilon r_0}{10} \left(P_0 - P_1 - \varpi e + 2 \frac{1}{r_0} P_0 \right) \right].$$

ou, en négligeant P_0 devant $\frac{P_0 r_0}{\varepsilon}$,

$$W = \frac{1}{20} \frac{r_0}{\mu} (P_0 - P_1 - \varpi e) \left(\frac{3 r_0}{\varepsilon} - \frac{2 \varepsilon}{e} \right).$$

$$\frac{W}{r} = \frac{1}{20} \frac{r_0}{\mu} (P_0 - P_1 - \varpi e) \left(\frac{3 r_0}{\varepsilon} - \frac{5 \varepsilon}{e} \right),$$

$$W_0 = \frac{3}{20} \frac{r_0^2}{\mu \varepsilon} (P_0 - P_1 - \varpi e), \quad \frac{W_0}{r_0} = \frac{3}{20} \frac{r_0}{\mu \varepsilon} (P_0 - P_1 - \varpi e),$$

$$W_1 = \frac{1}{20} \frac{r_0}{\mu} (P_0 - P_1 - \varpi e) \left(\frac{3 r_0}{\varepsilon} - 2 \right), \quad \frac{W_1}{r_1} = \frac{1}{20} \frac{r_0}{\mu} (P_0 - P_1 - \varpi e) \left(\frac{3 r_0}{\varepsilon} - 5 \right).$$

et la variation subie par l'épaisseur e est représentée par

$$W_i - W_o = -\frac{1}{10} \frac{r_o}{\mu} (P_o - P_i - \varpi e).$$

Si nous appelons Q la valeur commune aux deux forces élastiques principales M_m , P_p , nous aurons, en continuant la même approximation,

$$Q = \frac{R_r}{3} + \frac{10}{3} \mu \frac{W}{r} = \frac{1}{3} \left[-P_o + \frac{3}{2} \frac{r_o}{e} (P_o - P_i - \varpi e) - \frac{3}{2} (P_o - P_i - \varpi e) \frac{e}{e} \right],$$

d'où, en négligeant toujours P_o devant $P_o \frac{r_o}{e}$,

$$Q_o = \frac{1}{2} \frac{r_o}{e} (P_o - P_i - \varpi e),$$

$$Q_i = Q_o + \frac{5}{6} \varpi e.$$

Supposons que $P_o - P_i - \varpi e$ devienne nul, après avoir été primitivement différent de 0 ; on aura

$$W = 0, \quad Q_o = 0, \quad Q_i = \frac{5}{6} \varpi;$$

ce qui revient à dire que si, en se déformant, la Terre ne s'était désagrégée ni fissurée, elle reprendrait dans les conditions actuelles sa forme primitive, les forces élastiques perpendiculaires au rayon devenant nulles à la surface intérieure, et des tractions à la surface extérieure.

Admettons maintenant que, par suite du refroidissement du noyau liquide intérieur de la Terre et de la contraction qui en résulte, P_o aille en diminuant ; W deviendra négatif ; l'épaisseur e ira en augmentant ; Q_o sera une pression croissante en intensité, tandis que Q_i restera une traction ou finira par devenir une compression. L'écorce terrestre pourra donc se rompre de deux manières différentes : 1° par arrachement à l'extérieur, comme dans le cas précédent, et écrasement à l'intérieur, ce qui donne une explication fort simple des tremblements de terre ; 2° par écrasement sur toute son épaisseur.

Dans ce dernier mode de rupture, la matière liquide du noyau comprimé par les roches supérieures tendra à en soulever les différentes parties dans lesquelles ces dernières ont été divisées, et à arriver jusqu'à la surface de la Terre. On retombe ainsi sur la théorie relative à la formation des chaînes de montagnes due à M. Élie de Beaumont.

L'ellipsoïde d'élasticité correspondant à un point quelconque de la sur-

face extérieure de la croûte a pour équation

$$\frac{z^2}{P_1^2} + \frac{x^2 + y^2}{Q_1^2} = 1 ;$$

la surface à laquelle est tangent l'élément pour lequel un rayon vecteur de cet ellipsoïde représente la force élastique, est déterminée par

$$\frac{z_2}{P_1} + \frac{x^2 + y^2}{Q_1} = \pm K,$$

K étant une constante positive.

Si nous supposons que Q_1 soit une traction, cette équation correspond à deux hyperboloïdes de révolution asymptotiques, l'un à deux nappes, l'autre à une nappe, et l'on a pour l'équation de leur cône asymptote

$$\frac{z^2}{P_1} + \frac{x^2 + y^2}{Q_1} = 0,$$

la force élastique sera tangentielle pour tous les éléments tangents à ce cône. L'inclinaison α de ses génératrices sur la méridienne sera donnée par

$$\tan \alpha = \sqrt{-\frac{P_1}{Q_1}}.$$

C'est à cette force élastique tangentielle T, représentée par le rayon vecteur de l'ellipsoïde d'élasticité déterminé par la droite

$$\frac{z}{\sqrt{-P_1}} + \frac{x}{\sqrt{Q_1}} = 0,$$

et dont la valeur est

$$T = \sqrt{-P_1 Q_1},$$

que paraissent dues les *ruptures par glissement*, connues en géologie sous le nom de *failles*.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations basées sur l'hypothèse d'une homogénéité constante et d'une sphéricité parfaite.

Équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique homogène animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ses diamètres.

Les équations (J) deviennent ici, en remarquant que

$$R_0 = \omega^2 r \cos \lambda, \quad M_0 = -\omega^2 r \sin \lambda \cos \lambda, \quad P_0 = 0, \quad V = 0, \\ \frac{dW}{dL} = 0, \quad \frac{dU}{dL} = 0,$$

et désignant $\sin \lambda$ par s , $\cos \lambda$ par c ,

$$(1) \quad \begin{cases} 3r^2 \frac{d\Delta}{dr} + \frac{1}{c} \frac{dcZ}{d\lambda} = -\frac{\rho\omega^2}{\mu} \cos^2 \lambda r^2, \\ 3 \frac{d\Delta}{d\lambda} - \frac{dZ}{dr} = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \sin \lambda \cos \lambda r^2, \end{cases}$$

en posant comme plus haut

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 W}{dr} + \frac{1}{rc} \frac{dc U}{d\lambda}, \\ \text{et, de plus,} \\ Z = \frac{dW}{d\lambda} - \frac{drU}{dr}. \end{cases}$$

Or il est facile de trouver des intégrales particulières des équations (1), et, par suite, d'en ramener l'intégration à celles de ces mêmes équations privées de leurs seconds membres. Ainsi, par exemple, on voit à priori que les équations (1) peuvent être vérifiées par $z = 0$ et par une valeur de W de la forme $ar^2 \cos^2 \lambda$, a étant une constante déterminée par la relation

$$6a = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\lambda} &= \frac{drU}{dr}, \\ \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 W}{dr} + \frac{1}{rc} \frac{dc U}{d\lambda} &= -\frac{1}{6} \frac{\rho\omega^2 r^2}{\mu} \cos^2 \lambda; \end{aligned}$$

équations qui doivent être évidemment satisfaites par des expressions de la forme

$$W = br^3 + fr^3 \cos^2 \lambda, \quad U = h \sin \lambda \cos \lambda r^3,$$

b, f, h étant des constantes liées par les relations

$$-f = 2h, \quad 5b - 2h = 0, \quad 5f + 3h = -\frac{1}{6} \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

d'où

$$f = -\frac{1}{21} \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad h = \frac{1}{42} \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad b = \frac{1}{105} \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

On a ainsi le système de valeurs particulières

$$(3) \quad \begin{cases} Z_0 = 0, \\ \Delta_0 = -\frac{1}{6} \frac{\rho\omega^2 r^2}{\mu} \cos^2 \lambda, \\ W_0 = \frac{\rho\omega^2 r^3}{21\mu} \left(\frac{1}{5} - \cos^2 \lambda \right), \\ U_0 = \frac{1}{42} \frac{\rho\omega^2 r^3}{\mu} \sin \lambda \cos \lambda. \end{cases}$$

Si donc on pose

$$(4) \quad \begin{cases} U = U_0 + u, \\ W = W_0 + w, \\ \Delta = \Delta_0 + \delta, \\ Z = Z_0 + \zeta, \end{cases}$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(5) \quad \begin{cases} 3r^2 \frac{d\delta}{dr} + \frac{1}{c} \frac{d\zeta}{d\lambda} = 0, \\ 3 \frac{d\delta}{d\lambda} - \frac{d\zeta}{dr} = 0; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \delta = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 w}{dr} + \frac{1}{rc} \frac{du}{d\lambda}, \\ \zeta = \frac{dw}{d\lambda} - \frac{dr u}{dr}. \end{cases}$$

Les formules (K) seront remplacées par les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} R_r = \frac{\rho\omega^2 r^2}{7} \left(\frac{2}{5} - \frac{19}{6} \cos^2 \lambda \right) + \mu \left(\delta + 2 \frac{dw}{dr} \right), \\ M_m = -\rho\omega^2 r^2 \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{6} \cos^2 \lambda \right) + \mu \left[\delta + \frac{2}{r} \left(\frac{du}{d\lambda} + w \right) \right], \\ P_p = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{7} \left(\frac{1}{5} + \frac{9}{6} \cos^2 \lambda \right) + \mu \left[\delta + \frac{2(w - u \tan \lambda)}{r} \right], \\ R_m = M_r = \frac{\rho\omega^2 r^2}{7} \sin \lambda \cos \lambda + \mu \left(\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dw}{d\lambda} - \frac{u}{r} \right), \\ R_p = P_r = 0, \quad M_p = P_m = 0, \end{cases}$$

et pour

$$r = r_0 \quad \text{et} \quad r = r_1,$$

on aura les deux conditions

$$(8) \quad \begin{cases} \delta + 2 \frac{dw}{dr} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{7\mu} \left(\frac{2}{5} - \frac{19}{6} \cos^2 \lambda \right), \\ \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{7\mu} \sin \lambda \cos \lambda. \end{cases}$$

Cela posé, occupons-nous de la recherche des u , w , ζ , δ . Si l'on ajoute les équations (5), respectivement différenciées par rapport à r et λ , on obtient, en supposant que la seconde ait été multipliée par c avant la diffé-

rentiation, puis divisée par c après cette opération,

$$\frac{dr^2 \frac{d\delta}{dr}}{dr} + \frac{1}{c} \frac{dc}{d\lambda} \frac{d\delta}{d\lambda} = 0,$$

ou, en posant $\sin \lambda = \alpha$,

$$(9) \quad \frac{dr^2 \frac{d\delta}{dr}}{dr} + \frac{d(1-\alpha^2) \frac{d\delta}{d\alpha}}{d\alpha} = 0.$$

En faisant dans cette équation

$$\delta = X_n r^n,$$

n étant un nombre entier positif et X_n une certaine fonction de α , on aura, pour déterminer cette dernière,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(1-\alpha^2) \frac{dX_n}{d\alpha}}{d\alpha} + n(n+1) X_n = 0, \\ \text{ou} \\ (1-\alpha^2) \frac{d^2 X_n}{d\alpha^2} - 2\alpha \frac{dX_n}{d\alpha} + n(n+1) X_n = 0. \end{array} \right.$$

On sait que cette équation linéaire est vérifiée par le polynôme

$$P_n = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot \alpha^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cdot \alpha^{n-4} + \dots$$

Pour trouver l'intégrale complète de l'équation (10), posons

$$X_n = z P_n,$$

il vient

$$(1-\alpha^2) P_n \cdot \frac{dz}{dz} + 2 \left[(1-\alpha^2) \frac{dP_n}{dz} - \alpha P_n \right] \frac{dz}{dz} = 0,$$

ou, en représentant $\frac{dz}{dz}$ par t ,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dz} + 2 \left(\frac{1}{P_n} \cdot \frac{dP_n}{dz} - \frac{z}{1-\alpha^2} \right) t &= 0, \\ \frac{dt}{t} + 2 \left(\frac{1}{P_n} \cdot dP_n - \frac{z d\alpha}{1-\alpha^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et, A'_n étant une constante arbitraire,

$$\log t + \log P_n^2 + \log(1-\alpha^2) = \log A'_n,$$

$$t = \frac{A'_n}{P_n^2 (1-\alpha^2)};$$

enfin, A_n étant une autre constante arbitraire,

$$z = A_n + A'_n \int_0^z \frac{dz}{P_n^2(1-z^2)},$$

et

$$X_n = A_n P_n + A'_n P_n \int_0^z \frac{dz}{P_n^2(1-z^2)}.$$

Le second terme de X_n devenant infini [*] pour $z = 1$, il faut nécessairement que $A'_n = 0$; nous ne pouvons donc prendre que

$$X_n = A_n P_n;$$

tandis que si la sphère était limitée vers le pôle, par un cône de latitude par exemple, il y aurait lieu de conserver le second terme. Ainsi l'équation aux différentielles partielles (9) est vérifiée par

$$\partial = A_n P_n r^n.$$

On reconnaît sans peine qu'elle est de même satisfaite par cette autre valeur

$$\partial = B_{n+1} P_n \cdot \frac{1}{r^{n+1}},$$

B_{n+1} étant une seconde constante arbitraire; nous pourrions donc prendre pour l'intégrale générale de cette équation la série indéfinie

$$(11) \quad \partial = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left(A_n r^n + \frac{B_{n+1}}{r^{n+1}} \right).$$

Dans le cas d'une sphère pleine, il faudra supprimer le deuxième terme $\frac{B_{n+1}}{r^{n+1}}$, qui deviendrait infini pour le centre du solide.

Les équations (5) qui rentrent maintenant l'une dans l'autre, puisque (11)

[*] Car soit P_n^2 la plus grande valeur de P_n , pour les valeurs de la variable comprises entre 0 et 1, on a

$$\int_0^1 \frac{dz}{P_n^2(1-z^2)} > \frac{1}{P_n^2} \int_0^1 \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{P_n^2} \int_0^1 d \log \frac{1+z}{1-z},$$

qui n'a pas de limite.

vérifie (9), qui résulte de leur combinaison, donnent, en posant $\chi = c\zeta$,

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{d\chi}{d\alpha} = -3r^2 \frac{d\delta}{dr} = -3 \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left[n A_n r^{n+1} - (n+1) \frac{B_{n+1}}{r^n} \right], \\ \frac{d\chi}{dr} = 3(1-\alpha^2) \frac{d\delta}{d\alpha} = 3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{dP_n}{d\alpha} (1-\alpha^2) \left(A_n r^n + \frac{B_{n+1}}{r^{n+1}} \right). \end{cases}$$

De cette dernière on déduit, en représentant par $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de α ,

$$\chi = \varphi(\alpha) + 3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{dP_n}{d\alpha} (1-\alpha^2) \left(\frac{A_n r^{n+1}}{n+1} - \frac{B_{n+1}}{nr^n} \right);$$

portant cette valeur dans la première, pour obtenir $\varphi'(\alpha)$,

$$\varphi'(\alpha) = -3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{A_n r^{n+1}}{n+1} - \frac{B_n}{nr^n} \right) \left[(1-\alpha^2) \frac{d^2 P_n}{d\alpha^2} - 2\alpha \frac{dP_n}{d\alpha} + n(n+1) P_n \right] = 0.$$

φ est donc une constante arbitraire que nous représenterons par C; nous pourrions alors écrire

$$(12) \quad \chi = C + 3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{dP_n}{d\alpha} (1-\alpha^2) \left(\frac{A_n r^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n} \cdot \frac{B_{n+1}}{r^n} \right).$$

Il nous reste maintenant à trouver u et w ; remarquons pour cela que

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dw}{d\lambda} - \frac{dr u}{dr} = \frac{1}{c} \chi, \\ \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 w}{dr} + \frac{1}{rc} \frac{dcu}{d\lambda} = \delta, \end{cases}$$

$$(13') \quad \begin{cases} (1-\alpha^2) \left(\frac{dw}{d\alpha} - \frac{dr u}{dr} \right) = \chi, \\ \frac{dr^2 w}{dr} + \frac{dcru}{d\alpha} = r^2 \delta. \end{cases}$$

Pour intégrer ces équations, posons

$$w = w' + w'', \quad u = u' + u'',$$

w' et u' étant des intégrales particulières qui doivent en rendre identiques les deux membres, et w'' et u'' les intégrales générales des mêmes équations sans second membre.

D'après la première équation (13), on a

$$\frac{dw''}{d\lambda} = \frac{dr u''}{dr},$$

ce qui suppose que w'' et ru'' sont les dérivées respectives d'une même fonction F par rapport à r et à λ . F déterminée par la seconde équation (13), sera donnée par la suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dr} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{rc} \frac{dc}{d\lambda} \frac{dF}{d\lambda} = 0,$$

qui est identique à l'équation (9); on a donc, pour son intégrale générale, A'_n et B'_{n+1} étant des constantes arbitraires,

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} F = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left(A'_n r^n + \frac{B'_{n+1}}{r^{n+1}} \right), \\ \text{par suite,} \\ w'' = \frac{dF}{dr} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left(n A'_n r^{n-1} - (n+1) B'_{n+1} \frac{1}{r^{n+2}} \right), \\ u'' = \frac{1}{r} \frac{dF}{d\lambda} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sqrt{1-\alpha^2} \cdot \frac{dP_n}{d\lambda} \left(A'_n r^{n-1} + B'_{n+1} \frac{1}{r^{n+2}} \right). \end{array} \right.$$

Si nous ajoutons les équations (13') respectivement différenciées par rapport à α et r , nous obtiendrons, eu égard à (5'),

$$\begin{aligned} \frac{d(1-\alpha^2) \frac{dw'}{d\alpha}}{d\alpha} + \frac{d^2 r^2 w'}{dr^2} &= \frac{d\gamma}{d\alpha} + \frac{dr^2 \delta}{dr} = -3r^2 \frac{d\delta}{dr} + \frac{dr^2 \delta}{dr} \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left[2A_n (1-n) r^{n+1} + 2B_{n+1} (n+2) \frac{1}{r^n} \right]. \end{aligned}$$

Posant

$$u = S_{n+1} r^{n+1} + \frac{T_n}{r^n},$$

on aura, pour déterminer les coefficients S_{n+1} , T_n ,

$$\frac{d(1-\alpha^2)}{d\alpha} \frac{dS_{n+1}}{d\alpha} + (n+3)(n+2)S_{n+1} = P_n \cdot 2A_n(1-n),$$

$$\frac{d(1-\alpha^2)}{d\alpha} \frac{dT_n}{d\alpha} + (n-2)(n-1)T_n = P_n \cdot 2B_{n+1}(n+2).$$

Si l'on compare respectivement ces deux équations aux deux suivantes :

$$\frac{d(1-\alpha^2)}{d\alpha} \frac{dP_n A_n}{d\alpha} + n(n+1)P_n A_n = 0,$$

$$\frac{d(1-\alpha^2)}{d\alpha} \frac{dP_n B_{n+1}}{d\alpha} + n(n+1)P_n B_{n+1} = 0,$$

on reconnaît sans peine qu'elles seront vérifiées par des expressions de la forme

$$S_{n+1} = \gamma A_n P_n, \quad T_n = \gamma' B_{n+1} P_n,$$

γ et γ' étant des constantes déterminées par

$$(n+3)(n+2)\gamma - n(n+1)\gamma = 2(1-n), \quad \text{d'où} \quad \gamma = -\frac{n-1}{2n+3},$$

$$(n-2)(n-1)\gamma' - n(n+1)\gamma' = 2(n+2), \quad \text{d'où} \quad \gamma' = -\frac{n+2}{2n-1}.$$

Nous aurons donc

$$(15) \quad w' = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left\{ -A_n \frac{(n-1)}{2n+3} r^{n+1} - B_{n+1} \frac{(n+2)}{2n-1} \frac{1}{r^n} \right\}.$$

Enfin pour avoir u' , nous aurons recours à la première des équations (13') qui donne

$$\begin{aligned} -cr u' &= \int \chi dr - (1-\alpha^2) \int \frac{dw}{d\alpha} dr \\ &= Cr + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{dP_n}{d\alpha} (1-\alpha^2) \left\{ A_n \frac{(n+4)}{(n+1)(2n+3)} r^{n+2} - B_{n+1} \frac{(n-3)}{n(2n-1)} \frac{1}{r^n} \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$u' = \frac{-C}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha} \left\{ -A_n \frac{(n+4)}{(n+1)(2n+3)} r^{n+1} + \frac{B_{n+1}(n-3)}{n(2n-1)} \frac{1}{r^n} \right\},$$

et comme u' doit rester fini pour $\alpha = 1$, il faut que $C = 0$ ou

$$(16) \quad u' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha} \left\{ -\frac{A_n(n+4)}{(n+1)(2n+3)} r^{n+1} + \frac{B_{n+1}(n-3)}{n(2n-1)} \frac{1}{r^n} \right\}.$$

Par conséquent, les valeurs les plus générales de u et w seront

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} w &= \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left\{ n A'_n r^{n-1} - A_n \frac{(n-1)}{2n+3} r^{n+1} - (n+1) B'_{n+1} \frac{1}{r^{n+2}} \right. \\ &\quad \left. - B_n \frac{n+2}{2n-1} \frac{1}{r^n} \right\}, \\ u &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha} \left\{ A'_n r^{n-1} - \frac{A_n(n+4)}{(n+1)(2n+3)} r^{n+1} + B'_{n+1} \frac{1}{r^{n+2}} \right. \\ &\quad \left. + B_{n+1} \frac{(n-3)}{n(2n-1)} \frac{1}{r^n} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Il nous reste maintenant à calculer les constantes indéterminées A_n , A'_n , B_{n+1} , B'_{n+1} au moyen des équations de condition (8) qui, eu égard aux valeurs précédentes, et représentant par r_i l'une ou l'autre des limites de r , deviennent

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \left\{ 2n(n-1) A'_n r_i^{n-2} - A_n \frac{2n(n-1)-5}{2n+3} r_i^n + 2(n+1)(n+2) B'_{n+1} \frac{1}{r_i^{n+2}} \right. \\ \left. + \frac{2(n+1)(n+2)-5}{2n-1} B_{n+1} \frac{1}{r_i^{n+1}} \right\} \\ = -\frac{\rho \omega^2 r_i^2}{7\mu} \left(\frac{2}{5} - \frac{19}{6} \cos^2 \lambda \right), \\ \sum_{n=0}^{n=\infty} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha} \left\{ A'_n 2(n-1) r_i^{n-2} - A_n \frac{2(n+1)^2-3}{(2n+3)(n+1)} r_i^n \right. \\ \left. - B'_{n+1} \frac{2(n+2)}{r_i^{n+2}} - B_{n+1} \frac{2n^2-3}{n(2n-1)} \frac{1}{r_i^{n+1}} \right\} \\ = -\frac{\rho \omega^2 r_i^2}{7\mu} \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned} \right.$$

Pour simplifier l'écriture, nous représenterons, dans ce qui suit, respectivement par H_n et K_n les coefficients de P_n et $\sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha}$ des expressions ci-dessus.

La détermination de H_n s'effectuera très-facilement au moyen du théorème connu

$$\int_{-1}^{+1} P_n P_{n'} d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n', \\ \int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha & \text{si } n = n'. \end{cases}$$

Nous aurons ainsi, en multipliant la première équation (18) par $P_n d\alpha$ et intégrant entre les limites -1 et $+1$,

$$(19) \quad H_n = \frac{\rho\omega^2 r_i^2}{7\mu} \frac{\int_{-1}^{+1} P_n \left(\frac{83}{30} - \frac{19}{6} \alpha^2 \right) d\alpha}{\int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha}.$$

Pour obtenir K_n , nous nous servirons de la propriété suivante des fonctions P_n ,

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_{n'}}{d\alpha} d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq n' [*], \\ n(n+1) \int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha & \text{si } n = n', \end{cases}$$

qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général dû à M. Lamé[**]; on arrive de cette manière à

$$K_n = - \frac{\rho\omega^2 r_i^2}{7\mu} \frac{1}{n(n+1)} \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{dP_n}{d\alpha} \alpha (1-\alpha^2) d\alpha}{\int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha},$$

ou, en intégrant par parties,

$$(20) \quad K_n = \frac{\rho\omega^2 r_i^2}{7\mu} \frac{1}{n(n+1)} \frac{\int_{-1}^{+1} P_n (1-3\alpha^2) d\alpha}{n(n+1) \int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha}.$$

Nous sommes ainsi conduit à calculer $\int_{-1}^{+1} P_n \alpha^p d\alpha$ (p étant un nombre entier que l'on devra successivement prendre égal à 0 et 2) et $\int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha$.

[*] Cette formule s'obtient en multipliant par $\sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_{n'}}{d\alpha}$, l'équation

$$\frac{d\sqrt{1-\alpha^2} \frac{dP_n}{d\alpha}}{d\alpha} + n(n+1) P_n = 0,$$

et intégrant par parties.

[**] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1854.

Détermination de $\int_{-1}^{+1} P_n \alpha^p d\alpha$, $\int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha$.

L'équation

$$(10) \quad \frac{d(1-\alpha^2) \frac{dP_n}{d\alpha}}{d\alpha} + n(n+1) P_n = 0,$$

multipliée par $d\alpha$ et intégrée entre les limites -1 et $+1$, donne d'abord

$$n(n+1) \int_{-1}^{+1} P_n d\alpha = - \left[(1-\alpha^2) \frac{dP_n}{d\alpha} \right]_{-1}^{+1};$$

ce qui prouve que

$$\int_{-1}^{+1} P_n d\alpha = 0,$$

pour toutes les valeurs de n supérieures à zéro.

Si maintenant on multiplie l'équation (10) par α^p et que l'on intègre par parties, on obtient

$$\begin{aligned} n(n+1) \int P_n \alpha^p d\alpha &= - \int \alpha^p d \left[(1-\alpha^2) \frac{dP_n}{d\alpha} \right] \\ &= - \alpha^p (1-\alpha^2) \frac{dP_n}{d\alpha} + p \int (1-\alpha^2) \alpha^{p-1} \frac{dP_n}{d\alpha} d\alpha \\ &= - \alpha^p (1-\alpha^2) \frac{dP_n}{d\alpha} + p P_n (1-\alpha^2) \alpha^{p-1} \\ &\quad - p \int P_n [(p-1) \alpha^{p-2} - (p+1) \alpha^p] d\alpha; \end{aligned}$$

d'où

$$(21) \quad [n(n+1) - p(p+1)] \int_{-1}^{+1} P_n \alpha^p d\alpha = - p(p-1) \int_{-1}^{+1} P_n \alpha^{p-2} d\alpha.$$

Cette formule permet de voir que

1°. Pour toute valeur de n différente de l'unité, on a $\int_{-1}^{+1} P_n \alpha d\alpha = 0$;

2°. $\int_{-1}^{+1} P_n \alpha^2 d\alpha = 0$ pour toutes les valeurs de n autres que $n = 0$,
 $n = 2$.

La même formule donne

$$\int_{-1}^{+1} P_0 \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{3} \int_{-1}^{+1} P_0 d\alpha;$$

mais elle ne fait pas connaître $\int_{-1}^{+1} P_2 \alpha^2 d\alpha$; or on a

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = \alpha,$$

$$P_2 = \alpha^2 - \frac{3}{5}\alpha;$$

d'où l'on déduit pour les intégrales $\int_{-1}^{+1} P_n \alpha^n d\alpha$, différentes de zéro,

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} P_0 d\alpha = 2, \\ \int_{-1}^{+1} P_1 \alpha d\alpha = \frac{2}{3}, \\ \int_{-1}^{+1} P_0 \alpha^2 d\alpha = \frac{2}{3}, \\ \int_{-1}^{+1} P_2 \alpha^2 d\alpha = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Il suit de ce qui précède que H_n, K_n seront nuls pour toutes les valeurs de n différentes de 0 et 2. Nous n'avons donc à calculer $\int_{-1}^{+1} P_n^2 d\alpha$ que pour $n=0, n=2$.

On voit facilement que

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} P_0^2 d\alpha = 2, \\ \int_{-1}^{+1} P_2^2 d\alpha = \int_{-1}^{+1} P_2 \alpha^2 d\alpha - \frac{1}{3} \int_{-1}^{+1} P_2 d\alpha = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

En portant les valeurs (a) et (b) dans les formules (19) et (20), on trouve

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 = \frac{11}{45} \frac{\rho \omega^2 r_i^2}{\mu}, \\ H_2 = -\frac{19}{42} \frac{\rho \omega^2 r_i^2}{\mu}, \\ K_0 = \frac{0}{0} [*], \\ K_2 = -\frac{1}{14} \frac{\rho \omega^2 r_i^2}{\mu}. \end{array} \right.$$

[*] Ce qui indique que la relation entre K_0, A'_0, A_0 est satisfaite d'elle-même.

Calculs des coefficients $A_n, A'_n, B_{n+1}, B'_{n+1}$.

On reconnaîtra sans difficulté que ces coefficients sont nuls lorsque $n > 2$; de sorte qu'il nous suffit de considérer successivement les cas où $n = 0, n = 1, n = 2$.

Pour $n = 0$

$$\frac{5}{3} A_0 + 4 B'_1 \frac{1}{r_1^3} + \frac{B_1}{r_1} = \frac{11}{45} \frac{\rho \omega^2 r_1^2}{\mu},$$

le terme en B_1 étant infini dans la deuxième équation (18), il est nécessaire que

$$B_1 = 0.$$

On a ensuite

$$(A) \quad \begin{cases} B'_1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{45} \frac{\rho \omega^2}{\mu} \cdot \frac{r_0^4 r_1^3 (r_1^2 - r_0^2)}{r_1^2 - r_0^2}, \\ A_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{45} \frac{\rho \omega^2}{\mu} \cdot \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^2 - r_0^2}. \end{cases}$$

Quant à la constante A'_0 , elle n'existe ni dans w ni dans u , puisque $\frac{dP_0}{dz} = 0$.

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} A_1 r_1 + 12 B'_2 \cdot \frac{1}{r_1^3} + 7 B_2 \frac{1}{r_1^2} &= 0, \\ -\frac{1}{2} A_1 r_1 - 6 B'_2 \frac{1}{r_1^3} + \frac{B_2}{r_1^2} &= 0; \end{aligned}$$

par suite

$$A_1 = 0, \quad B'_2 = 0, \quad B_2 = 0.$$

A'_1 reste indéterminé, et cela devait être, car il est facile de s'assurer que ce coefficient correspond à des déplacements des points du corps compatibles avec l'hypothèse de sa solidité.

Pour $n = 2$, on a

$$B) \quad \begin{cases} 2 A'_2 + \frac{1}{7} A_2 r_1^2 + 24 B'_3 \cdot \frac{1}{r_1^3} + \frac{19}{3} B_3 \cdot \frac{1}{r_1^2} = -\frac{19}{42} \frac{\rho \omega^2 r_1^2}{\mu}, \\ 2 A'_2 - \frac{5}{7} A_2 r_1^2 - 8 B'_3 \cdot \frac{1}{r_1^3} - \frac{5}{6} B_3 \cdot \frac{1}{r_1^2} = -\frac{1}{14} \frac{\rho \omega^2 r_1^2}{\mu}, \end{cases}$$

qui, en supposant successivement $i = 0, i = 1$, donneront quatre équations entre les coefficients A'_2, A_2, B'_3, B_3 , lesquelles permettront de les détermi-

ner. Mais, avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que les autres coefficients étant nuls, w et u sont de la forme

$$w = \frac{1}{3} A_0 r - \frac{B'_1}{r^2} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{3} \right) \left(2 A'_2 r - \frac{A_2}{7} r^3 - 3 B'_3 \cdot \frac{1}{r^4} - \frac{4}{3} B_3 \cdot \frac{1}{r^2} \right),$$

$$u = 2 \sin \lambda \cos \lambda \left(A'_2 r - \frac{2}{7} A_2 r^3 + B'_3 \cdot \frac{1}{r^4} - \frac{1}{6} B_3 \cdot \frac{1}{r^2} \right).$$

Le calcul des coefficients A'_2 , A_2 , B_3 , B'_3 ne présente aucune difficulté; mais, comme il conduit à des expressions très-complexes, nous laisserons de côté le cas général pour ne considérer que celui d'une enveloppe très-mince, dont l'épaisseur soit négligeable devant le rayon intérieur ou extérieur. Si nous posons

$$r = r_0 + \epsilon,$$

il vient, en supprimant les secondes puissances de ϵ et laissant de côté les coefficients indéterminés

$$w = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} A_0 r_0 - \frac{B'_1}{r_0^2} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{3} \right) \left(2 A'_2 r_0 - \frac{A_2}{7} r_0^3 - 3 B'_3 \frac{1}{r_0^4} - \frac{4}{3} B_3 \frac{1}{r_0^2} \right) \\ & + \frac{\epsilon}{r_0} \left[\frac{1}{3} A_0 r_0 + \frac{2 B'_1}{r_0^2} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{3} \right) \left[2 A'_2 r_0 - \frac{3 A_2}{7} r_0^3 + 12 \frac{B'_3}{r_0^4} + \frac{8}{3} B_3 \frac{1}{r_0^2} \right] \right] \end{aligned} \right\},$$

$$u = 2 \sin \lambda \cos \lambda \left\{ \begin{aligned} & A'_2 r_0 - \frac{2}{7} A_2 r_0^3 + B'_3 \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{6} B_3 \frac{1}{r_0^2} \\ & + \frac{\epsilon}{r_0} \left(A'_2 r_0 - \frac{6}{7} A_2 r_0^3 - 4 B'_3 \frac{1}{r_0^4} + \frac{1}{3} B_3 \frac{1}{r_0^2} \right) \end{aligned} \right\}.$$

Les formules au moyen desquelles on calculera les coefficients A'_2 , A_2 , etc., s'obtiendront en supposant $i = 0$, dans les formules (B); puis ajoutant aux deux équations obtenues leurs dérivées par rapport à r , on a ainsi

$$2 A'_2 r_0 + \frac{1}{7} A_2 r_0^3 + 24 B'_3 \frac{1}{r_0^4} + \frac{19}{3} B_3 \frac{1}{r_0^2} = - \frac{19}{42} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu},$$

$$\frac{1}{7} A_2 r_0^3 - 60 B'_3 \frac{1}{r_0^4} - \frac{19}{2} B_3 \frac{1}{r_0^2} = - \frac{19}{42} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu},$$

$$2 A'_2 r_0 - \frac{5}{7} A_2 r_0^3 - 8 B'_3 \frac{1}{r_0^4} - \frac{5}{6} B_3 \frac{1}{r_0^2} = - \frac{1}{14} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu},$$

$$- \frac{5}{7} A_2 r_0^3 + 20 B'_3 \frac{1}{r_0^4} + \frac{5}{4} B_3 \frac{1}{r_0^2} = - \frac{1}{14} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu};$$

de là on déduit

$$\begin{aligned} A_2' r_0 &= -\frac{161}{450} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu}, \\ A_2 r_0^3 &= -\frac{37}{50} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu}, \\ \frac{B_3'}{r_0^4} &= -\frac{4}{75} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu}, \\ \frac{B_3}{r_0^3} &= \frac{28}{75} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu}. \end{aligned}$$

Les formules (A) donnent

$$\begin{aligned} \frac{B_1'}{r_0^3} &= -\frac{11}{6} \frac{1}{45} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu}, \\ A_0 r_0 &= \frac{11}{45} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu}, \end{aligned}$$

et en substituant

$$\begin{aligned} w &= \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} \left[\frac{1}{210} (92 - 199 \alpha^2) + \frac{\varepsilon}{r_0} \frac{1}{70} (1 - 3 \alpha^2) \right], \\ u &= \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} \sin \lambda \cos \lambda \left(-\frac{11}{21} + \frac{43}{35} \frac{\varepsilon}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Si l'on se reporte aux valeurs (3) et (4), on a enfin

$$(23) \quad \begin{cases} W = \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} \frac{1}{10} \left[4 - 9 \alpha^2 - \frac{\varepsilon}{r_0} (1 - \alpha^2) \right], \\ U = \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{13}{5} \frac{\varepsilon}{r_0} \right) \sin \lambda \cos \lambda. \end{cases}$$

L'approximation avec laquelle nous avons calculé les coefficients inconnus exige que nous prenions tout simplement

$$(24) \quad \begin{cases} W = \frac{1}{10} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} (4 \cos^2 \lambda - 5 \cos^2 \lambda), \\ U = -\frac{1}{2} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} \sin \lambda \cos \lambda. \end{cases}$$

Quant à la variation de l'épaisseur, elle sera donnée par

$$(25) \quad \frac{W_1 - W_0}{e} = -\frac{1}{10} \frac{\rho \omega^2 r_0^3}{\mu} \cos^2 \lambda.$$

Les formules (24) et (25) conduisent aux théorèmes suivants :

1°. *L'aplatissement au pôle est égal aux $\frac{5}{4}$ du gonflement de l'équateur, et le point de la croûte pour lequel le rayon n'a pas varié correspond à $\tan \lambda = \sqrt{\frac{4}{5}}$, soit $\lambda = 41^\circ 48' 37''$.*

2°. L'épaisseur est restée constante au pôle, mais elle a subi une diminution qui va constamment en augmentant à mesure que l'on s'approche de l'équateur.

3°. Le déplacement maximum dans le sens de la méridienne et la différence maximum des déplacements analogues à l'intérieur et à l'extérieur de la croûte correspondent à $\lambda = 45^\circ$; ce déplacement reste constamment négatif, ou autrement la courbe méridienne s'est contractée dans toute son étendue.

Il est maintenant aisé de voir que la courbe méridienne déformée est une ellipse: en effet si l'on désigne par r' et λ' les nouvelles valeurs de r et λ , on a, en posant $\frac{6\omega^2 r_0^3}{10g} = a$,

$$r' = r_0 + W = R_0 + a(4 \cos^2 \lambda - 5 \cos^2 \lambda'),$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{U}{r} = \lambda - 5 \frac{a}{r_0} \sin \lambda \cos \lambda;$$

ou, en négligeant la deuxième puissance de a ,

$$r' = r_0 + a(4 \cos^2 \lambda' - 5 \sin^2 \lambda').$$

Soient x, y les coordonnées d'un point de la courbe méridienne rapportée à l'axe des pôles et à sa perpendiculaire au centre de la sphère. Il est clair que l'on aura la même approximation

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r_0 + \frac{a}{r_0}(4y^2 - 5x^2),$$

$$x^2 + y^2 = r_0^2 + \frac{2a}{r_0}(4y^2 - 5x^2),$$

et enfin

$$y^2 \left(1 + 8 \frac{a}{r_0}\right) + x^2 \left(1 + 10 \frac{a}{r_0}\right) = r_0^2;$$

équation qui représente une ellipse dont les deux demi-axes sont égaux à

$$y' = r_0 \left(1 + 4 \frac{a}{r_0}\right), \quad x' = r_0 \left(1 + 5 \frac{a}{r_0}\right),$$

et sont dans le rapport $1 + 9 \frac{a}{r_0}$ à 1.

Quelques géologues, qui ne reconnaissaient pas la doctrine des soulèvements, ont cherché à expliquer les faits qui ont accompagné la formation de l'écorce terrestre en admettant que la Terre a éprouvé à différentes

époques, dans son axe de rotation, des dérangements dus à des causes astronomiques. Cette explication peu vraisemblable, supposant que l'aplatissement aux pôles observé actuellement résulte de l'action de la force centrifuge sur l'écorce terrestre arrivée à l'état solide, on a

$$\frac{\omega}{r_0} = \frac{1}{299} = 5 \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{10 \mu}.$$

Or on sait que

$$\omega r_0 = \frac{40000000}{3600 \times 24}, \quad \rho = \frac{5440}{9,818};$$

en substituant ces valeurs, on trouve que le coefficient d'élasticité $E = \frac{5}{2} \mu$, rapporté au millimètre carré, est égal à 44,430; ce coefficient est environ égal à deux fois et demi celui du fer, qui est de tous les métaux connus celui qui offre le plus de raideur. On ne paraît pas s'être occupé jusqu'ici de la recherche des coefficients d'élasticité des espèces minéralogiques et de leurs composés; mais il y a tout lieu de croire que les limites entre lesquelles varie le coefficient moyen d'élasticité des variétés prédominantes du granite qui forme l'élément principal de la croûte terrestre, sont très-différentes du chiffre trouvé plus haut.

On déduit facilement de ce qui précède

$$\Delta = \frac{1}{5} \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{\mu} \cos^2 \lambda,$$

$$M_m = 0,$$

$$P_p = \frac{1}{5} \rho \omega^2 r_0^2 \cos^2 \lambda.$$

Si $\lambda = 90^\circ$, $M_m = P_p$; ce qui devait être. Quant aux pressions R_r , P_p , elles sont de l'ordre e , et, par suite, négligeables par rapport à P_p , dans le genre d'approximation que nous avons adopté; nous avons donc ces trois nouveaux théorèmes :

1°. *La dilatation cubique est positive; elle est nulle au pôle et maximum à l'équateur; le volume de l'enveloppe s'est accru.*

2°. *Les forces élastiques principales se réduisent à une seule, dirigée suivant la tangente au parallèle, et qui est constamment une traction. Les points de rupture par arrachement se trouvent à l'équateur.*

3°. *Les forces élastiques correspondant à un même point sont dirigées suivant la tangente au parallèle, et chacune d'elles s'obtiendra en projetant P_p*

sur la normale au plan sur lequel elle s'exerce, puis reportant cette projection sur la tangente ci-dessus.

Ici il ne peut y avoir de rupture uniquement par glissement. Les failles ne peuvent donc servir d'argument en faveur de l'hypothèse des changements survenus dans l'axe de rotation de la Terre dont nous avons parlé plus haut.

L'augmentation du volume $4 \pi r_0^2 e$ de l'enveloppe aura pour expression

$$2 \pi r_0^2 e \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \lambda d\lambda \cdot \frac{1}{5} \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{\mu} = 4 \pi r_0^2 e \cdot \frac{1}{15} \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{\mu};$$

en d'autres termes, l'augmentation de volume a eu lieu dans le rapport de 1 à $\frac{1}{15} \cdot \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{\mu}$.

Il serait maintenant facile de poser les formules relatives aux pressions et aux déplacements de la Terre lorsque l'on veut faire entrer simultanément en ligne de compte la gravité, la force centrifuge, les pressions intérieures et extérieures. Sans insister sur cette question, que nous pouvons considérer comme résolue, nous ferons remarquer seulement que le cône de glissement devient ici elliptique, et que l'inclinaison sur l'horizon des directions du glissement varie avec la latitude du lieu.

Vu et approuvé,

Le 16 avril 1855,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 16 avril 1855,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

CAYX.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LES PETITES OSCILLATIONS DES FLUIDES QUI RECOUVRENT LA SURFACE DES PLANÈTES.

Dans cette Thèse, nous avons cherché à arriver directement et par des calculs très-simples aux équations des petites oscillations des liquides qui recouvrent la surface des planètes, équations obtenues pour la première fois par Laplace, qui les a déduites, par une transformation de coordonnées, des équations générales de l'hydrodynamique. Nous avons ensuite fait voir comment on peut calculer les coefficients des inconnues de la question, supposées développées en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la hauteur des molécules au-dessus de la surface du noyau solide de la Terre. C'est ainsi que, en satisfaisant aux équations indéfinies du mouvement et aux conditions relatives à la surface, nous sommes retombé sur les formules approximatives de Laplace, et que nous avons obtenu une relation permettant de calculer d'une manière approchée la pression variable du liquide en un point quelconque de sa masse; nous avons déduit de ces considérations et d'une manière très-simple le beau théorème de Laplace sur la stabilité de l'équilibre des mers.

Pour terminer, nous avons tiré des équations établies pour les liquides celles qui se rapportent au mouvement de l'atmosphère, auxquelles nous avons ensuite appliqué le mode de développement en série indiqué plus haut. Nous sommes ainsi retombés sur les formules approximatives de Laplace, qui, transformées d'une certaine façon, rentrent dans celles qui sont relatives aux marées.

Équations générales de l'équilibre des liquides en coordonnées polaires.

Soient :

- r, λ, L le rayon vecteur, la latitude et la longitude relatifs à une molécule m du liquide;
 p la pression correspondante rapportée à l'unité de surface ;

R_0 , M_0 , P_0 les composantes de l'accélération des forces qui sollicitent cette molécule, estimées respectivement suivant le prolongement du rayon, la méridienne en allant vers le pôle, et la tangente au parallèle dans le sens du mouvement du méridien mobile par rapport au méridien fixe pris pour origine des longitudes;

ρ la densité du liquide.

Les équations d'équilibre du liquide s'obtiendront en exprimant que l'élément de volume $r^2 \cos \lambda dr d\lambda dL$, déterminé par deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$, deux méridiens consécutifs distants de $d\lambda$, et deux cônes circulaires ayant pour sommet le centre de la sphère, pour axe la ligne des pôles, pour demi-ouverture $\frac{\pi}{2} - \lambda$, $\frac{\pi}{2} - (\lambda + d\lambda)$, est en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent et des pressions auxquelles ses faces sont soumises. On peut arriver de cette manière aux trois équations d'équilibre du fluide; mais il est plus simple d'opérer comme il suit.

Concevons que le solide élémentaire ci-dessus soit divisé en éléments de même forme, ayant avec lui une dimension commune et dont les deux autres soient infiniment petites par rapport à cette dernière, c'est-à-dire du second ordre; cette décomposition peut avoir lieu de trois manières différentes qu'il conviendra d'examiner successivement. Dans chaque cas, on aura pour un même solide partiel deux faces du quatrième ordre et quatre du troisième, et les cosinus des angles formés par les normales aux faces de la première catégorie avec les normales aux autres faces seront nuls ou du second ordre. Si maintenant on projette sur la normale à une face du quatrième ordre les pressions qui s'exercent sur toute la surface de l'élément de volume partiel correspondant, les deux faces du quatrième ordre considérées simultanément donneront un terme du cinquième ordre; chacune des autres faces donnera un terme du quatrième ordre qui disparaîtra lorsque l'on aura égard à la face opposée pour ne laisser subsister qu'un terme du sixième ordre, ou nul par rapport au premier trouvé. Si donc on désigne par ω l'aire de l'une des faces du quatrième ordre, et que l'on suppose que ω soit successivement perpendiculaire au rayon, à la méridienne et au parallèle, les projections des pressions sur la normale à l'une des faces ω , seront respectivement pour ces trois hypothèses,

$$-\omega \frac{dp}{dr} dr, \quad -\omega \frac{dp}{d\lambda} d\lambda, \quad -\omega \frac{dp}{dL} dL,$$

et comme les projections correspondantes des forces qui font équilibre à ces pressions sont

$$\rho R_0 \omega dr, \quad \rho M_0 \omega r d\lambda, \quad \rho P_0 \omega r \cos \lambda d\lambda,$$

on est conduit aux trois équations suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dr} = \rho R_0, \\ \frac{dp}{d\lambda} = \rho M_0 r, \\ \frac{dp}{dL} = \rho P_0 r \cos \lambda, \end{cases}$$

qui sont celles de l'équilibre du fluide.

L'équation de la surface libre du liquide s'obtiendra en exprimant que le travail des forces R_0 , M_0 , P_0 , agissant sur une molécule de cette surface, est nul pour tout déplacement situé dans le plan tangent au point considéré; les projections de ce déplacement suivant R_0 , M_0 , P_0 , étant respectivement dr , $r d\lambda$, $r \cos \lambda dL$, on a, pour l'équation cherchée,

$$(B) \quad R_0 dr + M_0 r d\lambda + P_0 r \cos \lambda dL = 0.$$

Équations des petits mouvements d'une couche liquide recouvrant un sphéroïde.

Supposons que les r , λ , L , ρ , R_0 , M_0 , P_0 se rapportent à la position initiale d'une molécule intérieure m du liquide, et que, à un instant quelconque du mouvement, ces grandeurs soient représentées par les mêmes lettres, mais accentuées; soient W , U , V les déplacements, supposés très-petits, de la molécule m , estimés suivant le rayon et ses perpendiculaires dans le méridien et le parallèle, dans le sens indiqué plus haut; on aura, en négligeant les quantités du second ordre en W , U , V , et d'après les formules (A),

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{dp'}{dr'} = \rho \left(R'_0 - \frac{d^2 W}{dt^2} \right), \\ \frac{dp'}{d\lambda'} = \rho \left(M'_0 - \frac{d^2 U}{dt^2} \right) r', \\ \frac{dp'}{dL'} = \rho \left(P'_0 - \frac{d^2 V}{dt^2} \right) r' \cos \lambda', \end{cases}$$

avec les relations évidentes

$$(D) \quad r' = r + W, \quad \lambda' = \lambda + \frac{U}{r}, \quad L' = L + \frac{V}{r \cos \lambda}.$$

Cherchons maintenant à transformer les équations (C), de manière à n'avoir que des différentielles partielles par rapport à r , λ , L , t .

On a d'abord

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dp'}{dr'} = \frac{dp'}{dr} \frac{dr}{dr'} + \frac{dp'}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr'} + \frac{dp'}{dL} \frac{dL}{dr'}, \\ \frac{dp'}{d\lambda'} = \frac{dp'}{dr} \frac{dr}{d\lambda'} + \frac{dp'}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{dp'}{dL} \frac{dL}{d\lambda'}, \\ \frac{dp'}{dL'} = \frac{dp'}{dr} \frac{dr}{dL'} + \frac{dp'}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dL'} + \frac{dp'}{dL} \frac{dL}{dL'}, \end{cases}$$

puis en différentiant les trois équations (D) successivement par rapport à r' , λ' , L' et négligeant toujours les termes du second ordre en W , U et V ,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} 1 = \frac{dr}{dr'} + \frac{dW}{dr} \frac{dr}{dr'} + \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr'} + \frac{dW}{dL} \frac{dL}{dr'}, \\ 0 = \frac{d\lambda}{dr'} + \frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dr} \frac{dr}{dr'} + \frac{dU}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr'} + \frac{dU}{dL} \frac{dL}{dr'} \right) - \frac{U}{r^2} \frac{dr}{dr'}, \\ 0 = \frac{dL}{dr'} + \frac{1}{r \cos \lambda} \left(\frac{dV}{dr} \frac{dr}{dr'} + \frac{dV}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr'} + \frac{dV}{dL} \frac{dL}{dr'} \right) - \frac{V}{r^2 \cos \lambda} \frac{dr}{dr'}; \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} 0 = \frac{dr}{d\lambda'} + \frac{dW}{dr} \frac{dr}{d\lambda'} + \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{dW}{dL} \frac{dL}{d\lambda'}, \\ 1 = \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dr} \frac{dr}{d\lambda'} + \frac{dU}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{dU}{dL} \frac{dL}{d\lambda'} \right) - \frac{U}{r^2} \frac{dr}{d\lambda'}, \\ 0 = \frac{dL}{d\lambda'} + \frac{1}{r} \left(\frac{dV}{dr} \frac{dr}{d\lambda'} + \frac{dV}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{dV}{dL} \frac{dL}{d\lambda'} \right) \\ - \frac{V}{r^2 \cos^2 \lambda} \left(\cos \lambda \frac{dr}{d\lambda'} - r \sin \lambda \frac{d\lambda}{d\lambda'} \right); \end{cases}$$

$$(\gamma) \quad \begin{cases} 0 = \frac{dr}{dL'} + \frac{dW}{dr} \frac{dr}{dL'} + \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dL'} + \frac{dW}{dL} \frac{dL}{dL'}, \\ 0 = \frac{d\lambda}{dL'} + \frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dr} \frac{dr}{dL'} + \frac{dU}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dL'} + \frac{dU}{dL} \frac{dL}{dL'} \right) - \frac{U}{r^2} \frac{dr}{dL'}, \\ 1 = \frac{dL}{dL'} + \frac{1}{r \cos \lambda} \left(\frac{dV}{dr} \frac{dr}{dL'} + \frac{dV}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dL'} + \frac{dV}{dL} \frac{dL}{dL'} \right) \\ - \frac{V}{r^2 \cos^2 \lambda} \left(\cos \lambda \frac{dr}{dL'} - r \sin \lambda \frac{d\lambda}{dL'} \right). \end{cases}$$

La première des équations (α) montre que $\frac{dr}{dr'}$ est égal à l'unité plus une quantité du premier ordre, et les deux suivantes que $\frac{d\lambda}{dr'}$, $\frac{dL}{dr'}$ sont au plus du premier ordre; la résolution de ces équations se simplifie donc notable-

ment et conduit à

$$\frac{dr}{dr'} = 1 - \frac{dW}{dr},$$

$$\frac{d\lambda}{dr'} = - \frac{d \frac{U}{r}}{dr},$$

$$\frac{dL}{dr'} = - \frac{1}{\cos \lambda} \frac{d \frac{V}{r}}{dr}.$$

Les équations (β) donnent de même

$$\frac{dr}{d\lambda'} = - \frac{dW}{d\lambda},$$

$$\frac{d\lambda}{d\lambda'} = 1 - \frac{1}{r} \frac{dU}{d\lambda},$$

$$\frac{dL}{d\lambda'} = - \frac{1}{r} \frac{d \frac{V}{\cos \lambda}}{d\lambda};$$

et enfin les équations (γ),

$$\frac{dr}{dL'} = - \frac{dW}{dL},$$

$$\frac{d\lambda}{dL'} = - \frac{1}{r} \frac{dU}{dL},$$

$$\frac{dL}{dL'} = 1 - \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dV}{dL}.$$

Les équations (C) deviennent alors

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp'}{dr} \left(1 - \frac{dW}{dr} \right) - \frac{dp'}{d\lambda} \frac{d \frac{U}{r}}{dr} - \frac{dp'}{dL} \frac{1}{\cos \lambda} \frac{d \frac{V}{r}}{dr} = \rho \left(R'_0 - \frac{d^2 W}{dt^2} \right), \\ - \frac{dp'}{dr} \frac{dW}{d\lambda} + \frac{dp'}{d\lambda} \left(1 - \frac{1}{r} \frac{dU}{d\lambda} \right) - \frac{dp'}{dL} \frac{1}{r} \frac{d \frac{V}{\cos \lambda}}{d\lambda} = r' \rho \left(M'_0 - \frac{d^2 U}{dt^2} \right), \\ - \frac{dp'}{dr} \frac{dW}{dr} - \frac{dp'}{d\lambda} \frac{1}{r} \frac{dU}{dL} + \frac{dp'}{dL} \left(1 - \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{dV}{dL} \right) = r' \rho \left(P'_0 - \frac{d^2 V}{dt^2} \right) \cos \lambda'. \end{array} \right.$$

Sans nous arrêter davantage sur ces généralités, appliquons les formules précédentes au mouvement oscillatoire de la mer produit par les actions attractives du Soleil et de la Lune. Les forces qui sollicitent la molécule m se composent de la gravité g des attractions de ces astres jointes à la varia-

tion de la gravité résultant de la dénivellation de la mer [*]. Ces dernières forces étant très-petites, on pourra en remplacer les composantes dans R'_0, M'_0, P'_0 par leurs projections R_0, M_0, P_0 sur le rayon, la méridienne et le parallèle primitifs, et négliger les produits de ces composantes par les déplacements; en d'autres termes, on remplacera R'_0, M'_0, P'_0 par R_0, M_0, P_0 respectivement par $-g + R_0, M_0, P_0 \cos \lambda$. D'un autre côté, d'après les formules (A), on a

$$\frac{dp}{dr} = g\rho, \quad \text{d'où} \quad p = P + \rho g(R' - r),$$

R' et P étant le rayon et la pression relatifs à la surface d'équilibre de la mer. Posons $p' = p + q$, q étant du même ordre de grandeur que les déplacements; en ayant égard à ce qui précède, les équations (F) deviennent

$$(F') \quad \begin{cases} \frac{d}{dr}(q + g\rho W) = \rho \left(R_0 - \frac{d^2 W}{dt^2} \right), \\ \frac{d}{d\lambda}(q + g\rho W) = \rho r \left(M_0 - \frac{d^2 U}{dt^2} \right), \\ \frac{d}{dL}(q + g\rho W) = \rho r \cos \lambda \left(P_0 - \frac{d^2 V}{dt^2} \right). \end{cases}$$

Il est maintenant facile de passer de ces équations à celles où l'on fait entrer en ligne de compte la rotation de la Terre sur elle-même; il suffit, pour cela, de se rappeler le théorème connu sur les forces apparentes dans les mouvements relatifs, et de comprendre, dans les R_0, M_0, P_0 , la force centrifuge et la force centrifuge composée; mais l'intensité de la première de ces forces étant très-petite par rapport à la pesanteur, nous pouvons en négliger la considération et écrire tout simplement, en posant $\tau = q + g\rho W$,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dr} &= \rho \left(R_0 + 2\omega \cos \lambda \frac{dV}{dt} - \frac{d^2 W}{dt^2} \right), \\ \frac{d\tau}{d\lambda} &= \rho r \left(M_0 - 2\omega \sin \lambda \frac{dV}{dt} - \frac{d^2 U}{dt^2} \right), \\ \frac{d\tau}{dL} &= \rho r \cos \lambda \left[P_0 + 2\omega \left(\sin \lambda \frac{dU}{dt} - \cos \lambda \frac{dW}{dt} \right) - \frac{d^2 V}{dt^2} \right]; \end{aligned}$$

or R_0, M_0, P_0 étant les composantes d'actions mutuelles de points maté-

[*] En négligeant la rotation de la Terre, sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

riels, leur travail, pour un déplacement élémentaire quelconque, est la différentielle totale d'une certaine fonction T de r , λ , L , c'est-à-dire que l'on a

$$R_0 dr + M_0 r d\lambda + P_0 r \cos \lambda dL = \frac{dT}{dr} dr + \frac{dT}{d\lambda} d\lambda + \frac{dT}{dL} dL;$$

d'où

$$R_0 = \frac{dT}{dr}, \quad M_0 r = \frac{dT}{d\lambda}, \quad P_0 r \cos \lambda = \frac{dT}{dL},$$

et les équations précédentes peuvent se mettre sous cette nouvelle forme.

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{dr} = \frac{dT}{dr} + 2\omega \cos \lambda \frac{dV}{dt} - \frac{d^2 W}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{dT}{d\lambda} - r \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{d^2 U}{dt^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{dL} = \frac{dT}{dL} + r \cos \lambda \left[2\omega \left(\sin \lambda \frac{dU}{dt} - \cos \lambda \frac{dW}{dt} \right) - \frac{d^2 V}{dt^2} \right]. \end{cases}$$

A ces trois équations, entre les inconnues σ , W , U , V , il faut joindre l'équation de continuité, qui s'obtiendra évidemment en exprimant que l'élément de volume $r^2 \cos \lambda dr d\lambda dL$ n'éprouve, dans le mouvement, aucune variation, ou que

$$\begin{aligned} (r + W)^2 \cos \left(\lambda + \frac{U}{r} \right) \left(dr + \frac{dW}{dr} dr \right) \left(d\lambda + \frac{dU}{d\lambda} d\lambda \right) \left(dL + \frac{dV}{dL} dL \right) \\ - r^2 \cos \lambda dr d\lambda dL = 0; \end{aligned}$$

d'où, pour l'équation cherchée, en négligeant les secondes puissances des déplacements

$$(2) \quad \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} r^2 + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV}{dL} = 0.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à écrire les conditions relatives à la surface; elles sont comprises dans l'équation

$$\begin{aligned} -g/dW + dT - R' \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{d^2 U}{dt^2} \right) d\lambda \\ + R' \cos \lambda \left[2\omega \left(\sin \lambda \frac{dU}{dt} - \cos \lambda \frac{dW}{dt} \right) - \frac{d^2 V}{dt^2} \right] dL = 0. \end{aligned}$$

qui, en ayant égard à la sphéricité de la surface d'équilibre et continuant toujours la même approximation, exprime que la résultante des forces qui sollicitent chaque point de la surface libre est normale à cette dernière.

Or

$$dW = \frac{dW}{d\lambda} d\lambda + \frac{dW}{dL} dL, \quad dT = \frac{dT}{d\lambda} d\lambda + \frac{dT}{dL} dL;$$

il vient, par conséquent, en remarquant que $d\lambda$ et dL sont indépendants,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -g \frac{dW}{d\lambda} + \frac{dT}{d\lambda} - R' \left(2 \omega \sin \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{d^2 U}{dt^2} \right) = 0, \\ -g \frac{dW}{dL} + \frac{dT}{dL} + R' \cos \lambda \left[2 \omega \left(\sin \lambda \frac{dU}{dt} - \cos \lambda \frac{dW}{dt} \right) - \frac{d^2 V}{dt^2} \right]. \end{array} \right.$$

Les équations (1), (2), (3) ne supposent nullement que la profondeur de la mer est très-faible par rapport au rayon de la Terre, et que cette dernière est très-sensiblement sphérique. Nous allons maintenant introduire ces hypothèses dans notre problème, afin d'en simplifier la solution.

Soient R le rayon du sphéroïde que recouvre la mer; $r - R = \varepsilon$; $R' - R = \gamma$ la profondeur de la mer; γ la valeur de W à la surface. Si nous admettons que σ , T , V , U soient développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de ε , nous pourrions écrire

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \varepsilon + \dots, \\ T = T_0 + T_1 \varepsilon + \dots, \\ U = U_0 + U_1 \varepsilon + \dots, \\ V = V_0 + V_1 \varepsilon + \dots, \end{array} \right.$$

les $\sigma_0, \sigma_1, \dots, U_0, U_1, \dots, V_0, V_1, \dots$ étant des fonctions inconnues de λ et L , et les $T_0, T_1, \dots$ des termes connus. En substituant les valeurs de U et V dans l'équation (2), puis intégrant par rapport à ε et négligeant les termes du second ordre, on trouve

$$W = W_0 \left(1 - 2 \frac{\varepsilon}{R'} \right) - \frac{\varepsilon}{R'} \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV_0}{dL} \right).$$

L'accroissement W_0 que prend le rayon vecteur d'un ellipsoïde peu différent d'une sphère pour une variation très-petite de chacune des coordonnées λ et L , étant lui-même très-petit par rapport à ces variations, on peut écrire tout simplement

$$W = W_0 - \frac{\varepsilon}{R'} \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV_0}{dL} \right),$$

et, par suite,

$$\mathcal{J} = W_0 - \frac{\gamma}{R'} \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV_0}{dL} \right).$$

Or W_0 , pris en signe contraire, étant égal à l'augmentation de la profondeur γ résultant des accroissements très-petits $\frac{U_0}{R'}$, $\frac{V_0}{R' \cos \lambda}$, donnés respectivement aux coordonnées λ et L , on a

$$-W_0 = \frac{d\gamma}{d\lambda} \cdot \frac{U_0}{R'} + \frac{d\gamma}{dL} \cdot \frac{V_0}{R' \cos \lambda},$$

et les équations ci-dessus deviennent

$$(4) \quad W = -\frac{1}{R'} \left[\frac{d\gamma}{d\lambda} U_0 + \frac{d\gamma}{dL} \frac{V_0}{\cos \lambda} + \frac{\varepsilon}{\cos \lambda} \left(\frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{dV_0}{dL} \right) \right],$$

$$(5) \quad \mathcal{J} = -\frac{1}{R' \cos \lambda} \left(\frac{d\gamma U_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{d\gamma V_0}{dL} \right).$$

On voit, d'après cela, que les déplacements $\mathcal{J}$ et W_0 sont très-petits relativement aux déplacements U_0 et V_0 , par rapport auxquels nous pourrions approximativement le négliger dans ce qui suit.

La première des équations (1) donne, en identifiant les coefficients des termes renfermant les mêmes puissances de ε , des relations en nombre suffisant pour déterminer les $\sigma_1, \sigma_2, \dots$; on trouve ainsi pour σ_1 , en négligeant W devant V_0 ,

$$(\gamma) \quad \frac{\sigma_1}{\rho} = T_1 + 2\omega \cos \lambda \frac{dV_0}{dt};$$

or pour $\varepsilon = \gamma$, on a $q = 0$, et en s'arrêtant à la première puissance de γ ,

$$(\varepsilon) \quad \sigma_0 + \sigma_1 \gamma = \rho g V;$$

par suite

$$q = \rho g (\mathcal{J} - W) + \sigma_1 (\varepsilon - \gamma),$$

et pour la pression

$$(6) \quad p = \rho (\gamma - \varepsilon) \left\{ g \left[1 - \frac{1}{R' \cos \lambda} \left(\frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{dV_0}{dL} \right) \right] - T_1 - 2\omega \cos \lambda \frac{dV_0}{dt} \right\} + P.$$

Les équations (3) rentrent alors dans les deux dernières équations (1) au moyen desquelles on peut calculer les $V_0, V_1, \dots, U_0, U_1, \dots$ de la même manière qu'il est possible de déterminer les $\sigma_1, \sigma_2, \dots$; il suffit, pour cela, de remarquer que : 1° par rapport à l'une ou l'autre des variables λ et L , on a

$$d\varepsilon = -dR = d\gamma;$$

2° dans les polynômes en ε qui résultent de la substitution des valeurs (δ) , cette quantité, fonction linéaire de r , peut être considérée comme variable indépendante; 3° dans la dernière des équations (1), on peut négliger W_0 devant U_0 et V_0 . On obtient ainsi, en ayant égard aux relations (γ) et (ε) , et observant que $T_0 + T_1 \gamma$ représente la valeur de T à la surface,

$$(7) \quad \begin{cases} g \frac{dy}{d\lambda} - 2\omega\gamma \frac{d \cos \lambda \frac{dV_0}{dt}}{dt} = \frac{dT}{d\lambda} - (R' - \gamma) \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2 U_0}{dt^2} \right), \\ g \frac{dy}{dL} - 2\omega\gamma \cos \lambda \frac{d^2 V_0}{dt^2} = \frac{dT}{dL} + (R' - \gamma) \left(2\omega \sin \lambda \frac{dU_0}{dt} - \frac{d^2 V_0}{dt^2} \right). \end{cases}$$

Pour que ces équations s'accordent aux notations près avec celles qui ont été données par Laplace, il suffit d'y négliger, dans les deux membres, les termes en γ , qui sont très-petits par rapport à γ , vu la lenteur avec laquelle s'exécutent les oscillations de la mer. On obtient ainsi les suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} g \frac{dy}{d\lambda} = \frac{dT}{d\lambda} - R' \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2 U_0}{dt^2} \right), \\ g \frac{dy}{dL} = \frac{dT}{dL} + R' \left(2\omega \sin \lambda \frac{dU_0}{dt} - \frac{d^2 V_0}{dt^2} \right) \cos \lambda, \end{cases}$$

qui avec l'équation (5), équivalente sous le rapport de l'approximation, permettent de déterminer les éléments U_0 , V_0 , γ relatifs au phénomène des marées.

De la stabilité de l'équilibre des mers.

Il est facile de déduire des deux formules (8) la relation entre U_0 et V_0 , ou entre implicitement la force vive du liquide dans son mouvement oscillatoire, et qui sert de point de départ à la recherche des conditions relatives à la stabilité de l'équilibre des mers. En effet, ces équations multipliées respectivement par $\frac{dU_0}{dt} = u$, $\frac{dV_0}{dt} = v$, puis combinées par addition, conduisent à la suivante

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2 + u^2) = \frac{1}{R'} \left(\frac{dv'}{d\lambda} \frac{dU_0}{dt} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dv'}{dL} \frac{dV_0}{dt} \right),$$

où γ' représente, pour abrégé, l'expression $T - g\gamma$.

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière équation par l'élément de volume $r^2 \cos \lambda dr d\lambda dL$, approximativement égal à $R'^2 \cos \lambda d\varepsilon d\lambda dL$, et que l'on intègre ensuite par rapport aux trois variables ε , λ , L , de 0 à γ

pour la première, de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ pour la seconde, de 0 à 2π pour la troisième, la densité du liquide étant prise pour unité, le premier membre de l'égalité ainsi obtenue représentera la dérivée, par rapport au temps, de la demi-force vive totale $\sum m w^2$ de la couche fluide, puisque W est très-petit et négligeable par rapport à U_0 et V_0 . On arrive ainsi, en supposant γ' indépendant de ε , à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum m w^2 = \frac{1}{R'} \left(\int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cos \lambda \cdot \frac{d\gamma'}{d\lambda} \cdot \frac{dU_0}{dt} d\lambda + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\lambda \cdot \int_0^{2\pi} \gamma \frac{d\gamma'}{dL} \cdot \frac{dV_0}{dt} dL \right);$$

or, en intégrant par parties, on a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cos \lambda \cdot \frac{d\gamma'}{d\lambda} \cdot \frac{dU_0}{dt} d\lambda = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma' \frac{d \left(\gamma \frac{dU_0 \cos \lambda}{dt} \right)}{d\lambda} d\lambda,$$

$$\int_0^{2\pi} \gamma \frac{d\gamma'}{dL} \cdot \frac{dV_0}{dt} dL = - \int_0^{2\pi} \gamma' \frac{d \left(\gamma \frac{dV_0}{dt} \right)}{dL} dL;$$

par suite,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum m w^2 = - \frac{1}{R'} \iint \gamma' \frac{d}{dt} \left(\frac{d\gamma U_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{d\gamma V_0}{dL} \right) d\lambda dL,$$

ou, en se reportant à l'équation (5) et posant $\sin \lambda = \mu$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum m w^2 = \int_0^{2\pi} dL \int_{-1}^{+1} \gamma' \frac{d\gamma}{dt} d\mu.$$

Si l'on fait abstraction des attractions solaire et lunaire pour ne considérer que l'action mutuelle des molécules de la mer, la fonction T résulte de l'attraction, sur une molécule intérieure, d'une couche liquide dont les rayons extérieur et intérieur sont $R' + \gamma$ et R' ; et en négligeant les termes de l'ordre γ ($\gamma - \varepsilon$), on peut supposer que cette fonction est la même qu'à la surface pour toutes les molécules liquides situées sur un même rayon. Or on démontre que :

1°. γ est de la forme

$$\gamma = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots,$$

Y_n étant une fonction entière et rationnelle de μ , $\sqrt{1-\mu^2} \sin L$, $\sqrt{1-\mu^2} \cos L$.

satisfaisant à l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d(1-\mu^2)\frac{dY_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{d^2Y_n}{dL} + n(n-1)Y_n = 0;$$

2°. T est exprimé par

$$T = \frac{3g}{\rho} \left(\frac{Y_1}{3} + \frac{Y_2}{5} + \frac{Y_3}{7} + \dots \right),$$

ρ étant la densité moyenne de la Terre;

3°. Si n et n' sont des nombres entiers différents l'un de l'autre, on a

$$\int_0^{2\pi} dL \int_{-1}^{+1} Y_n Y_{n'} d\mu = 0.$$

Il suit de là que

$$\gamma' = -g \left[Y_1 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) + Y_2 \left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\rho} \right) + \dots \right].$$

En faisant ces substitutions dans notre dernière équation, puis intégrant par rapport au temps, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\sum m w^2 - \sum n_1 w_0^2 \right) \\ &= -g \int_0^{2\pi} dL \int_{-1}^{+1} \left[Y_1^2 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) + Y_2^2 \left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\rho} \right) + \dots \right] d\mu. \end{aligned}$$

Si ρ est plus grand que l'unité, le second membre de cette équation est constamment négatif et reste inférieur, en valeur absolue, à $\frac{1}{2} \sum m w_0^2$; par suite les Y ne renferment pas de termes croissants avec le temps : donc *la mer est en équilibre stable si sa densité est moindre que la densité moyenne de la Terre.*

Dans le cas où ρ est plus petit que l'unité, la stabilité n'existe plus indépendamment des conditions initiales du mouvement qui pourront être telles, que les déplacements U_0 et V_0 aillent en croissant avec le temps.

Des oscillations de l'atmosphère.

Occupons-nous maintenant des mouvements oscillatoires très-petits de l'atmosphère; nous aurons entre la pression p et la densité ρ la relation

$$(9) \quad p = l g \rho,$$

l étant la hauteur qu'aurait l'atmosphère si sa densité était partout la même et égale à celle qui est relative à la surface de la mer; cette hauteur est

très-petite par rapport au rayon terrestre dont elle n'est que la $\frac{1}{800}$ partie environ.

Les équations d'équilibre et de mouvement des liquides établies plus haut, résultant de la considération d'un élément de volume, subsisteront ici pourvu que l'on y remplace les différentielles de la forme $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d}$ par $lg \frac{d \log p}{d}$. On a ainsi, dans le cas où l'atmosphère est en équilibre sous l'action de la pesanteur variable avec la hauteur, et en appelant g et P la gravité et la pression à la surface de la mer, et R' le rayon moyen de la Terre,

$$(10) \quad \begin{aligned} lg \frac{d \log p}{dr} &= -g \frac{R'^2}{r^2}, \\ p &= P e^{-\frac{R'}{l} \left(1 - \frac{R'}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Si p' représente la pression à un instant quelconque du mouvement et que l'on pose

$$\log p' = \log p + q,$$

q sera donné par les équations (1) ainsi modifiées,

$$(11) \quad \begin{aligned} g \left(lq + \frac{R'^2}{r^2} W \right) &= \sigma, \\ \begin{cases} \frac{d\sigma}{dr} = \frac{dT}{dr} + 2\omega \cos \lambda \frac{dV}{dt} - \frac{d^2 W}{dt^2}, \\ \frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{dT}{d\lambda} - r \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV}{dt} + \frac{d^2 U}{dt^2} \right), \\ \frac{d\sigma}{dL} = \frac{dT}{dL} + r \cos \lambda \left[2\omega \left(\sin \lambda \frac{dU}{dt} - \cos \lambda \frac{dW}{dt} \right) - \frac{d^2 V}{dt^2} \right]; \end{cases} \end{aligned}$$

q étant très-petit, on pourra prendre

$$p' = p(1 + q).$$

L'équation de continuité s'obtiendra en exprimant que la masse élémentaire $\rho r^2 \cos \lambda dr d\lambda dL$ reste constamment la même pendant le mouvement, ou, en appelant $\delta\rho$ la variation de la densité, que

$$\delta\rho + \rho \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} r^2 + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU \cos \lambda}{dr} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV}{dL} \right) = 0;$$

ou

$$(\rho + \delta\rho) lg = p' = p(1 + q),$$

d'où

$$\partial \rho = \frac{\rho q}{lg},$$

et, par suite,

$$(12) \quad q + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{dW r^2}{dr} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV}{dL} \right) = 0.$$

Les équations (11) et (12) jointes aux conditions relatives à la surface de la Terre, et en négligeant celles qui résultent du mouvement initial dont nous n'avons pas à tenir compte, permettront ainsi de déterminer les inconnues de la question q, W, U, V .

La tension de l'atmosphère décroissant très-rapidement à mesure que l'on s'élève et devenant insensible à une hauteur très-petite par rapport au rayon terrestre, on peut admettre que T, q, W, U, V sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la hauteur $r - R' = \varepsilon$, et poser

$$T = T_0 + T_1 \varepsilon + T_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$q = q_0 + q_1 \varepsilon + q_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$W = \gamma + W_1 \varepsilon + W_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$U = U_0 + U_1 \varepsilon + U_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$V = V_0 + V_1 \varepsilon + V_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

γ étant la surélévation de la mer supposée calculée d'après la théorie exposée plus haut.

Les équations (11) et (12) donnent, après la substitution de ces valeurs.

$$g \left(lq_0 + W_1 - 2 \frac{\gamma}{R} \right) = T_0 + 2 \omega \cos \lambda \frac{dV_0}{dt} - \frac{d^2 \gamma}{dt^2},$$

$$g \frac{d}{d\lambda} (lq_0 + \gamma) = \frac{dT}{d\lambda} - R' \left(2 \omega \sin \lambda \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2 U_0}{dt^2} \right),$$

$$g \frac{d}{dL} (lq_0 + \gamma) = \frac{d^2 \gamma}{dL^2} + R' \cos \lambda \left[2 \omega \left(\sin \lambda \frac{dV_0}{dt} - \cos \lambda \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{d^2 V_0}{dt^2} \right],$$

$$q_0 = - \frac{1}{R'} \left[2 \gamma + RW_1 + \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV_0}{dL} \right) \right],$$

système de quatre équations entre les cinq inconnues q_0, q_1, W_1, U_0, V_0 .

L'identification des termes en ε^2 conduira à quatre autres équations, mais qui renfermeront quatre nouvelles inconnues q_2 , W_2 , U_1 , V_1 , et ainsi de suite. Les équations ainsi obtenues renfermeront donc une arbitraire W_1 en fonction de laquelle les autres coefficients inconnus de ε pourront se déterminer; il est donc permis de la supposer nulle comme Laplace l'a admis à priori, et les trois dernières équations entre q_0 , U_0 , V_0 deviennent, en négligeant la quantité très-petite γ devant V_0 et U_0 ,

$$\begin{aligned} g \frac{d}{d\lambda} (lq_0 + \gamma) &= \frac{dT}{d\lambda} - R' \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2 U_0}{dt^2} \right), \\ g \frac{d}{dL} (lq_0 + \gamma) &= \frac{dT}{dL} + R' \cos \lambda \left(2\omega \sin \lambda \frac{dU_0}{dt} - \frac{d^2 V_0}{dt^2} \right), \\ lq_0 &= - \frac{l}{R'} \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV_0}{dL} \right). \end{aligned}$$

Si l'on appelle V'_0 , U'_0 , l' les déplacements et la profondeur relatifs à la mer, on a, d'après ce qui précède, en négligeant les attractions mutuelles des molécules de la mer, l' étant supposé constant,

$$\begin{aligned} g \frac{dy}{d\lambda} &= \frac{dT}{d\lambda} - R' \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV'_0}{dt} + \frac{d^2 U'_0}{dt^2} \right), \\ g \frac{dy}{dL} &= \frac{dT}{dL} + R' \cos \lambda \left(2\omega \sin \lambda \frac{dU'_0}{dt} - \frac{d^2 V'_0}{dt^2} \right), \\ \gamma &= - \frac{l'}{R' \cos \lambda} \left(\frac{dU'_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{dV'_0}{dL} \right). \end{aligned}$$

En combinant ces équations avec les précédentes et posant

$$\begin{aligned} (l - l') U_0 + l' U'_0 &= l U''_0, \\ (l - l') V_0 + l' V'_0 &= l V''_0, \\ (l - l') lq_0 + l\gamma &= l\gamma'', \end{aligned}$$

on arrive facilement aux suivantes :

$$\begin{aligned} g \frac{dy''}{d\lambda} &= \frac{dT}{d\lambda} - R' \left(2\omega \sin \lambda \frac{dV''_0}{dt} + \frac{d^2 U''_0}{dt^2} \right), \\ g \frac{dy''}{dL} &= \frac{dT}{dL} + R' \cos \lambda \left(2\omega \sin \lambda \frac{dU''_0}{dt} - \frac{d^2 V''_0}{dt^2} \right), \\ \gamma'' &= - \frac{l}{R'} \left(\frac{1}{\cos \lambda} \frac{dU''_0 \cos \lambda}{d\lambda} + \frac{1}{\cos \lambda} \frac{dV''_0}{dL} \right). \end{aligned}$$

Ces trois équations sont évidemment celles des oscillations d'une mer de profondeur constante L' , de sorte que l'on est ramené au problème des marées.

Vu et approuvé,

Le 16 avril 1855,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 16 avril 1855,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

CAYX.

ERRATA.

Pages. Lignes.

- 9, 16, au lieu de $-\frac{X_r + Y_r}{4}$, lisez $+\frac{X_r + Y_r}{4}$.
- 16, 6 et 9, au lieu de W, lisez V.
- 22, 21 et 22, au lieu de par arrachement à l'extérieur, comme dans le cas précédent, et écrasement..., lisez par arrachement à l'extérieur et écrasement....
- 24, 11, au lieu de $z = 0$, lisez $Z = 0$; au lieu de W, lisez Δ .
- 24, 13, au lieu de $6a = \frac{6\omega^2}{\mu}$, lisez $6a = -\frac{6\omega^2}{\mu}$.
- 27, 4, en remontant, au lieu de P_n , lisez P_n^2 .
- 28, 7, en remontant, au lieu de $(1-x^2)\left(\frac{dw}{dz} - \frac{dr du}{dr}\right)$, lisez $(1-x^2)\frac{dw}{dz} - \frac{dr du}{dr}$.
- 29, 1, en remontant, au lieu de u , lisez ω' .
- 32, 3, en remontant, au lieu de $d\sqrt{1-x^2}$, lisez $d(1-x^2)$.
- 32, 4, en remontant, au lieu de $\sqrt{1-x^2}\frac{dP_n}{dz}$, lisez P_n .
- 40, 15, en descendant, au lieu de intérieures et extérieures, lisez intérieure et extérieure.
- 42, 25, au lieu de second ordre, lisez premier ordre.