

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

*H. F. n. f. 166.
(1, 21)*

SUR LA

PROPAGATION DE LA CHALEUR

DANS

L'INTÉRIEUR DES CORPS SOLIDES.

THÈSE

PRÉSENTÉE ET SOUTENUE

DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
LE JUIN 1830.

PAR AUGUSTE GUIOT,

ASPIRANT AU DOCTORAT ÈS-SCIENCES.



Paris.

ÉVERAT, IMPRIMEUR, RUE DU CADRAN, N° 16.

1830.

SUR LA

PROPAGATION DE LA CHALEUR

DANS

L'INTÉRIEUR DES CORPS SOLIDES.



Nous nous proposons de traiter quelques questions sur la propagation de la chaleur : elles auront pour objet les variations que subissent les températures de deux corps solides, un cylindre et une sphère, primitivement échauffés sous certaines conditions, et placés dans des circonstances données.

Nous ferons complètement abstraction des hypothèses établies sur la nature du principe de la chaleur, et sur le mode réel de propagation de ses effets sensibles. Quelle que puisse être en effet la nature intime de ce principe, que ce soit par voie ondulatoire ou par une émission spontanée de ses propres molécules que le *calorique* exerce et transmet son action, la détermination des lois mathématiques des phénomènes que l'on attribue à cet agent naturel ne saurait dépendre d'aucune des opinions que l'on peut adopter à cet égard. Les équations différentielles du mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps solides terminés par des surfaces définies reposent entièrement sur un certain nombre de faits généraux, constatés par des expériences qui ne laissent rien à désirer. Nous admettrons directement ces équations, qui sont aux différences partielles, et nous appliquerons quelques-unes des méthodes d'intégration dues aux illustres géomètres dont les savans travaux ont fondé la théorie analytique de la chaleur. Il est superflu d'ajouter que nous nous bornerons à donner des solutions générales : la discussion de ces solutions serait d'ailleurs fort simple quant à l'examen des conséquences plus ou moins importantes qu'elles peuvent renfermer, et les applications numériques dont elles sont susceptibles exigeraient uniquement, à part dans certains cas des difficultés d'intégration ou d'analyse algébrique, la détermination expérimentale de constantes dont elles sont affectées. Rappelons maintenant en peu de mots les équations différentielles nécessaires à l'objet de cette thèse.

Soient x, y, z , les coordonnées orthogonales d'une molécule quelconque d'un corps échauffé, K la conductibilité de cette molécule, D sa densité, C sa *capacité spécifique*, et θ sa température après un temps quelconque t . La première et la plus générale de ces

équations, fondée sur la propriété caractéristique du *flux* de la chaleur, considéré entre deux molécules contiguës pendant un temps infiniment court, est

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{CD} \left[\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2} \right] \dots (I).$$

La seconde se rapporte à la nature physique et géométrique de la surface du corps particulier que l'on considère. Désignons par $L=0$ l'équation de cette surface, et par h la mesure de son pouvoir rayonnant : on a, pour tous les points et pour les seuls points qui forment l'enveloppe extérieure du solide échauffé,

$$\frac{\frac{d\theta}{dx} \frac{dL}{dx} + \frac{d\theta}{dy} \frac{dL}{dy} + \frac{d\theta}{dz} \frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}} + \frac{h}{K} \theta = 0 \dots (II).$$

Dans chaque problème nous devons satisfaire à une troisième condition qui dépendra des températures initiales, et pourra être exprimée par une équation finie quelconque algébrique ou transcendante. Tels sont les théorèmes fondamentaux dont nous ferons l'application aux questions particulières que nous nous sommes proposées.

§ 1^{er}.

Concevons qu'une sphère d'un rayon infini, formée d'une substance solide et homogène dans toutes ses propriétés physiques, ait reçu primitivement et conservé sous l'influence d'une cause permanente quelconque des températures connues, uniformes pour chacune des couches concentriques infiniment minces dont elle se compose, mais variables d'une couche à une autre; et admettons qu'en un instant donné cette cause permanente soit totalement supprimée. Dès cet instant la distribution de la chaleur dans l'intérieur de la sphère cessera d'être constante, et il s'établira entre les températures des divers points de cette masse infinie un mouvement général dont nous nous proposons d'assigner la loi en fonction du temps.

Toutes les couches sphériques étant d'abord rapportées à trois axes rectangulaires, et le centre commun pris pour origine, la température du point quelconque $[x, y, z]$ sera une certaine fonction F de la position de ce point et du temps écoulé. Il convient de commencer par chercher la forme de cette fonction, pour le cas où la sphère a reçu un système quelconque de températures initiales, indépendant de toute loi d'uniformité. Dans cet état de généralité de la question, nous devons traiter immédiatement l'équation (I) écrite sous la forme

$$\frac{d^3}{dt^3} = m \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \dots (1),$$

m étant une constante d'après l'hypothèse d'homogénéité; la méthode d'analyse que nous appliquerons est basée sur le théorème

$$\pi f(x) = \int_a^b \int_0^\infty \cos \alpha (x - \mu) f(\mu) d\alpha d\mu,$$

dont nous donnerons préalablement une démonstration directe extrêmement simple, d'après la théorie des intégrales singulières.

On peut considérer l'intégrale double du deuxième membre comme la limite vers laquelle converge la suivante,

$$\int_a^b \int_0^\infty \cos \alpha (x - \mu) e^{-k\alpha} f(\mu) d\alpha d\mu,$$

lorsque k converge lui-même vers la limite zéro. Effectuant l'intégration relative à α , et observant que

$$\int_0^\infty e^{-k\alpha} \cos \alpha (x - \mu) d\alpha = \frac{k}{k^2 + (x - \mu)^2},$$

nous obtenons

$$\int_a^b \frac{k f(\mu) d\mu}{k^2 + (x - \mu)^2}.$$

Or la formule ou le théorème dont elle est l'expression suppose essentiellement que $f(\mu)$ conserve des valeurs finies pour toutes celles de μ comprises entre a et b . La fonction $\frac{k f(\mu)}{k^2 + (x - \mu)^2}$ s'évanouit donc pour toutes les valeurs de cette variable qui ne diffèrent pas infiniment peu de x ; d'où il résulte qu'il suffit d'intégrer depuis $\mu = x - h$ jusqu'à $\mu = x + h$, h étant un infiniment petit du même ordre que $\sqrt{k}$. On obtient en conséquence

$$\int \frac{k f(\mu) d\mu}{k^2 + (x - \mu)^2} = \int \frac{k f(x) d\mu}{k^2 + (x - \mu)^2} = f(x) \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} = \frac{\mu - x}{k} \right),$$

intégrale qui, prise entre les limites $x - h$ et $x + h$, devient

$$2 f(x) \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} = \frac{h}{k} \right) = \pi f(x).$$

Si l'on représente par $\frac{k f(\mu)}{k^2 + (x - \mu)^2}$ l'ordonnée d'une courbe dont μ soit l'abscisse et conséquemment $\int_a^b \frac{k f(\mu) d\mu}{k^2 + (x - \mu)^2}$ l'aire d'un segment; pour toutes les valeurs de μ qui ne seront pas infiniment voisines de x , cette courbe se confondra sensiblement avec l'axe des abscisses et les aires correspondantes seront infiniment petites; mais, pour ces valeurs exceptées, les ordonnées s'élèveront rapidement, et entre les limites $\mu = x - h$, $\mu = x + h$, la courbe comprendra une surface d'une largeur infiniment petite parallèlement à l'axe des abscisses, et néanmoins incomparablement plus grande que celle des aires comprises entre cet axe et les autres parties de la courbe, surface qui sera d'ailleurs sensiblement symétrique par rapport à l'ordonnée du point dont l'abscisse est x . On voit donc que si x était égal à l'une des limites a et b , l'intégrale se réduirait à la moitié de sa valeur, et qu'elle deviendrait nulle si x était pris en dehors de ces limites.

Il résulte de cette démonstration que, pour toute valeur de x comprise entre a et b , on a, pour une fonction quelconque continue ou discontinue,

$$\pi f(x) = \int_a^b \int_0^\infty \cos. \alpha (x - \mu) f(\mu) d\alpha d\mu.$$

Lorsque l'on suppose $a = -\infty$, $b = \infty$, cette équation devient

$$\pi f(x) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \cos. \alpha (x - \mu) f(\mu) d\alpha d\mu,$$

et n'est plus qu'un cas particulier de la formule connue

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_0^l f(\mu) d\mu + \frac{1}{l} \sum_1^\infty \left[\int_l^{+l} \cos. \frac{n\pi(x-\mu)}{l} f(\mu) d\mu \right].$$

Ce théorème établi, nous posons

$$\theta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^\infty e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(\gamma-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\omega)\sqrt{-1}} F(\mu, \nu, \omega, t) d\alpha d\beta d\gamma d\mu d\nu d\omega.$$

Différenciant, substituant dans l'équation du problème et renfermant la fonction dans sa caractéristique, nous obtenons

$$* \iiint \dots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(\gamma-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\omega)\sqrt{-1}} \left[\frac{dF}{dt} + m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)F \right] d\alpha d\beta d\gamma d\mu d\nu d\omega = 0$$

* Dans cette partie du calcul les limites d'intégration non exprimées seront censées égales à $+\infty$ et $-\infty$.

équation qui doit avoir lieu indépendamment de t , et donne successivement

$$\frac{dF}{dt} + m(x^2 + \zeta^2 + \gamma^2) F = 0,$$

$$F = Ce^{-m(x^2 + \zeta^2 + \gamma^2)t}.$$

Soit $\theta = \varphi(x, \gamma, z)$ l'expression des températures initiales; cette condition détermine la constante arbitraire et change l'équation précédente en

$$F = \varphi(\mu, \nu, \omega) e^{-m(x^2 + \zeta^2 + \gamma^2)t}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les quantités variables $\mu, \nu, \omega, x, \zeta, \gamma, t$ en vertu de la double condition de la question. Il faut maintenant substituer cette valeur dans l'expression de θ et effectuer les intégrations; cette expression devient d'abord

$$\theta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \dots e^{-mtx^2 + \alpha(x-\mu)\sqrt{-1} - mt\zeta^2 + \zeta(\gamma-\nu)\sqrt{-1} - mt\gamma^2 + \gamma(z-\omega)\sqrt{-1}} \varphi(\mu, \nu, \omega) dxd\zeta d\gamma d\mu d\nu d\omega.$$

Or, l'on sait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z+h\sqrt{-1})^2}{4mt}} dz = \sqrt{\pi};$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mtx^2 + (x-\mu)\alpha\sqrt{-1}} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{mt}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4mt}}.$$

Donc,

$$\theta = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi mt}}\right)^3 \iiint e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (\gamma-\nu)^2 + (z-\omega)^2}{4mt}} \varphi(\mu, \nu, \omega) d\mu d\nu d\omega,$$

ou en posant

$$(x-\mu)^2 = 4mtp^2, (\gamma-\nu)^2 = 4mtq^2, (z-\omega)^2 = 4mts^2,$$

$$\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \iiint \varphi(x+2p\sqrt{mt}, \gamma+2q\sqrt{mt}, z+2s\sqrt{mt}) e^{-p^2-q^2-s^2} dpdqds$$

Il reste à particulariser la forme de la fonction φ et achever les intégrations. Nous pourrions faire quelques hypothèses sur cette fonction; supposer, par exemple, $\varphi(x, \gamma, z) = he^{-ax-by-cz}$, h, a, b, c , étant des constantes positives. L'expression de θ deviendrait

$$\theta = h \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \iiint e^{-a(x+2p\sqrt{mt})-p^2} e^{-b(\gamma+2q\sqrt{mt})-q^2} e^{-c(z+2s\sqrt{mt})-s^2} dpdqds,$$

et comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+2p\sqrt{mt})-p^2} dp = \sqrt{\pi} e^{-a(x-amt)},$$

elle se réduirait à

$$\theta = h e^{-ax-by-cz} e^{mt(a^2+b^2+c^2)}.$$

De même, si l'on avait $\varphi(x, y, z) = h e^{-ax^2-by^2-cz^2}$, on trouverait, en observant que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+2p\sqrt{mt})^2-p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+4amt}} e^{-\frac{ax^2}{1+4amt}},$$

$$\theta = \frac{h}{(1+4amt)^{\frac{1}{2}} (1+4bmt)^{\frac{1}{2}} (1+4cmt)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-ax^2}{1+4amt}} e^{\frac{-by^2}{1+4bmt}} e^{\frac{-cz^2}{1+4cmt}}.$$

Mais sans nous arrêter à un plus grand nombre de ces sortes d'exemples, pour chacun desquels il serait facile de reconnaître que le résultat satisfait aux conditions du problème, revenons à la question primitive et reprenons l'hypothèse d'une sphère à couches concentriques isothermes. À part les difficultés de calcul, la loi des températures variables relatives à cette hypothèse se déduirait du résultat général précédemment obtenu, puisque la température d'une molécule quelconque, pour un instant déterminé, ne dépendant plus que de sa distance au centre, il suffirait de supposer $\varphi(x, y, z) = \psi(x^2+y^2+z^2)$, et l'on serait conduit à former l'intégrale

$$\iiint \psi[(x+2p\sqrt{mt})^2 + (y+2q\sqrt{mt})^2 + (z+2s\sqrt{mt})^2] e^{-p^2-q^2-s^2} dp dq ds.$$

mais cette méthode étant rarement susceptible d'une exécution facile, nous préférons d'intégrer directement l'équation qui convient à la sphère, en vertu de la loi supposée des températures initiales. Pour obtenir cette équation, nous avons

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{dx}, \quad \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{dy}, \quad \frac{d\psi}{dz} = \frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{dz},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} \frac{dr^2}{dx^2} + \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2r}{dx^2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} \frac{dr^2}{dy^2} + \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2r}{dy^2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{d^2\psi}{dr^2} \frac{dr^2}{dz^2} + \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2r}{dz^2}.$$

Et en substituant dans l'équation (1),

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = m \left[\frac{d^2\mathfrak{z}}{dr^2} \left(\frac{dr^2}{dx^2} + \frac{dr^2}{dy^2} + \frac{dr^2}{dz^2} \right) + \frac{d\mathfrak{z}}{dr} \left(\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{d^2r}{dy^2} + \frac{d^2r}{dz^2} \right) \right].$$

Déterminant les coefficients différentiels au moyen de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, on obtient, réduction faite,

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = m \left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\mathfrak{z}}{dr} \right) \dots \dots \dots (4).$$

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer de manière qu'on ait pour $t=0$, $\mathfrak{z} = \varphi(r)$. Si l'on pose $\zeta = \frac{\mathfrak{z}}{r}$, ζ étant une nouvelle variable, cette équation se simplifie et devient

$$\frac{d\zeta}{dt} = m \frac{d^2\zeta}{dr^2} \dots \dots \dots (5):$$

cela posé, nous écrirons, conformément à notre méthode,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint e^{\alpha(r-\mu)\sqrt{-1}} F(\mu, t) dx d\mu.$$

Substituant dans l'équation (5) les coefficients différentiels $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d^2\zeta}{dr^2}$, déduits de la précédente, nous obtiendrons la relation

$$\frac{d.F(\mu, t)}{dt} + m\alpha^2 F(\mu, t) = 0,$$

d'où

$$F(\mu, t) = C e^{-m\alpha^2 t} = \mu \varphi(\mu) e^{-m\alpha^2 t},$$

en ayant égard à la condition $\zeta = r\varphi(r)$ pour $t=0$.

Donc,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint \mu \varphi(\mu) e^{-m\alpha^2 t - (r-\mu)\alpha\sqrt{-1}} dx d\mu,$$

et en intégrant par rapport à α et rétablissant $\mathfrak{z}$,

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2r\sqrt{mt\pi}} \int \mu \varphi(\mu) e^{-\frac{(r-\mu)^2}{4mt}} d\mu.$$

Posons $(r-\mu)^2 = 4mtp^2$, et nous obtiendrons successivement

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int (r+2p\sqrt{mt}) e^{-p^2} dp \cdot \varphi(r+2p\sqrt{mt}),$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \varphi(r+2p\sqrt{mt}) e^{-p^2} dp + \frac{2\sqrt{mt}}{r\sqrt{\pi}} \int \varphi(r+2p\sqrt{mt}) e^{-p^2} p dp.$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \varphi(r+2p\sqrt{mt}) e^{-p^2} dp + \frac{2mt}{r\sqrt{\pi}} \frac{d}{dr} \int \varphi(r+2p\sqrt{mt}) e^{-p^2} dp \dots (6).$$

L'équation (6) forme la solution générale de la question que nous nous sommes proposée; elle exprimera la loi des variations de température des couches isothermes d'une sphère d'un rayon infini, toutes les fois qu'étant donnée celle des températures primitives de cette sphère, on pourra obtenir l'intégrale $\int \phi(r=2\sqrt{mt}.p) e^{-p^2} dp$.

Pour faire une ou deux applications de ce résultat, supposons $\phi(r) = ce^{-ar}$, a étant une constante positive, l'équation (6) devient

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-ar-2ap\sqrt{mt}-p^2} dp + \frac{2cmt}{r\sqrt{\pi}} \frac{d}{dr} \int e^{-ar-2ap\sqrt{mt}-p^2} dp;$$

or,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ap\sqrt{mt}-p^2} dp = e^{a^2 mt} \sqrt{\pi}.$$

Substituant et effectuant les calculs, on obtient, réductions faites,

$$\theta = ce^{-ar+a^2 mt} \frac{r-2amt}{r}.$$

Soit, pour second exemple, $\phi(r) = ce^{-ar^2}$; on trouve semblablement, en observant que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(r+2p\sqrt{mt})^2-p^2} dp = \frac{1}{\sqrt{1+4amt}} e^{-\frac{ar^2}{1+4amt}},$$

ce résultat

$$\theta = \left(\frac{1}{1+4amt} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{ar^2}{1+4amt}}.$$

On reconnaît facilement que les deux valeurs ainsi obtenues vérifient l'équation (5); d'ailleurs, elles se réduisent respectivement à $\theta = ce^{-ar}$, $\theta = ce^{-ar^2}$, lorsque $t = 0$. Chacune d'elles représente donc la solution complète du problème dans l'hypothèse de la forme correspondante attribuée à la fonction ϕ .

§ II.

Imaginons en second lieu un cylindre de révolution formé d'une substance solide et homogène, ayant un rayon déterminé et une longueur infinie suivant les deux directions opposées de son axe; admettons que ce solide primitivement échauffé suivant des conditions connues et quelconques, pourvu que tous les points à égale distance de l'axe aient acquis une même température, soit subitement plongé dans une atmosphère d'une composition homogène et d'une température uniforme et constante, température que nous prendrons, quelle qu'elle soit, pour le zéro de l'échelle thermométrique; et cherchons

à déterminer la loi du refroidissement ou de l'échauffement des différentes couches longitudinales dont la superposition forme le cylindre entier.

Soient ρ le rayon de ce cylindre et r la distance d'une molécule quelconque à l'axe : la température de cette molécule ne pouvant dépendre pour chaque instant que de la valeur de r , nous substituerons aux expressions différentielles qui entrent dans les équations générales (I) et (II) leurs valeurs fonctions des seules variables t, r, θ , particularisées par l'équation du cylindre. Si donc nous prenons l'axe du cylindre pour celui des z , l'équation de chaque couche cylindrique étant $x^2 + y^2 = r^2$, une transformation analogue à celle que nous avons employée dans la question précédente changera les équations (I) et (II) en

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{CD} \left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right), \quad \frac{d\theta}{dr} + \frac{h}{k} \theta = 0,$$

ou pour abrégér

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right) \quad (7).$$

$$\frac{d\theta}{dr} + \varepsilon \theta = 0 \quad (8).$$

Cette dernière supposant $r = \rho$, la loi des températures initiales peut être représentée par

$$\theta = \phi(r) \quad (9).$$

Le système des équations (7), (8), (9) exprime toutes les conditions de la question. Il s'agit d'obtenir l'intégrale de la première en l'assujétissant à vérifier les deux autres pour les hypothèses respectives $r = \rho$, $t = 0$. Toutes les conditions physiques du problème se trouveront alors évidemment satisfaites.

D'après la forme particulière de l'équation (7) nous supposerons

$$\theta = \nu e^{-nt},$$

n étant une constante positive et ν une fonction de la seule variable r , les équations (7) et (8) deviendront

$$n\nu = \omega \left(\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) = 0.$$

ou en faisant $\frac{n}{\omega} = m$,

$$mrv + \frac{d}{dr} \cdot \frac{rd\nu}{dr} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d\nu}{dr} + \varepsilon \nu = 0 \quad (11)$$

L'équation (10), indépendante de t , justifie la forme hypothétique de la valeur de ϑ . Cette même équation ne pouvant s'intégrer sous forme finie par aucune méthode connue, nous poserons le développement illimité

$$\nu = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + c_4 r^4 + \dots$$

et elle deviendra

$$\left. \begin{aligned} c_1 + 2^2 c_2 r + 3^2 c_3 r^2 + 4^2 c_4 r^3 + 5^2 c_5 r^4 + \dots \\ + m c_1 + m c_2 r + m c_3 r^2 + m c_4 r^3 + m c_5 r^4 + \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

d'où

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \dots; \quad c_4 = -\frac{m}{2^2} c_0, \quad c_5 = \frac{m^2}{2^2 \cdot 4^2} c_0, \quad c_6 = -\frac{m^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} c_0, \dots$$

et

$$\nu = c_0 \left(1 - \frac{mr^2}{2^2} + \frac{m^2 r^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^3 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{m^4 r^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right)$$

$$\nu = \frac{c_0}{\pi} \int_0^\pi \cos. (r\sqrt{m} \sin. x) dx.$$

On reconnaît facilement l'identité des seconds membres des deux dernières équations. Pour l'établir il suffit de rappeler la formule

$$\cos. (\alpha \sin. x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} (A' + B' \cos. 2x + C' \cos. 4x + \dots) \\ + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} (A'' + B'' \cos. 2x + C'' \cos. 4x + \dots) \\ - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} (A''' + B''' \cos. 2x + C''' \cos. 4x + \dots) \\ + \text{etc.} \dots \dots \dots \end{cases}$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos. (\alpha \sin. x) dx = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} A' + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} A'' - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} A''' + \text{etc.} \dots \dots$$

et comme l'on sait que

$$A' = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{1}$$

$$A'' = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{3.4}{1.2}$$

$$A''' = \frac{1}{2^6} \cdot \frac{4.5.6}{1.2.3}$$

$$A^{IV} = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}$$

$$\text{etc.} \dots \dots \dots$$

il en résulte

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos. (x \sin. x) dx = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$$\nu = \frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{m} \sin. x) dx = A \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{m} \sin. x) dx.$$

Nous avons obtenu une valeur particulière de ν satisfaisant à l'équation (10) et contenant deux constantes indéterminées. Cherchons à disposer de cette indétermination pour remplir la condition relative à la surface. Or l'on trouve que l'équation (11) est vérifiée par la valeur précédente, si l'on a

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \left(1 - \frac{m\rho^2}{2^2} + \frac{m^2\rho^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^3\rho^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \\ & - \frac{2m\rho}{2^2} + \frac{4m^2\rho^3}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{6m^3\rho^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \end{aligned} \right\} = 0 \quad \text{ou} \quad F(m) = 0 \quad (13)$$

équation qui doit donc déterminer m . Comme elle est, par rapport à cette inconnue, d'un degré infiniment élevé, elle admet une infinité de racines toutes positives évidemment; nous allons démontrer qu'elles sont aussi toutes réelles et inégales.

Soient m' , m'' deux valeurs quelconques attribuées à m , et ν' , ν'' celles de ν qui leur correspondent. Nous avons en vertu de l'équation (10)

$$d \frac{rd\nu'}{dr} + m' r \nu' dr = 0.$$

$$d \frac{rd\nu''}{dr} + m'' r \nu'' dr = 0.$$

$$\int \left(\nu'' d \frac{rd\nu'}{dr} - \nu' d \frac{rd\nu''}{dr} \right) = (m'' - m') \int \nu' \nu'' r dr.$$

Intégrant par parties sans fixer les limites, nous avons

$$\int \nu'' d \frac{rd\nu'}{dr} = \nu'' r \frac{d\nu'}{dr} - \nu' r \frac{d\nu''}{dr} + \int \nu' d \frac{rd\nu''}{dr}.$$

Substituant, prenant l'intégrale de 0 à ρ et supprimant les quantités qui se détruisent, nous obtenons

$$\left[\nu'' \rho \frac{d\nu'}{dr} - \nu' \rho \frac{d\nu''}{dr} \right]_{\rho} - \left[\nu'' \rho \frac{d\nu'}{dr} - \nu' \rho \frac{d\nu''}{dr} \right]_0 = (m'' - m') \int_0^{\rho} \nu' \nu'' r dr \quad (14)$$

Or, la seconde quantité entre parenthèses est nulle d'elle-même, car d'après la valeur

* Toute expression de la forme φ_x supposera qu'on assigne la valeur particulière x à la variable considérée dans la fonction φ .

de ν , les coefficients différentiels conservent constamment des valeurs finies. La première est également nulle dans le cas où m' et m'' sont des racines de l'équation $F(m) = 0$, puisque l'on a successivement dans cette hypothèse

$$\left(\frac{d\nu}{dr} + \varepsilon\nu\right)_\rho = F_\rho(m).$$

$$\rho \left[\nu' \frac{d\nu''}{dr} - \nu'' \frac{d\nu'}{dr} \right]_\rho = \rho \left[\nu' F(m'') - \nu'' F(m') \right]_\rho = 0.$$

Donc toutes les fois que m' et m'' sont racines de l'équation de condition, l'on a

$$\int_0^\rho r \nu' \nu'' dr = 0. \quad (15).$$

Soit maintenant, si cela est possible, $\lambda \pm \mu \sqrt{-1}$ une couple de racines imaginaires, vérifiant l'équation $F(m) = 0$. Les valeurs correspondantes de ν seront conjuguées et de la forme $P + Q\sqrt{-1}$, $P - Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles de r , et l'équation ci-dessus deviendra

$$\int_0^\rho r (P^2 + Q^2) dr = 0.$$

Résultat impossible, à moins que l'on n'ait séparément $P = 0$, $Q = 0$ pour toutes les valeurs de r ; mais on en déduirait pour λ et μ des valeurs dépendantes de cette variable, ce que l'on ne saurait admettre, puisque la fonction $F(m)$ est indépendante de r . Donc l'équation (13) n'a point de racines imaginaires. Ses racines d'ailleurs sont toutes inégales; en effet, pour des valeurs m' , m'' racines ou non de l'équation précitée, on a en vertu de l'équation (14)

$$\rho \left[\nu' F(m'') - \nu'' F(m') \right]_\rho = (m' - m'') \int_0^\rho r \nu' \nu'' dr. \quad (16)$$

et en différenciant par rapport à m'

$$\rho \left[\frac{d\nu'}{dm'} F(m'') - \nu'' \frac{dF(m')}{dm'} \right]_\rho = \int_0^\rho r \nu' \nu'' dr + (m' - m'') \int_0^\rho r \nu'' d\nu' \frac{d\nu'}{dm'}.$$

Faisons $m' = m''$

$$\rho \left[\frac{d\nu'}{dm'} F(m') - \nu' \frac{dF(m')}{dm'} \right]_\rho = \int_0^\rho r \nu'^2 dr.$$

Si m' est racine de l'équation $F(m) = 0$, ce résultat devient

$$-\rho \nu'_\rho \frac{dF(m')}{dm'} = \int_0^\rho r \nu'^2 dr. \quad (17);$$

et si de plus m' était une racine double ou multiple, il se réduirait à

$$0 = \int r v^2 dr,$$

conséquence inadmissible par la même raison que la précédente. Donc l'équation en m n'admet que des racines réelles et inégales.

Cela posé, soient $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \dots$ ces racines procédant par ordre de grandeur; si pour l'une quelconque λ d'entre elles les températures initiales étaient proportionnelles à la fonction $\int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\lambda} \sin. x) dx$, la loi des températures variables aurait évidemment pour expression

$$\theta = A e^{-\lambda \omega t} \cos. (r\sqrt{\lambda} \sin. x) dx.$$

Dans le cas de températures initiales quelconques, nous poserons

$$\theta = \begin{cases} A e^{-\alpha \omega t} \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx + B e^{-\epsilon \omega t} \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\epsilon} \sin. x) dx \\ + C e^{-\gamma \omega t} \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\gamma} \sin. x) dx + D e^{-\delta \omega t} \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\delta} \sin. x) dx + \dots \end{cases}$$

développement qui satisfait aux deux premières conditions du problème; la troisième sera également remplie si

$$\varphi(r) = A \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx + B \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\epsilon} \sin. x) dx + C \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\gamma} \sin. x) dx + \dots$$

Appliquant donc la méthode des intégrales définies, nous obtiendrons

$$\int_0^{\rho} r \varphi(r) dr \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx = \begin{cases} A \int_0^{\rho} r dr \left[\int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx \right]^2 \\ + B \int_0^{\rho} r dr \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\epsilon} \sin. x) dx \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx \\ + C \int_0^{\rho} r dr \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\gamma} \sin. x) dx \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx \\ + \text{etc.} \dots \dots \dots \end{cases}$$

d'où, en ayant égard à l'équation (15),

$$A = \frac{\int_0^{\rho} r \varphi(r) dr \int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx}{\int_0^{\rho} r dr \left[\int_0^{\pi} \cos. (r\sqrt{\alpha} \sin. x) dx \right]^2}$$

nous parviendrons à une valeur fort simple de l'intégrale double qui forme le diviseur, si nous remontons à l'équation (17) qui donne

$$-\rho v_{\alpha} \frac{d.F(\alpha)}{dx} = \int_0^{\rho} r v_{\alpha}^2 dr.$$

En effet, pour une racine quelconque m , nous avons

$$F(m) = \left[\frac{dv}{dr} + \varepsilon v \right]_{\rho}, \quad \frac{d.F(m)}{dm} = \left[-\frac{d}{dr} \frac{dv}{dm} + \varepsilon \frac{dv}{dm} \right]_{\rho}$$

mais d'après la forme de la valeur de v développée, l'on a

$$v = \psi(mr^2),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dm} &= r^2 \psi'(mr^2) \\ \frac{dv}{dr} &= 2mr \psi'(mr^2) \end{aligned} \right\} \text{d'où} \quad \frac{dv}{dm} = -\frac{r}{2m} \frac{dv}{dr},$$

donc

$$\frac{d.F(m)}{dm} = \frac{1}{2m} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) + \varepsilon r \frac{dv}{dr} \right]_{\rho}$$

d'ailleurs,

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right]_{\rho} = -[mrv]_{\rho}, \quad \left[\frac{dv}{r} \right]_{\rho} = -\varepsilon v_{\rho};$$

par conséquent *

$$\frac{d.F(m)}{dm} = -\frac{\rho v}{2} - \frac{\varepsilon^2 \rho v}{2m}, \quad -\rho v \frac{d.F(m)}{dm} = \frac{\rho^2 v^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{m} \right) = \int_0^{\rho} r v^2 dr;$$

et

$$\int_0^{\rho} r v_{\alpha}^2 dr = \frac{\rho^2 v_{\alpha}^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right).$$

Nous obtenons ainsi cette valeur très-simple du coefficient A.

$$A = 2 \frac{\int_0^{\rho} r dr \varphi(r) \int_0^{\pi} \cos.(r\sqrt{\alpha} \sin.x) dx}{\rho^2 v_{\alpha}^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right)}$$

on trouverait de même

$$B = 2 \frac{\int_0^{\rho} r dr \varphi(r) \int_0^{\pi} \cos.(r\sqrt{\varepsilon} \sin.x) dx}{\rho^2 v_{\varepsilon}^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \right)}$$

$$C = \text{etc.} \dots\dots\dots$$

* Il sera censé désormais que l'on fait $r = \rho$ dans v hors du signe f .

Telle est l'expression des systèmes variables de températures formés par les enveloppes isothermes du cylindre considéré. Le principal artifice de cette analyse consiste, ainsi qu'on l'aura remarqué, à décomposer l'état initial du cylindre en un certain nombre ou une infinité d'états particuliers tels que chacun d'eux donnerait lieu à une loi permanente de l'abaissement simultané des températures. La légitimité de cet artifice résulte d'ailleurs de ce que, pendant toute la durée du refroidissement, le mouvement général de la chaleur se trouve lui-même naturellement décomposé en autant de mouvemens particuliers dont chacun s'accomplirait librement et sans discontinuité s'il était seul.

Nous rattacherons avec une grande simplicité à l'analyse précédente le calcul des températures d'une sphère d'un rayon fini, placée dans les mêmes conditions que le cylindre.

Ce calcul fermant le cadre du petit nombre de questions que nous avons entrepris de résoudre.

§ III.

Une sphère solide et homogène dans sa constitution physique, d'un rayon fini et déterminé, primitivement échauffée suivant la même condition que la sphère infinie qui a fait l'objet de notre premier calcul, étant plongée subitement dans une atmosphère dont la température uniforme et constante est prise pour la limite inférieure de la graduation thermométrique, on demande la loi de son refroidissement. Nous allons reconnaître combien la résolution de cette question se trouve simplifiée par les divers résultats obtenus précédemment.

Les équations générales du problème étant toujours

$$\frac{dJ}{dt} = \omega \left(\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{d^2 \vartheta}{dy^2} + \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \right)$$

$$\frac{\frac{d\theta}{dx} \frac{dL}{dx} + \frac{d\theta}{dy} \frac{dL}{dy} + \frac{d\theta}{dz} \frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}} + \varepsilon \theta = 0.$$

$$\theta = \varphi(r).$$

Il convient d'y remplacer les différentielles orthogonales par des différentielles polaires. Mais ce calcul déjà exécuté pour la première a donné l'équation (4)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} \right)$$

il donnerait de même pour la suivante

$$\frac{d\theta}{dr} + \varepsilon \theta = 0.$$

et la supposition $\zeta = \theta r$ transforme ces résultats en

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega \frac{d^2\zeta}{dr^2} \quad (18)$$

$$\rho \frac{d\zeta}{dr} - (1 - \varepsilon \rho) \zeta = 0 \quad (19)$$

$$\zeta = r \varphi(r) \quad (20)$$

Soit

$$\zeta = \nu e^{-\omega n^2 t}$$

n^2 étant une constante positive et ν une fonction de r , les équations (18) et (19) deviennent

$$\frac{d^2\nu}{dr^2} + n^2\nu = 0 \quad (21)$$

$$\rho \frac{d\nu}{dr} - (1 - \varepsilon \rho) \nu = 0. \quad (22)$$

L'intégrale complète de l'équation (21) est

$$\nu = A \sin. nr + B \cos. nr,$$

et l'on pourrait écrire cette valeur particulière

$$\zeta = e^{-\omega n^2 t} (A \sin. nr + B \cos nr);$$

mais la température du centre de la sphère ne pouvant être infinie, on doit supprimer la constante B; il reste donc cette valeur simple

$$\zeta = A e^{-\omega n^2 t} \sin. nr$$

dont la combinaison avec l'équation relative à la surface conduit à

$$\frac{n^2}{\text{tang. } n^2} = 1 - \varepsilon. \quad (25)$$

équation transcendante par rapport à n et admettant évidemment pour cette inconnue une infinité de valeurs positives auxquelles correspondent autant de valeurs négatives égales au signe près. L'on peut en effet considérer les racines de cette équation multipliées par p comme les abscisses des points d'intersection de la droite $\left(\frac{x}{p} = 1 - \varepsilon\right)$ avec la courbe $(y = \text{tang. } x)$, et cette dernière se composant d'une infinité de branches rangées symétriquement entre les prolongemens des mêmes axes, ces points sont en nombre infini et leurs abscisses respectivement égales et de signes contraires.

On démontrerait par un raisonnement fort analogue à celui dont nous avons fait usage en pareil cas pour la question qui précède, que la même équation est totalement exempte de racines imaginaires et de racines égales; et il importe de remarquer que cette démonstration établirait en même temps pour deux racines quelconques n' , n'' cette relation

$$\int_0^{\rho} v' v'' dr = 0. \quad (24)$$

L'équation de condition étant résolue et α , β , γ ,.... désignant ses racines disposées par ordre de grandeur, si pour l'une quelconque λ , les températures primitives étaient proportionnelles à $\frac{\sin. \lambda r}{r}$, ce rapport se conserverait pendant toute la durée du refroidissement. Les températures des enveloppes concentriques décroîtraient donc du centre à la surface, de même que dans le cercle les rapports du sinus à l'arc à mesure que l'arc augmente. Dans le cas le plus général, nous poserons

$$\zeta = A \sin. \alpha r e^{-\omega \alpha^2 t} + B \sin. \beta r e^{-\omega \beta^2 t} + C \sin. \gamma r e^{-\omega \gamma^2 t} + \dots$$

A, B, C,.... étant des constantes à déterminer d'après l'équation $0 = \phi(r)$ qui doit avoir lieu pour $t = 0$. Cette condition combinée avec l'équation (24) donne par l'application de la méthode déjà employée dans le paragraphe précédent.

$$A = \frac{\int_0^{\rho} r \phi(r) \sin. \alpha r . dr}{\int_0^{\rho} (\sin. \alpha r)^2 dr} = \frac{\int_0^{\rho} r \phi(r) \sin. \alpha r . dr}{\frac{1}{2} \rho - \frac{1}{4\alpha} \sin. 2 \alpha \rho}$$

$$B = \frac{\int_0^{\rho} r \phi(r) \sin. \beta r . dr}{\frac{1}{2} \rho - \frac{1}{4\beta} \sin. 2 \beta \rho}, \quad C = \frac{\int_0^{\rho} r \phi(r) \sin. \gamma r . dr}{\frac{1}{2} \rho - \frac{1}{4\gamma} \sin. 2 \gamma \rho}$$

.....

.....

d'où l'on conclut par de simples substitutions

$$\frac{\theta r}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_0^\rho r \varphi(r) \sin. \alpha r dr}{\rho - \frac{1}{2\alpha} \sin. 2\alpha \rho} e^{-\frac{K}{CD} \alpha^2 t} \sin. \alpha r \\ + \frac{\int_0^\rho r \varphi(r) \sin. \zeta r dr}{\rho - \frac{1}{2\zeta} \sin. 2\zeta \rho} e^{-\frac{K}{CD} \zeta^2 t} \sin. \zeta r \\ + \frac{\int_0^\rho r \varphi(r) \sin. \gamma r dr}{\rho - \frac{1}{2\gamma} \sin. 2\gamma \rho} e^{-\frac{K}{CD} \gamma^2 t} \sin. \gamma r \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Ce résultat renferme la solution complète du problème de la propagation de la chaleur dans une sphère solide, d'un rayon déterminé et plongée dans une atmosphère qui satisfait aux conditions présumées. Il ne reste plus qu'à former les intégrales définies $\int_0^\rho r \varphi(r) \sin. nr dr$, lorsqu'on particularise la loi des températures initiales.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris.

BARON THÉNARD.

10 juin 1830.

PERMIS D'IMPRIMER.

*L'Inspecteur-général des études, chargé de l'administration
de l'Académie de Paris,*

ROUSSELLE.

PROGRAMME

D'UNE THÈSE D'ASTRONOMIE,

SOUTENUE DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Le

1830.

La thèse annoncée par ce programme a pour objet deux questions fondamentales de la théorie de la figure des planètes, savoir : l'attraction des sphéroïdes elliptiques et la figure qui convient à l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, dans le seul cas de l'homogénéité. Ces deux questions comprendront les développemens indiqués par le sommaire suivant.

Attractions des sphéroïdes.

Equations générales des attractions exercées par un sphéroïde quelconque sur un point unique. L'on obtient immédiatement ces attractions en différenciant, par rapport aux coordonnées du point attiré, la fonction qui représente la somme des élémens du sphéroïde respectivement divisés par leurs distances à ce point. Propriété importante de la somme des trois dérivées du second ordre de cette fonction, prises par rapport aux coordonnées du même point.

Attractions des sphéroïdes elliptiques. Après un choix convenable de coordonnées polaires, une première intégration partielle conduit à des conséquences assez remarquables relativement aux attractions d'un ellipsoïde homogène sur un point de sa propre masse, ou à celles d'une couche elliptique sur un point intérieur.

Discussion des intégrales qui expriment les attractions d'un ellipsoïde homogène sur les points intérieurs. On ne peut obtenir sous forme finie les valeurs de ces intégrales que dans le cas où le sphéroïde est de révolution.

Les intégrales qui expriment les attractions sur les points extérieurs sont renfermées dans les mêmes formules que les précédentes : on les en déduit au moyen du théorème de M. Ivory. Démonstration et conséquences les plus importantes de ce théorème.

Les attractions de deux ellipsoïdes homogènes, ayant des excentricités égales, sur les points extérieurs, sont entre elles dans le même rapport que leurs masses.

La loi de la nature est la seule dans laquelle l'action d'une couche sphérique est

nulle sur les points intérieurs et la même sur les points extérieurs que si toute sa masse était réunie à son centre.

Sur la figure d'une masse fluide, homogène, en équilibre et animée d'un mouvement uniforme de rotation.

Équation générale de ce problème : cette équation ne peut donner *à priori* la figure qui convient à l'équilibre.

L'équilibre peut subsister avec deux figures elliptiques, aplaties vers les pôles ; il ne peut subsister avec aucune figure elliptique allongée.

Limites de la vitesse de rotation au-delà de laquelle l'équilibre ne comporte aucune figure elliptique. Pour la terre supposée fluide et homogène, la durée de la révolution diurne qui correspondrait à cette limite serait égale à 0^j, 10090, et le rapport du diamètre de l'équateur à l'axe des pôles serait 2,7197.

Rapport de la pesanteur à l'équateur à la pesanteur aux pôles pour toute masse fluide homogène de figure elliptique. Relation générale entre la pesanteur et la latitude à la surface de l'ellipsoïde.

Détermination de l'aplatissement du sphéroïde terrestre supposé elliptique, homogène et originellement fluide, au moyen des données fournies par le pendule à secondes et la mesure directe d'un degré de méridien à la latitude de 45° ; valeurs numériques des deux axes.

Détermination de l'aplatissement de Jupiter, dans les mêmes hypothèses, par la considération des élémens de l'orbite de son quatrième satellite.

Comparaison des résultats du calcul à ceux de l'observation.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris,

BARON THÉNARD.

PERMIS D'IMPRIMER.

*L'Inspecteur-général des études, chargé de l'administration
de l'Académie de Paris.*

ROUSSELLE.