

LEÇONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE,

PAR G. SALMON,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE LA TRINITÉ, A DUBLIN.

TRADUIT DE L'ANGLAIS,

PAR M. BAZIN,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSEES;

AUGMENTÉ DE NOTES,

PAR M. HERMITE,

MEMBRE DE L'INSTITUT



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

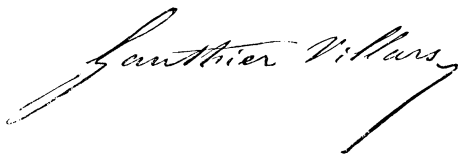
Quai des Augustins, 55.

—
1868

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le courant de 1868, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

A stylized, handwritten signature in black ink, reading "Gauthier Villars". The signature is written in a cursive style with long, sweeping strokes, particularly on the first and last letters.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

AVERTISSEMENT.

Le titre de cet Ouvrage, qui n'a presque rien de commun avec les autres Traités d'Algèbre supérieure récemment publiés, n'en fait pas connaître d'une manière assez précise l'objet tout spécial. Une nouvelle branche d'Algèbre, dont on peut faire remonter l'origine aux travaux de Gauss sur les formes quadratiques, a fait depuis vingt ans d'immenses progrès. Son but principal est l'étude des fonctions dont les relations mutuelles ne sont pas altérées par une transformation linéaire des variables. Cette simple définition de la théorie en fait pressentir toute l'importance au point de vue des applications géométriques; car tout changement de coordonnées s'opérant par une transformation linéaire, l'interprétation géométrique des fonctions obtenues par les nouvelles méthodes conduit à des propriétés complètement indépendantes du choix des axes.

Ces méthodes originales et fécondes sont encore peu répandues, surtout en France : leurs éléments sont éparés dans de nombreux recueils scientifiques, et l'introduction de tout un vocabulaire de termes spéciaux en rend aujourd'hui l'accès plus difficile aux algébristes qui ont négligé de se tenir au courant de leurs progrès. M. Salmon, auteur d'Ouvrages devenus classiques en Angle-

terre, et l'un des éminents Professeurs de l'Université de Dublin, où les études mathématiques ont pris un si remarquable développement, vient de rendre à la science un véritable service en publiant un *Traité* complet sur cette branche moderne de l'Analyse algébrique

Une traduction intégrale de ce livre eût été trop étendue pour un Ouvrage élémentaire, d'autant plus que nous désirions faire rentrer dans ce cadre restreint un aperçu des principales applications géométriques : nous avons donc, suivant le conseil de M. Salmon, fait des suppressions assez nombreuses, en introduisant d'autre part trois nouveaux Chapitres empruntés en substance à ses excellents *Traités* de Géométrie analytique. M. Hermite, qui nous a plusieurs fois, dans le cours de notre travail, aidé de sa haute expérience, a bien voulu aussi ajouter à la suite de l'Ouvrage quelques Notes extraites de ses savantes recherches sur l'équation du cinquième degré.

Malgré le peu d'étendue de cette traduction abrégée, nous espérons n'avoir omis aucun point essentiel ; notre seul désir est d'avoir fait une œuvre utile en contribuant à réveiller en France le goût des recherches mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
AVERTISSEMENT.....	III

PREMIÈRE LEÇON.

DÉTERMINANTS. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Première définition des déterminants.....	I
Mode de formation par élimination entre plusieurs équations du premier degré.....	I
Règle des signes.....	6
Nouvelle définition.....	7
Notations diverses employées pour les déterminants.....	8

DEUXIÈME LEÇON.

RÉDUCTION ET CALCUL DES DÉTERMINANTS.

Permutation de deux lignes ou de deux colonnes.....	10
Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un facteur constant. . . .	11
Déterminants mineurs.....	11
Décomposition en une somme de déterminants partiels.....	12
Exemples numériques de réduction.....	14
Expression du produit des différences de plusieurs quantités sous forme de déterminant.....	16
Exemples divers de réduction.....	16

TROISIÈME LEÇON.

MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS.

Multiplication de deux déterminants.....	20
Seconde démonstration du théorème précédent; transformation linéaire; module.....	21
Généralisation du théorème.....	23
Exemples divers.....	24
Expression du produit des carrés des différences de plusieurs quantités.	25
Rayon du cercle circonscrit à un triangle.	25

	Pages.
Aire du triangle inscrit dans une ellipse.	26
Relations entre les distances deux à deux de plusieurs points.	27

QUATRIÈME LEÇON.

DÉTERMINANTS RÉCIPROQUES ET MINEURS.

Déterminants mineurs. — Résolution d'un système d'équations linéaires.	30
Déterminants réciproques.	31
Décomposition d'un déterminant en produits de déterminants mineurs.	32
Relation entre les mineurs du déterminant réciproque et du déterminant primitif.	33

CINQUIÈME LEÇON.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Formule de Newton pour les sommes des puissances des racines.	35
Ordre et poids d'une fonction symétrique.	35
Sommes de puissances des différences des racines.	37
Équation différentielle des fonctions des différences des racines.	38
Fonctions symétriques d'une équation écrite sous la forme homogène.	39
Équation différentielle lorsque l'on emploie les coefficients du binôme.	41
Notation abrégée de M. Serret.	43
Expression donnée par M. Brioschi en fonction des racines.	44

SIXIÈME LEÇON.

RÉSULTANTS.

Définition.	46
Élimination par la méthode des fonctions symétriques.	47
Ordre et poids du résultant.	50
Fonctions symétriques des racines communes à deux équations.	53
Extension des principes précédents à un nombre quelconque d'équations.	55
Expression des racines communes au moyen des dérivées du résultant.	58
Relations entre ces dérivées quand le résultant est nul.	59
Conditions nécessaires pour qu'il existe un double système de racines communes.	62

SEPTIÈME LEÇON.

EXPRESSION DES RÉSULTANTS SOUS FORME DE DÉTERMINANTS.

Élimination par la méthode du plus grand commun diviseur.	64
Méthode d'Euler.	65

	Pages.
Conditions nécessaires pour qu'il existe deux racines communes...	66
Méthode de M. Sylvester.....	67
Méthode de Bezout.....	68
Méthode de Bezout modifiée par M. Cayley.....	71
Jacobien.....	72
Expression, dans quelques cas particuliers, du résultant de trois équations sous forme de déterminant.	73

HUITIÈME LEÇON.

DISCRIMINANTS.

Définitions.....	74
Ordre et poids du discriminant.....	76
Expression du discriminant d'une forme binaire en fonction des racines.	78
Discriminant du produit de deux fonctions.....	78
Le discriminant est de la forme $a_n\varphi + a_{n-1}^2\psi$	79
Formation du discriminant au moyen de l'équation différentielle.....	79
Méthode pour trouver les racines égales quand le discriminant se réduit à zéro.....	80
Extension des principes précédents à un nombre quelconque de variables.	83
Discriminant d'une forme quadratique	84

NEUVIÈME LEÇON.

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

Invariants.....	86
Les discriminants sont des invariants.....	87
Nombre des invariants indépendants.....	88
Invariants absolus.....	90
Invariants d'un système de plusieurs formes.....	91
Covariants.....	93
Les invariants des covariants sont également des invariants de la forme primitive.....	93
Émanants.....	94
Les invariants des émanants sont des covariants de la forme primitive...	95
Hessiens.....	96
Contrevariants, substitutions inverses.....	97
La fonction $x\xi + y\eta + z\zeta$ reste invariable par la transformation.....	99
Covariants mixtes.....	100
Évectants.....	101
Évectants du discriminant dans le cas où celui-ci se réduit à zéro.....	103

DIXIÈME LEÇON.

FORMATION DES INVARIANTS ET DES COVARIANTS.

	Pages.
Méthode par les fonctions symétriques.....	105
Invariants qui se réduisent à zéro quand plusieurs racines deviennent égales.....	107
Différentiation mutuelle des covariants et des contrevariants.....	108
La substitution des dérivées dans un contrevariant donne un covariant.....	110
Toute forme binaire a un invariant de degré pair.....	111
Invariant du troisième ordre d'une forme biquadratique.....	112
Toute forme binaire de degré impair a un invariant de quatrième ordre.....	112
Équation différentielle. — Poids d'un invariant.....	113
Une forme binaire de degré impair ne peut avoir d'invariants d'ordre impair.....	114
Invariants gauches.....	115
Détermination du nombre des invariants indépendants.....	116
Calcul des coefficients des covariants à l'aide de l'équation différentielle.....	117
La source du produit de deux covariants est égale au produit de leurs sources.....	118
Extension à un nombre quelconque de variables.....	121

ONZIÈME LEÇON.

REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DES INVARIANTS ET DES COVARIANTS.

Formation des symboles.....	122
Degré par rapport aux variables et aux coefficients.....	126
Table d'invariants du troisième ordre.....	128
Loi de réciprocité de M. Hermite.....	129
Symboles dérivés.....	130
Formules symboliques pour un nombre quelconque de variables.....	132
Symboles de contrevariants.....	133
Symboles d'évectants.....	135
Transformation des formules symboliques pour les formes binaires.....	136
Exemples divers de réduction.....	138
Transformation des formules symboliques pour un nombre quelconque de variables.....	141
Exemples de réduction.....	142
Méthode symbolique de MM. Aronhold et Clebsch.....	143
Tout invariant peut être exprimé par une formule symbolique. — Démonstration de M. Clebsch.....	146

DOUZIÈME LEÇON.

FORMES CANONIQUES.

Pages.

La généralité d'une forme se détermine par le nombre des constantes qu'elle renferme.....	148
Réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés; une substitution réelle ne modifie pas le nombre des carrés négatifs.....	150
Réduction de la forme cubique binaire à sa forme canonique.....	150
Le discriminant d'une forme cubique et celui de son Hessien ne diffèrent que par le signe.....	152
Réduction générale des formes binaires de degré impair.....	152
Covariant canonique; sa formation.....	154
Autre méthode pour former le covariant canonique.....	155
Condition nécessaire pour qu'une forme binaire de degré $2n$ soit réductible à une somme de n puissances $2n^{\text{ièmes}}$	156
Réduction de la forme biquadratique à sa forme canonique.....	157
Réduction de la forme générale de degré pair.....	158
Réduction de la forme du sixième degré.....	159
Forme canonique du huitième degré.....	161
Formes canoniques des formes cubiques à trois et à quatre variables.....	161
Différentiation mutuelle des covariants et des contrevariants pour certaines formes canoniques.....	161

TREIZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES BINAIRES (2^{e} , 3^{e} ET 4^{e} DEGRÉS).

Cas dans lequel les invariants peuvent être considérés comme distincts..	165
Nombre des covariants indépendants.....	166
Forme quadratique.....	166
Résultant de deux formes quadratiques.....	167
Forme cubique.....	167
Interprétation géométrique du covariant du troisième degré.....	168
Expression du carré de la forme en fonction de ses deux covariants.....	169
Résolution de l'équation du troisième degré.....	169
Système composé d'une forme cubique et d'une forme quadratique.....	170
Forme biquadratique.....	172
Tout invariant de la forme est fonction rationnelle des deux invariants fondamentaux.....	173
Discriminant.....	174
L'expression du discriminant en fonction des deux invariants fondamentaux peut servir à démontrer la relation qui lie les covariants d'une forme cubique.....	175

	Pages.
Conditions nécessaires pour que la forme admette deux facteurs doubles..	176
Réduction de la forme biquadratique à sa forme canonique.....	177
Résolution de l'équation du quatrième degré.....	177
Conditions de réalité des racines.....	180
La réduction à la forme canonique peut s'effectuer par une substitution réelle.	181
Covariant du sixième degré.....	182
Invariants d'un système composé de la forme primitive et de son Hessien.	183

QUATORZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES BINAIRES (5^e ET 6^e DEGRÉS).

Forme du cinquième degré; invariants fondamentaux.....	185
Tous les invariants s'expriment en fonction de ceux des quatrième, huitième et douzième ordres.....	187
Condition nécessaire pour que la forme admette deux couples de racines égales.....	189
Tous les invariants d'une forme s'annulent si plus de la moitié de ses racines deviennent égales.	189
Invariant gauche du dix-huitième ordre.	189
Forme canonique de M. Hermite.....	189
Expression de l'invariant gauche en fonction des trois invariants fondamentaux....	190
Covariants linéaires.	190
Le signe du discriminant détermine le nombre de couples des racines imaginaires.	191
Criteria fournis par le théorème de Sturm.	192
Criteria de MM. Hermite et Sylvester exprimés au moyen des invariants.	193
Criterion de M. Sylvester renfermant un paramètre variable entre certaines limites.....	194
Forme du sixième degré; invariants fondamentaux.....	194
Nouvelle forme canonique de M. Salmon.....	196
Conditions nécessaires pour que la forme admette un facteur triple ou deux facteurs doubles.....	197
Discriminant.....	198
Expression de l'invariant gauche en fonction des autres invariants.....	199

QUINZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES TERNAIRES.

Forme quadratique.....	200
Interprétation géométrique du contrevariant.....	201
Invariants d'un système composé de deux formes.....	201

	Pages.
Condition de contact de deux sections coniques.....	202
Covariants et contrevariants d'un système de deux formes.....	203
Équations des quatre points d'intersection de deux sections coniques et des quatre tangentes communes.....	204
Les covariants quadratiques du système s'expriment tous en fonction de l'un d'eux et des deux formes.....	205
Système composé de trois formes quadratiques.....	206
Covariant et contrevariant du troisième degré.....	207
Invariant du sixième ordre.....	208
Covariants et contrevariants linéaires.....	208
Invariant du douzième ordre.....	209
Forme cubique.....	209
Invariants fondamentaux.....	209
Discriminant.....	210
Covariants et contrevariants des troisième et sixième degrés.....	210
Covariant et contrevariant du neuvième degré.....	212
Méthode de M. Sylvester pour obtenir à la fois les deux invariants de la forme.....	213
Relations entre les formes quadratiques et cubiques ternaires.....	215
Combinants.....	215
Résultant de trois formes quadratiques ternaires.....	216
Analogie entre ce résultant et le discriminant de la forme cubique.....	217
Interprétation géométrique des contrevariants linéaires d'un système de trois formes quadratiques.....	219

SEIZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES QUATERNAIRES.

Forme quadratique.....	220
Interprétation géométrique du contrevariant.....	221
Contrevariant double.....	221
Invariants d'un système composé de deux formes quadratiques.....	222
Condition de contact de deux surfaces du second degré.....	223
Covariants et contrevariants du système de deux formes quadratiques.....	224
Équations de la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré et de la surface développable circonscrite.....	224
Contrevariants doubles.....	225
Système composé de trois formes quadratiques.....	226
Jacobien du système de quatre formes.....	227
Forme cubique.....	228
Invariants fondamentaux.....	229
Invariant gauche du centième ordre.....	230
Discriminant.....	230
Formation des covariants et contrevariants.....	231

	Pages.
Covariants et contrevariants linéaires.....	232
Covariants et contrevariants des deuxième et troisième degrés.....	234
Covariants et contrevariants des degrés supérieurs.....	235

NOTES DE M. HERMITE.

I. — SUR LES INVARIANTS DES FORMES DU CINQUIÈME DEGRÉ..	237
II. — SUR L'INVARIANT GAUCHE DES FORMES DU SIXIÈME DEGRÉ.....	247

LEÇONS

D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

PREMIÈRE LEÇON.

DÉTERMINANTS. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Si l'on a n équations homogènes du premier degré entre n variables, on peut éliminer les variables et obtenir pour résultat une expression ne contenant plus que les coefficients : c'est ce que l'on appelle le *déterminant* de ces équations. Nous donnerons plus loin des règles pour la formation de ces déterminants, et nous établirons quelques-unes de leurs principales propriétés; mais la théorie générale nous paraît devoir être mieux comprise en donnant d'abord quelques exemples de ses applications aux cas les plus simples.

Commençons donc par deux équations entre deux variables :

$$a_1x + b_1y = 0, \quad a_2x + b_2y = 0.$$

On élimine les variables en ajoutant à la première équation multipliée par b_2 la seconde multipliée par $-b_1$, et l'on obtient $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, équation dont le premier membre est le déterminant demandé. La notation ordinairement employée pour désigner ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

mais nous écrirons souvent, pour abrégér, (a_1b_2) , en laissant au lecteur le soin de rétablir le terme négatif : il est clair qu'avec cette notation $(a_1b_2) = -(a_2b_1)$. Les coefficients a_1 ,

$b_1, \dots$, qui entrent dans l'expression d'un déterminant, sont les *éléments* de ce déterminant; les produits $a_1 b_2, \dots$ en sont les différents termes.

2. On peut reconnaître immédiatement que le résultat eût été le même en éliminant les variables entre les équations

$$a_1 x + a_2 y = 0, \quad b_1 x + b_2 y = 0;$$

en d'autres termes,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que la valeur du déterminant n'est pas altérée en écrivant verticalement les lignes horizontales, et *vice versa*.

3. Si l'on a deux équations homogènes entre trois variables,

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0, \quad b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0,$$

ces équations suffisent pour déterminer les rapports de x, y et z ; ainsi, en éliminant alternativement y et x , nous aurons x et y en fonction de z , et il vient

$$(a_1 b_2)x = (a_2 b_3)z, \quad (a_1 b_2)y = (a_3 b_1)z;$$

en d'autres termes x, y, z sont respectivement proportionnels à $(a_2 b_3), (a_3 b_1), (a_1 b_2)$; substituant ces valeurs dans les équations primitives, nous avons les identités

$$a_1(a_2 b_3) + a_2(a_3 b_1) + a_3(a_1 b_2) = 0,$$

$$b_1(a_2 b_3) + b_2(a_3 b_1) + b_3(a_1 b_2) = 0,$$

relations qui se vérifient immédiatement en remplaçant les déterminants par leurs expressions développées, par exemple

$$a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

La notation

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

où le nombre des colonnes verticales surpasse celui des lignes horizontales, est employée pour désigner les trois déterminants que l'on obtient en supprimant successivement chaque colonne, c'est-à-dire les trois déterminants que nous venons de considérer $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_1)$, $(a_1 b_2)$.

4. Passons maintenant à un système de trois équations :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0;$$

multiplions la première par $(a_2 b_3)$, la seconde par $(a_3 b_1)$, la troisième par $(a_1 b_2)$, et faisons la somme; les coefficients de x et y s'évanouissent en vertu des identités du n° 3, et le déterminant demandé est

$$c_1(a_2 b_3) + c_2(a_3 b_1) + c_3(a_1 b_2),$$

ou, en développant,

$$c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 + c_2 a_3 b_1 - c_2 a_1 b_3 + c_3 a_1 b_2 - c_3 a_2 b_1;$$

on peut aussi l'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$a_1(b_2 c_3) + a_2(b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2), \quad b_1(c_2 a_3) + b_2(c_3 a_1) + b_3(c_1 a_2).$$

Ce déterminant est représenté par la notation

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

nous le désignerons souvent, pour abrégér, par $(a_1 b_2 c_3)$.

Il est utile de remarquer que

$$(a_2 b_3 c_1) = (a_1 b_2 c_3), \quad \text{mais} \quad (a_1 b_3 c_2) = -(a_1 b_2 c_3).$$

En effet, d'après l'analogie des notations,

$$(a_2 b_3 c_1) = a_2(b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2) + a_1(b_2 c_3),$$

ce qui revient à $(a_1 b_2 c_3)$; tandis que

$$(a_1 b_3 c_2) = a_1(b_3 c_2) + a_3(b_2 c_1) + a_2(b_1 c_3),$$

ce qui revient à $-(a_1 b_2 c_3)$.

5. Nous aurions obtenu le même résultat en effectuant l'élimination entre les trois équations :

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0,$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0,$$

car, si l'on procède comme précédemment, en multipliant la première par (b_2c_3) , la seconde par (c_2a_3) , la troisième par (a_2b_3) et ajoutant, les coefficients de y et de z s'évanouissent et l'on obtient le déterminant sous la forme

$$a_1(b_2c_3) + b_1(c_2a_3) + c_1(a_2b_3),$$

qui, développée, reproduit identiquement $(a_1b_2c_3)$; d'où

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que le déterminant n'est pas altéré en écrivant verticalement les lignes horizontales, et *vice versa* : propriété qui sera démontrée pour tout déterminant.

6. Désignons par

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \right\|$$

le système de déterminants que l'on obtient en omettant successivement chacune des colonnes : ces quatre déterminants sont liés par les relations

$$a_1(a_2b_3c_4) - a_2(a_3b_4c_1) + a_3(a_4b_1c_2) - a_4(a_1b_2c_3) = 0,$$

$$b_1(a_2b_3c_4) - b_2(a_3b_4c_1) + b_3(a_4b_1c_2) - b_4(a_1b_2c_3) = 0,$$

$$c_1(a_2b_3c_4) - c_2(a_3b_4c_1) + c_3(a_4b_1c_2) - c_4(a_1b_2c_3) = 0.$$

Ces relations peuvent être vérifiées en développant les déterminants, ou bien démontrées par une méthode analogue à

celle du n° 3. Prenons les trois équations

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4v = 0,$$

$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4v = 0,$$

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4v = 0;$$

nous pouvons, comme au n° 5, éliminer y et z en multipliant les équations par (b_2c_3) , (c_2a_3) , (a_2b_3) et ajoutant, ce qui donne

$$(a_1b_2c_3)x + (a_4b_2c_3)v = 0;$$

de même, en multipliant par (b_3c_1) , (c_3a_1) , (a_3b_1) , il vient

$$(a_2b_3c_1)y + (a_4b_3c_1)v = 0,$$

et de même encore

$$(a_3b_1c_2)z + (a_4b_1c_2)v = 0;$$

maintenant, en se reportant aux remarques faites sur les signes au n° 4, ces équations reviennent à

$$(a_1b_2c_3)x = -(a_2b_3c_4)v,$$

$$(a_1b_3c_2)y = (a_3b_4c_1)v,$$

$$(a_1b_4c_3)z = -(a_4b_1c_2)v,$$

c'est-à-dire que x , y , z et v sont respectivement proportionnels à $(a_2b_3c_4)$, $-(a_3b_4c_1)$, $(a_4b_1c_2)$, $-(a_1b_2c_3)$, et substituant ces valeurs dans les équations primitives, on obtient les identités ci-dessus.

7. Si nous avons maintenant à éliminer entre les quatre équations

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1v = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2v = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3v = 0,$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4v = 0,$$

il suffit de les ajouter en multipliant la première par $(a_2b_3c_4)$, la deuxième par $-(a_3b_4c_1)$, la troisième par $(a_4b_1c_2)$, la quatrième par $-(a_1b_2c_3)$; les coefficients de x , y et z deviennent

identiquement nuls, et l'on a, pour le déterminant,

$$d_1(a_2b_3c_4) - d_2(a_3b_4c_1) + d_3(a_4b_1c_2) - d_4(a_1b_2c_3),$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} & a_1b_2c_3d_4 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_1d_4 - a_2b_1c_3d_4 \\ & + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_2c_1d_4 + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_2c_4d_3 \\ & + a_4b_2c_1d_3 - a_4b_1c_2d_3 + a_2b_1c_4d_3 - a_2b_4c_1d_3 \\ & + a_3b_4c_1d_2 - a_3b_1c_4d_2 + a_4b_1c_3d_2 - a_4b_3c_1d_2 \\ & + a_1b_3c_4d_2 - a_1b_4c_3d_2 + a_2b_4c_3d_1 - a_2b_3c_4d_1 \\ & + a_4b_3c_2d_1 - a_4b_2c_3d_1 + a_3b_2c_4d_1 - a_3b_4c_2d_1. \end{aligned}$$

8. On peut sans aucune difficulté étendre à un nombre quelconque d'équations la méthode que nous venons d'employer. Le lecteur remarquera que l'expression générale d'un déterminant est $\Sigma \pm a_1b_2c_3d_4\dots$, dans laquelle chaque produit doit renfermer toutes les lettres et tous les indices, sans répétition ni omission : le déterminant contient tous les produits de cette nature qu'il est possible de former. Quant au signe dont chaque terme doit être affecté, la règle est la suivante. Nous donnerons le signe $+$ au terme $a_1b_2c_3d_4\dots$, que l'on obtient en lisant le déterminant de l'angle supérieur gauche à l'angle inférieur droit, et, cela étant admis, le signe de chaque produit sera $+$ ou $-$, suivant qu'il dérive de ce premier terme par un nombre pair ou impair de permutations des indices. Ainsi, dans le dernier exemple, le second terme $a_1b_3c_2d_4$ ne diffère du premier que par la permutation des indices de b et de c : il a donc un signe contraire. Le troisième terme $a_2b_3c_1d_4$ diffère du second par la permutation des indices de a et de c : il a par suite un signe contraire, mais il a le même signe que le premier terme, puisqu'il peut en être dérivé en permutant deux fois les indices.

EXEMPLE. — *Quel est, dans le déterminant $(a_1b_2c_3d_4e_5)$, le signe du terme $a_3b_2c_1d_4e_5$?*

En permutant, dans le premier terme, les indices de a et de c , nous obtenons $a_3b_2c_1d_4e_5$, produit dont le premier élément est le même que celui du terme donné; en permutant ensuite les indices de b et e , nous

avons $a_3 b_3 c_1 d_4 e_2$, qui a deux éléments communs avec le terme donné; puis, permutant c et e , il vient $a_3 b_3 c_2 d_4 e_1$; et enfin, permutant d et e , nous avons le terme donné $a_3 b_3 c_2 d_1 e_4$. Donc, puisqu'il y a eu un nombre pair (4) de permutations, le signe du terme est $+$. En effet, les signes de la série de termes sont

$$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 - a_3 b_2 c_1 d_4 e_5 + a_3 b_3 c_1 d_4 e_2 - a_3 b_3 c_2 d_4 e_1 + a_3 b_3 c_2 d_1 e_4 (*).$$

9. Une permutation circulaire des indices altère le signe quand le nombre des termes du produit est pair : elle ne l'altère pas quand le nombre des termes est impair. Ainsi $a_2 b_1$, se déduisant de $a_1 b_2$ par une seule permutation d'indices, a un signe contraire; mais $a_2 b_3 c_1$ a le même signe que $a_1 b_2 c_3$, dont il dérive par une double permutation. Car, en échangeant les indices de a et de b , $a_1 b_2 c_3$ devient $a_2 b_1 c_3$, qui, en échangeant ceux de b et c , devient $a_2 b_3 c_1$. De même $a_2 b_3 c_4 d_1$ a un signe contraire à celui de $a_1 b_2 c_3 d_4$ dont il dérive par trois permutations, savoir : $a_2 b_1 c_3 d_4$, $a_2 b_3 c_1 d_4$, $a_2 b_3 c_4 d_1$.

10. Nous pouvons maintenant substituer à notre première définition du déterminant une nouvelle définition qui deviendra la base des théories suivantes. En effet, puisque le déterminant est simplement une fonction des éléments a, b, c et ne contient pas les variables x, y, z , il est évidemment préférable d'en donner une définition qui ne fasse pas mention d'équations entre ces quantités x, y, z (**).

Soient donc n^2 quantités disposées en un carré de n colonnes

(*) En comparant les termes $a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$, $a_3 b_3 c_2 d_1 e_4$, on voit que l'indice 1, qui se présentait le premier dans le premier terme, se trouve dans le deuxième précédé de trois éléments; que l'indice 2 est précédé de deux éléments et l'indice 4 d'un élément, qui ne venaient qu'après dans le terme primitif. Le nombre total des dérangements est donc de six. La règle des signes est quelquefois donnée sous cette forme : le signe de chaque terme est $+$ ou $-$ suivant que le nombre total des dérangements par rapport à l'ordre des indices dans le terme primitif est pair ou impair.

(**) Nous aurions pu partir de cette définition du déterminant, les propositions précédentes n'étant pas nécessaires pour le développement scientifique de la théorie. Nous avons pensé cependant que ces éclaircissements rendraient la théorie générale plus facile à comprendre, et que l'importance de l'étude des déterminants ressortirait davantage, lorsque l'on aurait montré que toute éli-

verticales et n lignes horizontales, le déterminant de ces quantités est la somme de tous les produits possibles (affectés de signes convenables, comme on l'a expliqué au n° 8) que l'on peut former avec n éléments, en n'en prenant qu'un seul dans chaque colonne verticale et dans chaque ligne horizontale : ce déterminant est dit du $n^{\text{ième}}$ ordre. Deux éléments sont *conjugués* lorsque chacun d'eux occupe, dans les lignes horizontales, la même position que l'autre dans les colonnes verticales. Lorsque les éléments conjugués sont égaux, le déterminant est *symétrique*. Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

11. Dans le cours des premières Leçons, nous écrirons, comme nous l'avons fait dans les exemples précédents, tous les éléments d'une même ligne horizontale avec la même lettre, et tous ceux d'une même colonne verticale avec le même indice. Mais la notation la plus usitée consiste à donner à chaque élément un double indice, le premier indice désignant la ligne horizontale et le second la ligne verticale à laquelle il appartient. Le déterminant du troisième ordre s'écrirait ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\sum \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3},$$

les indices devant, dans cette somme, être permutés de toutes les manières possibles. On modifie quelquefois la notation pré-

mination de variables entre un système d'équations du premier degré, et que toute solution d'un semblable système, donne naissance à des déterminants : les systèmes d'équations du premier degré se rencontrent constamment dans toutes les branches des Mathématiques pures et appliquées.

cédente en omettant la lettre a , et le déterminant s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}.$$

M. Sylvester a encore proposé une autre notation (*umbral notation*). Soit, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha & d\alpha \\ a\beta & b\beta & c\beta & d\beta \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma & d\gamma \\ a\delta & b\delta & c\delta & d\delta \end{vmatrix},$$

dont les éléments sont $a\alpha, b\alpha, \dots; a, b, c, \dots$, n'étant pas des quantités, mais en quelque sorte des ombres ou apparences de quantités, c'est-à-dire que ces lettres n'ont pas de signification par elles-mêmes et n'en prennent que par leur combinaison avec celles de l'autre série $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; par exemple si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ représentent les indices 1, 2, 3, 4, les éléments, suivant la notation que nous avons adoptée, s'obtiendront en combinant l'une des lettres a, b, c, d avec l'un des indices 1, 2, 3, 4. M. Sylvester écrit le déterminant sous une forme plus condensée :

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d, \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \end{array}$$

qui indique la somme de tous les produits $a\alpha.b\beta.c\gamma.d\delta$ que l'on peut obtenir en permutant les termes de la seconde ligne de toutes les manières possibles, et changeant les signes à chaque permutation suivant la règle ordinaire.



DEUXIÈME LEÇON.

RÉDUCTION ET CALCUL DES DÉTERMINANTS.

12. Nous avons, dans la dernière Leçon, fait connaître la règle de formation des déterminants et indiqué, sur des exemples particuliers, quelques-unes de leurs propriétés. Nous allons, dans cette seconde Leçon, démontrer d'une manière générale ces propriétés et quelques autres encore qui sont très-fréquemment employées pour la réduction et le calcul des déterminants.

La valeur d'un déterminant n'est pas altérée si l'on écrit horizontalement les colonnes verticales et *vice versa* (2, 5). Cela découle immédiatement de la loi de formation (10) qui est parfaitement symétrique par rapport aux colonnes verticales et aux lignes horizontales. L'un des principaux avantages de la notation à indices doubles est de montrer clairement cette symétrie.

13. Si l'on permute deux lignes horizontales ou deux colonnes verticales, le déterminant change de signe.

Car l'effet de ce changement est évidemment une simple permutation de deux lettres ou de deux indices, ce qui, d'après la loi de formation, donne lieu à un changement de signe.

14. Si deux lignes ou deux colonnes deviennent identiques, le déterminant se réduit à zéro.

En effet, si l'on permute ces deux lignes, on doit (13) avoir un changement de signe; mais la permutation de deux lignes identiques ne peut modifier en rien la valeur du déterminant: cette valeur reste donc la même lorsque l'on change son signe, c'est-à-dire qu'elle est égale à zéro.

Ce théorème découle encore immédiatement de la défini-

tion du déterminant comme résultant de l'élimination entre n équations linéaires. Car cette élimination s'opère en résolvant $n - 1$ équations par rapport aux variables et substituant dans la $n^{i\text{ème}}$ les valeurs ainsi trouvées. Mais, si cette dernière est identique avec l'une des autres, elle doit devenir identiquement nulle lorsque l'on y substitue les valeurs des inconnues.

15. Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont multipliés par le même facteur, le déterminant est multiplié par ce facteur.

Cette propriété résulte immédiatement de ce que chaque terme dans le développement du déterminant contient comme facteur un élément appartenant à la même ligne ou à la même colonne et n'en contient qu'un.

Ainsi, par exemple, puisque chaque terme du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

contient a_1 ou a_2 ou a_3 , le déterminant peut s'écrire sous la forme $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ (A_1 , A_2 et A_3 ne contenant aucun élément de la colonne des a), et si a_1 , a_2 et a_3 sont multipliés par un même facteur k , le déterminant sera multiplié par ce facteur.

COROLLAIRE. — Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne ne diffèrent que par un multiplicateur constant de ceux d'une autre ligne ou colonne, le déterminant se réduit à zéro. Ainsi

$$\begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & b_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (14).}$$

16. Si, dans un déterminant, on supprime un certain nombre de lignes horizontales et un même nombre de colonnes verticales, le déterminant formé avec celles qui subsistent est un déterminant *mineur* du déterminant donné.

Les mineurs obtenus par la suppression d'une ligne et d'une colonne sont dits du premier ordre, ceux que l'on obtient en effaçant deux lignes et deux colonnes sont dits du deuxième ordre, et ainsi de suite.

Nous avons fait remarquer, dans le dernier numéro, que si les éléments d'une colonne sont $a_1, a_2, a_3, \dots$, le déterminant peut s'écrire sous la forme $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots$, et il est évident que A_1 est le déterminant mineur obtenu par la suppression de la ligne et de la colonne qui contiennent $a_1, \dots$. En effet, tous les termes du déterminant qui contiennent a_1 ne peuvent contenir aucun autre élément de la colonne ou de la ligne dont a_1 fait partie, et a_1 doit être multiplié par toutes les combinaisons possibles des produits de $n - 1$ éléments, pris dans les autres lignes et colonnes, mais la réunion de ces produits forme précisément le déterminant A_1 (8). De même, le déterminant primitif peut aussi s'écrire $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1, \dots$, B_1 étant le mineur que l'on obtient en effaçant la ligne et la colonne qui contiennent $b_1, \dots$.

17. Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre viennent à s'annuler à l'exception d'un seul, le calcul de ce déterminant se réduit à celui d'un déterminant du $(n - 1)^{\text{ième}}$ ordre. En effet, il est évident que si $a_2, a_3, \dots$ deviennent nuls, le déterminant $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots$ se réduit au seul terme $a_1 A_1$, et A_1 est un déterminant ayant une ligne et une colonne de moins que le déterminant proposé.

18. Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne se décomposent en la somme de deux autres, le déterminant se décompose de même en une somme de deux déterminants.

Cette propriété découle du principe dont il a été fait usage au n° 16. Ainsi, dans l'exemple donné plus haut, si nous écrivons $a_1 + \alpha_1, b_1 + \beta_1, c_1 + \gamma_1$ au lieu de a_1, b_1, c_1 , le déterminant devient

$$\begin{aligned} & (a_1 + \alpha_1)A_1 + (b_1 + \beta_1)B_1 + (c_1 + \gamma_1)C_1 \\ & = (a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) + (\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \beta_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

De même, si les éléments d'une colonne étaient tous la somme d'un certain nombre d'autres termes, le déterminant se décomposerait en un pareil nombre d'autres déterminants.

19. Si, dans l'exemple précédent, les éléments de la seconde colonne étaient également la somme de deux autres (si, par exemple, on écrivait $a_2 + \alpha_2$, $b_2 + \beta_2$, $c_2 + \gamma_2$ à la place de a_2 , b_2 , c_2), chacun des déterminants du deuxième membre de la dernière équation se résoudrait lui-même en une somme de deux autres, et l'on voit sans difficulté que

$$(a_1 + \alpha_1, b_2 + \beta_2, c_3) = (a_1 b_2 c_3) + (\alpha_1 \beta_2 c_3) + (\alpha_1 b_2 c_3) + (\alpha_1 \beta_2 c_3).$$

Si chacun des éléments de la première colonne pouvait se résoudre en une somme de m autres, et chacun de ceux de la deuxième en une somme de n autres, le déterminant pourrait donc être décomposé en mn déterminants. Car on le décomposerait d'abord, comme dans le numéro précédent, en m autres, en prenant, au lieu de la première colonne, chacune des m colonnes partielles : chacun de ces déterminants se décomposerait ensuite en n autres en opérant de même sur la deuxième colonne. Et, en général, si chaque élément se compose de la somme d'un certain nombre de termes, de telle sorte que chaque colonne puisse se résoudre en une somme de colonnes partielles (la première en m colonnes, la deuxième en n , la troisième en p , etc.), le déterminant est égal à la somme de tous ceux que l'on peut former en prenant, au lieu de chaque colonne, l'une des colonnes partielles dont elle se compose, et le nombre de ces déterminants sera égal au produit mnp

20. Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont respectivement égaux à la somme des éléments correspondants des autres lignes ou colonnes, multipliés respectivement par

des facteurs constants, le déterminant se réduit à zéro. Car, dans ce cas, il peut être décomposé en déterminants partiels qui s'annulent séparément. Ainsi

$$\begin{vmatrix} ka_2 + la_3 & a_2 & a_3 \\ kb_2 + lb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_2 + lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} la_3 & a_2 & a_3 \\ lb_3 & b_2 & b_3 \\ lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

mais ces deux derniers déterminants s'annulent (n° 15, coroll.).

21. Un déterminant ne change pas de valeur si l'on ajoute à chaque élément d'une ligne ou d'une colonne ceux des autres lignes ou colonnes multipliés respectivement par des facteurs constants. Ainsi

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 + la_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 + lb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 + lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 + la_3 & a_2 & a_3 \\ kb_2 + lb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_2 + lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

mais le dernier déterminant se réduit à zéro (n° 20) (*). Les exemples suivants montreront comment les principes que nous venons d'exposer peuvent servir à simplifier le calcul des déterminants.

EXEMPLE I. — On demande de calculer la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant se déduit du premier en retranchant des éléments des première, deuxième et troisième colonnes, deux fois, trois fois et

(*) Les commençants auront soin de remarquer que, si le déterminant ne change pas de valeur en substituant dans la première ligne $a_1 + ka_2 + la_3$ à la place de $a_1, \dots$, il n'en est plus de même lorsque l'on effectue à la place de $a_3, \dots$ la même substitution dans la seconde ligne, car on multiplie alors le déterminant par k , et si on l'effectue dans la troisième, on le multiplie par l .

quatre fois les éléments correspondants de la dernière colonne. Le troisième déterminant dérive du deuxième en retranchant de même la somme des trois premières colonnes de la dernière. Toutes les fois que nous avons, comme maintenant, un déterminant dans lequel tous les éléments d'une même ligne sont égaux, nous pouvons, par soustraction, en déduire un autre dans lequel tous ceux d'une même ligne s'annulent à l'exception d'un seul, et réduire ainsi le calcul à celui d'un déterminant d'ordre inférieur (17). Ainsi, retranchant la première colonne de chacune des trois autres, le dernier déterminant devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}.$$

Le troisième déterminant de cette série se déduit du précédent en retranchant de la première colonne le double de la dernière, et nous n'avons plus qu'un déterminant du deuxième ordre dont la valeur est $-8 - 7 = -15$.

EXEMPLE II. — *Calculer le déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -10 & -11 & 12 & 4 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -32 & -35 & 34 & 0 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 \\ -32 & -35 & 34 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 32 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 27 & 9 & 0 \\ -39 & 17 & 0 \end{vmatrix} \\ = 90 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -39 & 17 \end{vmatrix} = 90(51 + 39) = 8100.$$

La première transformation s'opère en retranchant le double de la troisième ligne de la deuxième et ajoutant la somme de la deuxième et de la troisième à la quatrième. Remarquons ensuite que les deux termes $a_1 b_2 c_4 d_3$ et $a_1 b_2 c_3 d_4$ étant de signes contraires, et c_4 étant le seul élément de la quatrième colonne qui ne s'annule pas, le déterminant se réduit à $-c_4(a_1 b_2 d_3)$. Ajoutons ensuite la deuxième et la troisième colonne, dégageons le facteur 5 commun à la deuxième colonne et le signe — commun à la deuxième ligne

horizontale; enfin retranchons la première ligne de la deuxième et huit fois la première de la troisième : le reste de l'opération est évident.

EXEMPLE III.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -972.$$

EXEMPLE IV.

$$\begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix} = 194400.$$

EXEMPLE V. — *Étant données n quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, trouver la valeur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \dots \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} & \gamma^{n-1} & \delta^{n-1} & \dots \end{vmatrix}.$$

Il est évident (14) que ce déterminant se réduit à zéro si $\alpha = \beta$; par conséquent, il admet comme facteur $\alpha - \beta$; il en est de même de toute autre différence entre les quantités $\alpha, \beta, \dots$. Le déterminant est donc égal au produit

$$\pm (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\gamma - \delta) \dots$$

En effet, s'il ne lui est pas égal, il le contient au moins comme facteur; mais il ne peut admettre d'autres facteurs renfermant $\alpha, \beta, \dots$, puisque le produit contient déjà $\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}, \dots$ et que ces quantités ne peuvent pas se trouver à une puissance plus élevée dans le déterminant; en comparant les coefficients de α^{n-1} , on voit en outre que le déterminant ne peut contenir de facteur numérique. Cet exemple peut aussi être traité comme le suivant.

EXEMPLE VI. — *Calculer la valeur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{vmatrix}.$$

Retranchant la dernière colonne de chacune des trois autres, le déterminant devient divisible par $(\alpha - \delta)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)$ et le quotient est

$$\begin{vmatrix} \text{I} & \text{I} & \text{I} \\ \alpha + \delta & \beta + \delta & \gamma + \delta \\ \alpha^3 + \alpha^2\delta + \alpha\delta^2 + \delta^3 & \beta^3 + \beta^2\delta + \beta\delta^2 + \delta^3 & \gamma^3 + \gamma^2\delta + \gamma\delta^2 + \delta^3 \end{vmatrix}.$$

Retranchant de même la dernière colonne des deux premières, le déterminant devient divisible par $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$, et l'on trouve immédiatement pour sa valeur

$$(\alpha - \delta)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

EXEMPLE VII. — *La solution d'un problème de Géométrie exige que l'on détermine λ à l'aide de l'équation*

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a + \lambda)^3 & (b + \lambda)^3 & (c + \lambda)^3 \\ (2a + \lambda)^3 & (2b + \lambda)^3 & (2c + \lambda)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchons la première ligne de la deuxième et divisons par λ ; retranchons huit fois la première ligne de la troisième et divisons par λ ; puis retranchons la deuxième ligne de la troisième et divisons par 3, et enfin retranchons cette dernière de la deuxième et divisons par λ , le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 2a + \lambda & 2b + \lambda & 2c + \lambda \\ 3a^2 + a\lambda & 3b^2 + b\lambda & 3c^2 + c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchons maintenant la première colonne de la deuxième et de la troisième, puis la deuxième de la troisième, et divisons par $b - a$, $c - a$, $c - b$; retranchons de la première colonne la deuxième multipliée par a et ajoutons la troisième multipliée par ab ; enfin retranchons de la deuxième colonne la troisième multipliée par $a + b$, et il vient

$$\begin{vmatrix} abc & -(ab + bc + ca) & a + b + c \\ \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en réduisant

$$(\alpha + b + c)\lambda^2 + 3(ab + bc + ca)\lambda + 6abc = 0.$$

EXEMPLE VIII.

$$\begin{vmatrix} (b + c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c + a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a + b + c)^3.$$

EXEMPLE IX.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin \alpha & \sin \beta & \sin \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} = 4 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \gamma).$$

EXEMPLE X.

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) & \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) & \cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \\ \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) & \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) & \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) \\ \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) & \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) & \sin \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) \end{vmatrix} \\ = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \gamma).$$

EXEMPLE XI.

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta & \sin \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin \beta \cos \beta & \sin \gamma \cos \gamma \end{vmatrix} \\ = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) \\ \times [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)].$$

EXEMPLE XII. — Plusieurs de ces exemples peuvent s'appliquer au calcul de l'aire des triangles, en se rappelant que le double de l'aire du triangle formé par trois points ayant pour coordonnées $x', y', \dots$, est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \end{vmatrix},$$

et par trois lignes ayant pour équations $ax + by + c = 0, \dots$,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 \text{ divisé par } (ab' - a'b)(a'b'' - a''b')(a''b - ab'').$$

Ainsi l'aire du triangle formé par les centres de courbure de trois points d'une parabole (les coordonnées du centre de courbure étant $\frac{1}{2}p + 3x'$,

$-\frac{4y'^3}{p^2})$ est

$$\frac{6}{p^3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'^2 & y''^2 & y'''^2 \\ y'^3 & y''^3 & y'''^3 \end{vmatrix} = \frac{6}{p^3} (y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y') (y'y'' + y''y''' + y'''y').$$

On peut calculer de même l'aire du triangle formé par trois normales ou trois autres lignes ayant une relation connue avec la courbe.

EXEMPLE XIII.

$$\begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix} = 2abc;$$

$$\begin{vmatrix} o & c & b & d \\ c & o & a & e \\ b & a & o & f \\ d & e & f & o \end{vmatrix} = a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 - 2abde - 2bcef - 2adcf.$$

EXEMPLE XIV. — *Démontrer l'égalité*

$$\begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & o & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & x & y & z \\ x & o & z & y \\ y & z & o & x \\ z & y & x & o \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$$

EXEMPLE XV. — L'expression

$$\begin{vmatrix} a & \lambda & \lambda & \lambda & \dots \\ \lambda & b & \lambda & \lambda & \dots \\ \lambda & \lambda & c & \lambda & \dots \\ \lambda & \lambda & \lambda & d & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

dans laquelle tous les éléments sont égaux, excepté ceux de la diagonale, se réduit à $\varphi(\lambda) - \lambda \frac{d\varphi}{d\lambda}$, $\varphi(\lambda)$ étant le produit $(a - \lambda)(b - \lambda) \dots$.



TROISIÈME LEÇON.

MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS.

22. Nous allons, dans cette Leçon, faire voir que le produit de deux déterminants peut être mis sous la forme d'un déterminant, ayant pour éléments les sommes des produits des éléments de chaque ligne de l'un des deux déterminants par les éléments correspondants des lignes de l'autre.

Ainsi, le produit de $(a_1 b_1 c_1)$ par $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ est

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 & a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 & a_1 \alpha_3 + b_1 \beta_3 + c_1 \gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 & a_2 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + c_2 \gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1 & a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2 & a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Les démonstrations que nous allons donner pour ce cas particulier s'appliqueront au cas général. Puisque les éléments du déterminant ci-dessus sont chacun la somme de trois termes, le déterminant peut (19) se décomposer en la somme de vingt-sept déterminants que l'on obtiendrait en prenant une colonne partielle dans chacune des trois colonnes ci-dessus. Il est inutile d'écrire ces vingt-sept déterminants, et il suffira d'indiquer les deux ou trois premiers :

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_1 \alpha_2 & a_1 \alpha_3 \\ a_2 \alpha_1 & a_2 \alpha_2 & a_2 \alpha_3 \\ a_3 \alpha_1 & a_3 \alpha_2 & a_3 \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & b_1 \beta_2 & c_1 \gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 & b_2 \beta_2 & c_2 \gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 & b_3 \beta_2 & c_3 \gamma_3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & c_1 \gamma_2 & b_1 \beta_3 \\ a_2 \alpha_1 & c_2 \gamma_2 & b_2 \beta_3 \\ a_3 \alpha_1 & c_3 \gamma_2 & b_3 \beta_3 \end{vmatrix} + \dots$$

Il faut remarquer maintenant que, dans tous, chaque colonne

a un facteur commun qui (15) peut être isolé comme facteur du déterminant. Les termes donnés ci-dessus peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ & + \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} + \dots; \end{aligned}$$

mais le premier de ces déterminants se réduit à zéro, puisqu'il a deux colonnes identiques; le deuxième n'est autre que $(a_1 b_2 c_3)$, et le troisième (13) est $-(a_1 b_2 c_3)$. De même, tout autre déterminant partiel ayant deux colonnes identiques s'évanouira, et l'on reconnaîtra que tous ceux qui ne s'évanouissent pas sont égaux à $(a_1 b_2 c_3)$, tandis que les facteurs qui les multiplient sont les termes du déterminant $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$.

On aurait pu, de la même manière, décomposer le déterminant en une série de termes égaux au déterminant $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$ multiplié par l'un des termes de $(a_1 b_2 c_3)$.

23. En raison de l'importance de ce théorème, nous en donnerons une autre démonstration, fondée sur notre première définition du déterminant.

Le déterminant que nous avons considéré au numéro précédent est le résultat de l'élimination des variables entre les équations

$$\begin{aligned} & (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1)x + (a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2)y \\ & \quad + (a_1 \alpha_3 + b_1 \beta_3 + c_1 \gamma_3)z = 0, \\ & (a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1)x + (a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2)y \\ & \quad + (a_2 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + c_2 \gamma_3)z = 0, \\ & (a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1)x + (a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2)y \\ & \quad + (a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3)z = 0. \end{aligned}$$

Si nous faisons maintenant

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = X,$$

$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = Y,$$

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = Z,$$

les trois équations précédentes peuvent s'écrire

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0,$$

$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0.$$

En éliminant X, Y, Z , on voit immédiatement que $(a_1 b_2 c_3)$ doit être un facteur du résultat. Mais on peut aussi trouver, pour x, y, z , un système de valeurs satisfaisant aux trois équations données, pourvu que l'on en trouve un satisfaisant aux équations $X = 0, Y = 0, Z = 0$. Donc $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3) = 0$, qui représente la condition nécessaire pour que ces dernières équations soient possibles, est également facteur du résultat. Et, puisque l'on voit sans difficulté que le degré du résultat par rapport aux coefficients est exactement le même que celui du produit de ces deux quantités, ce résultat n'est autre que $(a_1 b_2 c_3)(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$.

Il résulte de ce qui précède que le théorème concernant la multiplication des déterminants peut s'exprimer sous la forme suivante, que nous emploierons souvent.

Si un système d'équations

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0,$$

$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0$$

est transformé à l'aide des substitutions

$$X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

$$Y = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$

$$Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,$$

le déterminant du système transformé est égal à $(a_1 b_2 c_3)$, dé-

terminant du système primitif multiplié par $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$, que nous appellerons *module de la transformation*.

24. Les théorèmes des numéros qui précèdent peuvent être généralisés ainsi qu'il suit. Nous pouvons avoir deux séries d'éléments, le nombre des lignes horizontales étant différent de celui des colonnes, par exemple :

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array} \right\|,$$

et nous pouvons en composer, comme au numéro précédent, le déterminant

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 & a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1 \\ a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 \end{array} \right|,$$

dont nous nous proposons de trouver la valeur.

Supposons d'abord, comme dans l'exemple ci-dessus, le nombre des colonnes plus grand que celui des lignes horizontales, de sorte que chaque élément du nouveau déterminant soit la somme d'un nombre de termes supérieur à celui de ces lignes. En procédant comme au n° 22, la valeur de ce déterminant est

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} a_1 \alpha_1 & a_2 \alpha_1 \\ a_1 \alpha_2 & a_2 \alpha_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1 \alpha_1 & b_2 \beta_1 \\ a_1 \alpha_2 & b_2 \beta_2 \end{array} \right| + \dots \\ &= (a_1 b_2)(\alpha_1 \beta_2) + (a_1 c_2)(\alpha_1 \gamma_2) + (b_1 c_2)(\beta_1 \gamma_2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le nouveau déterminant est la somme des produits de tous les déterminants que l'on peut former avec l'une des séries d'éléments multipliés chacun par le déterminant correspondant formé avec les éléments de l'autre série.

25. Supposons maintenant, en second lieu, le nombre des lignes horizontales supérieur à celui des colonnes. Ainsi, à l'aide des deux séries d'éléments

$$\left\| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{array} \right\|,$$

formons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix}.$$

Si nous le décomposons de même en déterminants partiels, nous reconnaitrons qu'il est impossible d'en former un seul qui n'ait deux colonnes identiques. Le déterminant se réduit donc identiquement à zéro. On aurait encore pu s'en convaincre immédiatement en ajoutant à chaque série une colonne de zéros et multipliant, ce qui donne le déterminant ci-dessus comme produit de deux facteurs égaux tous deux à zéro.

26. Un cas particulier fort utile du n° 22 consiste en ce que le carré d'un déterminant est un déterminant symétrique (10). Ainsi le carré de $(a_1 b_2 c_3)$ est

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Il résulte aussi du n° 24 que la somme des carrés des déterminants

$$(a_1 b_2)^2 + (b_1 c_2)^2 + (c_1 a_2)^2$$

est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

EXEMPLE I. — Si l'on désigne par $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ les cosinus des trois angles qui fixent la direction de deux lignes dans l'espace, et par θ l'angle de ces deux lignes, on sait que l'on a

$$\cos \theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

et l'identité que nous venons de démontrer plus haut donne

$$\sin^2 \theta = (a_1 b_2)^2 + (b_1 c_2)^2 + (c_1 a_2)^2.$$

EXEMPLE II. — Dans la théorie des équations, il est utile d'exprimer, sous forme de déterminant, le produit des carrés des différences des racines. Le produit des différences de n quantités a été mis sous forme de déterminant, exemple V, n° 21 ; si nous l'élevons au carré, il vient

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

s_p désignant la somme des puissances p des quantités $\alpha, \beta, \dots$

EXEMPLE III. — Le n° 24 prouve de même que

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma (\alpha - \beta)^2,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2.$$

Nous formons ainsi une série de déterminants dont le dernier est le produit des carrés des différences de $\alpha, \beta, \dots$; tous les déterminants analogues au delà de ce dernier s'évanouissent identiquement (25). Cette série de déterminants est d'une grande importance dans la théorie des équations algébriques.

EXEMPLE IV. — Prenons l'origine des coordonnées au centre du cercle circonscrit à un triangle; soient R son rayon et M l'aire du triangle, on a

$$2MR = \begin{vmatrix} x' & y' & R \\ x'' & y'' & R \\ x''' & y''' & R \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad -2MR = \begin{vmatrix} x' & y' & -R \\ x'' & y'' & -R \\ x''' & y''' & -R \end{vmatrix}.$$

Multipliant ces déterminants suivant la règle ci-dessus, le premier terme

$$x'^2 + y'^2 - R^2$$

devient égal à zéro ; le second

$$x'.x'' + y'y'' - R^2 = -\frac{1}{2} [(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2] = -\frac{1}{2} c^2,$$

c étant un côté du triangle. Par conséquent

$$-4M^2R^2 = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} a^2 b^2 c^2,$$

d'où la formule connue

$$R = \frac{abc}{4M}.$$

EXEMPLE V. — On peut employer la même méthode pour trouver le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre. Partant de l'expression du volume du tétraèdre

$$6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{1v} & y^{1v} & z^{1v} & 1 \end{vmatrix},$$

on trouve, comme plus haut, $a, d; b, e; c, f$ étant les couples d'arêtes opposées du tétraèdre,

$$-36R^2V^2 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & d^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & e^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & f^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où, en désignant $ad + be + cf$ par $2S$, on déduit, d'après l'exemple XIII, n° 21,

$$36R^2V^2 = S(S - ad)(S - be)(S - cf).$$

EXEMPLE VI. — Les démonstrations ci-dessus ont été inspirées à M. Burnside par la démonstration suivante donnée par M. Joachimsthal pour l'expression de l'aire du triangle inscrit dans une ellipse. Multiplions les équations

$$\frac{2M}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & 1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1 \\ \frac{x'''}{a} & \frac{y'''}{b} & 1 \end{vmatrix}, \quad -\frac{2M}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1 \\ \frac{x'''}{a} & \frac{y'''}{b} & -1 \end{vmatrix}.$$

Le produit est un déterminant symétrique dans lequel les termes de la diagonale sont de la forme $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1$ et deviennent nuls quand les points sont sur la courbe; les autres termes sont $\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} - 1 \dots$. Il est facile maintenant de démontrer qu'en désignant par γ un côté du triangle, et par b'' le demi-diamètre parallèle, on a

$$\frac{\gamma^2}{b''^2} = \frac{(x' - x'')^2}{a^2} + \frac{(y' - y'')^2}{b^2} = 2 \left(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2} \right).$$

Nous avons donc

$$-4 \frac{M^2}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\gamma^2}{b^{m2}} & \frac{\xi^2}{b^{n2}} \\ \frac{\gamma^2}{b^{m2}} & 0 & \frac{a^2}{b^{r2}} \\ \frac{\xi^2}{b^{m2}} & \frac{a^2}{b^{r2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2 \xi^2 \gamma^2}{4 b^{r2} b^{n2} b^{m2}}.$$

EXEMPLE VII. — M. Cayley a obtenu, de la manière suivante (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. II, p. 270), les relations qui lient les distances deux à deux de quatre points sur un cercle ou de cinq points sur une sphère.

Substituons les coordonnées de chaque point dans l'équation générale d'un cercle

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0,$$

et éliminons A, B, C, nous obtenons un déterminant composé de quatre lignes telles que

$$x'^2 + y'^2, \quad -2x', \quad -2y', \quad 1.$$

Multiplions par un autre déterminant, qui ne diffère de celui-ci que par un facteur numérique, et que nous formerons à l'aide de quatre lignes de la forme 1, x' , y' , $x'^2 + y'^2$; le premier terme du produit s'annule, le second est $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$. Par conséquent, si $(12)^2$ désigne le carré de la distance entre deux points, le produit sous forme de déterminant est

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est la relation cherchée. Ainsi que nous l'avons déjà vu, ce déterminant développé donne la relation connue

$$(12)(34) \pm (13)(24) \pm (14)(23) = 0.$$

La relation qui lie les distances de cinq points sur une sphère est le déterminant correspondant à cinq lignes.

EXEMPLE VIII. — *Trouver une relation entre les distances deux à deux de trois points sur une droite, de quatre points sur un plan ou de cinq points dans l'espace.*

Ajoutons une unité et des zéros aux deux déterminants dont nous avons

fait le produit dans l'exemple précédent, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x'^2 + y'^2 & -2x' & -2y' & 1 \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x' & y' & x'^2 + y'^2 \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix}.$$

Nous avons maintenant cinq lignes horizontales et seulement quatre colonnes; le produit, développé comme au n° 23, doit donc être nul. Mais ce produit n'est autre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ 1 & (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ 1 & (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ 1 & (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est la relation cherchée. En effaçant la dernière ligne et la dernière colonne, nous aurons la relation entre les distances de trois points sur une droite; en ajoutant, au contraire, une nouvelle ligne 1, $(51)^2$, $(52)^2$, ..., nous aurons la relation entre les distances de cinq points dans l'espace. Nous pouvons, pour procéder au calcul de ces déterminants, retrancher la deuxième colonne de chacune des suivantes, et ensuite retrancher également la première ligne de chacune des suivantes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 2(12)^2 & (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 & (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 \\ (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 & 2(13)^2 & (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 \\ (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 & (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 & 2(14)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les déterminants auraient pu être directement obtenus sous cette forme réduite, mais non symétrique, en plaçant l'origine au point (1) et formant, comme au n° 23, avec les éléments x' , y' , x'' , y'' , ..., le déterminant suivant qui doit être identiquement nul,

$$\begin{vmatrix} x'^2 + y'^2 & x'x'' + y'y'' & x'x''' + y'y''' \\ x'x'' + y'y'' & x''^2 + y''^2 & x''x''' + y''y''' \\ x'x''' + y'y''' & x''x''' + y''y''' & x'''^2 + y'''^2 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît sans peine qu'il équivaut à celui qui a été établi ci-dessus.

EXEMPLE IX. — *Trouver la relation entre les arcs joignant quatre points sur une sphère.*

Prenons l'origine au centre de la sphère et formons, avec les cosinus qui fixent la direction des rayons vecteurs menés à chaque point $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$,

$\cos \gamma', \cos \alpha'', \dots$, un déterminant qui sera identiquement nul, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos ab & \cos ac & \cos ad \\ \cos ba & 1 & \cos bc & \cos bd \\ \cos ca & \cos cb & 1 & \cos cd \\ \cos da & \cos db & \cos dc & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous remplaçons les cosinus par leurs développements en séries $1 - \frac{(ab)^2}{2r^2} + \dots$, et supposons le rayon r infini, le déterminant se réduit à celui de l'exemple précédent concernant quatre points dans un plan.

EXEMPLE X. — Soit

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & h & g \\ h & b - \lambda & f \\ g & f & c - \lambda \end{vmatrix};$$

calculer le produit $\varphi(\lambda)\varphi(-\lambda)$.

Le déterminant qui représente le produit est de la même forme que le précédent, λ étant remplacé par λ^2 et A, ..., H, par les valeurs

$$\begin{aligned} A &= a^2 + h^2 + g^2, & B &= b^2 + f^2 + h^2, & C &= c^2 + g^2 + f^2, \\ F &= gh + f(b + c), & G &= hf + g(c + a), & H &= fg + h(a + b). \end{aligned}$$

En développant et égalant à zéro, on a

$$\lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N = 0,$$

équation dans laquelle

$$\begin{aligned} L &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(f^2 + g^2 + h^2), \\ M &= (bc - f^2)^2 + (ca - g^2)^2 + (ab - h^2)^2 \\ &\quad + 2(af - gh)^2 + 2(bg - hf)^2 + 2(ch - fg)^2, \end{aligned}$$

et N est égal au carré du déterminant primitif dans lequel on a fait $\lambda = 0$; L, M et N sont des quantités nécessairement positives. De même, si l'on forme $\varphi(\lambda)$ à l'aide d'un déterminant symétrique quelconque, le produit $\varphi(\lambda)\varphi(-\lambda)$ égalé à zéro fournit une équation en λ^2 dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, et qui, d'après la règle de Descartes, ne peut avoir de racine négative. C'est ainsi que M. Sylvester a démontré la réalité des racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$. Il est évident, d'après ce que nous avons dit plus haut, qu'il ne peut y avoir de racine de la forme $\beta\sqrt{-1}$, et l'on verra facilement qu'il ne peut y en avoir de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; il suffit pour cela d'écrire $a - \alpha = a'$, $b - \alpha = b'$, $c - \alpha = c'$ et l'on rentre dans le cas précédent.



QUATRIÈME LEÇON.

DÉTERMINANTS RÉCIPROQUES ET MINEURS.

27. Nous avons vu (16) que les déterminants mineurs sont liés aux éléments correspondants par la relation

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots = \Delta;$$

ils sont liés aux autres éléments par les équations identiques

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + \dots = 0,$$

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + \dots = 0.$$

En effet, le déterminant étant égal à $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots$, et $A_1, A_2, \dots$ ne contenant pas $a_1, a_2, \dots$, l'expression $b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots$ est ce que deviendrait le déterminant en faisant $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$; mais il aurait alors deux colonnes identiques, et par suite se réduirait à zéro (14).

28. Nous pouvons maintenant écrire sous une forme abrégée la solution d'un système d'équations

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots = \zeta,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots = \eta.$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots = \zeta,$$

car, en multipliant la première par A_1 , la seconde par $A_2, \dots$, et ajoutant, les coefficients de $y, z, \dots$, s'évanouiront, tandis que celui de x sera $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots$, c'est-à-dire le déterminant formé avec tous les coefficients des premiers membres des équations : nous l'appellerons Δ . Nous avons donc

$$\Delta x = A_1 \zeta + A_2 \eta + A_3 \zeta + \dots,$$

$$\Delta y = B_1 \zeta + B_2 \eta + B_3 \zeta + \dots,$$

$$\Delta z = C_1 \zeta + C_2 \eta + C_3 \zeta + \dots$$

29. Le déterminant *réci-proque* d'un déterminant donné est celui qui a pour éléments les mineurs du déterminant primitif; ainsi le réci-proque de $(a_1 \ b_2 \ c_3)$ est

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$A_1, B_1, \dots$ ayant la signification expliquée plus haut. Si nous l'appelons Δ' , et si nous le multiplions par le déterminant primitif Δ , il vient, d'après la règle du n° 22,

$$\begin{vmatrix} a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 & a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 & a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 \\ a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 & a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 & a_3 A_2 + b_3 B_2 + c_3 C_2 \\ a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 & a_2 A_3 + b_2 B_3 + c_2 C_3 & a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 \end{vmatrix},$$

mais, d'après le n° 27,

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = \Delta, \quad a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0, \dots,$$

le déterminant se réduit donc à

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3,$$

d'où

$$(a_1 \ b_2 \ c_3)(A_1 \ B_2 \ C_3) = (a_1 \ b_2 \ c_3)^3 \quad \text{et} \quad (A_1 \ B_2 \ C_3) = (a_1 \ b_2 \ c_3)^2,$$

et, en général,

$$\Delta' \Delta = \Delta^n, \quad \Delta' = \Delta^{n-1}.$$

30. Si nous prenons le second système d'équations du n° 28, et que nous le résolvions de nouveau par rapport à $\xi, \eta, \dots$ en fonction de $\Delta x, \Delta y, \dots$, nous avons

$$\Delta' \xi = a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z + \dots,$$

$a_1, b_1, c_1, \dots$, étant les mineurs du déterminant réci-proque.

Mais ces valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \dots$ doivent être identiques avec les équations primitives; d'où, en remarquant que $\Delta' = \Delta^{n-1}$,

nous obtenons, par la comparaison des coefficients,

$$a_1 = \Delta^{n-2} a_1, \quad b_1 = \Delta^{n-2} b_1, \quad c_1 = \Delta^{n-2} c_1, \dots,$$

équations qui expriment en fonctions des coefficients primitifs les mineurs du déterminant réciproque.

31. Nous avons vu qu'en considérant une colonne quelconque a d'un déterminant, chaque terme contient comme facteur un élément de cette colonne; par suite, le déterminant peut s'écrire sous la forme $\Sigma a_p A_p$. De même, si l'on considère deux colonnes quelconques a et b du déterminant, il peut être mis sous la forme $\Sigma (a_p b_q) A_{pq}$, la somme Σ désignant tous les déterminants possibles que l'on peut former en prenant deux lignes horizontales des deux colonnes données.

En effet, chaque terme du déterminant contient comme facteur un élément de la colonne a et un autre de la colonne b ; et, d'après la règle des signes, à chaque terme $a_p b_q c_r d_s \dots$ en correspond un autre $- a_q b_p c_r d_s \dots$. D'où l'on voit que la forme du déterminant est $\Sigma (a_p b_q) A_{pq}$, et, par le même raisonnement qu'au n° 16, on voit aussi que le multiplicateur A_{pq} est le mineur obtenu par la suppression des deux lignes et des deux colonnes où se trouvent a_p et b_q .

En général, si l'on considère p colonnes quelconques du déterminant, on peut l'exprimer comme somme de tous les produits que l'on obtient en formant tous les déterminants possibles avec p lignes horizontales prises parmi ces p colonnes, et multipliant le mineur ainsi obtenu par son complémentaire, c'est-à-dire par celui qui résulte de la suppression de ces mêmes colonnes et de ces mêmes lignes, par exemple :

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 c_3 d_4 e_5) = & (a_1 b_2)(c_3 d_4 e_5) - (a_1 b_3)(c_2 d_4 e_5) \\ & + (a_1 b_4)(c_2 d_3 e_5) - (a_1 b_5)(c_3 d_4 e_2) \\ & + (a_2 b_3)(c_1 d_4 e_5) - (a_2 b_4)(c_1 d_3 e_5) \\ & + (a_2 b_5)(c_1 d_3 e_4) + (a_3 b_4)(c_1 d_2 e_5) \\ & - (a_3 b_5)(c_1 d_2 e_4) + (a_4 b_5)(c_1 d_2 e_3). \end{aligned}$$

Le signe de chaque terme dans l'expression précédente se détermine sans peine par la règle des signes (8). Il est évident,

comme au n° 27, que si dans la somme ci-dessus nous remplaçons partout la lettre b par la lettre c , la somme $\Sigma(a_1 c_2)(c_3 d_4 e_5)$ se réduira à zéro, puisqu'elle représente ce que deviendrait le déterminant si la colonne c était égale à la colonne b .

32. Le théorème du n° 30 peut être généralisé ainsi qu'il suit : Tout mineur de l'ordre p que l'on peut former avec les éléments du déterminant réciproque $A_1, B_1, \dots$ est égal au mineur complémentaire dans le déterminant primitif multiplié par la puissance $p - 1$ de ce déterminant. Par exemple, dans le cas où le déterminant primitif est du cinquième ordre,

$$(A_1 B_2) = \Delta(c_3 d_4 e_5), \quad (A_1 B_2 C_3) = \Delta^2(d_4 e_5), \dots$$

La méthode de démonstration générale se comprendra suffisamment en l'appliquant au premier exemple; nous avons

$$\begin{aligned} \Delta x &= A_1 \xi + A_2 \eta + A_3 \zeta + A_4 \omega + A_5 \upsilon, \\ \Delta y &= B_1 \xi + B_2 \eta + B_3 \zeta + B_4 \omega + B_5 \upsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta B_2 x - \Delta A_2 y = (A_1 B_2) \xi + (A_3 B_2) \zeta + (A_4 B_2) \omega + (A_5 B_2) \upsilon.$$

Mais nous pouvons avoir une autre expression de x en fonction des cinq quantités $y, \xi, \zeta, \omega, \upsilon$; en effet, considérons les équations primitives :

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \omega + e_1 u, \\ \zeta &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \omega + e_3 u, \\ \omega &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 \omega + e_4 u, \\ \upsilon &= a_5 x + b_5 y + c_5 z + d_5 \omega + e_5 u; \end{aligned}$$

en éliminant z, ω et u , il vient

$$\begin{aligned} (a_1 c_3 d_4 e_5) x + (b_1 c_3 d_4 e_5) y &= (c_3 d_4 e_5) \xi - (c_4 d_5 e_1) \zeta \\ &\quad + (c_5 d_1 e_3) \omega - (c_1 d_3 e_4) \upsilon; \end{aligned}$$

et puisque, par définition, $(a_1 c_3 d_4 e_5) = B_2$, en comparant ces équations avec celles que nous avons déjà obtenues, nous avons $(A_1 B_2) = \Delta(c_3 d_4 e_5), \dots$

EXEMPLE. — *Si un déterminant se réduit à zéro, les mineurs $A_1, A_2, \dots$ sont respectivement proportionnels à $B_1, B_2, \dots$.*

En effet, nous avons prouvé que

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = \Delta C,$$

C étant le second mineur que l'on obtient en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes. Donc, si $\Delta = 0$, on a

$$A_1 : A_2 :: B_1 : B_2 \dots$$



CINQUIÈME LEÇON.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

33. Nous supposons que le lecteur connaît la théorie des fonctions symétriques des racines des équations telle qu'elle est ordinairement présentée dans les ouvrages sur la théorie des équations. Nous admettrons ainsi qu'il connaît la formule de Newton pour calculer les sommes des puissances des racines de l'équation

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} + \dots = 0,$$

c'est-à-dire

$$s_1 - p_1 = 0, \quad s_2 - p_1 s_1 + 2p_2 = 0, \quad s_3 - p_1 s_2 + p_2 s_1 - 3p_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_1^2 - 2p_2, \quad s_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3, \dots$$

ainsi que les autres formules

$$\sum x^m \beta^p = s_m s_p - s_{m+p},$$

$$\sum x^m \beta^p \gamma^q = s_m s_p s_q - s_{m+p} s_q - s_{m+q} s_p - s_{p+q} s_m + 2s_{m+p+q}, \dots$$

Si nous avons une fonction homogène des coefficients $p_1, p_2, \dots$, l'ordre de cette fonction sera, suivant le sens le plus usité, le nombre de facteurs contenus dans chaque terme : si, par exemple, $p_1^r p_2^s p_3^t$ est un terme de la fonction, elle sera de l'ordre $r + s + t$. Si la fonction n'est pas homogène, l'ordre sera défini par celui du terme le plus élevé. Nous appellerons *poids* d'une fonction la somme des indices de chaque facteur ; ainsi le poids du terme $p_1^r p_2^s p_3^t$ sera la somme $r + 2s + 3t$. Le terme $p_r p_s p_t$ serait du troisième ordre, et son poids serait

3.

$r + s + t$. Dans le cas des fonctions que nous avons à considérer, le poids sera le même pour tous les termes.

34. Si l'on examine les expressions données plus haut pour $s_1, s_2, s_3, \dots$ en fonction des coefficients, il est clair que le poids de chaque terme est égal à 2 dans s_2 , à 3 dans s_3 et, par induction, à n dans s_n . De même, le poids de $\Sigma \alpha^m \beta^p$ est $m + p$, celui de $\Sigma \alpha^m \beta^p \gamma^q$ est $m + p + q \dots$

On peut le démontrer d'une manière générale ainsi qu'il suit. Si l'on remplace les racines $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \dots$, la fonction $\Sigma \alpha^m \beta^p \gamma^q$ est évidemment multipliée par λ^{m+p+q} . Mais on sait qu'en multipliant chaque racine par λ , on multiplie p_1 par λ , p_2 par λ^2 , p_3 par $\lambda^3, \dots$. L'expression $\Sigma \alpha^m \beta^p \gamma^q$ en fonction des coefficients doit donc être telle, que, si l'on remplace p_1 par λp_1 , p_2 par $\lambda^2 p_2, \dots$, chaque terme se trouve multiplié par λ^{m+p+q} ; ce qui revient à dire que le poids de chaque terme est $m + p + q$.

35. Puisque l'on a

$$p_1 = \alpha + \beta + \gamma + \dots, \quad p_2 = \alpha(\beta + \gamma + \dots) + \beta\gamma + \dots,$$

et qu'aucun des coefficients $p_3, p_4, \dots$ ne contient α à une puissance supérieure à la première, il est clair que l'ordre d'une fonction symétrique quelconque $\Sigma \alpha^m \beta^p \gamma^q$ (m étant supposé $> p$ et q) doit être au moins égal à m ; en effet, il faut au moins m facteurs contenant chacun α au premier degré pour que le produit renferme α^m . Réciproquement, toute fonction symétrique d'ordre m contiendra α^m dans quelque terme. En effet, si l'on désigne par q_1 la somme de $\beta, \gamma, \delta, \dots$, par $q_2, q_3, \dots$ les sommes de leurs produits 2 à 2, 3 à 3, ..., on a

$$p_1 = \alpha + q_1, \quad p_2 = \alpha q_1 + q_2, \quad p_3 = \alpha q_2 + q_3, \dots,$$

et le coefficient de la plus haute puissance de α dans un terme $p_2^r p_3^s p_4^t$ sera $q_1^r q_2^s q_3^t$; réciproquement, le facteur $q_1^r q_2^s q_3^t$ ne peut provenir que du terme $p_2^r p_3^s p_4^t$. Il ne peut donc se réduire à zéro par l'addition d'autres termes; d'où il suit que l'ordre de la fonction symétrique $\Sigma \alpha^m \beta^p \gamma^q$ est égal au plus grand des nombres m, p, q : nous avons en effet prouvé qu'il ne peut

pas être moindre et il ne peut pas être plus grand, puisque des fonctions d'un degré supérieur contiendraient des puissances de α plus élevées que α^m .

A l'aide de ces deux principes, on peut écrire immédiatement la partie littérale d'une fonction symétrique, et il ne reste à déterminer que les coefficients. Si l'on demande de former $\Sigma \alpha^2 (\beta - \gamma)^2$, on voit sans peine qu'il s'agit d'une fonction dont le poids est 4 et l'ordre 2, c'est-à-dire que chaque terme ne peut avoir que deux facteurs. Les seuls termes qui puissent y figurer sont $p_1, p_3 p_1, p_2^2$, et, pour compléter le calcul de la fonction, il ne reste qu'à déterminer les coefficients numériques de ces trois termes.

36. Les fonctions symétriques des différences des racines étant celles dont nous aurons le plus à nous occuper, il n'est pas inutile de faire connaître ici un théorème à l'aide duquel les sommes des puissances de ces différences peuvent s'exprimer en fonction des sommes de puissances des racines elles-mêmes. Développons $(x - \alpha)^m$ par la formule du binôme, développons de même $(x - \beta)^m, \dots$, et ajoutons, nous avons

$$\Sigma (x - \alpha)^m = s_0 x^m - m s_1 x^{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 x^{m-2} - \dots$$

Maintenant, si nous remplaçons x par α dans cette expression, elle devient

$$(\alpha - \beta)^m + (\alpha - \gamma)^m + \dots;$$

si nous remplaçons de même x par β , elle devient

$$(\beta - \alpha)^m + (\beta - \gamma)^m + \dots,$$

et ainsi de suite. Additionnons les résultats de toutes ces substitutions : si m est impair, la somme est nulle, puisque les termes $(\alpha - \beta)^m, (\beta - \alpha)^m$ se détruisent; si m est pair, elle devient, au contraire, $2 \Sigma (\alpha - \beta)^m$, mais la même substitution étant opérée dans le second membre de l'équation, nous avons en ajoutant

$$s_0 s_m - m s_1 s_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 s_{m-2} - \dots$$

Si m est impair, le dernier terme sera $-s_m s_0$, qui détruira le premier, et tous les autres termes se détruiront de même; mais, si m est pair, le dernier terme sera identique au premier et ainsi de suite, et l'équation deviendra divisible par 2. Nous avons donc, quand m est pair,

$$\Sigma (\alpha - \beta)^m = s_0 s_m - m s_1 s_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 s_{m-2} - \dots,$$

les coefficients étant ceux du binôme, jusqu'à ce que l'on arrive à celui du milieu, auquel on s'arrête en le divisant par 2. Par exemple,

$$\Sigma (\alpha - \beta)^4 = s_0 s_4 - 4 s_1 s_3 + 3 s_2^2,$$

$$\Sigma (\alpha - \beta)^6 = s_0 s_6 - 6 s_1 s_5 + 15 s_2 s_4 - 10 s_3^2.$$

37. Toute fonction des différences des racines doit évidemment rester invariable si on les augmente ou diminue toutes d'une même quantité; si, par exemple, on remplace dans l'équation x par $x - \lambda$. Elle devient, dans ce cas,

$$x^n - (p_1 + n\lambda)x^{n-1} + \left[p_2 + (n-1)\lambda p_1 + \frac{1}{2} n(n-1)\lambda^2 \right] x^{n-2} \\ - [p_3 + (n-2)\lambda p_2 + \dots] x^{n-3} + \dots = 0.$$

Mais une fonction quelconque φ des coefficients $p_1, p_2, \dots$ devient, quand on change p_1 en $p_1 + \delta p_1$, p_2 en $p_2 + \delta p_2, \dots$,

$$\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dp_1} \delta p_1 + \frac{d\varphi}{dp_2} \delta p_2 + \dots \right) \\ + \frac{1}{1.2} \left[\frac{d^2\varphi}{dp_1^2} (\delta p_1)^2 + \dots \right] + \dots$$

Remplaçons donc p_1 par $p_1 + n\lambda$, p_2 par

$$p_2 + (n-1)\lambda p_1 + \frac{1}{2} n(n-1)\lambda^2 \dots,$$

et ordonnons le résultat par rapport aux puissances de λ , il devient

$$\varphi + \lambda \left[n \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d\varphi}{dp_2} + (n-2)p_2 \frac{d\varphi}{dp_3} + \dots \right] + \lambda^2 \dots = 0.$$

Nous avons vu que toute fonction des différences ne doit pas varier par la substitution, quelque petit que soit λ ; elle doit donc, lorsqu'on l'exprime en fonction des coefficients, satisfaire à l'équation différentielle

$$n \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d\varphi}{dp_2} + (n-2)p_2 \frac{d\varphi}{dp_3} + \dots = 0.$$

EXEMPLE I. — On demande de former $\Sigma(z - \xi)^2$.

Nous savons que l'ordre et le poids de cette fonction sont égaux à 2; elle doit donc être de la forme $Ap_2 + B_1^1p$. Appliquant l'équation différentielle, nous avons

$$[(n-1)A + 2nB]p_1 = 0,$$

B doit donc être proportionnel à $(n-1)$ et A à $-2n$, et la fonction ne peut différer que par un facteur de $(n-1)p_1^2 - 2np_2$.

On verra que ce facteur est égal à l'unité en supposant $z = 1$ et toutes les autres racines nulles, d'où $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, ce qui réduit l'expression ci-dessus à $n-1$, comme on pouvait le prévoir.

EXEMPLE II. — Former pour une équation du troisième degré le produit des carrés des différences $(\alpha - \xi)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$.

L'ordre de la fonction est 4, son poids 6, et elle doit être de la forme

$$Ap_3^2 + Bp_3p_2p_1 + Cp_3p_1^3 + Dp_2^3 + Ep_2^2p_1^2$$

Effectuant l'opération

$$3 \frac{d}{dp_1} + 2p_1 \frac{d}{dp_2} + p_2 \frac{d}{dp_3},$$

elle devient

$$(2A + 3B)p_3p_2 + (2B + 9C)p_3p_1^2 + (B + 6D + 6E)p_2^2p_1 + (C + 4E)p_2p_1^3,$$

expression qui doit être identiquement nulle, d'où

$$C = -4E, \quad B = 18E, \quad A = -27E, \quad D = -4E;$$

la fonction ne peut différer que par un facteur de l'expression

$$p_1^2p_2^2 + 18p_1p_2p_3 - 4p_2^3 - 4p_3p_1^3 - 27p_3^2.$$

On peut voir que le facteur est égal à l'unité en supposant γ et, par suite, p_3 nuls.

38. Nous emploierons, par la suite, des équations homogènes. En écrivant $\frac{x}{\gamma}$ à la place de x et faisant disparaître les

fractions, l'équation que nous avons employée devient

$$x^n - p_1 x^{n-1} y + p_2 x^{n-2} y^2 \dots \pm p_n y^n = 0.$$

Donnons, pour la symétrie, un coefficient à x^n : il convient, en outre, de donner aux différents termes les coefficients du développement du binôme $(x + y)^n$, et nous écrirons ainsi

$$\begin{aligned} a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 x^{n-2} y^2 + \dots \\ + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0. \end{aligned}$$

L'avantage que procure l'emploi des coefficients du binôme consiste en ce que, dans toutes les fonctions des différences des racines exprimées en fonction des coefficients de l'équation, la somme des coefficients numériques est nulle. En effet, nous aurons cette somme en faisant $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 1$; mais, dans cette hypothèse, toutes les racines devenant égales, leurs différences s'annulent.

Nous entendrons, par fonction symétrique des racines d'une équation homogène, la fonction symétrique des racines de l'é-

quation en $\frac{x}{y}$ formée après la division par $a_0 y^n$ avec les coef-

ficients $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots$, et multipliée par la plus haute puissance

de a_0 qui se trouve en dénominateur afin de faire disparaître les fractions. De cette manière, toute fonction symétrique sera une fonction homogène de $a_0, a_1, \dots$; en effet, avant d'être débarrassée des fractions, elle était homogène et de degré zéro, et elle l'est encore lorsqu'on multiplie tous ses termes par un même facteur. Nous pouvons aussi établir la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation homogène sans

la transformer préalablement en une équation en $\frac{x}{y}$. Soit x une

racine de cette dernière, il est évident que l'équation homogène sera satisfaite par toutes les valeurs de x', y' pour lesquelles on aura $x' = \alpha y'$, puisqu'il n'est manifestement question ici

que du rapport $\frac{x'}{y'}$; l'équation divisée par y^n étant décompo-

sable en facteurs, l'équation homogène se ramènera à un produit $(y'x - yx')(y''x - yx'')(y'''x - yx''') \dots$. Multiplions et comparons à l'équation primitive, il vient

$$a_0 = y'y''y''' \dots, \quad na_1 = -\Sigma x'y''y''' \dots, \quad \frac{1}{2}n(n-1)a_2 = \Sigma x'x''y''' \dots, \\ na_{n-1} = \mp \Sigma y'x''x''' \dots, \quad a_n = \pm x'x''x''' \dots$$

En faisant $y', y'', \dots$ égaux à l'unité, ces expressions se réduisent aux expressions ordinaires des coefficients d'une équation en fonction des racines $x', x'', \dots$. Réciproquement, toute fonction symétrique écrite sous la forme ordinaire avec les racines $x', x'', \dots$ peut se ramener à l'autre forme, en supposant chaque valeur x' divisée par une valeur correspondante y' et l'ensemble de la fonction multiplié par une puissance de $y'y'' \dots$ assez élevée pour faire disparaître les fractions. Ainsi la somme des carrés des différences $\Sigma(x' - x'')^2$ devient

$$\Sigma(x'y'' - x''y')^2 y'''^2 y^{1+2} \dots,$$

et, en général, toutes les fonctions des différences se ramèneront à une somme de produits de déterminants tels que $x'y'' - y''x', x'y''' - x'''y', \dots$, par des puissances de $y', y'', \dots$.

39. L'équation différentielle que nous avons donnée pour les fonctions de différences des racines demande à être un peu modifiée lorsque l'on écrit l'équation avec les coefficients du binôme.

Si, dans l'équation

$$a_0 x^n + na_1 x^{n-1} y + \dots = 0,$$

nous remplaçons x par $x + \lambda$, a_1 devient $a_1 + \lambda a_0$, a_2 devient $a_2 + 2a_1 \lambda + a_0 \lambda^2$, a_3 devient $a_3 + 3\lambda a_2 + 3\lambda^2 a_1 + \lambda^3 a_0, \dots$, et toute fonction φ des coefficients se transforme en la suivante

$$\varphi + \lambda \left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots \right) + \dots$$

Toute fonction des différences des racines doit donc, puis-

qu'elle ne change pas lorsque l'on remplace x par $x + \lambda$, satisfaire à l'équation

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots = 0.$$

De même, toute fonction qui ne change pas lorsque l'on remplace y par $y + \lambda$ doit satisfaire à l'équation

$$na_1 \frac{d\varphi}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d\varphi}{da_1} + (n-2)a_3 \frac{d\varphi}{da_2} + \dots = 0.$$

Les fonctions de cette espèce sont fonctions des valeurs inverses des racines, et, dans la notation homogène, consistent en produits de la forme $x'y'' - x''y' \dots$ multipliés par des puissances de $x', x'', \dots$. Les fonctions des seuls déterminants $x'y'' - x''y', \dots$, qui ne sont pas multipliées par des puissances de $x', y', \dots$, satisferont aux deux équations différentielles.

40. Il faut remarquer que la condition

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots = 0$$

est non-seulement nécessaire, mais suffisante pour que φ ne varie pas par la substitution de $x + \lambda$ à x . Nous avons vu que le coefficient de λ , dans l'équation transformée, se réduit à zéro, et l'on trouve sans peine, pour celui de λ^2 ,

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_1 \frac{d\varphi}{da_3} + 6a_2 \frac{d\varphi}{da_4} + \dots \\ & + \frac{1}{1.2} \left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots \right)^2 \varphi, \end{aligned}$$

$a_0, a_1, \dots$, qui apparaissent explicitement, ne devant pas être différenciées dans le dernier symbole. Mais ce résultat n'est autre que celui que l'on obtiendrait en effectuant sur la fonction

$$\frac{1}{1.2} \left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + \dots \right)$$

l'opération $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$, car cette opération fournira bien d'une part les termes que l'on obtient en différenciant $a_1, a_2, \dots$, qui apparaissent d'une manière explicite dans le symbole, et de l'autre ceux que l'on obtient en y laissant $a_1, a_2, \dots$ constants : la somme $a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + \dots$ se réduisant à zéro, il en est de même du coefficient de λ^2 , et de ceux des autres puissances de λ .

EXEMPLE. — Former, pour l'équation du troisième degré

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3,$$

la fonction

$$\Sigma (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2.$$

On peut la déduire de l'exemple II, n° 37, ou l'obtenir directement ainsi qu'il suit : la fonction est du quatrième ordre, son poids est 6 ; elle doit donc être de la forme

$$A a_3 a_3 a_0 a_0 + B a_3 a_2 a_1 a_0 + C a_3 a_1 a_1 a_1 + D a_2 a_2 a_2 a_0 + E a_2 a_2 a_1 a_1.$$

Effectuant l'opération

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3},$$

on a

$$(B + 6A) a_3 a_2 a_0 a_0 + (3C + 2B) a_3 a_1 a_1 a_0 \\ + (2E + 6D + 3B) a_2 a_2 a_1 a_0 + (4E + 3C) a_2 a_1 a_1 a_1 = 0;$$

égalant séparément à zéro le coefficient de chaque terme et faisant $A = 1$, il vient

$$B = -6, \quad C = 4, \quad D = 4, \quad E = -3.$$

41. M. Serret écrit l'opération $a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + \dots$ sous une forme abrégée qui présente quelquefois des avantages. Imaginons une variable fictive ζ dont les coefficients $a_0, a_1, \dots$ soient des fonctions telles, que l'on ait

$$\frac{da_1}{d\zeta} = a_0, \quad \frac{da_2}{d\zeta} = 2a_1, \quad \frac{da_3}{d\zeta} = 3a_2, \dots;$$

on a évidemment

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots = \frac{d\varphi}{d\zeta}.$$

On peut de même écrire $na_1 \frac{d\varphi}{da_0} + \dots$ sous la forme abrégée $\frac{d\varphi}{d\eta}$, η étant une variable dont les coefficients $a_0, a_1, \dots$, sont des fonctions telles, que l'on ait

$$\frac{da_0}{d\eta} = na_1, \quad \frac{da_1}{d\eta} = (n-1)a_2, \dots$$

42. Il convient de faire connaître également une observation faite par M. Brioschi relativement au sens de la première de ces deux opérations lorsqu'on l'exprime en fonction des racines. Considérons une fonction des coefficients $p_1, p_2, p_3, \dots$; exprimons ces coefficients en fonction des racines et examinons ses dérivées par rapport aux racines.

Si l'on désigne comme plus haut par q_1 la somme, par q_2 la somme des produits deux à deux, etc., de toutes les racines moins l'une d'elles α , on a évidemment

$$\frac{dp_1}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dp_2}{d\alpha} = q_1, \quad \frac{dp_3}{d\alpha} = q_2, \dots,$$

et

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{d}{dp_1} + q_1 \frac{d}{dp_2} + q_2 \frac{d}{dp_3} + \dots$$

On a de même des expressions correspondantes pour les dérivées par rapport aux autres racines; en les ajoutant, le coefficient de $\frac{d}{dp_1}$ devient égal à n . Celui de $\frac{d}{dp_2}$ devient $(n-1)p_1$.

En effet, puisque $q_1 = p_1 - \alpha$, en ajoutant, le coefficient en question deviendra $np_1 - (\alpha + \beta + \gamma + \dots) = (n-1)p_1$. De même le coefficient de $\frac{d}{dp_3}$ est égal à $(n-2)p_2$, et l'on a

$$\left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\beta} + \dots \right) = n \frac{d}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d}{dp_2} + (n-2)p_2 \frac{d}{dp_3} + \dots$$

On voit maintenant clairement pourquoi, en appliquant l'opération indiquée par le second membre à une fonction des différences des racines, le résultat se réduit à zéro : c'est parce

que l'opération équivalente $\frac{d}{dz} + \dots$, appliquée à une différence quelconque, fournit un résultat identiquement nul.

De même, si l'équation avait été écrite avec les coefficients du binôme, nous aurions eu

$$n \frac{da_1}{dz} = a_0, \quad \frac{1}{2} n(n-1) \frac{da_2}{dz} = na_1, \dots,$$

d'où, comme précédemment,

$$\frac{d}{dz} + \frac{d}{dz} + \dots = a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$$



SIXIÈME LEÇON.

RÉSULTANTS.

43. Quand on a k équations homogènes à k variables, ou, ce qui revient au même, k équations non homogènes à $k - 1$ variables, il est toujours possible de les combiner de manière à en déduire une seule équation $\Delta = 0$ ne contenant plus de variables. On dit alors que les variables sont éliminées et Δ est le *résultant* (*) du système d'équations. Prenons l'exemple le plus simple, celui que nous avons déjà considéré dans la première Leçon, c'est-à-dire deux équations du premier degré

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0.$$

Multiplions la première par a' , la deuxième par a , et retranchons la première de la deuxième, il vient

$$ab' - a'b = 0,$$

et la quantité $ab' - a'b$ est le résultant des deux équations. Il faut maintenant remarquer que l'on ne peut en conclure l'égalité $ab' - a'b = 0$ qu'autant que les deux équations données sont censées simultanées, c'est-à-dire qu'autant qu'elles doivent être satisfaites par une même valeur de x . Il est évident, en effet, que si nous combinons les deux équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

pour en déduire l'égalité

$$l\varphi(x) + m\psi(x) = 0,$$

nous admettons implicitement que x représente la même quan-

(*) Les résultants ont reçu aussi le nom d'*éliminants*.

tité dans les deux équations. Il en résulte que l'égalité

$$ab' - a'b = 0$$

représente la condition nécessaire pour que les deux équations puissent être satisfaites par une même valeur de x , comme on peut aussi le voir immédiatement en les résolvant toutes deux par rapport à x et égalant les valeurs ainsi obtenues. Et, en général, étant donné un nombre quelconque d'équations

$$U = 0, \quad V = 0 \quad W = 0,$$

nous pouvons les combiner et en tirer une égalité telle que

$$lU + mV + nW = 0,$$

pourvu que les variables aient les mêmes valeurs dans toutes les équations. Et si, en les combinant, nous parvenons à un résultat qui ne contienne plus les variables, il se réduira à zéro lorsque ces équations pourront être satisfaites par un système commun de valeurs, et seulement dans ce cas. Le résultant peut donc être défini : une fonction des coefficients du système d'équations donné qui doit se réduire à zéro lorsqu'elles admettent un système de solutions communes.

44. Nous avons maintenant à montrer comment l'élimination peut s'opérer et quelle est la nature du résultat auquel on est conduit. Commençons par deux équations écrites sous la forme non homogène

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = 0,$$

$$x^n - q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \dots = 0 \quad \text{ou} \quad \psi(x) = 0.$$

Le résultant représente, comme nous l'avons vu, la condition nécessaire pour que les deux équations aient une racine commune. S'il en est ainsi, quelqu'une des racines de la première équation doit satisfaire à la deuxième; soient donc $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les racines de la première équation, et substituons-les successivement dans la seconde, l'un des résultats $\psi(\alpha), \psi(\beta), \dots$, doit devenir nul, et leur produit est nécessairement dans le même cas. Mais ce produit est une fonction symétrique des racines

de la première équation, et dès lors peut s'exprimer en fonction de ses coefficients; on a ainsi le résultant cherché. La règle à suivre pour éliminer suivant cette méthode est donc de prendre les m facteurs

$$\psi(\alpha) = \alpha^n - q_1 \alpha^{n-1} + q_2 \alpha^{n-2} - \dots,$$

$$\psi(\beta) = \beta^n - q_1 \beta^{n-1} + q_2 \beta^{n-2} - \dots,$$

$$\psi(\gamma) = \gamma^n - q_1 \gamma^{n-1} + q_2 \gamma^{n-2} - \dots,$$

de les multiplier tous ensemble, et de substituer à la place des fonctions symétriques des racines $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ leurs valeurs en fonction des coefficients de la première équation.

EXEMPLE. — *Éliminer x entre les deux équations*

$$x^2 - p_1 x + p_2 = 0, \quad x^2 - q_1 x + q_2 = 0.$$

Multiplions $(x^2 - q_1 x + q_2)$ par $(\xi_2 - q_1 \xi + q_2)$, il vient

$$\alpha^2 \xi^2 - q_1 \alpha \xi (\alpha + \beta) + q_2 (\alpha^2 + \beta^2) + q_1^2 \alpha \xi - q_1 q_2 (\alpha + \xi) + q_2^2;$$

remplaçons $\alpha + \beta$ par p_1 , $\alpha \beta$ par p_2 , $\alpha^2 + \beta^2$ par $p_1^2 - 2p_2$, nous avons

$$p_2^2 - p_1 p_2 q_1 + q_2 (p_1^2 - 2p_2) + p_2 q_1^2 - q_1 q_2 p_1 + q_2^2,$$

ou

$$(p_2 - q_2)^2 + (p_1 - q_1)(p_1 q_2 - p_2 q_1);$$

c'est le résultant demandé.

45. On obtiendrait le même résultat (abstraction faite du signe) en substituant les racines de la première équation dans la deuxième, ou celles de la deuxième dans la première.

En d'autres termes, si l'on désigne par $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ les racines de la deuxième équation, le résultant peut s'écrire indifféremment sous l'une ou l'autre des formes

$$\varphi(\alpha') \varphi(\beta') \varphi(\gamma') \dots \quad \text{ou} \quad \psi(\alpha) \psi(\beta) \psi(\gamma) \dots,$$

car, si l'on se rappelle que

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots,$$

la première forme revient à

$$(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\alpha' - \gamma) \dots (\beta' - \alpha)(\beta' - \beta)(\beta' - \gamma) \dots,$$

et la seconde à

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\alpha - \gamma') \dots (\beta - \alpha')(\beta - \beta')(\beta - \gamma') \dots$$

Dans les deux cas on a donc le produit de toutes les différences possibles entre une racine de la première équation et une racine de la deuxième, et ces deux produits ne peuvent différer que par leur signe.

46. Si les équations avaient été données sous la forme homogène, avec ou sans les coefficients du binôme,

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \frac{1}{2} m(m-1) a_2 x^{m-2} y^2 + \dots = 0,$$

$$b_0 y^n + n b_1 x^{n-1} y + \frac{1}{2} n(n-1) b_2 x^{n-2} y^2 + \dots = 0,$$

on les ramènerait à la forme précédente en divisant par $a_0 y^m$, $b_0 y^n$, et l'on aurait $p_1 = -\frac{m a_1}{a_0}$, $q_1 = -\frac{n b_1}{b_0}$, On substituerait ces valeurs dans le résultat obtenu par la méthode du numéro précédent, et l'on ferait disparaître les fractions en multipliant par la plus haute puissance de a_0 et b_0 qui se trouverait dans les dénominateurs : le résultant des deux fonctions

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2, \quad b_0 x^2 + 2 b_1 x y + b_2 y^2$$

déduit de cette manière de la valeur obtenue plus haut (44) devient

$$(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 + 4(a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Le résultant est toujours une fonction homogène des coefficients des deux équations. En effet, avant d'être débarrassé des dénominateurs, il était évidemment fonction homogène de degré zéro, et il reste par suite encore homogène lorsque l'on multiplie tous les termes par une même quantité. On peut le voir aussi en appliquant directement aux équations la méthode du n° 44. Soient x' , y' ; x'' , y'' , ... les valeurs qui satisfont à la première; si les deux équations admettent un facteur commun, quelques-unes de ces valeurs doivent satisfaire à la

seconde. On effectuera donc le produit

$$(b_0 x'^n + nb_1 x'^{n-1} y' + \dots)(b_0 x''^n + nb_1 x''^{n-1} y'' + \dots), \dots,$$

et on remplacera les fonctions symétriques des racines par leurs valeurs en fonction des coefficients de la première équation, comme au n° 38.

47. Le résultant de deux équations des degrés m et n est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport aux coefficients de la première, et du $m^{\text{ième}}$ par rapport à ceux de la deuxième.

En effet, il peut s'écrire, soit comme produit de m facteurs $\psi(\alpha)\psi(\beta)\dots$ contenant chacun au premier degré les coefficients de la deuxième équation, soit comme produit de n facteurs $\varphi(\alpha')\varphi(\beta')\dots$ contenant chacun au premier degré les coefficients de la première. En considérant seulement la forme $\psi(\alpha)\psi(\beta)\dots$, nous pouvons également voir que cette forme, qui contient évidemment les coefficients de la deuxième équation au degré m , renferme ceux de la première au degré n , puisque les fonctions symétriques qui s'y trouvent contiennent chaque racine à la puissance n et ne la contiennent pas à une puissance plus élevée (35).

48. Le poids du résultant est mn , c'est-à-dire que la somme des indices dans chaque terme est constante et égale à mn . En effet, si l'on multiplie chacune des racines $\alpha, \beta, \dots; \alpha', \beta', \dots$ par un même facteur λ , chacune des mn différences $\alpha - \alpha'$ (45) étant multipliée par ce même facteur, le résultant le sera par λ^{mn} . Mais, pour multiplier les racines par λ , il suffit de remplacer p_1, q_1 par $\lambda p_1, \lambda q_1$; p_2, q_2 par $\lambda^2 p_2, \lambda^2 q_2 \dots$, et, en effectuant ce changement dans le résultant, chaque terme devra se trouver multiplié par λ^{mn} , ce qui revient à dire que la somme des indices de chaque terme est égale à mn .

On peut encore le voir au moyen du principe du n° 34.

Dans la fonction $\psi(x)$, la somme de l'exposant de chaque terme et de l'indice du coefficient correspondant est n , c'est-à-dire que $\psi(x)$ est la somme d'un certain nombre de termes de la forme $q_{n-i}x^i$. Si nous prenons donc un certain nombre de termes dans chacun des facteurs $\psi(\alpha)\psi(\beta)\dots$, le terme cor-

respondant du produit sera $q_{n-i} q_{n-j} q_{n-k} \alpha^i \beta^j \gamma^k \dots$, et si nous combinons ce produit avec tous ceux dans lesquels se présentent ces mêmes coefficients, nous aurons $q_{n-i} q_{n-j} q_{n-k} \Sigma \alpha^i \beta^j \gamma^k \dots$. La somme des indices des coefficients q est

$$n - i + n - j + n - k \dots,$$

ou, puisqu'il y a m facteurs,

$$mn - (i + j + k + \dots).$$

Mais, d'après le n° 34, la somme des indices des coefficients p dans l'expression de $\Sigma \alpha^i \beta^j \gamma^k \dots$ est $i + j + k + \dots$. La somme des deux séries d'indices est donc mn , ainsi que nous voulions le démontrer.

Le résultat auquel nous venons de parvenir peut encore s'énoncer ainsi (*): Si p_1, q_1 contiennent une nouvelle variable z au premier degré, que p_2, q_2 la contiennent au deuxième et au premier, p_3, q_3 au troisième et aux degrés inférieurs, et ainsi de suite, le résultant la contiendra, en général, au degré mn .

Il est évident que ces résultats subsisteraient également pour les équations écrites sous la forme homogène $a_0 x^m + \dots$, puisque les indices se correspondent dans les deux formes. On voit aussi qu'en raison de la symétrie ils seraient encore vrais si les équations avaient été mises sous la forme

$$a_m x^m + m a_{m-1} x^{m-1} y + \dots,$$

où l'indice de chaque coefficient est égal à l'exposant de x au lieu d'être égal à celui de y .

49. Puisque le résultant est une fonction des différences entre une racine de l'une des équations et une racine de l'autre, il restera invariable si l'on augmente d'une même quantité les racines des deux équations, c'est-à-dire si nous y remplaçons x

(*) Ou bien encore ainsi : Si l'on substitue dans le résultant, à la place de chaque coefficient p_{α} , le terme x^{α} qu'il multiplie dans l'équation primitive, chaque terme du résultant devient divisible par x^{mn} , ou bien, sous la forme homogène, si l'on remplace chaque coefficient a_{α} par $x^{\alpha} y^{m-\alpha}$, tous les termes du résultant deviendront divisibles par $x^{mn} y^{mn}$.

par $x + \lambda$. Il en résulte, comme au n° 37, que le résultant doit satisfaire à l'équation différentielle

$$m \frac{d\Delta}{dp_1} + (m-1)p_1 \frac{d\Delta}{dp_2} + (m-2)p_2 \frac{d\Delta}{dp_3} + \dots \\ + n \frac{d\Delta}{dq_1} + (n-1)q_1 \frac{d\Delta}{dq_2} + \dots = 0,$$

ou, comme au n° 39, en écrivant les équations avec les coefficients du binôme

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + 2a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots + b_0 \frac{d\Delta}{db_1} + 2b_1 \frac{d\Delta}{db_2} + \dots = 0.$$

50. Étant données deux équations homogènes à trois variables des degrés m et n , le nombre de systèmes de valeurs qui peuvent satisfaire à la fois à ces deux équations est mn (*).

Soient

$$ax^m + (by + cz)x^{m-1} + (dy^2 + eyz + fz^2)x^{m-2} + \dots = 0, \\ a'x^n + (b'y + c'z)x^{n-1} + (d'y^2 + e'yz + f'z^2)x^{n-2} + \dots = 0$$

les deux équations ordonnées suivant les puissances de x ; si nous éliminons x , le coefficient de x^{m-1} étant une fonction homogène du premier degré de y et z , celui de x^{m-2} une fonction semblable du deuxième degré, et ainsi de suite, on voit d'après le n° 48 que le résultant sera une fonction homogène de y et z du degré mn .

On peut donc trouver mn valeurs de y et de z (**) qui rendent le résultant égal à zéro. Si nous substituons l'une quelconque d'entre elles dans les équations données, elles auront, puisque

(*) Ces équations peuvent être censées représenter deux courbes des degrés m et n . La proposition contenue dans ce numéro s'interprète géométriquement en disant que les courbes se coupent en mn points. On ramène ces équations à la forme ordinaire en faisant $z = 1$.

(**) Le lecteur doit se rappeler que quand nous employons des équations homogènes, le rapport des variables est tout ce dont il y a lieu de s'occuper. Ainsi, dans ce cas, z' peut être pris arbitrairement, la valeur correspondante de y étant déterminée par l'équation en $\frac{y}{z}$.

leur résultant devient nul, une racine commune lorsqu'on les résoudra par rapport à x : cette valeur de x , combinée avec les valeurs de y et z déjà trouvées, donne un système de valeurs satisfaisant aux équations données; nous avons donc en tout mn systèmes semblables de valeurs. Nous donnerons plus loin une méthode par laquelle on peut, quand deux équations ont une racine commune, la déterminer immédiatement.

EXEMPLE. — *Trouver les coordonnées des quatre points d'intersection de deux sections coniques représentées par les équations*

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy &= 0, \\ a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy &= 0. \end{aligned}$$

Ordonnons les équations suivant les puissances de x et éliminons cette variable : le résultat est, d'après le n° 46,

$$\begin{aligned} &[(ab')y^2 + 2(af')yz + (ac')z^2]^2 \\ &+ 4[(ah')y + (ag')z]\{ (bh')y^3 + [(bg') + 2(fh')]y^2z \\ &+ [(ch') + 2(fg')]yz^2 + (cg')z^3 \} = 0, \end{aligned}$$

où nous avons, comme dans la première Leçon, écrit (ab') pour $ab' - a'b$.

Cette équation, résolue par rapport à $\frac{y}{z}$, donnera les valeurs correspondantes aux quatre points d'intersection. Les ayant trouvées et substituant l'une d'entre elles dans les deux équations, on aura, en cherchant leur commune racine, la valeur correspondante de $\frac{x}{z}$. Nous aurions pu déterminer d'un seul coup les quatre valeurs de $\frac{x}{z}$ en éliminant y , mais la substitution est nécessaire pour savoir quelle est la valeur de y qui correspond à chaque valeur de x . En faisant $z = 1$, tout ce qui précède se trouve exprimé dans le système de coordonnées ordinaire.

51. Toute fonction symétrique des mn valeurs qui satisfont simultanément aux deux équations peut s'exprimer en fonction de leurs coefficients.

Pour être plus facilement compris, nous considérerons d'abord les équations non homogènes à deux variables. Il est clair que nous pouvons exprimer ainsi les fonctions symétriques

qui ne renferment que l'une des variables. Car en éliminant y , nous avons une équation en x , et toutes les fonctions symétriques des mn valeurs de x satisfaisant aux deux équations données peuvent s'exprimer en fonction des coefficients de cette équation : de même pour y . Par exemple, dans le cas de deux sections coniques, $x_1, y_1, \dots$ étant les coordonnées des points d'intersection, nous voyons immédiatement comment on peut exprimer des fonctions symétriques telles que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$

et le seul point qui demande quelques explications est de savoir comment exprimer les fonctions symétriques où entrent les deux variables, telles que

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Pour y parvenir, nous introduirons une nouvelle variable $t = \lambda x + \mu y$ et, à l'aide de cette équation arbitraire, nous éliminerons x et y des équations données. Ainsi y s'élimine immédiatement en substituant sa valeur tirée de l'équation $t = \lambda x + \mu y$, et nous avons alors deux équations en x des degrés m et n : leur résultant sera du degré mn par rapport à t , et ses racines seront évidemment $\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots$, $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ étant les valeurs de x et y communes aux deux équations. Les coefficients de cette équation en t contiendront λ et μ . Si nous formons la somme des puissances k de ses racines, qui sera $(\lambda x_1 + \mu y_1)^k + (\lambda x_2 + \mu y_2)^k + \dots$, le coefficient de λ^k dans cette somme sera Σx_i^k , celui de $\lambda^{k-1} \mu$ donnera $\Sigma x_i^{k-1} y_i$, et ainsi de suite.

Quelques mots suffiront pour traduire ce qui précède dans le langage des équations homogènes. Nous voyons immédiatement comment on peut former des fonctions symétriques renfermant seulement deux variables, telles que $\Sigma y_1 z_2 z_3 z_4$, car on les déduit (comme au n° 38) de l'équation homogène obtenue en éliminant l'autre variable. Le seul point qui reste à éclaircir est de savoir comment former les fonctions symétriques comprenant les trois variables, et l'on y parvient pré-

cisément, comme plus haut, en posant

$$t = \lambda x + \mu y.$$

EXEMPLE. — Former les fonctions symétriques des coordonnées des quatre points d'intersection de deux sections coniques.

L'équation obtenue dans le dernier exemple donne immédiatement

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = (ac')^2 + 4(ag')(cg'), \quad z_1 z_2 z_3 z_4 = (ab')^2 + 4(ah')(bh'),$$

et, d'après la symétrie,

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= (bc')^2 + 4(bf')(cf'), \\ -\Sigma(x_1 x_2 x_3 z_4) &= 4[(ac')(af') + (ah')(cg') + (ag')(ch') \\ &\quad + 2(ag')(fg')]\dots \end{aligned}$$

Pour prendre un exemple d'une fonction renfermant trois variables, formons $\Sigma(x_1 x_1 z_2^2 z_3^2 z_4^2)$, qui correspond à $\Sigma(x'y')$ lorsque les équations sont écrites sous la forme non homogène.

D'après la théorie précédente, nous avons à effectuer l'élimination entre les équations données et l'équation $t = \lambda x + \mu y$, et la fonction cherchée sera la moitié du coefficient de $\lambda \mu$ dans le développement de $\Sigma(t_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2)$. Si le résultat de l'élimination est

$$At^4 + (B\lambda + C\mu)t^2 z + (D\lambda^2 + E\lambda\mu + F\mu^2)t^2 z^2 + \dots,$$

on aura

$$\Sigma(t_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2) = (B\lambda + C\mu)^2 - 2A(D\lambda^2 + E\lambda\mu + F\mu^2)$$

et

$$\Sigma(x_1 x_1 z_2^2 z_3^2 z_4^2) = BC - AE.$$

L'élimination donne

$$\begin{aligned} A &= (ab')^2 + 4(ah')(bh'), \\ B &= 4[(ba')(bg') + (bf')(ah') + (bh')(af') + 2(bh')(gh')], \\ C &= 4[(ab')(af') + (ag')(bh') + (ah')(bg') + 2(ah')(fh')], \\ E &= 4[(ac')(bh') + (bc')(ah') - 2(af')(hf') \\ &\quad - 2(bg')(hg') + 4(hf')(hg')]. \end{aligned}$$

52. Former le résultant de trois équations homogènes à trois variables des degrés m, n, p .

En égalant le résultant à zéro, on exprime la condition nécessaire pour que l'on puisse trouver un système de valeurs x, y, z satisfaisant aux trois équations (*). Par conséquent, si tel

(*) Si les trois équations représentent des courbes, la condition que le résultant soit égal à zéro indique que les trois courbes doivent passer par un point commun.

est le cas, en résolvant deux des équations et substituant successivement dans la troisième les valeurs trouvées pour x , y , z , l'un de ces systèmes de valeurs doit satisfaire à cette équation. Dès lors le produit de tous les résultats de la substitution doit être égal à zéro. Soient donc $x', y', z'; x'', y'', z'', \dots$ les systèmes de valeurs satisfaisant aux deux dernières équations et dont le nombre est np (50), substituons ces valeurs dans la première et multiplions les np résultats $\varphi(x', y', z')$, $\varphi(x'', y'', z''), \dots$. Le produit ne renferme évidemment que des fonctions symétriques de $x', y', z', \dots$, qui, d'après le n° 51, peuvent toutes s'exprimer en fonctions des coefficients des deux dernières équations : en les exprimant ainsi, on obtient le résultant cherché.

53. Le résultant est une fonction homogène du degré np par rapport aux coefficients de la première équation, du degré mp par rapport à ceux de la deuxième, et du degré mn par rapport à ceux de la troisième.

En effet, chacun des np facteurs $\varphi(x', y', z'), \dots$ est une fonction homogène du premier degré des coefficients de la première équation, et l'expression des fonctions symétriques au moyen des coefficients ne renferme que ceux des deux dernières équations dont la solution a donné $x', y', z', \dots$. Le résultant est donc du degré np par rapport aux coefficients de la première équation : son degré par rapport aux coefficients des deux autres se détermine de même.

54. Le poids du résultant est mnp , c'est-à-dire que si tous les coefficients qui multiplient la première puissance d'une variable z reçoivent l'indice 1; ceux qui multiplient z^2 , l'indice 2, et ainsi de suite, la somme de tous les indices dans chaque terme du résultant sera égale à mnp . En d'autres termes, si tous les coefficients qui multiplient z contiennent une nouvelle variable au premier degré, si tous ceux qui multiplient z^2 la contiennent au deuxième degré et au premier, etc., le résultant contiendra cette variable au degré mnp .

Cette proposition se démontre comme au n° 48. En premier

lieu, il est évident que, si une équation homogène du degré m est satisfaite par les valeurs x', y', z' , et si on altère cette équation en multipliant chaque coefficient par une puissance de λ égale à la puissance de z que multiplie ce coefficient, l'équation ainsi transformée sera satisfaite par les valeurs $\lambda x', \lambda y', z'$; ou, en général, que le résultat de la substitution de $\lambda x', \lambda y', z'$ dans l'équation transformée est égal au résultat de la substitution de x', y', z' dans l'équation primitive multiplié par λ^m . Ainsi, prenons l'équation

$$x^3 + y^3 - z^3 - z^2 x - z y^2,$$

la transformée est

$$x^3 + y^3 - \lambda^3 z^3 - \lambda^2 z^2 x - \lambda z y^2,$$

et le résultat de la substitution de $\lambda x', \lambda y', z'$ dans cette dernière est évidemment égal au résultat de la substitution de x', y', z' dans l'équation donnée multiplié par λ^3 . Donc, si l'on transforme les trois équations données en multipliant chaque coefficient par une puissance de λ égale à la puissance de z que multiplie ce coefficient, x', y', z' représentant un système de valeurs satisfaisant aux deux dernières des équations primitives, les transformées seront satisfaites par les valeurs $\lambda x', \lambda y', z'$, et le résultat de la substitution de ces nouvelles valeurs dans la première équation sera $\lambda^m \varphi(x', y', z')$. Le résultant qui est le produit de np facteurs de la forme $\varphi(x', y', z'), \dots$ sera multiplié par λ^{mnp} . Soit donc $a_k b_l c_m \dots$ un terme du résultant, chaque indice correspondant à la puissance de z que multiplie le coefficient; puisque le changement de a_k en $\lambda^k a_k$, de b_l en $\lambda^l b_l, \dots$ a pour effet de multiplier ce terme par λ^{mnp} , la somme $k + l + \dots$ est nécessairement égale à mnp .

55. On prouve de même que trois équations sont, en général, satisfaites par mnp systèmes de valeurs; que toute fonction symétrique de ces valeurs peut s'exprimer à l'aide des coefficients, et que l'on peut former le résultant de quatre équations en résolvant trois quelconques d'entre elles, substituant successivement les systèmes de valeurs ainsi trouvées

dans la quatrième, formant le produit des résultats de la substitution, et enfin exprimant ce produit à l'aide des coefficients des équations par la méthode des fonctions symétriques. Nous formerons ainsi le résultant d'un nombre quelconque d'équations, et nous aurons le théorème général suivant. Le résultant de k équations à $k - 1$ variables indépendantes est une fonction homogène des coefficients de chaque équation dont le degré est égal au produit des degrés de toutes les autres équations. Si l'on affecte chaque coefficient dans toutes les équations d'un indice égal à l'exposant de l'une des variables qu'il multiplie, la somme des indices dans chaque terme du résultant sera égale au produit des degrés de toutes les équations. Et enfin, si l'on a k équations à k variables, le nombre de systèmes de valeurs qui satisfont à toutes ces équations est égal au produit de leurs degrés.

56. Quand le résultant de plusieurs équations s'annule, ces équations admettent un système de solutions communes, et nous allons montrer comment on peut le trouver sans résoudre les équations. La méthode est la même quel que soit le nombre des variables; pour plus de simplicité, nous commencerons par deux équations

$$\varphi = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots = 0,$$

$$\psi = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots = 0.$$

Supposons qu'une racine $x = \alpha$ de la deuxième équation satisfasse à la première et que, par suite, le résultant R soit nul. Nous pouvons dans φ changer les coefficients a_m en $a_m + \Lambda_m$, a_{m-1} en $a_{m-1} + \Lambda_{m-1}$, $\dots$, et la transformée

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + \Lambda_m x^m + \Lambda_{m-1} x^{m-1} + \dots = 0$$

sera encore satisfaite par la valeur $x = \alpha$, pourvu que les quantités $\Lambda_m, \Lambda_{m-1}, \dots$ soient liées par la condition

$$\Lambda_m \alpha^m + \Lambda_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots = 0,$$

puisque le reste du premier membre de l'équation disparaît par hypothèse lorsque l'on fait $x = \alpha$. La transformée a donc

une racine commune avec ψ et, par suite, le nouveau résultant que l'on obtient en la combinant avec ψ est aussi nul. Mais ce résultant se déduit de celui de φ et ψ en y changeant a_m en $a_m + \Lambda_m, \dots$ et il vient

$$R + \left(\Lambda_m \frac{dR}{da_m} + \Lambda_{m-1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \dots \right) + \dots = 0.$$

R est nul par hypothèse, et les quantités $\Lambda_m, \dots$ pouvant être aussi petites que l'on voudra, les termes qui les contiennent à la première puissance doivent disparaître séparément. Nous avons donc

$$\Lambda_m \frac{dR}{da_m} + \Lambda_{m-1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \dots = 0,$$

relation qui doit être identique avec la condition

$$\Lambda_m \alpha^m + \Lambda_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots,$$

la seule, ainsi que nous l'avons vu, à laquelle $\Lambda_m, \Lambda_{m-1}, \dots$ doivent satisfaire. Il suit de là que les dérivées doivent être proportionnelles à $\alpha^m, \alpha^{m-1}, \dots$, et que l'on peut trouver α en divisant l'une d'entre elles par la suivante.

COROLLAIRE I. — Soient a_p, a_q deux coefficients quelconques de φ , nous devons avoir, quand R est nul,

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} :: \frac{dR}{da_q} : \frac{dR}{da_{q-k}},$$

puisque le rapport des deux premières dérivées est α^k et qu'il en est de même des deux autres : il en résulte que la différence

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_{q-k}} - \frac{dR}{da_q} \frac{dR}{da_{p-k}}$$

est nulle quand R l'est aussi et, par suite, admet R comme facteur ; en d'autres termes, la fonction

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r} \frac{dR}{da_s}$$

contient R comme facteur lorsque l'on

$$p + q = r + s.$$

COROLLAIRE II. — Il est évident, de même, que les dérivées du résultant par rapport aux coefficients de ψ sont proportionnelles à $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots$; on en déduit, comme dans le corollaire précédent, que

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} :: \frac{dR}{db_q} : \frac{dR}{db_{q-k}}$$

quand R est nul, et que la fonction

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_r} \frac{dR}{db_s}$$

est divisible par R lorsque

$$p + q = r + s.$$

COROLLAIRE III. — Enfin, si nous substituons dans la seconde équation les valeurs de $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots$ données ci-dessus, nous avons, quand R est nul,

$$b_n \frac{dR}{da_n} + b_{n-1} \frac{dR}{da_{n-1}} + \dots = 0.$$

Le premier membre de cette équation ne peut évidemment admettre le facteur R , puisque les coefficients de φ s'y trouvent à un degré moindre d'une unité que dans R lui-même. Il doit donc se réduire identiquement à zéro.

57. Les résultats du numéro précédent peuvent se vérifier en calculant les valeurs des dérivées de R . Nous savons (44) que $R = \varphi(\alpha) \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots$. Mais, puisque $\varphi(\alpha)$ est égal à $a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots$, nous avons

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{da_p} = \alpha^p$$

et par suite

$$\frac{dR}{da_p} = \alpha^p \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots + \beta^p \varphi(\alpha) \varphi(\gamma) \dots + \dots$$

Si α est une racine de φ ,

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

et $\frac{dR}{da_p}$ se réduit à

$$\alpha^p \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots;$$

de même,

$$\frac{dR}{da_q} = \alpha^q \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots$$

et par suite

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_q} :: \alpha^p : \alpha^q.$$

En multipliant, il vient aussi

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_q} = \alpha^{p+q} [\varphi(\beta)]^2 [\varphi(\gamma)]^2 \dots + R(\alpha^p \beta^q + \alpha^q \beta^p) \varphi(\gamma) \dots + \dots,$$

et il est facile de voir que la fonction qui multiplie R est

$$\frac{d^2 R}{da_p da_q};$$

retranchons maintenant $\frac{dR}{da_r} \frac{dR}{da_s}$, les termes indépendants de R se détruiront si $p + q = r + s$, et il restera seulement

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r} \frac{dR}{da_s} = R \left(\frac{d^2 R}{da_p da_q} - \frac{d^2 R}{da_r da_s} \right).$$

On verra de même que $\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_q} \frac{dR}{db_p}$ est divisible par R ; mais le quotient n'est pas $\frac{d^2 R}{da_p db_q} - \frac{d^2 R}{da_q db_p}$.

58. La méthode des nos 56 et 57 s'applique sans difficulté à un nombre quelconque de variables. Pour plus de clarté, nous nous bornerons à trois variables, la même démonstration s'appliquant mot pour mot au cas général. Soient donc trois équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0,$$

φ étant égal à $a_{m00} x^m + \dots + a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma + \dots$, et x', y', z' désignant les valeurs qui satisfont aux trois équations : elles y satisferont encore si nous changeons dans φ a_{m00} en $a_{m00} + A_{m00}$, $a_{\alpha\beta\gamma}$ en $a_{\alpha\beta\gamma} + A_{\alpha\beta\gamma}$, $\dots$, pourvu que l'on ait

$$A_{m00} x'^m + \dots + A_{\alpha\beta\gamma} x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma + \dots = 0;$$

mais, comme au n° 56, on doit avoir aussi

$$\Lambda_{m00} \frac{dR}{d\Lambda_{m00}} + \dots + \Lambda_{\alpha, \beta'} \frac{dR}{d\alpha_{\beta'}} + \dots = 0,$$

et, comparant ces deux équations, nous voyons que chaque terme $x''z' y'^{\beta} z'''$ doit être proportionnel à la dérivée de R par rapport à son coefficient : on aura donc les valeurs de x' , y' , z' en prenant les rapports des dérivées de R par rapport aux coefficients des termes dont le rapport est x' ou y' ou z' ; on peut le vérifier comme au n° 57. Substituons, en effet, dans φ les racines communes à ψ et χ , et soient φ' , φ'' , ... les résultats de ces substitutions : on sait que

$$R = \varphi' \varphi'' \varphi''' \dots$$

et

$$\frac{dR}{d\alpha_{\beta'}} = x''z' y'^{\beta} z''' \varphi'' \varphi''' \dots + x''z' y''^{\beta} z'' \varphi' \varphi'' \dots + \dots$$

Si nous supposons $\varphi' = 0$, la valeur de cette expression se réduit à son premier terme et l'on voit, comme plus haut, que la dérivée par rapport à chaque coefficient est proportionnelle au terme que ce coefficient multiplie. On peut en déduire les mêmes corollaires qu'au n° 56.

59. Si un système d'équations admet deux systèmes de racines communes, non-seulement le résultant R s'annule, mais il en est de même de ses dérivées par rapport à tous les coefficients. Car il est évident que les valeurs des dérivées données au n° 57 s'annulent toutes si $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ sont nuls, ou, comme au n° 58, si φ' et φ'' sont tous deux nuls. Dans ce cas, les valeurs des racines communes s'obtiennent à l'aide d'une équation du second degré où figurent les secondes dérivées de R. Les indications suivantes que, pour plus de brièveté, nous donnerons seulement dans le cas de deux équations, s'appliquent textuellement au cas général.

Nous avons (57)

$$\frac{d^2 R}{d\alpha_p^2} = \alpha^p \beta^p \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots + \beta^p \gamma^p \varphi(\alpha) \varphi(\delta) \dots + \dots,$$

expression qui, lorsque $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ sont nuls, se réduit au seul terme

$$\alpha^p \beta^p \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots$$

On aura de même

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{da_p da_q} = (\alpha^p \beta^q + \alpha^q \beta^p) \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots,$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{da_q^2} = \alpha^q \beta^q \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots,$$

et si nous résolvons par rapport à $\frac{\lambda}{\mu}$ l'équation du deuxième degré

$$\lambda^2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_q^2} - \lambda \mu \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_p da_q} + \mu^2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_p^2} = 0,$$

ses racines donneront les rapports $\frac{\alpha^p}{\alpha^q}, \frac{\beta^p}{\beta^q}$.

Si les équations admettaient trois systèmes de racines communes, toutes les secondes dérivées de $\mathbf{R}$ seraient nulles, et les racines communes s'obtiendraient en passant aux dérivées troisièmes et résolvant une équation du troisième degré.



SEPTIÈME LEÇON.

EXPRESSION DES RÉSULTANTS SOUS FORME DE DÉTERMINANTS.

60. La méthode d'élimination par les fonctions symétriques est peut-être, au point de vue théorique, préférable à toute autre, parce qu'elle s'applique quel que soit le nombre des variables; cependant, comme elle n'est pas très-expéditive en pratique et ne fournit pas ses résultats sous la forme la plus commode, nous allons, dans cette Leçon, faire connaître d'autres méthodes d'élimination. La suivante est celle qui se présente le plus naturellement : elle est, au fond, identique à la méthode dite *du plus grand commun diviseur*. Nous avons déjà vu que le résultant de deux équations linéaires

$$ax + b = 0, \quad ax' + b' = 0$$

est le déterminant $ab' - a'b = 0$. Si nous avons maintenant deux équations du deuxième degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

multiplions la première par a' , la deuxième par a et retranchons, il vient

$$(ab')x + (ac') = 0.$$

Multiplions la première par c' , la deuxième par c , retranchons et divisons par x , il vient aussi

$$(ac')x + (bc') = 0.$$

Le problème est donc ramené à l'élimination entre deux équations linéaires, et le résultat est

$$(ac')^2 + (ba')(bc') = 0.$$

61. Si nous avons à éliminer x entre deux équations du

troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

multiplions la première par a' , la deuxième par a et retranchons; multiplions aussi la première par d' , la deuxième par d , retranchons et divisons par x : le problème se réduit à éliminer entre les deux équations du second degré

$$(ab')x^2 + (ac')x + (ad') = 0, \quad (ad')x^2 + (bd')x + (cd') = 0;$$

mais, d'après le numéro précédent, le résultat est

$$[(ad')^2 - (ab')(cd')]^2 + [(ad')(ac') - (ab')(bd')][(ad')(db') - (ac')(dc')] = 0.$$

Il faut maintenant remarquer que l'on a identiquement

$$(ab')(cd') + (ac')(db') + (ad')(bc') = 0;$$

par conséquent, lorsque nous effectuons les multiplications, le résultat devient divisible par (ad') et se réduit à

$$(ad')^3 - 2(ad')(ab')(cd') - (ad')(ac')(bd') + (ac')^2(cd') + (bd')^2(ab') - (ab')(bc')(cd') = 0.$$

L'introduction du facteur étranger (ad') s'explique en remarquant que, si l'on a $ad' = a'd$, c'est-à-dire si a et a' sont dans le même rapport que d et d' , les résultats que l'on obtient, soit en retranchant de la première équation multipliée par a' la deuxième multipliée par a , soit en retranchant de la première équation multipliée par d' la deuxième multipliée par d , ne doivent différer que par un facteur. Ainsi, dans l'hypothèse $(ad') = 0$, bien que les deux équations primitives du troisième degré n'aient pas de facteur commun, les deux équations du deuxième degré auxquelles nous les avons ramenées en ont un. En général, ce procédé d'élimination introduit des facteurs étrangers et, par suite, il vaut mieux employer d'autres méthodes.

62. Méthode d'Euler. — Si deux équations des degrés m et n ont un facteur commun du premier degré, on obtiendra

des résultats identiques, soit en multipliant la première équation par les $n - 1$ autres facteurs de la deuxième, soit en multipliant la deuxième par les $m - 1$ autres facteurs de la première. Donc, si nous multiplions la première par une fonction arbitraire de degré $n - 1$ qui introduit n constantes arbitraires, la deuxième par une fonction arbitraire de degré $m - 1$ qui introduit m constantes, et si nous égalons, terme à terme, les deux fonctions de degré $m + n - 1$ ainsi formées, nous aurons $m + n$ équations, entre lesquelles nous pourrions éliminer les $m + n$ constantes introduites qui n'y figurent toutes qu'au premier degré, et nous obtiendrons ainsi, sous forme de déterminant, le résultant des deux équations données.

EXEMPLE. — *Éliminer x et y entre les équations*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

Nous avons à égaliser, terme à terme,

$$(Ax + By)(ax^2 + bxy + cy^2) \quad \text{et} \quad (A'x + B'y)(a'x^2 + b'xy + c'y^2);$$

les quatre équations qui en résultent sont

$$\begin{aligned} Aa & - A'a' & = 0, \\ Ab + Ba & - A'b' - B'a' & = 0, \\ Ac + Bb & - A'c' - B'b' & = 0, \\ & + Bc & - B'c' = 0. \end{aligned}$$

Éliminant A, B, A', B' , on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

63. Cette méthode peut être généralisée de manière à trouver les conditions nécessaires pour que les équations aient deux facteurs communs. Dans ce cas, il est encore évident que nous devons avoir le même résultat, soit en multipliant la première par les $n - 2$ autres facteurs de la deuxième, soit en multipliant la deuxième par les $m - 2$ autres facteurs de la première. Donc, comme précédemment, si nous multiplions

la première par une fonction arbitraire du degré $n - 2$ introduisant $n - 1$ constantes, et la deuxième par une fonction arbitraire de degré $m - 2$, en égalant, terme à terme, les deux polynômes de degré $m + n - 2$ ainsi obtenus, nous avons $m + n - 1$ équations, et, en éliminant entre $m + n - 2$ quelconques d'entre elles les $m + n - 2$ constantes introduites, nous avons $m + n - 1$ conditions qui n'équivalent évidemment qu'à deux conditions indépendantes.

EXEMPLE. — *Trouver les conditions nécessaires pour que les équations*

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0, \quad a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 = 0,$$

aient deux facteurs communs.

Posons

$$\begin{aligned} (Ax + By)(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) \\ = (A'x + B'y)(a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3), \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} Aa - A'a' &= 0, \\ Ab + Ba - A'b' - B'a' &= 0, \\ Ac + Bb - A'c' - B'b' &= 0, \\ Ad + Bc - A'd' - B'c' &= 0, \\ + Bd - B'd' &= 0; \end{aligned}$$

éliminant $A, B; A', B'$, on a (en employant la notation du n° 3) le système de déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0.$$

64. *Méthode de M. Sylvester* (*). — Cette méthode est identique, quant aux résultats, à celle d'Euler, mais elle est plus simple dans les applications et plus facilement susceptible de généralisation. Multiplions l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré par $x^{n-1}, x^{n-2}y, x^{n-3}y^2, \dots$, et celle du $n^{\text{ième}}$ degré par $x^{m-1},$

(*) M. Sylvester a donné à sa méthode le nom de méthode *dialytique* parce qu'elle dissout en quelque sorte les relations qui existent entre les puissances des variables et traite ces puissances comme des variables indépendantes.

$x^{m-2}y, x^{m-3}y^2, \dots$, nous avons ainsi $m + n$ équations entre lesquelles nous pouvons éliminer les $m + n$ quantités $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}y, x^{m+n-3}y^2, \dots$ considérées comme des inconnues indépendantes. Ainsi, dans le cas de deux équations du deuxième degré, multiplions-les par x et par y , et nous avons les équations

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2y + cxy^2 &= 0, \\ ax^2y + bxy^2 + cy^3 &= 0, \\ a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 &= 0, \\ a'x^2y + b'xy^2 + c'y^3 &= 0, \end{aligned}$$

entre lesquelles éliminant x^3, x^2y, xy^2, y^3 , nous obtenons le même déterminant que plus haut,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

En général, il est évident que cette méthode fournit le résultant sous la forme d'un déterminant dans lequel n lignes sont formées avec les coefficients de la première équation et les m autres avec ceux de la deuxième : nous retrouvons ainsi la règle déjà obtenue plus haut pour le degré du résultant par rapport aux coefficients des deux équations.

65. Méthode de Bezout. — Cette méthode donne aussi le résultant sous la forme d'un déterminant; mais il se présente sous une forme plus facilement calculable que le précédent. La méthode générale se comprendra mieux en l'appliquant d'abord au cas particulier de deux équations du quatrième degré

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 &= 0, \\ a'x^4 + b'x^3y + c'x^2y^2 + d'xy^3 + e'y^4 &= 0; \end{aligned}$$

multipliant la première par a' , la deuxième par a et soustrayant, le premier terme de chacune d'elles se trouve éliminé et le résultat, étant divisible par y , donne

$$(ab')x^3 + (ac')x^2y + (ad')xy^2 + (ae')y^3 = 0;$$

multipliant de nouveau la première par $a'x + b'y$, la deuxième par $ax + by$, les deux premiers termes de chacune sont éliminés et le résultat, divisé par y^2 , donne

$$(ac')x^3 + [(ad') + (bc')]x^2y + [(ae') + (bd')]xy^2 + (be')y^3 = 0;$$

multipliant maintenant la première par $a'x^2 + b'xy + c'y^2$, la deuxième par $ax^2 + bxy^2 + cy^2$, soustrayant et divisant par y^3 , on a

$$(ad')x^3 + [(ae') + (bd')]x^2y + [(be') + (cd')]xy^2 + (ce')y^3 = 0.$$

Enfin, multipliant la première par $a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3$, la deuxième par $ax^3 + bxy^2 + cxy^2 + dy^3$, soustrayant et divisant par y^4 , il vient

$$(ae')x^3 + (be')x^2y + (ce')xy^2 + (de')y^3 = 0.$$

Nous pouvons, entre les quatre équations ainsi formées, éliminer comme au n° 64 x^3 , x^2y , xy^2 , y^3 , et nous avons pour résultat le déterminant

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & (be') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (be') + (cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix}.$$

66. Le procédé que nous venons d'employer est si évidemment applicable à deux équations quelconques du $n^{\text{ième}}$ degré, qu'il est inutile d'en établir une démonstration générale. A l'inspection du déterminant obtenu dans le numéro précédent, la loi de formation se manifeste, et nous pouvons immédiatement écrire le déterminant qui serait le résultat de l'élimination entre deux équations du cinquième degré, en continuant simplement les séries de termes, écrivant (af') après (ae') Ce résultant est

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') & (af') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & (af') + (be') & (bf') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (af') + (be') + (cd') & (bf') + (ce') & (cf') \\ (ae') & (af') + (bc') & (bf') + (ce') & (cf') + (de') & (df') \\ (af') & (bf') & (cf') & (df') & (ef') \end{vmatrix}.$$

On voit que tous les termes du résultant doivent contenir a ou a' , ce qui était évident *à priori*, puisque, si ces deux coefficients étaient tous deux nuls, les deux équations auraient le facteur commun $y = 0$.

On voit aussi que les termes qui ne contiennent a ou a' qu'au premier degré se réduisent à (ab') multiplié par le résultant des équations que l'on obtiendrait en faisant a et $a' = 0$ dans les équations données. Car chaque terme du déterminant précédent doit contenir un élément de la première ligne horizontale et un de la première colonne; mais, comme tous ceux de la première ligne et de la première colonne contiennent a ou a' , les seuls termes qui ne renfermeront a et a' qu'au premier degré se réduiront à (ab') multiplié par le déterminant mineur correspondant, qui n'est autre, en faisant a et $a' = 0$, que le résultant de degré immédiatement inférieur.

67. Il reste seulement à faire voir que le procédé qui vient d'être employé est encore applicable lorsque les équations sont de degrés différents, et, comme plus haut, nous commencerons par un exemple particulier, savoir par les équations

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0, \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0;$$

multipliant la première par a' , la deuxième par ax^2 et soustrayant, nous avons

$$(ba')x^3 + (ca')x^2y + (da')xy^2 + (ea')y^3 = 0.$$

De même, multipliant la première par $a'x + b'y$ et la deuxième par $(ax + by)x^2$, il vient

$$(ca')x^3 + [(cb') + (da')]x^2y + [(db') + (ea')]xy^2 + (eb')y^3 = 0.$$

Ce procédé ne peut pas être continué plus longtemps; mais, si nous joignons aux deux dernières équations deux nouvelles que l'on obtient en multipliant la deuxième des équations primitives par x et par y , nous avons quatre équations pour éliminer x^3 , x^2y , xy^2 , y^3 .

Et, en général, quand les degrés des équations sont inégaux, m étant le plus grand, on trouvera que le procédé du n° 65

nous donne n équations du degré $m - 1$, contenant au premier degré les coefficients de chacune des deux équations primitives; il faut y ajouter $m - n$ équations que l'on obtient en multipliant la deuxième par x^{m-n-1} , $x^{m-n-2}y$, ..., et l'on peut alors éliminer les m quantités x^{m-1} , $x^{m-2}y$, ... entre les m équations ainsi obtenues. Chaque ligne du déterminant contient les coefficients de la seconde équation, mais il n'y en a que n qui contiennent ceux de la première. Le résultat est donc, comme cela devait être, du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport aux coefficients de la première équation, et du $m^{\text{ième}}$ par rapport à ceux de la deuxième.

68. *Méthode de Bezout modifiée par M. Cayley.* — Si deux équations $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ont une racine commune, il est possible de satisfaire à l'équation $\varphi + \lambda\psi = 0$, quelle que soit la valeur de λ . Prenons donc l'équation

$$\varphi(x, y)\psi(x', y') - \varphi(x', y')\psi(x, y) = 0,$$

qui, dans l'hypothèse où φ et ψ ont un facteur commun, peut être satisfaite indépendamment de toute valeur particulière de x' , y' : nous pouvons, en premier lieu, diviser par $xy' - yx'$ qui est évidemment un facteur, puis égaler à zéro les coefficients des puissances de x' et y' ; enfin éliminer les puissances de x et y comme si elles étaient des variables indépendantes, et le résultat se présente sous la même forme que par la méthode du n° 65.

EXEMPLE. — Éliminer x et y entre les équations

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

L'expression

$$\begin{aligned} & (ax^2 + bxy + cy^2)(a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2) \\ & - (a'x^2 + b'xy + c'y^2)(ax'^2 + b'x'y' + c'y'^2), \end{aligned}$$

divisée par $xy' - yx'$, donne

$$[(ab')x + (ac')y]x' + [(ac')x + (bc')y]y' = 0;$$

égalant à zéro les coefficients de x' et y' et éliminant x et y , nous avons

$$(ac')^2 + (ba')(bc') = 0.$$

69. Arrivons maintenant à la théorie des fonctions de trois variables dont le résultant, sauf dans quelques cas particuliers, n'a pas encore été exprimé sous forme de déterminant, bien qu'il puisse toujours l'être comme quotient d'un déterminant par un autre.

Nous allons d'abord montrer comment on forme une fonction qui a une grande importance dans la théorie de l'élimination. Étant données k équations à k variables $u = 0$, $v = 0$, $w = 0, \dots$, désignons par $u_1, u_2, u_3, \dots$ les dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & . & . \\ v_1 & v_2 & v_3 & . & . \\ w_1 & w_2 & w_3 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

sera désigné, dans ce qui va suivre, par la lettre J (*).

70. Si plusieurs équations sont satisfaites par un même système de valeurs, J le sera aussi, et il en sera encore de même de ses dérivées par rapport à chacune des variables, lorsque les équations seront du même degré.

La démonstration pour le cas de trois variables sera générale. Nous avons, d'après la théorie des fonctions homogènes,

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = nu,$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = nv,$$

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 = nw.$$

Désignons maintenant, comme dans la quatrième Leçon, par $U, V, \dots$ les déterminants mineurs que l'on obtiendrait en supprimant la ligne et la colonne qui contiennent $u, v, \dots$; nous aurons, en résolvant ces équations (28),

$$Jx = U_1nu + V_1nv + W_1nw,$$

(*) Ce déterminant, employé par Jacobi, est quelquefois désigné sous le nom de *Jacobien* des équations données.

d'où l'on voit immédiatement que, si $u, v, w, \dots$ s'annulent, il en est de même de J . Différentiant cette dernière équation, il vient

$$J + x \frac{dJ}{dx} = nu \frac{dU_1}{dx} + nv \frac{dV_1}{dx} + nw \frac{dW_1}{dx} + n(u_1 U_1 + v_1 V_1 + w_1 W_1),$$

$$x \frac{dJ}{dy} = nu \frac{dU_1}{dy} + nv \frac{dV_1}{dy} + nw \frac{dW_1}{dy} + n(u_2 U_1 + v_2 V_1 + w_2 W_1),$$

mais, en se rappelant (27) que

$$u_1 U_1 + v_1 V_1 + w_1 W_1 = J, \quad u_2 U_1 + v_2 V_1 + w_2 W_1 = 0,$$

nous voyons que, si $u, v, w, \dots$, et par suite J s'annulent, il en est de même de $\frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \dots$

71. Nous pouvons maintenant exprimer, sous forme de déterminant, le résultant de trois équations du deuxième degré, car J est du troisième degré, et, par suite, ses dérivées sont du deuxième. Nous avons ainsi trois nouvelles équations du deuxième degré qui seront satisfaites par un système quelconque de valeurs commun aux équations données.

Des six équations $u, v, w, \frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \frac{dJ}{dz}$, nous pouvons donc éliminer les six quantités $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$, et former ainsi le déterminant demandé.

Si les équations sont toutes trois du troisième degré, J est du sixième et ses dérivées du cinquième. Et si nous multiplions chacune des trois équations données par $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$, nous avons dix-huit équations qui, combinées avec les trois dérivées de J , nous permettent d'éliminer par la méthode de M. Sylvester les vingt et une quantités $x^5, x^4 y, \dots$ qui entrent dans une équation du cinquième degré. Ce procédé cependant ne peut pas être poussé plus loin sans modification.



HUITIÈME LEÇON.

DISCRIMINANTS.

72. Avant de nous occuper des discriminants, nous allons faire connaître quelques termes et quelques symboles nouveaux qui seront souvent employés plus loin. Dans l'Algèbre ordinaire, on ne s'occupe que d'équations, le but que l'on se propose habituellement étant de trouver les valeurs de x qui rendent une fonction donnée égale à zéro. Dans ce qui va suivre, au contraire, nous n'aurons que rarement à traiter des équations, le sujet de recherches le plus fréquent étant celui dans lequel nous allons entrer dans la Leçon suivante, savoir : la découverte des propriétés d'une fonction qui ne s'altèrent pas par des transformations linéaires. Il convient donc d'avoir un terme spécial pour désigner la fonction elle-même, sans être obligé de parler de l'équation que l'on obtiendrait en l'égalant à zéro : un terme, par exemple, pour désigner

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

sans avoir à parler de l'équation du deuxième degré

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Nous nommerons *forme* (*), en général, une fonction homogène qui pourra être du deuxième, du troisième, du quatrième, ... degré. Nous distinguerons les formes en *binaires*, *ternaires*, *quaternaires*, etc., suivant qu'elles contiennent deux, trois, quatre, etc., variables. Ainsi, par forme cubique

(*) M. Cayley donne aux fonctions homogènes en général le nom de *quantic*, désignant par les mots de *quadric*, *cubic*, *quartic*, *quintic*, etc., les formes des deuxième, troisième, quatrième, cinquième, etc., degrés.

binaire, nous entendrons une fonction telle que

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3;$$

par forme quadratique ternaire, une fonction telle que

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

M. Cayley emploie l'abréviation $(a, b, c, d)x, y)^3$ pour désigner la forme

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

dans laquelle, ainsi qu'il est généralement plus convenable de le faire, les termes sont affectés des mêmes coefficients numériques que dans le développement de $(x + y)^3$. La forme quadratique ternaire ci-dessus s'écrirait, suivant cette notation, $(a, b, c, f, g, h)x, y, z)^2$. Quand les termes ne sont pas affectés de ces coefficients numériques, M. Cayley ajoute une flèche à la parenthèse, écrivant par exemple $(a, b, c, d)^{\rightarrow}x, y)^3$ pour

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Enfin, quand il n'est pas nécessaire de désigner les coefficients, la forme du $n^{\text{ième}}$ degré s'écrit $(x, y)^n$, $(x, y, z)^n$.

73. Si l'on différentie une forme à k variables par rapport à chacune de ces variables, le résultant de ces k dérivées se nomme le *discriminant* de la forme donnée.

Si la forme est du degré n , le discriminant est une fonction homogène des coefficients du degré $k(n-1)^{k-1}$; en effet, le discriminant est le résultant de k équations du degré $n-1$ et (55) doit contenir les coefficients de chacune de ces équations à un degré égal au produit de tous les autres degrés, savoir $(n-1)^{k-1}$. Ces équations, contenant toutes les coefficients de la forme primitive au premier degré, le discriminant les contiendra au degré $k(n-1)^{k-1}$. Le discriminant d'une forme binaire sera donc du degré $2(n-1)$, celui d'une forme ternaire du degré $3(n-1)^2$, etc.

74. Si, dans la forme primitive, on donne aux coefficients multipliant la première puissance d'une variable x l'indice 1, à ceux qui multiplient la deuxième puissance l'indice 2, et

ainsi de suite, la somme des indices dans chaque terme du discriminant sera constante et égale à $n(n-1)^{k-1}$. Il a été démontré (§5) que, si chaque coefficient dans un système d'équations est affecté d'un indice correspondant à la puissance de x qu'il multiplie, la somme des indices dans chaque terme du résultant est égale au produit $mnp\dots$ des degrés des équations. Supposons maintenant que, dans la première de ces équations, l'indice de x^0 au lieu d'être 0 soit l ; que celui de x^1 soit $l+1$, et ainsi de suite, il est évident que cette modification aura pour effet d'augmenter la somme des indices d'autant de fois l qu'il se trouve de coefficients de la première équation dans chaque terme du résultant, et, puisque (§5) chaque terme en contient $np\dots$, la somme totale des indices deviendra

$$mnp\dots + lnp\dots = (m+l)np\dots$$

Maintenant, dans l'exemple qui nous occupe, il est évident que chaque coefficient des $k-1$ dérivées $U_2, U_3, \dots$ (*) multiplie la même puissance de x que dans la forme primitive U ; mais, dans la dérivée U_1 , chaque coefficient multiplie une puissance de x moindre d'une unité que dans U , et le coefficient multipliant un terme x^l dans cette dérivée doit être affecté de l'indice $l+1$, puisqu'il provient d'un terme x^{l+1} dans la forme primitive. Il suit de là que la somme des indices du discriminant doit être

$$(n-1)^k + (n-1)^{k-1} \quad \text{ou} \quad n(n-1)^{k-1}.$$

Nous exprimerons sommairement les résultats obtenus dans les deux numéros précédents, en disant que l'ordre du discriminant est $k(n-1)^{k-1}$ et son poids $n(n-1)^{k-1}$. Ainsi, pour une forme binaire, le poids du discriminant est $n(n-1)$.

75. Si une forme binaire contient un facteur carré, le discriminant se réduit, comme l'on sait, à zéro, car les deux dérivées contiennent chacune ce facteur au premier degré, et dès lors, puisqu'elles ont un facteur commun, leur résultant est

(*) Nous désignons comme plus haut par $U_1, U_2, U_3, \dots$ les dérivées de U par rapport à $x, y, z, \dots$

nul. De même, si une forme ternaire peut se décomposer ainsi

$$X^2\phi + XY\psi + Y^2\chi,$$

X étant égal à $ax + by + cz$, Y à $a'x + b'y + c'z$, le discriminant doit aussi se réduire à zéro, puisque chaque terme des dérivées contient comme facteur X ou Y et que, dès lors, ces dérivées ont en commun les racines des équations

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Il en est encore de même du discriminant d'une forme quaternaire si cette forme peut être exprimée comme une fonction du deuxième degré de trois fonctions linéaires X, Y, Z des variables (*). Nous appellerons racines *singulières* de la forme ces valeurs qui rendent les dérivées égales à zéro.

76. Nous allons maintenant examiner les propriétés du discriminant d'une forme binaire

$$U = a_0 x^n + na_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

Le résultant de U et de U_1 est égal au discriminant multiplié par a_0 , et celui de U et de U_2 est égal au discriminant multiplié par a_n (**). En effet, puisque

$$nU = xU_1 + yU_2,$$

le résultat de la substitution d'une racine de U_1 dans nU est $y'U'_2$; en multipliant les résultats de toutes les substitutions semblables, le produit sera $y' y'' y''' \dots$, soit a_0 (38) multiplié par les résultats que l'on obtient en substituant ces mêmes racines dans U_2 , et ce produit n'est autre que le discriminant.

(*) En d'autres termes, la réduction à zéro du discriminant d'une équation algébrique exprime la condition nécessaire pour que cette équation ait des racines égales, et la réduction à zéro du discriminant de l'équation d'une courbe ou d'une surface exprime la condition nécessaire pour que cette courbe ou cette surface ait un point double.

(**) Nous faisons abstraction des facteurs purement numériques.

77. Exprimer le discriminant au moyen des valeurs $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ qui rendent la forme égale à zéro.

Soit

$$U = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3) \dots (38);$$

on a

$$U_1 = y_1(xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3) \dots \\ + y_2(xy_1 - yx_1)(xy_3 - yx_3) \dots + \dots;$$

le résultat de la substitution d'une racine x_1, y_1 de U dans U_1 est

$$y_1(x_1y_2 - y_1x_2)(x_1y_3 - y_1x_3) \dots;$$

le résultat de la substitution de x_2, y_2 est, de même,

$$y_2(x_2y_1 - y_2x_1)(x_2y_3 - y_2x_3) \dots;$$

si donc on multiplie tous ces résultats, le produit est

$$\pm y_1y_2y_3 \dots (x_1y_2 - y_1x_2)^2 (x_1y_3 - y_1x_3)^2 (x_2y_3 - y_2x_3)^2 \dots$$

C'est le résultant de U et U_1 , et si nous le divisons par a_0 qui est égal à $y_1y_2y_3 \dots$, nous aurons, pour la valeur du discriminant,

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 (x_1y_3 - y_1x_3)^2 \dots$$

Si nous supposons tous les y égaux à l'unité, nous obtenons le théorème sous la forme bien connue : *Le discriminant est égal au produit des carrés des différences des racines de l'équation.* Pour plus de simplicité, nous conserverons le théorème sous cette dernière forme.

78. Le discriminant du produit de deux fonctions est égal au produit de leurs discriminants multiplié par le carré de leur résultant. Car le produit des carrés des différences de toutes les racines se compose évidemment du produit des carrés des différences des racines appartenant toutes deux à une même équation, multiplié par le carré du produit de toutes les différences entre une racine de l'une et une racine de l'autre, et ce dernier produit est le résultant (45). Comme cas particulier, le discriminant de $(x - \alpha)\varphi(x)$ est égal à celui de $\varphi(x)$ multiplié par le carré de $\varphi(\alpha)$. Car si $\beta, \gamma, \dots$ sont les

racines de $\varphi(x)$, $(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2 \dots$ est égal au carré de $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \dots$ qui n'est autre que $\varphi(\alpha)$ multiplié par le produit des carrés des différences qui ne contiennent pas α .

79. Le discriminant de la fonction

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)(x, y)^n$$

est de la forme

$$a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi,$$

ψ étant le discriminant de la fonction de degré $n - 1$,

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})(x, y)^{n-1}.$$

Car nous devons évidemment obtenir le même résultat, soit en supposant $a_n = 0$ dans le discriminant, soit en faisant $a_n = 0$ dans la forme elle-même et calculant ensuite le discriminant. Mais si nous faisons $a_n = 0$ dans la forme, elle se réduit à la forme de degré $n - 1$ écrite plus haut, multipliée par x , et (78) son discriminant est égal à celui de cette dernière multiplié par le carré du résultat que l'on obtient en y faisant $x = 0$, c'est-à-dire par a_{n-1}^2 . Nous voyons de même que le discriminant est de la forme $a_0 \varphi + a_1^2 \psi$ (*).

80. Le discriminant étant une fonction des déterminants $x_1 y_2 - x_2 y_1, \dots$, doit satisfaire aux deux équations différentielles du n° 37

$$n a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + (n - 1) a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + (n - 2) a_2 \frac{d\Delta}{da_3} + \dots = 0,$$

$$a_1 \frac{d\Delta}{da_0} + 2 a_2 \frac{d\Delta}{da_1} + 3 a_3 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots = 0,$$

ou bien, comme au n° 39, si les équations primitives ont été

(*) Ce théorème a été donné pour la première fois par Joachimsthal. M. Salmon avait cependant été conduit antérieurement par de simples considérations géométriques au théorème suivant dans lequel il est renfermé : Si a_1 contient un facteur z et que a_0 contienne le facteur z^2 , le discriminant sera divisible par z^2 . Si a_2 contient z comme facteur, que a_1 contienne z^2 , et a_0 , z^3 , le discriminant sera en général divisible par z^6 . Et ainsi de suite, si a_3 contient z ; a_2 , z^2 ; a_1 , z^3 et a_0 , z^4 , le discriminant sera divisible par z^{12} , etc.

écrites avec les coefficients du binôme,

$$na_1 \frac{d\Delta}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d\Delta}{da_1} + \dots = 0,$$

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + 2a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots = 0.$$

EXEMPLE. — Former le discriminant de la fonction $(a_0, a_1, a_2, \dots, x, y)^n$ que nous supposons ordonnée suivant les puissances de a_0 .

Nous savons (79) que le terme indépendant de a_0 est $a_1^2 D$, D étant le discriminant de la fonction de degré $n-1$, $(a_1, a_2, \dots, x, y)^{n-1}$. Le discriminant que nous cherchons est donc de la forme

$$a_1^2 D + a_0 \varphi + a_0^2 \psi + \dots$$

Effectuant sur lui l'opération

$$a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + 3a_3 \frac{d}{da_2} + \dots,$$

nous pourrions évaluer à zéro le coefficient de chaque puissance de a_0 . Les termes indépendants de a_0 sont

$$a_1 \varphi + 4a_1 a_2 D + a_1^2 \left(2a_2 \frac{d}{da_1} + 3a_3 \frac{d}{da_2} + \dots \right) D,$$

ou, en remarquant que $\left(a_2 \frac{d}{da_1} + 2a_3 \frac{d}{da_2} + \dots \right) D = 0$,

$$\varphi = -4a_2 D + a_1 \left(a_3 \frac{d}{da_2} + 2a_4 \frac{d}{da_3} + \dots \right) D,$$

et l'on a pour la valeur du discriminant

$$(a_1^2 - 4a_0 a_2) D + a_1 a_0 \left(a_3 \frac{d}{da_2} + 2a_4 \frac{d}{da_3} + \dots \right) D + a_0^2 \psi + \dots$$

On peut de même déterminer ψ à l'aide du coefficient de a_1 ; mais le résultat n'est pas assez simple pour qu'il y ait lieu de le donner ici.

81. Si le discriminant d'une forme binaire se réduit à zéro, cette forme a des racines égales, et les valeurs de ces racines peuvent être obtenues par un procédé analogue à celui que nous avons employé dans la sixième Leçon. Soit

$$U = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

une forme dont le discriminant est nul et qui admet par con-

séquent un facteur carré $(x - \alpha)^2$. La fonction

$$V = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots$$

sera aussi divisible par $x - \alpha$ pourvu que $A_0, A_1, A_2, \dots$ satisfassent à la condition

$$A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \dots = 0.$$

Et dans ce cas $U + \lambda V$ sera divisible par $x - \alpha$. Soit donc

$$U + \lambda V = (x - \alpha) [\phi(x) + \lambda \psi(x)].$$

Il résulte du n° 78 que le discriminant de $U + \lambda V$ est égal au discriminant de la fonction entre parenthèses multiplié par le carré du résultat que l'on obtient en substituant α à la place de x dans cette même fonction. Ce résultat n'est autre que $\lambda \psi(\alpha)$. Le discriminant de $U + \lambda V$ est donc divisible, dans ce cas, par λ^2 . Mais, puisque $U + \lambda V$ se déduit de U en changeant a_0 en $a_0 + \lambda A_0, \dots$, le discriminant de $U + \lambda V$ doit se déduire de celui de U par la même substitution, et, par suite, est

$$\Delta + \lambda \left(A_0 \frac{d\Delta}{da_0} + A_1 \frac{d\Delta}{da_1} + A_2 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots \right) + \lambda^2 (\dots).$$

Par hypothèse $\Delta = 0$: il faut encore, pour que le discriminant soit divisible par λ^2 , que le coefficient de λ disparaisse. La relation ainsi obtenue entre $A_0, A_1, \dots$ doit être identique avec la relation $A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \dots = 0$, qui est, comme nous l'avons déjà vu, la seule condition à laquelle doivent satisfaire $A_0, A_1, \dots$ pour que le discriminant de $U + \lambda V$ soit divisible par λ^2 . Les quantités $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots$ sont donc proportionnelles à $\frac{d\Delta}{da_0}, \frac{d\Delta}{da_1}, \frac{d\Delta}{da_2}, \dots$: divisant l'une de ces dernières par celle qui la suit, nous aurons la valeur de α , et nous pouvons poser le théorème suivant : *Quand le discriminant se réduit à zéro, ses dérivées par rapport à $a_0, a_1, \dots$ sont proportionnelles aux dérivées de la forme par rapport à ces mêmes coefficients.*

82. Ce résultat se démontre également en formant les

valeurs de $\frac{d\Delta}{da_1}, \dots$ en fonction des racines, ce que l'on peut faire en résolvant les n équations

$$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{d\Delta}{da_1} \frac{da_1}{dz} + \frac{d\Delta}{da_2} \frac{da_2}{dz} + \dots.$$

Nous connaissons les expressions de $\Delta, a_1, a_2, \dots$ en fonction des racines (42, 77); nous pouvons donc tirer de ces n équations les n quantités $\frac{d\Delta}{da_1}, \dots$, et il vient

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{da_n} = & \Sigma (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \beta)^2 \dots, \\ & \times [(z - \beta)(z - \gamma) \dots, + (z - \beta)(z - \delta) \dots, + \dots,], \end{aligned}$$

expression dans laquelle le produit des carrés des différences qui ne renferment pas z est multiplié par la somme des produits $n - 2$ à $n - 2$ des différences qui contiennent z ,

$$\frac{d\Delta}{da_{n-1}} = \Sigma \alpha (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \beta)^2 \dots, [(\alpha - \beta)(z - \gamma) \dots],$$

$$\frac{d\Delta}{da_{n-2}} = \Sigma \alpha^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \beta)^2 \dots, [(\alpha - \beta)(z - \gamma) \dots].$$

En supposant $\alpha = \beta$, ces expressions deviennent proportionnelles aux facteurs $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$, et, comme au n° 56, on voit que, d'après le théorème du numéro précédent,

$$\frac{d\Delta}{da_p} \frac{d\Delta}{da_q} = \frac{d\Delta}{da_r} \frac{d\Delta}{da_s}$$

est divisible par Δ lorsque $p + q = r + s$. S'il y a plus de deux racines égales, toutes ces dérivées disparaissent, et nous aurons les racines égales en considérant les dérivées secondes du discriminant.

83. La démonstration suivante du théorème du n° 81 s'applique au cas d'une forme à un nombre quelconque de variables. Pour plus de simplicité, nous nous bornerons au cas de deux variables indépendantes, la méthode étant générale. Supposons que les coefficients de U soient des fonctions de

certaines quantités $a, b, \dots$, et que l'on fasse varier ces quantités de manière que le discriminant soit encore nul, ce qui donne la condition

$$\frac{d\Delta}{da} \partial a + \frac{d\Delta}{db} \partial b + \dots = 0.$$

Si le changement effectué sur $a, b, \dots$ a pour effet de changer x en $x + \partial x$, y en $y + \partial y, \dots$, les nouvelles valeurs des racines devant également rendre nulles les dérivées U_1, U_2, U_3 , nous avons

$$\frac{dU_1}{da} \partial a + \frac{dU_1}{db} \partial b + \dots + \frac{dU_1}{dx} \partial x + \frac{dU_1}{dy} \partial y + \dots = 0,$$

$$\frac{dU_2}{da} \partial a + \frac{dU_2}{db} \partial b + \dots + \frac{dU_2}{dx} \partial x + \frac{dU_2}{dy} \partial y + \dots = 0,$$

$$\frac{dU_3}{da} \partial a + \frac{dU_3}{db} \partial b + \dots + \frac{dU_3}{dx} \partial x + \frac{dU_3}{dy} \partial y + \dots = 0.$$

Multiplions ces équations par x, y, z et ajoutons ; puisque l'on a $nU = xU_1 + yU_2 + zU_3$, le coefficient de ∂a se réduit à $n \frac{dU}{da}$, et, puisque $\frac{dU_2}{dx} = \frac{dU_1}{dy}$, $\frac{dU_3}{dx} = \frac{dU_1}{dz}$, le coefficient de ∂x sera $(n-1)U_1$ qui disparaît, U_1 admettant les racines singulières. Il en est de même pour les autres coefficients ; on a donc

$$\frac{dU}{da} \partial a + \frac{dU}{db} \partial b + \dots = 0,$$

et les dérivées de Δ par rapport à $a, b, \dots$ sont proportionnelles aux dérivées de U par rapport à ces mêmes quantités, en admettant que les lettres x, y, z , dans ces dernières, indiquent les racines singulières.

84. Le théorème démontré pour les formes binaires (79) peut s'étendre à toutes les formes. Soit a le coefficient de la plus haute puissance de l'une des variables, $b, c, d, \dots$ ceux des termes où figure la puissance immédiatement inférieure ; le discriminant sera

$$a\theta + (\varphi, \psi, \chi, \dots)(b, c, d, \dots)^2.$$

Ainsi, dans le cas d'une forme ternaire, auquel nous nous bornerons pour plus de simplicité, si a est le coefficient de z^n , b , c ceux de $z^{n-1}x$, $z^{n-1}y$, et si nous faisons $a = 0$ dans le discriminant, le reste de son expression sera de la forme

$$b^2\varphi + bc\psi + c^2\gamma.$$

Pour le démontrer, soit U une forme dont le discriminant est nul, V une autre fonction qui admette les racines singulières de U , le discriminant de $U + \lambda V$ sera divisible par λ^2 . Soient, en effet,

$$U = az^n + bz^{n-1}x + \dots, \quad V = Az^n + Bz^{n-1}x + \dots,$$

le coefficient de λ dans le discriminant de $U + \lambda V$ sera

$$A \frac{d\Delta}{da} + B \frac{d\Delta}{db} + \dots,$$

et, d'après le n° 83, $\frac{d\Delta}{da}, \frac{d\Delta}{db}, \dots$ seront proportionnels à $z^n, z^{n-1}x, \dots$. Le coefficient de λ est donc proportionnel au résultat de la substitution des racines singulières dans V , et, par suite, nul.

Maintenant, dans le cas qui nous occupe, le discriminant doit être nul si a , b et c sont nuls, puisqu'alors toutes les dérivées s'annulent pour les racines singulières $x = 0$, $y = 0$. Toute autre forme V s'annulera pour les mêmes valeurs, pourvu que l'on ait seulement $A = 0$. La forme générale du discriminant doit donc être telle que, si nous remplaçons b par $b + \lambda B$, c par $c + \lambda C$, $\dots$, et si nous faisons ensuite

$$a = b = c = 0,$$

le résultat soit divisible par λ^2 ; en d'autres termes, si nous remplaçons b par λB , c par λC et a par zéro, le résultat sera divisible par λ^2 , ce qu'il fallait prouver.

85. Il ne nous reste plus, relativement aux discriminants en général, qu'à faire voir que celui d'une forme quadratique à un nombre quelconque de variables s'exprime immédiate-

ment sous forme d'un déterminant symétrique. Et réciproquement, étant donné un déterminant symétrique quelconque, on peut poser une forme quadratique dont il soit le discriminant. La notation la plus simple pour une forme quadratique consiste à employer de doubles indices, en désignant par a_{11} , a_{22} , a_{33} , . . . les coefficients des carrés x^2 , y^2 , z^2 , . . ., et par a_{12} , a_{13} , . . . ceux des produits xy , xz , . . ., a_{12} et a_{21} étant censés équivalents dans ce système de notation. Le discriminant est évidemment le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$



NEUVIÈME LEÇON.

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

86. *Invariants.* — Le discriminant d'une forme binaire, étant une fonction des différences des racines, ne varie évidemment pas lorsqu'on les augmente ou diminue toutes d'une même quantité. La substitution de $x + \lambda$ à x n'est qu'un cas particulier de la *transformation linéaire* générale, qui consiste à remplacer, dans une fonction homogène, chaque variable par une fonction linéaire de nouvelles variables, à remplacer, par exemple, dans une forme binaire, x par $\lambda x + \mu y$ et y par $\lambda' x + \mu' y$. Pour éclaircir les considérations dans lesquelles nous devons entrer, nous allons d'abord examiner quel est l'effet d'une semblable substitution sur le discriminant d'une forme quadratique à deux variables

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

En transformant les variables, elle devient

$$a(\lambda x + \mu y)^2 + 2b(\lambda x + \mu y)(\lambda' x + \mu' y) + c(\lambda' x + \mu' y)^2,$$

et si l'on désigne la fonction transformée par

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

on a

$$a' = a\lambda^2 + 2b\lambda\lambda' + c\lambda'^2,$$

$$b' = a\lambda\mu + b(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + c\mu\mu',$$

$$c' = a\mu^2 + 2b\mu\mu' + c\mu'^2,$$

et l'on vérifie sans peine que

$$(a'c' - b'^2) = (ac - b^2)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2,$$

c'est-à-dire que le discriminant de la transformée est égal à celui de la forme primitive multiplié par le carré du déterminant $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$, que l'on appelle le *module de la transformation*.

87. Il existe un théorème analogue pour le discriminant d'une forme binaire quelconque. On peut voir *à priori* qu'il doit en être ainsi, car si une forme donnée admet un facteur carré, sa transformée admettra également un facteur carré, de telle sorte que, si le discriminant d'une forme donnée est nul, celui de sa transformée est également nul. Ce dernier contient donc le premier comme facteur. Le théorème peut se démontrer régulièrement ainsi qu'il suit. Soit

$$(xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \dots$$

la forme primitive, son discriminant (77) est

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2 \dots$$

Le facteur linéaire $xy_1 - yx_1$ de la forme primitive devient, par la transformation,

$$y_1(\lambda X + \mu Y) - x_1(\lambda' X + \mu' Y),$$

et si nous le mettons sous la forme $Y_1X - X_1Y$, nous avons

$$Y_1 = \lambda y_1 - \lambda' x_1, \quad X_1 = \mu y_1 + \mu' x_1;$$

par conséquent, si l'on écrit la transformée comme produit des facteurs linéaires $(Y_1X - X_1Y)(Y_2X - X_2Y) \dots$, on aura des expressions analogues pour $Y_1, X_1; Y_2, X_2, \dots$ en fonction de $y_1, x_1; y_2, x_2, \dots$. Nous pouvons, sans difficulté, reconnaître que l'on a

$$(Y_1X_2 - X_1Y_2) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)(y_1x_2 - x_1y_2),$$

et, par suite, que $(Y_1X_2 - X_1Y_2)^2(Y_1X_3 - X_1Y_3)^2 \dots$ est égal à $(y_1x_2 - x_1y_2)^2(y_1x_3 - x_1y_3)^2 \dots$ multiplié par une puissance de $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ égale au nombre des facteurs contenus dans

l'expression du discriminant en fonction des racines. Un théorème analogue est vrai pour le discriminant d'une forme à un nombre quelconque de variables.

La publication, dans le *Journal de Mathématiques* de Cambridge (nov. 1841), d'un Mémoire où M. Boole établissait les principes ci-dessus et en faisait quelques applications importantes a été en quelque sorte le point de départ d'une algèbre nouvelle. Quelque temps après, M. Cayley se proposa de déterminer *à priori* quelles sont les fonctions des coefficients d'une équation donnée qui jouissent de cette propriété d'*invariance*; propriété consistant en ce que, si l'on transforme l'équation par une substitution linéaire, la fonction analogue des coefficients de la transformée soit égale à la fonction primitive multipliée par une quantité indépendante des coefficients. Le résultat de ses recherches fut de découvrir que cette propriété n'est pas particulière aux discriminants, et de faire connaître d'autres fonctions importantes qui la possèdent également, quelques-unes d'entre elles contenant non-seulement les coefficients, mais les variables elles-mêmes, et conservant avec l'équation primitive des relations qu'une substitution linéaire ne modifie pas. En exposant cette théorie, pour plus de brièveté nous n'écrirons que trois variables, mais le lecteur doit entendre que les mêmes procédés s'appliquent à un nombre quelconque de variables.

88. Supposons donc que les variables d'une fonction homogène quelconque à k variables soient transformées par les substitutions

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + \dots,$$

$$y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z + \dots,$$

$$z = \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z + \dots,$$

et désignons par Δ le *module de la transformation*, c'est-à-dire le déterminant qui a pour éléments les coefficients de la transformation $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \dots$.

Il est évident que l'on ne peut pas, en général, déterminer les coefficients $\lambda_1, \mu_1, \dots$ de telle sorte qu'une fonction donnée

$ax^n + \dots$ prenne, par la transformation, une autre forme également donnée $a'X^n + \dots$. En effet, si nous effectuons la substitution dans $ax^n + \dots$, et si nous égalons les coefficients ainsi obtenus à ceux de $a'X^n + \dots$, nous aurons, comme au n° 86, une série d'équations $a' = a\lambda_1^n + \dots$ dont le nombre sera égal à celui des termes que renferme une fonction générale du $n^{\text{ième}}$ degré à k variables. Mais, pour satisfaire à ces équations, nous ne disposons que de k^2 constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, et ce nombre sera, en général, inférieur à celui des équations auxquelles il s'agit de satisfaire (*). Il suit de là que, si une fonction $ax^n + \dots$ peut être transformée en une autre fonction $a'X^n + \dots$, il doit exister des relations entre les coefficients $a, b, \dots, a', b', \dots$. En effet, nous n'avons qu'à éliminer les k^2 constantes inconnues entre les équations $a' = a\lambda_1^n + \dots$, et nous aurons une série de relations entre $a, a', \dots$ dont le nombre sera évidemment égal à la différence qui existe entre celui des équations et k^2 . Ainsi, dans le cas d'une forme binaire, le nombre des termes d'une fonction homogène de degré n est $n + 1$. Donc, si dans une forme $ax^n + \dots$ nous remplaçons x par $\lambda_1 X + \mu_1 Y$, y par $\lambda_2 X + \mu_2 Y$, et si nous égalons les coefficients de la transformée à ceux de $a'X^n + \dots$, nous aurons $n + 1$ équations renfermant $a, a', \dots, \lambda_1, \mu_1, \dots$, et en éliminant les quatre quantités $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, nous obtiendrons un système de conditions équivalent à $n - 3$ relations indépendantes entre $a, b, \dots, a', b', \dots$. On verra par la suite que ces

(*) Le nombre des termes de la forme générale du $n^{\text{ième}}$ degré à k variables est $\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{1.2.3\dots(k-1)}$, et il est facile de voir que les seuls cas dans lesquels ce nombre ne surpasse pas k^2 sont : 1° quand $n = 2$ (dans ce cas, il se réduit à $\frac{1}{2}k(k+1)$, valeur plus petite que k^2 , k étant entier); 2° quand $k = 2, n = 3$, (les deux nombres ont alors la même valeur 4), c'est-à-dire que les seuls cas dans lesquels une fonction donnée soit susceptible de prendre par la transformation une forme quelconque, sont : 1° celui d'une forme quadratique à un nombre quelconque de variables, 2° celui d'une forme cubique à deux variables.

relations peuvent s'écrire ainsi :

$$\varphi(a, b, \dots) = \varphi(a', b', \dots);$$

en d'autres termes, qu'il y a des fonctions des coefficients $a, b, \dots$ qui conservent la même valeur en passant de la forme primitive à sa transformée. Le procédé que nous venons d'indiquer n'est pas celui que nous emploierons pour trouver ces fonctions, mais il fait comprendre *à priori* leur existence, et montre combien l'on doit s'attendre à en trouver qui soient indépendantes les unes des autres.

89. On appelle *invariant* toute fonction des coefficients d'une forme telle que, si on effectue dans la forme une substitution linéaire, la fonction semblable des coefficients de la transformée soit égale à la fonction primitive multipliée par une puissance du module de la transformation, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(a', b', c', \dots) = \Delta^p \varphi(a, b, c, \dots).$$

Lorsque $p = 0$, la fonction est un *invariant absolu*, c'est-à-dire qu'elle n'est pas modifiée par la transformation, lors même que Δ serait différent de l'unité. Si une forme a deux invariants ordinaires, il est aisé d'en déduire un invariant absolu. En effet, si nous avons un invariant φ qui, dans la transformation, se trouve multiplié par Δ^p , et un autre invariant ψ qui se trouve de même multiplié par Δ^q , il est évident que le quotient de φ^q par ψ^p sera une fonction qui restera invariable malgré la transformation.

Il résulte de ce qui précède qu'une forme binaire quadratique ou cubique n'a d'autre invariant que son discriminant (87). S'il y en avait, en effet, un second, on pourrait déduire de la combinaison des deux invariants une relation

$$\varphi(a, b, \dots) = \varphi(a', b', \dots).$$

Mais nous avons vu (88) qu'il ne saurait y avoir d'équation de condition entre $a, b, \dots, a', b', \dots$, puisqu'à l'aide des quatre constantes $\lambda, \dots$ dont nous disposons, nous pouvons trans-

former une fonction quadratique ou cubique de telle sorte que les coefficients prennent telles valeurs que l'on voudra. On voit, de la même manière, qu'une forme quadratique à un nombre quelconque de variables n'a d'autre invariant que son discriminant.

90. De même qu'une forme unique, un système de formes peut avoir des invariants. Supposons un certain nombre de fonctions $ax'' + \dots, a'x'' + \dots$. Si l'on effectue dans toutes ces fonctions une même substitution linéaire, elles deviennent $AX'' + \dots, A'X'' + \dots$: une fonction des coefficients sera un invariant si la fonction semblable, composée avec les nouveaux coefficients, est égale à la fonction primitive multipliée par une puissance du module de la transformation, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi(A, B, \dots, A', B', \dots, A'', B'', \dots) \\ = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, a', b', \dots, a'', b'', \dots).$$

L'exemple le plus simple d'invariants de cette espèce se rencontre dans le cas d'un système d'équations linéaires : le déterminant d'un pareil système est un invariant; on le voit immédiatement en se reportant à la définition de l'invariant et à la démonstration du théorème sur la multiplication des déterminants (23).

Si l'on a un invariant d'une forme unique, on peut en déduire une série d'invariants pour des systèmes de formes du même degré. Pour faire comprendre l'esprit de la méthode, nous l'appliquerons d'abord à un exemple très-simple. Nous avons vu (86) que $ac - b^2$ est un invariant de la forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$, et nous allons en déduire un invariant pour un système de deux formes semblables. Supposons que, par une transformation linéaire, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ devienne $AX^2 + 2BXY + CY^2$, et que $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ devienne de même $A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$, évidemment, par la même transformation, la forme

$$(a + ha')x^2 + 2(b + hb')xy + (c + hc')y^2$$

(k étant une constante quelconque) deviendra

$$(\mathbf{A} + k\mathbf{A}')\mathbf{X}^2 + 2(\mathbf{B} + k\mathbf{B}')\mathbf{XY} + (\mathbf{C} + k\mathbf{C}')\mathbf{Y}^2.$$

Formant l'invariant de cette dernière (86), il vient

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} + k\mathbf{A}')(\mathbf{C} + k\mathbf{C}') - (\mathbf{B} + k\mathbf{B}')^2 \\ &= \Delta^2[(a + ka')(c + kc') - (b + kb')^2]. \end{aligned}$$

Mais k étant arbitraire, les coefficients des diverses puissances de k doivent être égaux dans les deux membres, et nous avons ainsi, non-seulement les deux relations déjà connues,

$$(\mathbf{AC} - \mathbf{B}^2) = \Delta^2(ac - b^2), \quad (\mathbf{A}'\mathbf{C}' - \mathbf{B}'^2) = \Delta^2(a'c' - b'^2),$$

mais encore

$$(\mathbf{AC}' + \mathbf{A}'\mathbf{C} - 2\mathbf{BB}') = \Delta^2(ac' + a'c - 2bb'),$$

équation que l'on peut aussi vérifier à l'aide des valeurs de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ données au n° 86. La quantité $ac' + a'c - 2bb'$ est donc aussi un invariant.

En suivant absolument la même marche, si l'on a un invariant d'une forme $ax^n + \dots$ et que l'on demande d'en déduire des invariants pour un système de deux formes $ax^n + \dots, a'x^n + \dots$, nous n'aurons qu'à remplacer, dans l'invariant donné, a par $a + ka'$, b par $b + kb'$, $\dots$ et le coefficient de chaque puissance de k dans le développement sera un invariant. Effectuant ce développement par la formule de Taylor, le théorème auquel nous avons été conduits peut s'énoncer ainsi : Si l'on a un invariant d'une forme $ax^n + \dots$, et si l'on effectue sur cet invariant l'opération $a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots$, on obtiendra un invariant du système des deux formes $ax^n + \dots, a'x^n + \dots$. On peut répéter la même opération, et l'on aura un autre invariant du système, ou bien encore on peut effectuer l'opération $a'' \frac{d}{da} + b'' \frac{d}{db} + \dots$, ce qui donnera un invariant d'un système de trois formes, et ainsi de suite. Ce dernier procédé

donne les invariants que l'on obtiendrait en remplaçant a par $a + ka' + la''$ et prenant les coefficients des diverses puissances de k et l . On aura de même des invariants pour un nombre quelconque de formes.

91. Covariants. — Un covariant est une fonction comprenant non-seulement les coefficients d'une forme, mais aussi les variables; et telle que, si l'on effectue dans la forme une substitution linéaire, la nouvelle fonction des coefficients et variables de la transformée soit égale à la fonction primitive multipliée par une puissance du module de la transformation, c'est-à-dire que si l'expression $ax^n + \dots$ devient, par la transformation, $AX^n + \dots$, le covariant (*) satisfera à l'équation

$$\varphi(A, B, \dots, X, Y, \dots) = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, x, y, \dots).$$

Tout invariant d'un covariant est un invariant de la forme primitive. Cela résulte immédiatement de la définition. Soient $ax^n + \dots$ la forme donnée, $a'x^m + \dots$ son covariant, $AX^n + \dots$, $A'X^m + \dots$ ce que deviennent ces fonctions par une substitution linéaire. Un invariant du covariant est une fonction de ses coefficients, telle que

$$\varphi(A', B', \dots) = \Delta^p \varphi(a', b', \dots).$$

Mais, par définition, $A', B', \dots$ sont à une puissance près du module composés avec $A, B, \dots$; de même que $a', b', \dots$ le sont avec $a, b, \dots$. Par conséquent, si l'on exprime ces fonctions au moyen des coefficients de la forme primitive et de sa

(*) Dans la géométrie des courbes et des surfaces, toutes les transformations de coordonnées s'opèrent par des substitutions linéaires. Un invariant d'une forme ternaire ou quaternaire est donc une fonction des coefficients dont la réduction à zéro exprime quelque propriété de la courbe ou de la surface indépendante du choix des axes, telle que l'existence d'un point double; un covariant représente une autre courbe ou une autre surface, dont tous les points ont avec la courbe ou la surface donnée quelque relation indépendante du choix des axes. De là résulte l'importance géométrique de la théorie des invariants et covariants.

transformée, on a

$$\psi(A, B, \dots) = \Delta^q \psi(a, b, \dots),$$

c'est-à-dire que la fonction ψ est un invariant. De même tout covariant d'un covariant est un covariant de la forme primitive.

92. Nous allons, dans les deux paragraphes qui suivent, poser de nouveaux principes qui conduisent à une importante série de covariants.

Si, dans une forme u , nous remplaçons x par $x + kx'$, y par $y + ky'$, etc., x' , y' , z' devant être transformés par la même substitution que x , y , z , les coefficients des diverses puissances de k , qui sont tous de la forme $\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + \dots\right)^p u$, seront les premier, deuxième, troisième, etc., émanants (*) de la forme. Chacun d'eux est un covariant. Nous obtiendrons, en effet, le même résultat, soit en remplaçant x par $x + kx' \dots$ et transformant ensuite x , x' , ... par des substitutions linéaires, soit en effectuant d'abord ces substitutions et remplaçant ensuite X par $X + kX'$, ... Car on a évidemment

$$\begin{aligned} \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + k(\lambda_1 X' + \mu_1 Y' + \nu_1 Z') \\ = \lambda_1(X + kX') + \mu_1(Y + kY') + \nu_1(Z + kZ'). \end{aligned}$$

Donc, si par la transformation u devient U , on aura le même résultat soit en remplaçant dans u , x par $x + kx' \dots$ et effectuant ensuite les substitutions, soit en remplaçant dans U , X par $X + kX' \dots$, et, puisque k est indéterminé, les coefficients de k seront égaux dans les deux membres, ce qui revient à

$$x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} + \dots = X' \frac{dU}{dX} + Y' \frac{dU}{dY} + \dots$$

93. Si l'on considère un émanant comme fonction des seules variables x' , y' , ... en regardant momentanément x , y , ...

(*) En Géométrie, les émanants représentent les courbes et surfaces polaires d'un point par rapport à une courbe ou surface donnée.

comme constantes, et que l'on calcule ses invariants dans cette hypothèse, chacun d'eux, considéré comme fonction des variables $x, y, \dots$, sera un covariant de la forme primitive.

Nous venons de voir que l'émanant $x'^p \frac{d^p u}{dx^p} + \dots$ devient $X'^p \frac{d^p U}{dX^p} + \dots$ lorsque l'on remplace x' par $\lambda_1 X' + \mu_1 Y' + \dots$ et x par $\lambda_1 X + \mu_1 Y + \dots$. Il est évidemment indifférent que les deux substitutions soient simultanées ou successives. Donc, si en transformant $x', y', \dots$ seuls, l'expression $x'^p \frac{d^p u}{dx^p} + \dots$ devient $aX'^p + \dots$, les coefficients $a, \dots$ seront des fonctions de $x, y, \dots$ qui, lorsque l'on transformera $x, y, \dots$, deviendront $\frac{d^p U}{dX^p}, \dots$. Mais un invariant de l'émanant donné, considéré comme fonction de $x', y', \dots$, est par définition une fonction de ses coefficients, qui ne diffère que par une puissance du module de la fonction correspondante des coefficients transformés $a, \dots$. Puisque, ainsi que nous l'avons vu, les coefficients $a, \dots$ deviennent $\frac{d^p U}{dX^p}, \dots$ lorsque l'on transforme $x, y, \dots$, l'invariant donné sera une fonction de $\frac{d^p u}{dx^p}, \dots$, qui, lorsque l'on transformera $x, y, \dots$, ne différera que par une puissance du module de la fonction correspondante de $\frac{d^p U}{dX^p}, \dots$. Ce sera donc un covariant de la forme primitive.

Ainsi, par exemple, il a été démontré (86) que, si la forme binaire $ax^2 + 2bxy + cy^2$ a pour transformée

$$AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

on a

$$(AC - B^2) = \Delta^2(ac - b^2);$$

on en conclut qu'en considérant le second émanant

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^2 u$$

d'une forme de degré quelconque, on a aussi

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{d\mathbf{X}^2} \frac{d^2 \mathbf{U}}{d\mathbf{Y}^2} - \left(\frac{d^2 \mathbf{U}}{d\mathbf{X} d\mathbf{Y}} \right)^2 = \Delta^2 \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 u}{dy^2} - \left(\frac{d^2 u}{dx dy} \right)^2 \right],$$

théorème dont nous donnerons encore d'autres démonstrations.

94. En général, si l'on prend le second émanant d'une forme à un nombre quelconque de variables et que l'on calcule son discriminant, on obtiendra un covariant appelé fonction de **Hesse** ou simplement *Hessien*.

Nous avons remarqué (85) que le discriminant de toute fonction quadratique peut s'écrire sous forme de déterminant. Ainsi, en employant, comme nous l'avons déjà fait ailleurs, les indices 1, 2, ... pour indiquer la différentiation par rapport à $x, y, \dots$, de telle sorte que u_{11} représente $\frac{d^2 u}{dx^2}$, l'émanant du second degré sera $u_{11}x'^2 + 2u_{12}x'y' + \dots$, et son discriminant s'écrira

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

95. Nous avons vu (90) que le déterminant d'un système d'équations linéaires est un invariant du système. Étant donc données des formes $u, v, w, \dots$, si l'on forme leurs premiers émanants $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3 + \dots$, le déterminant

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

sera un covariant. C'est le déterminant de **Jacobi** déjà mentionné plus haut (69) : celui de **Hesse** n'est autre que la fonction **J** calculée pour le système des dérivées $u_1, u_2, u_3, \dots$ d'une même forme.

96. *Contravariants.* — Lorsque l'on transforme linéairement un groupe de variables $x, y, \dots$, il arrive fréquemment que d'autres variables liées à $x, y, \dots$ sont aussi transformées linéairement, mais à l'aide d'une substitution différente. Si, comme plus haut, les équations qui lient x, y, z aux nouvelles variables sont

$$\begin{aligned}x &= \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z, & y &= \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z, \\z &= \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z,\end{aligned}$$

les variables ξ, η, ζ sont dites transformées par la substitution *inverse*, si les nouvelles variables X_1, Y_1, Z_1 s'expriment en fonction des anciennes par les équations

$$\begin{aligned}X_1 &= \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, & Y_1 &= \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta, \\Z_1 &= \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta;\end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients sont les éléments du déterminant $(\lambda_1 \mu_2 \nu_3)$ lus verticalement, tandis que dans la substitution *directe* ils étaient lus horizontalement : dans la première substitution, les anciennes variables sont exprimées en fonction des nouvelles, et, dans la deuxième, les nouvelles en fonction des anciennes (*). Ainsi établie, la relation est évidemment réciproque. Tirant en effet les valeurs de ξ, η, ζ en fonction de X_1, Y_1, Z_1 , il vient (28)

$$\begin{aligned}\Delta \xi &= L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1, & \Delta \eta &= L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1, \\ \Delta \zeta &= L_3 X_1 + M_3 Y_1 + N_3 Z_1,\end{aligned}$$

$L_1, M_1, \dots$ étant les déterminants mineurs déduits de $(\lambda_1 \mu_2 \nu_3)$ par la suppression de la ligne et de la colonne qui contiennent λ_1 ou $\mu_1, \dots$.

Lorsque deux groupes de variables $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ seront transformés, comme ci-dessus, par des substitutions inverses,

(*) On exprime quelquefois ce genre de relation d'une manière abrégée, en disant que les deux groupes de variables sont *cogrédients* ou *contragrédients* suivant qu'ils doivent être transformés par une même substitution ou par des substitutions inverses.

l'un d'eux sera désigné, dans ce qui suit, par des lettres grecques, et habituellement par les lettres α , β , γ . Exposons d'abord deux des cas les plus importants dans lesquels s'emploie la substitution inverse.

97. Quand on transforme linéairement une fonction de x , y , z en une autre fonction de X , Y , Z , les dérivées par rapport aux nouvelles variables s'expriment linéairement au moyen des dérivées par rapport aux anciennes, mais par la substitution inverse. On a, en effet,

$$\frac{d}{dX} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{dX} + \frac{d}{dy} \frac{dy}{dX} + \frac{d}{dz} \frac{dz}{dX} + \dots$$

Mais, des expressions de x , y , ... en fonction de X , Y , ..., on tire

$$\frac{dx}{dX} = \lambda_1, \quad \frac{dy}{dX} = \lambda_2, \quad \frac{dz}{dX} = \lambda_3,$$

d'où

$$\frac{d}{dX} = \lambda_1 \frac{d}{dx} + \lambda_2 \frac{d}{dy} + \lambda_3 \frac{d}{dz} + \dots;$$

de même

$$\frac{d}{dY} = \mu_1 \frac{d}{dx} + \mu_2 \frac{d}{dy} + \mu_3 \frac{d}{dz} + \dots$$

Les symboles $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ se trouveront donc, lorsque l'on transformera linéairement x , y , z , transformés eux-mêmes linéairement par la substitution inverse, suivant la règle du numéro précédent.

Si l'on indique, comme plus haut, par u_1 , u_2 , ... les dérivées d'une fonction u , et par U_1 , U_2 , ... celles de sa transformée U , nous avons démontré que l'on a

$$U_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, \quad U_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \dots$$

Par conséquent, si u_1 , u_2 , u_3 se réduisent à zéro, il en sera de même de U_1 , U_2 , U_3 ; mais nous savons que u_1 , u_2 , u_3 ne se réduisent tous à zéro que quand le discriminant du système est nul, et, dans ce cas, nous voyons que celui du système trans-

formé sera aussi nul et contiendra, par suite, le premier comme facteur, ainsi que nous l'avons déjà établi (87).

98. En géométrie plane, si x, y, z représentent les coordonnées *trilinéaires* d'un point, et $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ l'équation d'une droite, ξ, η, ζ peuvent être appelés les coordonnées *tangentiellles* de cette droite. Si l'on rapporte à de nouveaux axes en faisant $x = \lambda_1 X + \dots$, l'équation de la droite devient

$$\xi(\lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z) + \eta(\lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z) + \zeta(\lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0,$$

en faisant

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \quad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta,$$

$$Z_1 = \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta.$$

En d'autres termes, lorsque les coordonnées d'un point sont transformées par une substitution linéaire, les coordonnées tangentiellles d'une ligne sont transformées par la substitution inverse. De même, dans la géométrie à trois dimensions, les coordonnées tangentiellles d'un plan et celles d'un point sont transformées par des substitutions inverses. Quand on rapporte à de nouveaux axes, toutes les coordonnées $x, y, z, w; x', y', z', w'$, représentant des points, sont transformées par la même substitution $x = \lambda_1 X + \dots, x' = \lambda_1 X' + \dots$; tandis que les coordonnées tangentiellles d'un plan quelconque le sont par la substitution inverse.

Nous nous servirons souvent du principe posé ci-dessus, que la fonction

$$x\xi + y\eta + z\zeta = XX_1 + YY_1 + ZZ_1,$$

dans laquelle x, y, z doivent être transformés par la substitution directe $x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z$, et ξ, η, ζ par la substitution inverse $X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta$, reste invariable par cette double transformation.

99. Si une forme $ax^a + \dots$ devient par la transformation

$AX^n + \dots$, nous nommerons *contrevariant* (*) une fonction renfermant les coefficients de la forme et des variables $\xi, \eta, \dots$, qui sont censées transformées par la substitution inverse, si cette fonction ne diffère que par une puissance du module de la fonction correspondante des coefficients et des variables de la transformée, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi(A, B, \dots, X_1, Y_1, \dots) = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, \xi, \eta, \dots).$$

Des fonctions de ce genre se présentent souvent en géométrie. Si nous avons, par exemple, une équation exprimant la condition nécessaire pour qu'une droite ou un plan ait avec une courbe ou une surface donnée une relation indépendante du choix des axes, comme, par exemple, une condition de contact, et si nous rapportons le tout à de nouveaux axes, il est évidemment indifférent de transformer la relation dont il s'agit en remplaçant les anciens coefficients par leurs valeurs en fonction des nouveaux, ou bien de la déduire de l'équation transformée de la courbe de la même manière qu'on l'avait déduite de l'équation primitive. Les deux expressions de cette condition

$$\varphi(a, b, \xi, \dots), \quad \varphi(A, B, X_1, \dots)$$

ne diffèrent donc que par un facteur.

100. Outre les covariants et les contrevariants, on peut encore imaginer des fonctions contenant les deux séries de variables et ne différant que par une puissance du module des fonctions transformées correspondantes, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait

$$\varphi(A, B, \dots, X, Y, \dots, X_1, Y_1, \dots) = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, x, y, \dots, \xi, \eta, \dots).$$

(*) Le premier exemple de *contrevariant* a été donné par Gauss dans ses *Disq. arithm.* Il désigne sous le nom de *forme adjointe* le contrevariant de la forme quadratique ternaire. Les géomètres allemands ont conservé une dénomination analogue, *zugehörige form.* Celle de *contrevariant* est préférable.

Nous les nommerons *covariants mixtes* (*). La fonction la plus simple de cette espèce est $x\xi + y\eta + z\zeta$; elle est invariable par la transformation (98), et, par suite, est un covariant mixte pouvant être adjoint à une forme quelconque.

101. Soit I un invariant d'une forme

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + n b_1 x^{n-1} z + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 x^{n-2} y^2 + \dots;$$

on peut en déduire un contrevariant par la méthode employée au n° 90. Si la forme proposée devient, par la transformation, $A_0 X^n + \dots$, la fonction $x\xi + y\eta + z\zeta$ devenant elle-même $XX_1 + YY_1 + ZZ_1$, il suit de là que

$$\begin{aligned} a_0 x^n + \dots + k(x\xi + y\eta + z\zeta)^n \\ = A_0 X^n + \dots + k(XX_1 + YY_1 + ZZ_1)^n. \end{aligned}$$

Mais un invariant de la forme primitive remplit la condition

$$\varphi(A_0, A_1, B_1, \dots) = \Delta^p \varphi(a_0, a_1, b_1, \dots).$$

Calculant le même invariant pour la nouvelle forme, on aura

$$\varphi(A_0 + kX_1^n, A_1 + kX_1^{n-1}Y_1, \dots) = \Delta^p \varphi(a_0 + k\xi^n, a_1 + k\xi^{n-1}\eta, \dots).$$

k étant arbitraire, nous pouvons égaler les coefficients des mêmes puissances de k dans les deux membres : ces coefficients, d'après le théorème de Taylor, sont tous de la forme

$$\left(\xi^n \frac{d}{da_0} + \xi^{n-1} \eta \frac{d}{da_1} + \xi^{n-1} \zeta \frac{d}{db_1} + \xi^{n-2} \eta^2 \frac{d}{da_2} + \dots \right)^q I.$$

Nous avons démontré qu'ils ne diffèrent que par une puis-

(*) Ces fonctions, que l'on pourrait, comme l'a proposé M. Salmon, appeler *divariants*, sont désignées dans les travaux de MM. Aronhold et Clebsch sous le nom de *zwischenformen*. M. Sylvester, qui emploie le mot générique de *concomitant* pour désigner l'ensemble de toutes les fonctions dont les relations avec la forme primitive ne sont pas altérées par une transformation linéaire, adopte la dénomination de *concomitants mixtes*.

sance du module de la fonction correspondante déduite de l'équation transformée. Ce sont donc des contrevariants, puisqu'il a été constamment admis que ξ , η , ζ doivent être transformés par la substitution inverse. M. Sylvester donne le nom d'*évectants* aux contrevariants déduits d'un invariant, suivant la règle ci-dessus. Ainsi $\xi^n \frac{d\mathbf{I}}{da_c} + \xi^{n-1} \eta \frac{d\mathbf{I}}{da_1} + \dots$ est le premier évectant. Il faut remarquer que les coefficients sont supposés, dans la forme primitive, affectés des mêmes facteurs numériques que ceux du développement de $(x + y + z)^n$, tandis qu'il n'en est pas de même dans l'évectant.

En comparant avec le n° 90, on voit que la fonction $\xi^n \frac{d\mathbf{I}}{da_c} + \dots$ peut être considérée, soit comme un contrevariant de la forme donnée, soit comme un invariant du système que l'on obtient en la combinant avec la fonction linéaire $x\xi + y\eta + z\zeta$. La théorie des contrevariants peut donc être renfermée dans celle des invariants.

Si l'on effectue l'opération $\xi^n \frac{d}{da_c} + \dots$ sur un covariant, on obtient un covariant mixte, car on démontrerait, de la même manière, que le résultat, qui sera évidemment une fonction renfermant les deux groupes de variables, se transforme en une fonction semblable.

EXEMPLE I. — L'expression $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ étant le discriminant, et, par suite, un invariant de la forme ternaire

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy,$$

la fonction

$$\begin{aligned} & (bc - f^2)\xi^2 + (ca - g^2)\eta^2 + (ab - h^2)\zeta^2 \\ & + 2(gh - af)\xi\eta + 2(hf - bg)\xi\zeta + 2(fg - ch)\eta\zeta \end{aligned}$$

sera un contrevariant. Géométriquement, c'est l'équation tangentielle de la section conique représentée par la forme donnée.

EXEMPLE II. — Étant données deux formes quadratiques ternaires $ax^2 + \dots$, $a'x^2 + \dots$, on sait que l'expression $a'(bc - f^2) + \dots$ est un

invariant commun (90); effectuant l'opération $\xi^2 \frac{d}{da} + \dots$, il vient

$$\begin{aligned} & (bc' + b'c - 2ff')\xi^2 + (ca' + c'a - 2gg')\eta^2 + (ab' + a'b - 2hh')\xi^2 \\ & + 2(gh' + g'h - af' - a'f)\eta\xi + 2(hf' + h'f - bg' - b'g)\xi\xi \\ & + 2(fg' + f'g - ch' - c'h)\xi\eta. \end{aligned}$$

Ce contrevariant pourrait encore s'obtenir en effectuant l'opération $a' \frac{d}{da} + \dots$ sur le contrevariant de l'exemple précédent.

Géométriquement, il exprime la condition qui doit être satisfaite pour qu'une droite soit coupée *harmoniquement* par les deux sections coniques.

102. Quand le discriminant d'une forme s'annule, il existe un groupe de racines *singulières* x' , y' , z' (géométriquement, ce sont les coordonnées du point double de la courbe ou de la surface représentée par cette forme), et, dans ce cas, le premier évectant du discriminant sera une puissance $n^{\text{ième}}$ de

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta.$$

En effet, l'évectant ne variant pas par la transformation, il suffit de voir ce qui arrivera dans un cas particulier. Mais, si le discriminant est égal à zéro, la forme peut être transformée de telle sorte que les nouveaux coefficients de x^n , $x^{n-1}y$, $x^{n-1}z$ deviennent nuls, et que la racine singulière soit $y = 0$, $z = 0$ (ce qui revient, géométriquement, à supposer l'origine des coordonnées au point double); mais il a été prouvé (84) que le discriminant est de la forme

$$a_0\rho + a_1^2\varphi + a_1b_1\psi + b_1^2\chi.$$

Si a_0 , a_1 , b_1 s'annulent, non-seulement le discriminant, mais toutes ses dérivées s'annulent aussi, excepté $\frac{d\mathbf{I}}{da_0}$. L'évectant se réduit donc à $\frac{d\mathbf{I}}{da_0}$ multiplié par ξ^n , terme unique auquel se réduit $(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)^n$ quand on fait $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 0$.

Ainsi, lorsque le discriminant d'une forme quadratique ternaire est nul, l'équation représente deux lignes droites; le

contrevariant

$$(bc - f^2)\zeta^2 + (ca - g^2)\eta^2 + \dots$$

devient un carré parfait, et l'on aura les coordonnées x' , y' , z' , du point d'intersection, en l'identifiant à l'expression

$$(x'\zeta + y'\eta + z'\zeta)^2.$$

Si la forme admet deux groupes de racines singulières, toutes les premières dérivées du discriminant se réduisent à zéro, et son second évectant devient une puissance exacte de

$$(x'\zeta + y'\eta + z'\zeta)(x''\zeta + y''\eta + z''\zeta),$$

x' , y' , z' ; x'' , y'' , z'' étant les deux groupes de racines singulières, et ainsi de suite.



DIXIÈME LEÇON.

FORMATION DES INVARIANTS ET COVARIANTS.

103. Après avoir fait connaître ce que l'on entend par invariants, covariants, etc., nous allons indiquer les méthodes à l'aide desquelles on peut former ces fonctions : trois méthodes seront exposées dans cette Leçon, et une quatrième dans la Leçon suivante.

Fonctions symétriques. — Cette méthode n'est applicable qu'aux formes binaires. Toute fonction symétrique des différences des racines est un invariant, pourvu que chaque racine y figure le même nombre de fois (*). Il est évident qu'un invariant doit être une fonction des différences des racines, puisqu'il ne change pas lorsqu'on remplace x par $x + \lambda$. La transformation linéaire la plus générale revient à changer chaque racine z en $\frac{\lambda z + \mu}{\lambda' z + \mu'}$, et, dans cette opération, la différence de deux racines $z - \beta$ devient $\frac{(\lambda \mu' - \lambda' \mu)(z - \beta)}{(\lambda' z + \mu')(\lambda' \beta + \mu')}$; pour qu'une fonction des différences puisse, après sa transformation, ne différer de sa valeur primitive que par un facteur,

(*) Si l'on désigne dans l'équation par a_n le coefficient de la plus haute puissance de x , il faut diviser par ce coefficient pour obtenir l'expression de la somme, des produits, etc., des racines, et toutes les fonctions symétriques sont des fractions contenant au dénominateur des puissances de a_n . Lorsque nous disons qu'une fonction symétrique des racines est un invariant, nous entendons qu'on l'a rendue entière en la multipliant par une puissance suffisamment élevée de a_n , ou, ce qui revient au même, qu'après avoir formé la fonction symétrique en supposant le coefficient de x^n égal à l'unité, on la rend ensuite homogène en multipliant chaque terme par une puissance convenable de a_n .

il est nécessaire que le dénominateur soit le même pour tous les termes : la fonction doit donc être un produit de différences dans lequel chaque racine se présente le même nombre de fois. Ainsi, pour une forme biquadratique, la fonction

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2$$

est un invariant, parce qu'après la transformation tous les termes de la somme ont le même dénominateur. Mais il n'en est pas de même de $\Sigma(\alpha - \beta)^2$, le dénominateur du terme $(\alpha - \beta)^2$ étant

$$(\lambda' \alpha + \mu' \beta)^2 (\lambda' \gamma + \mu' \delta)^2,$$

et celui du terme $(\gamma - \delta)^2$

$$(\lambda' \gamma + \mu' \delta)^2 (\lambda' \alpha + \mu' \beta)^2.$$

104. On peut encore établir cette proposition d'une manière peut-être plus simple, en écrivant l'équation sous la forme homogène. Nous avons vu (87) qu'en changeant x en $\lambda x + \mu y$, y en $\lambda' x + \mu' y$, la quantité $x_1 y_2 - x_2 y_1$ devient

$$(\lambda \mu' - \lambda' \mu)(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

et que, par suite, toute fonction des déterminants $x_1 y_2 - x_2 y_1$ est un invariant. Mais (38) toute fonction des racines exprimée à la manière ordinaire se ramène à la forme homogène, en remplaçant $\alpha, \beta, \dots$ par $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}$ et multipliant ensuite par une puissance du produit de tous les facteurs y assez élevée pour faire disparaître les fractions. Si l'on opère ainsi sur une fonction des différences dans laquelle les racines ne se présentent pas toutes de la même manière, il restera, après la multiplication, des facteurs y en évidence, et la fonction ne pourra être un invariant. Ainsi, pour une fonction du quatrième degré, $\Sigma(\alpha - \beta)^2$ devient

$$\Sigma y_3^2 y_4^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2,$$

tandis que la fonction $\Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2$, dans laquelle figurent toutes les racines, devient

$$\Sigma (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_3 y_4 - x_4 y_3)^2;$$

elle ne contient plus que les déterminants et, par suite, est un invariant.

On démontre, de même, que toute fonction symétrique formée avec les différences des racines entre elles, et les différences entre x et une ou plusieurs des racines, est un covariant, pourvu que chaque racine figure le même nombre de fois. Ainsi, pour une forme du troisième degré, $\Sigma(x - \beta)^2(x - \gamma)^2$ est un covariant.

105. Nous pouvons, par la méthode précédente, former des invariants et des covariants qui se réduisent à zéro dans l'hypothèse de quelque condition d'égalité entre les racines. Supposons ainsi que l'on demande un invariant qui s'annule quand trois racines deviennent égales : il est clair que chaque terme devra contenir l'une des trois différences $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, et, de même, pour tout autre groupe que l'on peut former avec trois racines. Dans une équation du quatrième degré, il y a quatre groupes de cette sorte : la différence $\alpha - \beta$ appartient à deux groupes, la différence $\gamma - \delta$ aux deux autres ; par conséquent, $\Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(*)$ sera un invariant qui se réduira à zéro lorsque trois racines seront égales. De même, pour une équation du cinquième degré, il y a dix groupes de trois racines ; $\alpha - \beta$ appartient à trois groupes, $\gamma - \delta$ à trois autres : les quatre derniers groupes sont $\alpha\gamma\varepsilon$, $\alpha\delta\varepsilon$, $\beta\gamma\varepsilon$, $\beta\delta\varepsilon$, parmi lesquels deux contiennent $\gamma - \varepsilon$ et les deux autres $\delta - \varepsilon$. La fonction $\Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \varepsilon)^2(\gamma - \varepsilon)^2$ sera donc un invariant qui se réduira à zéro lorsque trois racines seront égales. Cet invariant (34, 35) est du quatrième ordre, et son poids est 10.

Si l'on veut former un covariant d'une forme biquadratique qui se réduise à zéro lorsqu'il existe deux couples de racines égales, son expression contiendra une différence de chacun des groupes $\alpha - \beta$, $\gamma - \delta$; $\alpha - \gamma$, $\beta - \delta$; $\alpha - \delta$, $\beta - \gamma$: elle sera donc

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(x - \delta)^4,$$

(*) $\Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2$ se réduirait identiquement à zéro.

ou

$$\Sigma(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(x - \beta)^2(x - \gamma)^2(x - \delta)^2;$$

ces covariants sont du quatrième et du sixième degré par rapport aux variables, du quatrième et du troisième par rapport aux coefficients, et chacun de leurs termes se réduit à zéro lorsque l'équation admet deux couples de racines égales.

106. Différentiation mutuelle des covariants et des contrevariants. — Lorsque l'on dit que la fonction $\varphi(a, b, \dots, \xi, \eta, \dots)$ est un contrevariant, il est clair que $\xi, \eta, \dots$ sont des quantités quelconques que l'on suppose seulement transformées par la substitution inverse. Mais nous avons fait voir (97) que les symboles $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots$ sont dans ce cas. Nous pouvons donc substituer, dans un contrevariant, ces symboles à la place de $\xi, \eta, \dots$, et nous obtiendrons un symbole d'opération qui ne variera pas par la substitution, et qui, appliqué à la forme primitive ou à l'un de ses covariants, donnera un covariant si les variables subsistent après la différentiation ou un invariant si elles disparaissent. En l'appliquant à un covariant mixte, il donnera un contrevariant ou un covariant mixte, suivant que les variables disparaîtront ou ne disparaîtront pas par la différentiation. Au lieu de remplacer $\xi, \eta, \dots$, dans un contrevariant, par $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots$ pour former un symbole d'opération, nous pouvons encore les remplacer par $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \dots$, U étant la forme primitive ou l'un de ses covariants, et obtenir ainsi un nouveau covariant. La relation entre les deux séries de variables $x, y, z, \dots$ et $\xi, \eta, \zeta, \dots$ étant réciproque, nous pouvons de même remplacer, dans un covariant, $x, y, z, \dots$ par $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}, \dots$, et nous aurons un symbole d'opération qui, appliqué à un contrevariant, donnera un nouveau contrevariant ou un invariant.

Ainsi, étant donnés un covariant et un contrevariant, on peut, en substituant dans l'un d'eux des symboles différentiels

et opérant ensuite sur l'autre, obtenir un nouveau contrevariant ou covariant, que l'on peut de même combiner avec les premiers, pour en déduire d'autres, et ainsi de suite.

107. Dans le cas des formes binaires, cette méthode se simplifie. Les formules pour la transformation directe étant

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y, \quad y = \lambda_2 X + \mu_2 Y,$$

celles de la transformation inverse sont (96)

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta, \quad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta,$$

d'où

$$\Delta \xi = \mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1, \quad \Delta \eta = -\mu_1 X_1 + \lambda_1 Y_1,$$

expressions qui peuvent s'écrire

$$\Delta \eta = \lambda_1 Y_1 + \mu_1 (-X_1), \quad \Delta (-\xi) = \lambda_2 Y_1 + \mu_2 (-X_1).$$

On voit donc qu'abstraction faite du facteur Δ , les variables η et $-\xi$ se transforment exactement suivant la même règle que x et y , et l'on peut dire que y et $-x$, d'une part, x et y , de l'autre, se transforment par des substitutions inverses. Ainsi, dans les formes binaires, les covariants et les contrevariants ne sont pas essentiellement distincts, et nous n'avons qu'à remplacer, dans un covariant, x et y par η et $-\xi$ pour en faire un contrevariant, et *vice versa*. En effet, supposons que, par la transformation, une fonction homogène $\varphi(x, y)$ devienne $\Phi(X, Y)$, les formules ci-dessus montrent que $\varphi(\eta, -\xi)$ deviendra $\frac{1}{\Delta^p} \Phi(Y_1, -X_1)$, p étant le degré de la fonction en x et y . Donc, si $\varphi(x, y)$ est un covariant, c'est-à-dire une fonction qui, après la transformation, ne diffère que par une puissance de Δ d'une semblable fonction de X et Y ; évidemment $\varphi(\eta, -\xi)$ ne différera de même, après la transformation, que par une puissance de Δ d'une fonction semblable de X_1 et Y_1 . Ce sera donc un contrevariant.

Au lieu de dire que les symboles différentiels se transforment par substitution inverse par rapport à x, y , nous pou-

vons donc dire qu'ils se transforment par la même substitution que y et $-x$; et si, dans la forme primitive ou dans un de ses covariants, nous remplaçons x et y par $\frac{d}{dy}$, $-\frac{d}{dx}$, nous aurons un symbole qui pourra être employé pour donner naissance à de nouveaux covariants, comme nous l'avons expliqué plus haut. Nous pouvons aussi substituer $\frac{du}{dy}$, $-\frac{du}{dx}$ à la place de x et y , et obtenir ainsi un nouveau covariant. Les exemples suivants feront suffisamment comprendre l'esprit de cette méthode.

EXEMPLE I. — *Trouver un invariant d'une forme quadratique ou d'un système de deux formes quadratiques.*

Supposons que, par la transformation, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ devienne

$$AX^2 + 2BXY + CY^2;$$

puisque $\Delta \frac{d}{dy}$, $-\Delta \frac{d}{dx}$ se transforment suivant la même règle que x et y , le symbole

$$\Delta^2 \left(a \frac{d^2}{dy^2} - 2b \frac{d^2}{dx dy} + c \frac{d^2}{dx^2} \right)$$

deviendra, par la transformation,

$$\left(A \frac{d^2}{dY^2} - 2B \frac{d^2}{dX dY} + C \frac{d^2}{dX^2} \right).$$

En l'appliquant à la forme elle-même, on a

$$4\Delta^2(ac - b^2) = 4(AC - B^2),$$

ce qui fait voir que $ac - b^2$ est un invariant; en l'appliquant à

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

et à sa transformée, on a

$$2\Delta^2(ac' + a'c - 2bb') = 2(AC' + A'C - 2BB'),$$

et l'on voit que $ac' + a'c - 2bb'$ est un invariant. On peut voir aussi que la fonction

$$a(bx + cy)^2 - 2b(bx + cy)(ax + by) + c(ax + by)^2$$

est un covariant, mais c'est simplement la forme elle-même multipliée par $ac - b^2$.

EXEMPLE II. — *Toute forme binaire de degré pair a un invariant du second ordre par rapport aux coefficients.*

Nous n'avons qu'à substituer $\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}$ à la place de x et y et opérer ensuite sur la forme. Ainsi, pour la forme biquadratique $(a, b, c, d, e [x, y])^4$, nous trouvons que $ac - 4bd + 3e^2$ est un invariant; de même pour la forme générale $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n [x, y])^n$, la fonction

$$a_0 a_n - n a_1 a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 a_{n-2} - \dots$$

est un invariant; les coefficients numériques sont ceux du binôme, mais le terme du milieu est divisé par 2.

Si nous appliquons cette méthode à une forme de degré impair, par exemple à la forme cubique

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

et si nous effectuons l'opération

$$d \frac{d^3}{dx^3} - 3c \frac{d^3}{dx^2 dy} + 3b \frac{d^3}{dx dy^2} - a \frac{d^3}{dy^3},$$

le résultat est identiquement nul. Nous trouvons cependant qu'un système de deux formes cubiques a un invariant $(ad' - a'd) - 3(bc' - b'c)$, et, en général, qu'un système de deux formes de degré impair a pour invariant l'expression

$$(a_0 b_n - a_n b_0) - n(a_1 b_{n-1} - a_{n-1} b_1) + \frac{1}{2} n(n-1)(a_2 b_{n-2} - a_{n-2} b_2) - \dots,$$

qui se réduit à zéro quand les deux formes sont identiques.

108. Quand on a obtenu, par la méthode ci-dessus, un invariant pour une forme de degré quelconque, on en déduit immédiatement, par celle du n° 93, un covariant pour une forme quelconque de degré plus élevé. Ainsi, sachant que $ac - b^2$ est l'invariant d'une forme quadratique, formons l'invariant de l'émanant quadratique d'une fonction quelconque; l'expression $\frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 u}{dy^2} - \left(\frac{d^2 u}{dx dy} \right)^2$ sera un covariant pour

toute fonction d'un degré supérieur au second. De même

$$ae - 4bd + 3c^2$$

étant un invariant d'une forme du quatrième degré, nous en déduirons que l'expression

$$\frac{d^4 u}{dx^4} \frac{d^4 u}{dy^4} - 4 \frac{d^4 u}{dx^3 dy} \frac{d^4 u}{dx dy^3} + 3 \left(\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} \right)^2$$

sera un covariant pour toute forme d'un degré supérieur au quatrième. On voit ainsi que toute forme a, en général, une série de covariants du second ordre par rapport aux coefficients et des degrés $2(n-2)$, $2(n-4)$, $2(n-6)$,... par rapport aux variables. Ces covariants peuvent se combiner ensuite, soit avec la forme primitive, soit entre eux, pour conduire à de nouveaux covariants ou invariants.

EXEMPLE I. — *Une forme du quatrième degré a un invariant du troisième ordre par rapport aux coefficients.*

Nous savons, en effet, que le Hessian

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(cx^2 + 2dxy + ey^2) - (bx^2 + 2cxy + dy^2)^2,$$

ou

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4$$

est un covariant. En effectuant sur lui l'opération

$$(a, b, c, d, e \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx})^4,$$

et divisant par 72, nous obtenons la quantité

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

qui, par suite, est un invariant.

EXEMPLE II. — *Toute forme de degré impair a un invariant du quatrième ordre par rapport aux coefficients.*

En effet, elle a un covariant quadratique $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}} - \dots$ du second ordre par rapport aux coefficients. Le discriminant de cette forme quadratique sera un invariant de la forme primitive (91) et sera du quatrième ordre par rapport aux coefficients. Du reste, cette démonstration

prouve que toute forme a un invariant du quatrième ordre; car, si nous prenons un des covariants de degré pair obtenus ci-dessus, son invariant du deuxième ordre sera du quatrième par rapport aux coefficients de la forme primitive. Mais, si la forme est de degré pair, il peut arriver que l'invariant ainsi obtenu soit simplement le carré d'un invariant du second ordre.

EXEMPLE III. — Trouver l'invariant du quatrième ordre d'une forme cubique.

Le Hessian est

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2,$$

ou

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2.$$

L'expression

$$(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$$

est un invariant de la forme cubique; en effet, c'est son discriminant

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

109. Tout invariant d'une forme binaire peut donner naissance à un covariant. Nous pouvons, en effet (101), en déduire l'évectant $\xi'' \frac{dI}{da_0} + \dots$, qui est un contrevariant, et, en y remplaçant ξ et η par y et $-x$, nous avons un covariant. Ainsi, du discriminant ci-dessus d'une forme cubique, nous déduirons l'évectant

$$\begin{aligned} & \xi^2(ad^2 - 3bcd + 2c^3) - 3\xi^2\eta(acd + bc^2 - 2b^2d) \\ & - 3\xi\eta^2(abd + b^2c - 2ac^2) + \eta^3(a^2d - 3abc + 2b^3), \end{aligned}$$

et, par suite, la forme cubique admet le covariant

$$\begin{aligned} & (a^2d - 3abc + 2b^3, abd + b^2c - 2ac^2, \\ & 2b^2d - acd - bc^2, 3bcd - ad^2 - 2c^3(x, y)). \end{aligned}$$

110. Équation différentielle. — Soit n le degré d'une forme binaire, θ celui de l'un de ses invariants par rapport aux coefficients; le poids (33) de chaque terme de l'invariant est constant et égal à $\frac{1}{2}n\theta$. Si nous changeons x en λx sans faire varier y , ce qui est une transformation linéaire, l'invariant doit,

par définition, rester le même ou du moins être simplement multiplié par une puissance de λ qui, dans ce cas, est le module de la transformation. On démontrera, comme au n° 34, que la somme des indices de chaque terme est constante.

L'invariant doit aussi rester le même si l'on change x en y et y en x , transformation linéaire dont le module est -1 . Cette substitution revient à changer chaque coefficient a_x en a_{n-x} . On a donc, pour la somme des indices,

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) + \dots,$$

d'où

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \dots) = n\theta.$$

COROLLAIRE. n et θ ne peuvent pas être tous deux impairs, puisque leur produit est pair, c'est-à-dire qu'une forme binaire de degré impair ne peut pas avoir d'invariant de degré impair.

111. Les principes ci-dessus nous permettent d'écrire immédiatement la partie littérale d'un invariant dont l'ordre est connu; car, l'ordre étant donné, le poids l'est également. Si l'on demandait, par exemple, de calculer pour une forme du quatrième degré un invariant du troisième ordre, son poids serait 6, et ses termes

$$A a_4 a_2 a_0 + B a_4 a_1 a_1 + C a_3 a_3 a_0 + D a_3 a_2 a_1 + E a_2 a_2 a_2,$$

les coefficients $A, B, \dots$ restant à déterminer. Le lecteur remarquera qu'il y a autant de termes dans l'invariant que de manières différentes de composer le nombre 6 avec trois nombres compris entre 0 et 4; et, en général, qu'un invariant renferme autant de termes qu'il y a de manières de composer le nombre $\frac{1}{2} n\theta$, qui représente son poids, avec θ nombres compris entre 0 et n .

Nous déterminerons les coefficients d'après cette considération, qu'un invariant ne devant pas changer si l'on remplace x par $x + \lambda$ ou y par $y + \lambda$, doit, comme au n° 39,

satisfaire aux deux équations différentielles :

$$a_0 \frac{d\mathbf{I}}{da_1} + 2a_1 \frac{d\mathbf{I}}{da_2} + 3a_2 \frac{d\mathbf{I}}{da_3} + \dots = 0,$$

$$na_1 \frac{d\mathbf{I}}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d\mathbf{I}}{da_1} + \dots = 0,$$

l'équation primitive étant censée écrite avec les coefficients du binôme. Dans la pratique, une seule de ces équations suffit, car la deuxième s'en déduit en changeant chaque coefficient a_x en a_{n-x} . Il suffit donc de faire usage de l'une d'elles, pourvu que l'on ait soin de rendre d'avance la fonction symétrique par rapport à x et y ; c'est-à-dire pourvu qu'elle ne change pas ou tout au plus change de signe (*) lorsque l'on remplace a_x par a_{n-x} , et cette condition sera toujours remplie si l'on a soin que le poids de l'invariant soit celui que nous venons d'indiquer. Ainsi dans l'exemple qui précède, si nous effectuons sur l'expression $\Lambda a_4 a_2 a_0 + \dots$ l'opération $a_0 \frac{d}{da_1} + \dots$, il vient

$$(2\mathbf{B} + 2\mathbf{A})a_1 a_1 a_0 + (\mathbf{D} + 6\mathbf{C} + 4\mathbf{A})a_3 a_2 a_0 \\ + (2\mathbf{D} + 4\mathbf{B})a_3 a_1 a_1 + (6\mathbf{E} + 3\mathbf{D})a_2 a_2 a_1 = 0,$$

et, en prenant $\mathbf{A} = 1$, on a pour les autres coefficients $\mathbf{B} = -1$, $\mathbf{D} = 2$, $\mathbf{C} = -1$, $\mathbf{E} = -1$, et pour l'invariant lui-même

$$a_1 a_2 a_0 + 2a_3 a_2 a_1 - a_1 a_1 a_1 - a_3 a_3 a_0 - a_2 a_2 a_2.$$

112. En cherchant, par cette méthode, à déterminer un invariant d'un ordre donné, nous avons à calculer des coeffi-

(*) Le changement de x en y et de y en x revient à une transformation linéaire ayant pour module

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Tout invariant qui, dans la transformation, se trouve multiplié par une puissance impaire du module, change donc de signe lorsque l'on permute x et y ; les invariants de cette espèce sont appelés *invariants gauches*.

cients inconnus $A, B, C, \dots$, et nous y parvenons à l'aide d'un certain nombre de conditions déduites de l'équation différentielle. Si le nombre de ces conditions surpasse celui des coefficients inconnus, la formation de l'invariant sera impossible en général; s'il lui est égal, on n'aura qu'un invariant; s'il est moindre, on en obtiendra plusieurs. Mais nous avons vu que le nombre des termes de l'invariant, qui surpasse d'une unité celui des coefficients, est égal au nombre de décompositions possibles du poids $\frac{1}{2} n \theta$ en θ nombres compris entre 0 et n .

L'effet de l'opération $a_0 \frac{d}{da_1} + \dots$ est évidemment de diminuer le poids d'une unité; le nombre des conditions à remplir est donc égal au nombre de décompositions de $\frac{1}{2} n \theta - 1$ en θ nombres compris entre 0 et n . Ainsi, dans l'exemple du n° 111, le nombre des conditions employées pour trouver $A, B, \dots$ est égal au nombre de décompositions possibles du nombre 5 en une somme de trois nombres compris entre 0 et 4 inclusivement. Par conséquent, pour reconnaître en général si l'on peut trouver, pour une forme binaire, un invariant de l'ordre θ , et s'il y en a plus d'un, il faut examiner de combien de manières les deux nombres $\frac{1}{2} n \theta, \frac{1}{2} n \theta - 1$ peuvent être décomposés en θ nombres compris entre 0 et n : c'est sur ce principe que M. Cayley a basé ses recherches sur le nombre des invariants des formes binaires.

113. Les mêmes raisonnements s'appliquent aux covariants. Un covariant doit, comme la forme primitive elle-même, rester invariable si l'on change x en ρx , et, en même temps, chaque coefficient a_α en $\rho^\alpha a_\alpha$. Si le coefficient d'une puissance x^μ de x , dans le covariant, est $a_\alpha b_\beta c_\gamma, \dots$, il est clair, comme ci-dessus, que la somme $\mu + \alpha + \beta + \dots$ doit être constante pour tous les termes, et nous pouvons l'appeler le *poids* du covariant.

En outre, pour que le covariant ne change pas lorsque l'on

permuté x et y , on doit avoir

$$\mu + \alpha + \beta + \gamma + \dots = (p - \mu) + (n - \alpha) + (n - \beta) + \dots,$$

p étant le degré du covariant en x et y ; par conséquent, θ étant l'ordre du covariant par rapport aux coefficients, on a immédiatement pour son poids $\frac{1}{2}(n\theta + p)$. Si l'on demande, par exemple, un covariant quadratique d'une forme cubique qui soit du deuxième ordre par rapport aux coefficients, on a $n=3$, $\theta=2$, $p=2$, et le poids est 4. On a donc, pour les termes qui multiplient x^2 , $\alpha + \beta = 2$, et ces termes seront $a_2 a_0$ et $a_1 a_1$; de même, les termes qui multiplient xy seront $a_3 a_0$, $a_2 a_1$, et ceux qui multiplient y^2 , $a_3 a_1$, $a_2 a_2$; on détermine ainsi la partie littérale d'un covariant : les coefficients s'obtiendront comme on va le voir ci-après.

114. Il résulte de la définition du covariant que l'on doit parvenir au même résultat, soit en y changeant x en $x + \lambda y$, soit en effectuant d'abord cette substitution dans la forme primitive, et calculant ensuite le covariant de la transformée. Mais ce changement dans la forme primitive revient (39) à changer a_1 en $a_1 + \lambda a_0$, a_2 en $a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0$, ... La substitution de $x + \lambda y$ à x dans le covariant reviendra donc aussi à y remplacer a_1 par $a_1 + \lambda a_0$, ... Soit

$$\mathbf{A}_0 x^p + p \mathbf{A}_1 x^{p-1} y + \frac{1}{2} p(p-1) \mathbf{A}_2 x^{p-2} y^2 + \dots$$

le covariant : exprimons que ces deux manières d'opérer sont équivalentes, et bornons-nous aux termes qui multiplient λ .

En désignant, comme au n° 41, par l'abréviation $\frac{d}{d\zeta}$ l'opération

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots,$$

il vient

$$\frac{d\mathbf{A}_0}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d\mathbf{A}_1}{d\zeta} = \mathbf{A}_0, \quad \frac{d\mathbf{A}_2}{d\zeta} = 2\mathbf{A}_1, \dots$$

$$\frac{d\mathbf{A}_{p-1}}{d\zeta} = (p-1)\mathbf{A}_{p-2}, \quad \frac{d\mathbf{A}_p}{d\zeta} = p\mathbf{A}_{p-1}.$$

Désignant de même par $\frac{d}{d\eta}$ l'opération

$$na_1 \frac{d}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d}{da_1} + \dots,$$

nous aurons aussi

$$\frac{d\mathbf{A}_0}{d\eta} = p\mathbf{A}_1, \quad \frac{d\mathbf{A}_1}{d\eta} = (p-1)\mathbf{A}_2, \dots$$

Nous voyons ainsi qu'en supposant $\mathbf{A}_0$ déterminé de manière à satisfaire à l'équation $\frac{d\mathbf{A}_0}{d\eta} = 0$ [en d'autres termes, $\mathbf{A}_0$ doit être une fonction des différences des racines (39)], tous les autres termes du covariant seront connus. Le covariant sera, en effet,

$$\mathbf{A}_0 x^p + \frac{d\mathbf{A}_0}{d\eta} x^{p-1} \eta + \frac{1}{1.2} \frac{d^2\mathbf{A}_0}{d\eta^2} x^{p-2} \eta^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3\mathbf{A}_0}{d\eta^3} x^{p-3} \eta^3 + \dots$$

Il faut remarquer que le poids du covariant étant $\frac{1}{2}(n\theta + p)$,

celui du terme $\mathbf{A}_0$ est $\frac{1}{2}(n\theta - p)$, puisqu'en lui ajoutant p on doit retrouver celui du covariant. Ce terme $\mathbf{A}_0$, dont tous les autres dérivent, a été appelé par M. Roberts la *source* du covariant. M. Roberts remarque aussi que la source du produit de deux covariants n'est autre que le produit de leurs sources respectives. Car, si nous multiplions le covariant ci-dessus par

$$\mathbf{B}_0 x^q + \frac{d\mathbf{B}_0}{d\eta} x^{q-1} \eta + \frac{1}{1.2} \frac{d^2\mathbf{B}_0}{d\eta^2} x^{q-2} \eta^2 + \dots,$$

nous avons, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 x^{p+q} + \frac{d(\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0)}{d\eta} x^{p+q-1} \eta + \frac{1}{1.2} \frac{d^2(\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0)}{d\eta^2} x^{p+q-2} \eta^2 + \dots$$

Par conséquent, si nous connaissons quelque relation entre plusieurs fonctions $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0, \dots$ des différences des racines, la même relation subsistera entre les covariants qui en dérivent.

EXEMPLE I. — *Trouver le covariant quadratique d'une forme cubique.*

Nous avons vu, n° 113, que A_0 est de la forme $a_2 a_0 + B a_1 a_1$. Effectuons l'opération

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} :$$

il vient

$$(2 + 2B) a_0 a_1 = 0,$$

d'où

$$B = -1 \quad \text{et} \quad A_0 = a_2 a_0 - a_1 a_1.$$

Effectuons maintenant sur A_0 l'opération

$$3a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + a_3 \frac{d}{da_2},$$

nous avons

$$2A_1 = a_3 a_0 - a_2 a_1.$$

Effectuons de nouveau la même opération sur A_1 , et il vient

$$A_2 = a_1 a_3 - a_2 a_2.$$

Le covariant cherché est donc

$$(a_2 a_0 - a_1 a_1)x^2 + (a_0 a_3 - a_2 a_1)xy + (a_1 a_3 - a_2 a_2)y^2.$$

EXEMPLE II. — *Trouver, pour une forme cubique, un covariant du troisième ordre par rapport aux variables et aux coefficients.*

Dans ce cas, on a $n = 3$, $b = 3$, $\frac{1}{2}(n\theta + p) = 6$. La somme des indices dans le coefficient de x^3 sera 3, et ce coefficient sera de la forme

$$A a_3 a_0 a_0 + B a_2 a_1 a_0 + C a_1 a_1 a_1.$$

Effectuant l'opération

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3},$$

il vient

$$(3A + B) a_2 a_0 a_0 + (2B + 3C) a_1 a_1 a_0.$$

En prenant $A = 1$, nous aurons

$$B = -3, \quad C = 2, \quad A_0 = a_3 a_0 a_0 - 3a_2 a_1 a_0 + 2a_1 a_1 a_1.$$

Effectuant sur A_0 trois fois de suite l'opération

$$3a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + a_3 \frac{d}{da_2},$$

nous aurons les autres coefficients et le covariant sera (109)

$$(a_3 a_0 a_0 - 3a_2 a_1 a_0 + 2a_1 a_1 a_1)x^3 + 3(a_3 a_1 a_0 - 2a_2 a_2 a_0 + a_2 a_1 a_1)x^2 y + 3(2a_3 a_1 a_1 - a_2 a_2 a_1 - a_3 a_2 a_0)xy^2 + (3a_3 a_2 a_1 - 2a_2 a_2 a_2 - a_3 a_3 a_0)y^3.$$

115. Nous avons vu qu'une forme a autant de covariants du degré p par rapport aux variables, et de l'ordre θ par rapport aux coefficients, qu'il y a de fonctions Λ_a dont le poids soit $\frac{1}{2}(n\theta - p)$, et qui satisfassent à l'équation $\frac{d\Lambda_a}{d\xi} = 0$; et, de même qu'au n° 112, nous voyons que le nombre de ces fonctions est égal à la différence entre les nombres de décompositions de $\frac{1}{2}(n\theta - p)$ et $\frac{1}{2}(n\theta - p) - 1$ en θ nombres compris entre 0 et n inclusivement. On peut remarquer que p ne peut être impair que si n et θ le sont tous deux. Les formes de degré impair ont donc seules des covariants de degré impair par rapport aux coefficients, et ils sont aussi de degré impair par rapport aux variables.

116. Les résultats du n° 114 peuvent être présentés un peu différemment. L'opération $y \frac{d}{dx}$, exécutée sur une forme quelconque, équivaut à une certaine opération exécutée par différenciation sur les coefficients. Ainsi, pour la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, (x, y)^n,$$

on obtient le même résultat, en exécutant l'une ou l'autre des deux opérations $y \frac{d}{dx}$, $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$. Désignons cette dernière par la notation $\left(y \frac{d}{dx}\right)$; la propriété démontrée ci-dessus pour les covariants peut être représentée par l'égalité $y \frac{d}{dx} = \left(y \frac{d}{dx}\right)$. En d'autres termes, les deux opérations $y \frac{d}{dx}$ ou $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$, exécutées sur un covariant, conduisent au même résultat. M. Cayley est parti de cette propriété comme définition des covariants (*); elle com-

(*) Voir les Mémoires de M. Cayley, *on Quantics*, *Philosophical Transactions*, années 1854 et suiv.

prend aussi les invariants, puisque l'on a, pour un invariant I ,
 $y \frac{dI}{dx} = 0$, et, par suite aussi, $\left(y \frac{dI}{dx}\right) = 0$.

117. On peut démontrer de même que les formes à un nombre quelconque de variables satisfont à des équations différentielles qui peuvent s'écrire

$$y \frac{d}{dx} = \left(y \frac{d}{dx}\right), \quad z \frac{d}{dx} = \left(z \frac{d}{dx}\right), \dots$$

Ainsi, pour la forme $(a, b, c, f, g, h(x, y, z)^2)$, nous avons

$$y \frac{d}{dx} = a \frac{d}{dh} + g \frac{d}{df} + 2h \frac{d}{db}, \quad z \frac{d}{dx} = a \frac{d}{dg} + h \frac{d}{df} + 2g \frac{d}{dc},$$

et tout covariant doit satisfaire à ces deux équations : tout invariant satisfait aussi aux équations

$$a \frac{dI}{dh} + g \frac{dI}{df} + 2h \frac{dI}{db} = 0, \quad a \frac{dI}{dg} + h \frac{dI}{df} + 2g \frac{dI}{dc} = 0,$$

ainsi qu'on peut facilement le démontrer en remarquant que l'invariant doit rester le même si l'on remplace x par $x + \lambda y$ ou $x + \mu z$.



ONZIÈME LEÇON.

REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DES INVARIANTS
ET DES COVARIANTS.

118. Il nous reste à faire connaître une quatrième méthode pour trouver les invariants et les covariants ; cette méthode, donnée par M. Cayley en 1846 (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. I, p. 104, et *Journal de Crelle*, t. XXX), non-seulement permet d'obtenir ces fonctions, mais encore fournit les bases d'un système de calcul régulier à l'aide duquel elles peuvent être comparées et identifiées.

Soient $x_1, y_1; x_2, y_2$ deux systèmes de variables qui doivent être transformées par une même substitution ; il a été démontré que les dérivées $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dy_2}$ sont transformées par la substitution inverse (97) ; que le symbole

$$\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1}$$

ne varie pas par la substitution (87) ; enfin, que si l'on effectue sur une fonction quelconque de $x_1, y_1; x_2, y_2$ l'opération indiquée par une puissance de ce symbole, on obtient un covariant (106). Nous désignerons l'expression $\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1}$ par la notation abrégée $\overline{12}$.

Supposons maintenant que l'on donne deux formes binaires U, V, nous pouvons immédiatement établir des covariants de ce système de formes. Nous n'avons qu'à écrire les variables dans U avec l'indice 1, et dans V avec l'indice 2, et effectuer ensuite l'opération indiquée par une puissance quelconque du symbole $\overline{12}$: le résultat sera un invariant ou un covariant.

Soient, par exemple,

$$U = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2, \quad V = a'x_2^2 + 2b'x_2y_2 + c'y_2^2,$$

appliquons à ces formes le symbole $\overline{12}$ qui, développé, est

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \frac{d^2}{dy_2^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{d^2}{dy_1^2} - 2 \frac{d^2}{dx_1 dy_1} \frac{d^2}{dx_2 dy_2},$$

le résultat $ac' + ca' - 2bb'$ sera un invariant commun des deux formes. En général, il est clair que les différentielles marquées de l'indice 1 s'appliquent seulement à U, et celles qui sont marquées de l'indice 2 seulement à V, et il est inutile de conserver les indices après la différentiation (*); de sorte que le symbole $\overline{12}$, appliqué à deux formes de degré quelconque, donne le covariant

$$\frac{d^2U}{dx^2} \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2U}{dy^2} \frac{d^2V}{dx^2} - 2 \frac{d^2U}{dx dy} \frac{d^2V}{dx dy}.$$

Si l'on avait simplement appliqué le symbole $\overline{12}$, on aurait eu le déterminant de Jacobi $\frac{dU}{dx} \frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dx}$, qui est un covariant des deux formes (95).

En appliquant le symbole $\overline{12^3}$ à deux formes cubiques, on obtient l'invariant

$$(ad' - a'd) - 3(bc' - b'c),$$

et, en l'appliquant à deux formes quelconques, le covariant

$$\frac{d^3U}{dx^3} \frac{d^3V}{dy^3} - 3 \frac{d^3U}{dx^2 dy} \frac{d^3V}{dx dy^2} + 3 \frac{d^3U}{dx dy^2} \frac{d^3V}{dx^2 dy} - \frac{d^3U}{dy^3} \frac{d^3V}{dx^3},$$

et ainsi de suite pour les autres puissances de $\overline{12}$.

(*) Si W est une fonction contenant x_1, y_1, x_2, y_2 , nous obtiendrons le même résultat soit en transformant linéairement ces variables et supprimant ensuite tous les indices dans la transformée, soit en supprimant d'abord les indices et effectuant ensuite la transformation de x et y . Cela résulte immédiatement de ce que x_1, y_1, x_2, y_2, x, y sont transformés par la même substitution. On en déduit que si W écrit comme fonction de x_1, y_1, x_2, y_2 est un covariant de U et V, c'est-à-dire si l'expression des coefficients de W en fonction de ceux de U et V n'est pas affectée par la transformation, W est également un covariant lorsque l'on fait abstraction des indices.

119. Nous pouvons aussi, par cette méthode, obtenir des invariants et covariants d'une fonction unique U . Il suffit, en effet, de supposer U et V identiques. Ainsi, faisons, dans l'exemple de deux formes quadratiques donné au numéro précédent, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, l'invariant $\overline{12}^2$ devient $2(ac - b^2)$. De même, l'expression donnée pour le covariant $\overline{12}^2$ d'un système de deux formes U , V devient, en faisant $U = V$, le covariant d'une forme unique

$$\frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^2 U}{dy^2} - \left(\frac{d^2 U}{dx dy} \right)^2.$$

En général, lorsque nous voulons, par cette méthode, établir les covariants d'une fonction unique, nous avons recours à l'artifice suivant : nous établissons d'abord le covariant d'un système de formes distinctes, puis nous supposons que toutes ces formes deviennent identiques. Lorsque nous emploierons, dans la suite, des symboles tels que $\overline{12}''$ sans indiquer à quelles fonctions ils s'appliquent, nous entendrons simplement qu'il s'agit d'une fonction unique U . Nous opérerons sur plusieurs formes semblables $U_1, U_2, \dots$, dans lesquelles les variables seront désignées par $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, au lieu de x, y , et nous supposerons qu'après la différentiation on omet tous les indices et que toutes les variables, s'il en reste, sont remplacées par x et y .

120. Puisque l'on omet tous les indices après la différentiation, on voit immédiatement que le résultat est le même, quelles que soient les lettres primitivement employées, et que $\overline{12}''$ et $\overline{34}''$ désignent une seule et même chose. Dans les applications de cette méthode, nous aurons constamment à faire usage de transformations fondées sur ce principe. Ainsi, nous pouvons montrer que, si n est impair, le résultat de l'opération $\overline{12}''$, appliquée à une forme unique, se réduit à zéro. Car, d'après ce que nous avons dit, $\overline{12}'' = \overline{21}''$, mais $\overline{12}$ et $\overline{21}$ ont des signes contraires, comme on le voit immédiatement

en écrivant explicitement les termes que représente le symbole abrégé $\overline{12}$; il en résulte que $\overline{12}^n$ doit se réduire à zéro quand n est impair. Ainsi, le développement de $\overline{12}^3$ donné à la fin du n° 118 se réduit évidemment à zéro si l'on fait $U = V$. La série $\overline{12}^2, \overline{12}^4, \overline{12}^6, \dots$, reproduit les invariants et covariants déjà obtenus (107, 108). Il est facile de voir que l'opération $\overline{12}^n$, appliquée à la fonction $(a_0, a_1, a_2, \dots, x, y)^n$, donne, quand n est pair,

$$a_0 a_n - n a_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 a_{n-2} - \dots,$$

le dernier coefficient devant être divisé par 2, comme le montre le mode de formation.

121. Les résultats précédents s'étendent, sans difficulté, à un nombre quelconque de fonctions. Nous pouvons prendre plusieurs formes $U, V, W, \dots$, et donnant aux variables dans la première l'indice 1, dans la deuxième l'indice 2, dans la troisième l'indice 3, et ainsi de suite, effectuer sur elles l'opération indiquée par le produit d'un nombre quelconque de symboles $\overline{12}^2, \overline{23}^2, \overline{31}^2, \overline{14}^2, \dots$, $\overline{23}$ étant, comme plus haut, la représentation abrégée de l'expression

$$\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_1} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_2} \dots$$

Nous supprimerons les indices après la différentiation, et nous aurons ainsi un covariant du système de formes données qui se réduira à un invariant, s'il arrive qu'il ne reste plus aucune puissance de x et y après la différentiation; un nombre quelconque de ces formes, $U, V, W, \dots$, peuvent être identiques, et, dans le cas que nous considérerons le plus souvent, c'est-à-dire lorsqu'il s'agira d'une seule forme, les fonctions $U_1, U_2, U_3, \dots$, sur lesquelles on opérera, ne différeront que par les indices des variables.

Il est clair que, dans cette méthode, le degré du résultat par

rapport aux coefficients sera toujours égal au nombre des figures qui se trouvent dans le symbole. Car, si toutes les fonctions étaient distinctes, la fonction ainsi obtenue contiendrait évidemment au premier degré les coefficients de chacune des formes $U, V, W, \dots$, et, lorsque ces dernières seront supposées identiques, le degré par rapport aux coefficients sera égal au nombre des fonctions $U_1, U_2, U_3, \dots$, sur lesquelles nous opérons. Ainsi, les expressions telles que $\overline{12}''$, considérées ci-dessus, seront toutes du deuxième degré par rapport aux coefficients.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver le degré par rapport à x et y , et que les formes soient d'abord distinctes, U étant du degré n , V du degré n' , W du degré n'' , et ainsi de suite; supposons encore que, dans le symbole, la figure 1 se rencontre α fois, la figure 2 β fois, etc.; puisque U est différentié α fois, V β fois, etc., le résultat sera du degré

$$(n - \alpha) + (n' - \beta) + (n'' - \gamma) + \dots$$

Quand les formes sont identiques, s'il y a p figures dans le symbole sur lequel nous opérons, le degré du résultat en x et y sera

$$np - (\alpha + \beta + \gamma + \dots),$$

et si r désigne le nombre des facteurs tels que $\overline{12}$ qui composent le symbole, il est évident que

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2r.$$

Enfin, si l'on veut obtenir un invariant, on doit avoir

$$\alpha = \beta = \gamma = n.$$

122. Pour jeter plus de clarté sur les principes précédents, nous allons rechercher quels sont tous les invariants possibles du troisièmedegré par rapport aux coefficients. Puisque leur symbole ne peut contenir que trois figures, sa forme la plus générale est $\overline{12}^\alpha . 23^\beta . \overline{31}^\gamma$, et, pour que l'on ait un invariant,

il faut que

$$\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = n, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = \gamma.$$

La forme générale que nous avons à examiner est donc $(\overline{12.23.31})^\alpha$. Si α est impair, le résultat se réduit identiquement à zéro; car en permutant, comme au n° 120, les figures 1 et 2, nous avons

$$(\overline{12.23.31})^\alpha = (\overline{21.13.32})^\alpha;$$

mais ces deux expressions ont des signes contraires. Il en résulte que tous les invariants du troisième ordre sont compris dans la formule $(\overline{12.23.31})^\alpha$ où α est pair. Ainsi $\overline{12.23.31}^2$ est un invariant d'une forme du quatrième degré, puisque les différentiations s'élèvent au quatrième ordre, $\overline{12.23.31}^4$ est un invariant d'une forme du huitième, $\overline{12.23.31}^6$ d'une forme du douzième, et ainsi de suite, les formes de degré $4m$ ayant seules des invariants du troisième ordre par rapport aux coefficients. Si nous désirons maintenant calculer l'un d'eux, par exemple $\overline{12.23.31}^2$, nous écrivons, pour plus de simplicité, $\xi_1, \eta_1, \dots$, pour $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}, \dots$, et nous aurons à effectuer le produit

$$(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2 (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2)^2 (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3)^2.$$

Dans le résultat, nous ne tiendrons pas compte des indices et nous remplacerons ξ^i par $\frac{d^i U}{dx^i}, \dots$; ou, si nous opérons sur une forme du quatrième degré, par a_0 coefficient de x^4 . Le développement peut être abrégé par divers artifices qu'un peu de pratique suggérera sans difficulté, mais nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire de les mentionner ici, et nous nous contenterons de donner le résultat du développement des trois invariants dont il s'agit. $\overline{12.23.31}^2$ est l'invariant d'une forme du quatrième degré déjà obtenu (108, Exemple I,

et 111) :

$$a_4 a_2 a_0 + 2 a_3 a_2 a_1 - a_4 a_1^2 - a_0 a_3^2 - a_2^3;$$

$\overline{12}^4 \cdot \overline{23}^4 \cdot \overline{31}^4$ donne

$$\begin{aligned} & a_8(a_4 a_0 - 4 a_3 a_1 + 3 a_2^2) + a_7(-4 a_3 a_0 + 12 a_4 a_1 - 8 a_3 a_2) \\ & + a_6(3 a_6 a_0 - 8 a_5 a_1 - 22 a_4 a_2 + 24 a_3^2) \\ & + a_5(24 a_3 a_2 - 36 a_4 a_3) + 15 a_4^3; \end{aligned}$$

et $\overline{12}^6 \cdot \overline{23}^6 \cdot \overline{31}^6$

$$\begin{aligned} & a_{12}(a_6 a_0 - 6 a_5 a_1 + 15 a_4 a_2 - 10 a_3^2) \\ & + a_{11}(-6 a_7 a_0 + 30 a_6 a_1 - 54 a_5 a_2 + 30 a_4 a_3) \\ & + a_{10}(15 a_8 a_0 - 54 a_7 a_1 + 24 a_6 a_2 + 150 a_5 a_3 - 135 a_4^2) \\ & + a_9(-10 a_9 a_0 + 30 a_8 a_1 + 150 a_7 a_2 - 430 a_6 a_3 + 270 a_5 a_4) \\ & + a_8(-135 a_8 a_2 + 270 a_7 a_3 + 495 a_6 a_4 - 540 a_5^2) \\ & + a_7(-540 a_7 a_4 + 720 a_6 a_5) - 280 a_6^3. \end{aligned}$$

123. Bien qu'il n'y ait d'autre type d'invariant du troisième ordre que celui que nous venons d'indiquer, il existe un nombre indéfini de covariants; le plus simple est $\overline{12}^2 \cdot \overline{13}$, dont le développement est

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 U}{dx^3} \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{dU}{dy} - \frac{d^3 U}{dx^2 dy} \left(2 \frac{d^2 U}{dx dy} \frac{dU}{dy} + \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{dU}{dx} \right) \\ & + \frac{d^3 U}{dx dy^2} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \frac{dU}{dy} + 2 \frac{d^2 U}{dx dy} \frac{dU}{dx} \right) - \frac{d^3 U}{dy^3} \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{dU}{dx}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on l'applique à une forme du troisième degré, il donne l'évectant déjà obtenu (109).

Le type général des invariants du quatrième ordre, par rapport aux coefficients, est $(\overline{12} \cdot \overline{34})^2 (\overline{13} \cdot \overline{24})^2 (\overline{14} \cdot \overline{23})^2$. Ainsi le discriminant d'une forme cubique est représenté par la notation $(\overline{12} \cdot \overline{34})^2 (\overline{13} \cdot \overline{24})$; mais nous ne pouvons entrer ici dans de plus grands détails sur ce sujet.

124. Les principes que nous venons de poser fournissent une démonstration facile d'un théorème remarquable dû à

M. Hermite, et que nous désignerons sous le nom de *loi de réciprocité* : *Le nombre des invariants du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux coefficients que possède une forme binaire de degré p est égal au nombre des invariants de l'ordre p que possède une forme de degré n .* Nous avons déjà fait voir que si un symbole $\overline{12}^a \overline{23}^b \overline{34}^c \dots$, représente un invariant de l'ordre p par rapport aux coefficients d'une forme de degré n , le nombre des figures 1, 2, 3, ..., est p , et chacune d'elles s'y trouve répétée n fois. Mais nous pouvons calculer par la méthode du n° 103 un invariant $\Sigma(\alpha - \beta)^a(\beta - \gamma)^b(\gamma - \delta)^c \dots$, en remplaçant chaque symbole tel que $\overline{34}$, par la différence de deux racines $(\gamma - \delta)$. Ce dernier est un invariant d'une forme de degré p , puisqu'il y a par hypothèse p racines, et il est de l'ordre n par rapport aux coefficients de cette forme (35).

Ainsi, par exemple, une forme quadratique n'a qu'un invariant indépendant $(\alpha - \beta)^2$, mais toutes ses puissances sont évidemment des invariants dont le type général est $(\alpha - \beta)^{2m}$. Par suite, les formes de degré pair ont seules des invariants du second ordre par rapport aux coefficients, et leur symbole est $\overline{12}^{2m}$. De même, les formes cubiques n'ont d'autre invariant que le discriminant $(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ et ses puissances; ce discriminant est du quatrième ordre par rapport aux coefficients. Par suite, les formes de degré $4m$ ont seules des invariants cubiques dont le type général est $\overline{12}^{2m} \overline{23}^{2m} \overline{31}^{2m}$. Nous démontrerons que les formes du quatrième degré ont deux invariants indépendants, l'un du deuxième, l'autre du troisième ordre par rapport aux coefficients, et par suite toute puissance de l'un multipliée par une puissance de l'autre est un invariant. On en déduit que les formes du quatrième degré ont autant d'invariants de l'ordre p que l'équation $2x + 3y = p$ admet de solutions entières. C'est par suite également le nombre des invariants du quatrième ordre que peut avoir une forme de degré p .

125. M. Hermite a démontré que son théorème s'applique également aux covariants d'un degré donné en x et y ; c'est-

à-dire qu'une forme de degré n possède autant de covariants de l'ordre p par rapport aux coefficients qu'une forme de degré p possède de covariants de l'ordre n . En effet, considérons un symbole $\overset{\text{---}1}{12} \cdot \overset{\text{---}2}{23} \cdot \overset{\text{---}3}{34} \dots$, contenant p figures, la figure 1 y entrant a fois, la figure 2 b fois, et ainsi de suite. Nous avons prouvé que le degré de ce covariant en x et y est $(n-a) + (n-b) + \dots$; mais nous pouvons former la fonction symétrique

$$\Sigma (\alpha - \beta)^1 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^3 \dots (x - \alpha)^{n-a} (x - \beta)^{n-b} \dots$$

elle sera (104) un covariant de la forme de degré p , qui a pour racines $\alpha, \beta, \dots$; chaque racine entrant dans cette expression au degré n , ce covariant sera du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux coefficients, et il contiendra évidemment x et y au même degré que précédemment, savoir $(n-a) + (n-b) + \dots$. Ainsi, par exemple, les seuls covariants que possède une forme quadratique s'obtiennent en multipliant une puissance de la forme par une puissance de son discriminant, et leur type général est

$$(\alpha - \beta)^{2p} (x - \alpha)^q (x - \beta)^q.$$

Leur degré par rapport aux coefficients est $2p + q$, et par rapport à x et y , $2q$. Nous en concluons que toute forme de degré $2p + q$ a un covariant du deuxième ordre par rapport aux coefficients, et du degré $2q$ par rapport à x et y , le symbole de ces covariants étant $\overset{\text{---}2}{12}$. Lorsque $q = 1$, nous retrouvons le théorème du n° 108 : toute forme de degré impair a un covariant quadratique.

126. La notation symbolique précédente fournit un système de calcul complet à l'aide duquel on peut transformer les invariants et les covariants, et reconnaître l'identité de certaines expressions. Nous donnerons plus loin quelques exemples de ces transformations; nous allons montrer d'abord comment on peut, de l'expression symbolique d'une fonction, déduire celle d'une autre fonction dérivant de la première par de nouvelles opérations. Il est clair que si nous avons une fonction

de $x_1, x_2, x_3, \dots$, nous parviendrons au même résultat, soit en supprimant tous les indices et différentiant ensuite par rapport à x , soit en faisant la somme des dérivées partielles par rapport à $x_1, x_2, x_3, \dots$, et supprimant ensuite les indices. La dérivée par rapport à x d'une expression symbolique renfermant les figures 1, 2, 3, ..., s'obtiendra donc en effectuant sur cette expression l'opération $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2} + \frac{d}{dx_3} + \dots$. La

méthode se comprendra plus facilement en l'appliquant à un cas particulier. Proposons-nous par exemple de calculer le Hessien du Hessien d'une forme donnée. On sait que le Hessien $\overline{12}^2$ s'obtient en effectuant sur deux formes identiques U_1, U_2 l'opération indiquée par le symbole $(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2$ dans lequel ξ et η désignent, comme plus haut, les différentiations

par rapport à x et y . Pour former le Hessien de $\overline{12}^2$, nous aurons à exécuter cette opération sur deux fonctions semblables $\overline{12}^2, \overline{34}^2$, la lettre ξ_1 représentant cette fois non plus $\frac{d}{dx_1}$ mais $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}$, la lettre ξ_2 représentant de même $\frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_4}, \dots$

On voit ainsi sans peine que l'expression cherchée est

$$(\overline{13} + \overline{14} + \overline{23} + \overline{24})^2 \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2,$$

ou, en développant,

$$4(\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13}^2) + 4(\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}) + 8(\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}).$$

Pour prendre un exemple plus compliqué, nous allons encore déterminer l'expression symbolique du résultat que l'on obtiendrait en effectuant l'opération $\overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2$ sur trois fonctions H, T et U , H étant le Hessien $\overline{12}^2$, T le covariant $\overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2$, et U la forme primitive. Nous devons d'abord employer des figures différentes pour H et T , et, dans ce but, écrire

$$T = \overline{34}^2 \cdot \overline{45}^2 \cdot \overline{53}^2;$$

nous aurons ensuite à effectuer sur les trois fonctions l'opération indiquée par le symbole

$$(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2 (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2)^2 (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3)^2,$$

dans lequel ξ_1 devra être remplacé par $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}$, ξ_2 par $\frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_3}$ et ξ_3 par $\frac{d}{dx_6}$. On trouve ainsi, en développant, l'expression

$$(\overline{13} + \overline{14} + \overline{15} + \overline{23} + \overline{24} + \overline{25})^2 \\ \times (\overline{36} + \overline{46} + \overline{56})^2 (\overline{16} + \overline{26})^2 \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{45}^2 \cdot \overline{53}^2.$$

127. Les méthodes précédentes s'étendent sans difficulté à un nombre quelconque de variables. Soient $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ trois systèmes de variables qui doivent être transformées par une même substitution. D'après la règle sur la multiplication des déterminants, le déterminant

$$x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$

est un invariant qui, par la transformation, reproduit une fonction semblable multipliée par le module de la transformation. Or, si nous remplaçons x_1 par $\frac{d}{dx_1}$, y_2 par $\frac{d}{dy_2}$, ..., nous obtenons un symbole que nous écrirons $\overline{123}$. Lorsque nous voudrions avoir des invariants ou covariants d'une fonction donnée U , nous n'aurons qu'à effectuer sur plusieurs fonctions $U_1, U_2, U_3, \dots, U_p$ l'opération indiquée par le produit de plusieurs symboles, tels que $\overline{123}^\alpha \overline{124}^\beta \overline{235}^\gamma \dots$, en supprimant tous les indices après la différentiation. Par exemple, si U_1, U_2, U_3 sont des formes quadratiques ternaires, et que $a, b, c, 2f, 2g, 2h$ désignent, comme aux nos 72 et 101, les coefficients de U_1 , le symbole $\overline{123}^2$ développé donne

$$a(b'c'' + b''c' - 2f'f'') + b(c'a'' + c''a' - 2g'g'') \\ + c(a'b'' + a''b' - 2h'h'') + 2f(g'h'' + g''h' - a'f'' - a''f') \\ + 2g(h'f'' + h''f' - b'g'' - b''g') \\ + 2h(f'g'' + f''g' - c'h'' - c''h'),$$

expression qui se réduit, en supposant les trois formes identiques et divisant par 6, à

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

En remplaçant a , coefficient de x^2 , par $\frac{d^2 U}{dx^2}, \dots$, nous aurons le développement de $\overline{123}^2$ appliqué à une fonction ternaire quelconque. Ce covariant est le *Hessien* de la fonction.

On verra, comme au n° 120, que les puissances impaires du symbole $\overline{123}$ se réduisent à zéro lorsqu'on l'applique à une seule fonction. Nous donnerons pour autre exemple le développement de $\overline{123}^3$ appliqué à la forme du quatrième degré,

$$\begin{aligned} & ax^4 + by^4 + cz^4 \\ & + 4(a_2x^3y + a_3x^3z + b_3y^3z + b_1y^3x + c_1z^3x + c_2z^3y) \\ & + 6(dy^2z^2 + ez^2x^2 + fx^2y^2) + 12xyz(lx + my + nz). \end{aligned}$$

La valeur de $\overline{123}^4$ est

$$\begin{aligned} & abc - 4(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) + 3(ad^2 + be^2 + cf^2) \\ & + 4(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\ & - 12(a_2nd + a_3md + b_1ne + b_3le + c_1mf + c_3lf) \\ & + 12(lb_1c_1 + mc_2a_2 + na_3b_3) + 12(dl^2 + em^2 + fn^2) \\ & + 6def - 12lmn. \end{aligned}$$

128. Nous pouvons exprimer de même des fonctions contenant des variables α, β, γ , qui se transforment par la substitution inverse; en effet, puisqu'elles se transforment par la même substitution que les dérivées $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$, le déterminant symbolique

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{d}{dy_1} \frac{d}{dz_2} - \frac{d}{dy_2} \frac{d}{dz_1} \right) + \beta \left(\frac{d}{dz_1} \frac{d}{dx_2} - \frac{d}{dz_2} \frac{d}{dx_1} \right) \\ & + \gamma \left(\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1} \right), \end{aligned}$$

que nous désignerons, pour abréger, par $\overline{x12}$, pourra nous

servir à former des contrevariants ou des covariants mixtes. Ainsi U_1, U_2 étant deux formes quadratiques ternaires, $\overline{\alpha 12}^2$ développé donne

$$\begin{aligned} & \alpha^2 (b'c'' + b''c' - 2f'f'') + \beta^2 (c'a'' + c''a' - 2g'g'') \\ & + \gamma^2 (a'b'' + a''b' - 2h'h'') \\ & + 2\beta\gamma (g'h'' + g''h' - a'f'' - a''f') \\ & + 2\gamma\alpha (h'f'' + h''f' - b'g'' - b''g') \\ & + 2\alpha\beta (f'g'' + f''g' - c'h'' - c''h'), \end{aligned}$$

et nous retrouvons le contrevariant calculé au n° 101 (Ex. II).

On aura de même un contrevariant de la forme du quatrième degré ci-dessus en développant le symbole $\overline{\alpha 12}^4$.

Nous n'avons qu'à remplacer, dans ces deux fonctions, le coefficient de chaque puissance x^n de x par $\frac{d^n}{dx^n}$ pour obtenir un symbole qui fournira un covariant mixte lorsqu'on l'appliquera à une forme de degré plus élevé. Ainsi $\overline{\alpha 12}^2$ développé donne

$$\alpha^2 \left[\frac{d^2 U}{dy^2} \frac{d^2 U}{dz^2} - \left(\frac{d^2 U}{dy dz} \right)^2 \right] + \dots,$$

expression qui, appliquée à une forme quadratique, donne simplement un contrevariant, mais qui, pour une forme de degré supérieur, contient aussi bien x, y, z que α, β, γ , et, par suite, est un covariant mixte.

En général, si nous avons l'expression symbolique d'un invariant d'une forme binaire, nous n'aurons qu'à placer devant chaque terme le symbole de contrevariant α , pour obtenir un contrevariant d'une forme ternaire de même degré.

129. Si, dans un contrevariant, on remplace α, β, γ par $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$, et que l'on opère ensuite sur U , on obtient un covariant (106) dont le symbole se déduit de celui du contrevariant en y écrivant une nouvelle figure à la place de α . Ainsi

de $\overline{\alpha 23}^2$ on déduit $\overline{123}^2$; de $\overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 24}$, $\overline{123} \cdot \overline{124}$, ... Réciproquement, si, dans le symbole d'un invariant, on remplace une figure par le symbole α des contrevariants, on obtient l'évectant de cet invariant. Ainsi l'expression

$$\overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{234} \cdot \overline{314}$$

étant un invariant d'une forme cubique, son évectant sera

$$\overline{123} \cdot \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 31}.$$

Dans le cas d'une forme binaire, cette règle se simplifie : si l'on remplace la figure 1 dans $\overline{12}$ par le symbole des contrevariants, cette expression devient en développant $\xi \frac{d}{dy} - \eta \frac{d}{dx}$; mais ξ et η étant transformés par la même substitution que $-y$ et x , elle revient à $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}$, et peut alors être complètement supprimée puisqu'elle ne fait plus qu'apporter au résultat un facteur numérique. Par conséquent, si l'on a le symbole d'un invariant d'une forme binaire, celui de son évectant s'en déduit en supprimant les facteurs qui contiennent une même figure. Ainsi le symbole

$$\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}$$

représentant le discriminant d'une forme cubique, son évectant, en supprimant les facteurs qui contiennent 4, sera

$$\overline{12}^2 \cdot \overline{13}.$$

Si dans un contrevariant on remplace α , β , γ , par $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$, on a un covariant dont le symbole se déduit de celui du contrevariant en écrivant à la place de chaque lettre α une nouvelle figure *différente* : ainsi de $\overline{\alpha 34}^2$ on déduit $\overline{134} \cdot \overline{234}$, et ainsi de suite.

130. Le procédé de dérivation employé au n° 126 pour les

formes binaires s'applique sans peine à un nombre quelconque de variables. Supposons par exemple que l'on demande, pour une forme cubique ternaire, l'expression de l'invariant que l'on obtient en opérant sur le Hessien avec l'évectant

$$\overline{123}.\overline{\alpha 12}.\overline{\alpha 23} \overline{\alpha 31}$$

du n° 129 : nous aurons à remplacer dans ce dernier symbole α par $4 + 5 + 6$ et à opérer ensuite sur la fonction $\overline{456}^2$. En développant et supprimant tous les termes qui contiennent plus de trois fois les figures 4, 5, 6, on trouve pour l'expression cherchée

$$\overline{123}.\overline{124}.\overline{235}.\overline{316}.\overline{456}^2.$$

131. Nous allons maintenant montrer par quelques exemples comment les notations symboliques permettent de transformer l'expression des invariants et des covariants. La base de ces transformations est, pour les formes binaires, l'identité suivante

$$D_1 \overline{23} + D_2 \overline{31} + D_3 \overline{12} = 0,$$

dans laquelle D_i représente, pour abrégér, $x \frac{d}{dx_i} + y \frac{d}{dy_i}$. Il est aisé de voir en effet qu'en développant, les coefficients de x et y se réduisent à zéro. Afin de faire mieux comprendre l'usage de cette identité, nous en donnerons une première application avec plus de détail qu'il ne sera nécessaire de le faire ensuite.

Mettant l'équation sous la forme

$$D_1 \overline{23} = D_2 \overline{13} - D_3 \overline{12}$$

et élevant au carré, il vient

$$D_2^2 \overline{13}^2 + D_3^2 \overline{12}^2 - D_1^2 \overline{23}^2 = 2 D_2 D_3 \overline{12}.\overline{13},$$

relation qui est vraie lors même que les trois formes U_1, U_2, U_3 sur lesquelles nous sommes censés opérer sont différentes. Mais nous considérons seulement ici le cas d'une seule forme et nous admettrons que U_1, U_2, U_3 deviennent identiques lors-

que l'on supprime les indices des variables; dans ce cas, nous avons vu (120) que les trois expressions $D_1^2 \overline{23}^2$, $D_2^2 \overline{31}^2$, $D_3^2 \overline{12}^2$ désignent une seule et même chose. L'équation précédente se réduit donc à

$$D_1^2 \overline{12}^2 = 2 D_2 D_3 \overline{12} \cdot \overline{13}.$$

Mais en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes, l'opération D exécutée sur une fonction n'a d'autre effet que de la multiplier par un facteur numérique : dans le premier membre de l'équation, D_3^2 n'affectant que U_3 , qui n'est pas différenciée, ce facteur sera $n(n-1)$; dans le second membre, D_2, D_3 affectant des fonctions déjà différenciées une fois, introduisent le facteur $n-1$. Par conséquent, en développant, supprimant les indices et divisant par $2(n-1)$, nous avons

$$\begin{aligned} nU \left[\frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^2 U}{dy^2} - \left(\frac{d^2 U}{dx dy} \right)^2 \right] \\ = (n-1) \left[\frac{d^2 U}{dx^2} \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 - 2 \frac{d^2 U}{dx dy} \frac{dU}{dx} \frac{dU}{dy} + \frac{d^2 U}{dy^2} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

132. Il faut remarquer que toutes les fois que la transformation a pour effet de diminuer le nombre des figures dans le symbole, la forme primitive U doit apparaître comme facteur dans l'expression de la fonction. En effet, on voit par l'exemple ci-dessus que $\overline{12} \cdot \overline{13}$ et $\overline{12}^2$ ne diffèrent que par un facteur numérique; mais comme nous opérons sur trois fonctions U_1, U_2, U_3 et que le symbole $\overline{12}^2$ n'affecte pas U_3 , la fonction U doit rester comme facteur, lorsque l'on supprime les indices.

133. En général, tout symbole peut être transformé de manière que la puissance la plus élevée d'un facteur quelconque $\overline{12}$ soit paire; en effet, le sens du symbole n'étant pas modifié par la permutation des figures 1 et 2, nous avons

$$\overline{12}^{2m+1} \varphi_1 = - \overline{12}^{2m+1} \varphi_2 = \frac{1}{2} \overline{12}^{2m+1} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

et, à l'aide de l'identité du n° 131, la fonction $\varphi_1 - \varphi_2$ peut être transformée de manière à devenir divisible par $\overline{12}$. Ainsi, lorsque m est impair, les deux expressions $\overline{12}^m \overline{13}$ et $\overline{12}^{m+1}$ ne diffèrent que par un facteur; car on a

$$2D_2 \overline{12}^m \overline{13} = \overline{12}^m (D_2 \overline{13} - D_1 \overline{23}) = D_3 \overline{12}^{m+1},$$

ou bien, n étant le degré de la fonction U sur laquelle on opère,

$$2(n-m) \overline{12}^m \overline{13} = n \cdot \overline{12}^{m+1}.$$

134. Nous pouvons joindre à l'identité du n° 131 la relation suivante, qu'il est facile de vérifier,

$$\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{13} \cdot \overline{42} + \overline{14} \cdot \overline{23} = 0,$$

et, à l'aide de ces deux équations, réduire tous les symboles à un certain nombre de formes types que nous indiquerons par des lettres spéciales. Pour deux facteurs, nous adopterons comme type le Hessian

$$H = \overline{12}^2;$$

pour trois facteurs,

$$G = \overline{12}^2 \overline{13} \quad (123);$$

pour quatre facteurs,

$$S = \overline{12}^4 \quad (108) \quad \text{ou} \quad H^2 = \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2;$$

pour cinq facteurs,

$$F = \overline{12}^4 \overline{13} \quad \text{ou} \quad GH = \overline{12}^2 \cdot \overline{13} \cdot \overline{45}^2;$$

pour six facteurs,

$$A = \overline{12}^6 \quad (120) \quad \text{ou} \quad T = \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2 \quad (122) \quad \text{ou} \quad H^3 = \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{56}^2,$$

et ainsi de suite. Les exemples suivants feront comprendre la marche à suivre pour ces réductions.

EXEMPLE I. — Démontrer que si l'on remplace dans une fonction U x par $\frac{dU}{dy}$ et y par $-\frac{dU}{dx}$, le covariant ainsi obtenu est divisible par U .

Déterminons d'abord l'expression symbolique de ce covariant. La fonction donnée U peut s'écrire sous la forme $\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}\right)^n U$. Lorsqu'on y fait la substitution indiquée, chacun des n facteurs prend la forme $\frac{d}{dx} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dy} \frac{d}{dx_2}$. Le covariant $\frac{d^n U}{dx^n} \left(\frac{dU}{dy}\right)^n - \dots$ s'exprimera donc symboliquement comme produit de n facteurs $\overline{12}.\overline{13}.\overline{14} \dots$, l'un des symboles (celui qui dans le développement donne les dérivées d'ordre n) restant le même dans tous les facteurs, tandis que l'autre doit être différent pour chaque facteur, afin qu'après la multiplication on n'ait que des puissances des dérivées du premier ordre. Désignant donc $\overline{12}.\overline{13}$ par Q_2 , $\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}$ par Q_3 , $\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}.\overline{15}$ par Q_4 , etc., nous avons à exprimer Q_2 , Q_3 , $Q_4, \dots$, en fonction des formes choisies comme types.

1° La valeur de Q_2 a été donnée (131); calculons celle de Q_3 . Multiplions l'équation

$$2D_2D_3\overline{12}.\overline{13} = D_2^2\overline{13}^2 + D_3^2\overline{12}^2 - D_1^2\overline{23}^2$$

du n° 131 par $\overline{14}$; les deux premiers termes du second membre deviennent identiques, le troisième s'annule, et il vient

$$D_2D_3\overline{12}.\overline{13}.\overline{14} = D_2^2\overline{13}.\overline{14} \quad \text{ou bien} \quad (n-1)Q_3 = nGU.$$

En général, tout symbole peut être condensé en remplaçant chaque couple de facteurs simples ayant une figure commune, tels que $\overline{12}.\overline{13}$, par un seul facteur carré au moyen de l'équation précédente.

2° Calculons maintenant Q_4 . Multiplions les deux équations

$$2D_2D_3\overline{12}.\overline{13} = D_3^2\overline{12}^2 + D_2^2\overline{13}^2 - D_1^2\overline{23}^2,$$

$$2D_4D_3\overline{14}.\overline{15} = D_3^2\overline{14}^2 + D_4^2\overline{15}^2 - D_1^2\overline{45}^2;$$

il vient, en réunissant les termes semblables,

$$\begin{aligned} 4(n-1)^4Q_4 &= D_1^4\overline{23}^2.\overline{45}^2 - 4D_1^2D_3^2\overline{12}^2.\overline{45}^2 + 4D_3^2D_5^2\overline{12}^2.\overline{14}^2 \\ &= -3n(n-1)(n-2)(n-3)H^2U \\ &\quad + 4n^2(n-1)^2U^2.\overline{12}^2.\overline{13}^2. \end{aligned}$$

Il nous reste à exprimer $\overline{12}^2.\overline{13}^2$ en fonction des formes types. Élevons à la quatrième puissance l'équation

$$D_1\overline{23} = D_2\overline{13} - D_3\overline{12};$$

nous avons, en groupant les termes semblables.

$$6D_2^2 D_3^2 \overline{12}^2 \cdot \overline{13}^2 = 8D_3^2 D_2 \overline{12}^2 \cdot \overline{13} - D_3^4 \overline{12}^2;$$

mais, comme au n° 133 on a

$$8D_3^2 D_2 \overline{12}^2 \cdot \overline{13} = 4D_3^4 \overline{12}^2,$$

et substituant

$$2(n-2)(n-3) \overline{12}^2 \cdot \overline{13}^2 = n(n-1)SU;$$

donc enfin

$$\begin{aligned} & 4(n-1)^2(n-2)(n-3)Q_1 \\ &= -3n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2H^2U + 2n^3(n-1)^2SU^2. \end{aligned}$$

On trouvera les valeurs de Q_3 et Q_6 calculées, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IX, p. 23.

EXEMPLE II. — *Démontrer que le Hessian du Hessian est une fonction linéaire de SH et de TU.*

Nous avons trouvé (126) que l'expression de cette fonction est

$$4(\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13}^2) + 4(\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}) + 8(\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}).$$

et il faut prouver que chacun de ces trois termes est réductible à la forme $\alpha SH + \beta TU$.

1° Commençons par $\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{13}^2$. Multiplions par $\overline{14}^2$ le produit des deux équations

$$2D_2 D_3 \overline{12} \cdot \overline{13} = D_3^2 \overline{12}^2 + D_2^2 \overline{13}^2 - D_1^2 \overline{23}^2,$$

$$2D_2 D_3 \overline{24} \cdot \overline{34} = D_3^2 \overline{24}^2 + D_2^2 \overline{34}^2 - D_4^2 \overline{23}^2,$$

il vient

$$\begin{aligned} & 4D_2^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} \cdot \overline{34} \cdot \overline{14}^2 \\ &= 2D_3^4 \overline{12}^2 \cdot \overline{24}^2 \cdot \overline{14}^2 + D_1^2 D_4^2 \overline{23}^4 \cdot \overline{14}^2 - 2D_2^2 D_4^2 \overline{13}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{14}^2; \end{aligned}$$

mais en élevant au carré l'identité du n° 134, nous avons

$$2 \cdot \overline{14}^2 \cdot \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} \cdot \overline{34} = \overline{14}^2 (\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 + \overline{13}^2 \cdot \overline{24}^2 - \overline{14}^2 \cdot \overline{23}^2),$$

et, par suite, le premier membre de l'équation précédente devient

$$4D_2^2 D_3^2 \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{14}^2 - 2D_2^2 D_3^2 \overline{14}^4 \cdot \overline{23}^2;$$

d'où, en réduisant,

$$6D_2^2 D_3^2 \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{14}^2 = 3D_2^2 D_3^2 \overline{14}^4 \cdot \overline{23}^2 + 2D_3^4 \overline{12}^2 \cdot \overline{24}^2 \cdot \overline{14}^2$$

ou bien

$$6(n-2)(n-3)\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}^2 = 3(n-2)(n-3)\text{SH} + 2n(n-1)\text{TU}.$$

2° Passons au terme $\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{24}$. Multiplions par $\overline{12}^2$ le produit des deux équations

$$-2D_1D_1\overline{13}.\overline{34} = D_1^2\overline{34}^2 + D_1^2\overline{13}^2 - D_3^2\overline{14}^2,$$

$$2D_2D_3\overline{24}.\overline{34} = D_2^2\overline{34}^2 + D_3^2\overline{24}^2 - D_1^2\overline{23}^2,$$

nous avons

$$\begin{aligned} & -4D_1D_2D_3D_4\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{24} \\ & = D_1^2D_2^2\overline{12}^2.\overline{34}^4 + 2D_3^2D_1^2\overline{12}^2.\overline{13}^2.\overline{24}^2 - 2D_1^2\overline{12}^2.\overline{23}^2.\overline{31}^2; \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant $\overline{12}^2.\overline{13}^2.\overline{24}^2$ par la valeur trouvée plus haut,

$$\begin{aligned} & -12(n-3)^3\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{24} \\ & = 6(n-2)^2(n-3)\text{SH} - 4n(n-1)(n-2)\text{TU}. \end{aligned}$$

3° Considérons enfin le terme $\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14}$. Nous n'avons qu'à remplacer $\overline{13}.\overline{14}$ par sa valeur tirée de l'identité du n° 131, et il vient

$$2D_3D_1\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14} = 2D_1^2\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}^2 - D_1^2\overline{12}^2.\overline{34}^4,$$

et, substituant comme plus haut,

$$6(n-3)^2\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14} = 2n(n-1)\text{TU}.$$

En réunissant les trois termes, on a donc pour l'expression cherchée une fonction linéaire de SH et TU.

135. Les méthodes précédentes s'appliquent aux formes contenant un nombre quelconque de variables. Pour les formes ternaires, on emploiera les identités

$$D_1\overline{123} = D_1\overline{234} + D_2\overline{314} + D_3\overline{124},$$

$$\overline{123}.\overline{145} + \overline{124}.\overline{153} + \overline{125}.\overline{134} = 0,$$

auxquelles on joindra les relations correspondantes pour les contrevariants

$$P\overline{123} = D_1\overline{\alpha 23} + D_2\overline{\alpha 31} + D_3\overline{\alpha 12},$$

$$\overline{\alpha 12}.\overline{\alpha 34} + \overline{\alpha 23}.\overline{\alpha 14} + \overline{\alpha 31}.\overline{\alpha 24} = 0,$$

P désignant, pour abréger, la fonction $\alpha x + \beta y + \gamma z$.

EXEMPLE I. — *Trouver une relation entre les covariants du quatrième ordre d'une forme ternaire du quatrième degré.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des quantités quelconques liées par la relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

En élevant deux fois au carré, il est facile de voir que l'on a

$$8\alpha\beta\gamma\delta = 2\Sigma\alpha^2\beta^2 - \Sigma\alpha^4.$$

Appliquant cette formule à l'équation identique

$$D_1 \overline{123} = D_1 \overline{234} + D_2 \overline{314} + D_3 \overline{124},$$

nous avons

$$8D_1 D_2 D_3 D_4 \overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{234} \cdot \overline{314} = 4D_4^4 \overline{123}^4 - 12D_3^2 D_4^2 \overline{123}^2 \cdot \overline{124}^2,$$

c'est la relation cherchée.

EXEMPLE II. — *Démontrer que si l'on remplace dans les émanants d'une forme ternaire x, y, z par $\gamma \frac{dU}{dy} - \beta \frac{dU}{dz}, \alpha \frac{dU}{dz} - \gamma \frac{dU}{dx}, \beta \frac{dU}{dx} - \alpha \frac{dU}{dy}$, les résultats obtenus sont de la forme*

$$P_n U + Q_n (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Il est aisé de voir que l'expression symbolique de ces résultats est $\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} \cdot \overline{\alpha 14} \cdot \overline{\alpha 15} \dots$. Calculons les valeurs de P_2, Q_2, P_3, Q_3 (*).

1° Pour obtenir celle de $\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13}$, nous n'avons qu'à élever au carré l'équation

$$P \cdot \overline{123} = D_1 \overline{\alpha 23} + D_2 \overline{\alpha 31} + D_3 \overline{\alpha 12},$$

et il vient

$$P^2 \cdot \overline{123}^2 = 3D_3^2 \overline{\alpha 12}^2 - 6D_2 D_3 \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13},$$

ou bien, en désignant par H le Hessien $\overline{123}^2$ et par G le Hessien *bordé* $\overline{\alpha 12}^2$,

$$6(n-1)^2 \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} = 3n(n-1)GU - P^2H.$$

2° Calculons maintenant $\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} \cdot \overline{\alpha 14}$. De l'identité précédente, nous tirons également

$$\begin{aligned} & -2D_2 D_3 \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} \\ & = P^2 \cdot \overline{123}^2 - 2PD_1 \overline{123} \cdot \overline{\alpha 23} + D_1^2 \overline{\alpha 23}^2 - D_2^2 \overline{\alpha 31}^2 - D_3^2 \overline{\alpha 12}^2; \end{aligned}$$

(*) Cette question se présente dans la recherche des doubles tangentes aux courbes planes (voir l'ouvrage de M. Salmon, *Higher plane Curves*, p. 81).

multipliant par $\overline{\alpha 14}$, deux des termes se réduisent à zéro et il reste

$$-2(n-1)^2 \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} \cdot \overline{\alpha 14} = P^2 \cdot \overline{123} \cdot \overline{\alpha 14} - 2n(n-1) \overline{U \alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13}.$$

Pour prouver que $\overline{123} \cdot \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 14}$ se réduit à zéro, nous n'avons qu'à multiplier par $\overline{123}$ l'équation identique

$$\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 34} + \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 14} + \overline{\alpha 31} \cdot \overline{\alpha 24} = 0,$$

et ses trois termes, ne différant que par des permutations des figures 1, 2, 3, doivent se réduire séparément à zéro.

136. Dans l'exposition précédente des méthodes symboliques nous avons suivi la notation et les procédés primitivement employés par M. Cayley. Nous allons maintenant faire connaître quelques modifications introduites par MM. Aronhold et Clebsch, qui ont manié les méthodes symboliques avec beaucoup de succès, mais peut-être sans se rendre parfaitement compte de l'identité de leurs procédés avec ceux qu'avait imaginés antérieurement M. Cayley. Ils désignent les variables par $x_1, x_2, x_3, \dots$, et les coefficients par des indices correspondants aux variables qu'ils multiplient. Ainsi les formes ternaires du troisième et du quatrième degré sont désignées par les notations $\sum a_{ikl} x_i x_k x_l$, $\sum a_{iklm} x_i x_k x_l x_m$, les nombres i, k, l, m , pouvant recevoir les valeurs 1, 2, 3, 4. Il faut remarquer que dans cette notation $a_{iik} = a_{iki} = a_{kii}$, de telle sorte qu'en effectuant les sommes indiquées on obtient une forme écrite avec les coefficients du binôme. Ainsi en faisant la somme $\sum a_{ikl} x_i x_k x_l$, les trois termes $a_{112} x_1 x_1 x_2$, $a_{211} x_1 x_2 x_1$, $a_{211} x_2 x_1 x_1$ sont identiques : il en est de même des six termes $a_{123} x_1 x_2 x_3$, $a_{132} x_1 x_3 x_2$, $a_{213} x_2 x_1 x_3$, $a_{231} x_2 x_3 x_1$, $a_{312} x_3 x_1 x_2$, $a_{321} x_3 x_2 x_1$, de telle sorte que la somme développée est

$$a_{111} x_1 x_1 x_1 + a_{222} x_2 x_2 x_2 + a_{333} x_3 x_3 x_3 \\ + 3a_{112} x_1 x_1 x_2 + \dots + 6a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Et ainsi de suite en général. M. Aronhold se sert en outre, pour désigner d'une manière abrégée une forme quelconque, de

l'expression symbolique

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots)^n,$$

dans laquelle on doit, après le développement, remplacer les produits tels que $a_i a_k a_l$ par les coefficients correspondants a_{ikl} . Ainsi la forme cubique ternaire ci-dessus s'écrit

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3;$$

les termes $a_1 a_1 a_1 x_1 x_1 x_1$, $3 a_1 a_1 a_2 x_1 x_1 x_2 + \dots$, dans le développement du cube devant être remplacés par $a_{111} x_1 x_1 x_1$, $3 a_{112} x_1 x_1 x_2 \dots$. La forme aurait également pu s'écrire

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^3, \quad (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^3,$$

les produits $b_1 b_1 b_1$, $c_1 c_1 c_2, \dots$, devant aussi être remplacés par les coefficients a_{111} , $a_{112}, \dots$. La règle donnée par M. Aronhold pour la formation des invariants consiste à former avec $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \dots$, un certain nombre de déterminants, à les multiplier et à remplacer après la multiplication les produits $a_i a_k a_l, b_m b_n b_p, \dots$, par les coefficients $a_{ikl}, a_{mnp}, \dots$. C'est ainsi que M. Aronhold a le premier découvert un invariant fondamental de la forme cubique ternaire en formant le produit des quatre déterminants $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3, \Sigma \pm b_1 c_2 d_3, \Sigma \pm c_1 d_2 a_3, \Sigma \pm d_1 a_2 b_3$, et effectuant ensuite les substitutions que nous venons d'indiquer. Le même invariant dans la notation de M. Cayley s'écrirait (129)

$$\overline{123} \cdot \overline{234} \cdot \overline{341} \cdot \overline{412}.$$

137. Pour faire voir que les deux méthodes sont au fond identiques, il suffit de remarquer que, d'après le théorème connu des fonctions homogènes, une fonction quelconque u du degré n ne diffère que par un facteur numérique de

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + x_3 \frac{d}{dx_3} \right)^n u,$$

de telle sorte qu'en l'écrivant sous la forme

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n,$$

les symboles $a_1, a_2, a_3, \dots$ ne diffèrent que par un facteur nu-

mérique des symboles différentiels $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}, \dots$. Nous parviendrons donc évidemment au même résultat, soit en formant, comme M. Cayley, des déterminants avec les symboles différentiels $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}, \dots$, soit en les formant, comme M. Aronhold, avec les symboles $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Tous deux font en outre usage du même artifice. Si l'on multiplie un certain nombre de symboles différentiels

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda \frac{d}{dy}\right) \left(\frac{d}{dx} + \mu \frac{d}{dy}\right) \dots$$

et que l'on opère ensuite sur U, le résultat sera une fonction linéaire des dérivées de U d'un ordre égal au nombre des facteurs du symbole, et de cette manière on n'aurait jamais de coefficient différentiel à une puissance supérieure à la première. Lors donc que l'on demande de composer le symbole d'une fonction renfermant des puissances de ces dérivées, l'artifice auquel recourait M. Cayley consistait à écrire avec des variables différentes, les facteurs du produit

$$\left(\frac{d}{dx_1} + \lambda \frac{d}{dy_1}\right) \left(\frac{d}{dx_2} + \mu \frac{d}{dy_2}\right) \dots,$$

pour opérer sur plusieurs fonctions $U_1, U_2, \dots$, puis à identifier ces variables après la multiplication. De même, M. Aronhold emploie dans ses produits symboliques des symboles distincts qui reprennent la même signification une fois que la multiplication est effectuée. En multipliant les symboles $a_i, a_k, a_l, \dots$, on ne pourrait obtenir que des termes renfermant les coefficients a_{ikh} à la première puissance. Pour exprimer symboliquement des fonctions renfermant les coefficients à un degré plus élevé, l'artifice consiste donc à faire usage de plusieurs séries de symboles $a_i, a_k, a_l; b_i, b_k, b_l, \dots$, les produits $a_i a_k a_l, b_i b_k b_l, c_i c_k c_l, \dots$, désignant tous le même coefficient a_{ikh} .

138. Après avoir exposé dans tous ses détails la méthode de M. Cayley, il est inutile d'insister plus longuement sur une autre

méthode qui n'en diffère que par la notation. Nous ferons seulement connaître ici comment M. Clebsch a démontré que tout invariant peut s'exprimer au moyen de produits symboliques. Soit $\varphi(a, b, c, \dots)$ un invariant d'une forme unique; il a été démontré (90) qu'en effectuant sur lui l'opération $a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots$, on aura un invariant commun de deux formes ayant l'une $a, b, c, \dots$, l'autre $a', b', c', \dots$ pour coefficients correspondants. En effectuant de même sur ce nouvel invariant l'opération $a'' \frac{d}{da} + b'' \frac{d}{db} + \dots$, nous aurons un invariant de trois formes et nous pourrons la répéter tant que les coefficients $a, b, c, \dots$, figureront dans l'invariant. On peut donc, si l'on a un invariant d'une forme unique contenant les coefficients au degré p , en déduire un invariant d'un système de p formes qui contiendra les coefficients de chacune d'elles au premier degré, et l'on revient d'ailleurs à l'invariant primitif, en supposant que les p formes redeviennent identiques; car l'opération $a \frac{d}{da} + b \frac{d}{db} + \dots$ ne fait qu'y introduire un facteur numérique. Si nous supposons, en outre, que toutes les formes nouvelles ainsi introduites sont des puissances $n^{\text{ièmes}}$ parfaites, nous parvenons à ce résultat que de l'invariant donné d'une forme unique, on peut déduire un invariant d'un système de p formes

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots)^n, (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots)^n, (c_1 x_1 + \dots)^n,$$

et, ainsi que nous venons de le dire, on revient à l'invariant primitif en remplaçant chaque coefficient des nouvelles formes par son correspondant dans la forme primitive, en remplaçant par exemple $a_i^n, b_i^n, c_i^n, \dots$, par le coefficient de x_i^n dans la forme primitive. Les invariants des fonctions

$$(a_1 x_1 + \dots)^n, (b_1 x_1 + \dots)^n,$$

sont évidemment des invariants des fonctions linéaires

$$a_1 x_1 + \dots, b_1 x_1 + \dots.$$

Il est donc démontré que tout invariant de l'ordre p d'une forme unique peut être exprimé symboliquement comme invariant d'un système de p formes linéaires : le seul point qui nous reste maintenant à démontrer est que ce dernier invariant est nécessairement une fonction des déterminants formés avec les coefficients de ces fonctions linéaires. Nous renverrons, pour la démonstration de M. Clebsch, au *Journal de Crelle*, t. LIX, p. 7, cette démonstration, sans présenter de véritables difficultés, exigeant d'assez longs développements et beaucoup d'espace. On peut encore s'en rendre compte à l'inspection des équations différentielles des invariants. Ainsi, pour un système de formes linéaires $ax + by + \dots$, tout invariant doit satisfaire à l'équation

$$b \frac{dI}{da} + b' \frac{dI}{da'} + b'' \frac{dI}{da''} + \dots = 0,$$

laquelle, intégrée comme une équation ordinaire aux différences partielles, donne pour I une fonction des déterminants $ab' - a'b$, $ab'' - a''b$, $\dots$ et de même en général.



DOUZIÈME LEÇON.

FORMES CANONIQUES.

139. Puisque les invariants et les covariants conservent leurs relations mutuelles quelles que soient les transformations linéaires que l'on fait subir à la fonction, il est clair que, pour étudier ces relations, il suffira de la discuter sous la forme la plus simple à laquelle elle puisse être ramenée. On étendra ainsi aux fonctions renfermant un nombre quelconque de variables la méthode avec laquelle le lecteur est déjà familiarisé pour les formes à trois et quatre variables; lorsque l'on veut, en effet, étudier les propriétés d'une courbe ou d'une surface, tous les géomètres savent quels avantages procure un choix d'axes de coordonnées permettant de ramener l'équation de la courbe ou de la surface à sa forme la plus simple (*). Cette forme la plus simple à laquelle une fonction puisse être ramenée sans perdre sa généralité, est ce que l'on appelle sa *forme canonique*. Nous pouvons, en comptant simplement les constantes, reconnaître si une fonction proposée est assez générale pour être prise comme forme canonique d'une autre fonction donnée; car, si elle ne contient pas explicitement ou implicitement autant de constantes que cette dernière prise sous sa forme la plus générale, la réduction ne sera pas toujours possible(**). Ainsi, une forme cubique

(*) Il faut toutefois reconnaître que les progrès de l'analyse qui permettent de traiter plus facilement les fonctions sous leur forme générale, tendent à restreindre l'avantage de leur réduction à une forme plus simple.

(**) Il n'est cependant pas vrai que réciproquement une forme qui contient le nombre convenable de constantes soit nécessairement une de celles auxquelles on peut ramener la fonction générale. Car si nous cherchons, par la comparaison des coefficients, à l'identifier avec cette dernière, bien que le nombre des

inaire peut être ramenée à la forme $X^3 + Y^3$, car cette dernière, étant équivalente à

$$(lx + my)^3 + (l'x + m'y)^3,$$

contient en réalité quatre constantes, et, par suite, est aussi générale que

$$(a, b, c, d)(x, y)^3.$$

De même, une forme cubique ternaire contient, en général, dix constantes, mais la forme

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 6MXYZ$$

en contient également dix, puisque, indépendamment de la constante M qui apparaît explicitement, chacune des quantités X, Y, Z en contient implicitement trois autres. Cette dernière peut donc être prise comme forme canonique d'une forme cubique ternaire, et, en effet, les progrès les plus importants qui aient été faits récemment dans la théorie des courbes du troisième degré, sont dus à l'emploi de cette expression simple et commode.

équations soit égal à celui des quantités à déterminer, il *peut* arriver que les constantes y figurent de telle sorte que les équations ne puissent être toutes satisfaites. Ainsi la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = lx + my + n$$

renferme cinq constantes, et cependant elle n'est pas une de celles à laquelle on puisse ramener la forme quadratique ternaire prise dans toute sa généralité. En effet les constantes y figurent de telle sorte que, bien que leur nombre soit plus que suffisant pour identifier les coefficients de x, y et le terme indépendant à ceux d'une forme quelconque, nous n'avons cependant aucun moyen d'identifier de même ceux de x^2, xy et y^2 .

Un exemple plus important est le suivant :

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4,$$

z, u, v étant des fonctions linéaires. Dans le cas d'une forme ternaire, cette forme contient implicitement quatorze constantes indépendantes, et dès lors paraît être une de celles auxquelles peut se ramener la forme générale du quatrième degré. M. Clebsch a cependant fait voir qu'il existe une condition qui doit être remplie pour que la réduction soit possible et que cette condition consiste en ce qu'un certain invariant doit se réduire à zéro.

140. La fonction quadratique $(a, b, c)(x, y)^2$ peut être ramenée d'une infinité de manières à la forme $x^2 + y^2$, puisque cette dernière comprend quatre constantes et la première seulement trois. La forme quadratique ternaire, qui contient six constantes, peut de même être ramenée d'une infinité de manières à la forme $x^2 + y^2 + z^2$, qui en contient neuf, et, en général, une forme quadratique à un nombre de variables quelconque peut être réduite d'une infinité de manières à une somme de carrés. Il faut cependant remarquer que, bien que cette réduction à une somme de carrés puisse s'effectuer d'une infinité de manières, néanmoins le nombre des carrés positifs et négatifs est déterminé. Ainsi, une forme binaire qui peut être ramenée à la forme $x^2 + y^2$, ne saurait prendre la forme $u^2 - v^2$; les deux expressions $x^2 + y^2$, $u^2 - v^2$ ne pouvant être identiques, puisque les facteurs de l'une sont imaginaires, tandis que ceux de l'autre sont réels. De même, pour les formes ternaires, nous ne pouvons avoir

$$x^2 + y^2 - z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

puisque'on aurait par suite

$$x^2 + y^2 = z^2 + u^2 + v^2 + w^2,$$

ou, en d'autres termes,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 + (lx + my + nz)^2 + (l'x + m'y + n'z)^2 \\ + (l''x + m''y + n''z)^2, \end{aligned}$$

et si nous faisons $x = 0$ et $y = 0$, l'un des membres de l'identité s'annule, tandis que l'autre se réduit à une somme de quatre carrés positifs qui ne saurait être nulle; le même raisonnement s'applique en général.

141. Nous commencerons par montrer qu'une forme cubique binaire peut toujours, ainsi que nous l'avons annoncé, se ramener à une somme de deux cubes. Cette réduction constitue en fait la résolution de l'équation du troisième degré, puisque la forme ramenée à la somme $X^3 + Y^3$ se décompose

immédiatement en facteurs linéaires. Si la forme donnée

$$(a, b, c, d)(x, y)^3$$

devient, par une transformation,

$$(A, B, C, D)(X, Y)^3,$$

le Hessien (93)

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2$$

étant un covariant, doit, par définition, se transformer en une semblable fonction de A, B, C, D, X, Y , c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\begin{aligned} (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 \\ = (AC - B^2)X^2 + (AD - BC)XY + (BD - C^2)Y^2. \end{aligned}$$

Si, dans la transformée, B et C s'annulent, le covariant se réduit à $ADXY$, et l'on voit immédiatement que l'on doit prendre pour X et Y les deux facteurs linéaires du Hessien; X et Y étant connus, il suffit d'identifier la forme donnée avec

$$AX^3 + DY^3$$

pour déterminer A et D .

EXEMPLE. — Réduire $4x^3 + 9x^2 + 18x + 17$ à la forme $AX^3 + DY^3$.

Le Hessien est

$$(4x + 3)(6x + 17) - (3x + 6)^2,$$

ou

$$15x^2 + 50x + 15;$$

ses facteurs linéaires sont $x + 3$, $3x + 1$. Identifiant la forme donnée avec l'expression

$$A(x + 3)^3 + D(3x + 1)^3,$$

nous avons

$$A + 27D = 4, \quad 27A + D = 17,$$

d'où

$$728D = 91, \quad 728A = 455.$$

A et D sont donc dans le rapport de 5 à 1, et la forme cubique donnée ne diffère que par un facteur (ce facteur est 8) de

$$5(x + 3)^3 + (3x + 1)^3;$$

il est clair que les racines seront données par l'équation

$$3x + 1 + (x + 3)\sqrt[3]{5} = 0.$$

142. Il est évident qu'une forme cubique ne peut pas toujours être ramenée à la forme $AX^3 + DY^3$ par une transformation *réelle*, puisque cette dernière a un facteur réel et deux facteurs imaginaires, et, par suite, ne peut s'identifier avec une forme dont les trois facteurs seraient réels. Le discriminant du Hessian

$$4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2$$

est, avec un signe contraire, le même que celui de la forme cubique. Quand ce dernier est positif, le Hessian admet deux facteurs réels, et la forme cubique un facteur réel et deux imaginaires; quand il est négatif, les deux facteurs du Hessian sont imaginaires, et la forme cubique a trois facteurs réels. Quand le discriminant se réduit à zéro, le Hessian et la forme elle-même ont deux facteurs égaux, et l'on peut vérifier directement que le Hessian de X^2Y est X^2 (*).

Il est à remarquer qu'une forme ne peut pas toujours être ramenée à sa forme canonique. L'impossibilité de la réduction indique alors l'existence de quelque particularité dans la fonction. Ainsi, une forme cubique qui a un facteur carré ne peut être ramenée à une somme de deux cubes, sa forme la plus simple étant x^2y .

143. De même qu'une forme cubique peut être ramenée à une somme de deux cubes, toute forme binaire de degré impair $2n - 1$ peut se réduire à une somme de n puissances de degré $2n - 1$, théorème dû à M. Sylvester. En effet, le nombre des constantes dans une forme binaire est toujours supérieur d'une unité au degré; dans le cas qui nous occupe, ce nombre est $2n$, et nous avons précisément le même nombre de constantes en prenant n termes de la forme $(lx + my)^{2n-1}$. La

(*) En général, quand une forme binaire admet un facteur carré, il en existe également un dans le Hessian, ainsi qu'on peut le vérifier en calculant directement celui de x^2y .

transformation peut s'opérer par une méthode qui est la généralisation de celle du n° 141. Pour plus de simplicité, nous l'appliquerons au cinquième degré, mais elle est générale. La question se réduit à déterminer u, v, w , de telle sorte que

$$(a, b, c, d, e, f(x, y))^5 = u^5 + v^5 + w^5.$$

Nous allons prouver que, si l'on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} ax + by & bx + cy & cx + dy \\ bx + cy & cx + dy & dx + ey \\ cx + dy & dx + ey & ex + fy \end{vmatrix},$$

les trois facteurs de cette fonction du troisième degré seront u, v, w . Soient, en effet,

$$u = lx + my, \quad v = l'x + m'y, \quad w = l''x + m''y;$$

en différentiant l'identité

$$(a, b, c, d, e, f(x, y))^5 = u^5 + v^5 + w^5$$

quatre fois successivement par rapport à x et divisant par 120, nous avons

$$ax + by = l^5 u + l'^5 v + l''^5 w;$$

différentiant de même trois fois par rapport à x et une fois par rapport à y , il vient

$$bx + cy = l^3 m u + l'^3 m' v + l''^3 m'' w,$$

et ainsi de suite.

Le déterminant qui précède peut donc s'écrire

$$\begin{vmatrix} l^5 u + l'^5 v + l''^5 w & l^3 m u + l'^3 m' v + l''^3 m'' w & l^2 m^2 u + l'^2 m'^2 v + l''^2 m''^2 w \\ l^3 m u + l'^3 m' v + l''^3 m'' w & l^2 m^2 u + l'^2 m'^2 v + l''^2 m''^2 w & l m^3 u + l' m'^3 v + l'' m''^3 w \\ l^2 m^2 u + l'^2 m'^2 v + l''^2 m''^2 w & l m^3 u + l' m'^3 v + l'' m''^3 w & m^4 u + m'^4 v + m''^4 w \end{vmatrix}$$

Remarquons maintenant que les coefficients de u , dans chaque colonne, sont proportionnels à l^2, lm, m^2 ; par suite, si nous résolvons ce déterminant en déterminants partiels, comme au n° 22, tous ceux de ces déterminants qui contiendront deux colonnes où entre u s'évanouiront comme ayant deux colonnes identiques; il en sera de même de ceux qui

contiendront deux colonnes où entre ν ou ω . Le déterminant se réduira donc au produit $\nu\omega\omega$, multiplié par un facteur numérique (*).

Lorsque l'on aura décomposé le déterminant écrit au commencement de ce numéro en trois facteurs

$$(x + \lambda y)(x + \mu y)(x + \nu y),$$

en résolvant une équation du troisième degré, on saura que u , ν , ω ne peuvent différer de ces facteurs que par des coefficients numériques; on posera

$$(a, b, c, d, e, f | x, y)^3 \\ = A(x + \lambda y)^3 + B(x + \mu y)^3 + C(x + \nu y)^3,$$

et l'on déterminera A, B, C en résolvant l'un des systèmes d'équations que l'on obtient en égalant trois coefficients pris dans les deux membres de cette identité.

Le déterminant dont nous avons fait usage est un covariant, que nous appellerons *covariant canonique* de la forme donnée.

144. Ce covariant peut s'écrire sous une autre forme, qui est peut être plus simple, savoir :

$$\begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x^3 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix}$$

Nous aurions été conduits à cette dernière forme si nous avions suivi la marche qui se présentait le plus naturellement en cherchant à déterminer directement les six quantités A, B, C, λ , μ , ν , à l'aide des six équations que fournit la comparaison des coefficients dans l'identité du n° 143. Nous ne pouvons consacrer ici assez d'espace au développement de la solution sous cette forme, et nous renvoyons le lecteur au Mémoire de M. Sylvester (*Philosophical Magazine*, nov. 1851). L'identité du dernier déterminant avec celui du numéro pré-

(*) Ce facteur est $(lm' - l'm)^2 (l'm'' - l''m')^2 (l''m - lm'')^2$.

cédent a été démontrée par M. Cayley ainsi qu'il suit. Nous avons, par la règle de multiplication des déterminants (22),

$$\begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x^3 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ax + by & bx + cy & cx + dy \\ 0 & bx + cy & cx + dy & dx + ey \\ 0 & cx + dy & dx + ey & ex + fy \end{vmatrix};$$

en divisant des deux côtés par y^3 , on a l'identité demandée.

145. Nous avons encore à mentionner une autre méthode pour trouver le covariant canonique. Soit $(A, B, C, D)(x, y)^3$ ce covariant, où l'on doit déterminer A, B, C, D ; nous avons vu (107) que le symbole $(A, B, C, D)(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx})^3$ fournira aussi un covariant. Mais, si l'on applique cette opération à $(x + \lambda y)^n$, $x + \lambda y$ étant un facteur de $(A, B, C, D)(x, y)^3$, le résultat se réduira à zéro, puisque l'un des facteurs du symbole est $\frac{d}{dy} - \lambda \frac{d}{dx}$. Donc, puisque la forme donnée est, par hypothèse, la somme de trois termes tels que $(x + \lambda y)^3$, le résultat que l'on obtiendra en lui appliquant cette opération sera nul. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} A(d, e, f)(x, y)^2 - B(c, d, e)(x, y)^2 \\ + C(b, c, d)(x, y)^2 - D(a, b, c)(x, y)^2 = 0. \end{aligned}$$

Égalant séparément à zéro les coefficients de x^2, xy, y^2 , il vient

$$\begin{aligned} Ad - Bc + Cb - Da &= 0, \\ Ae - Bd + Cc - Db &= 0, \\ Af - Be + Cd - Dc &= 0. \end{aligned}$$

Par suite (28), A est proportionnel au déterminant que l'on

obtient en supprimant la colonne A, c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix};$$

de même, pour B, C, D; on obtient ainsi le covariant sous la forme donnée au numéro précédent.

146. Passons maintenant aux formes de degré pair $2n$. Puisque la forme contient $2n + 1$ termes, si nous l'égalons à une somme de n puissances de degré $2n$, nous avons une équation de plus que nous n'avons de constantes à déterminer. D'un autre côté, si nous ajoutons une puissance $2n^{\text{ième}}$ de plus, nous avons une constante de trop, et la forme donnée peut être réduite d'une infinité de manières. Il est cependant facile de déterminer la condition qui doit être remplie pour que la forme soit réductible à une somme de n puissances de degré $2n$. Ainsi, les conditions nécessaires pour qu'une forme du quatrième degré et une forme du sixième soient réductibles, la première à la somme de deux quatrièmes puissances, la deuxième à la somme de trois sixièmes puissances, s'expriment en égalant à zéro les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite. En effet, dans le cas du quatrième degré, les éléments du déterminant sont les dérivées du quatrième ordre de la forme, et, en les exprimant en fonction de u et v , comme au n° 143, il est facile de voir que le déterminant se réduit à zéro si la forme peut être ramenée à la somme de deux termes $u^4 + v^4$. De même pour les autres cas. Le déterminant développé pour le cas du quatrième degré est l'invariant déjà donné (108, Exemple I)

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

147. Lorsque cette condition n'est pas remplie, la forme est réductible à la somme de n puissances, avec un terme additionnel. Ainsi, la forme canonique est, pour le quatrième degré, $u^4 + v^4 + 6\lambda u^2 v^2$. Nous commencerons par ce dernier cas; la méthode que nous emploierons n'est pas la plus facile dans ce cas particulier, mais c'est celle qui montre le mieux comment la réduction doit s'opérer en général. Soit donc $(A, B, C \chi x, y)^2$ le produit de u et v que nous cherchons à déterminer, et effectuons l'opération

$$(A, B, C \chi \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx})^2$$

sur les deux membres de l'identité

$$(a, b, c, d, e \chi x, y)^4 = u^4 + v^4 + 6\lambda u^2 v^2.$$

De même que plus haut (145), l'opération exécutée sur u^4 et v^4 donnera un résultat égal à zéro; sur $6\lambda u^2 v^2$, elle conduira à $12\lambda' uv$, λ' étant égal à $2(4AC - B^2)\lambda$. Égalant les coefficients de x^2 , xy , y^2 après avoir effectué les opérations, nous avons les trois équations

$$Ac - 2Bb + Ca = \lambda' A,$$

$$Ad - 2Bc + Cb = \lambda' B,$$

$$Ae - 2Bd + Ce = \lambda' C.$$

Éliminant A, B, C , on a pour calculer λ' , le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c - \lambda' \\ b & c + \frac{1}{2}\lambda' & d \\ c - \lambda' & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développé, donne l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned} \lambda'^3 - \lambda'(ae - 4bd + 3c^2) \\ - 2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) = 0 (*), \end{aligned}$$

(*) Le discriminant de cette équation est le même que celui de la forme du quatrième degré.

dont les coefficients sont des invariants. Il existe donc une remarquable différence dans la réduction des formes binaires à leur forme canonique, suivant que le degré est pair ou impair. Dans ce dernier cas, la réduction est unique, et le système $u, v, w, \dots$ ne peut être déterminé que d'une seule manière. Lorsque le degré est pair, on obtient plusieurs systèmes de solutions. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, une forme du quatrième degré peut être ramenée de trois manières à sa forme canonique, et si nous prenons pour λ' l'une des racines de l'équation du troisième degré, en substituant sa valeur dans le système d'équations précédent, nous pourrions déterminer A, B, C.

148. Si nous passons maintenant à la réduction de la forme générale $(a_0, a_1, a_2, \dots \chi x, y)^{2n}$, la forme canonique qui paraît la plus naturelle est $u^{2n} + v^{2n} + w^{2n} + \dots + \lambda u^2 v^2 w^2 \dots$, le nombre des quantités $u, v, w, \dots$ étant n . Mais la réduction est accompagnée de difficultés qui n'ont encore été surmontées que dans le cas de $n = 2$ et $n = 4$. Cependant la méthode précédente peut encore être appliquée si nous prenons pour forme canonique la fonction

$$u^{2n} + v^{2n} + \dots + \lambda V u v w \dots,$$

dans laquelle $u v w \dots$ étant égal à

$$(A_0, A_1, A_2, \dots \chi x, y)^n,$$

V est un covariant de cette dernière fonction tel, que, si l'on effectue sur $V u v w \dots$ l'opération

$$(A_0, A_1, \dots \chi \frac{d}{dy}, - \frac{d}{dx})^n,$$

le résultat soit proportionnel au produit $u v w \dots$. Supposons pour un instant que nous ayons trouvé une fonction V qui remplisse ces conditions, en procédant comme au numéro précédent, et opérant avec le symbole indiqué plus haut sur l'identité que l'on obtient en égalant la forme proposée à sa

forme canonique, nous avons le système d'équations

$$A_0 a_n - n A_1 a_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_{n+2} - \dots = \lambda A_0,$$

$$A_0 a_{n-1} - n A_1 a_n + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_{n+1} - \dots = \lambda A_1,$$

$$A_0 a_{n-2} - n A_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_n - \dots = \lambda A_2,$$

.....

d'où, éliminant $A_0, A_1, A_2, \dots$, on tire le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_n - \lambda & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ a_{n-1} & a_n + \frac{1}{n} \lambda & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n - \frac{2}{n(n-1)} \lambda & \dots & a_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \mp \lambda (*) \end{vmatrix},$$

Ayant trouvé λ en égalant ce déterminant à zéro (équation remarquable, dont tous les coefficients sont des invariants), les équations précédentes permettront de déterminer les valeurs de $A_0, A_1, \dots$ correspondantes aux $n+1$ valeurs de λ .

149. Pour appliquer cette théorie au cas d'une forme du sixième degré, la forme canonique est

$$u^6 + v^6 + w^6 + Vuvw,$$

(*) Ce déterminant peut encore être obtenu ainsi qu'il suit. Soient x', y' deux variables qui se transforment par la même substitution que x, y ; formons la fonction

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} \right)^n U + \lambda (xy' - yx')^n,$$

qui se change par une substitution linéaire en une fonction semblable (92 et 98); prenons les $n+1$ coefficients des puissances $x^n, x^{n-1}y, \dots$, et éliminons linéairement les $n+1$ quantités $x'^n, x'^{n-1}y', \dots$, nous obtiendrons le déterminant en question.

où uvw étant égal à

$$(\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)(x, y)^3,$$

V est l'évectant du discriminant de cette dernière fonction, dont nous avons donné l'expression développée (109). Nous allons faire voir un excellent exemple de l'emploi des formes canoniques en montrant que, pour une forme cubique quelconque, le résultat de l'opération

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx} \right)^3,$$

effectuée sur le produit de la forme elle-même par l'évectant que nous venons de mentionner, est proportionnel à la forme primitive. Car il suffit de le démontrer pour le cas où la forme cubique est réduite à sa forme canonique $x^3 + y^3$, et l'évectant à $x^3 - y^3$, comme on le voit en faisant $b = c = 0$ et $a = d = 1$ dans l'expression donnée (109). Le produit de la forme par son évectant sera $x^6 - y^6$, et, en opérant avec le symbole

$$\frac{d^3}{dy^3} - \frac{d^3}{dx^3},$$

on obtient évidemment un résultat proportionnel à $x^3 + y^3$. Ce théorème étant indépendant des transformations linéaires, est vrai en général s'il est vrai pour une forme spéciale. La forme canonique étant donc prise comme plus haut, nous procéderons comme au numéro précédent, et nous tirerons λ de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 + \frac{1}{3}\lambda & a_4 \\ a_2 & a_3 - \frac{1}{3}\lambda & a_4 & a_5 \\ a_3 + \lambda & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, ne contient que des puissances paires de λ . Si nous supposons le produit uvw réduit à sa forme canonique

$x^3 + y^3$, dont les trois facteurs sont

$$x + y, \quad x + \omega y, \quad x + \omega^2 y,$$

ω étant une racine cubique de l'unité, il est évident, d'après ce qui précède, que la forme canonique correspondante pour la fonction du sixième degré sera

$$A(x + y)^6 + B(x + \omega y)^6 + C(x + \omega^2 y)^6 + D(x^6 - y^6).$$

On peut prouver (155) que, si u, v, ω sont les facteurs de l'expression cubique, ceux de l'évectant dont nous avons fait usage sont $u - v, v - \omega, \omega - u$, de telle sorte que la forme canonique ci-dessus peut aussi s'écrire

$$u^6 + v^6 + \omega^6 + \lambda u v \omega (u - v)(v - \omega)(\omega - u).$$

150. Dans le cas du huitième degré, la forme canonique est

$$u^8 + v^8 + \omega^8 + z^8 + \lambda u^2 v^2 \omega^2 z^2;$$

car, si nous opérons sur $u^2 v^2 \omega^2 z^2$ avec un symbole formé suivant la méthode des numéros précédents, le résultat sera proportionnel à $u v \omega z$.

Quant aux formes canoniques plus élevées, nous nous contenterons de mentionner celle de la forme cubique ternaire due à M. Hesse

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz,$$

et celle que M. Sylvester a donnée pour la forme cubique quaternaire

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3.$$

151. Lorsque l'on adopte, comme nous venons de le faire (143, 150), pour forme canonique d'une fonction à n variables une nouvelle fonction à $n + 1$ variables (ces dernières étant liées par une équation linéaire), on peut se demander quelle forme prennent alors les contrevariants, et comment on peut déduire les covariants et contrevariants les uns des autres par différentiation mutuelle (106) sans qu'il soit nécessaire de repasser par la forme générale à n variables.

Supposons que nous ayons un contrevariant d'une forme

ternaire, nous pouvons (101) le considérer comme un invariant commun de cette forme et de la fonction linéaire $x\xi + y\eta + z\zeta$. Si l'on introduit dans l'expression de la forme une nouvelle variable v liée à x, y, z par la relation identique

$$x + y + z + v = 0,$$

et que l'on écrive par analogie la fonction linéaire ci-dessus avec une variable θ de plus, elle devient

$$x\xi + y\eta + z\zeta + v\theta;$$

ou, en y remplaçant v par $-(x + y + z)$,

$$x(\xi - \theta) + y(\eta - \theta) + z(\zeta - \theta).$$

L'expression du contrevariant à quatre lettres ξ, ζ, η, θ se déduira donc de l'expression primitive à trois lettres, en remplaçant ξ, η, ζ par $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$, et, sous cette forme, le contrevariant sera fonction des différences entre ces quatre quantités.

EXEMPLE. — Considérons la forme quadratique ternaire

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2;$$

mettons-la sous la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2$, qui revient, en remplaçant v par $-(x + y + z)$, à $(a + d, b + d, c + d, d, d, d)(x, y, z)^2$, et cherchons, sous cette nouvelle forme, ce que devient le contrevariant $(bc - f^2)\xi^2 + \dots$ (101). D'après ce que nous venons de dire, nous avons à remplacer dans l'expression $(bc - f^2)\xi^2 + \dots$, a, b, c , par $a + d, b + d, c + d$; f, g, h par d ; enfin ξ, η, ζ par $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$, et il vient

$$\begin{aligned} & (bc + cd + bd)(\xi - \theta)^2 + (ca + cd + ad)(\eta - \theta)^2 \\ & + (ab + ad + bd)(\zeta - \theta)^2 - 2ad(\eta - \theta)(\zeta - \theta) \\ & - 2bd(\xi - \theta)(\zeta - \theta) - 2cd(\xi - \theta)(\eta - \theta), \end{aligned}$$

ou en réduisant

$$\begin{aligned} & bc(\xi - \theta)^2 + ca(\eta - \theta)^2 + ab(\zeta - \theta)^2 \\ & + cd(\xi - \eta)^2 + bd(\xi - \zeta)^2 + ad(\eta - \zeta)^2 \end{aligned}$$

ou, sous une forme abrégée,

$$\Sigma cd(\xi - \eta)^2.$$

152. Nous savons que nous pouvons remplacer dans les contrevariants ξ, η, ζ par $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ pour opérer sur un covariant; si ce dernier est exprimé avec quatre variables x, y, z, v , la variable x entrant à la fois explicitement et implicitement comme comprise dans v , la dérivée par rapport à x est $\frac{d}{dx} + \frac{d}{dv} \frac{dv}{dx}$ ou, en vertu de la relation qui lie v à x, y, z , $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}$; de même pour $\frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$. Le contrevariant deviendra donc un symbole propre à opérer sur une fonction à quatre lettres, en y remplaçant ξ, η, ζ par $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}, \frac{d}{dy} - \frac{d}{dv}, \frac{d}{dz} - \frac{d}{dv}$; mais nous venons de voir qu'en remplaçant ξ, η, ζ par $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$, on donnait au contrevariant la forme à quatre lettres. Il nous suffira donc de remplacer, dans cette dernière forme, ξ, η, ζ, θ par $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}, \frac{d}{dv}$; nous avons ainsi la faculté, une fois que nous avons trouvé un contrevariant à quatre lettres, d'en déduire un nouveau covariant sans recourir aux calculs laborieux qu'exigerait le retour à la forme à trois lettres.

EXEMPLE. — Le contrevariant de la forme ternaire $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2$ est $\Sigma cd(\xi - \eta)^2$; si l'on y remplace ξ par $\frac{d}{dx}, \dots$, et que l'on opère avec le symbole $\Sigma cd \left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv} \right)^2$ sur la forme elle-même, il vient, abstraction faite d'un facteur numérique,

$$bcd + abd + acd + abc.$$

C'est, sous cette nouvelle forme, l'expression du discriminant, ainsi qu'on peut le vérifier sans peine en remplaçant dans la valeur générale de cette quantité a, b, c par $a + d, b + d, c + d$, et f, g, h par d .

Nous démontrerons de même que nous pouvons remplacer dans un covariant x, y, z, v par $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}, \frac{d}{d\theta}$ pour opérer

ensuite sur un contrevariant; en effet, il est clair que nous pouvons d'abord remplacer x, y, z par $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}$, et v par $-\left(\frac{d}{d\xi} + \frac{d}{d\eta} + \frac{d}{d\zeta}\right)$; mais le contrevariant à quatre lettres se déduit du contrevariant à trois lettres en remplaçant ξ, η, ζ par $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$, et les dérivées par rapport à ξ, η, ζ sont les mêmes sous l'une et l'autre de ces deux formes, tandis que la dérivée de la première par rapport à θ est égale à la somme prise avec le signe — des dérivées de la deuxième par rapport à ξ, η, ζ .

Nous verrons, dans les leçons suivantes, de nombreuses applications de ce théorème.



TREIZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES BINAIRES (2^e, 3^e ET 4^e DEGRÉ).

153. Après avoir exposé les points les plus essentiels de la théorie générale, nous allons, dans cette leçon, l'éclaircir par des applications et étudier, dans quelques-uns des cas les plus simples, les différents invariants et covariants qu'une forme donnée peut admettre. La méthode du n° 88 montre qu'une forme binaire a , en général, $n - 2$ invariants indépendants. Il a été démontré, en effet, qu'il peut y avoir $n - 3$ invariants absolus; et puisque, d'après le n° 89, on peut déduire un invariant absolu de deux invariants ordinaires, le nombre de ces derniers surpasse d'une unité celui des invariants absolus. Si l'on a deux invariants, S et T , du même degré, la fonction $S + aT$, a étant un facteur numérique, sera également un invariant; mais nous ne la considérerons pas comme un nouvel invariant essentiellement distinct de S et T . De même, si S est du second degré et T du troisième, la fonction $S^3 + aT^2$ ne sera pas un invariant essentiellement distinct de S et T . Mais, si un autre invariant R ne peut s'exprimer rationnellement en fonction de S et T avec lesquels il est lié par une équation telle que $R^2 = S^3 + aT^2$, nous considérerons R comme un nouvel invariant distinct, bien que non indépendant de S et T . Ainsi, bien que le nombre des invariants *indépendants* d'une forme soit $n - 2$, ainsi que nous l'avons déjà dit, le nombre des invariants *distincts* est indéfini au delà du sixième degré. Si l'on a un système de deux formes des degrés m et n , on verra, en suivant la méthode du n° 88, que le nombre des équations qui doivent être satisfaites est $m + n + 2$, et que le nombre des constantes dont nous pouvons disposer n'étant que de 4, il doit y avoir $m + n - 2$ invariants *absolus*, et

$m + n - 1$ invariants indépendants. C'est-à-dire que le système des deux formes admettra, en général, trois invariants indépendants en sus des $m - 2$ et $n - 2$ invariants qu'admet chaque forme en particulier. Cependant, si l'une des formes est du premier ou du second degré, il n'y aura que deux nouveaux invariants indépendants; cela tient à ce que, dans ce cas particulier, $n - 2$ n'est pas le nombre des invariants indépendants de la forme, ce dernier nombre étant supérieur d'une unité à $n - 2$, c'est-à-dire 0 pour la forme linéaire et 1 pour la forme quadratique. Le nombre des autres invariants sera donc inférieur d'une unité à ce qu'il devrait être d'après la règle générale.

Les invariants d'une forme et de l'expression linéaire

$$x\xi + y\eta + \dots \quad (101)$$

peuvent être regardés comme des contrevariants de la forme donnée, et, dans les formes binaires, les contrevariants deviennent des covariants en changeant ξ et η en y et $-x$. Une forme binaire n'a donc, indépendamment de ses invariants, que deux covariants indépendants; la forme elle-même pouvant être considérée comme étant l'un de ces covariants, on voit que tous les covariants peuvent s'exprimer en fonction de la forme, de ses invariants et d'un covariant; toutefois cette expression ne sera pas nécessairement rationnelle en général.

Nous allons maintenant passer en revue les invariants et covariants fondamentaux des systèmes les plus simples.

154. Forme quadratique. — Nous avons déjà établi les points principaux de la théorie de la forme quadratique

$$(a, b, c \mid x, y)^2.$$

Elle n'admet (89) qu'un seul invariant indépendant : c'est son discriminant $ac - b^2$. Tout autre invariant sera une puissance de $ac - b^2$. Nous avons fait voir aussi (124) que, d'après la loi de réciprocité de M. Hermite, les formes de degré pair ont seules des invariants du second ordre dont la formule symbolique est $\overline{12}^{-2m}$. Si l'on fait $y = 1$ dans la forme, elle re-

présentera géométriquement un système de deux points sur l'axe des x ; lorsque le discriminant se réduit à zéro, ces deux points coïncident.

De même, deux formes quadratiques

$$(a, b, c \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})^2, \quad (a', b', c' \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})^2$$

ont pour invariant $\overline{12}^2$ ou $ac' + a'c - 2bb'$ (90). Si l'on admet, comme ci-dessus, que chaque forme représente deux points sur l'axe des x , la réduction à zéro de cet invariant exprimera que les quatre points sont en *rapport harmonique*, les deux points représentés par l'une des formes étant *conjugués* par rapport aux deux points représentés par l'autre forme.

Le covariant $\overline{12}$ (118) est

$$(ab' - ba')x^2 + (ac' - ca')xy + (bc' - b'c)y^2.$$

Son discriminant

$$(ac' - ca')^2 + 4(ba' - b'a)(bc' - b'c),$$

est le résultant du système : il peut aussi s'écrire sous la forme

$$(ac' + ca' - 2bb')^2 - 4(ac - b^2)(a'c' - b'^2).$$

Lorsque l'on a trois formes quadratiques

$$(a, b, c \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})^2, \quad (a', b', c' \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})^2, \quad (a'', b'', c'' \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})^2,$$

la réduction à zéro du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

exprime la condition nécessaire pour que les six points représentés par les trois formes soient en *involution*.

155. *Forme cubique*. — Passons maintenant à la forme cubique

$$(a, b, c, d \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})^3.$$

Elle n'a qu'un invariant (89), c'est le discriminant

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

Le Hessien $\overline{12}^2$ est

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2,$$

il peut aussi s'écrire comme déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ y^2 & -xy & x^2 \end{vmatrix}.$$

Il a le même discriminant que la forme elle-même (142). Si l'on désigne par α, β, γ les trois racines, le Hessien est égal à $\Sigma(x - \alpha)^2(\beta - \gamma)^2$ (104). Le covariant cubique $\overline{12}^2 \cdot \overline{13}$ ou l'évectant du discriminant est (109)

$$(a^2d + 2b^3 - 3abc)x^3 + 3(b^2c + abd - 2ac^2)x^2y + 3(2b^2d - bc^2 - acd)xy^2 + (3bcd - ad^2 - 2c^3)y^3.$$

Il peut être représenté géométriquement ainsi qu'il suit : si l'on prend les trois points représentés par la forme cubique primitive, et que l'on détermine pour chacun d'eux son conjugué harmonique par rapport aux deux autres, on obtient trois nouveaux points qui seront la représentation géométrique du covariant en question. Ce théorème s'obtient en remarquant que, si la forme primitive se réduit à $xy(x + y)$, $x - y$ sera un facteur du covariant, comme on le voit en faisant $a = d = 0, b = c = 1$. Mais $x + y, x - y$ sont conjugués harmoniques par rapport à x et y , et si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances à l'origine de quatre points sur l'axe des x , toute relation harmonique ou anharmonique entre eux, s'exprimant par le rapport des produits $(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$ et $(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)$, n'est pas altérée (103) par une transformation linéaire, qui revient à remplacer α par $\frac{\lambda\alpha + \mu}{\lambda'\alpha + \mu'}$. Par conséquent, si de tels rapports, que n'altèrent pas les transformations linéaires, sont démontrés pour un cas, ils le sont en général. Les autres facteurs de l'évectant de $xy(x + y)$ sont $x + 2y, 2x + y$, de sorte que l'on peut donner au résultat une forme symétrique d'après laquelle l'évectant de xyz (x, y, z étant

liés par la relation $x + y + z = 0$) sera

$$(x - y)(y - z)(z - x).$$

Ces considérations nous conduisent à l'expression des facteurs du covariant en fonction des racines de la forme donnée; car, si δ représente la distance à l'origine du point conjugué de α par rapport à β et γ , résolvant par rapport à δ l'équation

$$\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)} = -1,$$

il vient

$$\delta = \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - 2\beta\gamma}{2\alpha - \beta - \gamma},$$

et l'expression du covariant est

$$\begin{aligned} & [(2\alpha - \beta - \gamma)x + (2\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma)y] \\ & \times [(2\beta - \alpha - \gamma)x + (2\gamma\alpha - \beta\gamma - \beta\alpha)y] \\ & \times [(2\gamma - \alpha - \beta)x + (2\alpha\beta - \gamma\alpha - \gamma\beta)y], \end{aligned}$$

comme on peut le vérifier en effectuant la multiplication et les substitutions en fonction des coefficients de l'équation.

156. Si nous voulons établir une relation entre les covariants et invariants qui précèdent, nous ferons usage des formes canoniques qui sont pour U , $ax^3 + dy^3$; pour le discriminant D , a^2d^2 ; pour le Hessian H , $adxy$; pour le covariant cubique J , $ad(ax^3 - dy^3)$. Nous pouvons ainsi démontrer que le discriminant de J est le cube du discriminant de U , car, pour la forme canonique, il se réduit à a^3d^3 . Nous avons été conduits aussi, au n° 153, à prévoir que J n'est pas indépendant de H et de U , et nous pouvons en effet démontrer aisément, à l'aide de la forme canonique, la relation suivante, due à M. Cayley,

$$J^2 - DU^2 = -4H^3.$$

M. Cayley s'est servi de cette relation pour décomposer U en ses facteurs linéaires. En effet, puisque $J^2 - DU^2$ est un cube parfait, nous sommes conduits à conclure que les facteurs $J \pm U\sqrt{D}$ sont également des cubes parfaits, et, en effet,

pour la forme canonique, ces facteurs sont $2a^2 dx^3$ et $2ad^2 y^3$.

Maintenant, puisque $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{d}$ est l'un des facteurs de la forme canonique, on voit immédiatement que le facteur général est proportionnel à

$$(U\sqrt{D} + J)^{\frac{1}{3}} + (U\sqrt{D} - J)^{\frac{1}{3}},$$

fonction linéaire qui s'évanouit évidemment quand on suppose $U = 0$.

EXEMPLE — Reprenons l'exemple du n° 144

$$U = 4x^3 + 9x^2 + 18x + 17;$$

nous avons

$$D = 1600, \quad J = 110x^3 - 90x^2y - 630xy^2 - 670y^3,$$

d'où

$$U\sqrt{D} + J = 10(3x + y)^3, \quad U\sqrt{D} - J = 50(x + 3y)^3,$$

et les facteurs sont

$$3x + y + (x + 3y)\sqrt[3]{5}.$$

157. *Système composé d'une forme cubique et d'une forme quadratique.* — Soient

$$(a, b, c, d \text{ en } x, y)^3, \quad (A, B, C \text{ en } x, y)^2$$

les deux formes. L'invariant le plus simple du système s'obtient en combinant la forme quadratique avec le Hessien de la forme cubique, et calculant ensuite leur invariant commun, on a

$$I = A(bd - c^2) - B(ad - bc) + C(ac - b^2).$$

Le résultant, calculé d'après la méthode du n° 44 ou d'après celle du n° 67, est

$$\begin{aligned} R = & a^2C^3 - 6abBC^2 + 6acC(2B^2 - AC) + ad(6ABC - 8B^3) \\ & + 9b^2AC^2 - 18bcABC + 6bdA(2B^2 - AC) \\ & + 9c^2A^2C - 6cdBA^2 + d^2A^3. \end{aligned}$$

On peut prendre I et R pour invariants fondamentaux du système : pour leur comparer les autres invariants, il sera com-

mode de faire $A = 0$ et $C = 0$, ce qui revient à prendre pour x et y les deux facteurs de la forme quadratique; I se réduit, dans ce cas, à $B(bc - ad)$ et R à $-8B^3ad$. Le déterminant de Jacobi est

$$\begin{aligned} & (Ab - Ba)x^3 + (2Ac - Bb - Ca)x^2y \\ & + (Ad + Bc - 2Cb)xy^2 + (Bd - Cc)y^3, \end{aligned}$$

mais il y a, en outre, des covariants linéaires. En effet, si l'on remplace, dans la forme quadratique, les variables par des symboles différentiels et que l'on effectue sur la forme cubique l'opération indiquée, il vient

$$L_1 = (aC - 2bB + cA)x + (bC - 2cB + dA)y;$$

si l'on opère de même avec L_1 sur la forme quadratique, on a

$$\begin{aligned} L_2 = & [aBC - b(2B^2 + AC) + 3cAB - dA^2]x \\ & + [aC^2 - 3bBC + c(AC + 2B^2) - dAB]y; \end{aligned}$$

L_1 et L_2 exprimés en fonction des racines α, β, γ de la forme cubique et des racines α', β' de la forme quadratique s'écrivent

$$\Sigma(\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta)(x - \gamma) \text{ et } \Sigma(\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta)(\alpha' - \gamma)(x - \beta').$$

Le résultant de L_1 et L_2 , en faisant $A = 0$ et $C = 0$, devient proportionnel à B^2bc . Par conséquent, si l'on désigne par Δ le discriminant $AC - B^2$ de la forme quadratique, le résultant de L_1 et L_2 exprimé en fonction des deux invariants fondamentaux sera $R + 8\Delta I$.

Il existe d'autres covariants linéaires que l'on obtiendra en remplaçant, dans L_1 et L_2 , les coefficients $a, b, \dots$ de la forme cubique par les coefficients correspondants de son covariant cubique (109).

Si l'on élimine les variables entre L_1 et la forme quadratique, on obtiendra le même résultat qu'en éliminant entre L_1 et L_2 ; mais, si l'on élimine entre L_1 et la forme cubique, on aura un invariant distinct des précédents. En faisant $A = 0$ et $C = 0$, cet invariant sera $B^3(ac^3 - db^3)$; il n'est pas réductible aux

précédents, mais son carré peut l'être sans peine. Le discriminant de la forme cubique étant

$$D = a^2 d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2 c^2 - 6abcd,$$

le carré de l'invariant que nous considérons, multiplié par 16, sera

$$B^6(D - a^2 d^2 + 3b^2 c^2 + 6abcd)^2 - 64B^6adb^3c^3,$$

et nous n'avons plus qu'à remplacer Bbc par $I + Bad$, B^3ad par $-\frac{1}{8}R$, B^2 par $-\Delta$ pour avoir l'expression en fonction des invariants fondamentaux.

158. *Forme du quatrième degré.* — Nous arrivons maintenant à la forme du quatrième degré qui, ainsi que nous l'avons vu (108), a deux invariants

$$S = ae - 4bd + 3c^2, \quad T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Nous avons fait voir (147) qu'on peut la ramener à la forme canonique $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$, pour laquelle les invariants sont $S = 1 + 3m^2$, $T = m - m^3$. Si l'on exprime ces invariants en fonction symétrique des racines, on a

$$S = \Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2, \quad T = \Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \gamma)(\beta - \delta),$$

ou mieux

$$\begin{aligned} T = & [(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) - (\alpha - \gamma)(\delta - \beta)] \\ & \times [(\alpha - \gamma)(\delta - \beta) - (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)] \\ & \times [(\alpha - \delta)(\beta - \gamma) - (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)]. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir, sous cette dernière forme, que l'équation $T = 0$ représente la condition qui doit être remplie pour que les quatre points représentés par la forme soient en rapport harmonique. On a vu, en outre (146), que cette équation exprime la condition qui doit être remplie pour que la forme puisse être ramenée à une somme de deux quatrièmes puissances $x^4 + y^4$ (*), et que T peut s'écrire comme déter-

(*) M. Sylvester appelle *catalecticant* l'invariant qui exprime de même la condition à remplir pour qu'une forme du degré $2n$ soit réductible à la somme de n puissances.

minant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par M le module de la substitution, les invariants S et T deviennent, après la transformation (89), M^3S , M^6T , et le rapport $\frac{S^3}{T^2}$ reste complètement invariable.

159. Tout invariant d'une forme biquadratique peut s'exprimer en fonction rationnelle de S et T . En effet, puisqu'elle peut, par une substitution convenable, être réduite à la forme canonique $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$, ce qui ne modifie pas les invariants, il suffit de prouver que le théorème est vrai pour cette forme. En premier lieu, nous remarquerons que tout invariant qui s'annule quand $m=0$, s'annulera également quand m sera égal à ± 1 . Car la forme $x^4 + y^4$ devient, en y remplaçant x et y par $x+y$ et $x-y$, $x^4 + 6x^2y^2 + y^4$, et, en y remplaçant x et y par $x+y\sqrt{-1}$ et $x-y\sqrt{-1}$, $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$; par conséquent, si un invariant admet m comme facteur, il doit être également divisible par m^2-1 ; il le sera donc par $m-m^3$, c'est-à-dire par T .

Prenons maintenant un invariant exprimé en fonction des coefficients de la forme générale a, b, c, d, e ; s'il ne se réduit pas à zéro en y faisant $b=0, c=0, d=0$, la partie qui ne disparaît pas doit être une puissance de ae ; en effet, elle doit être évidemment symétrique par rapport à a et e , et elle ne peut être de la forme $a^k + e^k$, puisque le poids doit être le même pour chaque terme. Soit donc $a^k e^k$ la partie qui ne s'annule pas, et retranchons de l'invariant donné

$$(ae - 4bd + 3c^2)^k \quad \text{ou} \quad S^k;$$

le reste se réduira évidemment à zéro quand on fera

$$b = c = d = 0,$$

ou, dans le cas de la forme canonique pour laquelle b et d sont nuls, lorsque l'on fera $m=0$. D'après ce qui a été dit

plus haut, cette partie sera donc divisible par T , c'est-à-dire que l'invariant sera de la forme $S^k + T\varphi$. Mais on prouvera de même que φ est de la forme $S^{k'} + T\psi$, et ainsi de suite, de sorte que l'on finira par avoir l'invariant donné en fonction rationnelle de S et de T .

160. Déterminons maintenant le discriminant en fonction de S et de T . On a déjà remarqué (79) que le discriminant d'une forme se réduit à zéro si les deux premiers coefficients sont nuls, puisque, dans ce cas, la forme devenant divisible par y^2 , admet un facteur carré. D'un autre côté, il est également vrai que tout invariant qui se réduit à zéro quand a et b sont nuls contient le discriminant comme facteur. En effet, cet invariant doit se réduire à zéro si la forme admet un facteur carré $(x - \alpha y)^2$, car on peut, par une transformation linéaire, faire en sorte que ce facteur soit pris pour y et, par suite, que les coefficients a et b soient nuls; mais un invariant qui devient nul quand deux racines sont égales doit, lorsqu'on l'exprime en fonction des racines, contenir comme facteur la différence de deux racines quelconques, et, par suite, le discriminant lui-même.

Il est maintenant facile, connaissant S et T , d'en déduire un invariant qui se réduise à zéro en même temps que a et b . Car, dans cette hypothèse, S devient $3c^2$ et T devient $-c^3$; par suite $S^3 - 27T^2$ se réduit à zéro. Cet invariant est du sixième ordre par rapport aux coefficients, et c'est précisément l'ordre du discriminant (73). C'est donc le discriminant lui-même et non son produit par un autre invariant, et l'on a, pour la valeur cherchée,

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2.$$

On peut vérifier ce résultat de différentes manières, et notamment d'une manière très-simple en adoptant la forme canonique plus générale $Ax^4 + By^4 + Cz^4$, dans laquelle nous supposons $x + y + z = 0$; dans ce cas, nous avons

$$a = A + C, \quad b = c = d = C, \quad e = B + C,$$

et les deux invariants S et T deviennent

$$S = BC + CA + AB, \quad T = ABC.$$

Le discriminant n'est autre que le résultant des deux dérivées $Ax^3 - Cz^3$, $B\gamma^3 - Cz^3$; en les égalant à zéro, nous pouvons supposer x^3, γ^3, z^3 proportionnels à BC, CA, AB ; substituant dans l'équation

$$x + \gamma + z = 0,$$

il vient

$$\sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{CA} + \sqrt[3]{AB} = 0,$$

d'où

$$(BC + CA + AB)^3 - 27A^2B^2C^2 = 0,$$

et l'on obtient le discriminant sous la forme $S^3 - 27T^2$.

161. On peut déduire, de l'expression précédente du discriminant d'une forme biquadratique en fonction de S et T , la relation qui lie (156) les covariants d'une forme cubique.

Si nous multiplions deux formes, les invariants du produit seront des invariants du système formé par les deux formes; par conséquent, si nous multiplions une forme par $x\xi + \gamma\eta$, les invariants du produit seront (101) des contrevariants de la forme primitive, et si nous changeons ensuite ξ et η en γ et $-x$, nous aurons des covariants. Appliquons ce procédé à une forme cubique, les coefficients de la forme biquadratique qu'on en déduit sont

$$a\gamma, \quad \frac{1}{4}(3b\gamma - ax), \quad \frac{1}{2}(c\gamma - bx), \quad \frac{1}{4}(d\gamma - 3cx), \quad -dx$$

et ses invariants S et T seront les covariants $-\frac{3}{4}H, \frac{1}{16}J$ de la forme cubique. Mais le discriminant du produit d'une forme quelconque U par $x\xi + \gamma\eta$ devient égal (78), en opérant ainsi, au discriminant de U multiplié par U^2 . Expriment donc le discriminant de la forme biquadratique en fonction des invariants S et T , nous avons la relation entre H, J et le discriminant de la forme cubique.

162. Le Hessien de la forme biquadratique est l'évectant

de T , savoir

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 \\ + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4,$$

qui se réduit pour la forme canonique à

$$m(x^4 + y^4) + (1 - 3m^2)x^2y^2.$$

Si la forme admet un facteur carré x^2 , il se trouvera également dans le Hessien. Car (94) la seconde dérivée U_{22} renferme le facteur x^2 , la dérivée U_{12} contient le facteur x au premier degré et, par suite, l'expression $U_{11}U_{22} - U_{12}^2$ le renferme au second. Donc, si une forme biquadratique admet deux facteurs carrés, ils se retrouveront tous deux dans le Hessien qui, étant aussi du quatrième degré, ne pourra différer de la forme que par un facteur numérique. En effet, si la forme biquadratique admet deux facteurs carrés, en les prenant pour x^2 et y^2 , elle peut s'écrire cx^2y^2 ; mais en faisant $a = b = d = e = 0$ dans l'expression du Hessien, elle se réduit à $-3c^2x^2y^2$.

Ainsi, en exprimant qu'une forme biquadratique ne diffère du Hessien que par un facteur numérique, nous aurons le système suivant de conditions nécessaires pour qu'elle admette deux facteurs carrés, savoir

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e};$$

ce système n'équivaut qu'à deux conditions distinctes, ainsi qu'on peut le vérifier de différentes manières.

Nous avons, au n° 105, fait connaître d'autres méthodes pour établir ces conditions. L'une d'elles consiste à former le covariant

$$\Sigma(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(x - \beta)^2(x - \gamma)^2(x - \delta)^2,$$

dont tous les termes doivent se réduire à zéro si deux couples de racines deviennent identiques. Ce covariant, que nous appellerons J , est

$$(a^2d + 2b^3 - 3abc, \quad a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c, \\ 5abe - 15acd + 10b^2d, \\ 10b^2e - 10ad^2, \quad -5ade + 15bce - 10bd^2, \\ -ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2, \quad 3cde - 2d^3 - be^2)(x, y)^6.$$

Il n'est autre que le *Jacobien* (95) de la forme elle-même et de son *Hessien*; il doit se réduire identiquement à zéro lorsque ces deux fonctions ne diffèrent que par un facteur, et les coefficients de *J* donnent, sous une autre forme, les conditions déjà obtenues ci-dessus. Nous avons vu aussi (105) que, dans le même cas, le covariant

$$\Sigma (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (x - \delta)^4$$

se réduit à zéro. Mais ce covariant est égal à $3TU - 2SH$, et l'on peut aisément vérifier qu'il se réduit à zéro quand la forme primitive admet deux facteurs carrés; car, en faisant

$$a = b = d = e = 0,$$

U se réduit à $6cx^2y^2$, *H* à $-3c^2x^2y^2$, *T* à $-c^3$, *S* à $3c^2$, et l'on voit que, dans le système de conditions donné ci-dessus, la valeur commune des fractions est $\frac{3T}{2S}$.

163. On a vu (147) comment on ramène une forme biquadratique à sa forme canonique, problème qui renferme la solution de l'équation, puisque, une fois ramenée à la forme

$$ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4,$$

elle peut se résoudre comme une simple équation du second degré. La réduction peut aussi s'effectuer à l'aide des valeurs de *S* et *T*. Supposons les variables transformées par une substitution linéaire de module 1, de telle sorte que les coefficients *b* et *d* disparaissent dans la transformée; nous aurons $S = ae + 3c^2$, $T = ace - c^3$, et la nouvelle valeur de *c* sera donnée par l'équation $4c^3 - Sc + T = 0$. Nous déduirons les nouvelles variables *x* et *y* qui entrent dans la forme canonique des équations

$U = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$, $H = acx^4 + (ae - 3c^2)x^2y^2 + cej^4$,
d'où

$$cU - H = (9c^2 - ae)x^2y^2.$$

Notre méthode consiste donc à tirer la valeur de *c* de l'équation du troisième degré ci-dessus, puis à former, à l'aide de

l'une des valeurs de c , l'expression $cU - H$ qui devra être un carré parfait. Extrayant la racine et la décomposant en facteurs, nous aurons les nouvelles variables x et y , et par conséquent nous connaissons la transformation par le moyen de laquelle la forme proposée peut être ramenée à sa forme canonique; l'ayant sous la forme $ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$, nous pouvons évidemment, si nous le préférons, faire les coefficients de x^4 et y^4 égaux à l'unité, en écrivant x^2 et y^2 au lieu de $x^2\sqrt{a}$ et $y^2\sqrt{e}$.

EXEMPLE. — Résoudre l'équation

$$x^4 + 8x^3y - 12x^2y^2 + 104xy^3 - 20y^4 = 0.$$

Nous avons $S = -216$, $T = -756$, et notre équation du troisième degré est

$$4c^3 + 216c - 756 = 0,$$

qui admet 3 pour racine. Le Hessien est

$$\begin{aligned} H &= -6x^4 + 60x^3y + 72x^2y^2 + 24xy^3 - 636y^4 \\ \text{d'où} \quad 3U - H &= 9(x^4 - 4x^3y - 12x^2y^2 + 32xy^3 + 64y^4) \\ &= 9(x^2 - 2xy - 8y^2)^2. \end{aligned}$$

Les variables de la forme canonique seront donc

$$\begin{aligned} X &= x + 2y, \quad Y = x - 4y, \\ \text{d'où} \quad 6x &= 4X + 2Y, \quad 6y = X - Y, \end{aligned}$$

et, substituant dans la forme primitive, on a pour la forme canonique

$$3X^4 + 2X^2Y^2 - Y^4.$$

Les racines seront données par les équations

$$(x + 2y)\sqrt{3} = x - 4y, \quad (x + 2y)\sqrt{-1} = x - 4y.$$

164. M. Cayley a donné les racines de l'équation du quatrième degré sous une autre forme plus symétrique. Soient c_1, c_2, c_3 celles de l'équation du troisième degré du numéro précédent; il a été démontré que $H - c_1U$, $H - c_2U$, $H - c_3U$ sont des carrés parfaits dont les racines sont du second degré en x et y . Mais l'expression

$$(c_2 - c_3)\sqrt{H - c_1U} + (c_3 - c_1)\sqrt{H - c_2U} + (c_1 - c_2)\sqrt{H - c_3U}$$

est aussi un carré parfait dont la racine est un facteur de la forme biquadratique. Il suffit de prouver que cette quantité est un carré, car elle s'annule évidemment en même temps que U . Prenons la forme canonique en faisant, pour plus de simplicité, $a = e = 1$. En résolvant l'équation

$$4z^3 - z(1 + 3c^2) + c - c^3 = 0,$$

nous trouverons que ses trois racines sont

$$c, \quad -\frac{1}{2}(c+1), \quad -\frac{1}{2}(c-1),$$

et les trois valeurs correspondantes de $H - cU$ sont

$$(1 - 9c^2)x^2y^2, \quad \frac{1}{2}(3c+1)(x^2+y^2)^2, \quad \frac{1}{2}(3c-1)(x^2-y^2)^2.$$

Maintenant, pour qu'une quantité de la forme

$$\alpha xy + \beta(x^2 + y^2) + \gamma(x^2 - y^2)$$

soit un carré parfait, il faut que l'on ait

$$\alpha^2 = 4(\beta^2 - \gamma^2),$$

condition qui se vérifie, puisque l'on a

$$\alpha^2 = (1 - 9c^2), \quad \beta^2 = \frac{1}{8}(3c-1)^2(3c+1), \quad \gamma^2 = \frac{1}{8}(3c+1)^2(3c-1).$$

EXEMPLE. — En appliquant cette méthode à l'exemple qui précède, les autres valeurs de c sont

$$\frac{1}{2}(-3 \pm 9\sqrt{-3}),$$

et les carrés des facteurs linéaires de la forme biquadratique se présentent ainsi

$$\begin{aligned} & -2\sqrt{3}(x^2 - 2xy - 8y^2) \\ & \pm \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})[(1 + \sqrt{-3})x^2 + (10 - 2\sqrt{-3})xy - (2 - 10\sqrt{-3})y^2] \\ & \pm \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})[(1 - \sqrt{-3})x^2 + (10 + 2\sqrt{-3})xy - (2 + 10\sqrt{-3})y^2]. \end{aligned}$$

163. Il nous reste à distinguer dans quel cas la réduction à la forme canonique s'opère par une substitution réelle ou par une substitution imaginaire. Le discriminant de la forme canonique est $ae(ae - 9c^2)^2$, et, puisque son signe ne change pas par une transformation linéaire, nous voyons que, lorsqu'il sera positif, les coefficients a et e de la forme canonique seront de même signe, et que, quand il sera négatif, ces coefficients seront de signes contraires. Dans le premier cas, la forme

$$ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$$

se résout évidemment en deux facteurs de la forme

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 + \mu y^2) \quad \text{ou} \quad (x^2 - \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2),$$

c'est-à-dire que les racines sont alors ou toutes imaginaires ou toutes réelles. Si, au contraire, a et e sont de signes différents, les deux facteurs sont de la forme

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2),$$

et la forme biquadratique a deux racines réelles et deux racines imaginaires. Donc, quand le discriminant est négatif, c'est-à-dire quand S^3 est moindre que $27T^2$, deux des racines sont réelles et les deux autres imaginaires, et, quand il est positif, les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires (*). Mais le discriminant de l'équation

$$4c^3 - Sc + T = 0$$

est $27T^2 - S^3$; par suite (142), quand S^3 est moindre que $27T^2$, l'équation en c admet une racine réelle et deux racines imaginaires, et la transformation ne peut s'effectuer que d'une seule

(*) Les signes des invariants ne permettent pas de distinguer le cas de quatre racines réelles de celui de quatre racines imaginaires; mais l'application du théorème de Sturm montre que (le discriminant étant positif) les deux quantités $b^2 - ac$ et $3aT + 2(b^2 - ac)S$ sont positives quand les racines sont toutes réelles, tandis que l'une ou l'autre de ces deux quantités est négative quand les quatre racines sont imaginaires (CAYLEY, *Quarterly Journal*, t. IV, p. 10).

manière réelle, quand la forme biquadratique a deux racines réelles et deux imaginaires. Si a et c sont de même signe, cas dans lequel on peut prendre pour forme canonique

$$x^4 + 6mx^2y^2 + y^4,$$

on voit sans peine qu'on peut parvenir à cette forme par deux autres substitutions linéaires. En effet, en remplaçant x et y par $x + y$ et $x - y$, il vient

$$(1 + 3m)x^4 + 6(1 - m)x^2y^2 + (1 + 3m)y^4;$$

remplaçant par $x + y\sqrt{-1}$ et $x - y\sqrt{-1}$, il vient de même

$$(1 + 3m)x^4 + 6(m - 1)x^2y^2 + (1 - 3m)y^4.$$

Ainsi quand la forme biquadratique a quatre racines réelles ou quatre racines imaginaires, bien que l'on trouve pour c trois valeurs réelles, l'une d'elles correspond à des valeurs imaginaires de x et y , et il n'existe que deux substitutions réelles.

On peut encore le voir ainsi qu'il suit. Supposons la forme biquadratique décomposée en deux facteurs réels du second degré $(a, b, c)x^2, y^2, (a', b', c')(x, y)^2$, ces deux facteurs U et V peuvent, par une transformation simultanée, être ramenés à la forme $\lambda X^2 + BY^2, A'X^2 + B'Y^2, X^2$ et Y^2 étant les valeurs de $\lambda U + V$ correspondantes aux deux valeurs de λ données par l'équation (90)

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda + (a'c' - b'^2) = 0.$$

Pour que les valeurs de λ soient réelles, il faut que le résultant des deux fonctions du second degré

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta')$$

soit positif. Quand la forme biquadratique a quatre racines réelles, si α et β sont les deux plus grandes, α' et β' les deux plus petites, ou bien encore, si l'on prend pour α et β les deux extrêmes, et pour α' et β' les deux intermédiaires, on a pour λ des valeurs réelles. Dans les autres cas, on a des valeurs imaginaires. Si l'une ou l'autre des deux expressions du

second degré a des racines imaginaires, leur résultant est positif et les valeurs de λ réelles.

166. Nous avons vu (162) que les formes biquadratiques ont un autre covariant J dont la formule symbolique est $\overline{12}^2 \cdot \overline{13}$. Il est du troisième degré par rapport aux coefficients, et du sixième par rapport aux variables; pour la forme canonique $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$, ce covariant se réduit à $(1 - 9m^2)xy(x^2 - y^2)$: c'est le Jacobien de la forme primitive et de son Hessien. En général, en égalant à zéro le discriminant de $U + \lambda V$, si U et V sont deux formes biquadratiques, on peut trouver six valeurs de λ telles, que $U + \lambda V$ admette un facteur carré, et ces six facteurs, qui existent aussi dans les dérivées de $U + \lambda V$, sont ceux du Jacobien. Quand V est le Hessien de U , on n'obtient plus que trois valeurs de λ , telles que $\lambda U - H$ contienne deux facteurs carrés, ces valeurs de λ étant données par l'équation

$$4\lambda^3 - \lambda S + T = 0.$$

Mais, comme plus haut, ces six facteurs seront ceux du Jacobien, c'est-à-dire que le covariant J a pour facteurs les valeurs x et y des trois formes canoniques. Ce résultat peut s'interpréter géométriquement ainsi qu'il suit. Les quatre points représentés par la forme déterminent trois systèmes en involution différents (l'un ou l'autre des trois points β , γ et δ pouvant être pris pour le conjugué de α), et les foyers de ces trois systèmes sont déterminés par le covariant J .

Puisque, d'après le numéro 163, le carré du produit d'un couple de valeurs x et y de la forme canonique est déterminé par l'expression $c_1 U - H$, J^2 sera proportionnel à

$$(c_1 U - H)(c_2 U - H)(c_3 U - H),$$

ou, en se reportant à l'équation en c , à

$$4H^3 - SHU^2 + TU^3.$$

En effectuant les calculs sur la forme canonique, on trouve que la valeur de l'expression ci-dessus est $-J^2$.

167. Puisque H est un covariant de U , on en conclut que,

α et β désignant deux constantes, $\alpha U + 6\beta H$ (*) sera un covariant de U dont les invariants seront aussi des invariants de U . Les valeurs de S et T et du discriminant R de cette forme sont

$$S(\alpha U + 6\beta H) = S\alpha^2 + 18T\alpha\beta + 3S^2\beta^2,$$

$$T(\alpha U + 6\beta H) = T\alpha^2 + S^2\alpha^2\beta + 9ST\alpha\beta^2 + (54T^2 - S^3)\beta^3,$$

$$R(\alpha U + 6\beta H) = R(\alpha^3 - 9S\alpha\beta^2 - 54T\beta^3)^2.$$

La dernière de ces trois valeurs est un carré parfait, parce que, comme nous l'avons fait remarquer, au lieu de six cas dans lesquels la fonction $\alpha U + 6\beta H$ admet un facteur carré, nous avons maintenant trois cas dans lesquels elle admet deux facteurs carrés.

M. Hermite a remarqué qu'en appelant G la fonction de α, β , $\alpha^3 - 9S\alpha\beta^2 - 54T\beta^3$, les valeurs données ci-dessus pour les invariants S et T de la forme $\alpha U + 6\beta H$ sont le Hessien et le covariant cubique de G : le discriminant de G ne diffère de celui de U que par un facteur numérique.

Les covariants de la fonction $\alpha U + 6\beta H$ sont aussi des covariants de U . Son Hessien est

$$(\alpha\beta S + 9\beta^2 T)U + (\alpha^2 - 3\beta^2 S)H;$$

c'est le Jacobien des deux expressions G et $\alpha U + 6\beta H$ considérées comme fonction de α et β . L'expression de J calculée pour $\alpha U + 6\beta H$ est la même que pour U , multipliée toutefois par le facteur numérique G . Le Hessien de J est

$$S^2U^2 - 36TUH + 12SH^2;$$

c'est le résultant de $\alpha U + 6\beta H$ et du Hessien de G . M. Cayley l'a mis sous la forme

$$\left(SU - \frac{18TH}{S}\right)^2 + \frac{12}{S^2}(S^3 - 27T^2)H^2,$$

(*) Le coefficient numérique 6 a pour but d'éviter les fractions dans les formules suivantes.

qui montre qu'il se réduit à un carré parfait quand le discriminant de U est nul.

168. On peut remarquer ici que, d'après le principe du numéro 108, les théorèmes concernant les invariants et covariants d'une forme donnent en même temps des théorèmes concernant les covariants des formes d'un degré plus élevé. Ainsi, ayant démontré (167) que le Hessian du Hessian d'une forme biquadratique est de la forme $\alpha TU + \beta SH$, nous pouvons en déduire qu'il en est de même pour une forme quelconque (*voir* aussi n° 134, Exemple II). Car, si l'on forme le Hessian de l'expression $u_{11}u_{22} - u_{12}^2$, il renferme les deuxièmes, troisièmes et quatrièmes dérivées de u . Mais, au moyen des équations

$$(n-3)u_{111} = xu_{1111} + yu_{1112} \dots,$$

on peut exprimer les dérivées des deuxième et troisième ordres en fonction de celles du quatrième, et écrire le Hessian sous la forme d'une fonction de ces dernières dérivées et des variables x et y que nous venons d'introduire et qui y figureront au quatrième degré. Ce sera donc un covariant de l'émanant du quatrième ordre. Mais tout covariant d'une forme biquadratique est une fonction de U et de H (153), et, quand il est du quatrième degré, cette fonction est linéaire. Ce covariant sera donc de la forme $\alpha TU + \beta SH$, S et T étant des invariants de l'émanant du quatrième ordre et, comme au numéro 108, des covariants des formes de degrés supérieurs.



QUATORZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES BINAIRES (5^e ET 6^e DEGRÉ).

169. Dans l'étude des formes du cinquième degré, nous ferons constamment usage de la forme canonique

$$ax^5 + by^5 + cz^5,$$

à laquelle, ainsi que nous l'avons démontré (143), la forme générale peut toujours être ramenée (la somme $x + y + z$ est supposée égale à zéro).

Il existe deux covariants du second ordre par rapport aux coefficients, savoir : le Hessien $\overline{12}^2$, dont l'expression pour la forme canonique est

$$bcy^3z^3 + caz^3x^3 + abx^3y^3,$$

et un covariant quadratique $\overline{12}$ (l'invariant S de l'émanant du quatrième ordre), dont l'expression est, dans le même cas,

$$bcyz + cazx + abxy.$$

Pour la forme générale $(a, b, c, d, e, f, x, y)^5$, ces covariants sont

$$\begin{aligned} H = & (ac - b^2)x^6 + 3(ad - bc)x^5y + 3(ae + bd - 2c^2)x^4y^2 \\ & + (af + 7be - 8cd)x^3y^3 + 3(bf + ce - 2d^2)x^2y^4 \\ & + 3(cf - de)xy^5 + (df - e^2)y^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = & (ae - 4bd + 3c^2)x^2 + (af - 3be + 2cd)xy \\ & + (bf - 4ce + 3d^2)y^2. \end{aligned}$$

On obtiendra, à un facteur numérique près, l'invariant J le plus simple de la forme proposée, soit en calculant l'invariant

quadratique $\overline{12^6}$ de $\mathbf{H}$, soit en calculant le discriminant de $\mathbf{S}$, et l'on aura

$$\mathbf{J} = a^2 f^2 - 10 abef + 4 acdf + 16 ace^2 - 12 ad^2 e + 16 b^2 df \\ + 9 b^2 e^2 - 12 bc^2 f - 76 bcde + 48 bd^3 + 48 c^3 e - 32 c^2 d^2,$$

expression qui, pour la forme canonique, se réduit à

$$b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 - 2 abc (a + b + c).$$

170. Le discriminant peut s'obtenir en éliminant les variables entre les deux dérivées $ax^i - cz^i$, $by^i - cz^i$ de la forme canonique. Lorsqu'on les suppose toutes deux égales à zéro, on peut prendre abc pour la valeur commune de ax^i , by^i et cz^i , d'où

$$x = \sqrt[4]{bc}, \quad y = \sqrt[4]{ca}, \quad z = \sqrt[4]{ab}.$$

Substituant dans l'équation $x + y + z = 0$, on obtient le discriminant sous la forme

$$\sqrt[4]{bc} + \sqrt[4]{ca} + \sqrt[4]{ab} = 0,$$

ou

$$[b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 - 2 abc (a + b + c)]^2 \\ - 128 a^2 b^2 c^2 (bc + ca + ab) = 0,$$

ce qui revient à $\mathbf{J}^2 - 128 \mathbf{K}$, $\mathbf{J}$ étant l'invariant obtenu précédemment et $\mathbf{K}$ l'invariant du huitième ordre, dont l'expression pour la forme canonique se réduit à

$$a^2 b^2 c^2 (bc + ca + ab).$$

On peut encore définir ce nouvel invariant ainsi qu'il suit. Nous avons donné (143, 144) l'expression du covariant du troisième degré, dont les racines sont les variables x , y et z de la forme canonique; l'expression de ce covariant, qui n'est autre que l'invariant $\mathbf{T}$ de l'émanant du quatrième ordre, est, pour la forme générale,

$$\mathbf{T} = (ace - ad^2 - eb^2 + 2bcd - c^3)x^3 \\ + (acf - ade - b^2f + bce + bd^2 - c^2d)x^2y \\ + (adf - ae^2 - bcf + bde + c^2e - cd^2)xy^2 \\ + (bdf - be^2 - c^2f + 2cde - d^3)y^3;$$

elle se réduit, pour la forme canonique, à $abcxyz$. Si l'on y substitue, comme d'habitude, des symboles différentiels à la place des variables, et que l'on opère avec le carré de T sur le covariant H , on obtiendra l'invariant K , ainsi qu'on peut le vérifier sans peine sur la forme canonique. On peut encore le trouver en cherchant, comme au n° 157, l'invariant commun I des deux covariants S et T .

171. Les formes du cinquième degré ont, en outre, un invariant L du douzième ordre qui peut être défini simplement comme le discriminant de T . Pour la forme canonique T se réduisant à $abcxyz$, L est égal à $-a^4b^4c^4$. L'invariant L se réduit à zéro si les trois coefficients b, c, d sont tous nuls. Par conséquent la forme $ax^5 + 5exy^4 + fy^5$, à laquelle M. Jerrard a montré que l'on peut ramener la forme générale par une substitution non linéaire, ne peut être obtenue par une substitution linéaire que dans le cas où $L = 0$.

172. Nous prendrons J, K et L pour invariants fondamentaux de la forme du cinquième degré, et nous allons montrer comment tous les autres invariants peuvent s'exprimer en fonction de J, K, L . En premier lieu, il faut remarquer que la permutation de x et y ou de x et z équivaut à une transformation linéaire au module -1 . Par conséquent, si un invariant est tel, qu'après la transformation il se trouve multiplié par une puissance paire du module, il doit, pour la forme canonique, rester invariable si l'on permute a, b et c , c'est-à-dire qu'il doit être une fonction symétrique de ces trois quantités. Si l'invariant est multiplié par une puissance impaire du module, il doit, pour la forme canonique, changer de signe lorsque l'on permute deux des quantités a, b, c : il doit donc être un produit des différences $(a-b)(b-c)(c-a)$ par une fonction symétrique de a, b, c . En outre, remarquons que, dans la transformation, l'invariant se trouve multiplié par une puissance du module dont l'exposant est égal à son *poids*, soit à $\frac{5}{2}n$ (110) pour un invariant d'ordre n d'une forme du cinquième degré : cette forme ne peut avoir d'invariant d'ordre

impair; si l'ordre n est un multiple de 4, le poids sera un nombre pair et le signe de l'invariant ne changera pas par la permutation de x et de y ; si, au contraire, l'ordre de l'invariant n'est pas divisible par 4, l'invariant sera *gauche*, c'est-à-dire changera de signe quand on permutera x et y . Examinons d'abord les invariants de la première espèce qui doivent, ainsi que nous venons de le voir, être, pour la forme canonique, des fonctions symétriques de a, b, c . On a

$$J = (bc + ca + ab)^2 - 4abc(a + b + c),$$

$$K = a^2 b^2 c^2 (bc + ca + ab),$$

$$L = a^4 b^4 c^4,$$

équations dont on déduit

$$M = \frac{1}{4} (K^2 - JL) = a^5 b^5 c^5 (a + b + c) (*).$$

Il suit de là que, si l'on réduit une forme du cinquième degré à sa forme canonique par une substitution dont le module soit égal à l'unité, les nouvelles valeurs de a, b, c seront les racines de l'équation du troisième degré

$$\alpha^3 - \frac{M}{L^{\frac{5}{4}}} \alpha^2 + \frac{K}{L^{\frac{1}{2}}} \alpha - L^{\frac{1}{4}} = 0.$$

L'ordre d'une fonction symétrique de a, b, c étant égal à son poids par rapport aux coefficients de cette équation, et ce poids étant un multiple de 4, il est facile de voir que la fonction en question sera une fonction rationnelle de J, K, L .

Étant donc donné un invariant dont l'ordre est un multiple de 4, nous venons de prouver que l'on peut écrire une fonction rationnelle de J, K, L qui, pour la forme canonique, aura la même valeur que cet invariant, et qui, par suite, sera

(*) Le lecteur remarquera que, bien que dans le cas de la forme canonique $a^5 b^5 c^5 (a + b + c)$ soit divisible par $a^4 b^4 c^4$, on n'est cependant pas en droit d'en conclure qu'en général M soit divisible par L , excepté dans les cas où il aurait été prouvé que le quotient $abc(a + b + c)$ est également un invariant.

toujours identique avec lui. Et, puisqu'il serait manifestement absurde de supposer une fonction entière des coefficients égale à une fraction irréductible, il suit de là que tout invariant non gauche est une fonction entière de J, K, L . Si l'on fait a, b, c égaux à zéro, J, K et L s'annulent; par conséquent, lorsque trois racines de la forme sont égales, ces invariants se réduisent à zéro (*). Si l'on fait a, b, e, f égaux à zéro, J se réduit à $-32c^2d^2$, L à $-16c^6d^6$, et, par suite, $J^3 - 2048L$ se réduit à zéro. Les formes du cinquième degré qui ont deux couples de racines égales doivent donc avoir non-seulement leur discriminant égal à zéro, mais en outre J^3 égal à $2048L$.

173. L'invariant gauche le plus simple s'obtient en calculant le résultant de la forme $ax^5 + by^5 + cz^5$ et de son covariant canonique $T = abcx yz$. Substituant successivement les trois racines de ce dernier dans la forme et multipliant, il vient

$$I = a^5 b^5 c^5 (b - c)(c - a)(a - b);$$

cet invariant est donc du dix-huitième ordre. Avant sa découverte par M. Hermite (**), on n'avait pas reconnu la possibilité de l'existence d'invariants de cette espèce.

On prouvera comme dans le dernier numéro que tout invariant gauche de la forme du cinquième degré doit être le produit de cet invariant I par une fonction rationnelle de J, K, L .

(*) En général tous les invariants d'une forme s'annulent si plus de la moitié de ses racines deviennent égales; car on voit sans peine que si la moitié des coefficients en partant d'une extrémité s'annulent, il devient impossible de composer avec ceux qui subsistent aucun terme du poids convenable (110).

(**) Voir *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IX, p. 172. M. Hermite opère avec une nouvelle forme canonique, dont les variables x et y sont les deux facteurs du covariant quadratique. La forme est donc supposée telle, que les deux expressions $ae - 4bd + 3c^2$, $bf - 4ce + 3d^2$ soient nulles, et le covariant quadratique se réduit à xy . L'avantage de cette méthode consiste en ce que le symbole qui en dérive est simplement $\frac{d^2}{dx dy}$, et que quelques-uns des covariants que l'on obtient ainsi prennent une forme très-simple.

La valeur de I a été calculée par M. Salmon (voir *Philosophical Transactions*, 1858, p. 455); mais le développement renfermant près de 900 termes ne pourrait trouver place ici.

174. Le carré de I , étant du trente-sixième ordre, doit s'exprimer rationnellement en fonction de J , K , L (172). Son expression est facile à trouver.

En formant le discriminant de l'équation du troisième degré du numéro 172,

$$\alpha^3 - \frac{M}{L^{\frac{5}{4}}} \alpha^2 + \frac{K}{L^{\frac{1}{2}}} \alpha - L^{\frac{1}{4}} = 0,$$

nous aurons le produit des carrés des différences de a , b , c en fonction de J , K , L , et il vient

$$I^2 L = M^2 K^2 + 18 M K L^2 - 27 L^4 - 4 K^3 L^2 - 4 M^3,$$

ou, remplaçant M par sa valeur $\frac{I}{4} (K^2 - J L)$ et divisant par L ,

$$16 I^2 = J K^4 + 8 L K^3 - 2 J^2 L K^2 - 72 J K L^2 - 432 L^3 + J^3 L^2.$$

175. Nous n'entrerons pas dans d'autres détails concernant les covariants (*) d'une forme du cinquième degré. Les plus remarquables, après ceux que nous avons déjà mentionnés, sont les covariants linéaires. Si l'on opère deux fois avec le covariant quadratique $beyz + cazx + abxy$ sur la forme du cinquième degré elle-même, le résultat sera évidemment du premier degré, et pour la forme canonique se réduira à

$$abc (bcx + cay + abz).$$

En effectuant l'élimination entre ce covariant linéaire et le covariant canonique T , on obtient l'invariant I , et, en éliminant entre le covariant linéaire et la forme du cinquième degré, on a $I(J^2 - 3K)$. Ainsi, lorsque l'invariant I se réduit à zéro, l'équation du cinquième degré se résout immédiatement, l'une des racines étant donnée par le covariant linéaire; il en est de même quand $J^2 = 3K$.

En opérant avec le covariant linéaire sur le covariant qua-

(*) Les valeurs de quelques-uns des plus simples ont été données par M. Cayley (*Philosophical Transactions*, t. CXLI, p. 125).

dratique; on obtient un autre covariant linéaire du septième ordre

$$\begin{aligned} abc [x(a^2c^2 - a^2b^2 + ab^2c - abc^2) \\ + y(a^2b^2 - b^2c^2 + abc^2 - a^2bc) \\ + z(b^2c^2 - c^2a^2 + a^2bc - ab^2c)]. \end{aligned}$$

Nous avons déjà démontré que l'on peut exprimer tous les covariants en fonction de deux d'entre eux et des invariants. M. Hermite effectue la transformation en prenant pour x et y les deux covariants linéaires, et alors les coefficients de la transformée du cinquième degré sont tous des invariants. Leurs valeurs ne sont cependant pas simples, et la réduction à cette forme ne serait pas possible dans le cas particulier où les deux covariants seraient identiques, ce qui arrive lorsque leur résultant $JK + 9L$ est nul. En formant le Jacobien du covariant quadratique et d'un autre covariant quelconque, nous aurons un covariant du même degré que ce dernier par rapport aux variables, et d'un degré plus élevé de deux unités par rapport aux coefficients. Ainsi l'on déduit, par ce moyen, du covariant canonique un autre covariant du troisième degré

$$abc [bc(y^2z - yz^2) + ca(z^2x - zx^2) + ab(x^2y - xy^2)],$$

que l'on pourrait aussi former en opérant avec le covariant canonique sur le Hessien. Les formes du cinquième degré ayant des covariants linéaires de tous les ordres impairs au-dessus du troisième, il résulte du principe de réciprocité que toutes les formes de degré impair au-dessus du troisième ont des covariants linéaires du cinquième ordre par rapport aux coefficients.

176. On sait que le signe du discriminant d'une forme permet de reconnaître immédiatement si elle a un nombre pair ou impair de couples de racines imaginaires; supposons, en effet, la forme décomposée en facteurs réels du deuxième degré, son discriminant (78) sera égal au produit des discriminants de ces facteurs multipliés par le carré du produit des résultants de chaque couple de facteurs. Ces résultants sont tous réels et leurs carrés positifs; par conséquent, nous n'a-

vons à nous occuper, en ce qui concerne le signe du discriminant, que des discriminants des facteurs du deuxième degré. Mais le carré de la différence des deux racines d'une équation du deuxième degré est positif quand les racines sont réelles, et négatif quand elles sont imaginaires : il en résulte donc que le produit des carrés des différences des racines d'une équation quelconque est positif quand elle admet un nombre pair de couples de racines imaginaires, et négatif lorsque ce nombre est impair. Nous sommes convenus d'écrire le discriminant en donnant le signe + au produit des deux termes extrêmes : il aura le même signe que le produit des carrés des différences des racines quand la forme sera de degré $4m$ ou $4m + 1$, et un signe contraire quand elle sera de degré $4m + 2$ ou $4m + 3$. Nous voyons donc que, dans le cas d'une forme du cinquième degré, si le discriminant est positif, il y aura quatre racines imaginaires, ou il n'y en aura aucune, et si le discriminant est négatif, il y en aura deux. Il nous reste maintenant à distinguer les cas dans lesquels toutes les racines sont réelles et ceux dans lesquels il n'en existe qu'une.

177. Pour arriver à faire cette distinction, on peut procéder de différentes manières. Les *criteria* fournis par le théorème de Sturm sont les suivants sous la forme la plus simple (*). Soit J l'invariant du quatrième ordre et N, P, Q, R les fonctions suivantes :

$$N = b^2 - ac,$$

$$P = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$Q = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$R = a^2e^2 - a^2df + 3abcf - 3abde + 4acd^2 - 4ac^2e - 2b^3f \\ + 5b^2ce + 2b^2d^2 - 8bc^2d + 3c^4.$$

(*) Ces valeurs ont été données par M. Roberts (*Quarterly Journal*, t. IV, p. 175). Le lecteur qui aura à sa disposition les Tables des fonctions de Sturm calculées par M. Cayley (*Philosophical Transactions*, t. CXLVII, p. 735) devra prendre garde aux erreurs de signes qui existent dans l'expression des quatrième et cinquième fonctions.

Les premiers termes des fonctions de Sturm sont proportionnels à

$$a, a, N, 5NP + 9aQ, -NJ + 12PR + 4P^3 - 216Q^2,$$

la dernière de ces quantités étant évidemment le discriminant; et les conditions fournies par le théorème de Sturm pour distinguer le cas où il y a quatre racines imaginaires de celui où il n'y en a aucune, consistent en ce que, lorsque toutes les racines sont réelles, les quantités

$$N, 5NP + 9aQ, -NJ + 12PR + 4P^3 - 216Q^2$$

doivent être positives, de même que le discriminant.

178. En pratique, les criteria (*) fournis par le théorème de Sturm sont les plus convenables, parce que les fonctions à calculer sont d'un degré moins élevé. Il était cependant désirable, au point de vue théorique, d'avoir également des criteria exprimés en fonction des invariants; MM. Hermite et Sylvester y sont parvenus par des méthodes différentes.

La condition obtenue par M. Hermite, à l'aide d'une méthode purement analytique, consiste en ce que toutes les racines sont réelles lorsque, le discriminant étant positif, les trois quantités

$$K, 2^{11}L - J^3 + JD, K(JL + K^2) - 18L^2$$

sont également positives.

M. Sylvester, par des considérations géométriques très-ingénieuses, est parvenu à un résultat un peu différent, les con-

(*) Il faut remarquer qu'il est facile de poser une foule de criteria pouvant indiquer l'existence de racines imaginaires, car toute fonction symétrique des carrés des différences des racines doit être positive si toutes les racines sont réelles. On peut sans difficulté écrire des fonctions de cette espèce qui soient également des invariants et qui, lorsqu'elles deviennent négatives, indiquent que l'équation a des racines imaginaires. Mais elles peuvent être également positives quand il y a des racines imaginaires, et le problème consiste à trouver un système de conditions telles, que l'une d'elles doive nécessairement ne pas être satisfaite lorsque toutes les racines ne sont pas réelles.

ditions de réalité consistant en ce que toutes les racines sont réelles lorsque la quantité L est négative et la quantité

$$2^{11}L - J^3$$

positive (ce qui suppose également J négatif). Mais il résulte également de la théorie de M. Sylvester ce fait très-remarquable que l'on peut substituer comme criterium à $2^{11}L - J^3$ l'expression

$$2^{11}L - J^3 + \mu JD,$$

μ étant un coefficient indéterminé, pourvu que ce coefficient soit compris entre $+1$ et -2 . Ce résultat permet d'obtenir des criteria exprimés en fonctions symétriques des racines, et de remplacer, par exemple, la fonction

$$2^{11}L - J^3$$

par la fonction symétrique

$$\begin{aligned} & \Sigma(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\varepsilon - \alpha)^4(\varepsilon - \beta)^4(\varepsilon - \gamma)^4 \\ & \times (\delta - \alpha)^4(\delta - \beta)^4(\delta - \gamma)^4, \end{aligned}$$

dont la valeur est proportionnelle à

$$2^{11}L - J^3 + \frac{4}{5}JD.$$

179. Forme du sixième degré. — La théorie des formes du sixième degré n'a encore été que peu étudiée. Elles ont quatre invariants indépendants, que nous appellerons A , B , C , D , et qui sont des deuxième, quatrième, sixième et dixième ordres : elles ont aussi un cinquième invariant gauche E du quinzième ordre, dont le carré est une fonction rationnelle et entière des quatre autres. L'invariant A , dont l'expression symbolique est $\overline{12}^6$, s'obtient par la méthode du n° 107, et l'on a

$$A = ag - 6bf + 15ce - 10d^2.$$

Le Hessien $\overline{12}^2$ est du huitième degré, et son expression

est

$$\begin{aligned} H = & (ac - b^2)x^6 + 4(ad - bc)x^5y + (6ae + 4bd - 10c^2)x^4y^2 \\ & + (4af + 16be - 20cd)x^3y^3 \\ & + (ag + 14bf + 5ce - 20d^2)x^2y^4 + \dots (*). \end{aligned}$$

Il existe un autre covariant du second ordre par rapport aux coefficients, et du quatrième degré par rapport aux variables: c'est l'invariant S de l'émanant du quatrième ordre

$$\begin{aligned} S = & (ae - 4bd + 3c^2)x^4 + (2af - 6be + 4cd)x^3y \\ & + (ag - 9ce + 8d^2)x^2y^2 + \dots \end{aligned}$$

Nous pouvons y ajouter un covariant du sixième degré, du troisième ordre par rapport aux coefficients, et qui est l'invariant T de l'émanant du quatrième ordre:

$$\begin{aligned} T = & (ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)x^6 \\ & + (2acf - 2ade - 2b^2f + 2bce + 2bd^2 - 2c^2d)x^5y \\ & + (acg + 2adf - 3ae^2 - b^2g - 2bcf \\ & \quad + 4bde + 2c^2e - 3cd^2)x^4y^2 \\ & + (2adg - 2aef - 2bcg + 4bdf - 2be^2 \\ & \quad - 2c^2f + 6cde - 4d^3)x^3y^3 + \dots \end{aligned}$$

Nous prendrons, pour l'invariant B, celui que M. Sylvester a appelé *catalecticant*, et dont la réduction à zéro exprime la condition qui doit être remplie pour que la forme soit réductible à la somme de trois sixièmes puissances; c'est le déterminant

$$B = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{vmatrix}$$

(*) Il est inutile d'ajouter ici les termes que la symétrie permet de poser immédiatement.

ou, en développant,

$$\begin{aligned} B = & aceg - acf^2 - ad^2g + 2adef - ae^3 - b^2eg + b^2f^2 \\ & + 2bcdg - 2bcef - 2bd^2f + 2bde^2 - c^3g + 2c^2df \\ & + c^2e^2 - 3cd^2e + d^4. \end{aligned}$$

Si l'on forme l'invariant quadratique de **H**, le résultat est proportionnel à $A^2 + 300B$; si l'on forme celui du covariant **S**, on obtient $A^2 - 36B$; enfin, si l'on opère avec le covariant **T** sur la forme primitive, on retrouve l'invariant **B**.

180. Les fonctions précédentes peuvent s'exprimer sous une forme très-symétrique en adoptant la forme canonique $au^6 + bv^6 + cw^6 + dz^6$, dans laquelle u, v, w, z désignent des fonctions linéaires $\alpha x + \alpha' y, \beta x + \beta' y, \gamma x + \gamma' y, \delta x + \delta' y$ des variables x et y (*). On trouve sans peine que l'invariant **A** devient, dans cette hypothèse, en désignant par $(\alpha\beta), (\alpha\gamma), \dots$ les déterminants $\alpha\beta' - \beta\alpha', \alpha\gamma' - \gamma\alpha', \dots$,

$$A = ab(\alpha\beta)^6 + ac(\alpha\gamma)^6 + ad(\alpha\delta)^6 + bc(\beta\gamma)^6 + bd(\beta\delta)^6 + cd(\gamma\delta)^6,$$

ou sous une forme abrégée

$$A = \Sigma ab(\alpha\beta)^6;$$

on a de même, pour l'invariant **B**,

$$B = abcd(\alpha\beta)^2(\alpha\gamma)^2(\alpha\delta)^2(\beta\gamma)^2(\beta\delta)^2(\gamma\delta)^2,$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement que **B** devient nul lorsque l'une des quantités a, b, c, d est nulle, ou lorsque deux des quatre fonctions u, v, w, z deviennent identiques. Les expressions des covariants **H**, **S** et **T** sont

$$H = \Sigma ab(\alpha\beta)^2 u^4 v^4,$$

$$S = \Sigma ab(\alpha\beta)^4 u^2 v^2,$$

$$T = \Sigma abc(\alpha\beta)^2(\alpha\gamma)^2(\beta\gamma)^2 u^2 v^2 w^2.$$

(*) Cette forme, proposée par M. Salmon, est plus générale que celle du n° 149 et serait probablement tout aussi avantageuse pour la discussion de la forme du sixième degré.

181. Nous prendrons, pour l'invariant fondamental du sixième ordre C, celui qui ne renferme pas de puissance du premier coefficient a supérieure à la seconde :

$$\begin{aligned} C = & a^2 d^2 g^2 - 6a^2 defg + 4a^2 df^3 + 4a^2 e^3 g - 3a^2 e^2 f^2 \\ & - 6abcdg^2 + 18abcefg - 12abcf^3 + 12abd^2 fg \\ & - 18abde^2 g + 6abe^3 f + 4ac^3 g^2 - 24ac^2 e^2 g - 18ac^2 dfg \\ & + 30ac^2 ef^2 + 54acd^2 eg - 12acd^2 f^2 - 42acde^2 f \\ & + 12ace^4 - 20ad^4 g + 24ad^3 ef - 8ad^3 e^3 + 4b^3 dg^2 \\ & - 12b^3 efg + 8b^3 f^3 - 3b^2 c^2 g^2 + 30b^2 ce^2 g - 24b^2 cef^2 \\ & - 12b^2 d^2 eg - 24b^2 d^2 f^2 + 60b^2 de^2 f - 27b^2 e^4 + 6bc^3 fg \\ & - 42bc^2 deg + 60bc^2 df^2 - 30bc^2 e^2 f + 24bcd^3 g \\ & - 84bcd^2 ef + 66bcde^3 + 24bd^4 f - 24bd^3 e^2 + 12c^4 eg \\ & - 27c^4 f^2 - 8c^3 d^2 g + 66c^3 def - 8c^3 e^3 - 24c^3 d^3 f \\ & - 39c^2 d^2 e^2 + 36cd^4 e - 8d^6. \end{aligned}$$

Les autres invariants du sixième ordre peuvent s'exprimer en fonction des précédents. Ainsi, l'invariant du troisième ordre de S est

$$A^3 - 108AB - 54C;$$

l'invariant du troisième ordre de H est

$$3A^3 - 100AB + 2750C,$$

et l'invariant du deuxième ordre de T est

$$2AB - C.$$

182. Si a , b et c sont tous trois nuls, les invariants A, B, C se réduisent à $-10d^2$, d^4 , $-8d^6$; par conséquent, lorsque la forme admet un facteur triple, on doit avoir

$$A^2 = 100B, \quad 4AB = 5C, \quad AC = 80B^2.$$

Si a , b , f , g sont nuls, les invariants deviennent

$$\begin{aligned} 15ce - 10d^2, \quad c^2 e^3 - 3cde + d^4, \\ -8c^3 e^3 - 39c^2 d^3 e^2 + 36cd^4 e - 8d^4, \end{aligned}$$

par suite, lorsque la forme admet deux facteurs carrés, on doit avoir, indépendamment de la condition fournie par le discriminant,

$$(A^3 - 300AB + 250C)^2 = 5(A^2 - 100B)^3.$$

183. Le discriminant Δ est du dixième ordre. Si nous faisons b, d, f égaux à zéro, il se réduit à ag multiplié par le carré du discriminant de la fonction $(a, 5c, 5e, g \parallel x, y)^3$; si tous les coefficients sont nuls sauf a, d, g , le discriminant se réduit à $a^2 g^2$ multiplié par le cube du discriminant de la fonction $(a, 10d, g \parallel x, y)^2$. Connaissant ces termes, le reste du discriminant peut se calculer à l'aide de l'équation différentielle.

Nous pouvons encore adopter pour invariant du dixième ordre, au lieu du discriminant Δ , un autre invariant D , dans lequel les coefficients a et g ne figurent qu'à la quatrième puissance, et qui ne contient pas le produit $a^4 g^4$. La quantité qui multiplie a^4 est $(eg - f^2)^3$, et la relation qui lie Δ et D est

$$\Delta = A^5 - 375 A^3 B - 625 A^2 C + 3125 D.$$

Le développement complet de D et de Δ est trop long pour pouvoir trouver place ici.

184. La théorie de M. Cayley sur le nombre des invariants fait voir qu'indépendamment des quatre invariants ci-dessus, il existe encore un invariant gauche E du quinzième ordre. Nous ignorons si, de même que l'invariant I de la forme du cinquième degré est le résultant de deux covariants, E peut se déduire de deux covariants de la forme du sixième. On peut le calculer à l'aide de l'équation différentielle. La puissance de a la plus élevée qu'il renferme est a^6 , et le facteur qui multiplie a^6 est

$$(dg^2 - 3efg + 2f^3)(eg - f^2)^3 (*).$$

L'expression de E en fonction des autres invariants peut s'ob-

(*) Le développement de E , qui contient près de 1400 termes, a été calculé par M. Salmon (*Lessons of Higher Algebra*, 2^e édition, p. 253-265).

tenir à l'aide des considérations suivantes. Si les coefficients b, d, f sont nuls, E l'est nécessairement aussi. Car, le poids de E étant 45 (110), celui de quelque facteur de chaque terme doit être impair, et, quand nous supposons nuls tous les coefficients dont le poids est impair, E doit s'annuler. La condition $E = 0$ exprime donc que les racines de l'équation du sixième degré forment un système *en involution*. Par conséquent, si nous supposons b, d, f égaux à zéro dans les expressions de A, B, C, D , et si nous éliminons a, c, e, g , la relation que nous obtiendrons entre A, B, C, D sera satisfaite quand E sera nul et le renfermera comme facteur.

Faisons $ag = \lambda$, $ce = \mu$, $ae^3 + gc^3 = \nu$, les valeurs des invariants deviennent, en y supposant b, d, f nuls,

$$A = \lambda + 15\mu,$$

$$B = \lambda\mu + \mu^2 - \nu,$$

$$C = -24\lambda\mu^2 - 8\mu^3 + 4(\lambda + 3\mu)\nu,$$

$$\Delta = \lambda(\lambda^2 - 150\lambda\mu - 1875\mu^2 + 500\nu)^2.$$

Éliminant d'abord ν , les deux dernières équations deviennent

$$C = 4\mu(\lambda - \mu)^2 - 4(\lambda + 3\mu)B,$$

$$\Delta = \lambda(\lambda^2 + 350\lambda\mu - 1375\mu^2 - 500B)^2.$$

Éliminant ensuite μ à l'aide de la première équation, il vient

$$1024\lambda^3 - 1152\lambda^2 A + (132A^2 + 10800B)\lambda + 3375C \\ + 2700AB - 4A^3 = 0,$$

$$\lambda(256\lambda^2 - 320A\lambda + 55A^2 + 4500B)^2 - 81\Delta = 0.$$

Le résultant de ces deux équations sera du trentième degré par rapport aux coefficients, et, d'après ce que nous avons dit plus haut, ne pourra différer que par un facteur numérique de E^2 .



QUINZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES TERNAIRES.

185. Nous consacrerons cette Leçon à la théorie des formes ternaires quadratiques et cubiques; nous ferons connaître leurs invariants et covariants les plus remarquables, et nous donnerons en même temps quelques exemples de leurs nombreuses applications à la théorie des courbes planes.

Forme quadratique. — La forme quadratique ternaire

$$U = (a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$$

n'a qu'un seul invariant, qui est le discriminant (101)

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2;$$

elle n'a également qu'un contrevariant : c'est l'évectant de Δ

$$G = (bc - f^2, ca - g^2, ab - h^2, gh - af, hf - bg, fg - ch)(\xi, \eta, \zeta)^2.$$

Les expressions de Δ et G peuvent se mettre sous la forme de déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} a & h & g & \xi \\ h & b & f & \eta \\ g & f & c & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on y remplace les coefficients $a, b, c, \dots$ par les secondes dérivées d'une forme d'un degré supérieur au second, Δ sera le Hessien (127) et G un covariant mixte auquel, en raison de la forme du déterminant, on donne quelquefois le nom de *Hessien bordé* (128).

186. Lorsque le discriminant Δ est nul, l'équation $U = 0$ représente deux lignes droites et les coordonnées x', y', z' de leur point d'intersection s'obtiennent (102) en identifiant G avec le carré de la fonction $x'\xi + y'\eta + z'\zeta$. L'équation $G = 0$ exprime la condition à laquelle doivent satisfaire (98) les coordonnées ξ, η, ζ d'une droite $x\xi + y\eta + z\zeta$ pour que cette droite soit tangente à la section conique représentée par l'équation $U = 0$. Il est facile de s'en assurer en éliminant l'une des variables et exprimant que l'équation résultante a ses racines égales; on obtient ainsi la condition $G = 0$, qui peut être appelée l'équation *tangentielle* de la section conique.

Si l'on désigne par $a_i, b_i, c_i, f_i, g_i, h_i$ les coefficients de G et que l'on calcule son contrevariant

$$(b_i c_i - f_i^2, c_i a_i - g_i^2, \dots, x, y, z)^2,$$

qui doit être un covariant de la forme U , on trouve qu'il se réduit simplement à ΔU : la relation entre les fonctions G et U est donc réciproque, c'est-à-dire que, abstraction faite du facteur Δ , U peut se déduire de G de la même manière que G se déduit de U .

187. Considérons maintenant deux formes U et U' ; nous aurons une série d'invariants du système en développant par la méthode du n° 90 le discriminant D de $U + \lambda U'$. On obtient ainsi

$$D = \Delta + \lambda \Theta + \lambda^2 \Theta' + \lambda^3 \Delta',$$

Δ, Δ' étant les discriminants de U et U' , et Θ, Θ' deux nouveaux invariants communs à U et U' , dont les valeurs sont

$$\begin{aligned} \Theta &= a' \frac{d\Delta}{da} + b' \frac{d\Delta}{db} + c' \frac{d\Delta}{dc} + f' \frac{d\Delta}{df} + g' \frac{d\Delta}{dg} + h' \frac{d\Delta}{dh}, \\ \Theta' &= a \frac{d\Delta'}{da'} + b \frac{d\Delta'}{db'} + c \frac{d\Delta'}{dc'} + f \frac{d\Delta'}{df'} + g \frac{d\Delta'}{dg'} + h \frac{d\Delta'}{dh'}. \end{aligned}$$

Si l'on fait varier le coefficient indéterminé λ , l'équation $U + \lambda U' = 0$ représentera une série de sections coniques, qui passeront évidemment toutes par les quatre points d'inter-

section des courbes U et U' (*). Mais on peut trouver, en résolvant par rapport à λ l'équation $D = 0$, trois valeurs de λ qui rendent le discriminant D de $U + \lambda U'$ égal à zéro, et pour chacune de ces trois valeurs la courbe $U + \lambda U'$ se réduit à deux droites passant par les points d'intersection de U et U' . Les six lignes droites que l'on détermine ainsi sont donc les six cordes joignant deux à deux ces quatre points; on peut les comprendre dans une même équation du sixième degré, en éliminant λ entre les équations $D = 0$ et $U + \lambda U' = 0$, ce qui donne pour l'équation des six cordes d'intersection

$$\Delta U'^3 - \Theta U'^2 U + \Theta' U' U^2 - \Delta' U^3 = 0.$$

Si l'on suppose maintenant que les sections coniques U et U' deviennent tangentes, deux des quatre points d'intersection se réduisant dans ce cas à un seul, il en est de même de deux des trois couples de droites, et l'équation qui détermine λ doit admettre deux racines égales; son discriminant doit donc être nul, et l'on obtient ainsi la relation

$$(\Theta \Theta' - 9 \Delta \Delta')^2 - 4(\Theta^2 - 3 \Delta \Theta')(\Theta'^2 - 3 \Delta' \Theta) = 0,$$

qui exprime en fonction des invariants la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de U et U' pour que les deux sections coniques soient tangentes.

188. Toutes les relations permanentes (c'est-à-dire indépendantes du choix des axes) qui peuvent exister entre deux courbes du second degré s'exprimeraient de même en fonction des quatre invariants $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ (**). On sait, par exemple, qu'étant données deux sections coniques prises arbitrairement dans un plan, il n'est généralement pas possible d'inscrire dans l'une d'elles un triangle qui soit en même temps circonscrit à l'autre; mais on peut, au contraire, en trouver une

(*) Nous nous servons de cette locution abrégée pour désigner les courbes représentées par les équations $U = 0$ et $U' = 0$.

(**) Voir, pour ces applications à la théorie des courbes du second degré, le *Traité des Sections coniques* de M. Salmon, Leçon XVIII.

infinité dès que les coefficients de U et U' satisfont à une certaine équation de condition, que nous allons établir.

Admettons qu'il existe un triangle remplissant les conditions précédentes; il est aisé de voir que U et U' peuvent, dans ce cas, être ramenées par une transformation linéaire convenable aux formes très-simples

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy,$$

$$U' = 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

car les trois droites représentées par les équations linéaires $x=0$, $y=0$, $z=0$ se couperont sur la courbe U' et seront tangentes à la courbe U . Les expressions des invariants se réduisent à

$$\Delta = -4, \quad \Theta = 4(f+g+h), \quad \Theta' = -(f+g+h)^2, \quad \Delta' = 2fgh,$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation demandée (*)

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta'.$$

189. Passons aux covariants et contrevariants du système des deux formes U et U' ; si l'on développe le contrevariant g de $U + \lambda U'$ en remplaçant, dans G , a , b , ... par $a + \lambda a'$, $b + \lambda b'$, ..., il vient

$$g = G + \lambda\Phi + \lambda^2 G',$$

G et G' étant les contrevariants de U et U' , et Φ un nouveau

(*) On remarquera que nous n'avons pas admis comme vraie en général la condition $\Delta = -4$. En effet un invariant ne reste pas absolument invariable lorsque l'on effectue la transformation, puisqu'il est alors multiplié par une puissance du module; une équation telle que $\Delta = -4$ ne peut donc être vraie d'une manière générale, et la relation cherchée doit être homogène, de telle sorte qu'après la transformation tous ses termes se trouvent multipliés par une même puissance du module. On rétablirait l'homogénéité dans l'exemple précédent en remplaçant dans U , x , y , z par $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$; d'où

$$\Delta = -4abc, \quad \Theta = 4\sqrt{abc}(f\sqrt{a} + g\sqrt{b} + h\sqrt{c}), \quad \Theta' = -(f\sqrt{a} + g\sqrt{b} + h\sqrt{c})^2,$$

contrevariant dont l'expression a déjà été donnée (101), savoir

$$\begin{aligned}\Phi = & (bc' + b'c - 2ff')\xi^2 + (ca' + c'a - 2gg')\eta^2 \\ & + (ab' + a'b - 2hh')\zeta^2 \\ & + 2(gh' + g'h - af' - a'f)\eta\xi + 2(hf' + h'f - bg' - b'g)\zeta\xi \\ & + 2(fg' + f'g - ch' - c'h)\xi\eta.\end{aligned}$$

L'équation $\Phi = 0$ exprime que la droite $x\xi + y\eta + z\zeta$ est coupée *harmoniquement* par les deux sections coniques.

Formons de même le contrevariant f de $G + \lambda G'$, nous devrons obtenir un covariant, et il vient, en remarquant que le contrevariant de G n'est autre que ΔU ,

$$f = \Delta U + \lambda F + \lambda^2 \Delta' U',$$

F étant un covariant dont l'expression se déduira de celle de Φ , en y remplaçant les coefficients $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$ de U et U' par les coefficients correspondants $a_1, b_1, c_1, \dots, a'_1, b'_1, c'_1, \dots$ de G et G' , et les variables ξ, η, ζ par x, y, z , ce qui donne

$$\begin{aligned}F = & (b_1c'_1 + b'_1c_1 - 2f_1f'_1)x^2 + \dots \\ = & [(ca - g^2)(a'b' - h'^2) + (c'a' - g'^2)(ab - h^2) \\ & - 2(gh - af)(g'h' - a'f')]\xi^2 + \dots\end{aligned}$$

190. En égalant à zéro le discriminant des deux expressions f et g considérées comme fonctions de λ , on obtient deux équations remarquables

$$\Phi^2 - 4GG' = 0, \quad F^2 - 4\Delta\Delta'UU' = 0,$$

dont nous allons rechercher l'interprétation géométrique.

Remarquons d'abord que ces deux équations sont simplement celles *des enveloppes* des deux séries de sections coniques que représenteraient, en y faisant varier λ , les équations $g = 0$ et $f = 0$ du numéro précédent.

La première série de ces courbes est représentée en coordonnées ordinaires par l'équation $U + \lambda U' = 0$, et en coordonnées tangentielles par l'équation correspondante $g = 0$; elles passent toutes par les quatre points d'intersection des

sections coniques U et U' ; leur enveloppe se réduit donc à ces quatre points, et la relation $\Phi^2 = 4GG'$ est la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'une droite $x\xi + y\eta + z\zeta$ pour qu'elle passe par l'un de ces points.

De même, les sections coniques représentées par l'équation $f = 0$, ou par l'équation tangentielle correspondante $G + \lambda G' = 0$ ont toutes quatre tangentes communes; ce sont celles des courbes U et U' . Leur enveloppe se compose donc de ces quatre tangentes, dont l'équation sera $F^2 = 4\Delta\Delta'UU'$. On peut noter que les huit points de contact se trouvent sur la section conique F .

191. Tous les covariants quadratiques des deux formes peuvent s'exprimer en fonction de F , U et U' , et des invariants. Déterminons, par exemple, l'expression du covariant que l'on obtient en remplaçant dans G' les variables ξ , η , ζ par $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$: pour plus de simplicité, nous ferons usage des formes canoniques, et nous aurons

$$\begin{aligned} U &= ax^2 + by^2 + cz^2, & U' &= a'x^2 + b'y^2 + c'z^2, \\ G &= bc\xi^2 + ca\eta^2 + ab\zeta^2, & G' &= b'c'\xi^2 + c'a'\eta^2 + a'b'\zeta^2, \\ \Delta &= abc, & \Theta &= a'bc + b'ca + c'ab, \\ \Delta' &= a'b'c', & \Theta' &= ab'c' + bc'a' + ca'b', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= (b'c + bc')\xi^2 + (ca' + c'a)\eta^2 + (ab' + a'b)\zeta^2, \\ F &= aa'(b'c + bc')x^2 + bb'(ca' + c'a)y^2 + cc'(ab' + a'b)z^2. \end{aligned}$$

En effectuant la substitution, on trouve pour la valeur du covariant cherché $\Theta'U - F$.

Il faut remarquer que les théorèmes de cette nature une fois démontrés pour les formes quadratiques le sont également pour des formes de degré plus élevé, en admettant que les coefficients a , b , c ,... représentent leurs dérivées du second ordre: Δ et Δ' deviennent alors les Hessiens, Θ et Θ' des covariants. Ainsi, lorsque l'on remplace dans le cova-

riant

$$\psi = \left[\frac{d^2 U'}{dz^2} \frac{d^2 U'}{dy^2} - \left(\frac{d^2 U'}{dz dy} \right)^2 \right] \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + \dots$$

les premières dérivées de U par leurs valeurs en fonction des dérivées du second ordre, on obtient une quantité de même forme que ci-dessus, et il vient

$$(n-1)^2 \psi = n(n-1) \Theta' U - F;$$

d'où, en permutant U et U' et désignant par ψ' un nouveau covariant analogue à ψ ,

$$(n'-1)^2 \psi' = n'(n'-1) \Theta U' - F,$$

et retranchant

$$(n-1)^2 \psi - (n'-1)^2 \psi' = n(n-1) \Theta' U - n'(n'-1) \Theta U'.$$

192. Nous allons maintenant faire connaître les invariants et covariants d'un système de trois formes, U, U', U''; plusieurs d'entre eux possèdent des propriétés remarquables qui établissent, ainsi que nous le verrons plus loin, un lien entre la théorie des formes quadratiques et celle des formes cubiques.

En développant, pour obtenir des invariants du système, le discriminant de $\lambda U + \mu U' + \nu U''$, nous aurons une fonction du troisième degré en λ, μ, ν , dont les coefficients sont des invariants; nous obtenons ainsi, outre les invariants $\Delta, \Delta', \dots, \Theta, \Theta', \dots$ que nous connaissons déjà, un nouvel invariant I, qui est dans ce développement le coefficient de λ, μ, ν , et dont la formule symbolique est $\overline{123}^2$. Sa valeur a déjà été donnée (127); en rapprochant les termes semblables, elle peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} I = & ab'c'' + ab''c' + a'bc'' + a'b''c + a''bc' + a''b'c \\ & + 2(fg'h'' + fg''h' + f'gh'' + f'g''h + f''gh' + f''g'h) \\ & - 2(af'f'' + a'ff'' + a''ff') - 2(bg'g'' + b'gg'' + b''gg') \\ & - 2(ch'h'' + c'hh'' + c''hh'), \end{aligned}$$

et sous cette forme on voit sans peine que I se déduit du discriminant Δ d'une seule forme U , en y remplaçant chaque terme par six nouveaux termes, tels que $ab'c''$, $ab''c'$, ..., résultant de la permutation des coefficients de U , U' , U'' .

Le covariant le plus important est le *Jacobien* $\overline{123}$, qui est du troisième degré par rapport aux variables et aux coefficients; en représentant, pour abrégier, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, par (abc) le déterminant des neuf coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, la valeur de J est

$$\begin{aligned} J = & (agh)x^3 + (bhf)y^3 + (cfg)z^3 \\ & - [(bch) + (bfg)]y^2z + [(cbg) + (cfh)]yz^2 \\ & - [(caf) + (cgh)]z^2x + [(ach) + (agf)]zx^2 \\ & - [(abg) + (ahf)]x^2y + [(baf) + (bhg)]xy^2 \\ & - [(abc) + 2(fgh)]xyz. \end{aligned}$$

On a vu (70) que, si les trois courbes U , U' , U'' ont un point commun, ce point est un point double sur la courbe J ; par conséquent, si les trois sections coniques ont deux points communs, la courbe du troisième degré représentée par J se résout en une droite et une section conique.

Il existe aussi un contrevariant du troisième degré par rapport aux variables et aux coefficients; il a pour formule symbolique $\overline{\xi 12} \cdot \overline{\xi 23} \cdot \overline{\xi 31}$, et son expression développée est

$$\begin{aligned} \Phi = & (bcf)\xi^3 + (cag)\eta^3 + (abh)\zeta^3 \\ & - [(cah) + 2(agf)]\eta^2\xi + [(bag) + 2(ahf)]\eta\xi^2 \\ & - [(abf) + 2(bhg)]\zeta^2\xi + [(cbh) + 2(bfg)]\xi\zeta^2 \\ & - [(bcg) + 2(cf h)]\xi^2\eta + [(acf) + 2(cgh)]\xi\eta^2 \\ & + [(abc) - 4(fgh)]\xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

Les deux fonctions J et Φ sont susceptibles de plusieurs interprétations géométriques. D'après la définition de la fonction J , elle exprime la condition nécessaire pour que l'on puisse trouver un système de valeurs x', y', z' satisfaisant aux

trois équations

$$x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} = 0,$$

$$x' \frac{dU'}{dx} + y' \frac{dU'}{dy} + z' \frac{dU'}{dz} = 0,$$

$$x' \frac{dU''}{dx} + y' \frac{dU''}{dy} + z' \frac{dU''}{dz} = 0;$$

mais ces équations ne sont autres que celles des polaires d'un point par rapport aux trois sections coniques U, U', U'' : la courbe J est donc le lieu des points pour lesquels ces trois polaires concourent en un même point.

Quant au contrevariant Φ , il exprime que la droite

$$x\xi + y\eta + z\zeta$$

est coupée en *involution* par les trois sections coniques.

193. Si l'on opère avec l'une des fonctions J et Φ sur l'autre fonction, on obtient un invariant du sixième ordre

$$\begin{aligned} \Theta = & 4[(abf)(caf) + (bcg)(abg) + (cah)(bch)] \\ & - 8[(afg)(bfg) + (afh)(cfh) + (bgh)(cgh)] \\ & + 8[(agh)(bcf) + (bhf)(cag) + (cfg)(abh)] \\ & - 4(abc)(fgh) + 8(fgh)^2 - (abc)^2. \end{aligned}$$

En opérant sur Φ successivement avec les trois formes U, U', U'' , nous aurons un système remarquable de trois contrevariants linéaires découverts par M. Hermite; si nous les désignons par $l\xi + m\eta + n\zeta, l'\xi + m'\eta + n'\zeta, l''\xi + m''\eta + n''\zeta$, les coefficients l, m, n contiendront au deuxième degré ceux de U et au premier degré ceux de U' et U'' ; de même l', m', n' renfermeront au deuxième degré ceux de U' et au premier ceux de U et U'' , etc.; on déduit immédiatement de ces contrevariants un système correspondant de covariants linéaires, savoir $Lx + My + Nz, L'x + M'y + N'z, L''x + M''y + N''z$, les quantités $L, M, N, \dots$ étant les mineurs du déterminant (lmn) correspondant à $l, m, n, \dots$.

Ce déterminant est lui-même un nouvel invariant Σ des trois formes U , U' , U'' , et contient, de même que le résultant, les coefficients de chacune d'elles au quatrième degré; il n'est cependant pas identique au résultant qui s'exprime fort simplement, ainsi que nous le verrons plus loin, en fonction des deux invariants Θ et Σ .

194. *Formes cubiques.* — L'expression générale de la forme cubique ternaire est

$$U = ax^3 + by^3 + cz^3 + 3fy^2z + 3f'yz^2 + 3gxz^2 + 3g'x^2z \\ + 3hyx^2 + 3h'yzx + 6lxyz.$$

Ramenée à la forme canonique, elle se réduit simplement à

$$U = x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz.$$

Les invariants fondamentaux découverts par M. Aronhold sont ceux dont nous avons donné (129, 130) la formule symbolique

$$S = \overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{234} \cdot \overline{314}, \\ T = \overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{235} \cdot \overline{316} \cdot \overline{456}^2.$$

En effectuant les opérations indiquées, on a

$$S = l^4 - 2(fg' + hf' + gl')l^2 \\ + (aff' + bgg' + chh' + 3fgh + 3f'g'h' - abc)l \\ - a(f^2g + f'^2h') - b(g^2h + g'^2f') - c(h^2f + h'^2g') \\ + (abgf' + bchg' + cafh') \\ + (f^2g'^2 + h^2f'^2 + g^2h'^2 - fgg'h' - gh'h'f' - fhf'g'),$$

et pour la forme canonique

$$S = l^4 - l.$$

La valeur de T est beaucoup plus compliquée; elle se réduit, pour la forme canonique, à

$$T = 1 - 20l^3 - 8l^6.$$

M. Sylvester a démontré que tous les autres invariants doivent être des fonctions rationnelles de S et T ; ainsi le discri-

minant Δ étant du douzième ordre doit être une fonction linéaire de S^3 et T^2 , et en effet sa valeur, donnée pour la première fois par M. Aronhold, est

$$\Delta = T^2 - 64S^3 = (1 + 8l^3)^3,$$

ainsi qu'on peut le vérifier facilement sur la forme canonique.

193. Le covariant le plus simple est le Hessien

$$H = l^2(x^3 + y^3 + z^3) - (1 + 2l^3)xyz.$$

C'est le seul covariant indépendant du troisième degré; car les autres, étant également de la forme

$$m(x^3 + y^3 + z^3) + 6l'xyz,$$

peuvent tous s'exprimer en fonction linéaire de U et de H . Ainsi le Hessien de H étant du neuvième ordre par rapport aux coefficients, il faudra, si l'on veut le mettre sous la forme $\alpha U + \beta H$, que α soit du huitième ordre et β du sixième. Ces deux facteurs ne différeront donc que par des coefficients numériques de S^2 et T , et en effet l'expression demandée est $4S^2U - TH$.

Nous aurons immédiatement des contrevariants en formant les évectants de S et T . Le premier évectant de S est

$$s = -l(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3) + (4l^3 - 1)\xi\eta\zeta;$$

le second se réduit à zéro. Si l'on opère avec la fonction s sur le Hessien H , on obtient un invariant du sixième ordre, qui n'est autre que l'invariant T , ainsi que nous l'avons déjà démontré (130). Les deux premiers évectants de T sont

$$\begin{aligned} t &= (1 - 10l^3)(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3) - 6l^2(5 + 4l^3)\xi\eta\zeta, \\ t_1 &= (\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3)^2 - 4(1 + 8l^3)(\eta^3\zeta^3 + \zeta^3\xi^3 + \xi^3\eta^3) \\ &\quad - 24l^2(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3)\xi\eta\zeta - 24l(1 + 2l^3)\xi^2\eta^2\zeta^2. \end{aligned}$$

Tous les autres contrevariants pourront être exprimés en fonction de s , t et t_1 .

Le covariant mixte le plus simple est du second degré par rapport aux deux séries de variables; sa formule symbolique

est $\overline{\alpha_{12}}^2$, et sa valeur pour la forme canonique

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_{12}}^2 &= (y^2 - l^2 x^2) \zeta^2 + (zx - l^2 y^2) \eta^2 + (xy - l^2 z^2) \zeta^2 \\ &\quad + 2l(lyz - x^2) \eta \zeta + 2l(lzx - y^2) \zeta \zeta + 2l(lxy - z^2) \zeta \eta.\end{aligned}$$

Il existe un autre covariant mixte *gauche* du troisième degré par rapport aux deux séries de variables et aux coefficients; sa valeur est

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_{12}}^2 . \overline{\alpha_{13}} &= \zeta^3 (y^3 - x^3) + \eta^3 (z^3 - x^3) + \zeta^3 (x^3 - y^3) \\ &\quad - \eta^2 \zeta [(1 + 8l^3) y^2 z + 6l z^2 x + 12l^2 x^2 y] \\ &\quad + \eta \zeta^2 [(1 + 8l^3) y z^2 + 6l y^2 x + 12l^2 x^2 z] \\ &\quad - \zeta^2 \zeta [(1 + 8l^3) z^2 x + 6l x^2 y + 12l^2 y^2 z] \\ &\quad + \zeta \zeta^2 [(1 + 8l^3) z x^2 + 6l z^2 y + 12l^2 y^2 x] \\ &\quad - \zeta^2 \eta [(1 + 8l^3) x^2 y + 6l y^2 z + 12l^2 z^2 x] \\ &\quad + \zeta \eta^2 [(1 + 8l^3) x y^2 + 6l x^2 z + 12l^2 z^2 y].\end{aligned}$$

196. Nous avons vu qu'il n'existe que deux covariants du troisième degré, savoir la forme U et le Hessian H. Lorsque l'on adopte la forme canonique, les deux quantités $x^3 + y^3 + z^3$ et xyz pouvant s'exprimer en fonction de U et H, il est clair qu'il en sera de même de tout covariant qui sera simplement fonction de ces deux quantités. Mais l'expression générale d'une fonction symétrique de trois variables x^3, y^3, z^3 doit nécessairement renfermer trois éléments, tels que leur somme $x^3 + y^3 + z^3$, leur produit $x^3 y^3 z^3$ et la somme $x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3$ de leurs produits deux à deux; il nous faut donc adjoindre à U et H au moins un troisième covariant qui nous donne la valeur de cette dernière quantité. M. Cayley a choisi dans ce but celui que l'on obtient en remplaçant dans le covariant mixte $\overline{\alpha_{12}}^2$ les variables ζ, η, ζ par $\frac{dH}{dx}, \frac{dH}{dy}, \frac{dH}{dz}$, c'est-à-dire

$$\Theta = \left[\frac{d^2 U}{dy^2} \frac{d^2 U}{dz^2} - \left(\frac{d^2 U}{dy dz} \right)^2 \right] \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 + \dots$$

Ce covariant est du sixième degré par rapport aux variables et

du huitième par rapport aux coefficients; son expression développée pour la forme canonique est

$$\begin{aligned}\Theta = & -9l^6(x^3 + y^3 + z^3)^2 + (1 + 8l^3)^2(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3) \\ & - (2l + 5l^4 + 20l^7)(x^3 + y^3 + z^3)xyz \\ & - (15l^2 + 78l^5 - 12l^8)x^2y^2z^2.\end{aligned}$$

Nous pourrions donc exprimer tout covariant en fonction de U , H et Θ . Les mêmes considérations s'appliqueront aux contrevariants qui peuvent tous s'exprimer en fonction de s , t , t_1 . Mais il ne suit pas de là que l'expression de ces fonctions soit nécessairement rationnelle; c'est ainsi qu'une fonction parfaitement symétrique des racines d'une équation s'exprime rationnellement au moyen des coefficients, tandis qu'il n'en est plus de même si elle n'est symétrique qu'abstraction faite de son signe (tel que serait, par exemple, le produit des différences des racines). Ainsi les deux déterminants

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dH}{dx} & \frac{dH}{dy} & \frac{dH}{dz} \\ \frac{d\Theta}{dx} & \frac{d\Theta}{dy} & \frac{d\Theta}{dz} \end{vmatrix}, \quad j = \begin{vmatrix} \frac{ds}{d\xi} & \frac{ds}{d\eta} & \frac{ds}{d\zeta} \\ \frac{dt}{d\xi} & \frac{dt}{d\eta} & \frac{dt}{d\zeta} \\ \frac{dt_1}{d\xi} & \frac{dt_1}{d\eta} & \frac{dt_1}{d\zeta} \end{vmatrix}$$

nous donnent un covariant J et un contrevariant j (*) qui ne sauraient être exprimés rationnellement en fonction des covariants et contrevariants pris pour types, tandis que leurs carrés peuvent l'être sans peine. On a en effet, en désignant comme ci-dessus par Δ le discriminant $(1 + 8l^3)^3$,

$$\begin{aligned}J &= \Delta(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3), \\ j &= \Delta(\xi^3 - \eta^3)(\eta^3 - \zeta^3)(\zeta^3 - \xi^3).\end{aligned}$$

(*) Ces deux fonctions trouvent, ainsi que l'ont fait voir M. Brioschi et M. Hermite, une application importante dans la transformation des fonctions elliptiques.

Des expressions de U , H et Θ on tire

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= \frac{(1 + 2l^3)U + 6lH}{\sqrt[3]{\Delta}}, \\x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3 &= \frac{\Theta + l^3(2 + l^3)U^2 - l(2 - 5l^3)UH + 3l^2H^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}, \\x^3 y^3 z^3 &= \frac{(l^2 U - H)^3}{\Delta},\end{aligned}$$

et par suite on aura la valeur de J^2 en formant le discriminant de l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned}\Delta V^3 - \sqrt[3]{\Delta^2} [(1 + 2l^3)U + 6lH] V^2 \\+ \sqrt[3]{\Delta} [\Theta + l^3(2 + l^3)U^2 - l(2 - 5l^3)UH + 3l^2H^2] V \\+ (H - l^2 U)^3 = 0.\end{aligned}$$

On trouvera de même celle de j^2 en fonction de s , t et t_1 (*).

197. M. Sylvester a montré que l'on peut obtenir à la fois les deux invariants S et T à l'aide d'une méthode qui mérite d'être mentionnée. On peut considérer des fonctions renfermant deux séries distinctes de variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, et rechercher leurs invariants, en admettant que les deux séries de variables sont transformées en même temps, non plus par des substitutions inverses, comme dans le cas des covariants mixtes, mais par une même substitution. Prenons pour exemple la fonction

$$ax\xi + by\eta + cz\zeta + dy'\zeta + d'z\eta + ez\xi + e'x\zeta + fx\eta + f'y\xi,$$

qui se réduirait à une forme quadratique en identifiant les deux séries de variables. Il est aisé de voir qu'on aura un invariant en appliquant le symbole $\overline{123} \cdot \overline{123'}$, dans lequel, le premier facteur $\overline{123}$ ayant la même signification qu'au n° 127, le second facteur $\overline{123'}$ désigne les mêmes opérations par rap-

(*) Toutes ces fonctions admettent de nombreuses interprétations géométriques (voir le Mémoire de M. Cayley sur les courbes du troisième ordre, *Philosophical Transactions*, p. 415; 1857).

port à ξ, η, ζ : on obtient ainsi l'invariant

$$abc + def + d'e'f' - add' - bee' - eff',$$

qui reproduit, ainsi que cela doit être, le discriminant de la forme quadratique ternaire lorsque l'on suppose identiques les deux séries de variables.

Nous nommerons *forme biternaire* une fonction renfermant, comme le covariant mixte $\overline{\alpha_{12}}^2$ du n° 195, deux séries de variables; désignons-la par

$$l\xi^2 + m\eta^2 + n\zeta^2 + 2L\eta\xi + 2M\zeta\xi + 2N\zeta\eta,$$

l, m, n, L, M, N représentant, pour abréger, les six formes quadratiques en x, y, z ,

$$\begin{aligned} l &= (a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2, \\ m &= (a', b', c', f', g', h')(x, y, z)^2, \\ n &= (a'', b'', c'', f'', g'', h'')(x, y, z)^2, \\ L &= (A, B, C, F, G, H)(x, y, z)^2, \\ M &= (A', B', C', F', G', H')(x, y, z)^2, \\ N &= (A'', B'', C'', F'', G'', H'')(x, y, z)^2. \end{aligned}$$

L'application du symbole $\overline{123}^2 \cdot \overline{123}'^2$ nous fournira un invariant dont l'expression assez compliquée a été donnée par M. Cayley (*Journal de Crelle*, t. LVII). Cet invariant peut s'exprimer en fonction des invariants communs des six formes l, m, n, L, M, N , prises trois à trois. Si l'on désigne par $I(lmn)$ l'invariant des trois formes l, m, n donné au n° 192, celui de la forme biternaire est

$$I(lmn) + 2I(LMN) - I(lLL) - I(mMM) - I(nNN),$$

expression qui présente quelque analogie avec celle du discriminant d'une forme quadratique ternaire.

Revenons à la forme cubique : en ajoutant au covariant mixte $\overline{\alpha_{12}}^2$ la fonction $(x\xi + y\eta + z\zeta)^2$ multipliée par λ , on a

une forme biternaire

$$(\lambda - l^2)(x^2 \xi^2 + y^2 \eta^2 + \zeta^2 \zeta^2) + 2(\lambda + l^2)(y z \eta \zeta + z x \xi \zeta + x y \xi \eta) \\ + (\xi^2 y z + \eta^2 z x + \zeta^2 x y) - 2l(x^2 \eta \zeta + y^2 \xi \zeta + z^2 \xi \eta),$$

et, si l'on calcule son invariant par la formule ci-dessus, il vient, après réduction,

$$12\lambda^3 + 12(l^3 - l)\lambda + 1 - 20l^2 + 8l^3;$$

les coefficients de chaque puissance de λ doivent être des invariants, et, en effet, celui de λ est égal à 12S et le terme constant à T.

198. *Relations entre les formes quadratiques et cubiques ternaires.* — Il existe, entre les formes que nous venons d'étudier, des relations intéressantes que nous allons faire connaître après avoir préalablement dit quelques mots d'une classe particulière d'invariants auxquels M. Sylvester a donné le nom de *combinants*. Ces invariants jouissent de la propriété de rester constants, non-seulement quand on transforme les variables, mais encore quand on substitue aux fonctions primitives U, U', U'' des fonctions linéaires de U, U', U'' telles que

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' (*).$$

Ainsi le résultant est un combinant, car il est clair que le résultant de U, U', U'' et celui de

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'', \quad \lambda' U + \mu' U' + \nu' U'', \quad \lambda'' U + \mu'' U' + \nu'' U''$$

ne peuvent différer que par un facteur constant. De même aussi,

(*) Il suit de là qu'indépendamment des équations différentielles ordinaires auxquelles satisfont tous les invariants, il en existe d'autres spéciales auxquelles doivent aussi satisfaire les combinants. En effet, $a, b, c, \dots$, étant les coefficients de U, $a', b', c', \dots$, ceux de U', etc., nous devons évidemment avoir

$$a' \frac{dI}{da} + b' \frac{dI}{db} + c' \frac{dI}{dc} + \dots = 0.$$

Un combinant se réduit à zéro si deux des formes deviennent identiques, et il est fonction des déterminants ($ab'c'' \dots$) formés avec les différents groupes de coefficients correspondants.

lorsque l'on développe comme au n° 192 le discriminant de

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'',$$

on obtient une fonction du troisième degré en λ, μ, ν dont les coefficients sont des invariants; si l'on considère cette fonction comme une forme cubique ternaire de λ, μ, ν et que l'on calcule ses invariants dans cette hypothèse, les nouveaux invariants que l'on formera ainsi seront des combinants de U, U', U'' , puisqu'ils ne varieront pas lorsque l'on transformera λ, μ, ν par une substitution linéaire.

199. Le résultant de trois formes quadratiques ternaires peut s'exprimer en fonction de deux combinants qui ne sont autres que les invariants Θ et Σ du n° 193. Le calcul direct serait presque impraticable si l'on ne mettait à profit la propriété fondamentale de ces invariants, en remplaçant les formes données par d'autres plus simples. Il est clair d'abord que nous pouvons, sans altérer la relation cherchée, supposer deux des trois formes réduites à leurs formes canoniques $x^2 + y^2 + z^2, ax^2 + by^2 + cz^2$, puis, en éliminant alternativement y et x , leur substituer les formes plus simples $x^2 - z^2, y^2 - z^2$; puis enfin, à l'aide de ces deux dernières, réduire la troisième à la forme

$$z^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy,$$

et, si nous trouvons sur ce système très-simple une relation entre le résultant R et les invariants Θ et Σ , elle sera vraie en général.

L'élimination s'effectue facilement, et l'on trouve, pour la valeur du résultant,

$$\begin{aligned} R &= (1 + 2l + 2m + 2n)(1 + 2l - 2m - 2n) \\ &\times (1 - 2l + 2m - 2n)(1 - 2l - 2m + 2n) \\ &= 1 - 8(l^2 + m^2 + n^2) \\ &\quad + 16(l^3 + m^3 + n^3 - 2m^2n^2 - 2l^2n^2 - 2l^2m^2) + 64lmn. \end{aligned}$$

En posant, pour abrégér,

$$\Theta = 1 - 4(l^2 + m^2 + n^2),$$

$$\Sigma = l^2 m^2 + m^2 n^2 + n^2 l^2 - lmn,$$

la valeur de R peut s'écrire sous la forme

$$R = \Theta^2 - 64\Sigma,$$

équation semblable à la formule

$$\Delta = T^2 - 64S^3,$$

qui donne le discriminant d'une forme cubique en fonction des deux invariants S et T .

En calculant ensuite la valeur des invariants Θ et Σ du n° 193, on reconnaît sans peine qu'ils sont identiques aux fonctions désignées ci-dessus par les mêmes lettres.

200. La relation précédente peut aussi se démontrer d'une manière assez simple en adoptant pour les trois formes ternaires la forme canonique

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + d\varphi^2,$$

$$U' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'\varphi^2,$$

$$U'' = a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 + d''\varphi^2,$$

à laquelle il est possible de les ramener d'une infinité de manières (la somme $x + y + z + \varphi$ est supposée égale à zéro).

Pour obtenir le résultant, nous n'avons qu'à tirer de ces trois équations les valeurs de x^2 , y^2 , z^2 , φ^2 ; si l'on désigne, pour abrégér, par A , B , C , D , les quatre déterminants (cbd) , (dac) , (adb) , (bca) (*), x^2 , y^2 , z^2 , φ^2 se trouvent proportionnels à A , B , C , D , et en substituant dans l'équation

$$x + y + z + \varphi = 0,$$

(*) On sait que ces quatre déterminants sont liés par les relations identiques

$$Aa + Bb + Cc + Dd = 0,$$

$$Aa' + Bb' + Cc' + Dd' = 0,$$

$$Aa'' + Bb'' + Cc'' + Dd'' = 0.$$

il vient

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = 0,$$

ou, en faisant disparaître les radicaux,

$$R = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AB - 2AC - 2AD - 2BC - 2BD - 2CD)^2 - 64ABCD.$$

Le résultant se présente donc immédiatement sous la forme voulue, et il ne s'agit plus que de constater l'identité des deux parties de l'expression de R avec les invariants Θ et Σ ; en suivant la marche indiquée au n° 193, on a, pour le covariant J ,

$$J = A y z v + B x z v + C x y v + D x y z.$$

et, de même, pour le contrevariant Φ , en remplaçant, comme au n° 151, ξ, η, ζ par $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$,

$$\begin{aligned} \Phi = & A(\eta - \xi)(\zeta - \xi)(\theta - \xi) + B(\xi - \eta)(\zeta - \eta)(\theta - \eta) \\ & + C(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)(\theta - \zeta) + D(\xi - \theta)(\eta - \theta)(\zeta - \theta). \end{aligned}$$

En opérant avec l'une des fonctions J et Φ sur l'autre, on obtient immédiatement la quantité

$$\begin{aligned} \Theta = & A(A - B - C - D) + B(B - A - C - D) \\ & + C(C - A - B - D) + D(D - A - B - C), \end{aligned}$$

qui n'est autre que le premier terme de la valeur de R . Si l'on calcule ensuite les contrevariants linéaires, on a

$$\begin{aligned} A a \xi + B b \eta + C c \zeta + D d \theta, \\ A a' \xi + B b' \eta + C c' \zeta + D d' \theta, \\ A a'' \xi + B b'' \eta + C c'' \zeta + D d'' \theta, \end{aligned}$$

et leur résultant est bien $\Sigma = ABCD$. Sous cette forme, on voit que cet invariant se réduit à zéro dès qu'un des quatre déterminants A, B, C, D devient nul, c'est-à-dire que l'on peut, lorsque Σ est nul, trouver des valeurs de λ, μ, ν telles, que la somme $\lambda U + \mu U' + \nu U''$ se réduise à un carré parfait.

On voit aussi sans peine qu'en effectuant, dans les trois formes quadratiques U, U', U'' , la substitution

$$x = A (aX + a'Y + a''Z),$$

$$y = B (bX + b'Y + b''Z),$$

$$z = C (cX + c'Y + c''Z),$$

et par suite aussi

$$v = D (dX + d'Y + d''Z),$$

les transformées seront les dérivées d'une même forme cubique F ; dans ce cas le résultant R devient égal au discriminant Δ de F , tandis que Θ et Σ sont les invariants T et S^3 de cette forme cubique.

L'interprétation géométrique des contrevariants linéaires se déduit de ce qui précède, en remarquant que les trois sections coniques représentées par les formes U, U', U'' peuvent toujours être considérées comme les polaires de trois points relativement à une même courbe du troisième degré : ces trois points sont précisément la représentation géométrique des contrevariants linéaires.



SEIZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS AUX FORMES QUATERNAIRES.

201. *Formes quadratiques.* — La théorie des formes quadratiques à quatre variables présente la plus grande analogie avec celle des formes à trois variables que nous avons exposée dans la Leçon précédente. Nous représenterons la forme générale par l'expression

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 \\ + 2lxz + 2mzx + 2nxy + 2pxv + 2qyv + 2rzv;$$

elle a pour unique invariant le discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}$$

dont la valeur développée est

$$\Delta = abcd + 2(alqr + bmpr + cnpq + dlmn) \\ - (bcp^2 + caq^2 + abr^2 + adl^2 + bdm^2 + cdn^2) \\ + l^2p^2 + m^2q^2 + n^2r^2 - 2(mqnr + nr lp + lpmq).$$

Lorsque le discriminant est égal à zéro, on peut, par une transformation convenable, faire disparaître les coefficients d , p , q , r des quatre termes où figure la variable v , et la surface représentée par l'équation

$$U = 0$$

est un cône dont la nouvelle origine est le sommet.

La forme U a un contrevariant qui est l'évectant de Δ , savoir

$$G = \begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha \\ n & b & l & q & \beta \\ m & l & c & r & \gamma \\ p & q & r & d & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix},$$

ou, en développant,

$$G = (bcd + 2rql - br^2 - cq^2 - dl^2)\alpha^2 + \dots \\ + 2(aqr + dmn - adl + lp^2 - nrp - pmq)\beta\gamma + \dots$$

L'équation $G = 0$ est l'équation tangentielle de la surface, c'est-à-dire qu'elle exprime la condition à laquelle doivent satisfaire $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que le plan ayant pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v = 0$$

soit tangent à la surface; il est facile de s'en assurer en identifiant l'expression

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v$$

à l'équation générale d'un plan tangent et éliminant ensuite les coordonnées inconnues du point de contact.

202. On peut exprimer de même qu'une droite ayant pour équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' v = 0$$

est tangente à la surface; en éliminant deux des variables et écrivant la condition nécessaire pour que l'équation résultante ait des racines égales, on a, en effet,

$$\Sigma(ab - n^2)(\gamma\delta)^2 + 2\Sigma(mn - al)(\beta\delta)(\gamma\delta) \\ + 2\Sigma nr[(\alpha\delta)(\gamma\beta) - (\alpha\gamma)(\beta\delta)] = 0,$$

les sommes Σ s'étendant à tous les termes semblables que l'on obtient par la permutation des coefficients, et les symboles $(\gamma\delta)$, $(\beta\delta)$, ... désignant, pour abréger, les déterminants $\gamma\delta' - \gamma'\delta$, $\beta\delta' - \beta'\delta$, Cette fonction peut aussi s'écrire

sous forme de déterminant,

$$H = \begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha & \alpha' \\ n & b & l & q & \beta & \beta' \\ m & l & c & r & \gamma & \gamma' \\ p & q & r & d & \delta & \delta' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

C'est un contrevariant *double* du second degré par rapport aux coefficients et par rapport aux deux séries de variables.

On peut encore l'obtenir d'une autre manière. Remplaçons, dans le contrevariant G , α par $\alpha + \lambda\alpha'$, β par $\beta + \lambda\beta'$, ..., et calculons le discriminant de la fonction du deuxième degré en λ qui résulte de cette substitution; ce discriminant sera égal à ΔH . On le vérifie aisément sur la forme canonique

$$G = bcd\alpha^2 + acd\beta^2 + abd\gamma^2 + abc\delta^2;$$

en effectuant la substitution, cette expression devient

$$G + 2\lambda(bcd\alpha\alpha' + acd\beta\beta' + abd\gamma\gamma' + abc\delta\delta') + G'\lambda^2,$$

G' désignant une fonction semblable à G , dans laquelle α , β , γ , δ sont remplacés par α' , β' , γ' , δ' ; le discriminant

$$GG' - (bcd\alpha\alpha' + acd\beta\beta' + \dots)^2$$

se réduit à $abcd[cd(\alpha\beta)^2 + bd(\alpha\gamma)^2 + \dots]$, c'est-à-dire à ΔH .

203. Recherchons maintenant les invariants et covariants de deux formes U et U' . En développant le discriminant D de $U + \lambda U'$, nous avons

$$D = \Delta + \Theta\lambda + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda^3 + \Delta'\lambda^4,$$

Δ , Δ' étant ceux de U et U' , et Θ , Φ , Θ' trois invariants communs dont la valeur se réduit, pour la forme canonique, à

$$\Theta = a' b c d + a b' c d + a b c' d + a b c d',$$

$$\Phi = a' b' c d + a' c' b d + a' d' b c + b' c' a d + b' d' a c + c' d' a b,$$

$$\Theta' = a' b' c' d + a' b' c d' + a' b c' d' + a b' c' d'.$$

De même que pour deux sections coniques (187), la condition de contact des deux surfaces U et U' s'exprimera en égalant à zéro le discriminant de l'équation $D = 0$. Le moyen le plus simple de le démontrer consiste à placer l'origine au point de contact, en prenant le plan tangent commun pour plan des x, y . On a alors pour les deux surfaces $d = 0, p = 0, q = 0$, et l'équation $D = 0$ se réduit à

$$(r + \lambda r')^2 [(n + \lambda n')^2 - (a + \lambda a')(b + \lambda b')] = 0;$$

elle aura donc dans tous les cas deux racines égales, et la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients pour que les deux surfaces soient tangentes est

$$4(12\Delta\Delta' - 3\Theta\Theta' + \Phi^2)^3 - (72\Delta\Delta'\Phi + 9\Theta\Theta'\Phi - 27\Delta\Theta'^2 - 27\Delta'\Theta^2 - 2\Phi^3)^2 = 0.$$

Cette relation est du douzième degré par rapport aux coefficients de chacune des deux formes.

204. Toutes les relations indépendantes du choix des axes qui peuvent exister entre deux surfaces du second degré s'exprimeront de même en fonction des cinq invariants $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ et Φ . Si l'on demandait, par exemple, dans quel cas il est possible de déterminer un tétraèdre qui ait deux couples d'arêtes opposées sur la surface U et ses sommets sur la surface U' , les équations des deux surfaces devant pouvoir se ramener dans ce cas à la forme

$$U = Lyz + Pxz,$$

$$U' = 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2pxv + 2qyv + 2rzv,$$

les valeurs des invariants se réduisent à

$$\Delta = L^2P^2,$$

$$\Theta = 2LP(Lp + Pl),$$

$$\Theta' = 2(lp - mq - nr)(Lp + Pl),$$

$$\Phi = (Lp + Pl)^2 + 2LP(lp - mq - nr),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$4\Delta\Theta\Phi = \Theta^3 + 8\Delta^2\Theta'.$$

C'est la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de U et U' pour que le problème admette une solution (*).

205. Pour déterminer des covariants et contrevariants des deux formes U et U' , nous suivrons la même marche qu'au n° 189, c'est-à-dire que nous développerons les contrevariants des deux fonctions $U + \lambda U'$ et $G + \lambda G'$.

Commençons par le contrevariant g de $U + \lambda U'$, on trouve sans peine

$$g = G + \lambda \varphi + \lambda^2 \varphi' + \lambda^3 G',$$

φ et φ' étant deux nouveaux contrevariants dont l'expression est pour la forme canonique

$$\begin{aligned}\varphi &= (b'cd + bc'd + bcd')x^2 + (a'cd + ac'd + acd')\beta^2 \\ &\quad + (a'bd + ab'd + abd')\gamma^2 + (a'bc + ab'c + abc')\delta^2, \\ \varphi' &= (bc'd' + b'cd' + b'c'd)x^2 + (ac'd' + a'cd' + a'c'd)\beta^2 \\ &\quad + (ab'd' + a'bd + a'b'd)\gamma^2 + (ab'c' + a'bc' + a'b'c)\delta^2.\end{aligned}$$

Calculant de même le contrevariant f de $G + \lambda G'$, nous devons avoir un covariant, et il vient

$$f = \Delta^2 U + \lambda \Delta F + \lambda^2 \Delta' F' + \lambda^3 \Delta^2 U',$$

F et F' étant deux nouveaux covariants qui se réduisent, pour la forme canonique, à

$$\begin{aligned}F &= aa'(bc'd' + b'cd' + b'c'd)x^2 \\ &\quad + bb'(ac'd' + a'cd' + a'c'd)\gamma^2 + \dots, \\ F' &= aa'(b'cd + bc'd + bcd')x^2 \\ &\quad + bb'(a'cd + ac'd + acd')\gamma^2 + \dots\end{aligned}$$

En égalant à zéro le discriminant par rapport à λ des fonctions f et g , on obtient deux équations analogues

$$\begin{aligned}(\varphi\varphi' - 9GG')^2 &= 4(\varphi^2 - 3G\varphi')(\varphi'^2 - 3G'\varphi), \\ (FF' - 9\Delta\Delta'UU')^2 &= 4(F^2 - 3\Delta'UF')(F'^2 - 3\Delta U'F),\end{aligned}$$

(*) On peut remarquer l'analogie de ce problème avec la question de géométrie plane traitée au n° 188 : *Inscrire dans une section conique un triangle dont les trois côtés soient tangents à une autre section conique.*

dont l'interprétation géométrique se déterminera comme au n° 190.

La première est l'équation tangentielle de la courbe d'intersection des deux surfaces U et U' , la seconde est l'équation en coordonnées ordinaires de la surface développable circonscrite aux deux surfaces U et U' .

Les covariants des deux formes peuvent tous s'exprimer en fonction de U , U' , F , F' , et de même leurs contrevariants s'expriment en fonction de G , G' , φ , φ' .

206. Si dans le contrevariant double H du n° 202 nous remplaçons a par $a + \lambda a'$, b par $b + \lambda b'$, ..., il deviendra

$$h = H + \lambda K + \lambda^2 H',$$

H et H' étant les contrevariants des deux formes U et U' , et K un nouveau contrevariant commun. Pour la forme canonique, H se réduit, ainsi que nous l'avons vu plus haut, à $\Sigma ab(\gamma\delta)^2$, H' à $\Sigma a'b'(\gamma\delta)^2$, et l'on a pour K la valeur

$$K = \Sigma(ab' + ba')(\gamma\delta)^2.$$

L'équation $K = 0$ exprime que la droite $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v$, $\alpha'x + \beta'y + \gamma'z + \delta'v$ est coupée harmoniquement par les surfaces U et U' . En égalant à zéro le discriminant de h calculé par rapport à λ , nous aurons une équation

$$K^2 - 4HH' = 0,$$

qui exprimera que la droite rencontre la courbe d'intersection commune de toutes les surfaces $U + \lambda U'$, c'est-à-dire la courbe d'intersection des deux surfaces U et U' . En se reportant aux valeurs ci-dessus de H , H' et K , on trouve sans peine, pour la valeur de ce nouveau contrevariant,

$$\begin{aligned} K^2 - 4HH' &= \Sigma(ab)^2(\gamma\delta)^4 + 2\Sigma(ab)(ac)(\gamma\delta)^2(\beta\delta)^2 \\ &\quad + 2\Sigma[(ad)(cb) + (ac)(db)](\alpha\beta)^2(\gamma\delta)^2. \end{aligned}$$

207. En remplaçant dans ce contrevariant $\alpha, \beta, \gamma, \delta; \alpha', \beta', \gamma', \delta$

par $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}, \frac{dU}{dv}; \frac{dU'}{dx'}, \frac{dU'}{dy'}, \frac{dU'}{dz'}, \frac{dU'}{dv'}$, nous aurons un covariant L qui donnera, en l'égalant à zéro, l'équation de la surface développable engendrée par les tangentes à la courbe d'intersection des surfaces U et U' . L'expression du covariant L est, pour la forme canonique,

$$\begin{aligned} L = \Sigma(ab)^2(cd)^4z^4v^4 + 2\Sigma(ab)(ac)(cd)^2(bd)^2y^2z^2v^4 \\ + 2x^2y^2z^2v^2[(ab)(cd) - (ad)(bc)][(ad)(bc) - (bd)(ca)] \\ \times [(bd)(ca) - (ab)(cd)]. \end{aligned}$$

La surface L est du huitième degré; mais on peut remarquer qu'en faisant $v = 0$, l'expression ci-dessus se réduit à un carré parfait, c'est-à-dire que chacun des quatre plans x, y, z, v coupe la surface suivant une courbe du quatrième degré.

Si l'on exprime L en fonction de U, U', F, F' et des invariants, on a

$$\begin{aligned} L = (\Phi UU' - FU - F'U')^2 \\ - 4(\Theta UU' - F'U - \Delta U'^2)(\Theta' UU' - FU' - \Delta' U'^2), \end{aligned}$$

et, sous cette nouvelle forme, on voit immédiatement, qu'indépendamment de la courbe d'intersection commune aux trois surfaces U, U' et L , cette dernière rencontre encore la surface U suivant une courbe qui est l'intersection de U et d'une surface du quatrième degré représentée par l'équation

$$F'^2 - 4\Delta FU' = 0.$$

208. Considérons maintenant trois formes U, U', U'' . En développant le discriminant de $\lambda U + \mu U' + \nu U''$, les coefficients des diverses puissances de λ, μ, ν fourniront des invariants du système de ces trois formes; mais il existe aussi deux *combinaisons* I_1 et I_2 qui méritent une mention spéciale. L'invariant I_1 se réduit à zéro lorsque quatre des huit points d'intersection des surfaces U, U', U'' se trouvent dans un même plan, ou, en d'autres termes, lorsqu'il est possible de trouver des valeurs de λ, μ, ν pour lesquelles la surface $\lambda U + \mu U' + \nu U''$ se réduise à deux plans. Prenons les équations des trois sur-

faces sous la forme canonique

$$\begin{aligned}U &= ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 + ev^2, \\U' &= a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'u^2 + e'v^2, \\U'' &= a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 + d''u^2 + e''v^2,\end{aligned}$$

dans laquelle nous supposons $x + y + z + u + v = 0$. L'invariant I_1 , analogue à l'invariant Σ du n° 200, sera le produit des dix déterminants $(abc), \dots$ que l'on peut composer avec les trois séries de coefficients. En effet, en éliminant y et z , il est clair que l'équation

$$(abc)x^2 + (dbc)u^2 + (ebc)v^2 = 0$$

représentera une surface du système $\lambda U + \mu U' + \nu U''$, qui se réduira à deux plans si l'un des déterminants $(abc), \dots$ s'annule; l'invariant I_1 sera du dixième ordre par rapport aux coefficients de chacune des trois formes.

On obtiendra l'invariant I_2 en exprimant la condition qui doit être remplie pour que deux des points d'intersection des trois surfaces du second degré coïncident; cet invariant, qui se réduit à zéro dans ce cas, est du seizième ordre par rapport aux coefficients de chacune des trois formes (*).

Si l'on considère le discriminant de $\lambda U + \mu U' + \nu U''$ comme fonction de λ, μ, ν , et que l'on calcule son discriminant dans cette hypothèse, on aura un nouveau combinant I_3 du trente-sixième ordre par rapport aux coefficients de chaque forme; mais il s'exprime en fonction des deux précédents, et sa valeur est $I_3 = I_1^2 I_2$.

209. Le Jacobien J de quatre formes U, U', U'', U''' représente le lieu des points dont les plans polaires par rapport aux quatre surfaces du second degré concourent en un même point : c'est également (201) le lieu des sommets de tous les

(*) Voir, pour plus de développements, la *Géométrie analytique à trois dimensions* de M. Salmon, chap. IX. M. Cayley donne à l'invariant I_2 le nom de *tact-invariant* du système des trois formes; celui du n° 203 est l'invariant correspondant pour un système de deux formes.

cônes qui peuvent être représentés par la fonction

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U'''.$$

Il résulte du mode de formation de la fonction J que, si l'une des formes U , U' , U'' , U''' se réduit à un carré L^2 , le facteur L se trouvant dans toutes ses dérivées existera aussi dans le Jacobien, et la surface J se décomposera dans ce cas particulier en un plan et une surface de troisième degré.

210. Formes cubiques(*). — Nous adopterons pour l'étude de ces formes la forme canonique donnée par MM. Sylvester et Clebsch

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + du^3 + ev^3,$$

dans laquelle nous supposerons, comme d'habitude, la somme $x + y + z + u + v$ égale à zéro. Les invariants fondamentaux s'exprimant plus simplement comme invariants du Hessien, nous allons d'abord calculer cette dernière fonction. On trouve aisément

$$\begin{aligned} H = & bcdeyzvu + acdexzvu + abdexyvu \\ & + abcexyzv + abcdxyzu. \end{aligned}$$

Nous écrirons, pour abrégé,

$$H = \Sigma abcdxyzu,$$

le signe Σ s'appliquant aux diverses combinaisons des coefficients. Il en sera de même pour les invariants et covariants que nous allons énumérer plus loin.

Les invariants fondamentaux que nous désignerons par A , B , C , D , E sont des huitième, seizième, vingt-quatrième,

(*) La théorie que nous allons exposer ici est l'abrégé d'un Mémoire de M. Salmon inséré dans les *Philosophical Transactions*, 1860. M. Clebsch a publié presque en même temps deux Mémoires (*Journal de Crelle*, t. LVIII) dans lesquels il obtenait de son côté quelques-uns des résultats de M. Salmon, notamment l'expression des invariants en fonction de cinq d'entre eux et celle de la surface $\Theta = 4H\Phi$ qui contient les vingt-sept lignes droites (216). Mais la méthode si simple de M. Salmon diffère complètement de celle de M. Clebsch, et la découverte de l'invariant gauche F lui appartient en propre, ainsi que la discussion des covariants et des contrevariants.

trente-deuxième et quarantième ordres. L'invariant A a pour formule symbolique

$$A = (\overline{1234})^2 (1678)(2578)(3568)(4567).$$

Les expressions des autres invariants sont fort compliquées; mais elles se simplifient beaucoup si on les considère comme invariants du Hessien. M. Clebsch les présente sous la forme suivante :

$$B = (1234)^4,$$

$$C = (1234)^2 (1256)^2 (3456)^2,$$

$$D = (1234)^2 (1235)^2 (4678)^2 (5678)^2,$$

$$E = (1234)^2 (1256)^2 (3478)^2 (789.10)^2 (569.10)^2;$$

les opérations indiquées par les symboles devant être effectuées sur la fonction H .

Les valeurs de ces invariants sont, pour la forme canonique que nous avons adoptée,

$$A = \Sigma a^2 b^2 c^2 d^2 - 2 abcde \Sigma abc,$$

$$B = a^3 b^3 c^3 d^3 e^3 \Sigma a,$$

$$C = a^4 b^4 c^4 d^4 e^4 \Sigma abcd,$$

$$D = a^6 b^6 c^6 d^6 e^6 \Sigma ab,$$

$$E = a^8 b^8 c^8 d^8 e^8.$$

Elles pourraient se calculer à l'aide des expressions précédentes, mais nous les obtiendrons plus aisément par la différentiation successive des covariants et contravariants, comme nous le verrons plus loin (213).

211. Ainsi que l'on pouvait s'y attendre, les cinq coefficients a, b, c, d, e entrent d'une manière symétrique dans ces expressions, et si l'on pose

$$\Sigma a = p, \quad \Sigma ab = q, \quad \Sigma abc = r, \quad \Sigma abcd = s, \quad abcde = t,$$

on a simplement

$$A = s^2 - 4rt, \quad B = t^3 p, \quad C = t^4 s, \quad D = t^6 q, \quad E = t^8,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$p = \frac{B}{E^{\frac{3}{8}}}, \quad q = \frac{D}{E^{\frac{6}{8}}}, \quad r = \frac{C^2 - AE}{4E^{\frac{9}{8}}}, \quad s = \frac{C}{E^{\frac{4}{8}}}, \quad t = E^{\frac{1}{8}}.$$

Les quantités a, b, c, d, e peuvent donc être considérées comme racines de l'équation du cinquième degré

$$\alpha^5 - \frac{B}{E^{\frac{3}{8}}} \alpha^4 + \frac{D}{E^{\frac{6}{8}}} \alpha^3 - \frac{C^2 - AE}{4E^{\frac{9}{8}}} \alpha^2 + \frac{C}{E^{\frac{4}{8}}} \alpha - E^{\frac{1}{8}} = 0.$$

Si l'on forme son discriminant, on aura en fonction des cinq invariants fondamentaux un nouvel invariant

$$t^{36} (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (a-e)^2 \\ \times (b-c)^2 (b-d)^2 (b-e)^2 (c-d)^2 (c-e)^2 (d-e)^2,$$

ou, en extrayant la racine carrée,

$$F = t^{18} (a-b)(a-c) \dots,$$

et F sera un invariant du centième degré analogue à l'invariant gauche I des formes binaires du cinquième degré. On remarquera, du reste, l'analogie complète des méthodes à l'aide desquelles ils s'obtiennent tous deux en fonction des invariants fondamentaux (*).

212. Nous aurons facilement le discriminant en éliminant les variables entre les dérivées $ax^2 - ev^2$, $by^2 - ev^2$, $cz^2 - ev^2$, $du^2 - ev^2$; on peut supposer $x^2, y^2, \dots$ proportionnels à $bcd, cdea, \dots$, et, substituant dans l'équation $x + y + z + u + v = 0$, il vient

$$\sqrt{bcde} + \sqrt{cdea} + \sqrt{deab} + \sqrt{eabc} + \sqrt{abcd} = 0,$$

et, en faisant disparaître les radicaux, on a pour le discriminant Δ ,

$$\Delta = (A^2 - 64B)^2 - 2^{14} (2AC + D).$$

(*) L'expression de F^2 en fonction de A, B, C, D, E a été donnée par M. Salmon (*Philosophical Transactions*, 1860, p. 233).

Le discriminant est du trente-deuxième ordre, de même que l'invariant D (*).

213. Passons à l'étude des covariants et des contrevariants. Nous avons déjà, outre la forme elle-même, un covariant; c'est le Hessien (210) : pour en déduire d'autres par la méthode des n^{os} 151 et 152, il est nécessaire d'avoir un contrevariant. Nous en obtiendrons un en exprimant que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u + \varepsilon v$ coupe la surface suivant une courbe du troisième degré pour laquelle l'invariant S est égal à zéro. Ce contrevariant est du quatrième degré par rapport aux variables et sous la forme à quatre lettres le coefficient du terme α^4 est égal à l'invariant S de la forme cubique ternaire que l'on obtient en faisant $x = 0$ dans la forme quaternaire donnée. Les autres termes peuvent s'en déduire ensuite au moyen de l'équation différentielle; le calcul, bien qu'un peu long, ne présente point de difficultés. Ayant obtenu ce covariant G_1 sous la forme à quatre lettres, on passe ensuite à la forme à cinq lettres, en remplaçant $\alpha, \beta, \dots$ par $\alpha - \varepsilon, \beta - \varepsilon, \dots$, et l'on a

$$G_1 = \Sigma abcd(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)(\delta - \varepsilon).$$

Nous aurons aussi un covariant mixte

$$\Sigma cdezu(\alpha - \beta)^2,$$

(*) Une méthode semblable conduirait à la valeur du discriminant d'une forme cubique ternaire en adoptant la forme canonique $ax^3 + by^3 + cz^3 + du^3$; les expressions des deux invariants S et T deviennent dans ce cas

$$S = abcd, \quad T = \Sigma a^2 b^2 c^2 - 2abcd \Sigma ab.$$

Pour obtenir le discriminant Δ , nous avons à égaler à zéro les dérivées $ax^2 - du^2, by^2 - du^2, cz^2 - du^2$ et à substituer les valeurs de x, y, z, u dans l'identité $x + y + z + u = 0$, et il vient comme ci-dessus

$$\sqrt{bcd} + \sqrt{acd} + \sqrt{abd} + \sqrt{abc} = 0,$$

d'où, en faisant disparaître les radicaux,

$$\Delta = T^2 - 64S^2.$$

en formant le contrevariant (201) de la *polaire* du second degré

$$axx'^2 + byy'^2 + czz'^2 + dvv'^2 + euv'^2,$$

dont le Hessien $\Sigma abcdxyzv$ est le discriminant.

Désignons maintenant par $U_1, U_2, \dots$ les covariants, U_1 étant la forme primitive, U_2 son Hessien, et par $G_1, G_2, \dots$ les contrevariants, dont le premier G_1 est donné ci-dessus. En opérant avec G_1 sur U_2 , nous retrouvons l'invariant A ; mais, en opérant sur le carré de U_1 , nous avons un nouveau covariant

$$U_3 = t \Sigma ax^2.$$

t désignant comme ci-dessus le produit $abcde$.

En opérant avec U_3 sur G_1 , on obtient un contrevariant

$$G_2 = t^2 \Sigma (\alpha - \beta)^2,$$

à l'aide duquel on déduit de U_1 le covariant linéaire

$$U_4 = t^2 \Sigma ax.$$

En combinant G_2 et U_3 , on retrouve l'invariant B .

Si l'on opère maintenant sur U_3 avec le covariant mixte $\Sigma cdezvu (\alpha - \beta)^2$, on a un covariant cubique

$$U_5 = t \Sigma (a + b) cdezvu,$$

avec lequel, opérant sur G_1 , on parvient à un contrevariant linéaire

$$G_3 = t \Sigma (a - b) (\alpha - \beta) [(a + b) c^2 d^2 e^2 - t (cd + de + ec)].$$

Il est facile de poursuivre ainsi, et nous nous contenterons de mentionner les principaux résultats.

214. La forme cubique admet quatre covariants linéaires fondamentaux des onzième, dix-neuvième, vingt-septième et quarante-troisième ordres (*) par rapport aux coefficients,

(*) Il n'y a pas de covariants linéaires distincts du trente-cinquième ordre, ces covariants pouvant s'exprimer en fonction de L_1, L_2, L_3 et des invariants.

savoir

$$L_1 = t^2 \Sigma ax, \quad L_2 = t^3 \Sigma bcde x, \quad L_3 = t^5 \Sigma a^2 x, \quad L_4 = t^5 \Sigma a^3 x.$$

Tout autre covariant, y compris la forme primitive, peut en général s'exprimer en fonction de L_1, L_2, L_3, L_4 ; en effet, si l'on joint aux quatre équations

$$t^2(ax + by + \dots) = L_1,$$

$$t^3(bcde x + acde y + \dots) = L_2,$$

$$t^5(a^2 x + b^2 y + \dots) = L_3,$$

$$t^5(a^3 x + b^3 y + \dots) = L_4,$$

l'identité

$$x + y + z + u + v = 0,$$

on pourra en tirer les valeurs de x, y, z, u, v en fonction de a, b, c, d, e ; le dénominateur commun de ces valeurs se réduira (21, ex. V) à

$$t^{18} \times (a - b)(a - c), \dots,$$

c'est-à-dire à l'invariant gauche F. En substituant dans un covariant les valeurs de x, y, z, u, v , les coefficients du développement seront des fonctions symétriques de a, b, c, d, e , et par suite des cinq invariants fondamentaux A, B, C, D, E.

215. Nous avons donné plus haut le plus simple contrevariant linéaire

$$t \Sigma (a - b)(\alpha - \beta) [(a + b)c^2 d^2 e^2 - t(ce + de + ec)];$$

les autres sont des vingt et unième, vingt-neuvième, ... ordres, savoir :

$$t^4 \Sigma (a - b)(\alpha - \beta),$$

$$t^5 \Sigma cde(a - b)(\alpha - \beta),$$

$$\dots \dots \dots$$

Le covariant quadratique le plus simple est du sixième ordre, et sa valeur est

$$t \Sigma ax^2.$$

On obtient ensuite, l'ordre croissant toujours par huit, ceux des quatorzième, vingt-deuxième, ... ordres :

$$\begin{aligned} t^2 \Sigma ab(cd + de + ec)xy, \\ t^4 \Sigma a^2 x^2, \\ t^6 \Sigma x^2 \\ \dots \end{aligned}$$

Les contrevariants du second degré sont des dixième, dix-huitième, ... ordres :

$$\begin{aligned} t^2 \Sigma (\alpha - \beta)^2, \\ t^3 \Sigma cde(\alpha - \beta)^2, \\ \dots \end{aligned}$$

Les covariants cubiques sont des neuvième, dix-septième, ... ordres :

$$\begin{aligned} t \Sigma cde(a + b)zuv, \\ t^3 \Sigma a^2 x^3, \\ \dots \end{aligned}$$

Ce dernier est important, car il permet, en effectuant sur un covariant quelconque l'opération

$$t^3 \left(a^2 \frac{d}{da} + b^2 \frac{d}{db} + c^2 \frac{d}{dc} + d^2 \frac{d}{dd} + e^2 \frac{d}{de} \right),$$

d'en déduire immédiatement un nouveau covariant dont l'ordre est plus élevé de seize unités. C'est pour ce motif qu'il nous suffit de donner deux covariants de chaque degré par rapport aux variables.

Le plus simple contrevariant cubique est du septième ordre

$$\begin{aligned} \Sigma c^2 d^2 e^2 (a - b)(\alpha - \beta)^3 \\ - t \Sigma de(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta); \end{aligned}$$

c'est l'évectant de l'invariant A : vient ensuite celui du quinzième ordre

$$\begin{aligned} t^2 \Sigma bcde(a - b)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon), \\ \dots \end{aligned}$$

Le covariant du quatrième degré le plus simple après le Hessien $\Sigma abcdxyz$ est celui du douzième ordre

$$t^2 \Sigma a^2 x^4.$$

Nous avons déjà mentionné plus haut le plus simple contrevariant du quatrième degré

$$\Sigma bcde(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon).$$

216. Parmi les covariants de degré plus élevé, nous indiquerons seulement :

1° Un covariant Φ du cinquième degré et du septième ordre par rapport aux coefficients

$$\Phi = t \Sigma abx^2y^2z,$$

que l'on obtient en opérant sur le Hessien avec le covariant mixte $\Sigma cdezv(\alpha - \beta)$; on peut le remplacer par un autre covariant de forme plus simple

$$t \Sigma a^2 x^5,$$

qui n'en diffère que par le produit de la forme primitive et du plus simple des covariants quadratiques.

2° Un second covariant du cinquième degré

$$t^3 xyz uv,$$

que l'on peut appeler le covariant *canonique* de la forme, puisqu'il a comme facteurs les cinq quantités x, y, z, u, v de la forme canonique.

3° Enfin un covariant du neuvième degré Θ dont l'expression se déduirait de celle du contrevariant d'une forme quadratique à quatre variables, en remplaçant les coefficients $a, b, c, \dots$ par les secondes dérivées de la forme cubique U , et les variables $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les dérivées de son Hessien H .

L'importance de ce dernier covariant consiste en ce que la surface du neuvième degré représentée par l'équation

$$\Theta - 4H\Phi = 0$$

détermine, par son intersection avec la surface du troisième degré U, les vingt-sept lignes droites que contient cette dernière.



NOTES DE M. HERMITE.



I.

SUR LES INVARIANTS DES FORMES DU CINQUIÈME DEGRÉ.



C'est dans la théorie des formes du cinquième degré qu'on voit s'offrir pour la première fois un invariant gauche, c'est-à-dire un invariant qui se reproduit changé de signe dans toute transformée de la forme proposée par une substitution au déterminant -1 , telle que par exemple

$$\begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}.$$

Si la forme du cinquième degré décomposée en ses facteurs linéaires est

$$\Phi = a(x - x_0 y)(x - x_1 y)(x - x_2 y)(x - x_3 y)(x - x_4 y),$$

son expression en fonction des racines s'obtient comme il suit :

Posons, pour abréger,

$$(mn) = x_m - x_n,$$

on aura

$$K = a^{18} [(01)(04)(32) + (02)(03)(14)] [(01)(02)(43) + (03)(04)(12)] [(01)(03)(42) + (02)(04)(31)] \\ \times [(12)(10)(43) + (13)(14)(20)] [(12)(13)(04) + (14)(10)(23)] [(12)(14)(03) + (13)(10)(42)] \\ \times [(23)(21)(04) + (24)(20)(31)] [(23)(24)(10) + (20)(21)(34)] [(23)(20)(14) + (24)(21)(03)] \\ \times [(34)(32)(10) + (30)(31)(42)] [(34)(30)(21) + (31)(32)(40)] [(34)(31)(20) + (30)(32)(14)] \\ \times [(40)(43)(21) + (41)(42)(03)] [(40)(41)(32) + (42)(43)(01)] [(40)(42)(31) + (41)(43)(20)].$$

Cela étant, je vais résumer dans cette Note plusieurs résultats relatifs aux facteurs de l'invariant gauche et qui donneront sous un nouveau point de vue la détermination des invariants dans les formes du cinquième degré.

Soient à cet effet (*)

$$F = (01)(04)(32) + (02)(03)(14),$$

$$G = (01)(02)(43) + (03)(04)(12),$$

$$H = (01)(03)(42) + (02)(04)(31),$$

et convenons de représenter par F_v , G_v , H_v ce que deviennent respectivement ces quantités, en ajoutant le nombre v aux indices des racines $x_0, x_1, \dots$, pris suivant le module 5. L'expression de l'invariant du dix-huitième ordre sera ainsi :

$$K = a^{18} \cdot FGH \cdot F_1 G_1 H_1 \cdot F_2 G_2 H_2 \cdot F_3 G_3 H_3 \cdot F_4 G_4 H_4,$$

et en premier lieu je donnerai le moyen de connaître comment s'échangent entre eux les quinze facteurs, lorsqu'on effectue sur les racines une substitution quelconque. Or, à

l'égard de la substitution $\begin{Bmatrix} x_v \\ x_{2v} \end{Bmatrix}$, on aura pour résultats :

$$1^o \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} F, & F_1, & F_2, & F_3, & F_4 \\ -H, & -H_2, & -H_4, & -H_1, & -H_3 \end{array} \right\};$$

$$2^o \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} G, & G_1, & G_2, & G_3, & G_4 \\ -G, & -G_2, & -G_4, & -G_1, & -G_3 \end{array} \right\};$$

$$3^o \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} H, & H_1, & H_2, & H_3, & H_4 \\ F, & F_2, & F_4, & F_1, & F_3 \end{array} \right\}.$$

(*) Voyez mon Mémoire *Sur l'équation du cinquième degré*. Paris, Gauthier-Villars.

La substitution $\begin{Bmatrix} x_\nu \\ x_{3\nu^3} \end{Bmatrix}$ donnera :

$$\begin{aligned} 1^\circ & \quad \begin{Bmatrix} F, & F_1, & F_2, & F_3, & F_4 \\ F, & G_3, & -H_4, & -H_1, & -G_2 \end{Bmatrix}; \\ 2^\circ & \quad \begin{Bmatrix} G, & G_1, & G_2, & G_3, & G_4 \\ -G, & -H_3, & -F_4, & F_1, & H_2 \end{Bmatrix}; \\ 3^\circ & \quad \begin{Bmatrix} H, & H_1, & H_2, & H_3, & H_4 \\ -H, & -F_3, & G_4, & -G_1, & -F_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Et comme toute substitution entre cinq quantités résulte de la composition des substitutions élémentaires

$$\begin{Bmatrix} x_\nu \\ x_{\nu+1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_\nu \\ x_{2\nu} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_\nu \\ x_{3\nu^3} \end{Bmatrix},$$

on pourra, par ce qui précède, connaître l'effet d'une permutation donnée des racines sur l'un quelconque des quinze facteurs.

En même temps que F, G, H , je considérerai les quantités

$$f = (31)(24),$$

$$g = (14)(23),$$

$$h = (12)(34),$$

et je désignerai par f, g, h , ce qu'elles deviennent en ajoutant ν aux indices des racines. Cela étant, on trouve que la

substitution $\begin{Bmatrix} x_\nu \\ x_{2\nu} \end{Bmatrix}$ opère les changements que voici :

$$\begin{aligned} 1^\circ & \quad \begin{Bmatrix} f, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \\ -h, & -h_2, & -h_4, & -h_1, & -h_3 \end{Bmatrix}; \\ 2^\circ & \quad \begin{Bmatrix} g, & g_1, & g_2, & g_3, & g_4 \\ -g, & -g_2, & -g_4, & -g_1, & -g_3 \end{Bmatrix}; \\ 3^\circ & \quad \begin{Bmatrix} h, & h_1, & h_2, & h_3, & h_4 \\ -f, & -f_2, & -f_4, & -f_1, & -f_3 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Quant à la substitution $\left\{ \begin{matrix} x_\nu \\ x_{3\nu} \end{matrix} \right\}$, elle donne pour résultats :

$$1^{\circ} \quad \left\{ \begin{matrix} f, f_1, f_2, f_3, f_4 \\ f, g_3, h_4, h_1, g_2 \end{matrix} \right\};$$

$$2^{\circ} \quad \left\{ \begin{matrix} g, g_1, g_2, g_3, g_4 \\ g, h_3, f_4, f_1, h_2 \end{matrix} \right\};$$

$$3^{\circ} \quad \left\{ \begin{matrix} h, h_1, h_2, h_3, h_4 \\ h, f_3, g_4, g_1, f_2 \end{matrix} \right\}.$$

D'où l'on voit que les deux groupes de quinze quantités se permutent de la même manière, sauf certains changements de signes, quand on effectue les mêmes permutations sur les racines de la proposée. Mais le lien que nous établissons entre elles se justifie plus complètement, d'abord par ces relations où, pour abréger, on fait

$$l = (01)(02)(03)(04),$$

savoir

$$G^2 - H^3 = 4lf,$$

$$H^2 - F^2 = 4lg,$$

$$F^2 - G^2 = 4lh,$$

et ensuite par cette remarque, que les divers produits

$$a^2 F_\nu f_\nu, \quad a^2 F_\nu g_\nu, \quad a^2 F_\nu h_\nu,$$

$$a^2 G_\nu f_\nu, \quad a^2 G_\nu g_\nu, \quad a^2 G_\nu h_\nu,$$

$$a^2 H_\nu f_\nu, \quad a^2 H_\nu g_\nu, \quad a^2 H_\nu h_\nu,$$

a étant le coefficient du premier terme de la forme du cinquième degré, *sont des invariants*. Ces produits donnent lieu à ce fait algébrique, que neuf d'entre eux, correspondant à la même valeur de l'indice ν , suffisent pour en déduire linéairement tous les autres. On a, en effet, les relations qui suivent :

$$2F_1 f_1 = Ff - Gh + Hh,$$

$$2G_1 g_1 = Fg + Gf + Hh,$$

$$2H_1 h_1 = Fh - Gg - Hf;$$

$$2F_2f_2 = -Fh + Gg - Hf,$$

$$2G_2g_2 = -Ff + Gh + Hg,$$

$$2H_2h_2 = -Fg - Gf + Hh;$$

$$2F_3f_3 = -Fh + Gg - Hf,$$

$$2G_3g_3 = +Ff + Gh - Hg,$$

$$2H_3h_3 = -Fg + Gf + Hh;$$

$$2F_4f_4 = +Ff + Gh + Hg,$$

$$2G_4g_4 = -Fg + Gf - Hh,$$

$$2H_4h_4 = +Fh + Gg - Hf.$$

Toutes les autres sont d'une forme presque aussi simple, et en voici le type :

$$2F_1h_1 = Fh + Gg + H(h - g),$$

$$2G_1h_1 = F(f - g) - Gg - Hf,$$

$$2H_1g_1 = F(f - h) - Gf + Hh,$$

$$2G_1f_1 = -Ff + G(g - f) + Hg,$$

.....

De là résulte la possibilité d'exprimer au moyen de F , G , H , d'une part, f , g , h , de l'autre, des fonctions des racines de la forme proposée qui sont des invariants. Considérons par exemple l'expression

$$Ff + F_1f_1 + F_2f_2 + F_3f_3 + F_4f_4$$

qui est évidemment cyclique. En vertu des relations précédentes, elle prendra cette forme très-simple

$$F(2f - h) + H(g - f).$$

Les fonctions $FF_1F_2F_3F_4$, $HH_1H_2H_3H_4$, qui sont également cycliques, s'expriment d'une manière analogue. En faisant, pour abrégér,

$$f' = f^2 + gh,$$

$$g' = g^2 + fh,$$

$$h' = h^2 + fg,$$

j'ai montré dans mon *Mémoire sur l'équation du cinquième degré*, qu'on a

$$\begin{aligned} F F_1 F_2 F_3 F_4 &= F (H^2 h^3 + FH h h' + h'^2 l), \\ H H_1 H_2 H_3 H_4 &= H (-F^2 f^3 + FH f f' + f'^2 l). \end{aligned}$$

On obtiendrait pareillement

$$\begin{aligned} G G_1 G_2 G_3 G_4 &= G [-G^2 (f - h) g^2 + FH (f^2 + fh + h^2) g \\ &\quad + (f^4 - 2f^3 h - 5f^2 h^2 - 2fh^3 + h^4) l]. \end{aligned}$$

Mais dans ces formes si simples de fonctions compliquées de racines, le caractère cyclique de ces fonctions n'apparaît plus d'une manière évidente, et pour le retrouver il faudrait toute une théorie, qui me mènerait bien au delà de mon objet actuel. Je me propose en effet, en considérant des expressions non-seulement cycliques, mais symétriques, d'établir que *tout invariant dont l'ordre est multiple de 4 est une fonction homogène de F^2 et l ayant pour coefficients des polynômes entiers en g et h .*

Dans ce but, je considérerai les diverses déterminations de la fonction suivante

$$u = (01)(12)(23)(34)(40),$$

qui, multipliée par a^2 , donne évidemment un invariant. Ces déterminations, au nombre de vingt-quatre, sont deux à deux égales et de signes contraires, et peuvent ainsi se réduire à douze, que je partagerai en deux groupes et désignerai comme il suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\infty} = (01)(12)(23)(34)(40), \\ u_0 = (03)(34)(41)(12)(20), \\ u_1 = (14)(40)(02)(23)(31), \\ u_2 = (20)(01)(13)(34)(42), \\ u_3 = (31)(12)(24)(40)(03), \\ u_4 = (42)(23)(30)(01)(14); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{\infty} = (02)(2\bar{4})(\bar{4}1)(13)(30), \\ v_0 = (0\bar{4})(\bar{4}2)(23)(31)(10), \\ v_1 = (10)(03)(3\bar{4})(\bar{4}2)(21), \\ v_2 = (21)(1\bar{4})(\bar{4}0)(03)(32), \\ v_3 = (32)(20)(01)(1\bar{4})(\bar{4}3), \\ v_4 = (\bar{4}3)(31)(12)(20)(0\bar{4}). \end{array} \right.$$

v_{∞} a été tiré de u_{∞} par la substitution $\left\{ \begin{array}{l} x_v \\ x_{2v} \end{array} \right\}$, u_0 et v_0 ont été respectivement déduits de u_{∞} et v_{∞} par la substitution $\left\{ \begin{array}{l} x_v \\ x_{3v^3} \end{array} \right\}$, enfin u_i et v_i de u_0 et v_0 en ajoutant le nombre i aux indices des racines pris suivant le module 5. On sait qu'à l'origine de la théorie des invariants, on a considéré comme fonctions symétriques des carrés de ces douze quantités les invariants fondamentaux du quatrième, du huitième et du douzième ordre des formes du cinquième degré. Ainsi on a, en désignant avec M. Sylvester l'invariant du quatrième ordre par J et le déterminant par D,

$$\alpha^4 (u_{\infty}^2 + u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)^2 = -5^4 J - 3 \cdot 5^2 \sqrt{5D},$$

$$\alpha^4 (v_{\infty}^2 + v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)^2 = -5^4 J - 3 \cdot 5^2 \sqrt{5D},$$

et la somme des produits trois à trois des carrés conduit à

$$\begin{aligned} \alpha^{12} (u_{\infty}^2 u_1^2 u_0^2 + \dots) &= \alpha^{12} (v_{\infty}^2 v_0^2 v_1^2 + \dots) \\ &= 4 \cdot 5^3 (48JK - 768L - \Lambda), \end{aligned}$$

en adoptant les dénominations du même auteur. Or on a, comme on le vérifie sans peine, ces deux systèmes de relation, savoir :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2u_{\infty} = +(\mathbf{F} + \mathbf{H})h, & 2v_{\infty} = -(\mathbf{F} - \mathbf{H})f, \\ 2u_0 = +(\mathbf{F} - \mathbf{H})h, & 2v_0 = -(\mathbf{F} + \mathbf{H})f, \\ 2u_1 = -(\mathbf{H} - \mathbf{G})g, & 2v_1 = +(\mathbf{H} + \mathbf{G})h, \\ 2u_4 = -(\mathbf{H} + \mathbf{G})g, & 2v_4 = +(\mathbf{H} - \mathbf{G})h, \\ 2u_2 = -(\mathbf{F} - \mathbf{G})f, & 2v_2 = -(\mathbf{F} + \mathbf{G})g, \\ 2u_3 = -(\mathbf{F} + \mathbf{G})f, & 2v_3 = -(\mathbf{F} - \mathbf{G})g, \end{array} \right.$$

On en déduit, en faisant la somme des carrés, l'expression de l'invariant du quatrième ordre J, sous la forme

$$\alpha^4[(2\mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2 + \mathbf{H}^2)f^2 + (2\mathbf{G}^2 + \mathbf{H}^2 + \mathbf{F}^2)g^2 + (2\mathbf{H}^2 + \mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2)h^2] = -4.5^4\mathbf{J},$$

et si l'on écrit la somme des produits trois à trois, $u_\infty^2 u_0^2 u_1^2 + \dots$, de cette manière :

$$\begin{aligned} & (u_\infty^2 + u_0^2)(u_1^2 + u_4^2)(u_2^2 + u_3^2) \\ & + u_\infty^2 u_0^2 (u_1^2 + u_4^2 + u_2^2 + u_3^2) \\ & + u_1^2 u_4^2 (u_\infty^2 + u_0^2 + u_2^2 + u_3^2) \\ & + u_2^2 u_3^2 (u_\infty^2 + u_0^2 + u_1^2 + u_4^2), \end{aligned}$$

on parviendra à l'invariant du douzième ordre, exprimé comme il suit :

$$\begin{aligned} & 2^7 5^3 (48\mathbf{JK} - 768\mathbf{L} - \mathbf{A}) \\ & = 4\alpha^{12}(\mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2)(\mathbf{G}^2 + \mathbf{H}^2)(\mathbf{H}^2 + \mathbf{F}^2)f^2 g^2 h^2 \\ & + \alpha^{12}(\mathbf{F}^2 - \mathbf{H}^2)^2[(\mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2)g^2 + (\mathbf{G}^2 + \mathbf{H}^2)h^2]f^4 \\ & + \alpha^{12}(\mathbf{G}^2 - \mathbf{F}^2)^2[(\mathbf{G}^2 + \mathbf{H}^2)h^2 + (\mathbf{H}^2 + \mathbf{F}^2)f^2]g^4 \\ & + \alpha^{12}(\mathbf{H}^2 - \mathbf{G}^2)^2[(\mathbf{H}^2 + \mathbf{F}^2)f^2 + (\mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2)g^2]h^4. \end{aligned}$$

Adoptant donc le discriminant $5^3\mathbf{D} = \alpha^3 f^2 g^2 h^2 l^2$ pour invariant du huitième ordre, la proposition précédemment annoncée se trouvera démontrée à l'égard de ces invariants fondamentaux, en observant que F, G, H n'y entrent que par leurs carrés, de sorte qu'au moyen des relations

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^2 - \mathbf{H}^2 &= 4lf, \\ \mathbf{H}^2 - \mathbf{F}^2 &= 4lg, \\ \mathbf{F}^2 - \mathbf{G}^2 &= 4lh, \end{aligned}$$

et de celle-ci qui en découle

$$f + g + h = 0,$$

on pourra effectivement les exprimer par $\mathbf{F}^2, g, h, l$. Nous ob-

tiendrons ainsi

$$5^4 \mathbf{J} = -\alpha^4 [2\mathbf{F}^2(g^2 + gh + h^2) + (g - h)(2g^2 + gh + 2h^2)l],$$

$$5^5 \mathbf{D} = \alpha^8 (g + h)^2 g^2 h^2 l^2,$$

$$4.5^3 (48\mathbf{JK} - 768\mathbf{L} - \mathbf{\Lambda})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha^{12} [\mathbf{F}^6 (g + h)^2 g^2 h^2 + 4\mathbf{F}^4 l (g - h) (g + h)^2 g^2 h^2 \\ &\quad + \mathbf{F}^2 l^2 (g^8 + 4g^7 h + 12g^6 h^2 + 6g^5 h^3 - 5g^4 h^4 \\ &\quad \quad \quad + 6g^3 h^5 + 12g^2 h^6 + 4gh^7 + h^8) \\ &\quad - 2l^3 gh (g - h) (g^6 + 3g^5 h + 8g^4 h^2 + 11g^3 h^3 \\ &\quad \quad \quad + 8g^2 h^4 + 3gh^5 + h^6)]. \end{aligned}$$

Or ces expressions sont des fonctions homogènes de $\mathbf{F}^2$ et l , dont les coefficients sont des polynômes entiers en g et h , et il en sera de même par conséquent de leurs combinaisons entières qui représentent tout invariant de la forme du cinquième degré dont l'ordre est multiple de quatre. J'ajoute qu'un invariant donné ne peut être obtenu de deux manières différentes, comme nous venons de le dire, car en égalant deux expressions de cette nature, on arrive à une équation homogène entre $\mathbf{F}^2$ et l , qui pouvait donner $\frac{\mathbf{F}^2}{l}$ en g et h , c'est-

à-dire une fonction de la raciné x_0 , et par conséquent cette racine au moyen des quatre autres, puisque g et h ne contiennent pas x_0 .

Je terminerai cette Note par ce qui concerne au même point de vue l'invariant gauche, et à cet effet, en posant comme plus haut

$$\begin{aligned} f' &= f^2 + gh, \\ g' &= g^2 + fh, \\ h' &= h^2 + fg, \end{aligned}$$

j'emploierai les relations suivantes qu'il est aisé de vérifier, savoir :

$$\begin{aligned} 2(x_4 - x_2) \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_3 &= \mathbf{H} g' + \mathbf{G} h', \\ 2(x_2 - x_3) \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_4 &= \mathbf{F} h' + \mathbf{H} f', \\ 2(x_1 - x_2) \mathbf{H}_3 \mathbf{G}_4 &= \mathbf{G} f' + \mathbf{F} g', \end{aligned}$$

$$2(x_1 - x_3)G_2F_4 = Hg' - Gh',$$

$$2(x_4 - x_1)F_2F_3 = Fh' - Hf',$$

$$2(x_4 - x_3)G_1H_2 = Gf' - Fg'.$$

On en déduit, en les multipliant membre à membre,

$$\begin{aligned} 64fghK &= a^{18}FGH(H^2g'^2 - G^2h'^2) \\ &\quad \times (F^2h'^2 - H^2f'^2) \\ &\quad \times (G^2f'^2 - F^2g'^2). \end{aligned}$$

Écrivant ensuite

$$H^2g'^2 - G^2h'^2 = H^2(g'^2 - h'^2) - 4lfh'^2,$$

$$F^2h'^2 - H^2f'^2 = F^2(h'^2 - f'^2) - 4lghf'^2,$$

$$G^2f'^2 - F^2g'^2 = G^2(f'^2 - g'^2) - 4lhfg'^2,$$

et observant qu'on a

$$g'^2 - h'^2 = 4fgh(g - h),$$

$$h'^2 - f'^2 = 4fgh(h - f),$$

$$f'^2 - g'^2 = 4fgh(f - g),$$

on en conclut immédiatement

$$\begin{aligned} K &= a^{18}FGH[F^2(h - f)fh - lf'^2] \\ &\quad \times [G^2(f - g)fg - lg'^2] \\ &\quad \times [H^2(g - h)gh - lh'^2], \end{aligned}$$

et on reconnaît que la quantité par laquelle est multipliée FGH peut encore être mise sous forme d'une fonction homogène de F^2 et L .



II.

SUR L'INVARIANT GAUCHE DES FORMES DU SIXIÈME DEGRÉ.

On doit au P. Joubert la découverte intéressante de l'expression de cet invariant qui est du quinzième ordre au moyen des racines de la forme proposée. Représentons cette forme par

$$f' = a(x - x_\infty y)(x - x_0 y)(x - x_1 y)(x - x_2 y)(x - x_3 y)(x - x_4 y),$$

et posons

$$U_0 = [x_\infty x_0(x_2 + x_3 - x_1 - x_4) + x_1 x_4(x_\infty + x_0 - x_2 - x_3) \\ + x_2 x_3(x_1 + x_4 - x_\infty - x_0)],$$

$$V_0 = [x x_0(x_3 + x_4 - x_1 - x_2) + x_1 x_2(x_\infty + x_0 - x_3 - x_4) \\ + x_3 x_4(x_1 + x_2 - x_\infty - x_0)],$$

$$W_0 = [x_\infty x_0(x_2 + x_4 - x_1 - x_3) + x_1 x_3(x_\infty + x_0 - x_2 - x_4) \\ + x_2 x_4(x_2 + x_3 - x_\infty - x_0)].$$

En convenant de désigner par U_i , V_i , W_i ce que deviennent ces expressions, en ajoutant le nombre k aux indices des racines pris suivant le module 5, on aura la valeur suivante de l'invariant gauche du quinzième ordre, savoir :

$$K = a^{15} U_0 U_1 U_2 U_3 U_4 \\ \times V_0 V_1 V_2 V_3 V_4 \\ \times W_0 W_1 W_2 W_3 W_4.$$