N° D'ORDRE
442.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. OCTAVE CALLANDREAU.

1re THÈSE. — DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS D'UNE PETITE PLANÈTE PAR LES MÉTHODES DE M. GYLDÉN. APPLICATION A HÉRA.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1er 8bre ~~juin~~ 1880, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
HERMITE, } *Examinateurs.*
TISSERAND, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. S^te^-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

6115 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

PREMIÈRE THÈSE.

DÉTERMINATION

DES

PERTURBATIONS D'UNE PETITE PLANÈTE

PAR LES

MÉTHODES DE M. GYLDÉN.

APPLICATION A (103) HÉRA.

INTRODUCTION.

Je me suis proposé, dans ce travail, de déterminer les perturbations d'une petite planète d'après la méthode que M. Gyldén a indiquée dans les *Comptes rendus de l'Académie de Stockholm* et que M. Backlund a appliquée à la planète (112) Iphigénie ([1]). Pour faciliter le calcul et assurer les résultats, il a semblé utile de faire quelques modifications au procédé suivi à l'origine. D'un autre côté M. Gyldén, depuis la publication de son Mémoire, est parvenu à augmenter la convergence des développements, et j'ai mis à profit ses remarques ([2]).

([1]) HUGO GYLDÉN, *Om en method för den analytiska härledningen af de sma planeternas relativa störingar* (Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1874); Stockholm, in-8, 11 pages.

J. O. BACKLUND, *Beräkning af relativa störingar för planeten* (112) *Iphigenia* (*ibid.*, 20 pages).

Une analyse de ces deux Mémoires se trouve dans le *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 1875, p. 25 et suiv.

([2]) *Annales de l'École Normale*, 1879.

La méthode de l'astronome suédois, récemment élu correspondant de l'Académie, a pour point de départ un fait important pour l'Analyse aussi bien que pour les applications. Alors qu'un arc, supposé compris entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, se représente par une série trigonométrique très peu convergente,

$$x = 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \ldots),$$

il est possible, quand les limites sont plus resserrées et égales à $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, de représenter le même arc par une série d'une convergence très suffisante pour les applications ([1]). Il y a plus : la représentation dont nous parlons n'est pas unique; c'est grâce à ce qu'il y a d'indéterminé dans les formules que M. Gyldén a pu augmenter la convergence des premiers développements.

Il est aisé de comprendre le parti qu'on peut tirer d'une série trigonométrique convergente représentant un arc entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Toutes les expressions qui se rencontrent dans le calcul des perturbations dépendent, si l'on veut, de l'anomalie excentrique du corps troublé et des anomalies moyennes des corps troublants. Or une quelconque de ces anomalies s'obtient en ajoutant un angle constant à l'anomalie moyenne du corps troublé, savoir

$$g = nt + c = \varepsilon - e\sin\varepsilon,$$

multipliée par un facteur numérique convenable tel que μ, et l'on a

$$g' = n't + c' = c' - \mu c + \mu\varepsilon - \mu e \sin\varepsilon \quad \left(\mu = \frac{n'}{n}\right).$$

Maintenant, puisque l'arc ε et, par suite, l'arc $\mu\varepsilon$ s'expriment par une série trigonométrique convergente entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, toutes les expressions dont nous parlons, au moins entre les limites considérées, ne contiendront plus que le seul argument ε. Il y a là un avantage manifeste pour le calcul.

Ce qui a été dit pour l'intervalle $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ pouvant être répété d'une manière générale quand ε varie entre $(m-\frac{1}{2})\pi$ et $(m+\frac{1}{2})\pi$, m entier quelconque

---

([1]) *Astr. Nachrichten*, 1867, p. 193 et suiv. : *Ueber die Entwickelung von* $\cos\mu\vartheta$ *und* $\sin\mu\vartheta$ *nach den ganzen Vielfachen von* θ *wenn* μ *eine beliebige Zahl bedeutet. Anwendung der entwickelten Reihen zur Transformation der allgemeinen Störungen der Planeten.*

positif ou négatif, après qu'on a posé

$$g' = c' - \mu c + \mu m\pi + \mu(\varepsilon - m\pi) - \mu e \sin\varepsilon,$$

les séries doubles dépendant des deux arguments ε et g' sont en définitive ramenées, *dans chaque intervalle,* à des séries simples.

Les avantages qui sont attachés aux méthodes analytiques, fécondes en vérifications, recommandent les nouvelles méthodes. Sous le rapport de la rapidité et de la facilité du calcul, elles laissent peu à désirer; mais elles sont encore dignes d'attention à un autre égard : bien qu'elles aient principalement en vue les perturbations relatives, elles ouvrent la voie pour le calcul des perturbations absolues, parce que, dans cette recherche plus étendue, les nombres déjà calculés trouveront leur emploi.

Nous donnons ci-après le contenu des divers paragraphes :

1-3. Formules trigonométriques de M. Gyldén; expressions trigonométriques de l'arc entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Exposition plus détaillée de la méthode. Valeurs des constantes utiles pour les applications.

4. Éléments des planètes (103) et Jupiter. Calculs préliminaires.

5-9. Calcul, par deux méthodes indépendantes, des quantités qui interviennent dans les expressions des dérivées partielles. Nombres relatifs à Saturne et Mars. Tableau des valeurs particulières des dérivées partielles.

10. Calcul des coefficients d'un développement au moyen des valeurs particulières.

11-12. Exposition succincte des formules nécessaires au calcul des coordonnées $n\delta z$, 2ν et $\frac{u}{\cos i}$ de Hansen.

13. Les calculs sont ramenés à deux opérations simples effectuées sur les développements trigonométriques.

14. Usage du *facteur de séparation* de M. Gyldén pour augmenter la convergence.

15-17. Application des méthodes précédentes. Calcul de 2ν, $n\delta z$ et $\frac{u}{\cos i}$.

18. Détermination des arbitraires.

19. Expressions définitives de $n\delta z$, 2ν et $\frac{u}{\cos i}$.

20. Calcul des éphémérides; comparaison avec les observations [1].

---

[1] Les éléments qui ont servi de point de départ, et que je dois à l'obligeante communication de M. Leveau, astronome adjoint à l'Observatoire (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVII, p. 59), seront corrigés dans la suite et les éléments moyens déterminés.

En vue des applications qui peuvent être faites, on a réuni dans une Addition les valeurs des constantes auxiliaires quand la circonférence est divisée en vingt-quatre parties, de sorte qu'on pourra faire usage des trois modes de division en douze, seize ou vingt-quatre parties.

1. Proposons-nous de déterminer les coefficients des deux développements

$$\begin{aligned}\cos^{2i+1}\theta &= A_0 + A_2\cos 2\theta + A_4\cos 4\theta + \ldots,\\ \cos^{2i}\theta &= \phantom{A_0 + {}} B_1\cos\theta + B_3\cos 3\theta + \ldots,\end{aligned}$$

où i est un entier positif, en admettant la *possibilité* de ces développements. Il suffira, dans ce but, de faire usage de la relation

$$(m^2 - p^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^p\theta \cos m\theta \, d\theta = -p(p-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\theta \cos m\theta \, d\theta.$$

Écrivons, pour adopter les notations de M. Gyldén [*Mémoire sur la sommation des fonctions périodiques* (*Annales de l'École Normale,* juin 1879)],

$$\cos^{2i+1}\theta = C_0^{(i)} - 2C_2^{(i)}\cos 2\theta - 4C_4^{(i)}\cos 4\theta - \ldots;$$

on a, en intégrant les deux membres entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, après avoir multiplié par $\cos 2n\theta\, d\theta$,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1}\theta \cos 2n\theta \, d\theta = -2nC_{2n}^{(i)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 2n\theta \, d\theta = -n\pi C_{2n}^{(i)},$$

et, à cause de la formule de réduction indiquée,

$$C_{2n}^{(i)} = (-1)^i \frac{1.2.3\ldots 2i(2i+1)}{[(2n)^2-1][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2n}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$C_0^{(i)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i+1)}.$$

On a, de plus (Mémoire cité, p. 208),

$$\begin{aligned}\frac{C_{2n}^{(i)}}{C_0^{(i)}} &= (-1)^i \frac{1}{n}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2i+1)^2}{[(2n)^2-1][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]}\\ &= -\frac{1}{n}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}X_n^{(i+1)}.\end{aligned}$$

Dans le développement écrit ainsi,

$$\frac{\cos^{2i+1}\theta}{C_0^{(i)}} = 1 - 2X_1^{(i+1)}\cos 2\theta + 2X_2^{(i+1)}\cos 4\theta - \ldots,$$

remplaçons $\cos^{2i+1}\theta$ par sa valeur déduite de la formule

$$\begin{aligned}2^{2i}\cos^{2i+1}\theta = \cos(2i+1)\theta + \frac{2i+1}{1}\cos(2i-1)\theta + \frac{(2i+1)2i}{1.2}\cos(2i-3)\theta + \ldots\\ + \frac{(2i+1)2i\ldots(i+2)}{1.2\ldots i}\cos\theta,\end{aligned}$$

et intégrons entre o et θ, après avoir multiplié par $d\theta$; il vient

$$\theta = \sum_1^\infty \beta_{2n}^{(i)}\sin 2n\theta + \frac{\pi}{2}\sum_0^i \alpha_{2n+1}^{(i)}\sin(2n+1)\theta,$$

en faisant

$$\beta_{2n}^{(i)} = -\frac{(-1)^n}{n}X_n^{(i+1)},$$

$$\alpha_{2n+1}^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i}\,\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{2^{2i}}\,\frac{(2i+1)2i\ldots(i+n+2)}{1.2\ldots(i-n)}.$$

La seconde formule s'établit par un calcul tout semblable. Faisant

$$\cos^{2i}\theta = C_1^{(i)}\cos\theta + 3C_3^{(i)}\cos 3\theta + \ldots + (2n+1)C_{2n+1}^{(i)}\cos(2n+1)\theta + \ldots,$$

on a

$$(2n+1)C_{2n+1}^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2i}\theta\cos(2n+1)\theta\,d\theta;$$

puis, réductions faites,

$$(2n+1)\frac{\pi}{2}C_{2n+1}^{(i)} = (-1)^i 2\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{2i(2i-1)\ldots 2.1}{[(2n+1)^2-(2i)^2]\ldots[(2n+1)^2-2^2]}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Ensuite on remplace $\cos^{2i}\theta$ par sa valeur

$$\frac{1}{2^{2i-1}}\left[\cos 2i\theta + \frac{2i}{1}\cos(2i-2)\theta + \frac{2i(2i-1)}{1.2}\cos(2i-4)\theta + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{2i(2i-1)\ldots(i+1)}{1.2\ldots i}\right],$$

et l'on intègre entre o et θ, après avoir multiplié les deux membres par $d\theta$; il vient ainsi

$$\theta = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\theta - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)} \sin 2n\theta.$$

Les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$\beta_{2n+1}^{(i)} = (-1)^i \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2}\,\frac{(2.4\ldots 2i)^2}{[(2n+1)^2-2^2][(2n+1)^2-4^2]\ldots[(2n+1)^2-(2i)^2]},$$

$$\alpha_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n}\,\frac{(1.2\ldots i)^2}{[1.2\ldots(i+n)][1.2\ldots(i-n)]}.$$

De l'analyse précédente il résulte, en admettant toujours la possibilité des développements dont on vient de calculer les coefficients, que l'arc θ peut varier entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si l'on assigne à l'argument θ, dans les seconds membres, une valeur qui ne soit pas comprise entre ces limites, on peut du moins constater que les développements ne cessent pas d'être convergents.

Observons encore que, pour les deux valeurs $\frac{\pi}{2} - v$ et $\frac{\pi}{2} + v$ de l'argument θ, les séries qui figurent dans les seconds membres des deux formules conduisent à des valeurs contradictoires, ce qui montre l'impossibilité de représenter l'arc θ entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ et hors de ces limites par les mêmes formules.

Il reste donc à établir que les séries convergentes des seconds membres représentent bien l'arc θ, du moins lorsque θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. C'est un point aisé à établir en se reportant à la démonstration de la formule de Fourier.

Cherchons, en effet, la somme de la série

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1}\theta\, d\theta + \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1}\theta \cos 2\theta\, d\theta \cos 2x$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1}\theta \cos 4\theta\, d\theta \cos 4x + \ldots,$$

et prenons d'abord la somme des $n+1$ premiers termes; on trouve aisément

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1}\theta\left[\frac{\sin(2n+1)(\theta-x)}{\sin(\theta-x)}+\frac{\sin(2n+1)(\theta+x)}{\sin(\theta+x)}\right]d\theta.$$

Il s'agit de trouver vers quelle limite tend cette expression quand n augmente indéfiniment. On voit que les intégrales à traiter sont celles que l'on rencontre dans l'étude de la formule de représentation de Fourier et que la limite cherchée est $\cos^{2i+1}x$.

D'une manière analogue, on justifiera le second développement.

2. On a supposé, dans ce qui précède, l'arc θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; il est clair que l'on représentera aussi l'arc θ s'il est compris entre les limites $(m-\frac{1}{2})\pi$ et $(m+\frac{1}{2})\pi$, m étant un entier positif ou négatif, l'arc $\theta-m\pi$ étant dans ce cas compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et l'on remarque sans doute que, le nombre entier i demeurant arbitraire, il y a quelque chose d'indéterminé dans les développements.

Revenons maintenant à la transformation dont il a été parlé dans l'Introduction pour indiquer comment elle peut être réalisée.

Des équations connues

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = nt + c = g, \quad n't + c' = g'$$

on a déduit

$$g' = c' - \mu c + \mu\varepsilon - \mu e\sin\varepsilon \quad \left(\mu = \frac{n'}{n}\right);$$

équation qui a été écrite ainsi,

$$g' = c' - \mu c + \mu m\pi + \mu(\varepsilon - m\pi) - \mu e\sin\varepsilon,$$

dans l'hypothèse où ε est compris entre les deux limites $(m-\frac{1}{2})\pi$ et $(m+\frac{1}{2})\pi$.

En remplaçant l'arc $\varepsilon - m\pi$, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, par sa valeur

$$\varepsilon - m\pi = \sum_{0}^{\infty}\beta_{2n+1}^{(i)}\sin(2n+1)(\varepsilon - m\pi) - \sum_{1}^{i}\alpha_{2n}^{(i)}\sin 2n\varepsilon,$$

g' a été représenté par un développement trigonométrique dépendant du seul argument ε. Suppose-t-on effectuées toutes les réductions, les quantités qui interviennent dans le calcul des perturbations prennent cette forme :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos\varepsilon + a_2 \cos 2\varepsilon + \ldots \\ + b_1 \sin\varepsilon + b_2 \sin 2\varepsilon + \ldots . \end{aligned}$$

Nous pouvons, dans le cas où les méthodes d'interpolation pour le développement des fonctions sont employées, calculer les valeurs particulières de la quantité à développer, et, puisque, d'après une remarque faite plus haut, l'expression de l'arc ne cesse pas d'être convergente en dehors des limites de la représentation, le choix d'aucune valeur de ε, comme argument d'une valeur particulière de la fonction à développer, ne demeure interdit. Dans le cas le plus simple, on distribue régulièrement sur la circonférence les arguments ε; c'est le procédé des quadratures mécaniques.

Si l'on n'a pas divisé d'abord la circonférence en un nombre assez grand de parties, il peut arriver que quelques-unes des valeurs calculées deviennent sans emploi quand on adopte un autre mode de division.

Le Verrier a remédié à cet inconvénient en faisant connaître un procédé qui utilise toutes les valeurs particulières. On trouvera dans les *Annales de l'École Normale,* à la suite du Mémoire déjà cité de M. Gyldén, quelques réflexions sur ce sujet.

3. Il est nécessaire, avant tout, d'obtenir les valeurs numériques des coefficients du développement de $\varepsilon - m\pi$, l'argument ε étant pris à volonté et le nombre entier m recevant les valeurs successives $\ldots, -1, 0, +1, \ldots$.

A l'exemple de M. Backlund, nous aurons égard seulement à la seconde formule de représentation de l'arc, et l'entier i sera choisi égal à 4 (¹). Il suffit de considérer deux valeurs consécutives du nombre m, soient 0 et 1.

Posant donc en général, afin d'éviter toute confusion,

$$\begin{aligned} Y_m &= m\pi + \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(4)} \sin(2n+1)(\varepsilon - m\pi) - \sum_1^4 \alpha_{2n}^{(4)} \sin 2n\varepsilon, \\ X_m &= c' - \mu.c + \mu.m\pi, \\ Z'_m &= X_m + \mu(Y_m - m\pi) - \mu.e \sin\varepsilon, \end{aligned}$$

(¹) On peut se rendre compte des valeurs des coefficients $\beta_{2n+1}^{(i)}$ au moyen de la formule

$$\beta_{2n+1}^{(i)} = (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi} \, \frac{2n-2i-1}{2n+1} \left[\frac{2.4.6\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i+1)} \right]^2 X_n^{(i+1)};$$

les valeurs de $X_n^{(i+1)}$ sont données dans le *Recueil de Tables* de M. Gyldén, Table E.

il suffira, pour obtenir les anomalies moyennes Z'_m du corps troublant, de calculer le Tableau des valeurs de Y_0 et Y_1.

Valeurs logarithmiques des coefficients $\beta^{(\frac{1}{2})}_{2n+1}$ et $\alpha^{(\frac{1}{2})}_{2n}$.

n.	$\log\beta^{(\frac{1}{2})}_{2n+1}$.	n.	$\log\alpha^{(\frac{1}{2})}_{2n}$.
0	0,276 9515		
1	$\bar{1}$,603 5356	1	$\bar{1}$,903 0900
2	$\bar{2}$,966 713	2	$\bar{1}$,301 0300
3	$\bar{2}$,121 615	3	$\bar{2}$,580 871
4	$\bar{4}$,782 0	4	$\bar{3}$,552 84
5	$-\bar{5}$,416		
6	$\bar{6}$,498		
7	$-\bar{7}$,773		
8	$\bar{7}$,166		

Pour l'utilité de ceux qui voudront entreprendre des applications numériques, nous donnons les valeurs de Y_0 et Y_1 quand la circonférence est divisée en seize parties égales.

Il est à croire que seize valeurs sont suffisantes dans la plupart des cas; on a ajouté les logarithmes de Y_0 et Y_1 évalués en secondes.

ε.	Y_0.	Y_1.	$\log Y_0$ en $''$.	$\log Y_1$ en $''$.
$0^\circ,0$	$0^\circ.\ 0'.\ 0'',0$	$180^\circ.\ 0'.\ 0'',0$	$-\infty$	5,811 5750
22,5	22.30. 0,0	66.40.19,6	4,908 4850	5,380 2467
45,0	45. 0. 0,0	47.41.31,9	5,209 5150	5,234 7498
67,5	67.30. 0,0	67.30.31,5	5,385 6063	5,385 6626
90,0	90. 0. 0,0	90. 0. 0,0	5,510 5450	5,510 5450
112,5	112.29.28,5	112.30. 0,0	5,607 4213	5,607 4550
135,0	132.18.28,1	135. 0. 0,0	5,677 8880	5,686 6363
157,5	113.19.40,4	157.30. 0,0	5,610 6393	5,753 5831
180,0	0. 0. 0,0	180. 0. 0,0	$-\infty$	5,811 5750
202,5	−113.19.40,4	202.30. 0,0	−5,610 6393	5,862 7275
225,0	−132.18.28,1	225. 0. 0,0	−5,677 8880	5,908 4850
247,5	−112.29.28,5	247.30. 0,0	−5,607 4213	5,949 8777
270,0	− 90. 0. 0,0	270. 0. 0,0	−5,510 5450	5,987 6663
292,5	− 67.30. 0,0	292.29.28,5	−5,385 6063	6,022 4154
315,0	− 45. 0. 0,0	312.18.28,1	−5,209 5150	6,050 8854
337,5	− 22.30. 0,0	293.19.40,4	−4,908 4850	6,023 6559

4. Nous pouvons maintenant exposer le calcul des perturbations de la petite planète prise comme exemple. Comme les calculs pour chaque planète troublante sont entièrement semblables, il suffira de rapporter avec quelque détail

les nombres relatifs à Jupiter, en indiquant seulement les conclusions pour Saturne et Mars.

On pourrait introduire dans les calculs les valeurs rigoureuses des coordonnées des planètes troublantes; la méthode n'exige point que leurs éléments, dans les termes multipliés par les masses perturbatrices, soient remplacés par leurs valeurs elliptiques. Nous nous en tenons cependant à cette hypothèse, et il est certain que, les arbitraires contenues dans les expressions du premier ordre étant déterminées d'après les observations, les formules représenteront bien les observations pendant un certain temps.

On a, d'après M. Leveau (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 59) :

Éléments osculateurs de la planète (103) Héra.

Époque 1877, Octobre 21,0; temps moyen de Paris.

$$\begin{array}{lll} M_0 = & 49^\circ 57' 59'',95 & \\ \varpi = & 320.59.30,16 & \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} \\ \Omega = & 136.12.27,90 & \text{Équinoxe et écliptique moyens pour } 1880,0. \\ i = & 5.23.58,80 & \\ \varphi = & 4.30.35,47 & \\ \mu = & 799'',06754 & \end{array}$$

Ces éléments ont été rapportés à l'équinoxe et à l'écliptique moyens de 1878, Janvier 1,0. Les corrections à appliquer aux éléments ϖ, Ω, i sont en général, et pour un intervalle de temps peu étendu, données par les formules suivantes,

$$\begin{aligned} \delta\varpi &= \text{précess.} - (\text{var. obliq.}) \tang \tfrac{i}{2} \sin(\Omega - \Pi), \\ \delta\Omega &= \text{précess.} + (\text{var. obliq.}) \cot i \ \sin(\Omega - \Pi), \\ \delta i &= (\text{var. obliq.}) \cos(\Omega - \Pi), \end{aligned}$$

où l'on a (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II)

$$\begin{aligned} \text{Précess.} &= 50'',236(t' - t), \\ \text{Var. obliq.} &= -0'',47657(t' - t), \\ \Pi &= 172^\circ 56' 37'' + 41'',6(t - 1850). \end{aligned}$$

Faisant $t' = 1878$, $t = 1880$, on trouve

$$\delta\varpi = -1'40'',36, \quad \delta\Omega = -1'34'',27, \quad \delta i = +0'',76.$$

En appliquant ces corrections aux éléments donnés plus haut, on obtient les nombres suivants :

Éléments osculateurs de la planète (103) *Héra.*

Époque 1877, Octobre 21,0; temps moyen de Paris.

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 49^\circ.57'.59'',95 \\ \varpi = 320.57.49,80 \\ \Omega = 136.10.53,63 \\ \iota = 5.23.59,56 \\ \varphi = 4.30.35,47 \\ \mu = 799'',06754 \end{array}\right.\quad \begin{array}{c} \text{Équinoxe} \\ \text{et écliptique moyens} \\ \text{1878, Janvier 1,0.} \end{array}$$

Pour 1878 Janvier 1,0, nous trouvons les éléments de Jupiter dans les Tables de Le Verrier (voir *Explication et usage des Tables*). Le Tableau suivant contient les éléments des deux planètes désignés avec les notations de Hansen [1], que l'on peut regarder comme suffisamment connues :

Héra (pour 1877, Oct. 21,0).		Jupiter (pour 1878, Janv. 1,0.) ($m' = \frac{1}{1050}$).
$c = 49^\circ.57'.59'',95$		$c' = 276^\circ.49'.\ 4'',5$
$\pi = 320.57.49,80$	Équinoxe	$\pi' = 13.37.46,3$
$\theta = 136.10.53,63$	et écliptique moyens	$\theta' = 99.13.15,4$
$i = 5.23.59,56$	1878, Janvier 1,0	$i' = 1.18.35,63$
$\varphi = 4.30.35,47$		$\varphi' = 2.47.53,56$
$n = 799'',06754$		$a' = 5,202\,173$

Au moyen de la relation bien connue

$$n'^2 a'^3 = (\bar{4},471\,1629)(1 + m'),$$

on conclura la valeur de n', et d'une manière analogue celle de a :

$$\log(n' \text{ en } '') = 2,475\,9361, \quad \log a = 0,431\,6154,$$

puis

$$\log\mu\left(=\frac{n'}{n}\right) = \bar{1},573\,3526, \quad \log\alpha\left(=\frac{a'}{a}\right) = 0,284\,5694,$$

$$\log(c \text{ en } '') = 5,375\,5041, \qquad \mu c = 888\,90'',78, \quad c' - \mu c = 907\,653'',7.$$

5. Ces calculs préliminaires effectués, nous abordons le *premier travail;* il consiste :

1° A déterminer pour les seize valeurs équidistantes de ε les anomalies vraies et les rayons vecteurs de (103) ;

---

(1) *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode,* etc. Les articles cités se rapportent tous à la première Partie de cet Ouvrage. Il n'est pas nécessaire que les deux systèmes d'éléments se rapportent au même instant (article 77).

2° A déterminer pour chacun des intervalles (ici au nombre de deux, $m = 0$ et $m = 1$) les seize valeurs de l'anomalie moyenne Z'_m du corps troublant, puis les anomalies excentriques, les anomalies vraies, ainsi que les rayons vecteurs correspondants.

L'anomalie vraie et le rayon vecteur sont calculés de préférence par la troisième méthode de l'article **14** du *Theoria motus;* l'anomalie excentrique est obtenue par la méthode indiquée dans l'article **11**.

Voici d'abord les anomalies vraies et les rayons vecteurs de (103); nous désignons, pour abréger, par 0, 1, 2, ..., 15 les seize valeurs de ε, 0°, 22°,5, 45°, ... :

ε.	$\log \frac{r}{a}$.	f.
		° ′ ″
0	$\bar{1}$,964 434	0. 0. 0,0
1	$\bar{1}$,967 246	24.17.30,4
2	$\bar{1}$,975 156	48.16.51,9
3	$\bar{1}$,986 731	71.43.50,0
4	0,000 000	94.30.35,5
5	0,012 875	116.36.18,3
6	0,023 499	138. 6.12,3
7	0,030 456	159. 9.57,6
8	0,032 873	180. 0. 0,0
9	0,030 456	200.50. 2,4
10	0,023 499	221.53.47,7
11	0,012 875	243.23.41,7
12	0,000 000	265.29.24,5
13	$\bar{1}$,986 731	288.16.10,0
14	$\bar{1}$,975 156	311.43. 8,1
15	$\bar{1}$,967 246	335.42.29,6

Après cela, on passe au calcul de Z'_0 et Z'_1 d'après la formule citée plus haut,

$$Z'_m = X_m + \mu(Y_m - m\pi) - \mu e \sin\varepsilon,$$

ou, si l'on veut,

$$Z'_m = \mu Y_m + c' - \mu c - \mu e \sin\varepsilon.$$

Les équations suivantes peuvent servir à assurer le calcul; les indices indiquent le rang des nombres ou, si l'on veut, le rang des valeurs de ε correspondantes :

$$Z'^{(8-i)}_0 + Z'^{(8+i)}_0 = 2(c' - \mu c + \mu\pi),$$
$$Z'^{(8-i)}_m + Z'^{(8+i)}_m = 2(c' - \mu c + \mu m\pi),$$

$$Z'^{(8-i)}_{m+1} + Z'^{i}_m = 2(c' - \mu c) + \mu(2m+1)\pi - 2\mu e \sin\varepsilon_i,$$
$$Z'^{(8+i)}_{m+1} - Z'^{i}_m = \mu\pi + 2\mu e \sin\varepsilon_i.$$

Le Tableau suivant comprend les résultats obtenus; le premier groupe correspond à $m = 0$, le suivant à $m = 1$.

ε.	Z'_m.	ε'.	$\log \frac{r'}{a'}$.	f'.
		$m = 0$.		
0	907653″,7	249°.30′.21″,5	0,007 360	246°.54′.25″,3
1	935657,4	257.10.38,9	0,004 680	254.27.49,4
2	964014,9	264.59.43,7	0,001 845	262.12.49,9
3	993026,1	273. 2.50,8	$\bar{1}$,998 871	270.14.58,4
4	1022891,4	281.23.40,3	$\bar{1}$,995 791	278.38.17,3
5	1053669,5	290. 3.30,7	$\bar{1}$,992 667	287.24.28,1
6	1081696,4	298. 0. 5,6	$\bar{1}$,989 930	295.30. 7,8
7	1058083,6	291.18.22,3	$\bar{1}$,992 228	288.40.33,0
8	907653,7	249.30.21,5	0,007 360	246.54.25,3
9	757223,8	208.59. 4,4	0,018 161	207.39.24,4
10	733611,0	202.42. 4,9	0,019 131	201.38.42,3
11	761637,9	210. 9.38,7	0,017 955	208.47. 1,4
12	792416,0	218.22.44,2	0,016 311	216.40.26,6
13	822281,3	226.23.10,9	0,014 384	224.23.37,7
14	851292,6	234.12. 5,4	0,012 228	231.57.49,4
15	879650,0	241.52.49,0	0,009 889	239.26.25,2
		$m = 1$.		
0	1150274,3	− 42.21.51,0	$\bar{1}$,984 045	− 44.17. 4,5
1	995196,7	− 86.20.52,5	$\bar{1}$,998 647	− 89. 8.41,3
2	967643,6	− 94. 0. 1,5	0,001 477	− 96.47.13,4
3	993037,9	− 86.56.57,4	$\bar{1}$,998 870	− 89.44.49,8
4	1022891,5	− 78.36.19,6	$\bar{1}$,995 791	− 81.21.42,5
5	1053681,3	− 69.56.17,3	$\bar{1}$,992 665	− 72.35.19,8
6	1085325,2	− 60.57.59,0	$\bar{1}$,989 586	− 63.26.32,7
7	1117622,8	− 51.44.44,5	$\bar{1}$,986 670	− 53.58.37,0
8	1150274,3	− 42.21.51,0	$\bar{1}$,984 045	− 44.17. 4,5
9	1182925,7	− 32.55.48,3	$\bar{1}$,981 830	− 34.28.59,8
10	1215223,3	− 23.33.20,9	$\bar{1}$,980 116	− 24.41.59,6
11	1246867,2	− 14.20.26,9	$\bar{1}$,978 957	− 15. 3. 3,0
12	1277657,0	− 5.21.23,0	$\bar{1}$,978 361	− 5.37.27,0
13	1307510,6	3.21.41,0	$\bar{1}$,978 301	3.31.46,5
14	1332904,9	10.46.27,3	$\bar{1}$,978 656	11.18.37,1
15	1305351,9	2.43.51,7	$\bar{1}$,978 288	2.52. 3,8

6. Le *deuxième travail* sera le calcul des valeurs de $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$, Δ désignant la distance mutuelle des deux corps, par les formules des articles **52** et **53** de l'Ouvrage cité de Hansen. Ce calcul supposant un assez grand nombre de quantités auxiliaires, il ne serait pas prudent, à notre avis, de le pousser sans précaution jusqu'au bout; mais, comme le *troisième travail* fournira de nouveau les valeurs

de $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ en même temps que celles d'autres quantités utiles dans la suite, il sera préférable de commencer à la fois ce double calcul et de s'assurer, par l'accord des valeurs obtenues pour $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ (deux ou trois suffiront), que les quantités auxiliaires mises en jeu dans les formules de Hansen ne sont pas entachées d'erreurs.

On calcule d'abord les distances Φ et Ψ des nœuds ascendants des orbites troublée et troublante au nœud ascendant de l'orbite troublée sur l'orbite troublante, ainsi que l'inclinaison commune J, par les formules

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i'),\\
\sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i'),\\
\cos\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i'),\\
\cos\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i'),
\end{aligned}$$

puis les distances Π, Π' du nœud en question aux périhélies des deux orbites :

$$\Pi = \pi-\theta-\Phi,\quad \Pi' = \pi'-\theta'-\Psi.$$

Maintenant, $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ ayant cette expression

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \frac{r^2}{a^2}+\frac{r'^2}{a^2}-\frac{2rr'}{a^2}H,$$

où l'on a

$$H = \cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+\cos J\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'),$$

on pose

$$\begin{aligned}
\cos J\sin\Pi' &= k\sin K, & \sin\Pi' &= k_1\sin K_1,\\
\cos\Pi' &= k\cos K, & \cos J\cos\Pi' &= k_1\cos K_1,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
A &= k\cos(\Pi-K), & B &= k_1\sin(\Pi-K_1),\\
C &= k\sin(\Pi-K), & D &= k_1\cos(\Pi-K_1);
\end{aligned}$$

par là, l'expression de H se simplifie :

$$H = A\cos f\cos f' - C\sin f\cos f' + B\cos f\sin f' + D\sin f\sin f'.$$

On introduit ensuite les anomalies excentriques ; $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ prend cette forme

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0-\gamma_1\cos\varepsilon'-\beta_0\sin\varepsilon'+\alpha^2e'^2\cos^2\varepsilon',$$

les coefficients dépendant seulement de ε. Hansen pose

$$\beta_0 = f \sin F, \quad \gamma_1 = f \cos F$$

et établit les relations suivantes, propres au calcul des coefficients, article 53 :

$$\begin{aligned}
p \sin P &= 2\alpha^2 \frac{e'}{e} - 2\alpha A, \\
p \cos P &= 2\alpha \cos\varphi' B, \\[1ex]
\nu \sin V &= 2\alpha \cos\varphi C, \\
\nu \cos V &= 2\alpha \cos\varphi \cos\varphi' D, \\
w \sin W &= p - 2\alpha^2 \frac{e'}{e} \sin P, \\
w \cos W &= \nu \cos(V - P), \\
w_1 \sin W_1 &= \nu \sin(V - P), \\
w_1 \cos W_1 &= 2\alpha^2 \frac{e'}{e} \cos P,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \sin(F - P) &= w \sin(\varepsilon + W) - ep, \\
f \cos(F - P) &= w_1 \cos(\varepsilon + W_1),
\end{aligned}$$

$$\gamma_0 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2 e'^2 + e' f \cos F.$$

Les nombres constants qu'il est nécessaire de calculer et les valeurs des coefficients pour les seize valeurs de ε sont réunis dans le Tableau suivant; à la place de β_0 et γ_1, il est préférable de mettre F et $\log f$:

$\Psi = 47^\circ.11'.18'',7$,	$\Phi = 10^\circ.15'.54'',1$,	$J = 4^\circ 25' 25'',3$,
$\Pi = 174.31.\ 2,1$,	$\Pi' = 227.13.12,2$,	
$K = 227.\ 8.\ 5,3$,	$\log k = \bar{1},999\,303$,	
$K_1 = 227.18.19,0$,	$\log k_1 = \bar{1},999\,403$,	
$\log A = +\bar{1},782\,586$,	$\log B = -\bar{1},900\,536$,	
$\log C = -\bar{1},899\,452$,	$\log D = +\bar{1},780\,990$,	
$P = 143^\circ.25'.34'',1$,	$\log p = 0,580\,853$,	
$V = -52.45.\ 7,5$,	$\log \nu = 0,582\,778$,	
$W = 163.49.31,1$,	$\log w = 0,582\,770$,	
$W_1 = 163.55.\ 0,3$,	$\log w_1 = 0,585\,267$.	

ε.	γ_0.	log f.	F.
0	4,661 92	0,577 059	311°.43′. 3″,2
1	4,721 21	0,590 125	334. 6.15,7
2	4,776 65	0,601 310	355.54.21,9
3	4,820 74	0,609 560	17.17.19,6
4	4,847 73	0,614 350	38.24.36,3
5	4,853 88	0,615 418	59.24.39,2
6	4,837 88	0,612 619	80.25.42,0
7	4,801 21	0,605 938	101.37. 1,0
8	4,748 51	0,595 683	123. 9.32,4
9	4,687 41	0,582 759	145.15.12,9
10	4,627 60	0,568 907	168. 4. 7,3
11	4,579 13	0,556 692	191.39.43,6
12	4,550 34	0,548 954	215.53.48,6
13	4,546 00	0,547 738	240.25.29,4
14	4,566 37	0,553 281	264.47.29,9
15	4,607 41	0,563 934	288.37. 1,9

On terminera par le calcul de

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0 - f\cos(\mathrm{F}-\varepsilon') + \alpha^2 e'^2 \cos^2\varepsilon';$$

les résultats obtenus seront mis à côté de ceux que va nous fournir le *troisième travail*.

7. Nous voulons maintenant déterminer les quantités

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi') + \cos\mathrm{J}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'),\\
\mathrm{H}' &= \sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi') - \cos\mathrm{J}\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'),
\end{aligned}$$

lesquelles figurent dans les composantes de la force perturbatrice en même temps que $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$, et, en calculant les valeurs de $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ par la formule

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r'}{a}\right)^2 - 2\frac{rr'}{a^2}\mathrm{H},$$

on vérifiera, comme on va voir, non seulement les valeurs de $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ et H, mais encore celles de H′.

Reprenons cette expression de H donnée dans l'article 6 :

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}\cos f\cos f' - \mathrm{C}\sin f\cos f' + \mathrm{B}\cos f\sin f' + \mathrm{D}\sin f\sin f'.$$

Il est aisé de voir que H' aura celle-ci :

$$H' = A \sin f \cos f' + C \cos f \cos f' + B \sin f \sin f' - D \cos f \sin f'.$$

Des deux équations ci-dessus on déduit

$$\begin{aligned} H \sin f - H' \cos f &= - C \cos f' + D \sin f', \\ H \cos f + H' \sin f &= A \cos f' + B \sin f'; \end{aligned}$$

en ayant égard aux égalités

$$\begin{aligned} H^2 + H'^2 &= 1 - \sin^2 J \sin^2 (f' + \Pi'), \\ C^2 + D^2 &= 1 - \sin^2 J \cos^2 \Pi, \\ A^2 + B^2 &= 1 - \sin^2 J \sin^2 \Pi, \end{aligned}$$

nous déterminons les deux angles auxiliaires α et β par les deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{-C} = \frac{\cos\alpha}{D} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 J \cos^2 \Pi}}, \\ \frac{\sin\beta}{A} = \frac{\cos\beta}{B} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 J \sin^2 \Pi}}, \end{aligned}$$

et nous posons, η étant un angle auxiliaire,

$$\frac{H}{\cos\eta} = \frac{H'}{\sin\eta} = \sqrt{1 - \sin^2 J \sin^2 (f' + \Pi')}.$$

Observons, en passant, que la quantité $\sin J \sin(f' + \Pi')$ introduite ici intervient dans le calcul de la perturbation perpendiculaire au plan fondamental.

Maintenant, l'angle η sera obtenu avec avantage par l'équation

$$\operatorname{tang}(f - \eta) = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 J \cos^2 \Pi}{1 - \sin^2 J \sin^2 \Pi}} \, \frac{\sin(f' + \alpha)}{\sin(f' + \beta)}.$$

Voici le Tableau des quantités obtenues par ces formules; nous mettons à la fin la valeur de $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ telle qu'elle résulte du deuxième travail; le premier groupe de nombres correspond toujours à $m = 0$, le suivant à $m = 1$:

$$\alpha = 52^\circ 43' 8'',9, \qquad \beta = 142^\circ 41' 11'',6,$$

$$\log \sqrt{\frac{1 - \sin^2 J \cos^2 \Pi}{1 - \sin^2 J \sin^2 \Pi}} = -0,001271.$$

ε.	$\log \sin J \sin(f'+\Pi')$.	$\log H'$.	$\log H$.	$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$.	$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$.
			$m = 0$.		
0	$\bar{2}$,847 531	+ $\bar{1}$,937 872	+ $\bar{1}$,693 580	2,902 48	2,902 49
1	$\bar{2}$,817 140	$\bar{1}$,987 871	$\bar{1}$,349 543	3,841 40	3,841 39
2	$\bar{2}$,775 049	$\bar{1}$,998 516	— $\bar{2}$,756 888	4,840 21	4,840 18
3	$\bar{2}$,717 166	$\bar{1}$,975 873	— $\bar{1}$,505 236	5,821 93	5,821 93
4	$\bar{2}$,636 382	$\bar{1}$,922 743	— $\bar{1}$,736 745	6,717 16	6,717 16
5	$\bar{2}$,519 178	$\bar{1}$,838 146	— $\bar{1}$,859 809	7,470 51	7,470 49
6	$\bar{2}$,359 994	$\bar{1}$,700 819	— $\bar{1}$,936 758	8,088 14	8,088 15
7	$\bar{2}$,498 313	$\bar{2}$,598 778	— $\bar{1}$,999 442	8,780 71	8,780 68
8	$\bar{2}$,847 531	— $\bar{1}$,937 872	— $\bar{1}$,693 580	7,085 74	7,085 73
9	$\bar{2}$,871 924	— $\bar{1}$,934 035	+ $\bar{1}$,704 487	3,000 77	3,000 78
10	$\bar{2}$,856 988	— $\bar{1}$,727 823	+ $\bar{1}$,925 414	1,585 76	1,585 76
11	$\bar{2}$,874 142	— $\bar{1}$,489 962	+ $\bar{1}$,976 860	1,168 68	1,168 69
12	$\bar{2}$,884 761	— $\bar{2}$,827 821	+ $\bar{1}$,997 728	1,019 49	1,019 49
13	$\bar{2}$,887 059	+ $\bar{1}$,285 807	+ $\bar{1}$,990 402	1,125 91	1,125 92
14	$\bar{2}$,881 629	+ $\bar{1}$,656 163	+ $\bar{1}$,948 520	1,491 88	1,491 89
15	$\bar{2}$,868 605	+ $\bar{1}$,836 767	+ $\bar{1}$,859 241	2,098 38	2,098 39
			$m = 1$.		
0	— $\bar{3}$,596 596	— $\bar{1}$,165 087	$\bar{1}$,995 302	0,910 63	0,910 64
1	$\bar{2}$,712 108	$\bar{1}$,939 756	$\bar{1}$,689 761	2,802 13	2,802 12
2	$\bar{2}$,768 710	$\bar{1}$,998 906	— $\bar{2}$,599 143	4,770 20	4,770 18
3	$\bar{2}$,717 138	$\bar{1}$,975 882	— $\bar{1}$,505 162	5,821 71	5,821 71
4	$\bar{2}$,636 381	$\bar{1}$,922 743	— $\bar{1}$,736 745	6,717 16	6,717 16
5	$\bar{2}$,519 124	$\bar{1}$,838 173	— $\bar{1}$,859 785	7,470 31	7,470 31
6	$\bar{2}$,333 405	$\bar{1}$,714 286	— $\bar{1}$,932 037	8,042 72	8,042 75
7	$\bar{3}$,957 848	$\bar{1}$,525 183	— $\bar{1}$,974 114	8,412 11	8,412 12
8	— $\bar{3}$,596 596	$\bar{1}$,165 087	— $\bar{1}$,995 302	8,569 89	8,569 88
9	— $\bar{2}$,230 586	— $\bar{2}$,665 091	— $\bar{1}$,999 472	8,517 84	8,517 84
10	— $\bar{2}$,470 439	— $\bar{1}$,382 085	— $\bar{1}$,986 802	8,265 00	8,265 03
11	— $\bar{2}$,613 486	— $\bar{1}$,638 664	— $\bar{1}$,953 958	7,825 91	7,825 91
12	— $\bar{2}$,709 315	— $\bar{1}$,793 544	— $\bar{1}$,892 997	7,220 20	7,220 18
13	— $\bar{2}$,776 190	— $\bar{1}$,896 470	— $\bar{1}$,787 392	6,473 93	6,473 94
14	— $\bar{2}$,818 138	— $\bar{1}$,965 552	— $\bar{1}$,576 703	5,559 27	5,559 27
15	— $\bar{2}$,772 042	— $\bar{1}$,992 291	+ $\bar{1}$,248 335	3,613 34	3,613 34

8. Toutes les quantités qui entrent dans les composantes de la force perturbatrice étant obtenues et vérifiées, le but du *quatrième travail* est de calculer les valeurs de ces composantes; il faut y mettre un soin particulier.

Ω désignant, suivant les notations de Hansen, la quantité $\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\mathrm{H}\right)$, nous voulons considérer ici (article 30)

$$a\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)=-\frac{m'}{1+m}\left[\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3-\left(\frac{a}{r'}\right)^3\right]\frac{rr'}{a^2}\Pi',$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\quad\frac{m'}{1+m}\left[\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3-\left(\frac{a}{r'}\right)^3\right]\frac{rr'}{a^2}\Pi-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3,$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)=-\frac{m'}{1+m}\left[\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3-\left(\frac{a}{r'}\right)^3\right]\frac{rr'}{a^2}\sin J\sin(f'+\Pi');$$

l'axe des Z est perpendiculaire au plan de l'orbite.

Suivant l'usage, on réduit les seconds membres en secondes d'arc en multipliant m' par $206265''$, et, pour faciliter le développement en série, on ne prend que le huitième des produits.

On trouvera réunis dans un Tableau suivant les résultats relatifs aux trois planètes perturbatrices Jupiter, Saturne et Mars; mais, afin que l'on puisse, si l'on veut, s'assurer de l'exactitude des calculs, il est convenable de mettre sous les yeux les éléments employés, ainsi que les nombres constants utilisés dans la méthode de Hansen.

Héra et Saturne.

Les éléments de Saturne sont tirés des Tables de Le Verrier; on tient compte seulement des variations séculaires et de l'effet des grandes inégalités.

Saturne. — Époque 1878, Janvier 1,0; temps moyen de Paris.

$$\left.\begin{aligned} c' &= 265^\circ.24'.48'',6 \\ \pi' &= 91.21.59,2 \\ \theta' &= 112.35.32,1 \\ i' &= 2.29.35,88 \end{aligned}\right\}\begin{array}{c}\text{Équinoxe}\\ \text{et écliptique moyens}\\ \text{1878, Janvier 1,0.}\end{array}\qquad m'=\frac{1}{3529,6}.$$

$$e' = 0,0545\,3364,$$

$$a' = 9,537\,146,\qquad \log\ = 0,979\,4184,$$

$$\log\mu = \bar{1},178\,3570,\qquad \log\alpha = 0,547\,8030,$$

$$c'-\mu c-360^\circ = -376309'',6.$$

$\Psi = 41^\circ.18'.36'',4,$	$\Phi = 17^\circ.46'.\ 4'',2,$	$J = 3^\circ\,16'\,13'',4.$
$\Pi = 167.\ 0.52,0,$	$\Pi' = 297.27.50,7,$	
$K = -62.29.51,6,$	$\log k = \bar{1},999\,442,$	
$K_1 = -62.34.26,7,$	$\log k_1 = \bar{1},999\,850,$	
$\log A = -\bar{1},811\,879,$	$\log B = -\bar{1},881\,468,$	
$\log C = -\bar{1},880\,565,$	$\log D = -\bar{1},811\,607,$	

$$
\begin{aligned}
P &= 103^\circ.47'.20'',0, & \log p &= 1,352\,448,\\
V &= 229.34.18,8, & \log v &= 0,846\,541,\\
W &= 125.39.\ 2,7, & \log w &= 0,847\,935,\\
W_1 &= 125.52.20,7, & \log w_1 &= 0,847\,031.
\end{aligned}
$$

ε.	γ_0.	log f.	F.
0	13,081 39	0,756 733	239°.57′.35″,6
1	13,223 04	0,799 050	265.46. 2,6
2	13,403 65	0,843 253	288.56.18,1
3	13,596 68	0,882 360	310. 2.17,4
4	13,773 70	0,913 040	329.40.36,0
5	13,908 14	0,933 853	348.21.39,4
6	13,979 14	0,944 165	6.30. 6,4
7	13,974 96	0,943 654	24.27.30,7
8	13,895 27	0,932 138	42.35. 7,4
9	13,751 81	0,909 656	61.16.37,2
10	13,566 83	0,876 755	81. 0.44,1
11	13,369 42	0,835 224	102.23.18,2
12	13,190 59	0,789 440	126. 5. 8,7
13	13,057 96	0,748 185	152.36.32,6
14	12,991 33	0,724 331	181.38.30,1
15	12,999 90	0,727 887	211.30.14,6

Héra et Mars.

Les éléments de Mars sont tirés des Tables de Le Verrier; on tient compte seulement des variations séculaires et de l'effet des grandes inégalités.

Mars. — Époque 1878, Janvier 1,0; temps moyen de Paris.

$$
\begin{aligned}
c' &= 69^\circ.32'.12'',4\\
\pi' &= 333.48.48\\
\theta' &= 48.36.57\\
i' &= 1.51.\ 1,6
\end{aligned}
\left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\\a\\a\end{aligned}}\right\}
\begin{array}{c}\text{Équinoxe}\\ \text{et écliptique moyens}\\ \text{1878, Janvier 1,0.}\end{array}
\qquad m' = \frac{1}{2968300}.
$$

$$
\begin{aligned}
e' &= 0,093\,288,\\
a' &= 1,523\,691, & \log &= 0,182\,8970,\\
\log\mu &= 0,373\,0775, & \log\alpha &= \bar{1},751\,2816,
\end{aligned}
$$

$$c' - \mu c = -310175'',4,$$

$$
\begin{aligned}
\Psi &= 106^\circ.40'.15'', & \Phi &= 19^\circ.11'.27'', & J &= 5^\circ\,37'\,57'',\\
\Pi &= 165.35.29, & \Pi' &= 178.31.36,\\
K &= 178.32.\ 2, & \log k &= 0,000\,00,\\
K_1 &= 178.31.10, & \log k_1 &= \bar{1},997\,91,\\
\log A &= \bar{1},988\,82, & \log B &= -\bar{1},347\,63,\\
\log C &= -\bar{1},350\,20, & \log D &= \bar{1},986\,76,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= 234^\circ\,1'\,44'', & \log p &= \bar{1},629\,12,\\
V &= -13.\ 3.25, & \log v &= 0,047\,20,\\
W &= 112.43.15, & \log w &= 0,050\,69,\\
W_1 &= 113.21.10, & \log w_1 &= 0,048\,62.
\end{aligned}
$$

ε.	γ_0.	$\log f$.	F.
0	1,2615	0,040 11	347°.52'.22"
1	1,2738	0,042 97	10.39.35
2	1,2911	0,045 80	33.20.28
3	1,3117	0,048 82	55.57.54
4	1,3335	0,052 41	78.30.35
5	1,3536	0,056 58	100.53. 1
6	1,3684	0,060 67	123. 0.10
7	1,3748	0,063 48	144.51.12
8	1,3709	0,063 81	166.32. 5
9	1,3569	0,061 07	188.14.12
10	1,3352	0,055 62	210.10.58
11	1,3102	0,048 72	232.32.10
12	1,2865	0,042 26	255.20.27
13	1,2683	0,037 94	278.28.47
14	1,2578	0,036 51	301.44.15
15	1,2558	0,037 61	324.54.14

A cause de la faible masse de Mars, les Tables à cinq décimales étaient, ici, plus que suffisantes.

Les valeurs particulières des quantités considérées sont réunies dans le Tableau suivant; on aperçoit d'un coup d'œil ce qui se rapporte à chaque planète; les colonnes Σ désignent la somme des trois colonnes précédentes : ce sont les composantes dont nous déduirons les perturbations.

On remarquera la faible influence de Mars : elle n'affecte que les centièmes de seconde; il sera permis, le plus souvent, de la négliger entièrement, et aucune déviation systématique ne sera à redouter.

L'action de Saturne est plus sensible; elle se manifeste nettement après un ou deux ans. Dès qu'on voudra établir une théorie un peu précise, il sera nécessaire de faire entrer en ligne de compte cette action perturbatrice.

Il sera enfin avantageux de substituer aux calculs rigoureux, tels qu'on les a faits pour Saturne, des calculs approchés : l'excentricité de l'orbite, son inclinaison pourront être négligées.

	$\frac{1}{8}a\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$.				$\frac{1}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$.				$\frac{1}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$.			
ε.	♃.	♄.	♂.	Σ.	♃.	♄.	♂.	Σ.	♃.	♄.	♂.	Σ.
						$m = 0$.						
0	− 2″,655	+222	+21	− 2″,412	− 2″,704	+311	− 9	− 2″,402	−0″,216	+ 5	+2	−0″,209
1	+ 0,120	− 17	+16	+ 0,119	− 2,833	+434	−28	− 2,427	+0,008	+ 8	+1	+0,017
2	+ 1,983	−259	− 1	+ 1,723	− 1,943	+309	−60	− 1,694	+0,119	+ 9	0	+0,128
3	+ 3,027	−308	+ 4	+ 2,723	− 0,620	+ 60	−64	− 0,624	+0,167	+ 7	+2	+0,176
4	+ 3,400	−185	− 7	+ 3,208	+ 0,806	−124	−32	+ 0,650	+0,176	+ 4	−1	+0,179
5	+ 3,245	− 9	−16	+ 3,220	+ 2,135	−176	−17	+ 1,942	+0,156	0	0	+0,156
6	+ 2,612	+137	−22	+ 2,727	+ 3,307	−123	− 7	+ 3,177	+0,119	− 4	+1	+0,116
7	+ 0,216	+216	− 1	+ 0,431	+ 4,355	+ 26	−41	+ 4,340	+0,172	− 6	0	+0,166
8	− 3,601	+111	−26	− 3,516	+ 0,537	+219	− 2	+ 0,754	+0,293	− 2	+3	+0,294
9	+ 3,127	− 91	+ 3	+ 3,039	− 3,592	+218	+31	− 3,343	−0,271	+ 3	−1	−0,269
10	+10,537	−176	−29	+10,332	+ 2,906	+118	+ 9	+ 3,033	−1,419	+ 3	+1	−1,415
11	+10,475	−184	−16	+10,275	+11,517	+ 11	+25	+11,553	−2,537	+ 2	−1	−2,536
12	+ 2,785	−126	+ 5	+ 2,674	+17,477	− 91	+25	+17,411	−3,187	0	−1	−3,188
13	− 6,502	− 2	+13	− 6,491	+13,597	−145	+15	+13,467	−2,596	0	−1	−2,597
14	− 8,741	+158	+17	− 8,566	+ 5,118	−102	+ 8	+ 5,024	−1,469	0	0	−1,469
15	− 6,105	+272	+19	− 5,814	− 0,518	+ 69	+ 1	− 0,448	−0,657	+ 2	0	−0,655
						$m = 1$.						
0	+ 6,107	+270	− 5	+ 6,372	+17,321	+ 12	−71	+17,262	+0,165	+12	−1	+0,176
1	− 2,733	+ 71	−18	− 2,680	− 2,965	+435	−20	− 2,550	−0,162	+13	−2	−0,151
2	+ 1,906	−256	− 3	+ 1,647	− 2,026	+315	−68	− 1,779	+0,112	+ 9	0	+0,121
3	+ 3,027	−308	+ 5	+ 2,724	− 0,620	+ 60	−64	− 0,624	+0,167	+ 7	+2	+0,176
4	+ 3,400	−185	− 7	+ 3,208	+ 0,806	−124	−32	+ 0,650	+0,176	+ 4	−1	+0,179
5	+ 3,245	− 9	−16	+ 3,220	+ 2,135	−176	−17	+ 1,942	+0,156	0	0	+0,156
6	+ 2,692	+135	−22	+ 2,805	+ 3,245	−125	− 4	+ 3,116	+0,112	− 3	+1	+0,110
7	+ 1,856	+212	−23	+ 2,045	+ 4,059	− 19	+13	+ 4,053	+0,050	− 7	+3	+0,046
8	+ 0,838	+218	− 7	+ 1,049	+ 4,527	+ 98	+30	+ 4,655	−0,023	− 9	+1	−0,031
9	− 0,267	+166	+19	− 0,082	+ 4,624	+195	+24	+ 4,843	−0,098	−12	−2	−0,112
10	− 1,363	+ 74	+25	− 1,264	+ 4,333	+250	+ 2	+ 4,585	−0,167	−13	−3	−0,183
11	− 2,348	− 32	+19	− 2,361	+ 3,663	+252	−12	+ 3,903	−0,222	−14	−1	−0,237
12	− 3,107	−127	+11	− 3,223	+ 2,640	+199	−24	+ 2,815	−0,256	−13	0	−0,269
13	− 3,506	−184	− 1	− 3,691	+ 1,325	+103	−44	+ 1,384	−0,266	−12	0	−0,278
14	− 3,378	−178	− 5	− 3,561	− 0,291	− 18	−72	− 0,381	−0,241	− 9	−3	−0,253
15	− 0,702	− 51	+19	− 0,734	− 3,201	−141	−10	− 3,352	−0,042	− 2	+2	−0,042

Il faut entendre que les nombres inscrits dans les colonnes de Saturne et de Mars désignent des millièmes de seconde.

9. Arrivé à ce point, si l'on compare le travail dépensé avec celui qu'aurait demandé l'application des méthodes habituelles, on voit peu de différence pour la longueur des calculs, en tant que des deux côtés il y a le même nombre de

valeurs particulières à calculer. On sait que, dans les méthodes habituelles, les coordonnées des planètes perturbatrices sont calculées, en moyenne, de 30 en 30 jours; on peut dire, si l'on veut, que l'argument adopté est l'anomalie moyenne de la planète troublée et que l'on considère les valeurs successives qu'elle prend de 30 en 30 jours.

La méthode actuelle fait, comme la précédente, une certaine hypothèse sur l'écart des arguments, hypothèse qui peut toutefois être évitée par l'usage de la méthode de Le Verrier; mais, au lieu que l'argument soit l'anomalie moyenne, c'est l'anomalie excentrique préférable à plusieurs égards. Quoi qu'il en soit, en observant que le nombre des valeurs particulières à calculer n'atteint pas 30 et que le temps de révolution est à peu près de 1600 jours, l'avantage du nouveau procédé, toutes choses égales d'ailleurs, ne peut paraître douteux.

10. Pour obtenir par la méthode actuelle les perturbations, il reste à exécuter un certain nombre d'opérations spéciales qu'il est convenable d'expliquer plus en détail.

Il s'agit : 1° de déduire des valeurs particulières les développements trigonométriques correspondants; 2° de former les équations différentielles pour les perturbations; 3° enfin de les intégrer et de déterminer les arbitraires qu'elles renferment au moyen des observations.

Pour déduire les développements trigonométriques des valeurs particulières, on se servira de formules bien connues (article **65**); je les transcris ici.

Soit le développement

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\varepsilon + c_2 \cos 2\varepsilon + \ldots \\ + s_1 \sin\varepsilon + s_2 \sin 2\varepsilon + \ldots, \end{aligned}$$

dont il faut calculer les coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots$ au moyen des valeurs $\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{15}$ pour $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 22^\circ 30'$, $\varepsilon_2 = 45^\circ$, ...

On forme d'abord

$$\begin{array}{llll} (0,8) = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_8, & \left(\frac{0}{8}\right) = \mathrm{Y}_0 - \mathrm{Y}_8, & (0,4) = (0,8) + (4,12), & (0,2) = (0,4) + (2,6), \\ (1,9) = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_9, & \left(\frac{1}{9}\right) = \mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y}_9, & (1,5) = (1,9) + (5,13), & (1,3) = (1,5) + (3,7), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & (2,6) = (2,10) + (6,14), & \\ (7,15) = \mathrm{Y}_7 + \mathrm{Y}_{15}, & \left(\frac{7}{15}\right) = \mathrm{Y}_7 - \mathrm{Y}_{15}, & (3,7) = (3,11) + (7,15). & \end{array}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
4(c_0+2c_8) &= (0,2\ ),\\
4(c_0-2c_8) &= (1,3\ ),\\
4(c_2+\ c_6) &= (0,8\ )-(4,12),\\
4(c_2-\ c_6) &= \{[(1,9\ )-(5,13)]-[(3,11)-(7,15)]\}\cos 45^\circ,\\
8c_4 &= (0,4\ )-(2,6\ ),\\
4(s_2+\ s_6) &= \{[(1,9\ )-(5,13)]+[(3,11)-(7,15)]\}\cos 45^\circ,\\
4(s_2-\ s_6) &= (2,10)-(6,14),\\
8s_4 &= (1,5\ )-(3,7\ ),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4(c_1+\ c_7) &= \left(\tfrac{0}{8}\right)+\left[\left(\tfrac{2}{10}\right)-\left(\tfrac{6}{14}\right)\right]\cos 45^\circ,\\
4(c_1-\ c_7) &= \left[\left(\tfrac{1}{9}\right)-\left(\tfrac{7}{15}\right)\right]\cos 22^\circ,5+\left[\left(\tfrac{3}{11}\right)-\left(\tfrac{5}{13}\right)\right]\sin 22^\circ,5,\\
4(c_3+\ c_5) &= \left(\tfrac{0}{8}\right)-\left[\left(\tfrac{2}{10}\right)-\left(\tfrac{6}{14}\right)\right]\cos 45^\circ,\\
4(c_3-\ c_5) &= \left[\left(\tfrac{1}{9}\right)-\left(\tfrac{7}{15}\right)\right]\sin 22^\circ,5-\left[\left(\tfrac{3}{11}\right)-\left(\tfrac{5}{13}\right)\right]\cos 22^\circ,5,\\
4(s_1+\ s_7) &= \left[\left(\tfrac{1}{9}\right)+\left(\tfrac{7}{15}\right)\right]\sin 22^\circ,5+\left[\left(\tfrac{3}{11}\right)+\left(\tfrac{5}{13}\right)\right]\cos 22^\circ,5,\\
4(s_1-\ s_7) &= \left[\left(\tfrac{2}{10}\right)+\left(\tfrac{6}{14}\right)\right]\cos 45^\circ+\left(\tfrac{4}{12}\right),\\
4(s_3+\ s_5) &= \left[\left(\tfrac{1}{9}\right)+\left(\tfrac{7}{15}\right)\right]\cos 22^\circ,5-\left[\left(\tfrac{3}{11}\right)+\left(\tfrac{5}{13}\right)\right]\sin 22^\circ,5,\\
4(s_3-\ s_5) &= \left[\left(\tfrac{2}{10}\right)+\left(\tfrac{6}{14}\right)\right]\cos 45^\circ-\left(\tfrac{4}{12}\right).
\end{aligned}
$$

C'est pour éviter après coup les divisions par 8 qu'on a pris le huitième des valeurs particulières.

11. Il s'agit, en second lieu, de construire les équations différentielles propres à déterminer les perturbations des coordonnées adoptées, celles de Hansen, savoir la perturbation $n\delta z$ de l'anomalie moyenne, la perturbation ν du logarithme du rayon vecteur r, calculé lui-même avec l'anomalie moyenne corrigée, et enfin la perturbation $\frac{u}{\cos i}$ perpendiculaire au plan de l'orbite.

Il ne sera pas superflu de donner quelques indications à ce sujet.

Si l'on se reporte à l'article 47 du second Livre de la *Mécanique céleste*, on voit que Laplace, partant des éléments constants et des formules du mouvement elliptique, obtient le rayon vecteur troublé en substituant à la variable $u = e\cos(nt+\varepsilon-\pi)$, dont le rayon r peut être considéré comme fonction, une valeur convenable; on peut dire, en d'autres termes, qu'il met à la place de t une fonction de t telle que le rayon vecteur, calculé, comme à l'ordinaire, avec les éléments constants, soit le rayon troublé. Or, ce que Laplace a fait ainsi pour le rayon vecteur, Hansen, avec plus d'avantage (¹), le fait pour la

(¹) M. Adams, *Mémoire sur Uranus*, article 9 et Appendice. *Voir* la traduction de ce Mémoire célèbre insérée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1876).

longitude dans l'orbite ou, suivant l'expression de Laplace, l'intégrale v des angles compris entre les rayons vecteurs successifs.

Il suffit pour cela de mettre à la place de l'anomalie moyenne $n_0 t + c_0$ une valeur différente $n_0 t + c_0 + n_0 \delta z$, δz étant une fonction de t convenablement choisie. Le rayon troublé pourra toujours être obtenu en multipliant le rayon déduit des mêmes formules par un facteur tel que $1 + \nu$.

Maintenant, les termes du second ordre étant négligés, on observe que le lieu du corps troublé dans l'orbite actuelle et celui que l'on obtiendrait en portant dans le plan de l'orbite initiale pour $t = 0$, à partir de l'origine des angles, la longitude calculée sont symétriquement placés à égale distance de l'intersection des deux plans. Cette relation géométrique, traduite analytiquement, conduit aux formules de transformation de Hansen (article 9); seulement la déduction se simplifie beaucoup, parce que les termes du second ordre sont négligés.

Soient θ_0 et i_0 la longitude du nœud et l'inclinaison de l'orbite initiale, v l'intégrale des angles dont il a été parlé, laquelle doit, on l'a vu, se calculer au moyen de ces relations dans lesquelles $\bar{\varepsilon}$, $\bar{r}$ et $\bar{f}$ sont les quantités déduites de l'anomalie moyenne corrigée :

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0 \delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon},$$
$$\bar{r} \cos \bar{f} = a_0 \cos \bar{\varepsilon} - a_0 e_0,$$
$$\bar{r} \sin \bar{f} = a_0 \cos \varphi_0 \sin \bar{\varepsilon},$$
$$v = \bar{f} + \varpi_0.$$

En prenant pour origine des angles, dans le plan de l'orbite initiale, la ligne faisant avec la ligne des nœuds l'angle θ_0, et considérant sur une surface sphérique de rayon égal à 1 le lieu troublé (coordonnées x, y, z, longitude l, latitude b), et, dans l'orbite initiale, la direction faisant l'angle v avec la ligne origine (x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de la trace de cette direction sur la sphère), on aura, aux termes près du second ordre,

$$\cos b \cos (l - \theta_0) = \cos (v - \theta_0),$$
$$\cos b \sin (l - \theta_0) = \cos i_0 \sin (v - \theta_0) - \operatorname{tang} i_0 s,$$
$$\sin b = \sin i_0 \sin (v - \theta_0) + s,$$

en faisant, avec Hansen, $z - z_0 = s$.

On a, de plus,

$$r = \bar{r}(1 + \nu).$$

12. Il s'agit d'obtenir les valeurs des trois coordonnées δz, ν et s ou, si l'on veut, $\dfrac{u}{\cos i_0}$, en posant $u = \dfrac{\bar{r}}{a_0}s$.

La détermination de δz résulte naturellement de la condition posée que $v = \bar{f} + \pi_0$ doit être l'intégrale des angles compris entre les rayons vecteurs successifs.

De l'équation bien connue

$$r^2\,df = na^2\sqrt{1-e^2}\,dt,$$

et de son analogue, déduite des équations qui définissent v,

$$\bar{r}^2\,d\bar{f} = n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2}\,dz,$$

on déduit, à cause de $d\bar{f} = df$, et en adoptant les notations $h = \dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}}$, $h_0 = \dfrac{n_0 a_0}{\sqrt{1-e_0^2}}$, $(n_0^2 a_0^3 = n^2 a^3)$,

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^2 \frac{h_0}{h},$$

puis, en séparant les termes des divers ordres et posant $W = -1 - \dfrac{h_0}{h} + 2\dfrac{h_0}{h}\dfrac{\bar{r}}{r}$,

$$\frac{dz}{dt} = 1 + W + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}.$$

Que l'on écrive maintenant

$$\frac{\bar{r}}{r} = \bar{r}\,\frac{1+e\cos f}{a(1-e^2)} = \bar{r}\,\frac{1+e\cos(\bar{f}+\pi_0-\chi)}{a(1-e^2)},$$

en ayant égard à l'égalité $f + \chi = \bar{f} + \pi_0$, χ étant, suivant la théorie de la variation des arbitraires, la longitude du périhélie, l'expression $2\dfrac{h_0}{h}\dfrac{\bar{r}}{r}$ pourra être transformée ainsi :

$$2\frac{h_0}{h}\frac{\bar{r}}{r} = 2\frac{h}{h_0} + 2\frac{h}{h_0\cos^2\varphi_0}[e\cos(\chi-\pi_0) - e_0](\cos\bar{\varepsilon} - e_0)$$
$$+ 2\frac{h}{h_0\cos^2\varphi_0}\; e\sin(\chi-\pi_0)\cos\varphi_0\sin\bar{\varepsilon},$$

de sorte que, en faisant

$$\Xi = -1 - \frac{h_0}{h} + 2\frac{h}{h_0},$$

$$\Upsilon = \frac{2h}{h_0 \cos^2\varphi_0}[e\cos(\chi - \pi_0) - e_0],$$

$$\Psi = \frac{2h}{h_0 \cos^2\varphi_0}\, e\sin(\chi - \pi_0),$$

on aura non seulement

$$2\frac{h_0}{h}\frac{\bar{r}}{r} = 2\frac{h}{h_0} + \Upsilon(\cos\bar{\varepsilon} - e_0) + \Psi\cos\varphi_0\sin\bar{\varepsilon},$$

mais encore

$$W = \Xi + \Upsilon(\cos\bar{\varepsilon} - e_0) + \Psi\cos\varphi_0\sin\bar{\varepsilon}.$$

Si, dans l'avant-dernière équation, on met $\frac{1}{1+\nu}$ à la place de $\frac{\bar{r}}{r}$, et si on la différentie, les éléments seront traités comme des constantes; il viendra

$$-2\frac{h_0}{h}\frac{1}{(1+\nu)^2}d\nu = (-\Upsilon\sin\bar{\varepsilon} + \Psi\cos\varphi_0\cos\bar{\varepsilon})\,d\bar{\varepsilon},$$

d'où, à cause de $\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h}\frac{1}{(1+\nu)^2}$,

$$2\frac{d\nu}{dt} = (\Upsilon\sin\bar{\varepsilon} - \Psi\cos\varphi_0\cos\bar{\varepsilon})\frac{d\bar{\varepsilon}}{dz},$$

ce que l'on peut écrire

$$2\frac{d\nu}{dt} = -\left(\frac{dW}{dz}\right).$$

Pour déterminer les quantités Ξ, Υ, Ψ, on compare à cette expression de l'accroissement de W dû à la fonction perturbatrice

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{d\Upsilon}{dt}(\cos\bar{\varepsilon} - e_0) + \frac{d\Psi}{dt}\cos\varphi_0\sin\bar{\varepsilon}$$

celle qu'on obtient avec l'équation

$$W = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h}{h_0 a_0 \cos^2\varphi_0}\bar{r}[1 + e\cos(\bar{f} + \pi_0 - \chi)];$$

mais, pour éviter que les termes en $\bar{r}$ et $\bar{f}$ se réduisent avec ceux qu'amènera la dérivation, nous mettrons ρ et ω à la place de $\bar{r}$ et $\bar{f}$.

Prenant donc pour W

$$W = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h}{h_0 a_0 \cos^2\varphi_0}\rho[1 + e\cos(\omega + \pi_0 - \chi)],$$

il y aura à faire varier les constantes et à remplacer les dérivées secondes par leurs accroissements dus à la fonction perturbatrice, savoir :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} \quad \text{par} \quad h^2(1+m)\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right),$$
$$\frac{d^2 r}{dt^2} \quad \text{par} \quad h^2(1+m) \quad \left(\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

En ayant égard aux deux égalités

$$h = \frac{h^2(1+m)}{r^2\dfrac{dv}{dt}}, \quad he\cos(\omega + \pi_0 - \chi) = \left(r\frac{dv}{dt} - h\right)\cos(\bar{f} - \omega) + \frac{dr}{dt}\sin(\bar{f} - \omega),$$

dont la première est bien connue, et la seconde se vérifie par l'accord des coefficients de $\cos\omega$ et $\sin\omega$, on parvient à cette nouvelle expression de $\frac{dW}{dt}$:

$$\frac{dW}{dt} = h_0\left\{2\frac{\rho}{r}\cos(\bar{f} - \omega) - 1 + 2\frac{h^2\rho}{h_0^2 a_0\cos^2\varphi_0}[\cos(\bar{f} - \omega) - 1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$
$$+ 2h_0\frac{\rho}{r}\sin(\bar{f} - \omega)r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

La première était

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{d\Upsilon}{dt}\frac{\rho\cos\omega}{a_0} + \frac{d\Psi}{dt}\frac{\rho\sin\omega}{a_0}.$$

Il suffit de comparer les coefficients de $\frac{\rho\cos\omega}{a_0}$, $\frac{\rho\sin\omega}{a_0}$ et les termes indépendants pour avoir, tout signe distinctif entre les éléments pouvant être négligé,

$$\frac{d\Xi}{dt} = -3h\left(\frac{d\Omega}{dv}\right),$$
$$\frac{d\Upsilon}{dt} = 2h\left\{\left[\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\cos f + \frac{e}{\cos^2\varphi}\right]\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + \frac{a}{r}\sin f\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\},$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = 2h\left[\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\sin f\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) - \frac{a}{r}\cos f\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right] \text{ [1]}.$$

---

[1] Ce sont les formules données par Hansen dans son Mémoire couronné par l'Académie des Sciences.

Il y a encore à calculer la valeur de la coordonnée $\frac{u}{\cos i_0}$ perpendiculaire au plan de l'orbite. En revenant à sa définition et à la construction géométrique de l'article précédent, on voit que l'on peut donner à cette quantité une forme telle que

$$q\frac{\bar{r}\sin\bar{f}}{a_0} - p\frac{\bar{r}\cos\bar{f}}{a_0},$$

p et q ne dépendant que des éléments osculateurs. Prend-on, comme on l'a déjà fait, l'accroissement dû à la fonction perturbatrice, en ayant toujours la précaution de mettre ρ et ω à la place de $\bar{r}$ et $\bar{f}$, on aura cette première expression

$$dq\frac{\rho\sin\omega}{a_0} - dp\frac{\rho\cos\omega}{a_0}.$$

D'une autre manière, à cause de la force perturbatrice, le plan de l'orbite actuelle tourne pendant l'instant dt autour du rayon vecteur, et la rotation élémentaire est $hr\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)dt$ (1); donc le point de l'orbite dont la position est définie par ρ, ω décrira le petit arc

$$\rho\sin(\omega - f)\,hr\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)dt.$$

En égalant les coefficients de $\rho\sin\omega$ et $\rho\cos\omega$ dans la première expression et la précédente divisée par a_0, on trouvera, avec une approximation suffisante,

$$\frac{dq}{dt} = hr\cos f\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right),$$
$$\frac{dp}{dt} = hr\sin f\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right).$$

Telles sont les principales formules de la théorie des perturbations donnée

---

(1) En effet, la composante $mk^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ de la force perturbatrice, qui seule peut déplacer le plan de l'orbite, accroît la quantité de mouvement mv de $mdv = F\,dt = mk^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)dt$. Transporte-t-on, comme des forces, à l'origine, la quantité de mouvement mv et le petit accroissement, l'axe du couple résultant, normal à la nouvelle position du plan de l'orbite, résulte de la composition des deux axes perpendiculaires $m\,na^2\sqrt{1-e^2} = m\frac{k^2(1+m)}{h}$ et $m\,k^2(1+m)\,r\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)dt$, et leur rapport $hr\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)dt$ mesure l'angle de la rotation.

par Hansen. Leur nature simple, on le voit bien, a paru toutefois artificielle pendant longtemps. Il n'était pas hors de propos de les présenter d'une manière succincte.

13. Comme l'argument adopté est l'anomalie excentrique, il convient de transformer les coefficients des dérivées partielles; ils s'expriment sous forme finie au moyen de cette anomalie, et cette circonstance facilite les multiplications.

Il faut ensuite exécuter une première intégration pour obtenir Ξ, Υ, Ψ, p, q, puis de nouveau multiplier par $\sin\varepsilon$ ou $\cos\varepsilon$. Or nous voulons ramener tous les calculs à ces deux types élémentaires

$$F_1 = \cos\varepsilon \int F \sin\varepsilon\, d\varepsilon - \sin\varepsilon \int F \cos\varepsilon\, d\varepsilon, \quad F_2 = \cos\varepsilon \int F \cos\varepsilon\, d\varepsilon + \sin\varepsilon \int F \sin\varepsilon\, d\varepsilon,$$

où l'on suppose

$$F = \Sigma A \frac{\sin}{\cos}(m\varepsilon + \alpha) = \Sigma Q.$$

Les valeurs des combinaisons ci-dessus sont bien connues : si m est différent de l'unité, en désignant par Q' la dérivée $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, on a

$$F_1 = \Sigma \frac{Q}{m^2 - 1}, \quad F_2 = \Sigma \frac{-Q'}{m^2 - 1},$$

et, pour le terme spécial où m est l'unité,

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon Q' - \tfrac{1}{1}Q, \quad F_2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon Q - \tfrac{1}{4}Q'.$$

Pour faire usage de ce procédé de calcul, les dérivées $\frac{d\Upsilon}{d\varepsilon}$ et $\cos\varphi \frac{d\Psi}{d\varepsilon}$ sont écrites ainsi :

$$\frac{d\Upsilon}{d\varepsilon} = 2U\cos\varepsilon + 2V\sin\varepsilon, \quad \cos\varphi \frac{d\Psi}{d\varepsilon} = 2U\sin\varepsilon - 2V\cos\varepsilon,$$

en posant, pour abréger,

$$U = \left(\frac{\cos\varphi\, a}{r} + \frac{r}{a\cos\varphi}\right) a \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + e\sin\varepsilon\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dr}\right),$$

$$V = ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) - e\sin\varepsilon \frac{a}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right).$$

Ces deux quantités étant développées par les quadratures mécaniques, on forme les deux combinaisons

$$\Upsilon \sin \varepsilon - \cos\varphi \Psi \cos\varepsilon = -2U_1 + 2V_2,$$
$$\Upsilon \cos\varepsilon + \cos\varphi \Psi \sin \varepsilon = \quad 2U_2 + 2V_1;$$

la première se présente dans le calcul de ν d'après la formule

$$2\nu = \int (\Upsilon \sin\varepsilon - \cos\varphi \Psi \cos\varepsilon) d\varepsilon,$$

et la seconde dans le calcul de $n\delta z$:

$$n\delta z = \int [\Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \cos\varphi \Psi \sin\varepsilon + \Xi](1 - e\cos\varepsilon) d\varepsilon.$$

Mentionnons encore les deux relations suivantes : l'une,

$$-\frac{2}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon} = 2(1 - e\cos\varepsilon)\frac{a}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = U(1 - e\cos\varepsilon) - eV\sin\varepsilon,$$

se déduit aisément des équations posées plus haut; l'autre,

$$\Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \cos\varphi \Psi \sin\varepsilon + \Xi = -2\nu - \tfrac{1}{3}\Xi,$$

peut se vérifier par la différentiation. Il sera fait usage, dans un instant, de ces deux relations.

On peut appliquer le même procédé de calcul à la coordonnée $\frac{u}{\cos i}$ en adjoignant à cette expression l'expression $\frac{u_1}{\cos i}\left(u_1 = \frac{du}{d\varepsilon}\right)$.

On aura en effet, d'après les équations qui déterminent p et q, savoir

$$\cos\varphi\frac{dq}{d\varepsilon} = (\cos\varepsilon - e)\, ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right),$$
$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \qquad \sin\varepsilon\, ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right),$$

les deux formules suivantes :

$$\frac{u}{\cos i} = \sin\varepsilon \int ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos\varepsilon d\varepsilon - \cos\varepsilon \int ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin\varepsilon d\varepsilon$$
$$- e\sin\varepsilon \int ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) d\varepsilon + e\int \sin\varepsilon\, ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) d\varepsilon,$$

$$\frac{u_1}{\cos i} = \cos\varepsilon \int ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos\varepsilon d\varepsilon + \sin\varepsilon \int ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin\varepsilon d\varepsilon$$
$$- e\cos\varepsilon \int ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) d\varepsilon,$$

où les premières lignes représentent les résultats de l'application des deux opérations indiquées plus haut pour le développement de $ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$.

14. Mais toutes ces transformations, si elles donnent le moyen de parvenir plus rapidement au but proposé, n'ont pas pour effet d'augmenter la convergence. C'est pourquoi il convient d'attacher une grande importance aux remarques présentées par M. Gyldén dans le Mémoire déjà cité, lesquelles permettent d'augmenter notablement la convergence des développements.

On a vu dans l'Introduction que le point de départ était l'expression trigonométrique convergente de l'arc entre deux limites écartées de π et que cette représentation était, de plus, indéterminée. En partant de là, M. Gyldén montre comment on peut obtenir une expression trigonométrique $\sigma(\varepsilon)$ qui, égale à l'unité entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, devienne nulle pour une valeur donnée de ε en dehors des limites.

La multiplication d'un développement trigonométrique par un tel facteur ne change pas la valeur du développement; mais la nouvelle expression peut, on le comprend, être plus convergente si le facteur $\sigma(\varepsilon)$ est convenablement choisi.

L'examen des valeurs particulières sur lesquelles on doit opérer pour obtenir les développements montre que, dans cet intervalle, il y a avantage à ce que le facteur $\sigma(\varepsilon)$, appelé par M. Gyldén *facteur de séparation*, soit nul pour $\varepsilon = \pi$; on voit, de plus, que, dans l'intervalle suivant $\left(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$, le facteur le plus convenable sera $\sigma(\pi - \varepsilon)$. Cela suit du Tableau des valeurs de Y_0 et Y_1.

Il suffira de multiplier les valeurs particulières par les valeurs correspondantes du facteur de séparation. Comme on a $\sigma(\pi + \varepsilon) = \sigma(\pi - \varepsilon)$ et $\sigma(\pi) = 0$, les trois valeurs distinctes de $\sigma(\varepsilon)$ sont celles-ci :

$$\log \sigma_5 = \bar{1},999\,311, \quad \log \sigma_6 = \bar{1},928\,370, \quad \log \sigma_7 = \bar{1},391\,739,$$

l'indice indiquant le rang de la valeur de ε correspondante.

15. Nous revenons maintenant aux nombres contenus dans le Tableau, article 8. Il s'agit d'exécuter sur eux les diverses opérations particulières qui viennent d'être expliquées : c'est ce qui va être fait maintenant

Des nombres contenus dans le Tableau de l'article 8, on déduit les valeurs particulières de

$$\tfrac{1}{8}\sigma U, \quad \tfrac{1}{8}\sigma V, \quad \frac{1}{8}\left(-\frac{\sigma}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon}\right), \quad \frac{\sigma}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right),$$

au moyen des formules

$$\tfrac{1}{8}\sigma\mathrm{U} = \left(\frac{\cos\varphi\, a}{r} + \frac{r}{a\cos\varphi}\right)\frac{\sigma a}{8}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + e\sin\varepsilon\,\frac{a}{r}\,\frac{\sigma}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right),$$

$$\tfrac{1}{8}\sigma\mathrm{V} = \frac{\sigma}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) - \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\,\frac{\sigma a}{8}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right),$$

$$\frac{1}{8}\left(-\frac{\sigma}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon}\right) = \frac{r}{a\cos\varphi}\,\frac{\sigma a}{8}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right),\quad \frac{\sigma}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \frac{\sigma}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right).$$

Ce calcul est vérifié au moyen de la relation suivante (article 13) .

$$-\frac{2}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon} = \mathrm{U}(1 - e\cos\varepsilon) - e\mathrm{V}\sin\varepsilon;$$

mais il convient d'observer que la petitesse de e n'assure pas complètement le calcul à l'égard de V.

Les valeurs particulières des quantités à développer étant obtenues et vérifiées, on exécute les développements d'après les formules de l'article 10; la relation qui vient d'être donnée sert à éviter les erreurs; les deux expressions de $-\frac{1}{3}\sigma\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ s'accordent jusque dans les millièmes de seconde. Après cela, on applique aux développements $\sigma\mathrm{U}$, $\sigma\mathrm{V}$ les opérations mentionnées à l'article 13, en ajoutant toutefois un facteur 2, parce qu'il est préférable de considérer $2\sigma\mathrm{U}$ et $2\sigma\mathrm{V}$. On aura ensuite

$$\Upsilon\sin\varepsilon - \cos\varphi\,\Psi\cos\varepsilon = -2(\sigma\mathrm{U})_1 + 2(\sigma\mathrm{V})_2,$$

$$\Upsilon\cos\varepsilon + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon = 2(\sigma\mathrm{U})_2 + 2(\sigma\mathrm{V})_1.$$

Les deux Tableaux suivants donnent, d'une part, les nouvelles valeurs particulières, d'autre part, les combinaisons précédentes; elles s'obtiennent avec une remarquable facilité. Il est certain que les nouvelles valeurs particulières pourraient être obtenues directement sans passer par l'intermédiaire des anciennes. Mais en même temps il faudrait augmenter le nombre des quantités auxiliaires; une certaine complication en résulterait, et, pour cette raison, il a semblé peu utile d'avoir recours à de nouvelles formules.

$\frac{1}{8}\sigma$U.		$\frac{1}{8}\sigma$V.		$\frac{\sigma}{8}\left(-\frac{1}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon}\right)$.		$\frac{\sigma}{8}ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$.	
$m=0$.	$m=1$.	$m=0$.	$m=1$.	$m=0$.	$m=1$.	$m=0$.	$m=1$.
− 4″,839	0″,000	− 2″,402	0″,000	− 2″,229	0″,000	−0″,209	0″,000
+ 0,160	−1,345	− 2,431	−0,609	+ 0,111	−0,614	+0,017	−0,037
+ 3,351	+2,708	− 1,789	−1,587	+ 1,632	+1,323	+0,128	+0,103
+ 5,401	+5,394	− 0,822	−0,821	+ 2,649	+2,646	+0,176	+0,176
+ 6,467	+6,467	+ 0,397	+0,397	+ 3,218	+3,218	+0,179	+0,179
+ 6,570	+6,580	+ 1,705	+1,707	+ 3,322	+3,327	+0,156	+0,156
+ 4,774	+5,783	+ 2,565	+2,960	+ 2,449	+2,970	+0,098	+0,109
+ 0,243	+4,215	+ 1,067	+3,991	+ 0,114	+2,220	+0,041	+0,046
0,000	+2,105	0,000	+4,655	0,000	+1,135	0,000	−0,032
+ 1,525	−0,300	− 0,801	+4,840	+ 0,806	−0,088	−0,066	−0,112
+17,415	−2,773	+ 3,061	+4,513	+ 9,277	−1,338	−1,200	−0,183
+19,715	−5,000	+12,283	+3,731	+10,600	−2,440	−2,532	−0,237
+ 3,979	−6,667	+17,622	+2,561	+ 2,682	−3,233	−3,188	−0,269
−13,995	−7,476	+12,995	+1,113	− 6,315	−3,585	−2,597	−0,278
−17,451	−6,029	+ 4,546	−0,491	− 8,115	−2,861	−1,469	−0,215
−11,642	−0,336	− 0,623	−0,831	− 5,409	−0,168	−0,655	−0,010

Il paraît superflu de présenter un exemple pour le calcul des développements d'après les valeurs particulières. Après quelques applications, on apprend à tirer le meilleur parti du papier dont on dispose. Il ne faut pas plus d'un quart d'heure pour trouver les coefficients d'un développement.

Les calculs qu'il reste à exécuter demandent, dans deux ou trois circonstances, qu'on multiplie un développement par les quantités $1 - e\cos\varepsilon$, $e\sin\varepsilon$ ou $e\cos\varepsilon$. Ces produits s'obtiennent facilement en multipliant d'abord les coefficients du développement par la moitié du coefficient de chaque terme en $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}$ du multiplicateur et remplaçant ensuite les doubles produits par les sommes correspondantes.

Quant aux deux combinaisons

$$\Upsilon\sin\varepsilon - \cos\varphi\,\Psi\cos\varepsilon,$$
$$\Upsilon\cos\varepsilon + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon,$$

il convient de présenter le Tableau complet des calculs. On a seulement omis le facteur σ, afin de simplifier l'écriture.

U.	V.	Termes.	$2U_1$.	$2V_2$.	$2V_2 - 2U_1$.	Termes.	$2U_2$.	$2V_1$.	$2U_2 + 2V_1$.
				$m = 0$.					
+10″,837	+23″,687	0	−21″,674		+21″,674	0		−47″,374	−47″,374
−56,090 cos ε	−44,571 sin ε	ε sin ε	+56,090	−44″,571	−100.661	ε cos ε	−56″,090	−44,571	−100,661
		cos ε	+28,045	+22,286	− 5,759	sin ε	−28,045	+22,286	− 5,759
−34,664 cos 2ε	−10,729 sin 2ε	cos 2ε	−23,110	+14,305	+ 37,415	sin 2ε	−46,219	− 7,153	− 53,372
+47,976 3ε	+21,786 3ε	cos 3ε	+11,994	−16,339	− 28,333	sin 3ε	+35,982	+ 5,446	+ 41,428
− 2,482 4ε	− 0,437 4ε	cos 4ε	− 0,331	+ 0,233	+ 0,564	sin 4ε	− 1,324	− 0,058	− 1,382
− 6,332 5ε	− 3,004 5ε	cos 5ε	− 0,528	+ 1,252	+ 1,780	sin 5ε	− 2,638	− 0,250	− 2,888
+ 4,094 6ε	+ 0,949 6ε	cos 6ε	+ 0,234	− 0,325	− 0,559	sin 6ε	+ 1,404	+ 0,054	+ 1,458
− 4,910 7ε	− 0,461 7ε	cos 7ε	− 0,205	+ 0,134	+ 0,339	sin 7ε	− 1,432	− 0,019	− 1,451
+ 2,860 8ε		cos 8ε	+ 0,091		− 0,091	sin 8ε	+ 0,726		− 0,726
+18,060 sin ε	− 8,193 cos ε	ε cos ε	+18,060	− 8,193	− 26,253	ε sin ε	+18,060	+ 8,193	+ 26,253
		sin ε	− 9,030	− 4,097	+ 4,933	cos ε	− 9,030	+ 4,097	− 4,933
+65,706 sin 2ε	−40,891 cos 2ε	sin 2ε	+43,804	−54,521	− 98,325	cos 2ε	−87,608	−27,261	−114,869
+10,610 3ε	+ 0,033 3ε	sin 3ε	+ 2,652	+ 0,024	− 2,628	cos 3ε	− 7,957	+ 0,008	− 7,949
−19,457 4ε	+ 7,234 4ε	sin 4ε	− 2,594	+ 3,858	+ 6,452	cos 4ε	+10,377	+ 0,965	+ 11,342
+ 4,044 5ε	− 0,779 5ε	sin 5ε	+ 0,337	− 0,325	− 0,662	cos 5ε	− 1,685	− 0,065	− 1,750
− 1,180 6ε	+ 0,049 6ε	sin 6ε	− 0,067	+ 0,017	+ 0,084	cos 6ε	+ 0,405	+ 0,003	+ 0,408
+ 1,552 7ε	− 0,669 7ε	sin 7ε	+ 0,065	− 0,195	− 0,260	cos 7ε	− 0,453	− 0,028	− 0,481
	+ 0,314 8ε	sin 8ε		+ 0,080	+ 0,080	cos 8ε		+ 0,010	+ 0,010
				$m = 1$.					
+ 1,663	+13,065	0	− 3,326		+ 3,326	0		−26,130	−26,130
−13,153 cos ε	− 7,934 sin ε	ε sin ε	+13,153	− 7,934	− 21,087	ε cos ε	−13,153	− 7,934	− 21,087
		cos ε	+ 6,577	+ 3,967	− 2,610	sin ε	− 6,577	+ 3,967	− 2,610
+ 4,240 cos 2ε	+ 1,278 sin 2ε	cos 2ε	+ 2,827	− 1,704	− 4,531	sin 2ε	+ 5,653	+ 0,852	+ 6,505
+ 3,613 3ε	+ 1,227 3ε	cos 3ε	+ 0,903	− 0,920	− 1,823	sin 3ε	+ 2,710	+ 0,307	+ 3,017
+ 2,216 4ε	+ 0,981 4ε	cos 4ε	+ 0,296	− 0,523	− 0,819	sin 4ε	+ 1,182	+ 0,131	+ 1,313
+ 1,131 5ε	+ 0,645 5ε	cos 5ε	+ 0,094	− 0,269	− 0,363	sin 5ε	+ 0,471	+ 0,054	+ 0,525
+ 0,370 6ε	+ 0,364 6ε	cos 6ε	+ 0,021	− 0,128	− 0,149	sin 6ε	+ 0,127	+ 0,021	+ 0,148
− 0,011 7ε	+ 0,140 7ε	cos 7ε	0,000	− 0,042	− 0,042	sin 7ε	− 0,003	+ 0,006	+ 0,003
− 0,069 8ε		cos 8ε	− 0,002		+ 0,002	sin 8ε	− 0,017		− 0,017
+49,293 sin ε	−22,867 cos ε	ε cos ε	+49,293	−22,867	− 72,160	ε sin ε	+49,293	+22,867	+ 72,160
		sin ε	−24,647	−11,434	+ 13,213	cos ε	−24,647	+11,434	− 13,213
− 2,813 sin 2ε	+ 2,872 cos 2ε	sin 2ε	− 1,876	+ 3,829	+ 5,705	cos 2ε	+ 3,751	+ 1,915	+ 5,666
− 7,024 3ε	+ 2,922 3ε	sin 3ε	− 1,756	+ 2,192	+ 3,948	cos 3ε	+ 5,268	+ 0,731	+ 5,999
− 6,814 4ε	+ 2,218 4ε	sin 4ε	− 0,909	+ 1,183	+ 2,092	cos 4ε	+ 3,634	+ 0,296	+ 3,930
− 5,212 5ε	+ 1,276 5ε	sin 5ε	− 0,434	+ 0,532	+ 0,966	cos 5ε	+ 2,172	+ 0,106	+ 2,278
− 3,175 6ε	+ 0,522 6ε	sin 6ε	− 0,182	+ 0,179	+ 0,361	cos 6ε	+ 1,089	+ 0,030	+ 1,119
− 1,431 7ε	+ 0,049 7ε	sin 7ε	− 0,068	+ 0,014	+ 0,082	cos 7ε	+ 0,417	+ 0,002	+ 0,419
	− 0,057 8ε	sin 8ε		− 0,014	− 0,014	cos 8ε		− 0,002	− 0,002

$m = 0.$

Termes.	2ν.	$-\frac{1}{3}\Xi$.	$-2\nu-\frac{1}{3}\Xi$.	$-\frac{1}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon}-2\mathrm{U}$.	$-\frac{1}{3}\Xi-2\int \mathrm{U}\,d\varepsilon$.	$\Upsilon\cos\varepsilon + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon + \Xi - e\Upsilon$.	$\frac{d}{d\varepsilon}n\,\delta z$.	Termes.	$n\,\delta z$.
0						− 47",374	−48",364	ε	− 48",364
ε	+ 21",674	+ 7",396	− 14",278	−14",278	−14",278	− 14,278	−10,320	ε²	− 5,160
ε cos ε	+100,661		−100,661			−100,661	−99,538	ε sin ε	− 99,538
ε cos 2ε							+ 3,958	ε sin 2ε	+ 1,979
sin ε	−106,420	−27,581	+ 78,839	+84,599	+84,599	+ 78,840	+79,939	cos ε	−179,477
sin 2ε	+ 18,708	− 9,239	− 27,947	+50,851	+25,426	− 27,946	−31,738	cos 2ε	+ 16,859
sin 3ε	− 9,444	+ 8,172	+ 17,616	−71,435	−23,812	+ 17,616	+18,736	cos 3ε	− 6,245
sin 4ε	+ 0,141	− 0,393	− 0,534	+ 3,392	+ 0,848	− 0,534	− 1,187	cos 4ε	+ 0,297
sin 5ε	+ 0,356	− 0,645	− 1,001	+ 9,441	+ 1,888	− 1,000	− 0,997	cos 5ε	+ 0,199
sin 6ε	− 0,093	+ 0,370	+ 0,463	− 5,969	− 0,995	+ 0,463	+ 0,519	cos 6ε	− 0,087
sin 7ε	+ 0,048	− 0,376	− 0,424	+ 7,191	+ 1,027	− 0,424	− 0,450	cos 7ε	+ 0,064
sin 8ε	− 0,011	+ 0,190	+ 0,201	− 4,202	− 0,525	+ 0,201	+ 0,218	cos 8ε	− 0,027
ε sin ε	− 26,253		+ 26,253			+ 26,253	+26,253	ε cos ε	− 26,253
ε sin 2ε							− 1,032	ε cos 2ε	+ 0,516
cos ε	− 31,186	− 6,006	+ 25,180	−30,114	+30,114	+ 25,181	+31,477	sin ε	+ 57,730
cos 2ε	+ 49,163	−16,227	− 65,390	−98,959	+49,480	− 65,389	−66,275	sin 2ε	− 33,396
cos 3ε	+ 0,876	− 1,781	− 2,657	−15,876	+ 5,292	− 2,657	− 0,248	sin 3ε	− 0,083
cos 4ε	− 1,613	+ 2,508	+ 4,121	+28,884	− 7,221	+ 4,121	+ 4,249	sin 4ε	+ 1,062
cos 5ε	+ 0,132	− 0,458	− 0,590	− 5,800	+ 1,160	− 0,590	− 0,757	sin 5ε	− 0,151
cos 6ε	− 0,014	+ 0,116	+ 0,130	+ 1,663	− 0,277	+ 0,131	+ 0,160	sin 6ε	+ 0,027
cos 7ε	+ 0,037	− 0,117	− 0,154	− 2,298	+ 0,328	− 0,153	− 0,159	sin 7ε	− 0,023
cos 8ε	− 0,010		+ 0,010			+ 0,010	+ 0,016	sin 8ε	+ 0,002

$m = 1.$

Termes.	2ν.	$-\frac{1}{3}\Xi$.	$-2\nu-\frac{1}{3}\Xi$.	$-\frac{1}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon}-2\mathrm{U}$.	$-\frac{1}{3}\Xi-2\int \mathrm{U}\,d\varepsilon$.	$\Upsilon\cos\varepsilon + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon + \Xi - e\Upsilon$.	$\frac{d}{d\varepsilon}n\,\delta z$.	Termes.	$n\,\delta z$.
0						− 26,130	−28,533	ε	− 28,533
ε	+ 3,326	+ 1,246	− 2,080	− 2,080	− 2,080	− 2,080	− 1,251	ε²	− 0,626
ε cos ε	+ 21,087		− 21,087			− 21,087	−20,923	ε sin ε	− 20,923
ε cos 2ε							+ 0,829	ε sin 2ε	+ 0,415
sin ε	− 23,697	− 6,750	+ 16,947	+19,556	+19,556	+ 16,946	+16,815	cos ε	− 37,738
sin 2ε	− 2,266	+ 1,064	+ 3,330	− 6,353	− 3,176	+ 3,329	+ 2,617	cos 2ε	− 1,102
sin 3ε	− 0,608	+ 0,562	+ 1,170	− 5,539	− 1,847	+ 1,170	+ 1,021	cos 3ε	− 0,340
sin 4ε	− 0,205	+ 0,257	+ 0,462	− 3,406	− 0,851	+ 0,462	+ 0,409	cos 4ε	− 0,102
sin 5ε	− 0,073	+ 0,105	+ 0,178	− 1,735	− 0,347	+ 0,178	+ 0,158	cos 5ε	− 0,032
sin 6ε	− 0,025	+ 0,029	+ 0,054	− 0,567	− 0,094	+ 0,054	+ 0,047	cos 6ε	− 0,008
sin 7ε	− 0,006	− 0,001	+ 0,005	+ 0,018	+ 0,002	+ 0,005	+ 0,003	cos 7ε	0,000
sin 8ε	0,000	− 0,004	− 0,004	+ 0,106	+ 0,013	− 0,004			
ε sin ε	− 72,160		72,160			+ 72,160	+72,160	ε cos ε	− 72,160
ε sin 2ε							− 2,837	ε cos 2ε	+ 1,419
cos ε	− 85,373	−24,246	+ 61,127	−74,340	+74,340	+ 61,127	+63,036	sin ε	+135,196
cos 2ε	− 2,853	+ 0,865	+ 3,718	+ 3,897	− 1,948	+ 3,718	+ 1,220	sin 2ε	− 0,099
cos 3ε	− 1,316	+ 1,112	+ 2,428	+10,713	− 3,571	+ 2,428	+ 2,230	sin 3ε	+ 0,743
cos 4ε	− 0,523	+ 0,800	+ 1,323	+10,430	− 2,607	+ 1,323	+ 1,201	sin 4ε	+ 0,300
cos 5ε	− 0,193	+ 0,488	+ 0,681	+ 7,981	− 1,597	+ 0,681	+ 0,617	sin 5ε	+ 0,123
cos 6ε	− 0,060	+ 0,247	+ 0,307	+ 4,869	− 0,811	+ 0,308	+ 0,277	sin 6ε	+ 0,046
cos 7ε	− 0,012	+ 0,097	+ 0,109	+ 2,196	− 0,312	+ 0,107	+ 0,095	sin 7ε	+ 0,014
cos 8ε	+ 0,002		− 0,002			− 0,002			

16. Le Tableau précédent présente la suite des calculs; le détail de la multiplication par $(1 - e\cos\varepsilon)$ est seulement omis. La quantité

$$\Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon + \Xi$$

qui entre dans $n\delta z$ est obtenue par deux méthodes indépendantes, savoir, la première, d'après la relation

$$\Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \Psi\cos\varphi\sin\varepsilon + \Xi = -2\nu - \tfrac{1}{3}\Xi,$$

et la seconde, en tenant compte des équations

$$\begin{aligned}\Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \Psi\cos\varphi\sin\varepsilon + \Xi &= \Upsilon\cos\varepsilon + \Psi\cos\varphi\sin\varepsilon + \Xi - e\Upsilon,\\ \Xi - e\Upsilon &= -\left(\tfrac{1}{3}\Xi + 2\textstyle\int U\,d\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Pour l'intégration, on fait usage des formules

$$\begin{aligned}&\textstyle\int \varepsilon\sin\varepsilon\,d\varepsilon = -\varepsilon\cos\varepsilon + \sin\varepsilon, \quad &&\textstyle\int \varepsilon\sin 2\varepsilon\,d\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{4}\sin 2\varepsilon,\\ &\textstyle\int \varepsilon\cos\varepsilon\,d\varepsilon = +\varepsilon\sin\varepsilon + \cos\varepsilon, \quad &&\textstyle\int \varepsilon\cos 2\varepsilon\,d\varepsilon = +\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{4}\cos 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Il faut observer que, dans le Tableau précédent, l'ordre des termes de la colonne $-\frac{1}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon} - 2U$, séparée des autres colonnes par deux traits, est renversé : on commence par les cosinus. On remarquera de plus que, par le fait, le Tableau contient le développement de $-\frac{1}{3}\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$, puisque celui de U est renfermé dans le précédent Tableau.

17. Les perturbations de la coordonnée perpendiculaire s'obtiendront rapidement. Tous les calculs sont renfermés dans le Tableau suivant; l'unité est le millième de seconde.

Les deux équations qui servent au calcul de $\frac{u}{\cos i}$ et $\frac{u_1}{\cos i}$ sont, d'après l'article **13**, en désignant, pour abréger l'écriture, $\sigma ar\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ par Z, et par Z_1 et Z_2 les deux opérations effectuées sur ce développement,

$$\frac{u}{\cos i} = -Z_1 - \textstyle\int e\cos\varepsilon\,d\varepsilon\int Z\,d\varepsilon,$$

$$\frac{u_1}{\cos i} = \quad Z_2 - e\cos\varepsilon\textstyle\int Z\,d\varepsilon.$$

$m = 0$.

Z.	$\frac{1}{2}e$Z.	Termes.	Z_1.	$\int \cos\varepsilon\, d\varepsilon \int eZ\, d\varepsilon$.	$-\frac{u}{\cos i}$.	Termes.	Z_2.	$\cos\varepsilon \int eZ\, d\varepsilon$.	$\frac{u_1}{\cos i}$.
$-5'',561$	-219	0	$+5'',561$		$+5,523$	0		-423	$+423$
		ε		-423	-423				
$-0,961 \cos \varepsilon$	$-38 \cos \varepsilon$	$\varepsilon \sin \varepsilon$	$+481$	-438	$+43$	$\varepsilon \cos \varepsilon$	-481	-438	-43
		$\cos \varepsilon$	$+240$	-551	-311	$\sin \varepsilon$	-240	$+113$	-353
$+5,723 \cos 2\varepsilon$	$+225 \cos 2\varepsilon$	$\cos 2\varepsilon$	$+3,816$	$+21$	$+3,837$	$\sin 2\varepsilon$	$+7,631$	-41	$+7,672$
$-0,233 \quad 3\varepsilon$	$-9 \quad 3\varepsilon$	$\cos 3\varepsilon$	-58	-35	-93	$\sin 3\varepsilon$	-175	$+105$	-280
$-0,775 \quad 4\varepsilon$	$-30 \quad 4\varepsilon$	$\cos 4\varepsilon$	-103	$+1$	-102	$\sin 4\varepsilon$	-413	-2	-411
$+0,153 \quad 5\varepsilon$	$+6 \quad 5\varepsilon$	$\cos 5\varepsilon$	$+13$	$+2$	$+15$	$\sin 5\varepsilon$	$+64$	-9	$+73$
$-0,123 \quad 6\varepsilon$	$-5 \quad 6\varepsilon$	$\cos 6\varepsilon$	-7		-7	$\sin 6\varepsilon$	-42	$+2$	-44
$+0,205 \quad 7\varepsilon$	$+8 \quad 7\varepsilon$	$\cos 7\varepsilon$	$+9$		$+9$	$\sin 7\varepsilon$	$+60$	-1	$+61$
$-0,101 \quad 8\varepsilon$	$-4 \quad 8\varepsilon$	$\cos 8\varepsilon$	-3		-3	$\sin 8\varepsilon$	-26	$+1$	-27
$+10,757 \sin \varepsilon$	$+423 \sin \varepsilon$	$\varepsilon \cos \varepsilon$	$+5,379$		$+5,379$	$\varepsilon \sin \varepsilon$	$+5,379$		$+5,379$
		$\sin \varepsilon$	$-2,689$	-15	$-2,704$	$\cos \varepsilon$	$-2,689$	-15	$-2,674$
$+0,759 \sin 2\varepsilon$	$+30 \sin 2\varepsilon$	$\sin 2\varepsilon$	$+506$	-194	$+312$	$\cos 2\varepsilon$	$-1,012$	-388	-624
$-2,690 \quad 3\varepsilon$	$-106 \quad 3\varepsilon$	$\sin 3\varepsilon$	-672	-7	-679	$\cos 3\varepsilon$	$+2,017$	-20	$+2,037$
$+0,480 \quad 4\varepsilon$	$+19 \quad 4\varepsilon$	$\sin 4\varepsilon$	$+64$	$+9$	$+73$	$\cos 4\varepsilon$	-256	$+35$	-291
$-0,050 \quad 5\varepsilon$	$-2 \quad 5\varepsilon$	$\sin 5\varepsilon$	-4	-1	-5	$\cos 5\varepsilon$	$+21$	-6	$+27$
$+0,161 \quad 6\varepsilon$	$+6 \quad 6\varepsilon$	$\sin 6\varepsilon$	$+9$		$+9$	$\cos 6\varepsilon$	-55		-55
$-0,071 \quad 7\varepsilon$	$-3 \quad 7\varepsilon$	$\mathrm{siu}\, 7\varepsilon$	-3		-3	$\cos 7\varepsilon$	$+21$		$+21$

$m = 1$.

Z.	$\frac{1}{2}e$Z.	Termes.	Z_1.	$\int \cos\varepsilon\, d\varepsilon \int eZ\, d\varepsilon$.	$-\frac{u}{\cos i}$.	Termes.	Z_2.	$\cos\varepsilon \int eZ\, d\varepsilon$.	$\frac{u_1}{\cos i}$.
-302	$-11,9$	0	$+302$		$+303$	0		-67	$+67$
		ε		-67	-67				
$+15 \cos \varepsilon$	$+0,6 \cos \varepsilon$	$\varepsilon \sin \varepsilon$	-8	-24	-32	$\varepsilon \cos \varepsilon$	$+8$	-24	$+32$
		$\cos \varepsilon$	-4	-26	-30	$\sin \varepsilon$	$+4$	$+2$	$+2$
$+107 \cos 2\varepsilon$	$+4 \cos 2\varepsilon$	$\cos 2\varepsilon$	$+36$	-1	$+35$	$\sin 2\varepsilon$	$+71$	$+2$	$+69$
$+85 \quad 3\varepsilon$	$+3 \quad 3\varepsilon$	$\cos 3\varepsilon$	$+11$	-1	$+10$	$\sin 3\varepsilon$	$+32$	$+3$	$+29$
$+64 \quad 4\varepsilon$	$+3 \quad 4\varepsilon$	$\cos 4\varepsilon$	$+4$		$+4$	$\sin 4\varepsilon$	$+17$	$+1$	$+16$
$+33 \quad 5\varepsilon$	$+1 \quad 5\varepsilon$	$\cos 5\varepsilon$	$+1$		$+1$	$\sin 5\varepsilon$	$+7$	$+1$	$+6$
$+9 \quad 6\varepsilon$		$\cos 6\varepsilon$	0			$\sin 6\varepsilon$	$+2$		$+2$
$-5 \quad 7\varepsilon$		$\cos 7\varepsilon$				$\sin 7\varepsilon$	-1		-1
$-6 \quad 8\varepsilon$						$\sin 8\varepsilon$	-1		-1
$1712 \sin \varepsilon$	$+67 \sin \varepsilon$	$\varepsilon \cos \varepsilon$	$+856$		$+856$	$\varepsilon \sin \varepsilon$	$+856$		$+856$
		$\sin \varepsilon$	-428	$+1$	-427	$\cos \varepsilon$	-428	$+1$	-429
$-62 \sin 2\varepsilon$	$-2 \sin 2\varepsilon$	$\sin 2\varepsilon$	-21	-32	-53	$\cos 2\varepsilon$	$+41$	-64	$+105$
$-220 \quad 3\varepsilon$	$-9 \quad 3\varepsilon$	$\sin 3\varepsilon$	-28	$+2$	-26	$\cos 3\varepsilon$	$+83$	$+4$	$+79$
$-246 \quad 4\varepsilon$	$-10 \quad 4\varepsilon$	$\sin 4\varepsilon$	-16	$+1$	-15	$\cos 4\varepsilon$	$+66$	$+4$	$+62$
$-186 \quad 5\varepsilon$	$-7 \quad 5\varepsilon$	$\sin 5\varepsilon$	-8	$+1$	-7	$\cos 5\varepsilon$	$+39$	$+4$	$+35$
$-114 \quad 6\varepsilon$	$-5 \quad 6\varepsilon$	$\sin 6\varepsilon$	-3		-3	$\cos 6\varepsilon$	$+19$	$+1$	$+18$
$-46 \quad 7\varepsilon$	$-2 \quad 7\varepsilon$	$\sin 7\varepsilon$	-1		-1	$\cos 7\varepsilon$	$+7$	$+1$	$+6$

A l'égard des deux quantités $\frac{u}{\cos i}$ et $\frac{u_1}{\cos i}$ obtenues d'après les formules

$$\frac{u_1}{\cos i} = \quad Z_2 - e\cos\varepsilon\int Z\,d\varepsilon,$$

$$\frac{u}{\cos i} = - Z_1 - \int e\cos\varepsilon\,d\varepsilon\int Z\,d\varepsilon,$$

il faut observer que le groupe de termes

$$- e\sin\varepsilon\int Z\,d\varepsilon + e\int\sin\varepsilon\,Z\,d\varepsilon,$$

que nous avons remplacé par une double intégrale, contient, à cause du premier terme, une partie constante, savoir $-\frac{1}{2}Ae$, A désignant le coefficient de $\cos\varepsilon$ dans Z. C'est pourquoi dans le Tableau ci-dessus, qui contient $-\frac{u}{\cos i}$, les constantes commençant les expressions de Z_1 ont été modifiées par l'addition des coefficients de $\cos\varepsilon$ dans la colonne $\frac{1}{2}eZ$.

18. Il ne reste plus qu'à déterminer les arbitraires, dont nous n'avons pas parlé jusqu'à présent. Il suffit d'exprimer que, pour l'époque des éléments osculateurs, les perturbations sont nulles, et qu'au commencement d'un intervalle les perturbations sont les mêmes qu'à la fin de l'intervalle précédent.

En désignant, avec Hansen, les arbitraires par k, k_1, k_2, c, $2C$, l. l_1, comme l'indique ce Tableau,

Expressions.	Constantes arbitraires.	Expressions.	Constantes arbitraires.
$\Xi - e\Upsilon$	k	$n\,\delta z$	c
Υ	k_1	2ν	$2C$
$\cos\varphi\,\Psi$	k_2	$q\cos\varphi$	l
		p	l_1

on trouve, pour la partie de $n\,\delta z$ qui dépend de ces arbitraires,

$$c + \int(k + k_1\cos\varepsilon + k_2\sin\varepsilon)(1 - e\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = c + (k - \tfrac{1}{2}ek_1)\varepsilon + (k_1 - ek)\sin\varepsilon - k_2\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{1}{4}ek_1\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{4}ek_2\cos 2\varepsilon,$$

et, pour 2ν,

$$2C + \int(k_1\sin\varepsilon - k_2\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 2C - k_1\cos\varepsilon - k_2\sin\varepsilon.$$

Cela posé, ε_0 désignant l'anomalie excentrique pour l'époque ($\varepsilon_0 = 53^\circ 35' 33'',1$), on a les équations suivantes, où les valeurs numériques des seconds membres sont les valeurs des expressions ci-dessus pour ε_0; on a mis en regard les expressions correspondantes :

$$
\begin{array}{lll}
\Upsilon \sin\varepsilon - \cos\varphi\Psi\cos\varepsilon, & k_1 \sin\varepsilon_0 - k_2\cos\varepsilon_0, & -150'',929 = 0,\\
\Upsilon \cos\varepsilon + \cos\varphi\Psi\sin\varepsilon, & k_1 \cos\varepsilon_0 + k_2\sin\varepsilon_0, & -\ 93,346 = 0,\\
\Xi - e\Upsilon, & k, & +\ 73,492 = 0,\\
\Xi + \Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \cos\varphi\Psi\sin\varepsilon, & k + k_1\cos\varepsilon_0 + k_2\sin\varepsilon_0, & -\ 19,854 = 0,\\
2\nu, & 2C - k_1\cos\varepsilon_0 - k_2\sin\varepsilon_0, & -\ 47,381 = 0,\\
n\delta z, & c + (k - \frac{1}{2}ek_1)\varepsilon_0 & \\
 & \quad + (k_1 - ek)\sin\varepsilon_0 - k_2\cos\varepsilon_0 & \\
 & \quad - \frac{1}{4}ek_1\sin 2\varepsilon_0 + \frac{1}{4}ek_2\cos 2\varepsilon_0, & -229,450 = 0,\\
-\dfrac{u}{\cos i}, & l_1(\cos\varepsilon_0 - e) - l\sin\varepsilon_0, & +\ \ 4,856 = 0,\\
\dfrac{u_1}{\cos i}, & l_1\sin\varepsilon_0 + l\cos\varepsilon_0, & +\ \ 8,470 = 0.
\end{array}
$$

De là on déduit

$$
\begin{array}{ll}
k_1 = +176'',873, & c = +152'',355,\\
k_2 = -\ 14,453, & l = -\ \ 0,474,\\
k = -\ 73,492, & l_1 = -\ 10,174,\\
2C = +140,727, &
\end{array}
$$

et les termes à ajouter à $n\delta z$, 2ν et $-\dfrac{u}{\cos i}$ sont respectivement

$$
\begin{array}{lllllll}
n\delta z \ldots & +152'',355 & -80'',446\varepsilon & +\ 14'',453\cos\varepsilon & +182'',652\sin\varepsilon & -0'',284\cos 2\varepsilon & -3'',477\sin 2\varepsilon\\
2\nu \ldots\ldots & +140,727 & & -176,873 & +\ 14,453 & & \\
-\dfrac{u}{\cos i} \cdot & +\ \ 0,800 & & -\ 10,174 & +\ \ 0,474 & &
\end{array}
$$

On détermine d'une manière analogue les arbitraires relatives au second intervalle en écrivant que les expressions qui se correspondent prennent la même valeur pour $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Il est avantageux de faire passer les arbitraires dans le premier membre; les équations donnent alors les différences des arbitraires relatives au premier et au second intervalle; on a mis un accent à celles-ci :

$\Upsilon \sin\varepsilon - \cos\varphi\,\Psi\cos\varepsilon$,	$k'_1 - k_1$,	$-\ 15'',786 = -165'',668$,
$\Upsilon\cos\varepsilon + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon$,	$k'_2 - k_2$,	$+\ 79,258 = +\ 71,053$,
$\Xi - e\Upsilon$,	$k' - k$,	$+\ 17,939 = +\ 30,420$,
$\Xi + \Upsilon(\cos\varepsilon - e) + \cos\varphi\,\Psi\sin\varepsilon$,	$k' + k'_2 - k - k_2$,	$+\ 97,197 = +101,473$,
2ν,	$2C' - 2C - (k'_2 - k_2)$,	$-128,890 = -154,634$,
$n\delta z$,	$c' - c + [k' - k - \frac{1}{2}e(k'_1 - k_1)]\frac{\pi}{2}$ $+ k'_1 - k_1 - e(k' - k) - \frac{1}{2}e(k'_2 - k_2)$,	$+\ 54,111 = -204,683$,
$-\dfrac{u}{\cos i}$,	$-e(l'_1 - l_1) - (l' - l)$,	$-\ 0,291 = -\ 1,036$,
$\dfrac{u_1}{\cos i}$,	$l'_1 - l_1$,	$+\ 1,329 = +\ 9,199$.

De là on déduit

$k'_1 - k_1 = -149'',882$,	$k'_1 = +\ 26'',991$,
$k'_2 - k_2 = -\ 8,205$,	$k'_2 = -\ 22,658$,
$k' - k = +\ 12,481$,	$k' = -\ 61,011$,
$2C' - 2C = -\ 33,949$,	$2C' = +106,778$,
$c' - c = -136,954$,	$c' = +\ 15,401$,
$l' - l = +\ 0,107$,	$l' = -\ 0,367$,
$l'_1 - l_1 = +\ 7,870$,	$l'_1 = -\ 2,304$,

et les termes à ajouter à $n\delta z$, 2ν et $-\dfrac{u}{\cos i}$ sont respectivement

$$n\delta z \ldots\ +15'',401 \quad -62'',072\,\varepsilon \quad +22'',658\cos\varepsilon \quad +31'',788\sin\varepsilon \quad -0'',446\cos 2\varepsilon \quad -0'',531\sin 2\varepsilon$$

$$2\nu \ldots\ +106,778 \qquad -26,991 \qquad +22,658$$

$$-\frac{u}{\cos i} \cdot\ +\ 0,181 \qquad -\ 2,304 \qquad +\ 0,367$$

19. Les expressions des coordonnées $n\delta z$, 2ν et $\dfrac{u}{\cos i}$ sont résumées dans le Tableau suivant; on a effacé les millièmes de seconde :

(103) *Héra.* — Époque 1877, Octobre 21,0; temps moyen de Paris; $\varepsilon = 53^\circ 35' 33'',1$.

Perturbations par Jupiter, Saturne et Mars.

$-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

Termes.	Coefficients. $n\delta z$.	2ν.	$\frac{u}{\cos i}$.
const.	$+152'',36$	$+140'',73$	$+6'',32$
ε	$-128,81$	$+21,67$	$-0,42$
ε^2	$-5,160$		
$\varepsilon \sin \varepsilon$	$-99,54$	$-26,25$	$+0,04$
$\varepsilon \sin 2\varepsilon$	$+1,98$	$0,00$	$0,00$
$\cos \varepsilon$	$-165,02$	$-208,06$	$-10,49$
$\cos 2\varepsilon$	$+16,58$	$+49,16$	$+3,84$
$\cos 3\varepsilon$	$-6,25$	$+0,88$	$-0,09$
$\cos 4\varepsilon$	$+0,30$	$-1,61$	$-0,10$
$\cos 5\varepsilon$	$+0,20$	$+0,13$	$+0,02$
$\cos 6\varepsilon$	$-0,09$	$-0,01$	$-0,01$
$\cos 7\varepsilon$	$+0,06$	$+0,04$	$+0,01$
$\cos 8\varepsilon$	$-0,03$	$-0,01$	
$\varepsilon \cos \varepsilon$	$-26,25$	$+100,66$	$+5,38$
$\varepsilon \cos 2\varepsilon$	$+0,52$	$0,00$	$0,00$
$\sin \varepsilon$	$+240,38$	$-91,97$	$-2,23$
$\sin 2\varepsilon$	$-36,87$	$+18,71$	$+0,31$
$\sin 3\varepsilon$	$-0,08$	$-9,44$	$-0,68$
$\sin 4\varepsilon$	$+1,06$	$+0,14$	$+0,07$
$\sin 5\varepsilon$	$-0,15$	$+0,36$	$-0,01$
$\sin 6\varepsilon$	$+0,03$	$-0,09$	$+0,01$
$\sin 7\varepsilon$	$-0,02$	$+0,05$	
$\sin 8\varepsilon$		$-0,01$	

$\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{3\pi}{2}$.

Termes.	Coefficients. $n\delta z$.	2ν.	$\frac{u}{\cos i}$.
const.	$+15'',40$	$+106'',78$	$+0'',48$
ε	$-90,61$	$+3,33$	$-0,07$
ε^2	$-0,626$		
$\varepsilon \sin \varepsilon$	$-20,92$	$-72,16$	$-0,03$
$\varepsilon \sin 2\varepsilon$	$+0,42$	$0,00$	$0,00$
$\cos \varepsilon$	$-15,08$	$-112,36$	$-2,33$
$\cos 2\varepsilon$	$-1,55$	$-2,85$	$+0,04$
$\cos 3\varepsilon$	$-0,34$	$-1,32$	$+0,01$
$\cos 4\varepsilon$	$-0,10$	$-0,52$	
$\cos 5\varepsilon$	$-0,03$	$-0,19$	
$\cos 6\varepsilon$	$-0,01$	$-0,06$	
$\cos 7\varepsilon$		$-0,01$	
$\cos 8\varepsilon$			
$\varepsilon \cos \varepsilon$	$-72,16$	$+21,09$	$+0,86$
$\varepsilon \cos 2\varepsilon$	$+1,42$	$0,00$	$0,00$
$\sin \varepsilon$	$+166,98$	$-1,04$	$-0,06$
$\sin 2\varepsilon$	$-0,63$	$-2,27$	$-0,06$
$\sin 3\varepsilon$	$+0,74$	$-0,61$	$-0,03$
$\sin 4\varepsilon$	$+0,30$	$-0,21$	$-0,02$
$\sin 5\varepsilon$	$+0,12$	$-0,07$	$-0,01$
$\sin 6\varepsilon$	$+0,05$	$-0,03$	
$\sin 7\varepsilon$	$+0,01$	$-0,01$	
$\sin 8\varepsilon$			

Dans l'article 9, on a remarqué que le nombre des valeurs particulières utilisé par les méthodes habituelles dépassait de beaucoup celui dont nous avons fait usage. Toutefois, la convergence remarquable des séries qui figurent dans les Tableaux précédents témoigne que la précision obtenue est très grande. Seules, les arbitraires peuvent être entachées de légères erreurs.

Ce résultat a été obtenu en appliquant aux valeurs particulières un ensemble de procédés qu'il est malaisé de comparer au procédé habituel; mais nous pensons que ceux qui auront une fois expérimenté les nouvelles méthodes se convaincront de leurs avantages, d'autant plus que la détermination des perturbations absolues trouvera, dans ces premiers calculs, d'utiles points de comparaison.

20. Il s'agit maintenant d'établir la comparaison du calcul et des observations; il faut que la méthode actuelle ne soit pas, sous ce rapport, inférieure aux autres. Ce n'est pas sans motif qu'on a pris pour point de départ des éléments osculateurs de la planète déterminés avec précision : il devient, en effet, possible de juger de l'aptitude des formules à représenter les perturbations; si l'on était parti d'éléments trop peu approchés, des écarts sensibles auraient pu se produire et un doute aurait subsisté.

On pourrait demander si la méthode s'applique avec un égal succès aux petites planètes à orbites très excentriques ou très inclinées et de plus voisines de Jupiter : on jugera que ces diverses circonstances peuvent diminuer l'extrême convergence des séries, mais non créer des difficultés.

Pour calculer une éphéméride, on a besoin des coordonnées rectangulaires équatoriales de la planète; ces coordonnées sont rapportées ordinairement, comme les éléments de la planète, à l'équateur et à l'équinoxe moyens du commencement d'une année fictive. On observe d'abord, en négligeant pour un instant la perturbation $\frac{u}{\cos i}$, que les coordonnées rectangulaires auront ces expressions bien connues :

$$\begin{aligned} x &= r\sin a \sin(\mathrm{A} + \varpi - \Omega + \bar{f}), \\ y &= r\sin b \sin(\mathrm{B} + \varpi - \Omega + \bar{f}), \\ z &= r\sin c \sin(\mathrm{C} + \varpi - \Omega + \bar{f}), \end{aligned}$$

dans lesquelles r et $\bar{f}$ sont obtenus d'après les équations

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} - e\sin\bar{\varepsilon} &= nt + c + n\delta z, \\ \bar{r}\cos\bar{f} &= a(\cos\bar{\varepsilon} - e), \\ \bar{r}\sin\bar{f} &= a\cos\varphi\sin\bar{\varepsilon}, \\ r &= \bar{r}(1+\nu). \end{aligned}$$

Il convient de s'assurer des nombres $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A, B, C, en mettant à profit les diverses manières de les obtenir.

Pour compléter les valeurs des coordonnées, il faudra ajouter les corrections suivantes :

$$\begin{aligned} \delta x &= a \quad \sin i \sin\theta\left(\frac{u}{\cos i}\right), \\ \delta y &= a\rho\sin\gamma\cos i\left(\frac{u}{\cos i}\right), \\ \delta z &= a\rho\cos\gamma\cos i\left(\frac{u}{\cos i}\right); \end{aligned}$$

ρ et γ sont donnés par les équations

$$\rho = \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2 i \cos^2\theta},$$

$$\mathrm{tang}(\gamma + \varepsilon) = -\,\mathrm{tang}\, i \cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma + \varepsilon < +\frac{\pi}{2},$$

ε désignant dans ce cas, sans que la confusion soit possible, l'obliquité de l'écliptique.

On obtient ainsi, pour l'équateur et l'équinoxe moyens de 1880,0, les résultats suivants :

$$x = (\bar{1},999\,0771)\, r \sin(\;51°.\;7'.\;8'',39 + f) + (\bar{1},2453)\frac{u}{\cos i},$$

$$y = (\bar{1},974\,3240)\, r \sin(322.26.37,91 + f) - (\bar{1},9553)\frac{u}{\cos i},$$

$$z = (\bar{1},531\,7796)\, r \sin(310.43.39,67 + f) + (0,4049)\frac{u}{\cos i}.$$

Après avoir calculé ces coordonnées pour différentes dates et, pour les mêmes dates, les coordonnées du Soleil rapportées à 1880,0, il sera aisé de conclure les ascensions droites et déclinaisons de la planète pour 1880,0.

Le Tableau ci-après contient, pour les trois époques indiquées, les valeurs de $n\delta z$, ν et $\frac{u}{\cos i}$, ainsi que celles des ascensions droites et déclinaisons. La première ligne se rapporte au mouvement elliptique conclu des éléments osculateurs adoptés; la deuxième ligne donne, pour chaque date, les valeurs des perturbations conclues dans l'article 19, ainsi que les ascensions droites et déclinaisons.

Le Tableau final présente la comparaison du calcul avec les observations méridiennes publiées soit dans les *Astronomische Nachrichten,* soit dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. La comparaison a été faite au moyen des éphémérides pour les oppositions successives, calculées par M. Leveau et par moi (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXXI, p. 275, t. LXXXII, p. 1384, t. LXXXVII, p. 1073, et t. XC, p. 517).

Ces éphémérides ont été utilisées après avoir reçu quelques légères corrections conformes aux valeurs ci-dessous des ascensions droites et déclinaisons rapportées à 1880,0; pour l'opposition de 1877, on a mis à profit les nombres donnés par M. Leveau (*ibid.,* t. LXXXVII, p. 59 et 60); ils se rapportent, en effet, à un lieu de la planète déduit, pour le voisinage de l'époque, des éléments osculateurs adoptés dans le présent travail.

Perturbations $n\delta z$, ν et $\frac{u}{\cos i}$. Ascensions droites et déclinaisons rapportées à 1880,0.

Minuit. T. M. Berlin.	Planètes perturbat.	$n\delta z$.	ν.	$\frac{u}{\cos i}$.	Æ.	Ⓓ.
1876. Juin 13	»	0″,00	0″,00	0″,00	246°.15′.50″,9	−13°.48′.18″,9
	♃, ♄, ♂	− 57,54	− 6,48	− 0,95	246.14.10,8	13.48. 1,6
1879. Janv. 12	»	0,00	0,00	0,00	117.25.10,0	18. 1. 4,3
	♃, ♄, ♂	+ 6,93	+ 37,15	− 0,38	117.25.18,4	18. 1. 4,1
1880. Avril 22	»	0,00	0,00	0,00	202.30.21,2	− 0.59.14,4
	♃, ♄, ♂	−344,53	+210,56	+ 0,19	202.22.46,7	− 0.56.54,9

Écarts entre le calcul et l'observation.

Dates.		$Æ_o - Æ_c$.	$Ⓓ_o - Ⓓ_c$.	Lieu de l'observation.
1876. Mai	27	− 0s,18	− 3″,3	Washington.
	29	− 0,06	− 0,7	Washington.
	29	− 0,05	− 1,1	Greenwich.
	30	− 0,41	− 0,3	Kremtsmunster.
Juin	1	− 0,28	− 4,0	Washington.
	12	− 0,06	− 2,2	Paris.
	15	− 0,34	− 0,9	Kremtsmunster.
	16	− 0,22	− 1,8	Paris.
	19	− 0,05	− 0,6	Paris.
	20	− 0,10	− 1,2	Paris.
1877. Oct.	10	− 0,04	+ 4,0	Madrid.
	11	+ 0,14	− 2,0	Madrid.
	12	+ 0,09	+ 0,2	Madrid.
	13	+ 0,06	− 1,6	Madrid.
	15	− 0,07	+ 1,8	Leyde.
	16	− 0,12	− 0,4	Leyde.
	22	+ 0,02	+ 1,0	Madrid.
	24	+ 0,03	+ 2,1	Madrid.
	26	+ 0,07	− 5,6	Madrid.
	27	− 0,01	− 0,8	Madrid.
1879. Janv.	15	− 0,11	+ 2,4	Paris.
	20	− 0,22	− 0,9	Paris.
	21	+ 0,04	»	Paris.
1880. Avril	18	− 0,08	»	Paris.
	26	+ 0,21	+ 2,5	Paris.
	29	+ 0,06	»	Paris.
	30	+ 0,05	+ 1,4	Paris.
Mai	1	+ 0,28	+ 4,2	Paris.
	4	− 0,35	− 2,5	Paris.
	7	− 0,06	− 4,3	Paris.

ADDITION.

Nombres auxiliaires pour vingt-quatre parties.

Nos d'ordre.	ε.	Y_0.	$\log\sigma(\varepsilon)$.	Y_1.	$\log\sigma(\pi-\varepsilon)$.
0	0°	0°. 0'. 0",0	0,000 000	180°. 0'. 0",0	$-\infty$
1	15	15. 0. 0,0	0,000 000	94.35.44,6	$\bar{2}$,985 602
2	30	30. 0. 0,0	0,000 000	51. 6.54,7	$\bar{1}$,659 837
3	45	45. 0. 0,0	0,000 000	47.41.31,9	$\bar{1}$,928 370
4	60	60. 0. 0,0	0,000 000	60. 6. 7,4	$\bar{1}$,994 624
5	75	75. 0. 0,0	0,000 000	75. 0. 0,8	$\bar{1}$,999 967
6	90	90. 0. 0,0	0,000 000	90. 0. 0,0	0,000 000
7	105	104.59.59,2	$\bar{1}$,999 967	105. 0. 0,0	0,000 000
8	120	119.53.52,6	$\bar{1}$,994 624	120. 0. 0,0	0,000 000
9	135	132.18.28,1	$\bar{1}$,928 370	135. 0. 0,0	0,000 000
10	150	128.53. 5,3	$\bar{1}$,659 837	150. 0. 0,0	0,000 000
11	165	85.24.15,4	$\bar{2}$,985 602	165. 0. 0,0	0,000 000
12	180	0. 0. 0,0	$-\infty$	180. 0. 0,0	0,000 000
13	195	− 85.24.15,4	$\bar{2}$,985 602	195. 0. 0,0	0,000 000
14	210	−128.53. 5,3	$\bar{1}$,659 837	210. 0. 0,0	0,000 000
15	225	−132.18.28,1	$\bar{1}$,928 370	225. 0. 0,0	0,000 000
16	240	−119.53.52,6	$\bar{1}$,994 624	240. 0. 0,0	0,000 000
17	255	−104.59.59,2	$\bar{1}$,999 967	255. 0. 0,0	0,000 000
18	270	− 90. 0. 0,0	0,000 000	270. 0. 0,0	0,000 000
19	285	− 75. 0. 0,0	0,000 000	284.59.59,2	$\bar{1}$,999 967
20	300	− 60. 0. 0,0	0,000 000	299.53.52,6	$\bar{1}$,994 624
21	315	− 45. 0. 0,0	0,000 000	312.18.28,1	$\bar{1}$,928 370
22	330	− 30. 0. 0,0	0,000 000	308.53. 5,3	$\bar{1}$,659 837
23	345	− 15. 0. 0,0	0,000 000	265.24.15,4	$\bar{2}$,985 602

Vu et approuvé :

Paris, le 25 février 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 26 février 1880.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

ERRATA ET REMARQUES.

Page 7, ligne 9, en remontant, *au lieu de* $n't + c' = g$, *lire* $= g'$.

Page 12, ligne 4, en remontant, effacer $\mu\pi$ dans le second membre.

Page 45. L'observation en Æ du 18 avril 1880, non publiée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, a été faite par M. Barré, astronome adjoint à l'Observatoire.

Les valeurs des angles auxiliaires Y_0 (p. 9 et 46), données dans le travail de M. Backlund et dont je me suis d'abord servi, diffèrent des véritables, dans la seconde moitié des tableaux, de 360°. Toutefois, les calculs de M. Backlund ont été exécutés avec les véritables valeurs.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Exposer la méthode de Jacobi pour le développement de l'expression

$$\left\{aa - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'a'\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Vu et approuvé :

Paris, le 25 février 1880.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 26 février 1880.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

6012 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.