N° D'ORDRE
352.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. FRANÇOIS DE SALVERT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

1re THÈSE. — ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT PERMANENT DES FLUIDES.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 Mars 1874, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
BOUQUET, BONNET, } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

DOYEN ..... MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.

PROFESSEURS HONORAIRES { DUMAS. BALARD.

PROFESSEURS .....

DELAFOSSE	Minéralogie.
CHASLES	Géométrie supérieure.
LE VERRIER	Astronomie.
P. DESAINS	Physique.
LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
PUISEUX	Astronomie.
HÉBERT	Géologie.
DUCHARTRE	Botanique.
JAMIN	Physique.
SERRET	Calcul différentiel et intégral.
H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
PASTEUR	Chimie.
DE LACAZE-DUTHIERS	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
BERT	Physiologie.
HERMITE	Algèbre supérieure.
BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
BOUQUET	Mécanique et physique expérimentale.

AGRÉGÉS .....

BERTRAND	Sciences mathématiques.
J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
PELIGOT	Sciences physiques.

SECRÉTAIRE ..... PHILIPPON.

1067 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A MON VÉNÉRÉ PROFESSEUR

LE P. JOUBERT,

DE L'ÉCOLE SAINTE-GENEVIÈVE,

HOMMAGE

D'AFFECTUEUSE RECONNAISSANCE.

F. DE SALVERT.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE

SUR LE

MOUVEMENT PERMANENT DES FLUIDES.

INTRODUCTION.

Nous n'envisageons dans ce travail que l'hypothèse particulière connue sous le nom de *mouvement permanent des fluides*. Ce cas, en effet, en même temps qu'il est le plus fréquent dans la pratique et le plus intéressant au point de vue des applications, est aussi, par une coïncidence heureuse qui se présente dans un grand nombre de questions, beaucoup plus facile à étudier que le cas général, et cela par un double motif : d'abord, au point de vue analytique, la disparition des dérivées relatives au temps introduit une simplification notable dans les équations du mouvement, et la difficulté de leur intégration en est certainement diminuée, quoiqu'elle reste toujours fort grande; en second lieu, et c'est pour nous le point le plus important, la réduction des quatre variables indépendantes aux trois seules coordonnées x, y, z permet de substituer aux procédés purement analytiques une étude géométrique fondée sur la considération

Exposé du sujet.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de surfaces représentatives, ainsi qu'on le fait dans une foule de questions de Mécanique ou de Physique mathématique, telles que la rotation des corps, l'équilibre des fluides, ou les problèmes de chaleur et d'électricité.

En effet, supposons que l'on ait déterminé la fonction de x, y et z, qui représente chacun des cinq éléments dont dépend la connaissance du mouvement, et soit, par exemple,

$$p = f(x, y, z),$$

p représentant la pression; on voit que, si l'on pose

$$f(x, y, z) = \text{const.},$$

on aura une famille de surfaces analogues aux *surfaces de niveau*, auxquelles elles se réduisent dans le cas de l'équilibre, ou encore aux *surfaces isothermes*, famille qui sera définie par cette propriété qu'en tous les points d'une même surface la pression aura la même valeur, et qu'on pourra appeler par conséquent *surfaces d'égale pression*.

On pourra considérer de même des surfaces d'égale densité, d'égale force vive, ou toute autre analogue définie par la constance d'un élément quelconque du mouvement, et l'on comprend que la considération directe de ces surfaces pourra, jusqu'à un certain point, remplacer les procédés analytiques pour arriver à la découverte des propriétés du mouvement.

C'est à ce point de vue, à la fois géométrique et analytique, que nous allons nous placer dans ce travail, et nous baserons cette étude sur la considération des *surfaces de nulle résistance*, que nous allons maintenant définir, et dont nous montrerons les propriétés remarquables.

I. — SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

DÉFINITIONS; PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES.

Résistance au mouvement d'un fluide.

Lorsqu'un fluide est en équilibre, et qu'on vient à introduire une paroi solide au sein de sa masse, la pression supportée par chaque élément de cette paroi est précisément égale à celle que supportait

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la molécule fluide primitivement située au même point, et qu'on nomme *pression hydrostatique* relative à ce point; mais, si le fluide est en mouvement, il n'en sera plus ainsi. Chaque élément de la paroi supportera, dans ce cas, non-seulement la pression hydrostatique p, qui s'exerce sur ses deux faces (et qu'il supporterait seule, s'il participait au mouvement du fluide), mais encore un effort provenant du mouvement même du fluide, et dirigé suivant ce mouvement, lequel variera évidemment en chaque point avec la grandeur et la direction de la vitesse. Cet effort, qui tend à entraîner la paroi dans le mouvement du fluide, ou, ce qui est la même chose au sens près, la résistance qu'elle oppose au mouvement lorsqu'on la maintient fixe, ont tous deux pour expression, en grandeur absolue, $\rho\omega V^2 \cos\theta$, ρ étant la densité, V la vitesse, ω l'élément de paroi, et θ l'angle aigu que forme la normale à la paroi avec la vitesse du fluide [1]. Il résulte immédiatement de cette expression, ce qui du reste est presque évident *a priori*, que si $\theta = 90°$, c'est-à-dire si le plan de la paroi contient la direction de la vitesse, la résistance dont nous parlons sera nulle, et, par conséquent, une surface dont tous les éléments satisferaient à cette condition n'opposerait aucune résistance au mouvement du fluide. Cette condition, en particulier, se trouve forcément remplie par les parois fixes du vase ou du réservoir qui contient un fluide en mouvement.

D'après cela, nous appellerons *surface de nulle résistance* « *une surface telle qu'en chacun de ses points la vitesse du fluide soit située dans le plan tangent.* » Surfaces de nulle résistance

On conclura immédiatement de cette définition :

1° Que si l'on considère un point du fluide, une surface de nulle résistance passant par ce point, et la molécule qui y est actuellement, son mouvement tout entier s'effectuera sur cette surface, en sorte que les surfaces de nulle résistance contiennent les trajectoires de toutes les molécules fluides;

2° Qu'aucune molécule fluide ne peut traverser cette surface, puisque, pour cela, il faudrait qu'au moment de son passage sa vitesse fît

---

[1] *Voir* DUHAMEL, *Cours de Mécanique*, 3e édition, liv. IV, § 193 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un angle fini avec la surface, en sorte que toutes les molécules situées actuellement à l'intérieur de cette surface y resteront constamment, et de même les molécules actuellement extérieures le seront aussi indéfiniment.

On peut donc dire qu'une surface de nulle résistance partage la masse fluide en deux portions telles, que le mouvement n'opère entre elles aucun échange d'éléments.

Propriétés relatives : Il résulte de là deux propriétés importantes que nous allons établir.

(a) à l'ellipsoïde central d'inertie, La considération du centre de gravité d'un système en mouvement est assez familière en Dynamique pour que nous n'ayons pas à la rappeler ici; mais nous pousserons plus loin l'analogie dans la même voie, et nous considérerons ce que nous appellerons *plans principaux*, *moments*, et *ellipsoïde d'inertie* d'un système à une époque donnée, c'est-à-dire les plans principaux, moments et ellipsoïde d'inertie qu'il y aurait lieu de considérer, si le système venait à être solidifié dans la figure qu'il offre à cette époque.

D'après cela, de même que le centre de gravité du système, à une époque quelconque, sera déterminé par la condition que, en prenant ce point pour origine des coordonnées, les sommes

$$\mathbf{S}\, mx, \quad \mathbf{S}\, my, \quad \mathbf{S}\, mz,$$

étendues à toutes les molécules m du système, soient nulles à cette époque, de même les plans principaux d'inertie, relatifs au même point, seront déterminés par la condition jointe à la précédente que, en les prenant pour plans coordonnés, les sommes

$$\mathbf{S}\, myz, \quad \mathbf{S}\, mzx, \quad \mathbf{S}\, mxy$$

soient également nulles à la même époque; enfin les sommes

$$\mathbf{S}\, m(y^2 + z^2), \quad \mathbf{S}\, m(z^2 + x^2), \quad \mathbf{S}\, m(x^2 + y^2),$$

prises dans les mêmes conditions, seront pour nous les moments principaux d'inertie, relatifs au centre de gravité, pour la même époque.

Si l'on applique maintenant ces considérations à une portion de la masse fluide délimitée actuellement par une surface choisie arbitraire-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment, il est facile de voir qu'en général ces divers éléments varieront de grandeur ou de position avec le temps. En effet, supposons que l'on ait déterminé ces différents éléments pour la position actuelle de la masse considérée, et prenons le centre de gravité et les plans principaux d'inertie, relatifs à cette position, pour origine et plans fixes de coordonnées. Parmi les sommes ci-dessus, les six premières seront nulles par hypothèse; mais, si nous calculons leurs valeurs pour les époques successives, elles varieront forcément avec le temps; car, en raison de la continuité du fluide, ce sont en réalité des intégrales triples par rapport à x, y, z dont les limites varient à chaque instant avec la configuration extérieure de la masse considérée. Elles ne resteront donc pas constamment nulles, et, conséquemment, l'origine et les plans coordonnés ne seront pas constamment le centre de gravité et les plans principaux d'inertie du système considéré. La valeur des moments principaux d'inertie variera en même temps par la même raison, et, par conséquent, l'ellipsoïde central qu'il y aurait lieu de considérer variera à chaque instant de grandeur et de position.

Il en serait tout autrement si nous considérions une portion de la masse fluide délimitée actuellement par des surfaces de nulle résistance; car, en vertu de la remarque faite plus haut, la configuration extérieure de cette masse restera invariablement la même, et, conséquemment, les limites d'intégration ne variant plus, les différentes sommes ci-dessus seront alors des constantes. L'origine et les plans coordonnés seront donc alors constamment le centre de gravité et les plans principaux d'inertie relatifs à ce point; et d'ailleurs les moments d'inertie relatifs au même point conserveront constamment la même grandeur. Nous pourrons, en conséquence, énoncer la propriété suivante :

Théorème I. — *L'ellipsoïde central d'inertie, relatif à une portion du fluide limitée par des surfaces de nulle résistance, reste invariable de forme et de position pendant le mouvement.*

Ces conclusions sont d'ailleurs presque évidentes dans ce cas, puisque, d'une part, en vertu de l'hypothèse de la permanence, les densités sont constantes en chaque point, et que, d'autre part, en vertu du choix de la surface limitative, on considère toujours les mêmes points

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'espace. L'assimilation de la masse fluide à un solide invariable de position s'impose alors d'elle-même à l'esprit; le centre de gravité et l'ellipsoïde central du système sont, à un instant quelconque, le centre de gravité et l'ellipsoïde central de ce solide, et par conséquent, comme lui, invariables de position aussi bien que de grandeur.

Nous allons maintenant montrer une seconde propriété des surfaces de nulle résistance qui est précisément relative à ce *solide représentatif*.

(*b*) au solide représentatif.

Conformément à ce qui précède, nous appellerons *solide représentatif* correspondant à une portion du fluide un solide continu qui, occupant la même étendue de l'espace, offrirait en chaque point la même densité que le fluide considéré, et nous énoncerons cette nouvelle propriété :

THÉORÈME II. — *Le solide représentatif correspondant à une portion de la masse fluide limitée par des surfaces de nulle résistance, serait en équilibre sous l'action des forces qui sollicitent cette masse.*

En effet, désignons par $m\mathfrak{X}$, $m\mathfrak{Y}$, $m\mathfrak{Z}$ les composantes de la force *totale* $m\mathfrak{F}$, qui sollicite la molécule de masse m, c'est-à-dire la résultante des actions tant intérieures qu'extérieures qui s'exercent sur cette molécule, en y comprenant les liaisons qui proviennent de la constitution même du fluide, en sorte que l'on puisse considérer chaque molécule comme entièrement libre; les équations de son mouvement seront

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{X}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{Z}.$$

Nous en conclurons, par une combinaison facile,

$$z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y,$$

$$x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}z,$$

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x;$$

puis, en multipliant par m et faisant la somme de ces différentes équa-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tions pour toutes les molécules m de la masse considérée, nous obtiendrons celles-ci :

$$\mathbf{S}m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathbf{S}m\mathfrak{X},$$

$$\mathbf{S}m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathbf{S}m\mathfrak{Y},$$

$$\mathbf{S}m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathbf{S}m\mathfrak{Z};$$

$$\mathbf{S}m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\mathbf{S}m(\mathfrak{Y}z-\mathfrak{Z}y),$$

$$\mathbf{S}m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\mathbf{S}m(\mathfrak{Z}x-\mathfrak{X}z),$$

$$\mathbf{S}m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\mathbf{S}m(\mathfrak{X}y-\mathfrak{Y}x).$$

Le fluide étant supposé continu, chacune de ces sommes est une intégrale triple, et, suivant une remarque déjà faite, les limites de l'intégration, c'est-à-dire la surface extérieure de la masse considérée, étant invariables avec le temps, ainsi que la masse de chaque molécule, on peut écrire

$$\mathbf{S}m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2\mathbf{S}mx}{dt^2},$$

$$\mathbf{S}m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2\mathbf{S}my}{dt^2},$$

$$\mathbf{S}m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2\mathbf{S}mz}{dt^2};$$

$$\mathbf{S}m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\mathbf{S}m\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\mathbf{S}m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\mathbf{S}m\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\mathbf{S}m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{d}{dt}\mathbf{S}m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right).$$

Or, si l'on considère les sommes

$$\mathbf{S}mx,\quad \mathbf{S}my,\quad \mathbf{S}mz,$$

$$\mathbf{S}m\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right),\quad \mathbf{S}m\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right),\quad \mathbf{S}m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comme des intégrales triples par rapport à x, y, z, elles seront évidemment indépendantes du temps, puisque d'une part le temps n'entre point explicitement sous le signe somme, et que d'autre part les limites de l'intégration n'en dépendent pas elles-mêmes. Les seconds membres des six équations que nous venons d'écrire sont donc nuls, et par conséquent aussi ceux des six autres qui les précèdent, d'où, en définitive, les six équations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \mathbf{S}m\mathcal{X} = 0, & \mathbf{S}m\mathcal{Y} = 0, & \mathbf{S}m\mathcal{Z} = 0, \\ \mathbf{S}m(\mathcal{Y}z - \mathcal{Z}y) = 0, & \mathbf{S}m(\mathcal{Z}x - \mathcal{X}z) = 0, & \mathbf{S}m(\mathcal{X}y - \mathcal{Y}x) = 0. \end{cases}$$

On reconnaît immédiatement dans ces équations la forme très-connue des équations d'équilibre des solides. Ces équations, qui comprennent toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui sollicitent la masse fluide, expriment donc parfaitement l'équilibre du solide représentatif, supposé soumis à l'action de ces forces, ce qui justifie la proposition énoncée.

Toutefois, il convient de remarquer, dès maintenant, que les forces *intérieures*, c'est-à-dire celles qui s'exercent entre deux molécules quelconques de la masse considérée, étant égales deux à deux, et de signes contraires, disparaîtront de ces équations, en sorte qu'il n'y entrera plus en réalité que les forces *extérieures*, et les forces de liaison ou pressions, qui proviennent de la partie du fluide extérieure à celle que l'on aura considérée.

Si, au lieu d'appliquer les six équations précédentes au solide représentatif, on les applique à la masse fluide elle-même, on arrive à une remarque intéressante déjà faite dans le Cours de Mécanique. On sait que les six équations dites d'*équilibre des solides* sont nécessaires pour l'équilibre d'un système quelconque; mais elles ne sont suffisantes que dans le cas d'un système invariable [1]. Si l'on eût douté de cette dernière proposition, le résultat ci-dessus en aurait fourni une preuve péremptoire en montrant un système en mouvement, pour lequel elles sont néanmoins vérifiées.

---

[1] *Voir* DELAUNAY, *Traité de Mécanique rationnelle* (3e édition), § 183, p. 304, et § 185, p. 308.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Afin de bien montrer que cette propriété est réellement caractéristique des surfaces de nulle résistance, nous allons l'établir d'une autre façon, en cherchant d'une manière générale quelles forces il faudrait appliquer à un solide représentatif quelconque, pour le maintenir en équilibre sous l'action de ces forces jointes à celles qui sollicitent le fluide. Examen du cas général.

Pour cela, appliquons d'abord aux molécules fluides contenues à l'intérieur d'une surface quelconque les deux théorèmes généraux de la Dynamique relatifs aux quantités de mouvement d'un système matériel. Démonstration synthétique.

En effet, isolons par la pensée, au sein d'un fluide en mouvement, une portion de la masse circonscrite par une surface quelconque ABCD...; et soit A'B'C'D'... la surface infiniment voisine qui renferme la même masse au bout du temps infiniment petit dt. Les volumes compris sous ces deux surfaces se composeront d'une partie finie commune, et de calottes infiniment minces qui appartiendront exclusivement à l'une ou à l'autre. Parmi ces calottes, les unes renfermeront les molécules qui sont sorties de la première surface, les autres celles qui y sont entrées, de sorte que si, en chaque point de cette surface, on projette sur la normale *intérieure* la vitesse du fluide relative à ce point, la projection ou *vitesse normale* V_n sera positive pour tous les points de certaines calottes, et négative pour tous les points des autres, et par conséquent nulle pour tous les points des lignes de séparation, c'est-à-dire pour les intersections des deux surfaces.

Cela posé, appliquons au déplacement infiniment petit que nous venons de définir le théorème des quantités de mouvements projetées sur un axe, lequel consiste en ce que l'accroissement de la somme des quantités de mouvement du système est égal à la somme des impulsions des forces extérieures appliquées au système pendant le temps considéré.

Écrivons d'abord le second membre de cette équation, c'est-à-dire la somme de ces impulsions, qui se forme sans difficulté.

Les forces extérieures sont ici :

1° Les forces extérieures données, qui s'exercent sur toute l'étendue de la masse considérée, et donneront par conséquent un terme tel, que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\mathbf{S}\varpi R_p\,dt$, R_p étant la composante de ces forces dirigées suivant l'axe considéré, et rapportée à l'unité de masse, ϖ désignant l'élément de masse, et $\mathbf{S}$ une sommation s'étendant à tout le volume de la masse considérée.

2° Les pressions provenant des molécules fluides extérieures à la masse que nous considérons. Ces forces, s'exerçant seulement sur la surface qui limite cette masse, donneront un terme tel, que $\Sigma\omega p\cos\delta.dt$, ou δ représente l'angle de la normale intérieure à cette surface avec l'axe considéré, ω l'élément de surface, et Σ une sommation s'étendant à toute la surface extérieure de la masse considérée. Le second membre de l'équation à former, ou la somme des impulsions, sera donc

$$\mathbf{S}\varpi R_p\,dt + \Sigma\omega p\cos\delta.dt.$$

Passons maintenant au premier membre, ou à l'accroissement de la quantité de mouvement du système.

Si l'on désigne par V_p la projection de la vitesse sur l'axe considéré, il faudra former la somme $\mathbf{S}\varpi V_p$ relative aux deux positions successives de la masse fluide, et faire la différence des deux résultats. Or il est facile de voir que, en vertu de la permanence du mouvement, toute la portion commune aux deux surfaces n'interviendra pas dans ce résultat, car les molécules fluides reprenant par hypothèse la même vitesse et la même densité en passant au même point, les éléments correspondant à ces points seront les mêmes dans les deux sommes, et disparaîtront par conséquent du résultat. La différence cherchée se réduit donc à la différence entre la somme des quantités de mouvement des portions qui sont sorties de la surface, et la somme des quantités de mouvement des portions qui y sont entrées.

Considérons les premières pour lesquelles, comme nous l'avons déjà remarqué, la vitesse normale V_n est négative. Si nous découpons la portion correspondante de la surface en éléments infiniment petits ω, on voit que le volume du fluide qui est sorti de la surface par un de ces éléments peut être considéré comme un cylindre droit de base ω, dont la hauteur serait $-V_n dt$, la masse $-\rho\omega V_n dt$, et par conséquent la quantité du mouvement projetée $-\rho\omega V_n\,dt V_p$. Or, comme la réunion de tous ces volumes élémentaires constitue évidemment la portion de la masse fluide qui est sortie de la surface, la quantité de mouvement correspondant à cette portion sera $-\Sigma_1\rho\omega V_n\,dt V_p$, en désignant par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Σ_1 une sommation s'étendant à toutes les portions de la surface par lesquelles il est sorti du fluide.

Si nous calculons de même la quantité de mouvement correspondant à la portion de masse fluide qui est entrée dans la surface, il est évident que nous obtiendrons une expression tout analogue, sauf qu'ici V_n étant positif, la longueur du cylindre sera $+ V_n dt$, et par conséquent l'expression résultante sera $+ \Sigma_2 \rho \omega V_n dt V_p$, la sommation Σ_2 s'étendant cette fois aux portions de surface par lesquelles il est entré du fluide.

Comme il faut faire maintenant la différence de ces deux expressions, nous trouverons en définitive que l'accroissement total de la quantité de mouvement du système sera

$$- \Sigma_1 \omega \rho V_n dt V_p - \Sigma_2 \omega \rho V_n dt V_p = - \Sigma \omega \rho V_n dt V_p,$$

la sommation Σ s'étendant désormais à toute la surface. En rapprochant les deux membres que nous avons ainsi évalués, l'équation que nous voulions établir sera

$$\mathbf{S} \varpi R_p dt + \Sigma \omega p \cos \delta . dt = - \Sigma \omega \rho V_n dt V_p,$$

ou en faisant passer tous les termes dans le premier membre, et supprimant le facteur commun dt,

$$\mathbf{S} \varpi R_p + \Sigma \omega p \cos \delta + \Sigma \omega \rho V_n V_p = 0.$$

Cela posé, si l'on désigne, conformément à l'usage, par u, v, w les composantes de la vitesse suivant les axes coordonnés; par X, Y, Z les composantes suivant ces axes de la force extérieure donnée, rapportées à l'unité de masse; enfin par α, β, γ les angles que forme avec les mêmes axes la normale *intérieure* à la surface considérée, et que l'on prenne successivement pour axe de projection les trois axes coordonnés, l'équation ci-dessus donnera lieu aux trois suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{S} \varpi X + \Sigma \omega p \cos \alpha + \Sigma \omega \rho u V_n = 0, \\ \mathbf{S} \varpi Y + \Sigma \omega p \cos \beta + \Sigma \omega \rho v V_n = 0, \\ \mathbf{S} \varpi Z + \Sigma \omega p \cos \gamma + \Sigma \omega \rho w V_n = 0. \end{cases}$$

Ayant ainsi formé une première fois la quantité de mouvement et les impulsions des forces extérieures correspondant à chaque élément

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de la masse considérée, si au lieu de les projeter sur les trois axes coordonnés nous en prenons les moments par rapport à ces axes, nous trouverons, à l'aide des mêmes raisonnements, et en appliquant l'autre théorème général de la Dynamique qui est relatif à cet objet, les trois autres équations suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\varpi(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y) + \Sigma\omega p(z\cos\beta - y\cos\gamma) + \Sigma\omega\rho(vz - wy)\mathrm{V}_n = 0, \\ \mathbf{S}\varpi(\mathrm{Z}x - \mathrm{X}z) + \Sigma\omega p(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + \Sigma\omega\rho(wx - uz)\mathrm{V}_n = 0, \\ \mathbf{S}\varpi(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x) + \Sigma\omega p(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \Sigma\omega\rho(uy - vx)\mathrm{V}_n = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) et (4), un peu longues à établir, sont intéressantes en ce qu'elles indiquent quelles forces il faudrait appliquer au solide représentatif correspondant à une surface quelconque, pour le maintenir en équilibre, conjointement avec les forces qui sollicitent la masse fluide.

En effet, on reconnaît encore dans la forme de ces équations les conditions qui expriment l'équilibre des trois systèmes de force suivants :

1° Une force appliquée à chaque élément de la masse considérée, et dont les composantes seraient $\varpi\mathrm{X}$, $\varpi\mathrm{Y}$, $\varpi\mathrm{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des forces extérieures données.

2° Une force égale à p appliquée à chaque élément de la surface extérieure de la masse considérée, et suivant la normale intérieure à cette surface, c'est-à-dire l'ensemble des actions exercées par les parties extérieures du fluide sur la portion de masse considérée.

Ces deux premiers systèmes réunis tiennent lieu dans les équations (3) et (4) de l'ensemble des forces qui sollicitent la masse considérée; car, en vertu d'une remarque déjà faite, les forces intérieures, c'est-à-dire celles qui s'exercent entre deux molécules de cette masse ne donneraient aucun terme dans ces équations, comme étant deux à deux égales et de signes contraires, en sorte que l'ensemble des deux premiers termes de ces mêmes équations représente exactement le premier membre des équations (2).

3° Enfin une force appliquée également à chaque élément de la surface, et dont les composantes seraient respectivement

$$\omega\rho u\mathrm{V}_n, \quad \omega\rho v\mathrm{V}_n, \quad \omega\rho w\mathrm{V}_n.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est facile d'interpréter la signification de ce dernier système; car, si l'on désigne respectivement par λ, μ, ν et θ les angles de la vitesse avec les trois axes coordonnés et la normale intérieure de la surface, on aura

$$(5) \qquad u = V\cos\lambda, \quad v = V\cos\mu, \quad w = V\cos\nu,$$
$$V = V\cos\theta,$$

et, par conséquent, en substituant,

$$\omega\rho u V_n = \omega\rho V^2 \cos\theta . \cos\lambda,$$
$$\omega\rho v V_n = \omega\rho V^2 \cos\theta . \cos\mu,$$
$$\omega\rho w V_n = \omega\rho V^2 \cos\theta . \cos\nu.$$

Or, si l'on se reporte à ce que nous avons dit page 5, sur la résistance d'un élément de surface au mouvement du fluide, on voit que le facteur $\omega\rho V^2 \cos\theta$ représente en grandeur absolue la résistance de l'élément ω, et que, d'ailleurs, ce facteur sera positif ou négatif, suivant que l'angle θ sera plus petit ou plus grand que 90 degrés, ou, en d'autres termes, suivant que la vitesse sera dirigée vers l'intérieur de la surface ou vers l'extérieur. D'après cela, les trois composantes ci-dessus seront, dans tous les cas, celles d'une force égale à la résistance de l'élément, dirigée suivant la vitesse en ce point, et dans celui des deux sens qui correspond à l'intérieur de la surface.

Les équations (3) et (4) pourront donc se traduire par le théorème suivant :

Théorème III. — *Le solide représentatif correspondant à une portion quelconque de la masse fluide serait en équilibre sous l'action des forces qui sollicitent cette masse, si l'on appliquait sur chaque élément de la surface extérieure, suivant la direction de la vitesse en ce point, et dans celui des deux sens qui correspond à l'intérieur de la surface, un effort égal à la résistance que cet élément supposé solidifié opposerait au mouvement du fluide.*

De cette proposition découle immédiatement comme corollaire la précédente, à savoir que *pour les surfaces de nulle résistance le solide représentatif serait en équilibre sous l'action des forces qui sollicitent la masse fluide.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous avons vu, en établissant le théorème qui précède, que, si l'on considère deux positions infiniment voisines d'une même masse fluide, la vitesse normale V_n sera nulle pour tous les points de leur intersection. Il en sera évidemment de même pour le lieu de ces intersections, d'où cette nouvelle propriété :

THÉORÈME IV. — *L'enveloppe des positions successives d'une même masse fluide est une surface de nulle résistance.*

Il est bien entendu d'ailleurs que la surface dont nous parlons n'appartient pas forcément à un type géométrique unique et déterminé, mais qu'elle pourra se composer de parties appartenant à des types ou des individualités distinctes, dont chacune vérifiera séparément la condition $V_n = 0$, et rentrera par conséquent dans la catégorie des surfaces de nulle résistance.

Démonstration analytique.

Les théorèmes relatifs au solide représentatif, que nous venons de démontrer de deux manières différentes, ont été établis en invoquant seulement les principes généraux de la dynamique. Comme ils présentent une certaine importance, il ne sera pas indifférent de montrer comment on peut aussi les déduire analytiquement des équations du mouvement.

Pour cela, rappelons d'abord que les quatre équations communes à tous les fluides sont les suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}; \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0,$$

dont les trois premières résultent immédiatement du théorème de d'Alembert, et la quatrième exprime la continuité de la masse fluide. Pour compléter les données du problème, il faudrait y ajouter une cinquième équation définissant la nature du fluide; mais cette équation

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

n'intéresse pas l'objet que nous avons en vue, et qui doit s'appliquer à tous les fluides indistinctement.

Cela posé, multiplions la première des équations (6) par ρ, l'équation (7) par u, et ajoutons en faisant passer tous les termes dans le second membre, nous obtiendrons ainsi

$$\rho X - \frac{dp}{dx} - \frac{d.\rho u^2}{dx} - \frac{d.\rho uv}{dy} - \frac{d.\rho uw}{dz} = 0;$$

puis, ayant multiplié tous les termes de cette dernière équation par $dx\,dy\,dz$, intégrons-les dans l'intérieur d'une surface fermée quelconque, le résultat pourra s'indiquer de la façon suivante :

$$\int\int\int \rho X\,dx\,dy\,dz - \int\int\int \frac{dp}{dx}\,dx\,dy\,dz - \int\int\int \frac{d.\rho u^2}{dx}\,dx\,dy\,dz$$
$$- \int\int\int \frac{d.\rho uv}{dy}\,dx\,dy\,dz - \int\int\int \frac{d.\rho uw}{dz}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

La première de ces intégrales est ce que nous avons déjà désigné sous une notation plus simple par $\mathbf{S}\varpi X$, c'est-à-dire la somme des projections sur l'axe des x de toutes les forces extérieures appliquées au système considéré. Dans chacune des autres intégrales triples, nous pourrons effectuer une intégration et écrire, par conséquent, l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\mathbf{S}\varpi X - \int\int (p)_1^2\,dy\,dz$$
$$- \int\int\int (\rho u^2)_1^2\,dy\,dz - \int\int (\rho uv)_1^2\,dz\,dx - \int\int (\rho uw)_1^2\,dx\,dy = 0,$$

en indiquant, suivant une notation connue, par un crochet affecté de deux indices la différence des substitutions correspondant aux deux limites de l'intégration.

Or, si nous appelons encore α, β, γ les angles de la normale intérieure avec les axes et ω un élément de surface, on pourra prendre dans ces équations

$$dy\,dz = \omega\cos\alpha, \quad dz\,dx = \omega\cos\beta, \quad dx\,dy = \omega\cos\gamma,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou bien

$$dy\,dz = -\omega\cos\alpha,\quad dz\,dx = -\omega\cos\beta,\quad dx\,dy = -\omega\cos\gamma,$$

suivant qu'on entrera dans la surface ou qu'on en sortira, en s'avançant à partir de l'élément ω dans les directions respectives des x, des y et des z, ou, en d'autres termes, suivant que l'élément ω appartiendra à la portion de la surface à laquelle se rapporte l'indice 1, ou à celle à laquelle se rapporte l'indice 2.

Il suit de là que, si l'on désigne par Σ un signe de sommation s'étendant à tous les éléments de la surface, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\mathbf{S}\varpi\mathrm{X} + \Sigma\omega p\cos\alpha + \Sigma\omega\rho u^2\cos\alpha + \Sigma\omega\rho uv\cos\beta + \Sigma\omega\rho uw\cos\gamma = 0,$$

ou, en réunissant les termes semblables,

$$\mathrm{S}\varpi\mathrm{X} + \Sigma\omega p\cos\alpha + \Sigma\omega\rho u(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) = 0;$$

mais, comme nous avons appelé V_n la projection de la vitesse sur la normale intérieure, nous avons, par définition,

$$\mathrm{V}_n = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma,$$

et, par conséquent, en reportant dans l'équation précédente, celle-ci prendra la forme

$$\mathbf{S}\varpi\mathrm{X} + \Sigma\omega p\cos\alpha + \Sigma\omega\rho u\mathrm{V}_n = 0,$$

ce qui est précisément la première des équations (3). On obtiendrait les deux autres par un calcul tout semblable.

De même, pour obtenir la première des équations (4), multiplions la deuxième des équations (6) par z, la troisième par y, et retranchons l'une de l'autre après avoir ajouté de part et d'autre le terme vw, le résultat pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho}\left(z\frac{dp}{dy} - y\frac{dp}{dz}\right) = \mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y$$
$$- u\frac{d(vz - wy)}{dx} - v\frac{d(vz - wy)}{dy} - w\frac{d(vz - wy)}{dz}.$$

Puis, multipliant cette dernière équation par ρ, et l'ajoutant à l'équa-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion (7) multipliée par le facteur $(vz - wy)$, on formera la suivante :

$$\rho(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y) - \left(z\frac{dp}{dy} - y\frac{dp}{dz}\right)$$
$$- \frac{d.\rho u(vz - wy)}{dx} - \frac{d.\rho v(vz - wy)}{dy} - \frac{d.\rho w(vz - wy)}{dz} = 0,$$

qui, par l'intégration dans les mêmes conditions que précédemment, conduira à celle-ci :

$$\mathbf{S}\varpi(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y) + \Sigma\omega p(z\cos\beta - y\cos\gamma)$$
$$+ \Sigma\omega\rho(vz - wy)(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) = 0,$$

ou, sous une forme plus abrégée,

$$\mathbf{S}\varpi(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y) + \Sigma\omega p(z\cos\beta - y\cos\gamma) + \Sigma\omega\rho(vz - wy)\mathrm{V}_n = 0,$$

ce qui est la première des équations (4), et les deux autres s'obtiendraient évidemment d'une façon analogue.

Nous retrouvons ainsi directement par le calcul les équations (3) et (4) qui constituent le théorème III. Si maintenant nous y introduisons la supposition $\mathrm{V}_n = 0$, ce qui revient à considérer une portion de la masse fluide limitée par des surfaces de nulle résistance, ces équations se réduiront par la disparition des derniers termes aux suivantes :

$$\mathbf{S}\varpi\mathrm{X} + \Sigma\omega p\cos\alpha = 0,$$
$$\mathbf{S}\varpi\mathrm{Y} + \Sigma\omega p\cos\beta = 0,$$
$$\mathbf{S}\varpi\mathrm{Z} + \Sigma\omega p\cos\gamma = 0,$$

$$\mathbf{S}\varpi(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y) + \Sigma\omega p(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0,$$
$$\mathbf{S}\varpi(\mathrm{Z}x - \mathrm{X}z) + \Sigma\omega p(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0,$$
$$\mathbf{S}\varpi(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x) + \Sigma\omega p(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0,$$

lesquelles coïncident exactement avec le système (2), ainsi que nous avons eu déjà occasion de le remarquer (p. 14).

On retrouve donc en même temps, par le calcul, la propriété caractéristique des surfaces de nulle résistance exprimée par le théorème II, et c'est ainsi qu'au début de nos recherches nous avions établi cette

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

propriété dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. XL, séance du 29 mai 1865).

Voyons maintenant comment on déterminera les surfaces de nulle résistance.

II. — RECHERCHE ANALYTIQUE DES SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES. — SOLUTIONS COMPLÈTES. — ÉQUATION GÉNÉRALE EN TERMES FINIS.

Équation aux différences partielles.

La définition que nous avons donnée des surfaces de nulle résistance est susceptible d'une traduction analytique fort simple. En effet, en désignant, suivant l'usage, par p et q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, il faudra exprimer que, pour une pareille surface, la normale dont les cosinus sont proportionnels à p, q et -1 est perpendiculaire à la droite dont les cosinus sont proportionnels à u, v, w, ce qui donne immédiatement l'équation

$$(8) \qquad up + vq = w,$$

équation aux différences partielles du premier ordre qui s'intégrera par les procédés habituels.

Pour obtenir l'équation en x, y, z, il faudra donc préalablement connaître les expressions de u, v, w à l'aide de ces mêmes variables, et, comme l'intégration des équations du mouvement est en général impossible, il semble tout d'abord qu'il n'y ait pas lieu de rechercher une équation générale qui convienne à ces surfaces.

On aurait tort de s'arrêter là néanmoins, car il est possible que les équations de ces surfaces puissent s'exprimer à l'aide des éléments u, v, w, p, ρ, ou tout autre défini à l'avance, sans qu'il soit nécessaire de connaître leur détermination en x, y et z; et il y aurait dès lors intérêt, au point de vue géométrique, à connaître cette expression, bien qu'elle ne se prêtât à aucune application numérique. C'est pourquoi, au lieu de rechercher la solution générale de l'équation ci-dessus, laquelle doit renfermer une fonction arbitraire, nous envisagerons d'abord les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

solutions particulières, connues sous le nom de *solutions complètes*, c'est-à-dire celles qui renferment seulement une constante arbitraire, et qui, par conséquent, peuvent être mises sous la forme

$$\Phi(x, y, z) = \text{const.},$$

où Φ est une fonction parfaitement déterminée, mais actuellement inconnue, que nous allons nous proposer de rechercher.

Pour cela, nous déduirons de cette dernière équation les valeurs de p et de q, et nous les reporterons dans l'équation (8), ce qui nous donnera la suivante :

$$(9) \qquad u\frac{d\Phi}{dx} + v\frac{d\Phi}{dy} + w\frac{d\Phi}{dz} = 0,$$

ainsi que nous aurions pu d'ailleurs l'écrire immédiatement.

Interprétation mécanique de cette équation.

Or cette seconde forme, outre sa symétrie, a un avantage considérable : elle exprime immédiatement une propriété importante du mouvement, à savoir que l'élément caractérisé par la fonction $\Phi(x, y, z)$ conserve invariablement la même grandeur pour une même molécule. En effet, le temps n'entrant pas explicitement dans la fonction Φ, sa dérivée totale, prise en considérant x, y, z comme des fonctions de t, sera

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dt} \quad (^1),$$

ce qui n'est autre chose que le premier membre de l'équation (9), en raison des définitions admises

$$(10) \qquad u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

et, par conséquent, la fonction Φ considérée pour une même molécule ne varie pas avec le temps.

La question est donc réduite à rechercher quels sont les éléments

(1) Nous écrivons ce terme entre parenthèses pour marquer une dérivée totale prise par rapport au temps, lequel n'entre explicitement dans aucune des expressions considérées.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

caractéristiques d'une molécule qui restent invariables dans son mouvement.

Première solution complète.

Il en est un tout d'abord qui se présente tout naturellement à l'esprit : c'est sa masse ; et il résulte immédiatement de ce qui précède qu'en égalant son expression à une constante nous obtiendrons une première famille de surfaces de nulle résistance.

Cas des liquides.

En effet, si le fluide est incompressible, la molécule qui occupe actuellement le volume v conservera indéfiniment ce même volume; il s'ensuit qu'en un point quelconque de sa trajectoire sa masse aura pour expression $v\rho$, laquelle expression devra, en vertu de la remarque faite plus haut, vérifier l'équation différentielle (9), et l'on doit avoir par conséquent, en supprimant le facteur constant v, l'équation

$$(11) \qquad u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0,$$

qui est bien effectivement une des équations du problème dans le cas des liquides hétérogènes.

Il suit de là que l'équation

$$(12) \qquad \rho = \text{const.}$$

est alors une des solutions cherchées, et que, par conséquent, les *surfaces d'égale densité* constituent dans ce cas une première famille de surfaces de nulle résistance.

Cas des fluides compressibles.

Si, au contraire, le fluide est compressible, la molécule qui occupe actuellement le volume infiniment petit v occupera, au bout d'un certain temps, le volume $v' = v(1+\Delta)$, la quantité Δ, qui peut être positive ou négative, mesurant la dilatation relative au déplacement considéré. Or, comme il y a intérêt à pouvoir comparer les dilatations correspondant à divers déplacements de la même molécule, ou même des différentes molécules entre elles, il convient de compter ces déplacements et les dilatations auxquelles ils donnent lieu, à partir d'une position définie pour chaque molécule, par exemple à partir de son passage sur une même surface, arbitrairement choisie, qui rencontre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

toutes les trajectoires fluides, et que nous pourrons appeler, à cause de cela, *surface origine des dilatations*.

Définition de la dilatation.

Nous définirons donc la quantité Δ par cette condition que, v_0 étant le volume de la molécule lors de son passage sur cette surface, son volume en un point quelconque de sa trajectoire soit exprimé par la quantité

$$v = v_0(1 + \Delta), \tag{13}$$

qu'il s'agisse de positions antérieures ou postérieures à son passage sur cette surface. La quantité Δ, que nous appellerons *dilatation*, aura alors une valeur parfaitement déterminée en chaque point, et nous montrerons tout à l'heure comment on obtiendra son expression en x, y et z; mais on comprend dès maintenant que la connaissance de cette fonction permettra d'apprécier les dilatations correspondant à un déplacement quelconque; car, si nous considérons successivement deux positions de la même molécule, où les volumes soient respectivement v et v', et les dilatations Δ et Δ', des deux équations

$$v = v_0(1 + \Delta) \quad \text{et} \quad v' = v_0(1 + \Delta'),$$

on tirera sans difficulté

$$v' - v = v_0(\Delta' - \Delta),$$

et par conséquent

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{\Delta' - \Delta}{1 + \Delta},$$

rapport qui exprime la dilatation correspondant au déplacement considéré.

Il convient en même temps de préciser le sens que nous devons attacher au mot *molécule*, que nous avons employé jusqu'ici pour désigner une portion quelconque infiniment petite de la masse fluide; car, du moment que nous nous proposons de trouver une expression de la masse moléculaire en chaque point, il importe de définir comment nous comprenons la division de la masse fluide en portions infiniment petites, auxquelles nous attribuons le nom de *molécules*. C'est ce que nous ferons, en entendant désormais par ce mot « *toute portion de la*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

masse fluide qui occupait un même volume infiniment petit v_0, *lors de son passage sur la surface prise pour origine des dilatations.* » Il est évident, d'ailleurs, que cette définition correspondrait, pour le cas des liquides, à la division de la masse en volumes infiniment petits, tous égaux à v_0.

Expression de la masse moléculaire.

A l'aide de ces deux conventions, le volume de la molécule étant exprimé en un point quelconque par la quantité $v_0(1+\Delta)$, sa masse le sera de même par la quantité $\rho v_0(1+\Delta)$, ρ et Δ étant les valeurs de la densité et de la dilatation relatives à ce point. Cette quantité devant demeurer constante dans le mouvement de la molécule, il s'ensuit qu'on devra avoir, comme nous l'avons déjà expliqué,

$$u\frac{d.\rho v_0(1+\Delta)}{dx}+v\frac{d.\rho v_0(1+\Delta)}{dy}+w\frac{d.\rho v_0(1+\Delta)}{dz}=0,$$

ou, en supprimant le facteur commun v_0,

$$(14)\qquad u\frac{d.\rho(1+\Delta)}{dx}+v\frac{d.\rho(1+\Delta)}{dy}+w\frac{d.\rho(1+\Delta)}{dz}=0.$$

Cette équation donne lieu aux observations suivantes :

En premier lieu, la dilatation Δ, dont la connaissance permet seule d'apprécier les variations de volume éprouvées par les différentes parties de la masse fluide, doit être considérée comme une nouvelle fonction inconnue de x, y et z, analogue aux fonctions u, v, w, p et ρ, qui figurent dans les équations (6) et (7), et l'équation précédente, analogue à l'équation (11) dans le cas des liquides, est précisément celle qui permettra d'arriver à sa détermination [1]; car, si l'on suppose connue l'expression de u, v, w et ρ, à l'aide des équations (6) et (7), Δ sera déterminé par la condition de vérifier l'équation (14), et, en

---

[1] Si l'on développe l'équation (14) de la façon suivante :

$$\frac{1}{1+\Delta}\left[u\frac{d(1+\Delta)}{dx}+v\frac{d(1+\Delta)}{dy}+w\frac{d(1+\Delta)}{dz}\right]=-\frac{1}{\rho}\left(u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}\right),$$

et qu'on la rapproche de l'équation (7) préparée de la même manière, c'est-à-dire mise sous la forme

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{\rho}\left(u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}\right),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

outre, de se réduire à zéro tout le long de la surface prise pour origine des dilatations. On peut dire de la sorte que le problème du mouvement d'un fluide comporte dans tous les cas la détermination de cinq inconnues, à l'aide des cinq équations (6), (7) et (14), puisque, dans le cas des liquides, la dilatation disparaissant, les équations (11) et (14) se confondent, et que, dans le cas des fluides compressibles, la pression et la densité étant fonction l'une de l'autre ne forment plus à proprement parler qu'une seule inconnue.

Surfaces d'égale masse.

En second lieu, l'équation (14) exprime que l'équation

$$\rho(1+\Delta) = \text{const.} \tag{15}$$

satisfait à l'équation (9), c'est-à-dire à l'équation différentielle des sur-

---

obtiendra immédiatement par comparaison la suivante :

$$u\frac{d.l(1+\Delta)}{dx} + v\frac{d.l(1+\Delta)}{dy} + w\frac{d.l(1+\Delta)}{dz} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}, \tag{14 bis}$$

qui ne diffère de celle donnée par Cauchy (réduite au cas du mouvement permanent) que par le changement de Δ en $l(1+\Delta)$, et se confond par conséquent avec elle, si l'on suppose Δ très-petit (voir *Exercices de Mathématiques*, t. III, p. 130).

Cette hypothèse est effectivement contenue dans les raisonnements que présente l'illustre géomètre pour établir cette équation, bien qu'il ne l'énonce pas explicitement.

Pour le montrer, adoptons, pour un instant, ses notations, c'est-à-dire désignons, non plus par Δ, mais par υ la *dilatation* que nous nous proposons de déterminer, et par Δ une simple caractéristique de différentiation. La fonction υ, pour avoir un sens, devra nécessairement exprimer une grandeur comptée pour chaque molécule à partir d'une position fixe et déterminée (x_0, y_0, z_0) ; il en résulte que la dilatation correspondant à un déplacement fini, compté à partir d'un point quelconque (x, y, z) jusqu'à un point (x', y', z'), sera exprimée par le rapport $\frac{\upsilon'-\upsilon}{1+\upsilon}$, ainsi que nous l'avons établi, page 23 ; d'où il suit que la *dilatation instantanée*, c'est-à-dire celle correspondant à un déplacement infiniment petit quelconque aura pour expression

$$\theta\Delta t = \frac{\Delta\upsilon}{1+\upsilon}, \tag{14 ter}$$

et l'on ne pourrait prendre $\theta\Delta t = \Delta\upsilon$, comme le fait Cauchy, que pour le premier instant, à partir de la position prise pour origine, ou à la condition de supposer υ constamment très-petit.

Si l'on n'admet pas cette hypothèse, les raisonnements formulés par Cauchy conduisent alors avec la valeur (14 *ter*) à l'équation ci-dessus (14 *bis*), qui concorde parfaitement, comme nous venons de le voir, avec l'équation (14), à laquelle nous avons été conduit par une autre méthode.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faces de nulle résistance. Or, si l'on suppose dans cette équation ρ et Δ exprimés en x, y, z, on aura une famille de surfaces telles, que la masse moléculaire, dont nous avons donné tout à l'heure l'expression (p. 24), aura la même grandeur en tous les points d'une même surface, et qu'on pourra conséquemment appeler *surfaces d'égale masse moléculaire*, ou simplement *surfaces d'égale masse*. D'ailleurs, l'équation (15) se réduisant à l'équation (12) par la supposition $\Delta = 0$, la solution relative au cas des liquides se trouve comprise dans celle-ci, en sorte que l'on peut dire, dans tous les cas, que les *surfaces d'égale masse*, représentées par l'équation (15), constituent une première famille de surfaces de nulle résistance.

Définitions :

Avant d'en montrer une seconde, nous allons compléter les définitions qui précèdent par deux autres qui s'y rattachent immédiatement.

(*a*) du volume primitif,

D'abord il résulte de l'équation (13) que la molécule qui occupe actuellement le volume v occupait, lors de son passage sur la surface origine des dilatations, le volume

$$v_0 = \frac{v}{1 + \Delta},$$

qu'on peut appeler en raison de cela son volume primitif. Étendant cette même locution à une portion finie quelconque de la masse fluide, nous appellerons *volume primitif* de cette masse la somme des volumes primitifs de tous les éléments qui la composent, ou, en d'autres termes, l'intégrale $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{1 + \Delta}$ étendue à tout le volume actuel de la masse considérée; on voit que ce volume est précisément celui qu'occuperait cette masse, si chacun des éléments qui la composent avait conservé le volume qu'il occupait lors de son passage sur la surface origine des dilatations.

(*b*) de la dilatation totale.

En second lieu, l'accroissement de volume subi par la molécule, depuis son passage sur la surface origine des dilatations jusqu'à sa position actuelle, est mesuré par la différence

$$v - v_0 = v - \frac{v}{1 + \Delta} = v\left(1 - \frac{1}{1 + \Delta}\right) = v\,\frac{\Delta}{1 + \Delta}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La somme des accroissements analogues correspondant à tous les éléments d'une portion finie de la masse sera ce que nous appellerons la *dilatation totale* de cette masse. On voit qu'elle aura pour expression l'intégrale $\int\int\int \frac{\Delta}{1+\Delta}\,dx\,dy\,dz$ étendue à tout le volume de la masse considérée, et qu'elle exprime la différence entre son volume actuel et ce que nous avons appelé son *volume primitif*.

Ces définitions posées, poursuivons maintenant la recherche des surfaces de nulle résistance.

Deuxième solution complète.

Il existe un autre élément caractéristique de la molécule, qui reste invariable pendant le mouvement, et qui, par conséquent, devra fournir une nouvelle solution de l'équation (9), c'est l'*énergie;* car cette expression, empruntée à la théorie mécanique de la chaleur, est définie précisément par cet énoncé du théorème des forces vives que, *dans le mouvement d'un point matériel, son énergie reste constante.* Nous n'aurons donc qu'à former l'équation des forces vives pour la molécule fluide, et, en égalant à un paramètre arbitraire l'ensemble des termes variables (ou énergie moléculaire), nous aurons une nouvelle famille de surfaces de nulle résistance.

Or, si l'on conserve les notations déjà employées, cette équation est la suivante :

$$\frac{1}{2}m(V^2 - V_0^2) = \int_0^t m(\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}\,dy + \mathfrak{Z}\,dz),$$

en affectant de l'indice o les termes relatifs à la position initiale.

La force totale qui sollicite la molécule, et dont les composantes figurent dans cette équation, se compose, comme l'on sait, de deux éléments : les forces extérieures qui s'exercent sur toute sa masse, et dont nous avons déjà représenté les composantes par mX, mY, mZ, et les forces intérieures ou pressions qui s'exercent sur la surface de la molécule seulement. Le procédé par lequel on évalue ces dernières forces est fort connu; nous ne le rappellerons donc pas ici, et nous poserons immédiatement

$$m\mathfrak{X} = m\left(X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right), \quad m\mathfrak{Y} = m\left(Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}\right), \quad m\mathfrak{Z} = m\left(Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}\right);$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

car c'est précisément en égalant ces composantes à zéro que l'on obtient les équations d'équilibre des fluides.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation qui précède, on pourra faire sortir du signe $\int$ le facteur m, qui est, par hypothèse, constant par rapport au temps, ce qui donnera l'équation

$$\frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = m\int_0^t \left[\left(X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}\right)dz\right],$$

ou, sous une forme plus concise,

$$\frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = m(q - q_0), \tag{16}$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$q = \int \left[\left(X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}\right)dz\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$q = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \int \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz\right).$$

Or, si l'on considère les différentielles totales correspondant à un accroissement du temps dt, et que l'on suppose, suivant l'usage, que les composantes des forces extérieures soient les dérivées partielles d'une même fonction $F(x, y, z)$, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = dp, \\ &\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dF, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

de sorte que la fonction q, à laquelle nous donnerons tout à l'heure un nom, pourra s'écrire simplement

$$q = F(x, y, z) - \int \frac{dp}{\rho}, \tag{18}$$

et il n'y aura qu'à substituer cette expression dans l'équation (16) pour avoir l'équation des forces vives.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est à remarquer que l'intégrale qui figure dans cette dernière expression peut toujours s'exprimer en termes finis; car, d'une part, si le fluide est incompressible, le facteur ρ étant alors constant par rapport au temps pourra sortir du signe $\int$, en sorte que l'intégrale se réduira simplement à $\frac{p}{\rho}$; et si, d'autre part, le fluide est compressible, la densité étant alors liée à la pression par une équation de la forme $\rho = f(p)$, l'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ a alors un sens parfaitement déterminé, qu'on peut supposer exprimé par une fonction finie $\mathcal{F}(p)$. On voit d'ailleurs que, pour l'intelligence de la formule (18), on peut faire abstraction de la considération du temps qui a servi à l'établir, et supposer dès lors que les signes $\int$ et d qui y figurent se rapportent simplement à la variable p, considérée pour un instant comme variable indépendante; car on obtient de cette façon pour la valeur de q les mêmes expressions que nous venons d'établir. L'expression (18) de q prend alors une signification intrinsèque parfaitement précise, qui est celle que nous lui attribuerons désormais.

Cela posé, arrêtons-nous quelques instants sur cette équation (16), pour établir encore quelques définitions qui nous seront utiles dans le paragraphe suivant : Définitions :

1° Le premier membre de cette équation représentant le demi-accroissement de la force vive de la molécule de masse m dans le déplacement considéré, la force vive moléculaire a pour expression en un point quelconque $m\mathrm{V}^2$, et la somme d'expressions analogues correspondant à tous les éléments d'une portion finie du fluide constituerait la force vive totale de cette masse; mais, afin de n'introduire dans notre analyse que des quantités finies, nous considérerons, au lieu et place de la force vive moléculaire, son rapport à la masse moléculaire m, c'est-à-dire la quantité (a) de la force vive.

$$\mathrm{V}^2 = u^2 + v^2 + w^2, \tag{19}$$

que nous appellerons *force vive au point* (x, y, z), ou simplement la *force vive*, de même que, dans l'évaluation des pressions, on appelle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pression au point (x, y, z) le rapport de la pression effective qui s'exerce sur un élément situé en ce point à l'aire de cet élément.

D'ailleurs, la force vive moléculaire relative à un élément de masse quelconque $\varpi = \rho\, dx\, dy\, dz$ ayant ainsi pour expression

$$\varpi V^2 = \rho V^2\, dx\, dy\, dz,$$

la *force vive totale* correspondant à une portion déterminée du fluide sera exprimée par la somme

$$\mathbf{S}\varpi V^2 = \int\int\int \rho V^2\, dx\, dy\, dz,$$

étendue à tout le volume de cette portion du fluide.

(*b*) du travail,

2° Le second membre de cette même équation (16) exprime le travail accompli par la molécule m dans son déplacement. La quantité que nous avons appelée q étant une fonction parfaitement déterminée en x, y et z, il suit de là que, si nous considérons l'ensemble des points (x_0, y_0, z_0) qui satisfont à l'équation $q_0 = 0$, le second membre de l'équation (16), qui se réduit alors à mq, représentera le travail produit par la molécule de masse m en arrivant à sa position actuelle, à partir de son passage sur la surface $q_0 = 0$, que nous appellerons à cause de cela *surface origine du travail*. Si donc nous convenons de ne considérer que des déplacements comptés à partir de cette surface, le travail moléculaire aura pour expression mq; et, si nous nous laissons guider par les mêmes considérations que précédemment à propos de la force vive, la quantité q pourra s'appeler le *travail au point* (x, y, z), ou simplement le *travail*. Une somme de travaux moléculaires pris dans les mêmes conditions, ou, en d'autres termes, l'intégrale

$$\mathbf{S}\varpi q = \int\int\int q\rho\, dx\, dy\, dz,$$

étendue à tout l'intérieur d'une surface quelconque, sera par ailleurs ce que nous appellerons le *travail total* correspondant à cette surface.

(*c*) de l'énergie.

3° Enfin, si l'on sépare dans l'équation (16) les termes variables des termes constants, en l'écrivant de la façon suivante :

$$m\left(\tfrac{1}{2}V^2 - q\right) = m\left(\tfrac{1}{2}V_0^2 - q_0\right), \tag{20}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le premier membre sera ce que dans la théorie de la chaleur on appellerait l'*énergie moléculaire*, et la somme d'expressions analogues, correspondant à tous les éléments d'un système, serait l'énergie du système. Adoptant donc cette locution et agissant comme nous l'avons fait pour la force vive et le travail, nous considérerons plus spécialement le rapport de l'énergie moléculaire à la masse moléculaire, c'est-à-dire la fonction

$$\varphi = \tfrac{1}{2} V^2 - q, \tag{21}$$

que nous appellerons *énergie au point* (x, y, z), ou simplement *énergie ;* et l'*énergie totale*, correspondant à une partie définie du fluide, sera de même l'intégrale

$$\mathbf{S}\varpi\varphi = \int\int\int \varphi\rho\, dx\, dy\, dz,$$

étendue à tout le volume de la masse considérée.

Si l'on remplace d'ailleurs, dans l'équation de définition (21), q et V^2 par leurs valeurs (18) et (19), l'énergie φ sera exprimée au moyen des éléments habituellement considérés de la façon suivante :

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - F(x, y, z) + \int \frac{dp}{\rho}. \tag{22}$$

Ces nouvelles définitions étant admises, revenons à l'objet que nous avons plus particulièrement en vue dans ce paragraphe, qui est la recherche des surfaces de nulle résistance. Surfaces d'égale énergie.

Si l'on divise par m les deux membres de l'équation (20), cette équation pourra s'écrire

$$\tfrac{1}{2} V^2 - q = \tfrac{1}{2} V_0^2 - q_0,$$

ou plus simplement, à l'aide de la notation que nous venons d'adopter,

$$\varphi = \text{const.}, \tag{23}$$

la fonction φ étant définie par les équations (21) ou (22).

Si d'ailleurs on différentie cette dernière équation par rapport au

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

temps, on aura, en vertu des équations (10),

$$(24) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = u\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{dz} = 0 \text{ [1]},$$

c'est-à-dire que l'équation (23) vérifiera l'équation différentielle (9) : et par conséquent, en considérant φ comme une fonction déterminée de x, y et z, la famille de surfaces représentée par cette équation, que l'on peut appeler *surfaces d'égale énergie*, constituera une deuxième famille de surfaces de nulle résistance.

Intégrale des forces vives.

Avant de déduire des résultats que nous avons déjà acquis les conséquences qu'ils renferment, revenons un instant sur ce qui précède pour établir d'une autre façon l'équation si importante des *forces vives*. Nous l'avons formée immédiatement tout à l'heure, en appliquant le théorème du travail au mouvement de la molécule fluide ; mais on sait que cette équation est une intégrale des équations du mouvement, toutes les fois que le temps n'entre pas explicitement dans l'expression des liaisons. Cette condition étant évidemment remplie dans le cas actuel, par suite de l'hypothèse de la permanence, il y a intérêt à montrer comment on peut obtenir analytiquement cette équation par l'intégration directe des équations du mouvement : c'est ce que nous allons faire en peu de mots.

Pour cela il faut, comme l'on sait, multiplier les équations du mouvement respectivement par dx, dy, dz et faire la somme, et l'on doit arriver ainsi à une différentielle exacte ; mais, dans le cas actuel, cette forme n'apparaît pas immédiatement, parce que, pour établir les équations (6), on a remplacé partout dans l'expression des forces d'inertie $\frac{dx}{dt}$ par u, $\frac{dy}{dt}$ par v, $\frac{dz}{dt}$ par w ; il faut donc, pour que cette forme apparaisse, rétablir à la place de u, v, w leurs valeurs (10), ou, ce qui revient au même, remplacer dans le calcul dx, dy, dz par leurs valeurs

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt;$$

d'où, en conséquence, la série d'opérations suivantes.

---

[1] Même remarque qu'à la page 21.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Multiplions les équations (6) respectivement par $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, et ajoutons en rapprochant les termes situés sur une même colonne verticale, et, faisant ressortir les facteurs communs, nous obtiendrons ainsi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dp}{dx}\,u\,dt + \frac{dp}{dy}\,v\,dt + \frac{dp}{dz}\,w\,dt\right)\\
&= \mathrm{X}\,u\,dt + \mathrm{Y}\,v\,dt + \mathrm{Z}\,w\,dt\\
&\quad - u\left(u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} + w\frac{dw}{dx}\right)dt\\
&\quad - v\left(u\frac{du}{dy} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dw}{dy}\right)dt\\
&\quad - w\left(u\frac{du}{dz} + v\frac{dv}{dz} + w\frac{dw}{dz}\right)dt,
\end{aligned}$$

ou, en remettant à présent dx, dy, dz à la place de leurs valeurs $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\,dx + \frac{dp}{dy}\,dy + \frac{dp}{dz}\,dz\right)\\
&= \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz\\
&\quad - \left(u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} + w\frac{dw}{dx}\right)dx\\
&\quad - \left(u\frac{du}{dy} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dw}{dy}\right)dy\\
&\quad - \left(u\frac{du}{dz} + v\frac{dv}{dz} + w\frac{dw}{dz}\right)dz.
\end{aligned}$$

Si nous représentons maintenant par la caractéristique d une différentielle totale prise en considérant x, y, z comme des fonctions de la variable indépendante t, et que nous ayons égard aux équations (17), celle qui précède pourra s'écrire simplement

$$\frac{dp}{\rho} = d\mathrm{F} - d\tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Sous cette forme, le caractère de différentielle exacte est manifeste, car ρ étant, ainsi que nous l'avons déjà dit, ou constant par rapport au temps, qui est ici la variable indépendante, ou fonction de p, le premier membre est, dans tous les cas, la différentielle de l'expres-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sion $\int \frac{dp}{\rho}$, entendue comme nous l'avons expliqué (p. 29), et par conséquent l'équation précédente donnera par l'intégration, en faisant passer tous les termes dans un même membre,

$$\int \frac{dp}{\rho} - F(x, y, z) + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \text{const.},$$

équation qui, eu égard à la valeur (22) de φ, se confond bien avec l'équation (23), à laquelle nous avions été conduit directement.

Équation générale en termes finis.

Nous avons donc, en résumé, trouvé deux familles de surfaces de nulle résistance, les surfaces d'*égale masse* et les surfaces d'*égale énergie*, dont les équations constituent deux solutions complètes de l'équation différentielle de cette classe de surfaces. Or, cette équation étant du premier ordre, ce résultat suffit pour en obtenir l'intégrale générale.

En effet, si l'on désigne par Ψ une fonction arbitraire, l'équation

$$\Psi[\rho(1+\Delta), \varphi] = 0$$

donnera évidemment

$$\begin{aligned} u\frac{d\Psi}{dx} + v\frac{d\Psi}{dy} + w\frac{d\Psi}{dz} \\ = \frac{d\Psi}{d.\rho(1+\Delta)}\left[u\frac{d.\rho(1+\Delta)}{dx} + v\frac{d.\rho(1+\Delta)}{dy} + w\frac{d.\rho(1+\Delta)}{dz}\right] \\ + \frac{d\Psi}{d\varphi}\left(u\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0; \end{aligned}$$

car les deux facteurs entre parenthèses, qui figurent dans le second membre, sont identiquement nuls, en vertu des équations (14) et (24).

L'équation ci-dessus vérifie donc l'équation aux différences partielles (9) ou (8), et comme elle renferme d'ailleurs une fonction arbitraire permettant de réduire z à une fonction donnée de y pour $x = 0$, c'est bien l'intégrale générale de l'équation (8).

Si on la résout par rapport à φ, et qu'on remplace ensuite cette fonction par sa valeur (22), cette même équation pourra s'écrire sous la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

forme plus explicite

$$\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-F(x,y,z)+\int\frac{dp}{\rho}=\psi[\rho(1+\Delta)],$$

en désignant par ψ une fonction arbitraire.

Telle est l'équation générale des surfaces *de nulle résistance*, exprimée à l'aide des éléments habituellement considérés du mouvement.

III. — ÉTUDE PARTICULIÈRE DES SURFACES D'ÉGALE MASSE ET D'ÉGALE ÉNERGIE.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT. — PROPRIÉTÉS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

Les deux grandes familles de surfaces que nous avons rencontrées dans le paragraphe précédent, et dont les équations sont les solutions complètes de l'équation différentielle des surfaces de nulle résistance, fournissent immédiatement une image très-nette du mouvement, ce qui était le but que nous nous étions proposé en commençant cette étude. **Détermination géométrique :**

En effet, chaque molécule étant assujettie à rester séparément sur l'une des surfaces appartenant à chacune des deux familles, puisque ce sont toutes deux des surfaces de *nulle résistance*, nous pouvons formuler immédiatement la proposition suivante : **(*a*) de la trajectoire,**

THÉORÈME V. — *La trajectoire de chaque molécule est l'intersection des deux surfaces d'égale masse et d'égale énergie, qui contiennent sa position initiale.*

On voit ainsi comment ces deux familles de surfaces partagent la masse fluide en couches infiniment minces dont les intersections constituent précisément ces *filets fluides*, constants de forme et d'apparence, qui ne sont autre chose que la succession des molécules soumises aux mêmes influences. **(*b*) de la vitesse.**

La trajectoire de la molécule étant ainsi définie par l'intersection de deux surfaces, son mouvement serait complétement déterminé, si l'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avait un moyen simple de se représenter la vitesse en chaque point. Cette seconde image nous sera fournie par le théorème suivant, que nous établirons, comme les précédents, de deux façons différentes :

THÉORÈME VI. — *La grandeur de la vitesse est moyenne proportionnelle entre le rayon de courbure de la section normale de la surface d'égale énergie qui contient sa direction, et la composante de la force totale qui sollicite l'unité de masse, dirigée suivant la normale à cette surface.*

Démonstration synthétique.

Pour établir cette proposition, décomposons dans le plan osculateur de la trajectoire la force totale $m\mathcal{F}$ qui sollicite la molécule m en deux composantes, l'une *tangentielle*, et l'autre *normale* ou *centripète ;* on sait que cette dernière aura pour expression

$$m\mathcal{F}_c = \frac{mV^2}{R_0}, \quad \text{ou pour l'unité de massé} \quad \mathcal{F}_c = \frac{V^2}{R_0},$$

R_0 étant le rayon de courbure de la trajectoire situé dans le plan osculateur. Or, si nous considérons en même temps que ce plan la section normale de la surface d'*égale énergie* qui contient la direction de la vitesse, nous aurons, d'après le théorème de Meunier (¹), en appelant R_n le rayon de courbure de cette section, et ε l'angle de ces deux plans, ou encore l'angle de ces rayons entre eux,

$$R_0 = R_n \cos\varepsilon,$$

et par conséquent, en substituant dans l'équation précédente,

$$\mathcal{F}_c = \frac{V^2}{R_n \cos\varepsilon}, \quad \text{d'où} \quad V^2 = R_n \mathcal{F}_c \cos\varepsilon.$$

Or $\mathcal{F}_c \cos\varepsilon$ n'est autre chose que la composante de la force totale $\mathcal{F}$ suivant la normale à la surface, et que nous représentons par $\mathcal{F}_n$. En effet, pour obtenir la composante d'une force suivant une droite, on peut projeter d'abord cette force sur un plan quelconque passant par la droite, puis projeter ensuite cette projection sur la droite elle-même. Or si l'on considère le plan normal à la trajectoire au point considéré,

(¹) *Voir* STURM, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. II, n° 698, p. 202.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lequel contient à la fois la normale principale de la trajectoire et la normale à la surface d'égale énergie, $\mathcal{F}_c$ sera évidemment la projection de la force totale $\mathcal{F}$ sur ce plan, et de même $\mathcal{F}_c \cos\varepsilon$ sera dans ce plan la projection de cette projection sur la normale à la surface au point considéré.

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$V^2 = R_n \mathcal{F}_n, \tag{25}$$

ce qui justifie la proposition énoncée.

Démonstration analytique.

On peut aussi déduire ce résultat des équations du mouvement; car de même que l'équation (24), qui est la dérivée totale de l'équation (23) par rapport au temps, exprime une propriété différentielle du premier ordre, c'est-à-dire relative au plan tangent des surfaces d'égale énergie, de même la dérivée seconde devra exprimer une propriété différentielle du second ordre, c'est-à-dire relative à la courbure des mêmes surfaces.

On trouve, en effet, en différentiant l'équation (24),

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = u\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dt} + v\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dt} + w\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dt}$$
$$+ \frac{du}{dt}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{dw}{dt}\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Or, comme on a, en vertu des équations (10) et (1),

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dt} &= u\frac{d^2\varphi}{dx^2} + v\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + w\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},\\
\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dt} &= u\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + v\frac{d^2\varphi}{dy^2} + w\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},\\
\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dt} &= u\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + v\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + w\frac{d^2\varphi}{dz^2},
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{du}{dt} = \mathfrak{X}, \quad \frac{dv}{dt} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{dw}{dt} = \mathfrak{Z},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

si l'on ajoute ces équations respectivement multipliées par u, v, w, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, l'équation précédente pourra s'écrire

$$u^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+v^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+w^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}+2vw\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}+2wu\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}+2uv\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$$
$$+\mathfrak{X}\frac{d\varphi}{dx}+\mathfrak{Y}\frac{d\varphi}{dy}+\mathfrak{Z}\frac{d\varphi}{dz}=0,$$

forme très-symétrique, analogue à celle de l'équation (24), mais d'un degré plus élevé.

Pour trouver la signification de cette équation, il n'y a qu'à remplacer les composantes u, v, w par leurs valeurs (5), et à diviser tous les termes par $\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}$. On obtient ainsi, en séparant en deux membres et supposant que le radical emporte avec lui son signe,

$$V^2\frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos^2\lambda+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\cos^2\mu+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\cos^2\nu+2\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\cos\mu\cos\nu+2\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}\cos\nu\cos\lambda+2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\cos\lambda\cos\mu}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}$$
$$=\frac{\mathfrak{X}\frac{d\varphi}{dx}+\mathfrak{Y}\frac{d\varphi}{dy}+\mathfrak{Z}\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Sous cette forme, on reconnaît au premier membre, dans le coefficient de V^2, l'expression de la courbure de la section normale de la surface $\varphi=$ const., qui contient la direction (λ, μ, ν), c'est-à-dire la vitesse [1], et dans le second membre la composante de la force totale suivant la normale à la même surface.

Cette équation peut donc s'écrire, en empruntant la notation déjà usitée,

$$V^2\frac{1}{R_n}=\mathcal{F}_n,$$

---

[1] *Voir* Moigno, *Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. II (3e Leçon) § 186, p. 350.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et par conséquent coïncide avec l'équation (25), qui exprime le théorème VI.

Notons d'ailleurs que cette proposition n'a rien de spécial aux surfaces d'égale énergie, et nous eussions pu tout aussi bien, pour le but que nous avions en vue, considérer les surfaces d'égale masse, ou toute autre surface d'égale résistance. Si nous avons spécifié les surfaces d'égale énergie dans l'énoncé de notre théorème, c'est qu'elles sont les seules qui subsistent dans tous les cas, et que nous allons avoir à faire usage de cette propriété, spécialement dans le cas des liquides homogènes, où elles subsistent seules, et que nous allons maintenant examiner.

Cas particulier des liquides homogènes.

La considération des surfaces d'égale masse et d'égale énergie, jointe à la connaissance de la force totale qui sollicite la molécule, fournira donc, en général, une représentation très-simple et très-nette du mouvement de cette molécule. Cette image fait malheureusement défaut, du moins telle que nous venons de la présenter dans le cas particulier des liquides homogènes; car alors, d'une part, la dilatation étant constamment nulle à cause de l'incompressibilité du fluide, et, de l'autre, la densité se réduisant à une constante à cause de son homogénéité, la première des deux familles de surfaces de nulle résistance disparaît; mais, même encore dans ce cas, il est facile d'obtenir une représentation très-simple du mouvement au moyen des mêmes éléments.

Pour cela, remarquons tout d'abord que, d'une part, l'équation (21) pouvant s'écrire $V^2 = 2(\varphi + q)$, et s'énoncer par cette formule : « *La force vive* (*ou le carré de la vitesse*) *est le double de la somme de l'*ÉNERGIE *et du* TRAVAIL » ; que, d'autre part, le travail q étant alors le *potentiel* de la force totale qui sollicite l'unité de masse, il en résulte qu'on connaîtra immédiatement la grandeur de la vitesse, si l'on suppose connues l'énergie et la force totale en chaque point.

Il n'y a donc à déterminer réellement, dans ce cas, que la trajectoire. Or la connaissance de la grandeur de la vitesse suffit, par le moyen du théorème VI, pour déterminer en même temps sa direction; car les surfaces d'égale énergie existant toujours, et la trajectoire de la molécule étant contenue tout entière sur l'une de ces surfaces, il est facile de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

déterminer sa direction en chaque point par l'angle qu'elle forme avec une autre direction définie sur cette surface, par exemple celle des lignes de courbure.

En effet, l'équation (25) donnant immédiatement l'expression du rayon de courbure de la section normale qui contient la vitesse, savoir

$$R_n = \frac{V^2}{\mathcal{F}_n},$$

la connaissance de ce rayon de courbure suffit à déterminer la direction de cette section; car, si dans le plan tangent et du point considéré comme centre on trace d'une part l'*indicatrice* relative à ce point, ayant pour axes les racines carrées des rayons de courbure principaux, et d'autre part un cercle avec la quantité $\sqrt{R_n}$ pour rayon, la direction de la vitesse sera nécessairement l'un des deux diamètres communs à ces deux courbes : la continuité indiquant suffisamment, d'ailleurs, laquelle de ces deux directions on devra prendre en chaque point, puisqu'au point initial la direction de la vitesse est une des données de la question.

En d'autres termes, si l'on désigne par R' et R'' les deux rayons de courbure principaux, et par r l'angle de la section normale considérée avec l'une des sections principales, on aura

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R'}\cos^2 r + \frac{1}{R''}\sin^2 r;$$

et par conséquent, en substituant dans l'équation précédente,

$$\frac{1}{R'}\cos^2 r + \frac{1}{R''}\sin^2 r = \frac{\mathcal{F}_n}{V^2},$$

ou, en résolvant par rapport à l'angle cherché r,

$$\operatorname{tang} r = \pm\sqrt{\frac{\frac{\mathcal{F}_n}{V^2} - \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R''} - \frac{\mathcal{F}_n}{V^2}}},$$

équation qui détermine en chaque point la direction de la vitesse par rapport aux lignes de courbure de la surface d'*égale énergie*, et qu'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peut considérer en quelque sorte comme l'équation de la trajectoire sur cette surface.

On pourrait aussi appliquer ce dernier mode de représentation au cas des fluides compressibles, puisque le travail q est encore, dans ce cas, le potentiel relatif à la force totale qui sollicite la molécule; mais il vaut mieux se figurer le mouvement à l'aide du procédé que nous avons décrit tout d'abord, et qui est à la fois plus simple, plus élégant et plus général, et réserver celui que nous venons d'exposer pour le cas des liquides homogènes, qui est le seul pour lequel le premier procédé se trouve en défaut.

Propriétés de maximum et de minimum.

Enfin, outre les propriétés générales qui caractérisent toutes les surfaces de nulle résistance, et que nous avons exposées dans le premier paragraphe, les deux familles que nous nous sommes proposé d'étudier spécialement dans celui-ci possèdent encore des propriétés intéressantes de maximum et de minimum qui leur appartiennent en propre et que nous allons établir en terminant ce travail.

Ces deux familles, en effet, en même temps qu'elles appartiennent à la classe importante des surfaces de *nulle résistance*, rentrent aussi dans la catégorie des surfaces dites *représentatives*, c'est-à-dire de celle dont l'équation s'obtient en égalant à un paramètre arbitraire une fonction déterminée de x, y et z. Or ces différentes surfaces, que l'on est amené à considérer dans une foule de questions de Mécanique ou de Physique mathématique, telles que la théorie de l'attraction (surfaces de *niveau* ou d'*égal potentiel*), de la chaleur (surfaces *isothermes* ou d'*égale température*), offrent, par suite de leur origine commune, une même propriété, qui se traduit différemment suivant les différentes théories auxquelles elles sont relatives, et qui découle immédiatement des deux propositions suivantes, que nous allons maintenant démontrer.

Lemmes relatifs aux surfaces représentatives.

LEMME I. — *Si* V *représente une fonction de* x, y *et* z, *et que l'on compare entre elles les valeurs que prend l'intégrale* $\int\int\int V\,dx\,dy\,dz$ *à l'intérieur de différentes surfaces, la valeur maximum ou minimum de cette intégrale correspondra précisément à la surface* $V = 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En effet, posons

$$I = \int\int\int V\,dx\,dy\,dz,$$

et calculons δI suivant les procédés habituels du calcul des variations; nous trouverons successivement

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int\int\int \delta\,(V\,dx\,dy\,dz)\\
&= \int\int\int [\delta V.\,dx\,dy\,dz + V\,\delta(dx\,dy\,dz)]\\
&= \int\int\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z\right)dx\,dy\,dz + V(dy\,dz\,\delta dx + dz\,dx\,\delta dy + dx\,dy\,\delta dz)\right]\\
&= \int\int\int \left(\frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z\right)dx\,dy\,dz + \int\int\int V\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz,
\end{aligned}$$

ou, en intégrant par parties le second terme et faisant la réduction avec le premier,

$$\delta I = \int\int (V\delta x)_1^2\,dy\,dz + \int\int (V\delta y)_1^2\,dz\,dx + \int\int (V\delta z)_1^2\,dx\,dy,$$

le crochet marqué des indices 1 et 2 signifiant, suivant une notation connue, la différence des valeurs du terme qu'il renferme pour les deux limites de l'intégration.

On peut mettre ces intégrations sous une forme plus saisissante, en remplaçant les intégrales qui y figurent par une sommation relative aux éléments de la surface elle-même. En désignant par α, β, γ les angles de la normale extérieure avec les axes coordonnés, par ω l'élément de surface, et par Σ une sommation s'étendant à toute la surface considérée, une transformation déjà usitée permettra d'écrire

$$\delta I = \Sigma\,\omega\,V(\delta x\cos\alpha + \delta y\cos\beta + \delta z\cos\gamma).$$

Or, sous cette forme, la condition du maximum et du minimum est évidente. En effet, cette condition étant, comme l'on sait, que la variation δI soit nulle, quels que soient δx, δy et δz, il s'ensuit qu'il faut que l'on ait $V = 0$, ce qui justifie la proposition énoncée.

Il sera toujours facile, d'ailleurs, de distinguer si l'on obtient ainsi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un maximum ou un minimum, car on voit tout de suite que l'on aura l'un ou l'autre suivant que la fonction V prendra des valeurs négatives ou positives, pour les points extérieurs à la surface $V = o$, et très-voisins de cette surface.

En effet, ayant calculé la valeur de l'intégrale proposée à l'intérieur de cette surface, pour obtenir la valeur de la même intégrale à l'intérieur d'une autre surface infiniment voisine, il faudra ajouter les termes correspondant aux portions de la seconde surface *extérieures* à la première et retrancher les termes correspondant aux portions *intérieures* à la première surface, mais qui n'appartiennent pas à la seconde. Or, dans la première hypothèse, les premiers termes seront négatifs, les seconds positifs; la seconde valeur de l'intégrale sera donc toujours plus petite que la première et, par conséquent, on aura un maximum: ce serait le contraire dans l'autre cas. Ce raisonnement légèrement modifié suffirait, au reste, pour établir *a posteriori* l'existence de la proposition elle-même.

La proposition que nous venons de démontrer n'est pas susceptible toutefois d'une application immédiate, sous la forme où nous l'avons établie, parce que le maximum ou le minimum qu'elle considère est un maximum ou minimum *absolu;* mais elle devient féconde, en conséquence, pour les surfaces représentatives, si on la modifie par l'introduction des maxima et des minima *relatifs*, qui se ramènent aux premiers, comme l'on sait, d'une façon fort simple.

C'est ce que nous allons faire dans le lemme suivant :

Lemme II. — *Si* U *et* W *représentent deux fonctions déterminées de* x, y *et* z, *et que l'on compare entre elles les valeurs que prend l'intégrale* $\int\int\int U\,dx\,dy\,dz$, *à l'intérieur de différentes surfaces, sous la condition que l'intégrale* $\int\int\int W\,dx\,dy\,dz$ *prise entre les mêmes limites conserve une valeur constante, la valeur maximum ou minimum de cette intégrale correspondra à l'une des surfaces représentées par l'équation* $\frac{U}{W} = \text{const.}$

En effet, si l'on recherche à l'intérieur de quelle surface l'intégrale

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\int\int\int U\,dx\,dy\,dz$ prend une valeur maximum ou minimum, sous la condition que l'intégrale $\int\int\int W\,dx\,dy\,dz$ ait une valeur donnée, il faudra, en vertu de la théorie des maxima ou minima relatifs, rechercher le maximum ou minimum absolu de l'expression

$$\int\int\int U\,dx\,dy\,dz + C\int\int\int W\,dx\,dy\,dz = \int\int\int (U + CW)\,dx\,dy\,dz,$$

C étant une constante. Or, pour l'obtenir, il n'y aura qu'à faire dans le lemme précédent

$$V = U + CW,$$

et la solution nous sera fournie immédiatement par l'équation

$$U + CW = 0,$$

où C est une constante qui sera déterminée précisément par la condition donnée, relative à la seconde intégrale. On voit ainsi que le problème est résolu par l'une des surfaces appartenant à la famille de surfaces représentatives dont l'équation est

$$(26) \qquad \frac{J}{V} = \text{const.}$$

Il est bien évident, d'ailleurs, que la proposition est reversible, et que l'on arriverait à la même conclusion si l'on cherchait le maximum ou le minimum de l'intégrale $\int\int\int W\,dx\,dy\,dz$ sous la condition que l'intégrale $\int\int\int U\,dx\,dy\,dz$ conservât une valeur donnée.

Pour montrer la fécondité de la proposition qui précède, et avant de revenir au mouvement des fluides, qui fait l'objet de ce travail, nous allons l'appliquer comme exemple à un problème emprunté à la théorie de la chaleur.

Imaginons un corps ou milieu dont tous les points étaient originairement à une même température, que nous prendrons pour zéro, et qui, soumis ensuite à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur, a fini par arriver à un état d'équilibre de température. Si nous

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

considérons en particulier une portion de ce corps limitée par une surface quelconque, et que nous désignions encore sa densité en chaque point par ρ, sa masse sera exprimée par l'intégrale $\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz$, et la quantité totale de chaleur perdue ou gagnée, en passant de l'état initial à l'état final, par l'intégrale $c\int\int\int \rho\, \Theta\, dx\, dy\, dz$, Θ désignant la température et c le calorique spécifique, que nous supposerons constant. Si l'on se propose de déterminer par quelle surface il faudrait limiter cette portion du corps, pour que, avec une masse donnée, la quantité de chaleur perdue ou gagnée soit maximum ou minimum, il n'y aura qu'à faire dans ce qui précède $U = c\rho\Theta$, et $W = \rho$, ce qui donnera pour solution $\Theta =$ const., c'est-à-dire une *surface isotherme*. Ces surfaces jouissent donc de la propriété nouvelle et intéressante de limiter les portions du corps qui, offrant une masse donnée, ont gagné ou perdu dans les conditions précitées une quantité de chaleur maximum ou minimum.

Ces préliminaires établis, appliquons les considérations qui précèdent aux diverses surfaces représentatives qui se présentent dans l'étude du mouvement permanent des fluides. Nous en déduirons sans peine une série de propriétés intéressantes, dont l'ensemble nous paraît jeter un nouveau jour sur la théorie si obscure du mouvement, et dont l'énumération terminera notre travail. Application aux surfaces:

1° Si l'on prend, pour les deux intégrales considérées dans le lemme II, la masse et le volume de la portion du fluide renfermée à l'intérieur d'une même surface, ou, en d'autres termes, si l'on prend $U = \rho$ et $W = 1$, l'équation (26) se réduit à $\rho =$ const., d'où la conclusion : (*a*) d'égale densité

THÉORÈME VII. — *Les surfaces d'égale densité sont celles qui, pour un volume donné, renferment une masse maximum ou minimum.*

2° Si, au lieu de la masse et du volume d'une portion du fluide, on prend pour les deux intégrales considérées les quantités que nous avons appelées *dilatation totale* et *volume primitif* (*voir* p. 26 et 27) de cette (*b*) d'égale dilatation,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

même masse, ou, en d'autres termes, si l'on prend $U = \frac{\Delta}{1+\Delta}$ et $W = \frac{1}{1+\Delta}$, l'équation (26) se réduit à $\Delta =$ const., d'où la conclusion :

THÉORÈME VIII. — *Les surfaces d'égale dilatation sont celles qui, pour un volume primitif donné, renferment une dilatation totale maximum ou minimum.*

Si l'on se rappelle, d'ailleurs, que d'après nos définitions la dilatation totale exprime la différence entre le volume actuel et le volume primitif d'une même masse, on voit immédiatement qu'on pourra énoncer la propriété précédente sous cette autre forme :

« *Les* SURFACES D'ÉGALE DILATATION *sont celles qui, pour un* VOLUME PRIMITIF *donné, renferment un* VOLUME *maximum ou minimum.* »

Ou encore sous celle-ci :

« *Les* SURFACES D'ÉGALE DILATATION *sont celles qui, pour un* VOLUME *donné, renferment une* DILATATION TOTALE *maximum ou minimum.* »

Notons, en outre, que les surfaces d'*égale dilatation* se confondraient évidemment avec les surfaces d'*égale densité*, si l'on avait pris pour *origine des dilatations* l'une de ces dernières surfaces.

La première des deux propositions que nous venons d'énoncer s'applique évidemment aussi bien au cas de l'équilibre qu'au cas du mouvement permanent, et, dans ce cas, elle exprime une propriété nouvelle et intéressante des *surfaces de niveau*, qui sont en même temps, comme l'on sait, surfaces d'*égale pression*, et surfaces d'*égale densité*. La seconde trouvera aussi son application à l'état d'équilibre, si on l'entend des modifications qu'a dû subir, pour arriver à cet état, un fluide compressible primitivement homogène, et soumis ensuite à des actions permanentes. Seulement, dans ce dernier cas, les surfaces d'égale dilatation se confondant évidemment avec les surfaces d'égale densité ou surfaces de niveau, les deux théorèmes ci-dessus n'expriment plus en réalité qu'une seule et même propriété, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre avec un instant de réflexion.

Les propositions suivantes, au contraire, n'ont de signification que dans le cas du mouvement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° Prenons, pour les deux intégrales du lemme II, la *force vive totale* (p. 29 et 30) et la masse d'une même portion du fluide, c'est-à-dire prenons $U = \rho V^2$ et $W = \rho$, l'équation (26) se réduira à $V^2 = \text{const.}$; d'où la conclusion : (*c*) d'égale force vive,

THÉORÈME IX. — *Les surfaces d'égale force vive (ou d'égale vitesse) sont celles qui, pour une masse donnée, renferment une force vive totale maximum ou minimum.*

4° Prenant encore la masse pour l'une des deux intégrales, prenons pour l'autre ce que nous avons appelé le *travail total* (*voir* p. 30), correspondant à la même portion du fluide, ou, en d'autres termes, faisons $U = q\rho$ et $W = \rho$; l'équation (26) se réduira à $q = \text{const.}$, et par conséquent, en nous reportant aux définitions de la page 30, nous pourrons formuler cette proposition : (*d*) d'égal travail,

THÉORÈME X. — *Les surfaces d'égal travail sont celles qui, pour une masse donnée, renferment un travail total maximum ou minimum.*

Il est à remarquer que dans le cas des fluides compressibles, et aussi dans celui des liquides homogènes, q est un potentiel, et les surfaces d'égal travail dont il est question dans ce théorème sont alors les surfaces de niveau relatives aux actions totales qui sollicitent la molécule fluide.

5° Pour revenir, en terminant, aux deux grandes familles de surfaces de nulle résistance qui font l'objet plus spécial de ce dernier paragraphe, considérons en même temps la masse et le volume primitifs d'une même portion du fluide, et faisons, dans le lemme II, $U = \rho$ et $W = \frac{1}{1+\Delta}$; l'équation (26) deviendra $\rho(1+\Delta) = \text{const.}$, et par conséquent, en nous reportant aux définitions du paragraphe précédent, nous pourrons énoncer cette propriété : (*e*) d'égale masse,

THÉORÈME XI. — *Les surfaces d'égale masse sont celles qui, pour un volume primitif donné, renferment une masse maximum ou minimum.*

Notons seulement que, dans le cas des liquides, les surfaces d'égale masse n'étant autres que les surfaces d'égale densité, cette propriété se confond pour ce cas avec le théorème VII.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(*f*) d'égale énergie.

6° Enfin considérons, en même temps que la masse, l'*énergie totale* (p. 31) d'une certaine portion du fluide, c'est-à-dire faisons à la fois $U = \varphi\rho$ et $W = \rho$; l'équation (26) se réduira à $\varphi = \text{const.}$, ce qui nous donnera cette dernière proposition :

THÉORÈME XII. — *Les surfaces d'égale énergie sont celles qui, pour une masse donnée, renferment une énergie totale maximum ou minimum.*

Conclusion.

Ces propriétés remarquables, jointes à la représentation que nous avons donnée du mouvement, font comprendre l'importance du rôle que les surfaces d'*égale masse* et d'*égale énergie* jouent dans la théorie, et l'intérêt qu'elles empruntent à leur double caractère de surfaces *représentatives*, et de surfaces de *nulle résistance*. C'est pourquoi nous nous sommes proposé, dans ce travail, d'appeler sur elles l'attention des géomètres, dans la pensée que peut-être leur considération pourrait servir de point de départ à un analyste plus habile, pour aborder le problème si difficile de l'intégration des équations de l'Hydrodynamique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RÉSUMÉ ANALYTIQUE.

INTRODUCTION. — Exposé du sujet 3

I. — SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

Définitions. — Propriétés caractéristiques.

Résistance au mouvement d'un fluide 4
Surfaces de nulle résistance 5
Propriétés relatives : (*a*) à l'ellipsoïde central d'inertie 6
» (*b*) au solide représentatif 8
Examen du cas général 11
Démonstration synthétique 11
Démonstration analytique 16

II. — RECHERCHE ANALYTIQUE DES SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

Équation aux différences partielles. — Solutions complètes. — Équation générale en termes finis.

Équation aux différences partielles 20
Interprétation mécanique de cette équation 21
Première solution complète 22
Cas des liquides 22
Cas des fluides compressibles 22
Définition de la dilatation 23
Expression de la masse moléculaire 24
Surfaces d'égale masse 25
Définitions : (*a*) du volume primitif 26
» (*b*) de la dilatation totale 26
Deuxième solution complète 27

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Définitions : (*a*) de la force vive..... 29
» (*b*) du travail..... 30
» (*c*) de l'énergie..... 30
Surfaces d'égale énergie..... 31
Intégrale des forces vives..... 32
Équation générale en termes finis..... 34

III. — Étude particulière des surfaces d'égale masse et d'égale énergie.

Représentation géométrique du mouvement. — Propriétés de maximum et de minimum.

Détermination géométrique : (*a*) de la trajectoire..... 35
» (*b*) de la vitesse..... 35
Démonstration synthétique..... 36
Démonstration analytique..... 37
Cas particulier des liquides homogènes..... 39
Propriétés de maximum et de minimum..... 41
Lemmes relatifs aux surfaces représentatives..... 41
Application aux surfaces (*a*) d'égale densité..... 45
» (*b*) d'égale dilatation..... 45
» (*c*) d'égale force vive..... 47
» (*d*) d'égal travail..... 47
» (*e*) d'égale masse..... 47
» (*f*) d'égale énergie..... 48

Conclusion..... 48

Vu et approuvé.

Le 16 juin 1873.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1° Démontrer qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut être la figure d'une masse fluide qui tourne uniformément autour d'un axe fixe, et dont les molécules s'attirent mutuellement en raison inverse du carré de la distance.

2° Propriétés des fonctions doublement périodiques.

Vu et approuvé.

Le 16 juin 1873.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC