RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES

SUR

LES CENTRES DE COURBURE

DES ÉPICYCLOÏDES PLANES ET SPHÉRIQUES,

ET LES DÉVELOPPANTES SPHÉRIQUES,

Sur les rayons de courbure des courbes et surfaces du second ordre, avec des applications aux engrenages.

THÈSE

DE MÉCANIQUE,

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES,

SOUTENUE DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

PAR THÉODORE OLIVIER,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET ANCIEN OFFICIER D'ARTILLERIE.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, N° 12.

1834.

PROFESSEURS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM. B^on^ THÉNARD, Doyen.
LACROIX.
B^on^ POISSON.
FRANCOEUR.
BIOT.
DULONG.
BEUDANT.
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.
MIRBEL.

Professeurs-Adjoints.

MM. DE BLAINVILLE.
DUMAS.
POUILLET.
PRÉVOST (CONSTANT).
AUGUSTE SAINT-HILAIRE.

Professeurs-Suppléans.

MM. LEFÉBURE DE FOURCY.
LÉVY.

Jean Bernouilli a écrit un Mémoire sur les épicycloïdes sphériques, ayant pour but principal de rechercher les courbes de cette famille qui étaient rectifiables.

Il a démontré que la courbe engendrée par un cercle mobile dont le rayon se projetait orthogonalement sur le plan du cercle fixe suivant le rayon de ce cercle, était la seule entre les épicycloïdes sphériques qui fût rectifiable.

M. Hachette, employant les procédés graphiques de la Géométrie descriptive, a construit la tangente en un point de l'épicycloïde sphérique, après avoir construit préalablement les projections de cette courbe. Il a étendu ses recherches et en a fait des applications heureuses et utiles aux engrenages coniques, que Camus avant lui n'avait pu construire rigoureusement (sous le point de vue géométrique), parce que les méthodes ingénieuses et fécondes de la Géométrie descriptive lui étaient peu familières.

Les recherches tentées, en *Géométrie pure*, sur les épicycloïdes sphériques se bornent donc, jusque à présent, à la construction graphique de la tangente, soit par les méthodes rigoureuses de la Géométrie descriptive, soit par la méthode de Roberval, qui, dans certains cas, peut être difficile à appliquer. (Voir la *Correspondance de l'École polytechnique*, tome II.)

Personne n'a encore cherché à déterminer le lieu des centres de courbure de ces courbes remarquables, par des méthodes purement géométriques.

Je me propose, dans ce Mémoire, de construire les centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques et de la développante sphérique; ensuite, de montrer les applications utiles aux Arts que l'on peut faire de cette dernière courbe, pour la construction des engrenages coniques extérieurs et intérieurs, en la substituant aux épicycloïdes sphériques.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉPICYCLOÏDES PLANES.

Les épicycloïdes planes sont de deux espèces : les *épicycloïdes extérieures*, engendrées par un cercle mobile roulant sur un cercle fixe, ce cercle mobile étant extérieur au cercle fixe, ou enveloppant le cercle fixe; ensuite les *épicycloïdes intérieures*, le cercle mobile étant alors intérieur au cercle fixe, en d'autres termes, étant enveloppé par le cercle fixe.

Parmi les épicycloïdes intérieures on doit remarquer celle qui est engendrée par un cercle mobile dont le diamètre est égal au rayon du cercle fixe. La courbe devient, dans ce cas, *une ligne droite* qui n'est autre qu'un rayon du cercle fixe.

Cette droite joue un grand rôle dans les engrenages coniques. (On doit consulter, à ce sujet, le *Traité des Machines* de M. Hachette, les *Mémoires* de Lahire et le *Traité de Mécanique* de Camus.)

Construction des centres de courbure de l'épicycloïde plane.

Nous examinerons quatre cas: 1°. celui où le cercle mobile est extérieur au cercle fixe; 2°. celui où le cercle mobile est enveloppé par le cercle fixe, *le diamètre du cercle mobile étant plus petit que celui du cercle fixe;* 3°. celui où le cercle mobile est enveloppé par le cercle fixe, *le diamètre du cercle mobile étant plus grand que celui du cercle fixe;* 4°. enfin le cas où le cercle mobile enveloppe le cercle fixe.

PREMIER CAS.

Le cercle mobile étant extérieur au cercle fixe.

Soit un cercle du rayon Sa fixe et immobile (fig. 1); soit un cercle du rayon aq, tangent en a au cercle fixe et mobile.

Je suppose que le cercle aq (désignant le cercle par son rayon) roule sur le cercle Sa; le point n décrira une *épicycloïde extérieure* δ.

Je suppose que le cercle aq soit arrivé en la position $a'q'$, et que le point h' soit un point de l'épicycloïde δ décrite par le point n du cercle mobile. Alors on aura :

$$\text{arc } n'n = \text{arc } aa',$$

et la normale au point h' de δ sera $h'a'$.

Je suppose ensuite que l'on trace les deux cercles Sb et bp, de telle manière que le cercle bp soit tangent en a aux cercles Sa et aq, et de plus, que le cercle bp roule sur le cercle Sb; alors le point b décrira l'épicycloïde extérieure δ'.

Je suppose enfin que le cercle mobile bp arrive en la position $b'p'$, en laquelle il sera tangent en a' et au cercle Sa' et au cercle $a'q'$, de sorte que le point h sera un point de l'épicycloïde δ'.

Alors on aura :

$$\text{arc } b'h = \text{arc } b'b.$$

Et la droite $a'h$ sera tangente au point h de la courbe δ'.

Cela fait, je prolonge ha', cette droite viendra couper le cercle $a'q'$ au point K.

Cela posé :

Il est évident que pour que la normale $a'h'$ au point h' de δ soit tangente au point h de δ', il faut que les deux droites $a'h'$ et $a'h$ se confondent ; en d'autres termes, il faut que les deux points h' et K se superposent, ou enfin, il faut que l'on ait :

$$\text{arc } n'\text{K} = \text{arc } n'h' :$$

ce qui revient à dire, puisque arc $n'h'$ = arc aa', qu'il faut que les deux cercles bp et aq, en roulant l'un sur le cercle Sb, l'autre sur le cercle Sa, parcourent des arcs mesurant des angles égaux sur les cercles fixes.

Or, comme les arcs bb' et aa' mesurent des angles égaux sur les cercles fixes, il faudra que l'on ait :

$$Sb : Sa :: bp : aq,$$

ou, en désignant Sb par R, Sa par R', bp par r et aq par r', il faudra que l'on ait :

$$\frac{\text{R}}{\text{R}'} = \frac{r}{r'};$$

et ce qui vient d'être établi ayant lieu pour l'arc parcouru aa', aura lieu pour tous les autres arcs parcourus par le cercle mobile, sur le cercle fixe.

Ainsi l'on peut énoncer le théorème suivant :

La développée d'une épicycloïde extérieure est une autre épicycloïde extérieure.

Et l'on doit se rappeler, en même temps, que les cercles mobiles, générateurs des épicycloïdes *développante* et *développée*, sont tangens l'un à l'autre, et que les cercles fixes ont même centre, et enfin que les rayons des cercles fixes et mobiles sont proportionnels entre eux.

D'après ce qui précède, on voit que pour obtenir la développée de l'épicycloïde extérieure, il faudra exécuter la construction suivante.

Mener en a la tangente commune av aux cercles Sa et aq ; puis, par le centre S la tangente Sm' au cercle mobile aq ; ces deux tangentes se couperont en v. On divisera l'angle Sva en deux parties égales par la droite vp, laquelle coupera Sa en p, centre du cercle bp, qui par sa rotation autour du cercle fixe Sb, décrira par le point b la développée demandée.

On pourra opérer par rapport à la courbe δ', comme on l'a fait par rapport à la courbe δ, et l'on arrivera à ce résultat, savoir : que la développée δ'' de δ' est une épicycloïde extérieure engendrée par un cercle il, tangent en b au cercle Sb, et ayant même tangente Sn que le cercle bp.

De sorte que les cercles mobiles générateurs des épicycloïdes développée et développée de développée d'une épicycloïde extérieure, sont tous tangens les uns aux autres, et ont tous deux tangentes communes passant par le point S, centre commun des cercles fixes ; et les courbes obtenues ainsi sont disposées les unes par rapport aux autres de telle sorte que l'origine b d'une développée δ' correspond au sommet n de sa développante δ ; et cette disposition a lieu pour toutes les développées de développées des développées, lorsque l'on examine deux courbes successives.

DEUXIÈME CAS.

Le cercle mobile est enveloppé par le cercle fixe (le diamètre du cercle mobile étant plus petit que le rayon du cercle fixe).

Il suffit de jeter les yeux sur les figures 2 et 3 pour être convaincu que les résultats sont identiquement les mêmes que ceux obtenus pour l'épicycloïde extérieure, en remarquant toutefois que pour l'épicycloïde extérieure les développées de développées tendent toutes vers le centre S commun aux cercles fixes, tandis que pour les épicycloïdes intérieures, les développées des développées s'éloignent constamment de ce centre S. De sorte que pour les épicycloïdes extérieures, la développante enveloppe sa développée, tandis que pour les épicycloïdes intérieures, la développante est enveloppée par sa développée.

Ainsi :

La développée d'une épicycloïde intérieure est une autre épicycloïde intérieure.

TROISIÈME CAS.

Le cercle mobile est enveloppé par le cercle fixe (le diamètre du cercle mobile étant plus grand que le rayon du cercle fixe).

Soit C le cercle fixe et o son centre (fig. 4); soit C' le cercle mobile tangent en m au cercle C.

On sait que si l'on construit le cercle C''' tangent en m et ayant son diamètre égal à la droite pq, l'épicycloïde intérieure E engendrée par le cercle C' roulant sur C, de droite à gauche, sera aussi engendrée par le cercle C''' roulant sur C de gauche à droite; en d'autres termes, on sait que les cercles C' et C''' tangens en m au cercle fixe C et dont les diamètres sont, en somme, égaux au diamètre du cercle C, engendrent la même courbe E en roulant en sens inverse sur le cercle C.

On pourra donc, dans ce cas, regarder l'épicycloïde intérieure E comme engendrée par un cercle mobile dont le diamètre est plus petit que le rayon du cercle fixe, et l'on retombe ainsi dans le deuxième cas.

QUATRIÈME CAS.

Le cercle mobile enveloppe le cercle fixe.

Soit C le cercle fixe et C′ le cercle mobile (fig. 5), ces deux cercles étant tangens l'un à l'autre au point *m*.

Dans ce cas, si l'on construit deux cercles D et D′, l'un, D, fixe, ayant son centre en *o*, centre du cercle fixe C; l'autre, D′, tangent en *n* au cercle D et en *m* aux cercles C et C′; et que l'on ait la proportion suivante:

Le rayon du cercle C : au rayon du cercle C′ :: le rayon du cercle D : au rayon du cercle D′.

La courbe E′ engendrée par le point *m* du cercle D′ roulant sur D, sera la développée de la courbe E engendrée par le cercle C′ roulant sur C.

Il est inutile d'entrer à ce sujet dans de plus grands détails. Je ne regarde point le mode de démonstration au moyen duquel je suis parvenu aux solutions géométriques précédentes comme nouveau; il est si simple qu'il est impossible qu'il n'ait pas déjà été employé, et qu'il ne soit pas dès lors connu depuis long-temps. Cependant j'ai dû l'exposer, mais aussi brièvement que possible, puisque c'est par une méthode analogue que je vais être conduit à la détermination des centres de courbure des épicycloïdes sphériques (*).

ÉPICYCLOÏDES SPHÉRIQUES.

Il existe aussi deux espèces d'épicycloïdes sphériques, les *intérieures* et les *extérieures*. L'épicycloïde sphérique est engendrée par un point d'un cône mobile de révolution roulant sur un cône fixe aussi de révolution, ces deux cônes ayant même sommet.

(*) La rectification de l'épicycloïde plane a été démontrée pour la première fois par Newton (*Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*).

Les *épicycloïdes extérieures* s'obtiennent lorsque le cône mobile est extérieur au cône fixe ou lorsqu'il enveloppe ce cône.

Les *épicycloïdes intérieures* s'obtiennent lorsque le cône mobile est enveloppé par le cône fixe.

Parmi les épicycloïdes sphériques, il en est une très remarquable, c'est celle à laquelle on a donné le nom de *développante sphérique ;* elle est engendrée par le point d'un plan roulant tangentiellement sur un cône fixe et de révolution. Les propriétés géométriques de ces développantes sphériques deviennent intéressantes à étudier depuis que l'on a remarqué que ces courbes pouvaient remplacer avec avantage les épicycloïdes sphériques ordinairement employées dans le tracé des engrenages coniques.

Construction des centres de courbures de l'épicycloïde sphérique.

Comme pour les épicycloïdes planes, nous aurons quatre cas à discuter : 1°. Celui où le cône mobile est extérieur par rapport au cône fixe; 2°. celui où le cône mobile est enveloppé par le cône fixe; 3°. celui où le cône mobile enveloppe le cône fixe; 4°. enfin, celui où le cône mobile est remplacé par un plan tangent mobile.

PREMIER CAS.

Le cône mobile étant extérieur au cône fixe.

Concevons (fig. 6) dans un plan vertical trois droites SX, So et S*a*, se coupant en S. La droite S*a*, en tournant autour de SX comme axe, engendrera un cône de révolution ; on obtiendra un second cône par le mouvement de rotation de cette même droite S*a* autour de l'axe So.

De sorte que les deux cercles engendrés par le point *a* rouleront l'un sur l'autre, en supposant que le cône SX reste fixe, et que le cône So soit mobile; et pendant la rotation, un point du cercle mobile *ao* engendrera une *épicycloïde sphérique extérieure.*

Supposons que le point m soit un point de l'épicycloïde sphérique δ:

1°. On sait que le plan tangent en m, à la sphère mobile et variable de rayon, ayant le point a pour centre et am pour rayon, contient la tangente à la courbe δ pour le point m;

2°. On sait que ce plan a pour trace sur le plan du cercle mobile ao, la droite md passant par l'extrémité d du diamètre aod;

3°. On sait aussi que la trace de ce plan sur celui qui contient les axes des cônes dans la position assignée, celle où le cercle mobile passe par le point m considéré sur l'épicycloïde δ, est une droite dP parallèle à l'axe So du cône mobile, et par conséquent perpendiculaire au plan du cercle générateur ao;

4°. On sait encore que le point P en lequel le plan mdP coupe l'axe Sx du cône fixe, est le sommet du cône ayant pour base la courbe δ, et auquel on a donné le nom de *cône épicycloïdal;* de sorte que tous les plans tangens aux diverses sphères mobiles et variables de rayon sont tangens à ce cône. (Voir dans le *Traité des Machines* de M. Hachette le chapitre sur les *Engrenages coniques*.)

Cela posé :

Puisque dP est perpendiculaire au cercle ao, on voit de suite que l'angle plan adm mesure l'angle dièdre formé par le plan des axes (SX, So) et le plan mdP tangent au cône épicycloïdal.

Si, maintenant, au point m on conçoit la tangente à la courbe δ, et si l'on se rappelle qu'elle est l'intersection des deux plans tangens menés, l'un au point m de la sphère mobile ayant son centre en a et pour rayon am, l'autre au même point m de la sphère fixe ayant son centre en S et pour rayon Sm, on voit sur-le-champ que cette tangente sera perpendiculaire au plan passant par les deux rayons Sm et am. Ce plan (Sm, am) sera donc le plan normal de l'épicycloïde sphérique pour le point m.

Remarquons que ce plan normal passe par les centres S et a des deux sphères; par conséquent on peut énoncer le théorème suivant :

L'enveloppe des divers plans normaux d'une épicycloïde sphérique est une surface conique ayant même sommet que le cône fixe.

Cherchons maintenant (fig. 7) la nature de cette surface conique. Pour y parvenir, supposons que dans un plan vertical on prenne deux points S et S' et qu'on les regarde, le point S comme le sommet commun à deux cônes de révolution (S, E) et (S, C) [en désignant ces cônes par leur sommet et le cercle base], et le point S' comme le sommet commun de deux autres cônes aussi de révolution (S', E') et (S', B).

Le système de ces quatre cônes sera tellement disposé que :

1°. Les axes SX, SX' S*o*, S'*p* des quatre cônes seront dans un même plan.

2°. Les cônes (S, E) et (S, E') auront même axe de rotation.

3°. Les bases B et C des cônes mobiles seront tangentes l'une à l'autre au point *a* et auront aussi même tangente en ce point *a* avec le cercle fixe E.

Ainsi l'axe SS' commun aux deux cônes fixes, et les deux points *b* contact des cercles B et E', et *a* contact des cercles C et E sont dans un même plan, auquel on donne le nom de *plan méridien*.

Si maintenant je suppose que le cercle B roule sur le cercle E', le point *b* engendrera une épicycloïde δ' et en supposant que le cercle C roule en même temps sur le cercle E, le point *d* extrémité du diamètre *aod* engendrera une seconde épicycloïde δ.

Si je suppose ensuite que le cercle B arrive en B', le cercle C arrivant en C' et de telle manière que l'axe SS' et les deux points *b'*, contact des cercles B' et E', et *a'* contact des cercles C' et E, soient dans un nouveau plan *méridien*, on voit de suite que le cercle B' coupera l'épicycloïde δ' en un point *n* tel que l'arc *nb'* sera égal à l'arc *bb'* et que le cercle C' coupera l'épicycloïde δ en un point *m*, tel que l'arc *d'm* sera égal à l'arc *aa'*.

De sorte que les angles aXa' et $bX'b'$ seront égaux ; on aura donc :

$$\text{arc } aa' : \text{arc } bb' :: aX : bX' ;$$

et en désignant le rayon du cercle E par R, et celui du cercle E' par

R', on aura :

$$\text{arc } aa' : \text{arc } bb' :: \text{R} : \text{R}'.$$

Cela posé :

Si au point n de la courbe δ', je voulais construire la tangente, il faudrait d'abord construire le plan tangent à la sphère mobile ayant son centre en b' et pour rayon $b'n$.

Ce plan serait tangent au cône épicycloïdal qui aurait pour base la courbe δ', et son sommet s'obtiendrait en menant dans le plan *méridien* qui contient les trois axes $S'p'$, So' et SS', la droite $a'P'$ parallèle à l'axe $S'p'$ du cône mobile. Cette droite couperait l'axe des cônes fixes en P' et ce point serait le sommet cherché.

Mais si l'on voulait que le plan tangent au cône épicycloïdal (P', δ') fût normal à la courbe δ, au point m, il faudrait d'abord qu'il passât par la droite Sa'.

Ainsi, pour première condition, les points P' et S doivent se confondre, ou, en d'autres termes, le plan du cercle B' doit être perpendiculaire à la génératrice de contact Sa' des deux cônes (S, E) et (S, C').

Cette condition étant remplie, le plan tangent au cône épicycloïdal (S, δ') pour le point n de δ', pourrait bien ne pas couper la courbe δ en m, mais en un autre point K, à moins que l'on ait :

$$\text{arc } \text{K}d' = \text{arc } aa',$$

auquel cas les deux points m et K se confondront en un seul.

Or, pour satisfaire à cette seconde condition, il faudra évidemment que l'on ait la proportion suivante :

$$\text{R} : \text{R}' :: r : r'$$

(en désignant par r le rayon du cercle B et par r' celui du cercle C').

Pour satisfaire aux deux conditions qui viennent d'être établies, la construction à employer sera la suivante :

Dans le plan vertical (fig. 8) on tracera l'axe SY qui doit être commun aux deux cônes fixes. D'un point S comme centre on décrira le cercle C qui représentera le grand cercle de la sphère sur laquelle doit être tracée l'épicycloïde sphérique.

aa' et ad, cordes de ce cercle, seront sur le plan vertical les projections des cercles bases des cônes ayant pour axe, l'un SX et l'autre So; les centres des cercles bases des deux cônes fixe et mobile seront ainsi sur le plan vertical, l'un en X, l'autre en o.

Cela posé :

On tracera la droite at tangente en a au cercle C; cette droite sera, sur le plan vertical, la projection du plan du cercle qui doit engendrer l'épicycloïde sphérique base du cône épicycloïdal qui, ayant son sommet en S, sera l'enveloppe des plans normaux de l'épicycloïde tracée sur la sphère (S, C).

Il faudra ensuite déterminer sur at un point b tel que l'on ait en abaissant de ce point une perpendiculaire bX' sur la droite SX,

$$bX' : ba :: aX : ad,$$

car bX' représente R, ba représente $2r'$, aX représente R et ad représente $2r$;

et alors la condition $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$ se trouvera satisfaite.

Or, pour déterminer ce point b, il suffit de construire une droite Sb divisant l'angle XSa en deux autres angles XSb et bSa, tels que l'on ait :

$$\frac{\sin \widehat{YSb}}{\sin \widehat{bSa}} = \frac{R}{2r};$$

la ligne Sb étant tracée, le point b déterminé, on n'aura plus qu'à mener par le point o', milieu de ab, une perpendiculaire à ab, laquelle coupera SY au point S'.

Et dès lors :

1°. Le cercle *ad* roulant sur le cercle fixe *aa'*, le point *d* engendrera une épicycloïde sphérique δ, tracée sur la sphère (S, C) ayant son centre en S et pour rayon S*a* (le point *d* sera le sommet de la courbe δ).

2°. Le cercle *ab* roulant sur le cercle fixe *bb'*, le point *b* engendrera une épicycloïde sphérique δ', tracée sur la sphère (S', C') ayant son centre en S' et pour rayon S'*a* (le point *b* sera le point de rebroussement ou l'origine de la courbe δ').

Tous les plans normaux à la courbe δ seront tangens au cône épicycloïdal ayant son sommet en S et pour base la courbe δ'.

Construisons maintenant le centre de courbure de l'épicycloïde sphérique, pour un de ses points.

Rappelons-nous que le plan *md'*P (fig. 7) tangent au cône épicycloïdal qui avait son sommet en P et pour base l'épicycloïde sphérique δ, était perpendiculaire au plan du cercle mobile C', ce cercle passant en cette position par le point *m* de la courbe et ayant en *a'* son contact avec le cercle fixe E.

Le plan normal S*a'n* au point *m* de la courbe δ sera tangent au cône épicycloïdal ayant son sommet en S et pour base l'épicycloïde sphérique δ'. Il sera donc perpendiculaire au plan du cercle mobile B', ce cercle passant en cette position par le point *n* de la courbe δ' et ayant son contact avec le cercle fixe E' en *b'*. Et l'on se rappelle que l'axe des cônes fixe SX et les deux contacts *b'* et *a'* sont dans un même plan *méridien*.

Dès lors la droite *b'n* située dans le cercle B' et perpendiculaire à la droite *na'*, sera perpendiculaire au plan normal S*a'n*; elle sera donc parallèle à la tangente en *m* à la courbe δ.

Ceci montre que la tangente en *m* à la courbe δ se projette sur le plan *méridien* (S, *a*, *a'*) suivant une perpendiculaire à la droite S*a'*, contact des deux cônes (S, E) et (S, C').

Pour avoir le centre de courbure correspondant au point *m* de la courbe δ, il faudrait abaisser du point *m* une perpendiculaire sur la génératrice S*n* du cône épicycloïdal enveloppe des plans normaux. On voit par ce qui précède que la construction sera facile à exécuter graphiquement; car le plan normal étant construit pour le point m, on connaîtra le point b' situé dans le plan *méridien* correspondant au point m; il suffira donc de mener du point b' une parallèle à la tangente en m, ou une perpendiculaire au plan normal; son pied n étant déterminé, on joindra S et n par une droite et l'on abaissera du point m une perpendiculaire sur Sn; la longueur de cette perpendiculaire sera le rayon de courbure pour le point m de δ, et son pied sur la droite Sn sera le centre de courbure cherché.

Lorsque l'on exécutera graphiquement la construction que je viens d'indiquer, la remarque précédente, savoir : que la tangente en m de δ se projette sur le plan *méridien* correspondant au point m, perpendiculairement à la droite de contact Sa', servira à simplifier les constructions.

DEUXIÈME CAS.

Le cône mobile étant enveloppé par le cône fixe.

Tout ce qui précède s'applique, mot à mot, à la disposition particulière des cônes (fig. 9) que nous examinons maintenant. Les deux conditions auxquelles il faudra satisfaire seront les mêmes. La construction graphique qui conduira à la détermination du cône épicycloïdal, enveloppe des plans normaux de l'épicycloïde sphérique intérieure, sera donc la suivante.

Chercher sur at, perpendiculaire à Sa, un point b tel que l'on ait :

$$\frac{\sin \widehat{YSb}}{\sin \widehat{bSa}} = \frac{aX}{ad} = \frac{R}{2r}.$$

On voit que, pour les épicycloïdes extérieures, la projection de la courbe sur le plan du cercle base du cône fixe de l'épicycloïde donnée, enveloppait la projection de l'épicycloïde base du cône épicycloïdal enveloppe des plans normaux, tandis que, dans le cas des épicycloïdes intérieures, le contraire a lieu.

TROISIÈME CAS.

Le cône fixe étant enveloppé par le cône mobile.

La construction à employer sera la suivante (fig. 10) :

Trouver sur la droite at perpendiculaire à la droite Sa, un point b tel que l'on ait :

$$\frac{\sin \widehat{YSb}}{\sin \widehat{bSa}} = \frac{aX}{ad} = \frac{R}{2r} \text{ (\textit{voir} la note A).}$$

QUATRIÈME CAS.

Développante sphérique.

Parmi les épicycloïdes sphériques il en est une remarquable et à laquelle les géomètres ont donné le nom de *développante sphérique* : cette courbe est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle roulant sur un autre cercle fixe; le plan du cercle mobile faisant un angle constant avec le plan du cercle fixe, et le rayon du cercle mobile se projetant orthogonalement sur le plan du cône fixe, suivant le rayon de ce dernier.

En d'autres termes : Supposons un cône S droit et fixe, un plan tangent P à ce cône; du sommet du cône S, comme centre, décrivons dans le plan P un cercle C avec un rayon arbitraire; supposons ensuite que le plan P roule sur le cône S; pendant ce mouvement de rotation un point du cercle C décrira une *développante sphérique*.

On peut donner un énoncé plus simple encore.

Soit un plan P tangent à un cône S de révolution; un point du plan P décrira une *développante sphérique*, lorsque ce plan roulera sur le cône.

Je suppose que l'on a présente à l'esprit l'épure que l'on construit ordinairement pour déterminer les projections de l'épicycloïde sphérique et de la tangente en un de ses points. (Voir à ce sujet le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Hachette.) Alors, il sera facile de voir que, si l'on projette la développante sphérique sur le plan du cercle base du cône fixe, on obtiendra les résultats suivans, que je vais construire graphiquement, par les méthodes de la Géométrie descriptive, sans entrer dans tous les détails qui seraient superflus, l'épure sur l'épicycloïde étant bien présente à l'esprit.

Supposons (fig. 11) le cercle générateur ou mobile C' rabattu en C'', le cercle fixe étant C; le point s sommet du cône fixe et en même tems centre du cercle mobile C', ayant pour projections (s, s^h); supposons que le point m^r soit le rabattement sur le plan horizontal d'un point m de la développante sphérique, les projections de ce point m étant (m^v, m^h).

Tous les points tels que m^h seront sur une courbe δ^h projection horizontale de la développante sphérique δ.

Cela posé :

Je dis que la tangente au point m^h de δ^h ne sera autre que la droite $m^h m^r$ parallèle à la droite $s^h s^r$.

En effet :

Si pour le point m de la courbe δ on construit les normales des deux sphères qui passent par ce point, l'une fixe, ayant son centre en S et pour rayon sm, l'autre mobile, ayant son centre en b^v et pour rayon bm, on aura, 1°. la normale sm dont les projections sont (sm^v, $s^h m^h$), et 2°. la normale bm dont les projections sont (bm^v, bm^h).

Le plan passant par ces deux normales sera perpendiculaire à la tangente T au point m de la courbe δ; la projection horizontale de T sera donc perpendiculaire à la trace horizontale de ce plan.

Or, il est évident que le plan normal a pour trace horizontale la droite bd perpendiculaire à la droite $s^h s^r$, puisque la normale bm perce le plan horizontal au point b et que la normale sm le perce au point d.

Ainsi T^h projection horizontale de la tangente T sera perpendiculaire à la tangente commune aux deux cercles C et C′ placés de telle façon, l'un par rapport à l'autre, que le cercle C′ passe par le point m de la développante sphérique.

Ainsi, désignant le plan qui contient l'axe du cône fixe et le point de contact b des deux cercles C et C′ par plan *méridien* correspondant au point m, on peut énoncer ce qui suit :

1°. *La tangente en un point de la développante sphérique est parallèle au plan* méridien *correspondant à ce point;*

2°. *Tous les plans normaux de la développante sphérique sont tangens au cône fixe;*

Ou, en d'autres termes, *l'enveloppe des plans normaux de la développante sphérique n'est autre que le cône fixe.*

3°. *Toutes les développées de la développante sphérique sont des hélices tracées sur un cône de révolution;*

4°. *Toutes les tangentes à la développante sphérique font un angle constant avec le plan du cercle base du cône fixe, lequel est le complément de celui que les génératrices du cône fixe font avec ce même plan,* par conséquent *la développante sphérique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette sur le plan du cercle base du cône fixe; elle est donc une hélice sur ce cylindre projetant.*

Construisons maintenant le centre de courbure de la développante sphérique pour le point m.

Il est évident que ce centre sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point m sur la génératrice sb, contact du cône fixe et du plan normal dbs mené au point m de la développante. On voit sur-le-champ que cette perpendiculaire sera horizontale et aura pour projections, le point m sur le plan *méridien* et la droite $m^h p$ sur le plan horizontal, $m^h p$ étant perpendiculaire à $s^h s^r$.

Ainsi le centre de courbure pour le point m se projettera en m^r sur le plan *méridien* et en p sur le plan du cercle base du cône fixe.

Le rayon de courbure sera égal en longueur à $m^h p$.

Dès lors :

La courbe γ^h, projection horizontale de la courbe γ, lieu des centres de courbure de la développante δ, sera la développée de la courbe δ^h, projection horizontale de la développante.

Donc, on peut énoncer le théorème suivant :

Si l'on projette sur le plan du cercle fixe la développante sphérique et la courbe lieu de ses centres de courbure, la projection de la seconde courbe sera la développée de la projection de la première (*).

Développons maintenant le cône fixe enveloppe des plans normaux, et cherchons la forme que prendra, dans le développement, la courbe lieu des centres de courbure.

Suivant l'une des génératrices *sb*, concevons le plan tangent et développons le cône sur ce plan tangent.

La base C se transformera suivant un arc du cercle C' tracé, sur le plan tangent, du sommet *s* comme centre et avec l'apothème du cône pour rayon.

De sorte que si l'on prend un point *m* sur le cercle C', et abaissant de ce point une perpendiculaire sur la génératrice *sb*, on aura en son pied un point de la courbe lieu des centres de courbure.

Le cercle C' en roulant sur le cercle C parcourra des arcs égaux sur ce cercle, lesquels, développés, se transformeront (fig. 12) en les arcs égaux bb', $b'b''$, $b''b'''$, etc., sur le cercle C'.

(*) La propriété dont jouit la développante sphérique d'être une hélice sur le cylindre qui la projette orthogonalement sur le plan du cercle fixe, montre que cette courbe est rectifiable, ainsi que Jean Bernouilli l'avait démontré en employant un autre mode de démonstration.

Et comme la tangente à la développante sphérique pour le point *m* est parallèle au plan *méridien* correspondant à ce point *m*, on aura en $m'k$ la longueur de l'arc rectifié compris entre le point *m* et le point d'origine de la courbe situé sur le cercle base du cône fixe.

Ou bien, désignant par h la hauteur du point *m* au-dessus du plan du cercle fixe ; par α l'angle que le plan du cercle mobile fait avec le plan du cercle fixe, on aura :

$$\text{arc rectifié} = \frac{h}{\cos\alpha}.$$

sb, sb', sb'', sb''', etc., seront dès lors les positions que les génératrices successives de contact prendront dans le développement, de sorte qu'en abaissant du point m du cercle C' des perpendiculaires sur ces divers rayons, on aura les points p, p', p'', p''', etc., qui seront les positions affectées sur le développement par les divers centres de courbure. Il est évident que tous ces points sont sur un cercle ayant sm pour diamètre.

Ainsi l'on peut énoncer ce qui suit :

La courbe lieu des centres de courbure de la développante sphérique se transforme, lorsque l'on planifie le cône fixe sur l'un de ses plans tangens, en un cercle ayant pour diamètre l'apothème de ce cône.

Si l'on regarde la développante sphérique (fig. 11) comme la base d'une surface conique ayant son sommet en s, on peut très facilement obtenir la courbe intersection de cette surface par le plan du cercle base du cône fixe.

Car, remarquons que le cercle mobile C' étant rabattu en C'^r, le point m de la développante étant alors rabattu en m^r, la droite $s^r m^r$ sera le rabattement de la génératrice sm du cône, et cette droite $s^r m^r$ rencontrera la tangente bd au point d, qui est précisément celui en lequel la génératrice sm perce le plan horizontal.

Il sera donc facile de construire la courbe φ, trace du cône sur le plan du cercle base du cône fixe, sans avoir besoin de construire les projections de la développante sphérique. (Cette remarque sera très utile pour simplifier le tracé des engrenages coniques, dont les dents sont des cônes ayant pour bases des développantes sphériques.)

Construisons maintenant la tangente au point d de la courbe φ, et rappelons-nous, 1°., que les tangentes de la développante sphérique font un angle constant avec le plan du cercle base du cône fixe; 2°. que cet angle est égal à l'angle que la génératrice du cône fixe fait avec l'axe de ce cône.

Si donc par le sommet s du cône fixe je mène sq perpendiculaire à la génératrice sb, et que du point s^h comme centre et avec $s^h q$ pour rayon, je décrive le cercle D, le cône (S, D) aura ses diverses génératrices respectivement parallèles aux diverses tangentes de la développante sphérique.

Et comme la tangente au point m de la développante est parallèle au plan *méridien* qui, contenant l'axe du cône fixe et le point b, correspond au point m, il s'ensuit que le plan tangent au cône (ayant pour sommet le point s et pour base la développante) suivant la génératrice sm, passera par la droite sq; la trace de ce plan sur le plan horizontal sera donc qd tangente en d à la courbe φ, trace du cône sur le même plan horizontal.

Ainsi, supposant que la courbe φ soit tracée, ainsi que les deux cercles C et D, pour construire la tangente en un point d de la courbe φ, il suffira de mener db tangent en b au cercle C, puis bq perpendiculaire à db et coupant le cercle D au point q; la droite qd sera la tangente demandée.

On peut construire très facilement une section conique osculatrice à la courbe φ en un de ses points d.

En effet :

Le cône (fig. 13) qui a pour sommet le point s, sommet du cône fixe, et pour base la développante sphérique, aura pour cône osculateur celui qui, ayant son sommet en s, aura pour base le cercle osculateur de la développante sphérique.

Ainsi, pour le point m de la développante sphérique, le cône osculateur tout le long de la génératrice sm, aura pour base le cercle qui a pour centre le point projeté verticalement en m^v, et horizontalement en p, son rayon étant égal en longueur à la droite pm^h. Le plan du cercle osculateur est perpendiculaire à la droite sb; la trace verticale de ce plan sera donc V perpendiculaire à sb, et passant par le point m^v et sa trace horizontale sera H perpendiculaire à la ligne de terre LT.

Si donc on porte sur V à partir de m^v, à droite et à gauche, $m^v p' = m^v p'' = pm^h$, on aura en $sp'x$ et syp'' les génératrices extrêmes du cône osculateur, son axe étant sb. (On voit que le cône osculateur est de révolution.) Il suffira donc de chercher l'intersection de ce cône par le plan horizontal, et l'on aura une section conique osculatrice au point d de la courbe φ.

Dans le cas représenté par la figure, la section conique sera une ellipse dont l'un des axes sera xy; le point v, milieu de xy, sera le centre; et il sera facile de déterminer le second axe.

On voit sur-le-champ que la section conique aura toujours l'un de ses axes dirigé suivant la ligne de terre LT, et que cette courbe sera

Une ellipse, si l'on a	angle $s^h sx <$ un angle droit.
Une parabole, si l'on a	angle $s^h sx =$ un angle droit.
Une hyperbole, si l'on a	angle $s^h sx >$ un angle droit.

La construction de la section conique osculatrice en un point d de la courbe φ, permet de construire le centre de courbure, et par suite d'avoir la longueur du rayon de courbure pour un point d de cette courbe φ, puisque le problème est ramené à celui-ci : construire le centre de courbure d'une section conique dont les axes et le centre sont connus en position et en grandeur. (*Voir* la note B.)

Ainsi, l'on pourra substituer à un arc de la courbe φ, ou un arc de section conique osculatrice et facile à construire, ou un arc de cercle osculateur. Cette remarque peut être utile dans les applications aux engrenages coniques.

Il existe une infinité de courbes qui jouissent des mêmes propriétés que la développante sphérique.

En effet :

Supposons une courbe plane A (fig. 14) et sa développée B; concevons un cylindre C perpendiculaire au plan de la courbe A et ayant pour base ou section droite la courbe B. Toutes les développées à double courbure de A seront des hélices tracées sur ce cylindre C; concevons une de ces hélices H : toutes ses tangentes feront avec le plan de la courbe A des angles égaux, et formeront une surface développable D ayant H pour arête de rebroussement.

Menons le plan P tangent à la surface D suivant la génératrice se projetant sur le plan de la courbe A en mp.

Le plan P roulant sur la surface D, le point p de ce plan décrira une courbe à double courbure X qui jouira, identiquement, de toutes les propriétés qui appartiennent à une développante sphérique; de sorte que cette courbe X et la courbe Y, lieu de ses centres de courbure, se projetteront sur le plan de A suivant deux courbes qui seront telles, que la projection de Y sera la développée de la projection de X; et comme toutes les tangentes à X font des angles égaux avec le plan de la courbe A, parce que toutes les génératrices de la surface D font des angles égaux avec ce même plan, la courbe X coupera sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette sur le plan de A. Ainsi cette courbe X est une hélice tracée sur ce cylindre projetant.

Ainsi, l'on peut énoncer le théorème général suivant :

Tout point d'un plan, roulant tangentiellement sur une surface développable dont l'arète de rebroussement a pour développante une courbe plane, décrit une courbe qui est une hélice sur le cylindre qui la projette orthogonalement sur le plan de la développante de l'arète de rebroussement.

On peut généraliser (fig. 15) tout ce qui a été dit touchant les épicycloïdes planes et sphériques, en substituant aux cercles fixe et mobile des courbes planes quelconques.

Ainsi, en supposant deux courbes planes situées dans un même plan, l'une C fixe, l'autre D mobile, et roulant sur la courbe C, un des points de la courbe mobile engendrera une courbe à laquelle on peut donner le nom d'*épicurvoloïde plane.*

Si l'on suppose que les deux courbes C et D ne soient pas dans un même plan, mais que leurs plans fassent toujours le même angle entre eux pendant l'évolution de la courbe mobile, un des points de la courbe mobile engendrera une courbe à laquelle on peut donner le nom *d'épicurvoloïde à double courbure.*

On peut se proposer de construire les centres de courbure de ces courbes générales. Pour arriver à la solution de ce problème, remarquons que, si l'on considère deux courbes D et D' osculatrices, l'une à l'autre, en un point a qui soit précisément celui en lequel a lieu le contact simple des courbes D et C, et que l'osculation des deux courbes D et D′ soit du second ordre, c'est-à-dire qu'elles aient deux élémens rectilignes successifs communs, am, mm'; en supposant que D et D′ roulent ensemble sur C, l'élément am viendra se superposer sur l'élément an de la courbe C, puis l'élément mm' viendra se superposer sur l'élément nn' de la courbe C. Pendant l'évolution des courbes D et D′ sur la courbe fixe C, un point p du plan des courbes, supposé lié aux deux courbes D et D′ et entraîné par elles pendant l'évolution, décrira un élément de cercle pp', ayant son centre en a, pendant le temps que l'élément am mettra à venir se superposer sur l'élément an; puis, pendant le temps que l'élément mm' mettra à se superposer sur nn', le point p' décrira l'élément de cercle $p'p''$ ayant son centre en n; de sorte que le point p décrira, comme lié à la courbe D′, une courbe d', et comme lié à la courbe D, une courbe d, ces deux courbes d et d' ayant deux élémens communs pp', $p'p''$; ces deux courbes auront donc un contact du second ordre, dès lors même centre de courbure, même cercle osculateur, même rayon de courbure.

On voit sur-le-champ que ce qui vient d'être démontré dans le cas où les trois courbes C, D et D′ sont dans un même plan, existera dans le cas où les deux courbes D et D′ seront dans un même plan, faisant avec le plan de la courbe C un angle constant pendant l'évolution des courbes mobiles.

Ainsi, l'on peut énoncer le théorème suivant :

Lorsque l'on a deux courbes planes osculatrices l'une à l'autre, si l'on suppose que la première roule sur une troisième courbe plane en entraînant la seconde, et que la seconde roule ensuite sur la troisième courbe en entraînant la première, un point du plan des courbes osculatrices décrira, pendant l'évolution de la première courbe osculatrice, et ensuite pendant l'évolution de la seconde courbe osculatrice, deux ÉPICURVOLOÏDES *qui seront osculatrices l'une à l'autre, et l'osculation entre les* ÉPICURVOLOÏDES *sera du même ordre que celle qui existait entre les courbes osculatrices mobiles.*

Cela posé :

Concevons deux courbes planes D et D′ (fig. 16) ayant pour développées, la première la courbe E, la seconde la courbe E′. Je suppose ces deux courbes situées dans un même plan et en contact au point a; par conséquent leurs centres de courbure respectifs o et o' seront sur la normale au point a.

Je suppose ensuite que la courbe D ait roulé sur la courbe D′, et qu'un point m de cette courbe D ait décrit l'*épicurvoloïde d.*

On sait que la droite am sera normale à la courbe d au point m et que, par conséquent, le centre de courbure de la courbe d pour le point m sera situé sur la droite am.

Traçons le cercle C osculateur de D au point a, et le cercle C′ osculateur de D′ au même point a. D'après ce qui précède on voit que si l'on suppose que le cercle C roule sur le cercle C′, le point m décrira une épicycloïde d' rallongée ou raccourcie, suivant qu'il sera situé hors du cercle C ou dans l'intérieur de ce cercle, et telle, qu'elle aura un contact du second ordre en m avec l'*épicurvoloïde d;* ainsi ces deux courbes d et d' auront même centre de courbure.

Ce qui vient d'être dit dans le cas où les courbes D et D′ étaient dans un même plan, pourra se dire de la même manière, dans le cas où le plan de D fera avec le plan de D′ un angle constant pendant l'évolution de D sur D′.

Ainsi, si l'on savait construire graphiquement le centre de courbure d'une épicycloïde rallongée ou raccourcie, *plane* ou *sphérique,* on saurait construire le centre de courbure d'une *épicurvoloïde plane* ou *à double courbure,* en supposant que l'on connaisse les développées, ou autrement le lieu des centres de courbure des deux courbes fixe et mobile.

Et l'on voit que l'on peut supposer que ce soit un point quelconque n du plan de la courbe mobile, et non un point m de cette courbe qui engendre l'*épicurvoloïde,* et que la solution sera toujours la même.

NOTE A.

C'est par *induction* que l'on est conduit à déterminer, par la Géométrie, la nature de la développée d'une épicycloïde plane, et par suite celle du cône épicycloïdal enveloppe des plans normaux de l'épicycloïde sphérique.

En effet, on remarque que la développée d'une courbe offre toujours un point singulier correspondant à un point singulier de la développante; qu'ainsi, à un point *sommet* de la développante correspond, sur la développée, un point de *rebroussement de première espèce;* qu'ainsi, pour un point de *rebroussement de première espèce* de la développante, la développée passe toujours par ce point. De plus, on remarque sur-le-champ que l'épicycloïde étant symétriquement placée par rapport au cercle fixe et certains rayons du cercle, sa développée devra aussi être symétrique par rapport à un cercle ayant même centre, et par rapport aux rayons qui, prolongés, passent par les *sommets* et les points de *rebroussement* des diverses branches de l'épicycloïde *développante*.

On est donc tout naturellement conduit à penser que la développée de l'épicycloïde est une autre épicycloïde, puisque cette développée doit présenter dans sa forme les mêmes particularités que la développante.

Ainsi, ayant construit une épicycloïde dont les *sommets* sont situés sur les points de *rebroussement* de la développante, et dont les points de *rebroussement* correspondent aux *sommets* de la développante, il faut vérifier si, en effet, les tangentes à cette épicycloïde sont *normales* à la développante; et en cherchant s'il existe une condition à laquelle doit satisfaire la tangente à l'épicycloïde *développée* pour être *normale* à l'épicycloïde *développante*, on voit que cette condition existe en effet et qu'elle est établie par l'équation $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$.

On sait que pour tracer un engrenage cylindrique intérieur ou extérieur, on trace d'abord les deux cercles primitifs A et B tangens l'un à l'autre et ayant des rayons dans le rapport inverse de celui des vitesses des axes.

Puis on engendre l'épicycloïde extérieure ou intérieure qui doit terminer la dent fixée sur le cercle A, par un cercle D dont le rayon est la moitié de celui du cercle B, de sorte que le cercle D donne une épicycloïde intérieure pour le cercle B, qui n'est autre qu'un diamètre de ce cercle B, et ce diamètre forme le *flanc* de la dent fixée sur le cercle B.

Pour un engrenage conique, on sait aussi que le cône épicycloïdal a pour base l'épicycloïde sphérique engendrée par le cercle d'un rayon moitié de celui du cercle base du cône mobile et ayant pour sommet celui qui est commun aux cônes fixe et mobile;

Et que ce cône *épicycloïdal* conduit un plan méridien du cône mobile. (Voir le *Traité des Machines* de M. Hachette.)

Ces propriétés peuvent être présentées sous un autre point de vue et énoncées de la manière suivante :

Si un cercle B roule sur un cercle A, l'enveloppe de l'un de ses diamètres est une épicycloïde engendrée par un cercle D, d'un rayon moitié, roulant sur le cercle A.

La même propriété a lieu pour la cycloïde.

Si un cône de révolution roule sur un autre cône de révolution (les deux cônes ayant même sommet), l'enveloppe d'un plan diamétral du cône mobile est un cône épicycloïdal ayant pour base l'épicycloïde sphérique engendrée par un cercle de rayon moitié de celui du cercle base du cône mobile et situé dans le plan de ce dernier cercle, le sommet du cône épicycloïdal étant celui des deux cônes de révolution.

Le plan tangent en m au cône épicycloïdal, fig. 6, qui a son sommet en P, et pour base l'épicycloïde sphérique δ, fait avec le plan *méridien* correspondant au point m un angle qui est mesuré par l'angle des deux droites ad et dn, parce que le plan tangent est perpendiculaire au plan du cercle mobile. Il est facile, d'après ce qui précède, de voir sur la figure 7 que le plan normal à l'épicycloïde sphérique pour le point m fera avec le plan *méridien* correspondant à ce point, un angle complément de celui que le plan tangent en m au cône épicycloïdal dont le sommet est en P, fait avec ce même plan *méridien*.

En effet, l'angle $na'b$ mesure l'angle du plan normal avec le plan *méridien* $Sa'b'd'$; l'angle $a'd'm$ mesure l'angle du plan tangent au cône épicycloïdal dont le sommet est en P avec le même plan $Sa'b'd'$; et l'on sait que les arcs $d'm$ et $b'n$ contiennent le même nombre de degrés.

Cette propriété est, dans l'espace, l'analogue de celle qui existe pour les épicycloïdes planes, savoir, que la tangente et la normale en un point de la courbe font des angles complémens l'un de l'autre avec la ligne des centres correspondant au point de la courbe.

NOTE B.

Construction graphique du rayon de courbure en un point d'une section conique dont on ne connaît qu'un certain nombre de points.

Dans les applications de la Géométrie descriptive, presque toujours les sections coniques obtenues ne sont connues que par leur périmètre ou un certain nombre de points du périmètre, les axes, le centre, les foyers, etc., étant ordinairement inconnus de grandeur, de direction ou de position.

Une courbe étant ainsi connue seulement par son *tracé*, on demande de construire en un de ses points le rayon de courbure, en supposant toutefois que l'on connaisse la tangente en ce point, et par conséquent la direction du rayon de courbure.

Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur les propriétés suivantes qui sont connues :

1°. Par deux sections coniques dont les plans se coupent suivant une corde commune aux deux courbes, on peut toujours faire passer deux cônes.

2°. Si l'on a un cône non de révolution, et que par un point de l'une des quatre génératrices situées deux à deux dans les deux plans principaux, on mène un plan perpendiculaire à cette génératrice, on obtiendra une section conique ayant pour sommet le point choisi sur la génératrice.

3°. Désignant par A et B les demi-axes d'une ellipse, on a pour la valeur du rayon de courbure au sommet situé à l'extrémité du demi-axe A,

$$\rho = \frac{B^2}{A}.$$

4°. Le cylindre qui a pour section droite le cercle osculateur de la section conique obtenue par un plan perpendiculaire à la génératrice d'un cône du second ordre, est osculateur au cône tout autour du point de contact du cercle et de la section conique (ce point étant situé sur la génératrice considérée).

Cela posé, j'établis comme condition que le périmètre de la courbe est complètement donné. Dès lors,

Je suppose (fig. 17) une section conique ε (ellipse, parabole ou hyperbole, la construction graphique sera identiquement la même pour l'une quelconque de ces courbes), un point m sur cette courbe et la tangente mr en ce point, par conséquent la normale et par suite la corde mn' seront connues.

Je suppose que je connaisse ou que je construise la tangente $m'r$ au point m'.. (Ce que l'on pourra toujours faire, car en menant une seconde corde M'M parallèle à mm', les points milieux o et o' de ces cordes sont sur le diamètre conjugué de la corde mm', lequel passe par le point r de concours des deux tangentes mr et $m'r$.)

Je prends pour plan horizontal de projection le plan de la courbe et une ligne de terre lt parallèle à la droite mr.

Je fais passer par mr un plan vertical H', et dans ce plan je trace une droite G arbitraire, mais passant par le point m.

On aura dès lors en (G^h, G^v) les projections de la droite G, et en (m, m^v) les projections de son pied m sur le plan horizontal.

Par la corde mm', je fais passer un plan P perpendiculaire à la droite G. Dès lors le cône C qui aura son sommet sur la droite G, et pour base la courbe ε, sera coupé par ce plan P suivant une ellipse ayant son sommet en m et son centre en o milieu de mm', si ce plan P coupe le plan tangent au cône C et ayant pour trace horizontale la tangente $m'r$, suivant une droite perpendiculaire à mm'.

Donc, si par le point m' je mène une droite parallèle au plan vertical H' et perpendiculaire à G, le plan passant par cette droite et par $m'r$, et dont les traces sont (V, H) coupera la droite G au sommet S cherché.

Effectuant ces constructions, on obtient (S^v, S^h) pour les projections du sommet S.

Maintenant, si par le sommet S et par une droite D menée par le point o, dans le plan P et parallèlement au plan vertical H', on fait passer un plan Q, ce plan coupera le cône C suivant deux génératrices qui couperont la droite D en des points sommets de l'ellipse intersection du plan P et du cône C ayant son sommet en S.

(D^h, D^v) sont les projections de la droite D; or sera la trace horizontale du plan Q; cette trace coupera la courbe ε en K et K'; dès lors S^hK' et S^hK seront les projections horizontales des deux génératrices d'intersection du cône C par le plan Q; lesquelles couperont la droite D en deux points a et a' ayant pour projections, le premier (a^h, a^v), le second (a'^h, a'^v). Ainsi les axes de l'ellipse située dans le plan P sont en longueur, $A = om$, $B = o^va^v$.

Donc pour le sommet m de cette ellipse le rayon de courbure a pour valeur

$$\rho = \frac{B^2}{A} = \frac{(\overline{o^va^v})^2}{om}.$$

Si donc (fig. 18) je prends $oa = o^va^v$, puis $om = om$ (om et oa étant perpendiculaires entre eux), traçant an perpendiculaire à am, on aura $on = \rho$. Portant on sur D^v à partir du point o', on aura en np parallèle à G^v ou perpendiculaire à D^v la projection verticale de la génératrice extrême du cylindre osculateur. Ce cylindre sera coupé par le plan horizontal suivant une ellipse ayant pour axe ρ et $o'p$, et cette ellipse sera osculatrice par son sommet au point m de la courbe ε.

Son rayon de courbure sera donc $\rho' = \frac{(\overline{o'p})^2}{\rho}$, expression facile à construire, et ρ' sera le rayon de courbure de la courbe donnée pour le point m.

Si l'on prend pour ligne de terre (fig. 19) la tangente mr, les constructions graphiques sont de beaucoup simplifiées, et l'on voit de suite qu'il suffit d'exécuter ce qui suit :

Tracer MM' parallèle à mm', unir les milieux o et o' de ces deux cordes, on aura le diamètre qui, prolongé, coupera la courbe ε en K, et mr en r;

Tracer mG arbitraire; du point r abaisser rS^v perpendiculaire à mG; de S^v abaisser S^vS^h perpendiculaire à mr; joindre les deux points K et S^h par une droite qui coupera en a^h la droite menée par o parallèle à mr;

Par o, mener oa parallèle à rS^v ou perpendiculaire à mG; du point a^h élever a^ha perpendiculaire à oa^h;

Du point o comme centre, ramener oa en ob; tracer mb, et bd perpendiculaire à mb, on aura $od = \rho$.

Puis du point o comme centre ramener od sur on, et mener np perpendiculaire à on; joindre d et p, et mener pq perpendiculaire à dp; on aura $oq = \rho'$;

Porter ρ' ou oq de m en q', on aura en q' le centre de courbure de la courbe ε pour le point m.

Si le point m était voisin d'un sommet de l'ellipse ou de la parabole ou de l'hyperbole, le diamètre or ferait un angle très aigu avec la tangente mr, et dès lors le point r serait à une grande distance.

Il faudrait donc pouvoir obtenir le point S^v sans avoir besoin de connaître le point r.

Or, si l'on mène xy parallèle à mm', et zy parallèle à or; les deux triangles semblables zmy et mor donnent : $mr = \frac{om \times my}{mz}$.

Abaissant du point y la droite yU perpendiculaire à mG, les deux triangles semblables mUy et mS^vr donnent : $mS^v = \frac{mU \times mr}{my}$. De sorte que $mS^v = \frac{mU \times om}{mz}$.

On pourra donc toujours construire le point S^v sans connaître le point r.

Remarquons que l'on peut donner à mG une direction arbitraire, que par conséquent l'on peut, en employant une nouvelle direction mG', construire le rayon de courbure correspondant au point m, et que l'on aura dès lors un moyen de vérification.

On pourrait ainsi construire en employant diverses positions de la droite mG, le rayon de courbure cherché et prendre la moyenne des longueurs trouvées.

Sous le point de vue graphique, la méthode que je viens d'exposer, quoiqu'elle soit un peu longue, offre des avantages que ne possèdent pas d'autres méthodes qui sont très élégantes et très simples *sous le point de vue géométrique*.

Ainsi, la méthode donnée par M. Plucker dans les *Annales de Mathématiques*, publiées par M. Gergonne, est d'une élégance et d'une simplicité remarquables *sous le point de vue géométrique;* mais il me sera permis de dire que *sous le point de vue graphique* elle ne pourrait être acceptée.

Et en effet,

La construction de M. Plucker est la suivante :

Étant donnés (fig. 20) une section conique ε, un point m et la tangente mt, par suite la normale mn ; tous les cercles tels que C tangent en m à la courbe ε, la couperont sous des cordes parallèles à ab ; si donc on mène mp parallèle à ab, le cercle osculateur passera par le point p.

Or, il est facile de voir que cette solution n'est simple que parce que l'on suppose que le périmètre de la courbe ε est connu ; car si de cette courbe ε on ne connaissait qu'un certain nombre de points, il faudrait exécuter des constructions assez longues pour obtenir les points d'intersection a et b du cercle C et de cette courbe ε; et ces constructions seraient plus longues que celles que l'on serait obligé de faire pour obtenir dans le même cas le point K intersection de la droite or avec la courbe ε ; attendu que or est un diamètre conjugué de la corde mm', et que, pour le point K (à chercher), on sait que la tangente est parallèle à mm'.

Ainsi, toutes les constructions exigées pour obtenir définitivement le rayon de courbure par la méthode que j'ai exposée, ne seraient guère plus longues que celles qu'il faudrait exécuter en employant la méthode de M. Plucker, si l'on suppose que l'on ne connaît qu'un certain nombre de points de la section conique.

Mais en supposant connu le périmètre entier de la section conique, on doit remarquer que pour les points voisins du sommet aplati d'une ellipse, la droite mp coupera sous un angle très aigu le périmètre de la courbe; dès lors il y aura indécision sur la position du point p; en outre, l'angle nmp sera très approchant de l'angle droit si la différence entre les axes de l'ellipse est considérable, par conséquent le centre du cercle osculateur sera donné par l'intersection de deux droites se coupant sous un angle très aigu.

Si l'on opère sur des paraboles ou des hyperboles, on verra de suite qu'à mesure que le point m s'éloignera du sommet, la droite mp tendra à couper la courbe en un point de plus en plus éloigné, et sous un angle de plus en plus aigu ; de sorte que la construction proposée est élégante et simple *sous le point de vue géométrique*, mais ne peut être acceptée comme *construction graphique*, puisque, en Géométrie descriptive, il faut construire rigoureusement, et de plus, pouvoir vérifier par de nouvelles constructions les résultats graphiques obtenus; car, en définitive, l'épure tracée par l'ingénieur doit servir à construire sur le terrain, et il faut dès lors que les erreurs forcément commises sur le papier, en vertu de l'imperfection des outils, ne soient pas assez grandes pour que, multipliées par le rapport de l'échelle au mètre, on puisse craindre des erreurs graves lors de l'exécution sur le terrain.

On peut obtenir une solution graphique plus simple que celle que je viens d'exposer ci-dessus, au moyen des considérations géométriques suivantes.

Supposons un cône ayant pour sommet un point S : en un point m d'une de ses génératrices G, concevons la normale N ; par cette normale, faisons passer deux plans P et P′ faisant entre eux un angle arbitraire β; le premier plan coupera le cône suivant une courbe A, le second plan suivant une courbe A′; supposons que l'on connaisse le cercle osculateur C de la courbe A pour le point m.

Cela posé :

Si l'on regarde le cercle C comme la base d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la droite G, il sera osculateur au cône donné pour le point m; dès lors, le plan P′ coupera ce cylindre suivant une ellipse E ayant un de ses sommets au point m, et pour l'un de ses demi-axes le rayon du cercle C : il sera facile de construire l'autre demi-axe. Cette ellipse E sera osculatrice à la courbe A′ au point m; son rayon de courbure en m sera donc le rayon de courbure de la courbe A′ pour ce même point m.

On peut facilement appliquer ce qui précède au problème proposé. En effet, la section conique F étant connue par plusieurs points ou par son tracé, la tangente T et par suite la normale N en un de ses points étant aussi connues, on construira dans un plan passant par la normale N (et faisant avec le plan de la section conique F un angle arbitraire β), un cercle C ayant pour diamètre la portion de la normale N interceptée comme corde par la section conique F.

Deux courbes du second degré qui ont une corde commune sont toujours situées sur deux cônes, dont les sommets sont faciles à déterminer : en effet, par un point a de N on mènera deux tangentes T et T′ à la courbe F, les points de contact étant désignés par t et t'; par le même point a on mènera deux tangentes T_1 et T'_1 au cercle C, les points de contact étant désignés par t_1 et t'_1.

Les quatre points t, t', t_1, t'_1, seront unis deux à deux par quatre droites (t, t_1), (t', t'_1), qui se couperont en un point S; (t', t_1), (t, t'_1) qui se couperont en un point S'. Les deux points S et S' seront les sommets des deux cônes.

D'après ce qui précède, si l'on regarde le cercle C comme la base d'un cylindre Y ayant ses génératrices parallèles à la droite (S, m), ce cylindre sera coupé par le plan de la section conique F suivant une ellipse E osculatrice de la courbe F au point m.

On pourra aussi regarder le cercle C comme la base d'un cylindre Y', ayant ses génératrices parallèles à la droite (S', m), lequel sera coupé par le plan de la section conique F suivant une ellipse E'; mais comme les deux ellipses E et E' auront un de leurs sommets au point m, et un axe commun égal au diamètre du cercle C, et comme le rayon de courbure F au point m sera celui de E ou de E', il s'ensuit que les deux ellipses E et E' se confondront en une seule et même courbe.

Ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant :

Si l'on a deux droites ab, cd (fig. 18 *bis*), *se coupant en un point* m, *tel que l'on ait* mc = dm; *si l'on mène les droites* ac, bd, *se coupant en* S; bc, ad *se coupant en* S'; *si par les points* c *et* d *on mène* cg, dg', *parallèles à* Sm; ch, dh', *parallèles à* S'm; *ces quatre droites viendront se couper deux à deux en les points* p *et* q *situés sur la droite* ab.

La construction graphique du rayon de courbure de la section conique donnée F, se réduira à ce qui suit (en considérant la tangente comme ligne de terre):

Ayant la tangente mt au point m de la courbe F (fig. 19 *bis*), on mènera deux tangentes np et $n'p'$ à la courbe F perpendiculaires à la droite mt. Par le point m on mènera une droite arbitraire sur laquelle on prendra deux points q et q' également distans du point m, et tels que qq' sera égal à la partie de la normale mn' interceptée par la courbe F.

Les droites pq, $p'q'$, se couperont en S; on mènera les droites qg et $q'g'$ parallèles à la droite Sm, lesquelles couperont la tangente mt en les points r et r'; l'ellipse E osculatrice de F en m aura pour ses demi-axes mq et mr; donc le rayon de courbure en m de F sera donné par $\rho = \frac{\overline{mr}^2}{mq}$ (*).

(*) Cette construction pourra permettre de reconnaître graphiquement si deux sections coniques en contact par un point sont ou non osculatrices en ce point.

Cette construction permet de tracer autant de sections coniques que l'on voudra, osculatrices en un point d'une section conique donnée ; car l'on sait tracer une section conique satisfaisant aux conditions d'être tangentes à trois droites, et de passer par deux points.

Construction du rayon de courbure en un point d'une courbe dont l'équation est inconnue.

Ce problème a été résolu de plusieurs manières. M. Bergery en a donné une solution au moyen d'une courbe d'erreur; dans le *Bulletin de la Société philomatique*, j'ai aussi proposé une solution par les surfaces gauches.

Ce qui précède permet d'obtenir une solution de ce problème, en employant une surface développable.

En effet :

Soit tracée une courbe plane A; soient donnés un point m de cette courbe et sa tangente, et par suite sa normale N au point m. Par la droite N on fera passer un plan P faisant avec le plan de la courbe A un angle arbitraire β; dans le plan P on construira un cercle C ayant son centre en un point arbitraire a de la droite N, et pour rayon la droite am.

Des divers points b, b', b'', etc., de la droite N, on mènera des tangentes au cercle C et à la courbe A, et l'on unira les points de contact homologues par des droites B, B', B'', etc., qui formeront les génératrices d'une surface développable D. On projettera ces diverses génératrices sur le plan Q vertical et ayant pour trace sur le plan de la courbe A la tangente en m de cette courbe, et leurs projections détermineront, par leurs intersections successives, un polygone auquel on inscrira une courbe δ qui sera la projection approximative de l'arête de rebroussement de la surface D. Dès lors, ayant mené par le point m une tangente T à la courbe δ, le cylindre Y ayant pour base le cercle C et ses génératrices parallèles à la droite T, qui est une des génératrices de la surface développable D, sera osculateur à la surface développable D au point m. Ce cylindre Y sera donc coupé par le plan de la courbe A suivant une ellipse osculatrice, par l'un de ses sommets, au point m de la courbe A.

La construction graphique sera donc la suivante (en considérant la tangente comme ligne de terre) :

Soit donnée une courbe A (fig. 20 *bis*), dont l'équation est inconnue; mais on connaît sa tangente mt pour le point m, et par suite sa normale N pour ce même point m.

D'un point o arbitrairement situé sur N, et avec un rayon om, on décrira le cercle C tangent en m à la courbe A.

Des points a, b, etc., arbitrairement pris sur N, on mènera des tangentes au cercle C et à la courbe A.

Des points de contact p, q, etc., sur le cercle, et des points de contact p',

q', etc., sur la courbe A, on abaissera des perpendiculaires sur la tangente mt.

Par le point m, on mènera une droite arbitraire mR sur laquelle on ramènera du point m comme centre au moyen d'arcs de cercle les pieds r, S, etc., des perpendiculaires abaissées sur mt des points p, q, etc.

On joindra les points U, r' — V, S' — etc., par des droites qui formeront un polygone auquel on inscrira une courbe δ. Du point m on mènera mg tangent à δ, et sur la droite mR prenant $mR = mR' = om$, on mènera par R et R' des parallèles à la tangente mg, lesquelles couperont mt en k et k'.

Le rayon de courbure en m de la courbe A sera :

$$\rho = \frac{\overline{mK}^2}{\overline{mR}}.$$

On doit remarquer que puisque l'on peut prendre la direction de mR arbitraire, on pourra, pour plusieurs directions différentes données à mR, calculer le rayon de courbure; et comme il y aura, vu l'imperfection des instrumens, vu aussi que l'on aura toujours une indécision, quoique faible, sur la position des points de contact p', q', etc.; comme, dis-je, il y aura dès lors toujours une erreur sur la longueur de ρ pour chacune des directions de mR, on pourra prendre la moyenne entre les longueurs différentes obtenues pour ρ et obtenir ainsi une valeur, très approximative et suffisante dans la *pratique*, du rayon de courbure de la courbe A.

En examinant de plus près les constructions précédentes, on pourrait obtenir quelques théorèmes nouveaux; je me propose de revenir plus tard sur ce sujet.

Précédemment, nous avons supposé que la normale N au point m de la section conique donnée coupait cette courbe en deux points, et tout ce que nous avons dit, lorsque cette condition était satisfaite, ne peut s'appliquer à l'hyperbole qu'autant que les deux points d'intersection sont situés sur une même branche de la courbe; car, s'il en était autrement, le cercle construit sur la corde D et la section conique donnée ne pourraient être enveloppés par une même surface conique.

Deux cas peuvent se présenter :

1°. La normale N peut couper en deux points l'ellipse, la parabole, ou une des branches de l'hyperbole.

2°. La normale N peut ne couper qu'en un point la parabole, ou une des branches de l'hyperbole.

Dans le premier cas, on pourra employer la construction indiquée précédemment;

mais on pourra, si l'on veut, remplacer le cercle par une ellipse arbitraire E ayant son sommet en m, et pour axe la corde D, et le plan R de cette ellipse pourra faire avec le plan de la courbe donnée un angle arbitraire.

On connaîtra le rayon de courbure ρ de cette ellipse E, pour le sommet m, car ses axes seront $2b$ et D, et l'on aura :

$$\rho = \frac{b^2}{\frac{1}{2}.D}.$$

Maintenant, si dans le plan R on trace un cercle C ayant son centre au centre de courbure de l'ellipse E pour le point m, et ayant son rayon $= \rho$; si l'on construit les sommets y, y', des deux cônes enveloppant la section conique donnée et l'ellipse E; si l'on trace les deux droites my, my'; si l'on considère le cercle C comme la base de deux cylindres dont les génératrices seront respectivement parallèles aux droites my, my'; ces deux cylindres se couperont suivant une ellipse e, dont le plan ne sera autre que celui de la section conique donnée, et laquelle sera osculatrice par son sommet au point m de la section conique donnée.

Il sera facile de construire graphiquement, au moyen de la *Géométrie descriptive*, les axes de cette ellipse e, et par suite la longueur de son rayon de courbure ρ' pour son sommet m, et le rayon ρ' sera le rayon de courbure demandé, pour le point m de la section conique donnée.

Remarquons que si l'on suppose que l'ellipse E est la base commune de deux cylindres dont les génératrices seront respectivement parallèles aux droites my, my', ces deux cylindres se couperont suivant une ellipse B, ayant son sommet en m, et laquelle sera dans le plan de la section conique donnée, et osculatrice en m à cette section conique.

Remarquons que :

Le plan R peut faire des angles différens avec le plan de la section conique; que l'ellipse E peut varier, l'un de ses axes $2b$ variant (car l'axe D qui est la partie de la normale N interceptée par la section conique ne peut varier); et que l'on obtiendra toujours la même ellipse B.

Dans le deuxième cas, on tracera dans le plan R arbitraire, mais passant par la normale N, une parabole P ayant son sommet au point m de la section conique donnée. On connaîtra le rayon de courbure ρ pour le sommet m de cette parabole (dont le paramètre sera toutefois arbitraire). Mais cette parabole devra être située du même côté que la branche de la section conique proposée, par rapport au plan passant par les tangentes menées au point m (soit à la courbe P, soit à la section conique donnée).

Car ce n'est qu'autant que cette condition est satisfaite, comme on le sait, que la parabole P et la section conique donnée pourront être enveloppées par deux cônes.

Tout ce qui a été dit précédemment, en employant une ellipse E, se reproduira dans le cas où l'on est obligé d'employer une parabole.

Je passe maintenant aux surfaces du second ordre, et je me propose la solution du problème suivant :

Étant donnés une surface du second ordre S, *un point* m *de cette surface, le plan tangent* T *en ce point, et la normale* N*; construire les rayons de courbure* maximum *et* minimum *de la surface* S *et la direction des lignes de courbure se croisant au point* m.

Pour mieux fixer les idées, supposons d'abord que la surface S est un ellipsoïde à trois axes; nous discuterons ensuite, avec plus de facilité, le problème dans tous les cas qui peuvent se présenter.

La normale N percera toujours la surface en un second point m', et je désigne par D la longueur de la partie de la normale interceptée par la surface.

Au point m', concevons un plan tangent T', et dans ce plan une droite V' passant par le point m' et dirigée perpendiculairement à la normale N.

Par les deux droites V' et N, concevons un plan R, lequel coupera le plan tangent T suivant une droite V parallèle à V'.

Puis, dans le plan R et du point o milieu de la corde D comme centre et avec un rayon $= \frac{1}{2}$ D, décrivons un cercle C.

Maintenant, si par la normale N je fais passer une suite de plans, chacun d'eux coupera la surface S suivant une ellipse E et le plan T suivant une droite t, tangente en m à la courbe E.

Les deux courbes E et C ayant une corde commune D, pourront être enveloppées par deux cônes; de sorte que nous pourrons considérer la courbe E comme une section conique donnée, dont on voudrait calculer le rayon de courbure pour le point m.

Et l'on appliquera la méthode indiquée précédemment. Ainsi : on mènera à la courbe E deux tangentes p et p' perpendiculaires à la droite t, lesquelles couperont cette droite t en deux points x et x'; on mènera au cercle C deux tangentes perpendiculaires au plan T, lesquelles couperont ce plan en deux points a et a' (ces deux points a et a' seront fixes, lorsque l'on considérera une autre section E' faite dans la surface S).

Joignant a et x, a' et x', les deux droites concourront en un point y; joignant m et y par une droite, et menant par le point a une parallèle à y, elle viendra couper la droite t en un point r, et dès lors le rayon de courbure de la section E pour le point m sera :

$$\rho = \frac{\overline{mr}^2}{\frac{1}{2} . D}.$$

D'après cette construction on voit :

1°. Que si l'on suppose un cylindre tangent à la surface S et ayant ses génératrices parallèles à la normale N, ce cylindre sera coupé par le plan T suivant une ellipse e, dont le centre ne sera pas au point m (mais ce point m sera toujours situé dans l'intérieur de l'ellipse e).

2°. Que si de ce point m on mène dans le plan T une suite de droites telles que t, elles couperont l'ellipse e en des points tels que x et x' ; et qu'en unissant ces points x et x' avec les points fixes a et a', et achevant la construction indiquée ci-dessus, on obtiendra une suite de points tels que r, lesquels formeront une courbe dont le centre sera évidemment en m.

La courbe lieu des points r est (dans ce cas) une ellipse, et cette courbe n'est autre que l'*indicatrice*, dont les propriétés ont été démontrées pour la première fois par M. Charles Dupin, dans ses *Développemens de Géométrie*. Plus loin, je montrerai comment on peut arriver à l'équation de la courbe lieu des points r. Mais démontrons qu'en effet elle est l'*indicatrice* pour le point m de la surface S.

Supposons que l'on ait construit pour le point m l'ellipsoïde S' osculateur en ce point par son sommet à la surface S, et supposons que son demi-axe dirigé suivant la normale N est $= \frac{1}{2}$ D.

Chacun des divers plans passant par la normale N, coupera la surface S suivant une courbe E, et la surface osculatrice suivant une courbe B. Les courbes E et B seront osculatrices en m.

Or, le rayon de courbure de la courbe B pour le point m est, comme on sait (en désignant ce rayon par ρ', et en désignant par d le demi-axe de l'ellipse B, perpendiculaire à D),

$$\rho' = \frac{d^2}{\frac{1}{2} D}.$$

Et l'on sait que les axes tels que $2d$ sont les divers diamètres de l'ellipse principale (de la surface S') dont le plan est perpendiculaire à D. Ainsi, les divers rayons vecteurs mr de la courbe lieu des points r sont égaux aux droites telles que d. Ainsi, la courbe lieu des points r n'est autre que la projection sur le plan T de la section principale (de la surface S') dont les demi-axes sont

$\sqrt{\frac{D}{2}.R}$ et $\sqrt{\frac{D}{2}.R'}$, en désignant par R et R' les rayons de courbure *maximum* et *minimum* de la surface S pour le point *m*.

Remarquons que jusqu'à présent l'*indicatrice* ne pouvait être construite qu'autant que l'on connaissait les rayons de courbure *maximum* et *minimum* de la surface S, et la direction des lignes de courbure se croisant au point *m*, tandis que je parviens à construire graphiquement les divers points *r* de l'*indicatrice*, et directement; de sorte que si j'en construis les axes, j'aurai la direction des lignes de courbure et la longueur des rayons de courbure *maximum* et *minimum* pour le point *m* de la surface S.

Ainsi, l'on pourra maintenant construire graphiquement (en employant comme *outil* la Géométrie descriptive) la longueur des rayons de courbure *maximum* et *minimum* d'une ellipsoïde à trois axes, et la direction de ses lignes de courbure, pour l'un quelconque de ses points, pourvu que l'on connaisse seulement la normale en ce point.

D'après ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant, dont la solution n'a été appuyée que sur les propriétés suivantes :

1°. Valeur du rayon de courbure au sommet d'une ellipse ;

2°. Par deux sections coniques qui ont une corde commune, on peut faire passer deux cônes;

3°. Le cylindre qui a pour base le cercle osculateur en un point *m* d'une section plane d'un cône, et ses génératrices parallèles à la génératrice du cône passant au point *m*, est osculateur au cône tout autour du point *m*.

THÉORÈME.

Étant donnés une surface du second ordre S (ellipsoïde à trois axes), *un point* m *de cette surface et la normale* N *en ce point, laquelle coupera la surface* S *en un second point* m'*; construisant les plans tangens* T *en* m, *et* T' *en* m'*; traçant dans le plan* T' *une droite* V' *perpendiculaire à la normale* N*; faisant passer par les droites* V' *et* N *un plan* R*; traçant dans le plan* R *et sur la corde* mm' *comme diamètre un cercle* C*; si par la normale* N *on fait passer un plan arbitraire* Q *coupant la surface* S *suivant une section conique* (ellipse) E, *les deux courbes* E *et* C *seront situées sur deux cônes dont les sommets* y *et* y' *seront sur la droite intersection des deux plans tangens* T *et* T'*; si l'on regarde le cercle* C *comme la base commune de deux cylindres* H *et* H' *ayant leurs génératrices res-*

pectivement parallèles aux droites my *et* my′, *ces deux cylindres se couperont suivant une section conique* (ellipse) $\mathfrak{C}$, *dont le plan ne sera autre que le plan* Q, *et cette section conique* $\mathfrak{C}$ *sera la section faite par le plan* Q, *dans la surface du second ordre* S′ (ellipsoïde à trois axes) *osculatrice à la surface* S *par l'un de ses sommets et au point* m. *Cette surface osculatrice* S′ *aura l'un de ses axes égal à* mm′, *ses autres axes étant* $\sqrt{mm'.R}$ *et* $\sqrt{mm'.R'}$ (R *et* R′ *étant les rayons de courbure* maximum *et* minimum *de la surface* S *pour le point* m).

Examinons maintenant ce qui doit arriver, en considérant les diverses autres surfaces du second ordre.

La normale N peut se comporter de deux manières différentes par rapport à la surface.

1°. La normale N peut couper la surface composée d'une nappe ou une même nappe de la surface (lorsqu'elle est composée de deux nappes) en deux points.

2°. La normale N peut ne couper la surface ou une même nappe de la surface qu'en un point.

Et le premier et le deuxième cas doivent être, chacun, séparés en deux.

1°. Lorsqu'au point considéré sur la surface les rayons de courbure sont dirigés dans le même sens.

2°. Lorsqu'au point considéré sur la surface les rayons de courbure sont dirigés en sens opposés.

La courbe de contact d'un cylindre et d'une surface du second ordre est toujours plane ; elle est toujours une section conique.

Si l'on projette orthogonalement cette courbe de contact sur le plan T tangent en *m*, ayant eu soin de prendre les génératrices du cylindre enveloppe, parallèles à la normale N au point *m* de la surface du second ordre, sa projection *e* sera une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole, et le point *m* sera toujours situé dans l'intérieur de l'ellipse, de la parabole, et d'une des branches de l'hyperbole ou entre les deux branches de l'hyperbole.

Si l'on suppose que par le point *m* on mène une suite de droites telles que *t* coupant la section conique *e* en des points tels que *x* et *x′*, et que par le point *m* on mène une droite arbitraire sur laquelle on prenne deux points arbitraires *a* et *a′*, mais également distans du point *m*; en effectuant la construction indiquée précédemment, on trouvera des points tels que *r*, et en cherchant par l'analyse algébrique appliquée à la Géométrie, l'équation de la courbe lieu des points *r*, on trouvera que cette courbe est une *ellipse* lorsque la courbe *e* est une ellipse ou une parabole, et lorsque le point *m* est dans l'intérieur d'une des branches de l'hyperbole *e*; et qu'elle est une *hyperbole* lorsque la courbe *e* est une hyperbole (*), mais que le point m se trouve situé entre les deux branches de la courbe e.

Cela posé :

Examinons les diverses espèces de surfaces du second ordre.

1°. *La surface* S *ayant ses rayons de courbure dirigés dans le même sens, et la normale* N *coupant la surface ou une de ses nappes en deux points.*

(*Ellipsoïde, paraboloïde elliptique, hyperboloïde à deux nappes.*)

La construction indiquée pour l'ellipsoïde à trois axes s'appliquera ici identiquement ; mais on pourra substituer au cercle C une ellipse arbitraire G ayant pour axe la partie D interceptée sur la normale par la surface S et dont le plan R coupera les deux plans tangens T et T′ suivant deux parallèles.

(*) Suivant la nature de la surface du second degré et de la direction de la normale N, il ne sera pas toujours possible de construire un cylindre parallèle à la droite N et tangent à la surface donnée ; dès lors il paraîtrait que l'on ne pourra pas dans tous les cas connaître la nature de la courbe lieu des points r.

Mais si l'on prend un point arbitraire sur un diamètre X parallèle à la normale N, on pourra toujours le regarder comme le sommet d'un cône tangent à la surface donnée, et quelle que soit la position du point sur la droite X, le plan de la courbe de contact sera toujours un plan *conjugué* de la droite X ; quel que soit donc le point pris sur X, toutes les courbes de contact seront parallèles ; par conséquent, en supposant le point situé à l'infini sur X, et, ce qui revient au même, sur N, lors même que pour cette position particulière du point la courbe de contact n'existerait pas, ou plutôt se trouverait située à l'infini, elle n'en sera pas moins de même nature que celles obtenues en prenant des points situés à distance finie sur X.

Ainsi, lorsque la courbe de contact d'un cône ayant son sommet sur un point situé sur X, sera une *ellipse* ou une *parabole*, la courbe lieu des points r sera une *ellipse* ; si la courbe de contact est une *hyperbole*, la courbe lieu des points r sera une *hyperbole*.

Il faut encore remarquer que la courbe lieu des points r peut être déterminée sans avoir besoin de connaître sur le plan T la projection orthogonale de la courbe de contact de la surface S et du cylindre parallèle à la normale N. Car il suffit de connaître sur le plan T la position des sommets y, y', des deux cônes enveloppant la section faite dans la surface S par le plan Q et la courbe tracée dans le plan R. Or, on peut déterminer la position de ces sommets, que la courbe de contact du cylindre et de la surface existe ou n'existe pas ; on voit donc que cette courbe de contact n'est point nécessaire pour construire la courbe lieu des points r, mais que la nature de cette courbe de contact sert à reconnaître la nature de la courbe lieu des points r.

La recherche de l'équation algébrique de la courbe lieu des points r est très longue ; en employant la méthode des projections, ou en d'autres termes, la Géométrie descriptive, comme méthode de recherche, on parvient très promptement à démontrer la nature géométrique de cette courbe.

Dès lors les cylindres ayant G pour base commune et leurs génératrices parallèles respectivement aux divers couples de droites telles que my et my', se couperont toujours suivant une ellipse qui sera située dès lors sur un ellipsoïde osculateur par son sommet au point m de la surface S, et dont l'un des axes sera égal à D.

Car, dans ce cas, l'*indicatrice* sera une ellipse, parce que le cylindre dont les génératrices seront parallèles à la normale N, et lequel envelopperа la surface S, aura (en vertu de la constitution géométrique des trois surfaces en discussion) pour courbe de contact avec la surface S une *ellipse* ou une *parabole*, et jamais une *hyperbole*.

Si au contraire on considère le cercle osculateur en m à l'ellipsoïde G comme la base de deux cylindres dont les génératrices seront respectivement parallèles aux divers couples de droites, telles que my et my', ces deux cylindres se couperont suivant une ellipse située sur un autre ellipsoïde osculateur par son sommet au point m de la surface S et dont l'un des axes sera dirigé suivant la normale N et égal à 2ρ, ou le diamètre du cercle osculateur de la courbe G pour le point m.

2°. *La surface* S *ayant ses rayons de courbure dirigés dans le même sens, et la normale* N *coupant la surface ou une de ses nappes en un seul point.*

(*Paraboloïde elliptique, hyperboloïde à deux nappes.*)

Dans ce cas, on fera passer par la normale N un plan arbitraire R, dans lequel on tracera une parabole P d'un paramètre arbitraire, mais ayant son sommet en m et la normale N pour axe.

Et suivant que l'on considérera les cylindres ayant la parabole P, ou le cercle osculateur en m de cette parabole, pour base commune, on obtiendra un paraboloïde elliptique ou un ellipsoïde osculateurs par leur sommet à la surface S et au point m.

Car l'*indicatrice* sera toujours une ellipse, parce que le cylindre parallèle à la normale N touchera la surface S suivant une *ellipse* ou une *parabole*, et jamais suivant une *hyperbole*, en vertu de la position qu'affecte la normale N par rapport aux surfaces en discussion.

3°. *La surface* S *ayant ses rayons de courbure dirigés en sens opposés, et la normale* N *ne la coupant qu'en un seul point.*

(*Paraboloïde hyperbolique, hyperboloïde à une nappe.*)

Dans ce cas, on fera passer par la normale N un plan arbitraire R dans lequel on tracera une parabole P d'un paramètre arbitraire, mais ayant son sommet en m, et pour axe la normale N.

Et l'on opèrera comme précédemment.

Mais il faut remarquer que les diverses sections faites dans la surface S par les divers plans Q (lesquels passent par la normale N) doivent être situées avec la parabole P d'un même côté du plan tangent T, pour que chacune de ces sections et la parabole P puissent être enveloppées par deux cônes.

Or, comme les rayons de courbure sont dirigés en sens opposés, on voit que certains plans Q couperont la surface S suivant des sections tournées dans un sens par rapport au plan T, et certains autres suivant des sections tournées en sens opposé par rapport à ce même plan T.

On devra donc, dans ce cas, employer deux paraboles P et P′ tournées en sens opposés et ayant le point m pour sommet commun, et la normale N pour axe commun. (Du reste, les paraboles seront situées dans un même plan R ou dans des plans différens.)

Chacune des paraboles P et P′ conduira à construire les diverses sections paraboliques d'un demi-paraboloïde hyperbolique osculateur par son sommet à la surface S et au point m.

Car l'*indicatrice* sera une hyperbole, parce que le cylindre parallèle à la normale N a pour courbe de contact une hyperbole, en vertu de la position que la normale N affecte par rapport aux deux surfaces employées.

Et en considérant les cercles osculateurs des paraboles P et P′, on sera conduit à trouver les sections elliptiques des deux demi-hyperboloïdes à une nappe situés l'un d'un côté, l'autre de l'autre côté du plan tangent T, et ces deux hyperboloïdes seront tournés en sens inverses, de sorte qu'un plan passant par la normale N coupera le premier suivant une ellipse, et le second suivant une hyperbole, *et vice versâ*.

Le plan tangent T coupe la surface S suivant deux génératrices droites A et A′, qui font entre elles deux angles supplémens l'un de l'autre, υ et υ'.

En considérant le cercle osculateur à la parabole P, on construira les divers points r situés sur une hyperbole e ayant pour asymptotes les droites A et A′, et cette courbe e sera dans l'angle υ.

En considérant le cercle osculateur à la parabole P′, on construira les divers points r situés sur une hyperbole e' ayant aussi pour asymptotes les droites A et A′; mais elle sera située dans l'angle υ'.

Nous avons vu qu'en considérant successivement les paraboles P et P′ comme bases communes des cylindres, les intersections de ces cylindres donnaient les sections paraboliques de deux demi-paraboloïdes hyperboliques osculateurs.

Pour que ces deux demi-paraboloïdes appartiennent à un même paraboloïde, il faudra que les hyperboles e et e' soient conjuguées l'une à l'autre, c'est-à-dire que l'axe réel de la courbe e soit l'axe imaginaire de la courbe e' *et vice versâ.*

4°. *La surface* S *ayant ses rayons dirigés en sens opposés, et la normale* N *coupant la surface en deux points.*

(*Hyperboloïde à une nappe.*)

Dans ce cas, le plan Q passant par la normale N, coupera suivant sa direction la surface S suivant des courbes dirigées en sens opposé par rapport au plan tangent T mené au point m.

Les sections seront ou des *ellipses* ou des *hyperboles.*

Lorsqu'elles seront des *ellipses*, on emploiera une ellipse arbitraire E construite dans un plan R coupant les deux plans tangens T et T′ suivant des parallèles, et cette ellipse aura pour axe la partie D de la normale interceptée par la surface S.

Lorsqu'elles seront des *hyperboles*, on emploiera une hyperbole B arbitraire construite sur D comme axe réel.

On obtiendra, en considérant l'ellipse E comme la base commune de deux cylindres, les sections *elliptiques* d'un demi-hyperboloïde à une nappe, osculateur en m.

On obtiendra, en considérant l'hyperbole B comme la base commune de deux cylindres, les sections *hyperboliques* d'un autre demi-hyperboloïde à une nappe, et aussi osculateur en m.

Pour que ces deux demi-hyperboloïdes appartiennent à la même surface, il faudra que les courbes h et h', lieu des points r, soient des hyperboles conjuguées.

En considérant les cercles osculateurs des courbes E et B, on est conduit aux sections *elliptiques* de deux hyperboloïdes tournés en sens opposés et situés de côté différent par rapport au plan T.

L'*indicatrice* est toujours dans ce cas une hyperbole.

Je ne suis point entré dans les détails de démonstration pour les divers cas, parce que d'après tout ce que j'ai dit touchant l'ellipsoïde à trois axes, il est facile de reconnaître l'existence des diverses propriétés que j'ai énoncées pour les diverses surfaces successivement examinées.

On voit que l'on peut, au moyen de la *Géométrie descriptive*, par des méthodes *graphiques* simples, par les intersections successives de couple de deux cylindres qui ont tous pour base commune une section conique donnée, déterminer les surfaces du second ordre osculatrices par leur sommet en un point quelconque d'une surface du second ordre.

On peut généraliser tout ce qui précède en supposant que par le point *m* de la surface S passe une droite arbitraire M, et non une normale N. Dès lors, par des considérations analogues à celles employées précédemment, on arrivera à construire, pour ainsi dire de *toutes pièces*, des surfaces du second ordre osculatrices au point *m* de la surface proposée.

Je me propose de revenir, dans un autre Mémoire, sur les diverses propriétés des surfaces osculatrices du second ordre, auxquelles la méthode nouvelle que je viens d'employer doit nécessairement conduire.

Si l'on parvenait à démontrer par la *Géométrie pure* le théorème suivant :

Étant données trois sections normales C, C′, C″, *d'une surface quelconque* S, *en un point* m *de cette surface ; construisant trois sections coniques* e, e′, e″, *osculatrices au point* m *de ces trois courbes* C, C′, C″, (*et établissant pour condition que les trois courbes auront leur sommet en* m *et pour axe commun une portion* D *de la normale* N *au point* m *de la surface* S), *on aura une surface du second ordre* S′ *déterminée par les trois courbes* e, e′, e″, *laquelle aura pour un de ses axes la droite* D. *Faisant passer par la normale* N *un plan sécant arbitraire, lequel coupera la surface* S *suivant une courbe* C‴ *et la surface* S′ *suivant une section conique* e‴, *les courbes* C‴ *et* e‴ *seront osculatrices au point* m; et par suite, *si l'on considère les deux courbes* C″ *et* C‴ *comme les directrices courbes d'une surface développable* B, *le cylindre qui aura pour base la section conique* e″, *et qui sera osculateur à la surface* S *tout autour du point* m, *sera coupé par le plan de la courbe* C‴ *suivant une section conique qui ne serait autre que* e‴.

Et l'on déduirait encore comme corollaire le théorème suivant :

Étant donnée une surface développable ; une section plane C *de cette surface ; la génératrice* G *de la surface développable passant par un point* m *de la courbe* C; *le cylindre qui a pour base le cercle osculateur de la courbe au point* m *et dont les génératrices sont parallèles à la droite* G, *est osculateur à la surface développable tout autour du point* m.

On pourrait établir toute la théorie des courbures des surfaces sur de simples considérations géométriques, et en employant comme *outil* ou *méthode* de recherche, non l'*Analyse*, mais la *Géométrie descriptive* (*).

(*) Tout ce qui est relatif à la construction des rayons de courbure *maximum* et *minimum* d'une surface du second ordre et à la théorie des courbures des surfaces a été rédigé depuis la lecture de ce Mémoire à la Société Philomatique.

Or, voici une démonstration *géométrique* du théorème énoncé.

Il est évident que lorsque deux cylindres ont leurs génératrices parallèles, et pour base deux courbes osculatrices en un point, ils sont osculateurs l'un à l'autre tout le long de la génératrice de contact.

Cela posé :

Si par le point m on mène une droite arbitraire D, et que l'on prenne sur cette droite des points également distans entre eux p, p', p'', p''', etc., par lesquels on fasse passer respectivement des plans parallèles P, P', P'', P''', etc.

Si par le point m on fait passer une suite de plans normaux R, R', R'', R''', etc., faisant entre eux des angles égaux et coupant respectivement la surface courbe donnée suivant des courbes C, C', C'', C''', etc.

Si l'on projette ces courbes par des droites parallèles à la droite D, savoir : C sur le plan P en la courbe C_1, C' sur le plan P' en la courbe C'_1, etc.

Si l'on projette de la même manière les sections faites dans la surface du second ordre osculatrice en m, par les plans R, R', R'', etc., savoir : a sur le plan P en a_1, a' sur le plan P' en a'_1, etc.

Si ensuite on fait tourner dans les plans P, P', P'', etc., et autour des points p', p'', etc., les courbes C'_1 et a'_1, C''_1 et a''_1, etc., les premières d'un angle α, les secondes d'un angle 2α, etc. (*).

(*) Il faut employer une méthode de transformation (pour passer de la surface proposée et de son osculatrice aux surfaces M et M'), telle que la surface transformée reste *géométrique*, la surface proposée étant elle-même une surface *géométrique*. C'est pour cela que j'ai pris des points également distans sur la droite D pour y transporter les projections des sections faites par les plans R, R', R'', etc.

Mais on peut opérer autrement :

On peut supposer que par la normale N au point m de la surface donnée, passe un plan fixe F et qu'un plan normal R coupant la surface proposée suivant une courbe C, fasse avec le plan F un angle δ.

Sur la droite D passant par le point m, on prendra un point fixe p, et par ce point on mènera un plan fixe f perpendiculaire à D.

Cela posé : on pourra prendre sur D un point p' tel que sa distance au point p soit une fonction de l'angle δ et projeter sur le plan P' parallèle au plan f, et passant par le point p', la courbe C en la courbe C_1.

Puis faire tourner la courbe C_1 autour de la droite D et dans le plan P d'un angle α qui sera une nouvelle fonction de δ.

Dès lors, la surface lieu des courbes C_1 sera une surface *géométrique*.

En leurs nouvelles positions, les courbes C_1, C'_1, C''_1, etc., et a_1, a'_1, a''_1, etc., formeront deux surfaces M et M′, ayant une génératrice droite commune D, et un élément gauche commun suivant la génératrice D.

Si l'on suppose enfin que les courbes C et a, C′ et a', C″ et a'', sont osculatrices, les courbes C_1 et a_1, C'_1 et a'_1, C''_1 et a''_1, seront aussi osculatrices en leurs nouvelles positions.

Si donc on construit en p, p' et p'', les plans tangens T, T′, T″, ils couperont les surfaces M et M′ en des courbes N et N_1 tangentes en p, N′ et N'_1 tangentes en p', N″ et N''_1, tangentes en p'', parce qu'il y a un contact du second ordre entre les courbes C_1 et a_1, C'_1 et a'_1, C''_1 et a''_1.

Les tangentes t, t' et t'', à ces courbes de sections, aux points p, p' et p'' détermineront un hyperboloïde à une nappe osculateur en même temps aux surfaces M et M′ et tout le long de la génératrice D (*) ; les deux surfaces M et M′ sont donc osculatrices l'une à l'autre tout le long de la droite D ; donc, etc.

(*) Les deux surfaces M et M′ sont tangentes l'une à l'autre tout le long de la génératrice D (en vertu de la construction employée pour obtenir ces deux surfaces).

Les trois plans tangens T, T′ et T″, couperont la surface M suivant trois courbes B, B′, B″, ayant pour tangentes les droites t, t', t'', lesquelles seront les directrices d'un hyperboloïde U osculateur de la surface M tout le long de la droite D. Les trois plans tangens T, T′, T″, couperont aussi la surface M′ suivant trois courbes A, A′, A″, ayant pour tangentes les droites θ, θ', θ'', lesquelles seront les directrices de l'hyperboloïde U′ osculateur de la surface M′ tout le long de la droite D. Les plans P, P′, P″, coupent les surfaces M et M′ suivant des courbes C_1 et a_1, C'_1 et a'_1, C''_1 et a''_1, qui sont osculatrices entre elles aux points p, p', p''; mais ces mêmes plans couperont l'hyperboloïde U suivant trois courbes b, b', b'', osculatrices des courbes C_1, C'_1, C''_1, et couperont aussi l'hyperboloïde U′ suivant trois courbes d, d', d'', osculatrices des courbes a_1, a'_1, a''_1. Par conséquent les courbes b et d, b' et d', b'' et d'', seront osculatrices entre elles aux points p, p', p''.

Et comme l'hyperboloïde U ou U′ peut être considéré comme engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur les trois courbes b, b', b'', ou d, d', d'', il s'ensuit que les deux hyperboloïdes U et U′ auront trois génératrices droites successives et infiniment voisines, communes ; et que dès lors ils seront osculateurs l'un à l'autre suivant la droite D. Mais comme trois droites ne peuvent déterminer qu'un seul hyperboloïde, on doit en conclure que les deux surfaces U et U′ ne sont qu'un seul et même hyperboloïde osculateur, en même temps, aux deux surfaces M et M′, et tout le long de la droite D. (Ainsi, les courbes B et A, B′ et A′, B″ et A″, ont un contact du premier ordre, ou, en d'autres termes, les droites t et θ, t' et θ', t'' et θ'', se superposent.)

Ainsi, toute la théorie de la courbure des surfaces peut être appuyée sur ce qui suit :

1°. Sur la valeur du rayon de courbure au sommet d'une section conique;

2°. Sur la construction de l'hyperboloïde à une nappe osculateur à une surface gauche tout le long d'une de ses génératrices droites.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS AUX ENGRENAGES.

Lorsque l'on veut transmettre à un axe la force appliquée à un autre axe, on emploie des roues dentées et l'on donne au système le nom d'*engrenage*.

Les axes peuvent affecter l'un par rapport à l'autre trois positions.

1°. Ils peuvent être parallèles; 2°. ils peuvent se couper; 3°. ils peuvent faire un angle entre eux sans se rencontrer.

On donne le nom d'*engrenage cylindrique* au système de deux roues dentées qui servent à transmettre le mouvement de rotation, entre deux axes parallèles, parce que ordinairement on emploie des surfaces cylindriques pour terminer les dents.

On donne le nom d'*engrenage conique* au système de deux roues dentées qui servent à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes qui se coupent, parce que ordinairement on emploie des surfaces coniques pour terminer les dents.

La base des surfaces cylindriques ou coniques qui terminent les dents peut être arbitraire, en ce sens que celle de la dent qui conduit étant déterminée, on conclut celle de la dent qui est conduite, de manière à ce que la condition suivante soit satisfaite, savoir : que les vitesses des deux axes soient dans un rapport donné, *constant* ou *variable* suivant une loi donnée.

Dans les machines il est presque toujours indispensable que le rapport des vitesses des axes soit constant; et il serait à désirer que l'on pût, par le tracé seul, introduire une nouvelle condition, celle de l'uniformité de mouvement; mais les frottemens s'y opposent, et cette condition ne peut s'obtenir qu'au moyen d'un *volant*.

Les mécaniciens emploient deux formes de dents pour les engrenages; dans les uns les dents sont terminées par des *épicycloïdes*, dans les autres par des *développantes*, parce que avec l'une et l'autre forme le rapport entre la puissance et la résistance est constant; mais avec l'une et l'autre forme, le travail du frottement est variable; en sorte que, pour que l'uniformité de mouvement subsiste, il faut nécessairement employer des *volans* pour régulariser le mouvement de rotation.

Dans les engrenages à *épicycloïdes* la pression entre les dents est variable, tandis que la pression est constante dans les engrenages à *développantes*.

En sorte que les dents se déforment par le travail, suivant des *développantes* dans le second engrenage, et non suivant des *épicycloïdes* dans le premier engrenage.

Cette propriété des engrenages à *développantes* doit les faire préférer avec raison par les mécaniciens.

Cependant une légère variation dans le frottement ou dans le rapport entre la résistance et la puissance pendant le temps employé par une dent pour conduire son homologue, ne peut être nuisible dans les grandes machines, et cette considération permet de simplifier le tracé des engrenages cylindriques et coniques en substituant aux arcs d'*épicycloïdes* ou de *développantes*, qui doivent servir de bases aux surfaces cylindriques ou coniques qui terminent les dents, leurs cercles osculateurs (sauf à établir des volans pour régulariser le mouvement de la machine).

Jusque à présent les mécaniciens ont employé des arcs de cercles pour terminer les dents des engrenages; mais le centre de ces cercles, ainsi que leurs rayons étaient mal choisis, car ces cercles n'étaient point les cercles osculateurs des arcs de courbes qu'ils devaient remplacer. Aussi est-on obligé de donner un grand jeu entre les dents de l'engrenage. Aussi remarque-t-on que lorsque deux ou trois dents sont en prise, elles ne fonctionnent pas toutes en même temps, mais alternativement; ce qui produit des chocs et des intermittences qui sont nuisibles à la durée de l'engrenage, et de plus donnent naissance à des vibrations qui, à la longue, déboîtent et déchaussent les assemblages des diverses parties de la machine; et de plus encore, les vibrations dues à ce *tic-tac* perpétuel consomment une partie de la force motrice.

Il n'est donc pas sans quelque importance de connaître une méthode géométrique simple au moyen de laquelle on puisse construire promptement le centre de courbure d'un arc d'épicycloïde plane ou sphérique, puisque l'on pourra en faire des applications utiles aux tracés des engrenages cylindriques et coniques.

J'ai dit plus haut que l'invariabilité de la pression entre les dents devait faire préférer les développantes planes et sphériques pour le tracé des engrenages cylindriques et coniques; mais il existe encore une autre raison non moins importante et qui est évidente, c'est que l'on est forcé de placer rigoureusement les axes dans la position déterminée en vertu du tracé, lorsque l'on emploie des épicycloïdes (et cela a lieu pour les engrenages intérieurs et extérieurs), tandis que l'on peut, pour l'engrenage extérieur seulement (mais dans les machines on se sert plus d'engrenages extérieurs que d'intérieurs), éloigner ou rapprocher les axes, en les laissant parallèles dans les engrenages cylindriques, ou en les faisant se couper, toujours au même point, dans les engrenages coniques, lorsque l'on emploie *des développantes*.

De sorte que l'emploi des développantes facilite la pose de l'engrenage extérieur, et de plus, lorsque les dents s'usent, on peut rapprocher les axes, pour diminuer le jeu entre les dents, sans troubler le rapport existant entre leurs vitesses; ce que l'on ne peut faire lorsque l'on emploie *des épicycloïdes*.

Ajoutons encore que le tracé de l'engrenage conique est très difficile lorsque l'on veut le construire rigoureusement avec des épicycloïdes, et que c'est ce motif qui engagea M. Poncelet à chercher une méthode approximative suffisante pour *la pratique*, tandis que le tracé rigoureux de l'engrenage conique avec des développantes sphériques est presque aussi simple que le tracé de l'engrenage cylindrique avec des développantes planes.

Et à ce sujet je vais entrer dans quelques détails ; mais avant je terminerai ces considérations générales, en disant quelques mots touchant la troisième position que les axes peuvent affecter, celle où ils ne sont pas situés dans un même plan.

On n'avait encore pu, au moyen d'un engrenage composé seulement de deux roues, transmettre le mouvement de rotation entre deux axes ainsi situés, excepté dans le cas où ils étaient perpendiculaires entre eux, car alors on connaissait la *vis sans fin*, mécanisme qui ne pouvait cependant être employé que lorsque l'axe portant la roue dentée devait se mouvoir très lentement.

En 1831, j'ai fait exécuter un modèle fonctionnant, qui est dans le cabinet de l'École Polytechnique (et, avant, la Société d'Encouragement en avait fait exécuter un, à ses frais, du même genre), qui montre que le problème, insoluble jusque alors, peut être résolu très facilement. L'une des roues a des dents cylindriques ayant pour base des développantes de cercles; l'autre roue a ses dents terminées par des surfaces *hélicoïdes développables*. Je me propose d'écrire un mémoire dans lequel je décrirai le *tracé*, les *propriétés* et l'*exécution* de ce nouvel engrenage de mon invention.

DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DÉVELOPPANTES PLANES.

L'engrenage cylindrique peut être extérieur ou intérieur.

De l'engrenage extérieur.

Dans une note publiée dans le *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale* (octobre 1829), j'ai montré les diverses propriétés dont jouissait l'engrenage extérieur, savoir :

1°. De permettre de rapprocher ou éloigner les axes; 2°. de permettre de faire tourner l'une des roues dentées autour de la droite parcourue par le point de contact de deux dents, et d'obtenir ainsi le moyen de transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan.

Je fis alors remarquer que l'engrenage qui pouvait être employé comme engrenage de force, lors du parallélisme des axes (puisque les dents étaient en contact par une droite dont la longueur variait suivant la hauteur du cylindre qui les terminait, et que, dès lors, l'effort était réparti sur les divers points de cette droite de contact), ne pouvait plus être considéré que comme engrenage de précision, lorsque les axes faisaient entre eux un certain angle, parce que alors les dents, pendant le mouvement de rotation, n'étaient plus en contact que par un point.

Je fis remarquer aussi que, pendant le mouvement de rotation, l'angle des axes pouvait varier à volonté, soit d'une manière intermittente, soit d'une manière continue; et enfin je fis observer que, lorsque les axes n'étaient plus parallèles, l'engrenage ne pouvait être à retour, c'est-à-dire, qu'on ne pouvait indistinctement faire tourner à droite ou à gauche la roue qui conduisait ou qui était conduite.

Je ne m'occupais point dans cette note de l'engrenage intérieur, dont les propriétés diffèrent en plusieurs points de celles de l'engrenage extérieur.

De l'engrenage intérieur.

Soient C et C′ (fig. 21) deux cercles tangens en m (le cercle C′ enveloppant le cercle C); soit TT′ la tangente commune à ces deux cercles, regardés comme les cercles primitifs, et ayant dès lors leurs rayons dans le rapport inverse des vitesses que doivent avoir les axes A et B parallèles et passant par leurs centres.

Si l'on trace les deux développantes mr et mv du cercle C et les deux développantes mr' et mv' du cercle C′, on voit que si l'engrenage tourne de gauche à droite, la développante mv conduira la développante mv', les contacts parcourant la tangente commune mT.

Et que si, au contraire, l'engrenage tourne de droite à gauche, ce sera la développante mr qui conduira la développante mr', le contact parcourant la tangente commune mT'.

On voit aussi sur-le-champ : 1°. Que l'engrenage est à retour, mais que le contact des dents parcourt toujours la même droite TT', que l'engrenage tourne dans un sens ou dans un autre, tandis que dans l'engrenage extérieur le contact parcourait une des tangentes aux cercles primitifs, lorsque la rotation avait lieu dans un sens, et parcourait la seconde tangente aux mêmes cercles, lorsque la rotation avait lieu en sens inverse;

2°. Que la position des axes doit être invariable; on ne peut les éloigner ni les rapprocher comme dans l'engrenage extérieur; ce qui rend la pose de ces engrenages intérieurs plus délicate que celle des engrenages extérieurs ;

3°. Que le tracé est très simple et très facile, et beaucoup plus simple et plus facile que pour l'engrenage extérieur, pour lequel il faut nécessairement que les deux tangentes aux cercles primitifs se coupent sous un angle obtus; et de plus, pour lequel un tâtonnement est nécessaire lorsqu'on vient à déterminer la course de la dent et le jeu à conserver entre les dents. (On peut voir à ce sujet le mémoire publié par M. Lefebvre, colonel d'artillerie, dans le deuxième numéro du *Mémorial d'artillerie*. Dans ce mémoire M. Lefebvre ne s'est occupé que de l'engrenage cylindrique et conique extérieur).

4°. Enfin que la puissance doit toujours être appliquée à l'axe de la roue intérieure, si l'on veut que les dents se conduisent à partir de la ligne des centres, et non avant cette ligne.

Je donne deux tracés. Dans la figure 21, les dents ne sont point séparées par un creux ou intervalle. Aussi ce tracé ne serait applicable que pour de petites roues employées dans des machines de précision, la pointe aiguë des dents pouvant être promptement émoussée ou brisée, si l'on employait ces roues dans des machines de force.

De plus, comme il n'y a pas de jeu entre les dents, l'engrenage tournera dans un sens ou dans un autre sans perte de temps; mais il faut alors que la dilatation des dents soit, pour ainsi dire, nulle avec les variations de température.

Dans la fig. 22, les dents ont une certaine épaisseur à leur extrémité et sont, dès lors, séparées les unes des autres, sur chaque roue, par un creux ou intervalle. On peut de plus ménager un jeu avec la plus grande facilité, et rendre ce jeu aussi grand ou aussi petit que l'on voudra. Il suffit pour cela de rogner chaque dent de l'une des roues, au moyen de la développante KK′, distante de la développante primitive Ad', de la quantité voulue pour le jeu. Ce tracé doit être appliqué aux engrenages de force, et le jeu permettra aux dents de se dilater par les changemens de température, sans que la marche de l'engrenage se trouve entravée.

Si je suppose que l'axe B (fig. 21 et 22) restant fixe, la roue C tourne autour de la tangente commune TT′, comme charnière, alors l'axe A viendra couper l'axe B, et sous des angles différens, suivant la quantité angulaire dont la roue C aura tourné autour de la charnière TT′.

Mais on conçoit que si les dents sont terminées pour l'une et l'autre roues par des surfaces cylindriques, parallèles à l'axe B avant le mouvement de rotation autour de TT′, ce mouvement de rotation ne pourra s'exécuter, puisque l'une des surfaces cylindriques est concave et l'autre convexe.

Il faudra donc terminer la dent convexe de la roue intérieure par une surface canale, et la dent concave de la roue extérieure par une surface cylindrique; mais alors les dents ne seront en contact que par un point, quelle que soit l'inclinaison de l'axe A par rapport à l'axe B.

Cette construction permettrait de construire des engrenages de précision et non de force, tels que l'un des axes pourrait prendre, d'une manière intermittente ou continue, toutes les inclinaisons possibles avec l'autre axe, depuis le parallélisme jusqu'à l'angle droit.

Les deux axes pourraient aussi, tout en tournant sur eux-mêmes, prendre ensemble un mouvement d'oscillation dans le plan qui les contient.

Remarquons que pour l'engrenage intérieur, le retour sera toujours possible, c'est-à-dire que les deux roues pourront à volonté tourner dans un sens ou dans un autre, quel que soit l'angle sous lequel les deux axes A et B se coupent, en supposant que, pendant le mouvement de rotation des roues autour de leurs axes, les plans de ces roues tournent aussi eux-mêmes autour de la tangente commune TT′ : propriété remarquable dont ne jouit pas l'engrenage extérieur.

DES ENGRENAGES CONIQUES A DÉVELOPPANTES SPHÉRIQUES.

L'engrenage conique peut être extérieur ou intérieur.

Engrenage extérieur.

Concevons deux cônes de révolution (fig. 23), ayant même sommet en S, et pour base, l'un le cercle C, l'autre le cercle C′; les apothèmes Sm et Sm' de l'un et l'autre étant égales.

On pourra toujours construire deux plans tangens communs à ces deux cônes, et dans chaque plan tangent tracer un cercle ayant son centre au sommet S, et pour rayon l'apothème Sm ou Sm' de l'un des cônes.

Ainsi, l'on aura deux cercles ayant pour centre commun le point S, dont les plans se couperont suivant la droite SP, et tels que le cercle D sera tangent en m à la base C, et en m' à la base C′, et que le cercle D′ sera tangent en n à la base C, et en n' à la base C′.

Cela posé :

Supposons que le cercle D roule sur C et ensuite sur C′, un point du cercle D décrira, par ce double mouvement, d'abord une développante sphérique δ pour le cône (S, C), et ensuite une développante sphérique δ' pour le cône (S, C′).

De sorte que si l'on suppose que les cônes tournent autour de leurs axes, les développantes δ et δ' se conduiront l'une l'autre, leur point de contact parcourant le cercle D, les vitesses angulaires des axes étant dans un rapport constant.

Il en sera de même en considérant le cercle D'.

On pourra donc placer sur le cône (S, C) une dent conique, ayant pour base l'arc de développante décrit par un point du cercle D, et l'arc de développante décrit par un point du cercle D', et pour sommet le point S.

On pourra faire la même construction pour le cône (S, C'), et l'on voit sur-le-champ que la construction de cet engrenage conique offrira des difficultés analogues à celles signalées pour la construction de l'engrenage cylindrique, lorsqu'il s'agira de calculer le jeu entre les dents et la course d'une dent.

Dans son mémoire, M. Lefebvre propose de construire l'engrenage conique à développante sphérique, de la manière suivante :

(Extrait du numéro 2 du *Mémorial d'artillerie*, page 342.)

« Ayant des roues coniques à construire, on les tracera sur une » sphère d'un diamètre médiocre et exactement déterminé; on se ser- » vira avec avantage d'une équerre sphérique du même diamètre pour » tracer des arcs de grands cercles tangens à des circonférences, etc.; » les développantes sphériques seront tracées avec le compas par la » méthode déjà indiquée; on peut même les décrire aussi avec un fil, » car s'il est constamment tendu sur une surface sphérique lisse, il » sera toujours dans le plan d'un grand cercle. Connaissant le tracé » des dents sur cette sphère, on en rapportera toutes les dimensions » au rayon que l'on veut avoir, au moyen d'une échelle de lignes pro- » portionnelles; on aura ainsi le tracé extérieur; on achevera la dent » en menant par les points de ce tracé des lignes au point du centre, » ce qui formera un cône dont on prendra une portion égale à la lon- » gueur que l'on veut donner à la dent. »

Il m'a semblé que l'on pourrait, avec avantage, remplacer la méthode proposée par M. Lefebvre, par la suivante :

Ayant déterminé d'abord (fig. 24) l'épaisseur *ab* à la racine de la dent sur le cercle inférieur D du tronc conique *noyau* ou *primitif* qui doit porter les dents coniques, et ensuite le creux ou intervalle ba' qui doit séparer deux dents sur ce même cercle; en un mot, ayant opéré la *division* de la roue dentée, on tracera les courbes ag, bg' intersection du cône ayant son sommet au sommet du tronc conique noyau, et pour base les arcs de développantes sphériques, avec le plan même du cercle D, et l'on emploiera à cet effet la construction géométrique indiquée dans la première partie de ce mémoire, et l'on se rappelle que ces courbes ag et bg se tracent avec la plus grande facilité sans avoir besoin de connaître les développantes sphériques.

On remarquera ensuite que si l'on coupe la dent conique par le plan du cercle supérieur D$'$ du tronc conique noyau, on obtiendra deux courbes AG et BG, semblables aux courbes ag et bg par rapport au centre o qui sera le pôle ou centre de similitude des courbes; de sorte que, connaissant la courbe ag, il sera facile de construire par points la courbe semblable AF. En effet, on mènera les rayons oa, om, og, etc., et l'on prendra les distances aA, mM, gG, etc., égales entre elles et à la différence des rayons des deux cercles D et D$'$ bases du tronc conique noyau, on obtiendra ainsi autant de points A, M, G, etc. que l'on voudra de la courbe AG.

Ce tracé exécuté, et il est presque aussi simple que celui exigé pour la construction de l'engrenage cylindrique, on le rapportera sur un tronc cylindrique capable de contenir le tronc conique noyau et les dents qui doivent être distribuées sur la surface convexe.

Pour cela faire, on appliquera (fig. 26) le tracé fait pour le cercle D sur le plan P de la base inférieure du tronc cylindrique, et le tracé fait pour le cercle D$'$ sur le plan P$'$ de la base supérieure du tronc cylindrique, ayant soin que les rayons homologues o'Q$'$ et oQ aient leurs extrémités Q$'$ et Q sur une génératrice QQ$'$ du tronc cylindrique.

Il suffira ensuite d'avoir numéroté des points 1$'$, 2$'$, 3$'$, 4$'$, etc., et 1, 2, 3, 4, etc., respectivement homologues, sur les courbes AG et ag, et au moyen d'un rabot ou de tout autre outil, d'exécuter les génératrices 1$'$. 1 — 2$'$. 2 — 3$'$. 3 — 4$'$. 4 — etc. de la dent conique.

Ayant ainsi exécuté séparément les deux roues dentées, il arrivera, lorsqu'on les mettra en présence, que du côté des grandes bases, les dents feront une saillie en dehors. Il sera bien d'enlever cette saillie, qui donnerait mauvaise grâce à l'engrenage; pour cela (fig. 25) on placera chaque roue sur le tour et l'on enlèvera l'excédant *rga* en la partie inférieure de la dent, en dirigeant l'outil normalement à la génératrice *aA* du tronc conique noyau. On pourrait en faire autant pour la partie supérieure de la dent et enlever aussi l'excédant dr'A.

Les engrenages coniques extérieurs à développantes sphériques jouissent des propriétés suivantes, savoir :

1°. Les pressions sont constantes en chaque point de la même développante sphérique; ce qui n'établit pas que le frottement soit constant. Ainsi les dents se déformeront toujours par le travail, mais suivant des cônes ayant pour bases des développantes sphériques;

2°. On peut éloigner ou rapprocher les axes, pourvu qu'ils se coupent toujours au même point; mais on ne peut pas faire varier les axes, en ce sens qu'ils cessent de se couper; comme pour les engrenages cylindriques, on pouvait ne pas les rendre parallèles.

On doit remarquer que, de même que pour les engrenages cylindriques extérieurs, il fallait que les deux plans tangens aux cylindres *noyaux* ou *primitifs* se coupassent sous un angle obtus, et que, plus cet angle était grand, plus le tracé devenait facile; de même aussi il faut pour les engrenages coniques extérieurs que les deux plans tangens aux cônes *noyaux* ou *primitifs* se coupent sous un angle obtus.

On pourrait cependant ne pas s'astreindre à cette condition; mais alors il faudrait supprimer les dents adjacentes de celle qui est en prise, lesquelles arriveraient à se rencontrer sans se mettre en contact. En un mot, il faudrait supprimer toutes les dents qui, en vertu du tracé, ne permettraient pas à l'engrenage de subsister, les dents tendant dans le mouvement de rotation à s'intercepter le passage. De sorte que deux dents se mettant en prise, deux nouvelles dents ne viendraient pas se mettre en contact aussitôt que les deux premières cesseraient de se conduire; et alors il faudrait, pour que le mouvement de rotation se continuât, placer sur le même axe plusieurs étages de roues dentées juxtaposées, et tellement disposées que, lorsque deux dents cesseraient d'être en contact pour le premier étage, deux dents de l'étage supérieur arriveraient au contact, et ainsi de suite. Ce mode de construction permettrait de faire des dents très longues ou très courtes, à volonté, et simplifierait le tracé, puisque l'on n'aurait plus à combiner le nombre des dents, de manière à ce que deux dents soient toujours en prise.

Ce fut en 1816 que je vis pour la première fois une machine dont l'engrenage était construit d'après ce principe. Cette machine était disposée pour étirer les tuyaux de lunettes et avait été exécutée par M. Savart père, dans les ateliers de construction de l'École d'application de Metz. Ce fut en l'examinant que je fus alors conduit à la démonstration géométrique des engrenages de With, de ces engrenages qui jouissent en même temps des deux propriétés suivantes, savoir : 1°. vitesse angulaire constante; 2°. frottement de roulement; propriétés qui avaient toujours été regardées, depuis Euler, comme incompatibles; et ce ne fut qu'en 1826, lorsque je présentai mes mémoires à ce sujet à l'Institut de France, que cette incompatibilité cessa d'être une vérité en mécanique.

Engrenage intérieur.

Dans le cas des engrenages intérieurs (fig. 27), les deux cônes noyaux ou primitifs sont en contact par une génératrice, et n'ont qu'un seul plan tangent commun.

La construction est la même que celle employée pour les engrenages extérieurs. Les propriétés dont jouissent les engrenages intérieurs sont aussi les mêmes que celles dont jouissent les engrenages extérieurs, excepté toutefois que l'on ne peut éloigner ou rapprocher les axes à volonté; leurs positions sont invariablement déterminées en vertu du tracé.

CONSTRUCTION APPROXIMATIVE DES ENGRENAGES CONIQUES.

Je ne parlerai ici que de la construction approximative des engrenages coniques à développantes sphériques, M. Poncelet ayant donné un tracé approximatif pour les engrenages coniques à épicycloïdes sphériques.

Le tracé rigoureux de l'engrenage conique à développantes sphériques est assez simple par le procédé que j'ai indiqué, pour que l'on puisse se dispenser d'avoir recours à un tracé approximatif. Cependant on pourrait substituer aux dents rigoureuses, des dents approximatives qui seraient terminées par des cônes de révolution osculateurs aux surfaces coniques ayant pour bases les développantes sphériques.

La construction des dents approximatives est facile, soit dans le tracé graphique, soit dans la construction en relief des modèles propres au moulage, lorsque les roues dentées doivent être coulées en fonte ou en cuivre.

Rappelons-nous ce qui a été dit dans la première partie de ce Mémoire au sujet de la construction géométrique du centre de courbure pour un point d'une développante sphérique.

Je suppose que le cercle D (fig. 28) est la base du cône noyau ou primitif de l'une des roues dentées, et que l'on ait tracé sur son plan les courbes ag et bg, intersection du cône à développantes sphériques qui termine une dent rigoureuse.

Sur ag et bg je prendrai les points milieux m et n. Je mènerai par m et n deux tangentes mq et np au cercle D.

Les droites mq et np seront les rayons de courbure des développantes sphériques engendrées par les points m et n; et si par mq et np je mène des plans perpendiculaires aux génératrices du cône noyau dont les projections, sur le plan du cercle D, sont oq et op, on aura les plans des cercles osculateurs des développantes sphériques engendrées par les points m et n.

Il sera dès lors facile de construire en relief (fig. 29) la dent conique approximative, ayant son sommet au sommet du cône noyau. et pour base des arcs de ces deux cercles osculateurs.

Car, si l'on suppose un cylindre AB capable de contenir la roue dentée, ce solide étant terminé par deux faces parallèles AR et BT, on tracera sur la face supérieure le cercle D′, et sur la face inférieure le cercle D, leurs centres o' et o étant sur une perpendiculaire aux plans parallèles AR, BT (ainsi qu'on a opéré dans la fig. 26).

Sur le cercle D on fixe les points p et q tels qu'ils sont placés dans la fig. 28. On trace les tangentes pr, qr se coupant au point r.

On exécute deux plans passant par ces tangentes et perpendiculairement aux génératrices G et G′ du noyau; ces deux plans se couperont suivant une droite ry qui tendra à aller couper l'axe du cône noyau en un point x. Dans chacun de ces plans on tracera des points p et q comme centre et avec le même rayon que (fig. 28) des cercles qui se couperont en un même point y de la droite ry.

Chacun des plans normaux aux génératrices G et G′ coupera le cône noyau suivant une section conique; chacun des cercles osculateurs tracés dans les plans normaux viendra couper la section conique en un point v. Dès lors la dent approximative sera composée de deux cônes de révolution ayant pour sommet commun le sommet du cône noyau, et pour base, l'un l'arc de cercle C, l'autre l'arc de cercle C′; ces deux cônes se couperont suivant une arête K, et le premier coupera le cône noyau suivant la génératrice H, et le second coupera ce même cône noyau suivant la génératrice H′. Dans la *pratique* il sera préférable d'employer la méthode suivante lorsqu'on voudra construire un modèle en bois pour couler une roue dentée.

On construira d'abord le tronc conique noyau (fig. 30), on le divisera suivant le nombre de dents qui devront être appliquées sur la surface convexe; les génératrices G, G′, G″, etc. passant par les points de division seront les milieux des dents. Ainsi la génératrice G (fig. 30), passera par le point l (fig. 28).

Remarquant que le tronc conique noyau (fig. 31) a pour demi-angle au sommet l'angle α que l'on peut calculer, puisque l'on connaît la hauteur du tronc et la différence des rayons des deux bases; remarquant que le plan du cercle osculateur base du cône de révolution dont une partie doit former la demi-dent approximative, doit être perpendiculaire à une génératrice du cône, on voit que le plan X du cercle base inférieure du tronc fait, avec le plan C du cercle base de la dent, un angle α; de plus, le demi-angle γ au sommet du cône osculateur pourra facilement être calculé, puisque l'on pourra calculer la longueur de la génératrice G totale du noyau, et que l'on connaît le rayon du cercle osculateur.

On pourra donc (fig. 32) construire un tronc conique MN, ayant pour base le cercle C tracé avec le rayon *qm* (fig. 28), et ayant pour demi-angle au sommet un angle γ.

On prendra un point arbitraire *k* sur le cercle C; on tracera *kr* passant par le centre *q*; et *qr* étant égal à *qr* (fig. 28), on mènera *ro* perpendiculaire à *kr*; par la droite *kr* on fera passer un plan X faisant avec le plan C un angle égal au supplément de l'angle α; ce plan coupera le cône suivant un arc *dk* de section conique; dans ce plan X on tracera *oq* perpendiculaire à *kr*, et l'on prendra le point *o* sur la droite *oq* suffisamment prolongée, de telle sorte que *oq* soit égal au rayon de la base inférieure du tronc conique noyau; on tracera sur le plan X le cercle D du point *o* comme centre, avec *oq* pour rayon, ce cercle coupera l'arc *dk* au point *d*; on tracera la génératrice S*d* du tronc de la dent, puis on joindra *o* et *r* par une droite qui coupera le cercle D en *l*; on exécutera la portion de surface conique concave (SD), laquelle s'appliquera sur la surface convexe du tronc noyau; la droite S*l* s'appliquera sur la droite G (fig. 30); on exécutera le plan S*lr*U qui, lorsque la demi-dent sera placée, S*l* étant sur G (fig. 30), passera par l'axe du tronc noyau et par la ligne milieu G; on exécutera la demi-dent symétrique de la même manière, et l'on pourra ainsi exécuter et rapporter sur le noyau les dents qui doivent être distribuées sur son pourtour.

Il est inutile d'entrer dans plus de détails à ce sujet, car ce que j'ai dit doit suffire à ceux qui savent la Géométrie descriptive et qui sont habitués à s'en servir et à appliquer le trait sur le bois, pour concevoir de suite la marche à suivre dans l'exécution en relief des modèles qui devront servir au moulage. Il leur sera facile de suppléer à ce qu'il y a d'incomplet dans ce qui précède; je n'ai point voulu entrer dans tous les détails d'exécution, car j'aurais dépassé les bornes imposées à un mémoire dans lequel j'avais plus en vue d'exposer la théorie et ses applications à la *pratique*, que d'entrer dans tous les détails de la *pratique*.

SUPPLÉMENT A LA NOTE B.

J'ai dit : remarquons que jusqu'à présent l'*indicatrice* ne pouvait être déterminée qu'autant que l'on connaissait les rayons de courbure *maximum* et *minimum* de la surface, etc.

C'est une erreur. M. Charles Dupin a démontré directement par la Géométrie, que la section faite par un plan diamétral parallèle au plan tangent au point considéré sur la surface, conduisait à la longueur des rayons des courbures et à la direction des lignes de courbure se croisant en ce point, et c'est à cette section qu'il a donné le nom d'*indicatrice;* je devais dire : la méthode géométrique que j'ai employée dans la recherche des rayons de courbure, de l'*indicatrice*, etc., diffère de celle employée par M. Charles Dupin, et je la crois d'une application plus facile dans la *pratique*. Et je devais ajouter que M. Charles Dupin a en effet appuyé seulement sur des considérations de *Géométrie pure* toute la théorie des courbures des surfaces, dans ses développemens de Géométrie, mais en même temps faire remarquer que la marche que j'avais suivie différait essentiellement de celle qu'il avait adoptée, et me paraissait être plus dans l'esprit de la *Géométrie descriptive*, parce que l'on pouvait vérifier par de nouvelles constructions chacun des résultats graphiques; que d'ailleurs elle s'appliquait sans difficulté à toutes les surfaces du deuxième ordre, tandis que par celle employée par M. Dupin on ne voyait pas bien comment on arrivait à l'*indicatrice* pour les surfaces qui n'ont pas de centre, et que de plus, aucune *vérification graphique* ne pouvait être donnée. Je devais aussi dire que *le mode de transformation* que j'avais employé à la fin de la note B, était du genre de ceux dont il a fait un si heureux emploi dans ses mémoires de Géométrie à trois dimensions.

Lorsque par un point m d'une surface du deuxième ordre S on mène une droite arbitraire D, on pourra toujours faire passer par cette droite un plan R parallèle à la droite d polaire réciproque de D. Dès lors ce plan coupera la surface S suivant une courbe C dont D sera un diamètre. Faisant ensuite passer par D une suite de plans P, P′, P″, etc., coupant la surface S suivant des sections coniques e, e', e'', etc., les couples de cônes enveloppant les courbes C et e, C′ et e', etc., auront leurs sommets y et y', distribués sur la droite d.

Si par la courbe C on fait passer des cylindres respectivement parallèles aux diverses droites my ou my', ils seront coupés par les plans P, P′, P″, etc., suivant des courbes a, a', a'', etc., qui avec C détermineront une surface du deuxième ordre S′ osculatrice en m de la surface S.

Si ensuite on conçoit un cylindre tangent à S′ et parallèle à D, ce cylindre sera coupé par le plan T tangent en m à la surface S suivant une courbe qui sera l'*indicatrice*.

Mais si l'on conçoit un cylindre tangent à S et parallèle à D, ce cylindre sera coupé par le plan T′ suivant une courbe f (ellipse, parabole ou hyperbole), et suivant la direction de D et la nature de la surface S, le point m pourra être intérieur ou extérieur par rapport à la courbe f.

Or, on doit remarquer que si au moyen de la courbe f on construit la courbe lieu des points r, ou en d'autres termes l'*indicatrice*, on trouvera toujours que cette courbe lieu des points r est une *ellipse* lorsque le point m est situé dans l'intérieur de la courbe f, et qu'elle est une *hyperbole* lorsque le point m est situé hors de la courbe f.

On trouve de même, par la méthode des projections, que lorsque la courbe f se réduit à deux droites qui se coupent, la courbe lieu des points r se réduit de son côté à deux droites parallèles également distantes du point m.

Recherche géométrique par la méthode des projections, de la nature de la courbe lieu des points r, *en d'autres termes, de l'*INDICATRICE.

Supposons sur le plan horizontal une ellipse E, et dans l'espace un point S considéré comme le sommet d'un cône ayant E pour base. Concevons la droite allant du sommet S au point o, centre de la courbe E, et un plan arbitraire R coupant le cône suivant une ellipse ou une parabole ou une hyperbole A, et la droite oS en un point a qui, évidemment, sera toujours situé dans l'intérieur de la courbe A, quelle que soit la direction du plan R.

Cela posé :

Menons par le point a une horizontale D, et prenons à droite et à gauche du point a, et sur cette horizontale deux points b et b' également distans du point a.

Supposons maintenant que par la droite oS on fasse passer un plan arbitraire P, lequel coupera le plan de l'ellipse E suivant un diamètre B, le plan de la section conique A suivant une droite B′ passant par le point A, et le plan mené par S parallèlement au plan horizontal suivant une droite B″.

La droite B′ coupera A en deux points m et m', et si l'on joint les points b et m, b' et m', les deux droites iront concourir en un point g situé sur le plan horizontal passant par S.

Joignant g et a et menant par b une parallèle G à ga, elle coupera B′ en un point r; tous les points tels que r formeront une courbe dont il faut chercher la nature géométrique.

Projetons le système parallèlement à la droite oS.

Le point a se projettera en o; la droite D suivant un diamètre d de l'ellipse E; par conséquent les points b et b' se projetteront en les points h et h' situés sur d et également distans du centre o.

La droite G se projettera suivant une droite G′ parallèle à la droite H, intersection du plan oag, et du plan de la courbe E, et G′ coupera B en un point r' qui sera la projection du point r.

Or, il est évident que la courbe lieu des points r' sera une ellipse semblable et concentrique à E; donc la courbe lieu des points r sera toujours une ellipse, lorsque le point a sera situé dans l'intérieur de la section conique A.

Si l'on remplace l'ellipse E par une hyperbole, en faisant les mêmes constructions, on voit sur-le-champ que le point a est extérieur par rapport à la courbe A. Donc la courbe lieu des points r sera toujours dans ce cas une hyperbole.

Si l'on suppose que la courbe E se réduit à deux droites parallèles, prenant un point o également distant de ces deux droites et achevant les constructions indiquées ci-dessus, on trouve que la courbe lieu des points r se réduit à deux droites parallèles.

(La figure est facile à exécuter pour chacun des trois cas.)

Je crois devoir entrer dans quelques détails au sujet du mode de transformation que j'ai employé à la fin de la note B, afin d'être plus clair et de bien montrer que les raisonnemens géométriques sont complets.

Supposons une surface gauche S engendrée par une droite qui s'appuie sur trois courbes C, C′, C″; il est évident que l'hyperboloïde tangent tout le long d'une génératrice G, contient la génératrice infiniment voisine G′. Il est bien évident aussi que si l'on considère trois génératrices successives et infiniment voisines G, G′, G″, l'hyperboloïde H déterminé par ces trois droites comme directrices sera osculateur à la surface S tout le long de la génératrice G.

Un plan arbitraire coupera évidemment les surfaces S et H suivant deux courbes ayant un contact du second ordre, ayant deux élémens, rectilignes-successifs, communs.

Désignons par *g*, *g′*, *g″*, etc., les génératrices du second système de l'hyperboloïde H, les génératrices G, G′, G″, étant trois génératrices du premier système.

Il est évident encore que tout plan R passant par *g* coupera la surface S suivant une courbe ayant un contact du second ordre avec *g*, ayant au point de contact deux élémens rectilignes-successifs en ligne droite, ayant un rayon de courbure infini.

Et il est évident que si le plan sécant R devient un plan tangent à la surface S, il sera aussi plan tangent à la surface H, par conséquent il coupera la surface S suivant une courbe A qui aura *g* pour tangente (et peu importe de connaître de quel ordre sera le contact de *g* et A) (*).

Ceci démontre donc que si en chacun des points de la génératrice G on mène des plans tangens à la surface S, ils couperont cette surface S suivant des courbes A, A′, A″, etc., dont les tangentes *g*, *g′*, *g″*, etc., formeront un hyperboloïde osculateur de la surface S tout le long de la génératrice G. Par conséquent, pour toute surface qui ne serait pas réglée, mais qui aurait un élément superficiel gauche, la construction des trois tangentes *g*, *g′*, *g″*, pouvant s'exécuter, l'hyperboloïde osculateur existera toujours pour cet élément; et puisque trois génératrices telles que *g* déterminent un hyperboloïde, on voit de suite qu'il suffit de considérer trois sections de la surface courbe que l'on cherchait à transformer en une surface ayant un élément gauche.

Ainsi, pour l'osculation du second ordre entre deux surfaces gauches qui ont une génératrice commune, l'énoncé est le même que pour le contact du premier ordre, savoir : *que si deux surfaces gauches ont en trois points de la génératrice commune un contact du second ordre, elles sont osculatrices l'une à l'autre tout le long de cette génératrice.*

(*) Toute droite tracée dans le plan tangent et passant par le point de contact, est la directrice d'un hyperboloïde tangent; pour que l'hyperboloïde devienne osculateur, cette directrice doit donc avoir une position toute spéciale par rapport à la surface, et dès lors par rapport à la courbe intersection de cette surface et du plan tangent; or, une droite (puisqu'il s'agit de contact) ne peut affecter que deux positions par rapport à la courbe, être sécante ou tangente : donc, etc.

Toutes les surfaces gauches n'ont pas un hyperboloïde osculateur, quelques-unes d'entre elles ont au contraire un paraboloïde hyperbolique osculateur.

Les surfaces gauches se divisent en deux classes, celles qui ont un hyperboloïde osculateur et celles qui ont un paraboloïde osculateur.

Les premières sont celles qui n'ont pas de plan directeur du mouvement de la génératrice, les secondes sont celles qui ont un plan directeur.

Lorsque l'on considère les secondes surfaces, alors l'énoncé ci-dessus se simplifie ; ainsi, pour deux surfaces ayant un même plan directeur et une génératrice commune, il suffit *d'un contact du second ordre en deux points de la génératrice commune, pour que les deux surfaces s'osculent tout le long de la génératrice.*

C'est par la considération d'une surface gauche ayant un plan directeur que l'on parvient facilement à démontrer que : si en un point m d'une génératrice G d'une surface développable on fait passer un plan arbitraire coupant la surface suivant une courbe B, si l'on considère la courbe b osculatrice de B au point m comme la base d'un cylindre parallèle à G, ce cylindre sera osculateur de la surface donnée tout autour du point m.

En effet :

Supposons la normale N au point m de la génératrice G de la surface développable, deux sections normales A et A', le cercle osculateur a de A, et construisons une ellipse a' osculatrice par l'un de ses sommets au point m de A', et ayant pour l'un de ses axes le diamètre du cercle a.

Par deux semblables courbes on peut toujours faire passer un cylindre; mais la direction de ses génératrices est encore supposée inconnue.

Je dis que tout plan passant par N coupera la surface et le cylindre suivant deux courbes osculatrices en m, que dès lors le cylindre est osculateur à la surface tout autour du point m.

Pour le démontrer, supposons que par le point m je mène une droite arbitraire K, et que je la regarde comme une directrice d'un paraboloïde hyperbolique dont les diverses génératrices g, g', g'', etc., auront pour plan directeur le plan T tangent en m au cylindre et à la surface donnée.

Je suppose que je projette les diverses génératrices g, g', g'', etc., sur le plan T parallèlement à la droite K, en les droites t, t', t'', etc., puis que par ces droites t, t', t'', etc., je fasse passer des plans normaux coupant la surface développable suivant des courbes α, α', α'', etc., et le cylindre suivant des courbes β, β', β'', etc., m'étant d'ailleurs arrangé pour que deux des courbes α, α', α'', etc., soient les courbes A et A', et que dès lors deux des courbes β, β', β'', etc., se trouvent les courbes a et a'.

Cela posé :

Par les droites g, g', g'', etc., je mène les plans R, R', R'', etc., respectivement parallèles au plan T, et sur ces plans je projette respectivement les courbes α et $\mathcal{C}$, α' et $\mathcal{C}'$, etc., par des parallèles à K. Puis sur les divers plans tangens (K, g), (K, g') etc., je reprojette orthogonalement ces dernières courbes en les courbes α_1 et $\mathcal{C}_1$, α'_1 et $\mathcal{C}'_1$, etc. Dès lors toutes les courbes α_1, α'_1, etc., formeront une surface S', et toutes les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}'_1$, etc., formeront aussi une seconde surface S, ayant l'une et l'autre un élément superficiel gauche commun suivant la droite K, et de plus ces deux surfaces auront évidemment même plan directeur T pour cet élément gauche K; les droites g, g', g'', etc., formeront le paraboloïde hyperbolique osculateur, puisque deux d'entre elles seront tangentes aux transformées de A et a, de A' et a'; donc, etc.

Il faut maintenant démontrer que le cylindre osculateur de la surface développable tout autour du point m, est parallèle à la génératrice G de cette surface.

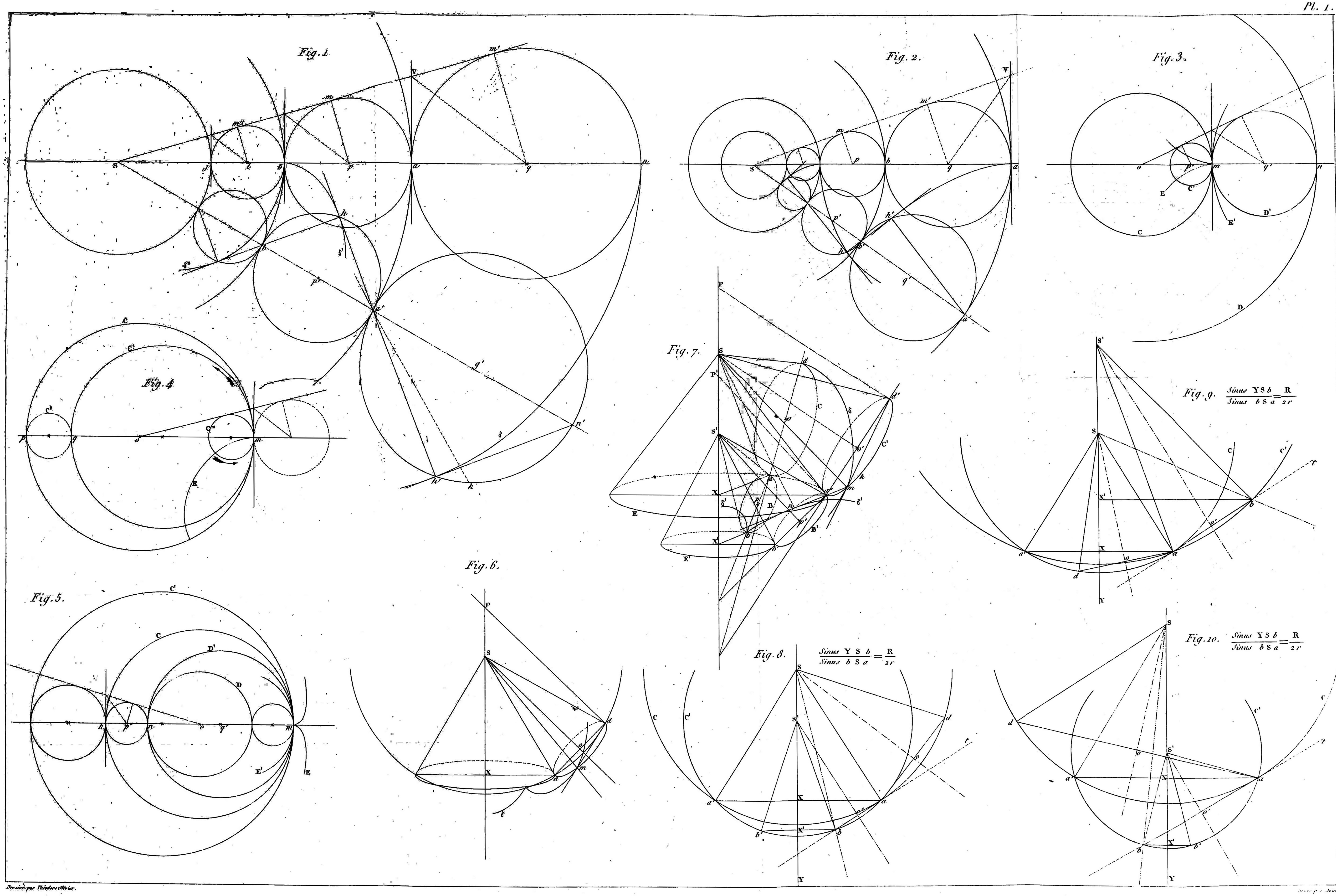
Si je considérais une troisième section normale A'', et son ellipse osculatrice a'' ayant pour l'un de ses axes le diamètre du cercle a; on sait que par les trois courbes a, a', a'', on peut toujours faire passer une surface du second ordre Σ, et qu'on n'en peut faire passer qu'une. Or, cette surface serait osculatrice tout autour du point m (ce que l'on démontrerait en transformant la surface donnée en une surface ayant un élément gauche et point de plan directeur), la section normale faite suivant la droite G dans cette surface Σ serait donc osculatrice à G au point m. La surface Σ devrait donc être une surface réglée, la section normale devant être évidemment dans ce cas une droite.

Mais dans la surface réglée Σ on pourrait mener deux sections normales donnant chacune une droite; la surface développable aurait donc deux rayons de courbure infinis; on pourrait donc placer sur la surface développable deux droites, ce qui ne peut être, en vertu de la génération de la surface développable; la surface du second ordre devant être réglée ne pourra donc être qu'un cône ou un cylindre, et d'après ce qui précède, ayant vu que le cylindre passant par les deux courbes a et a' était osculateur tout autour du point m, on en conclut que la droite G sera une de ses génératrices.

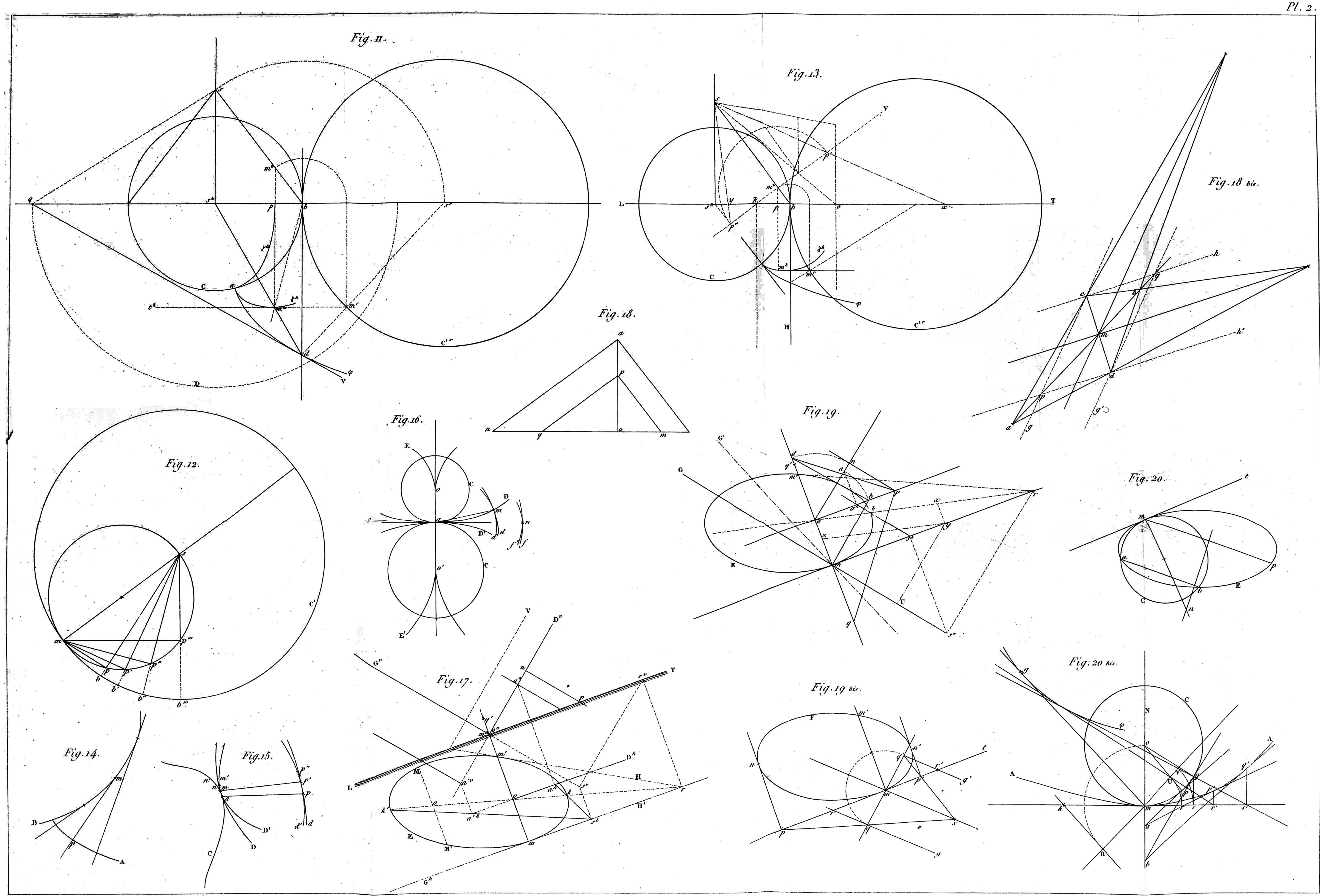
Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,
B^on THÉNARD.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général des études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,
ROUSSELLE.



Dessiné par Théodore Olivier.



Dessiné par Théodore Olivier.

Gravé par Adam

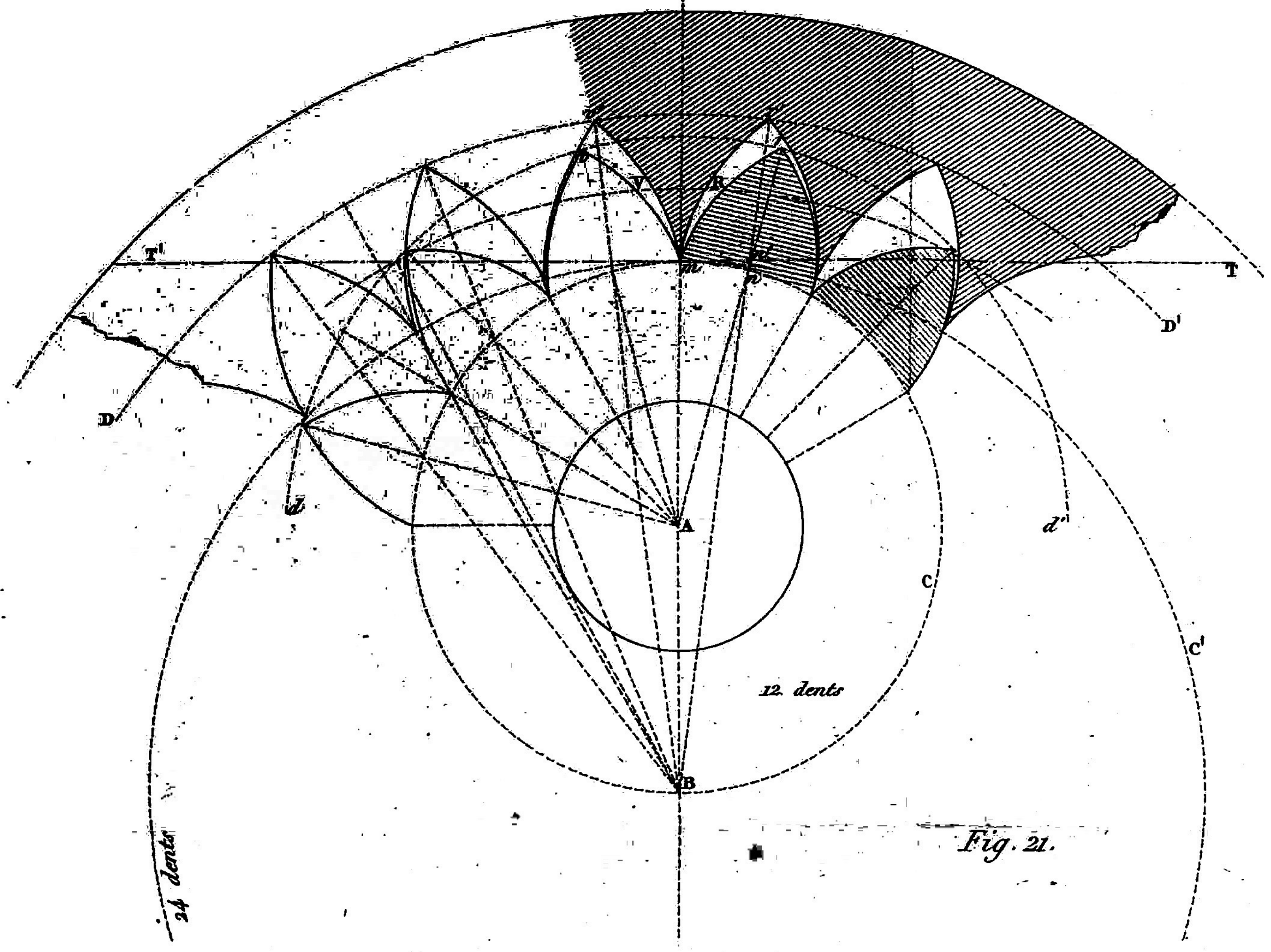


Fig. 21.

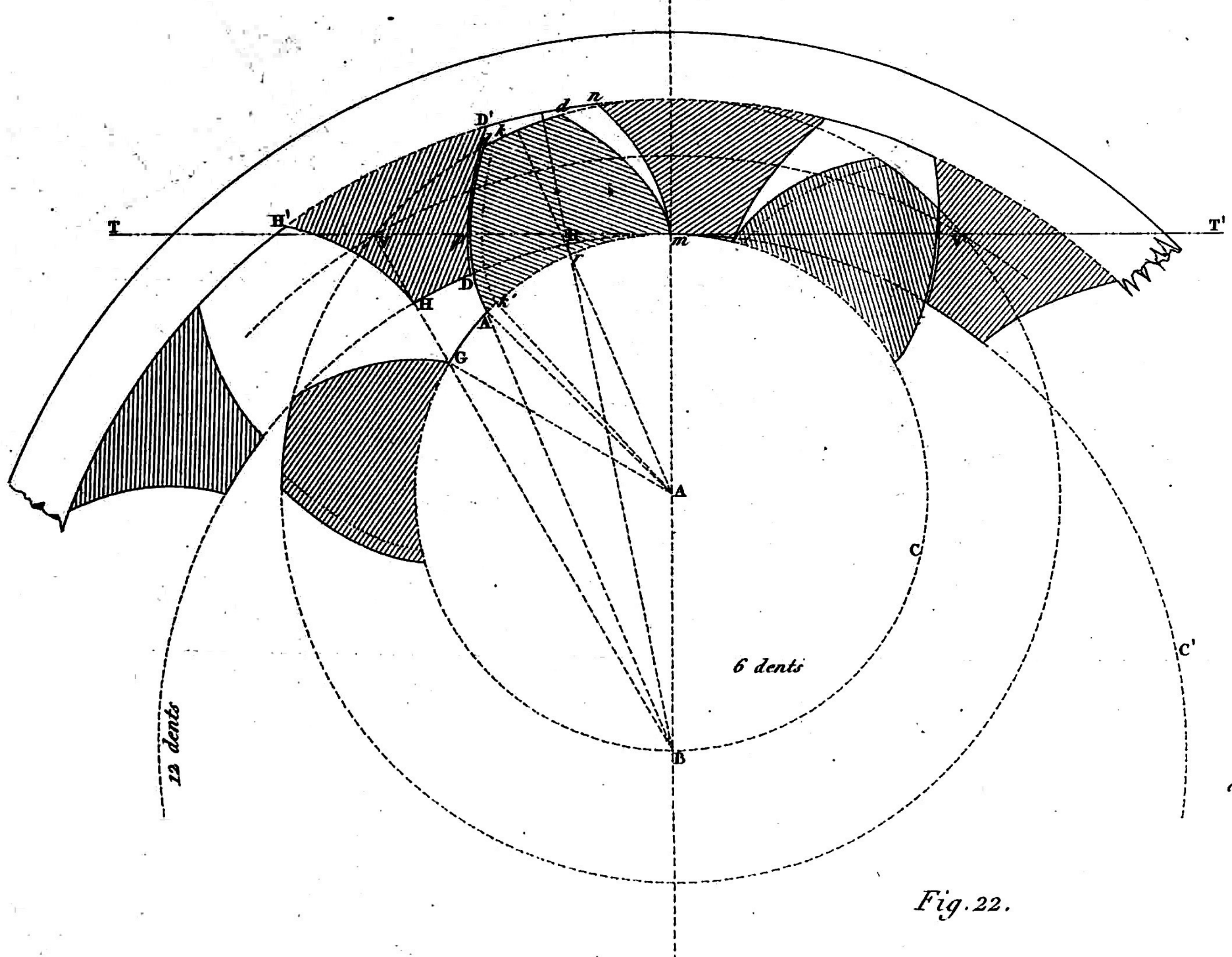


Fig. 22.

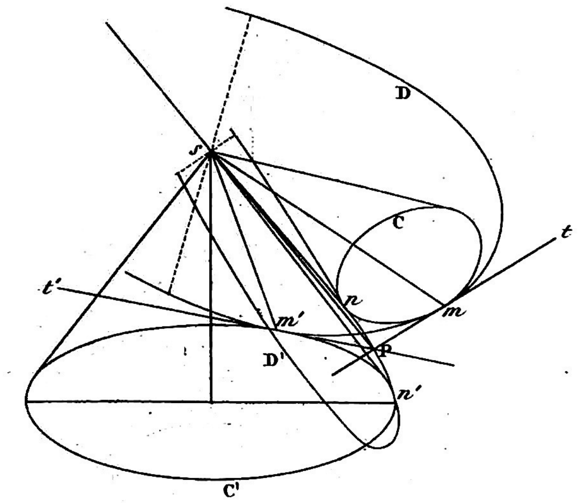
Fig. 23.


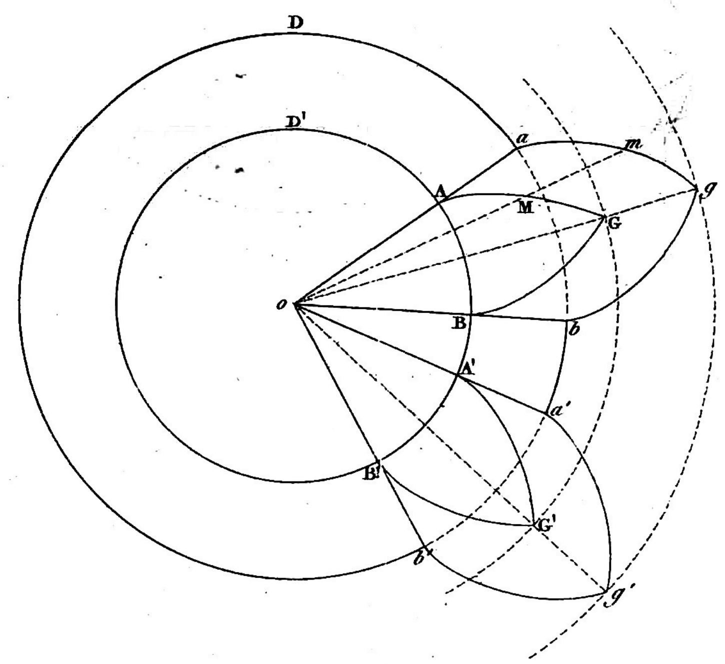
Fig. 24.


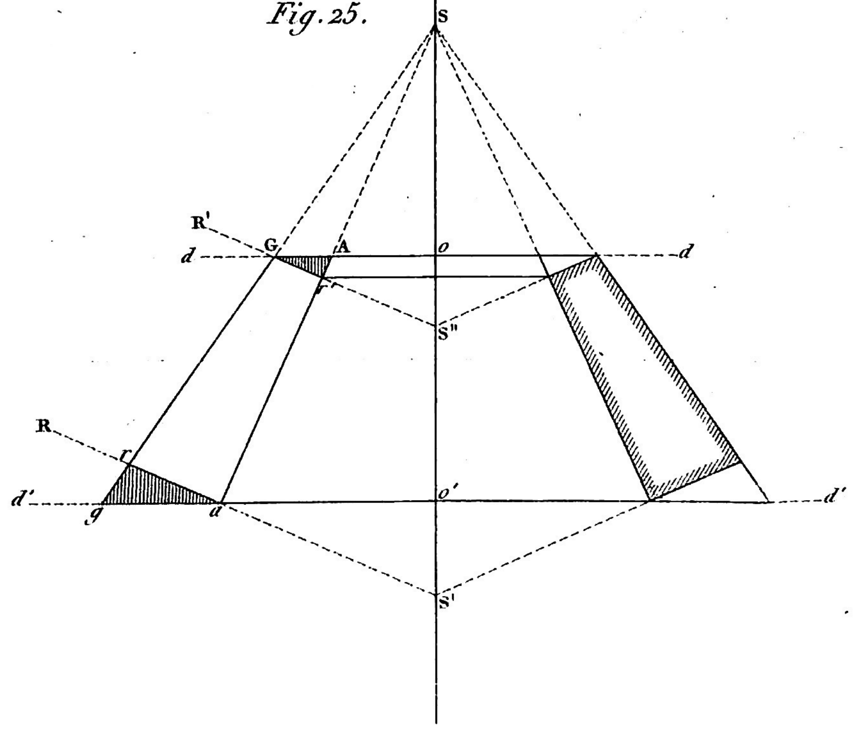
Fig. 25.


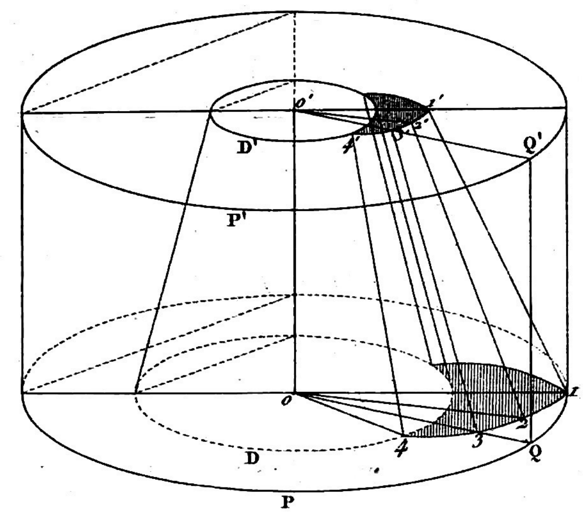
Fig. 26.


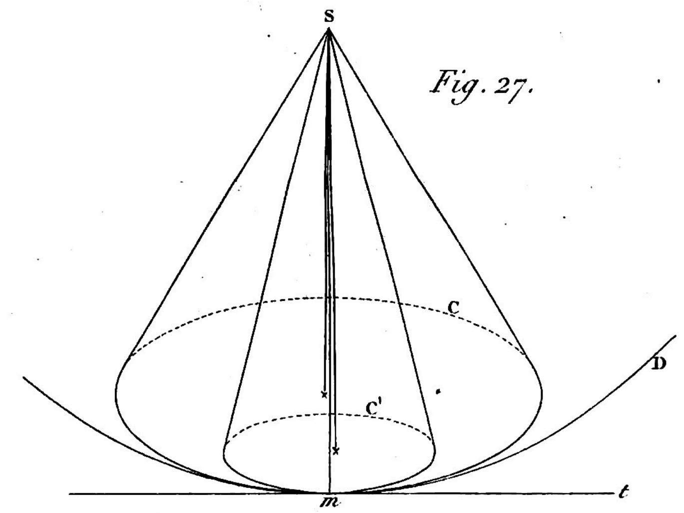
Fig. 27.


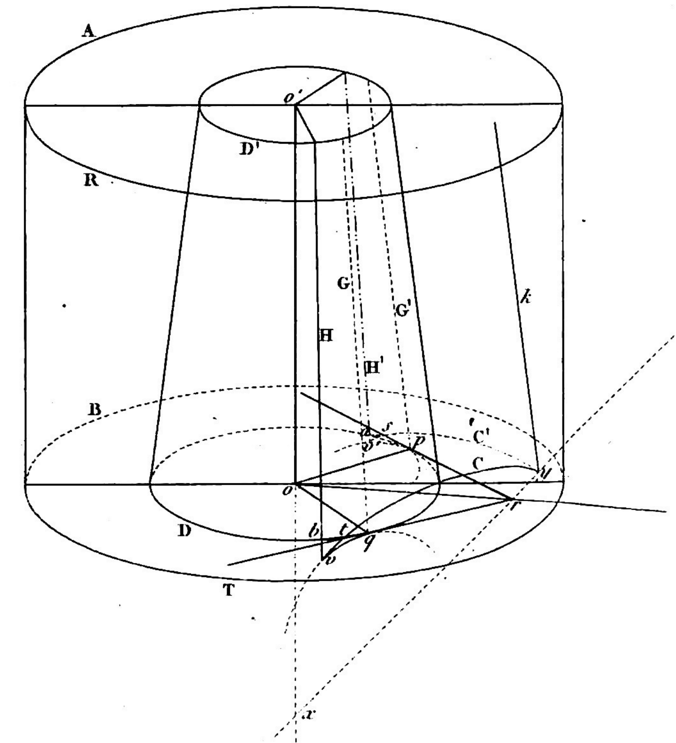
Fig. 29.


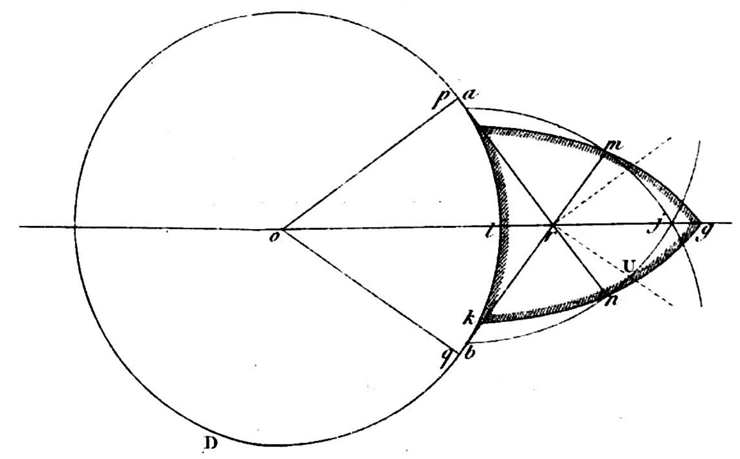
Fig. 28.


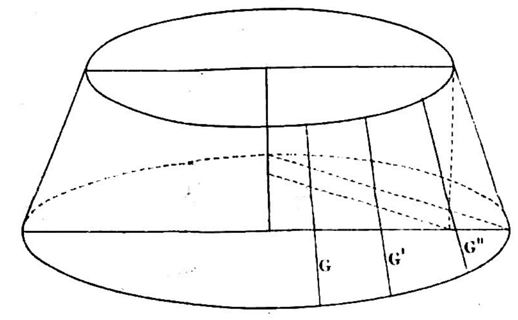
Fig. 30.


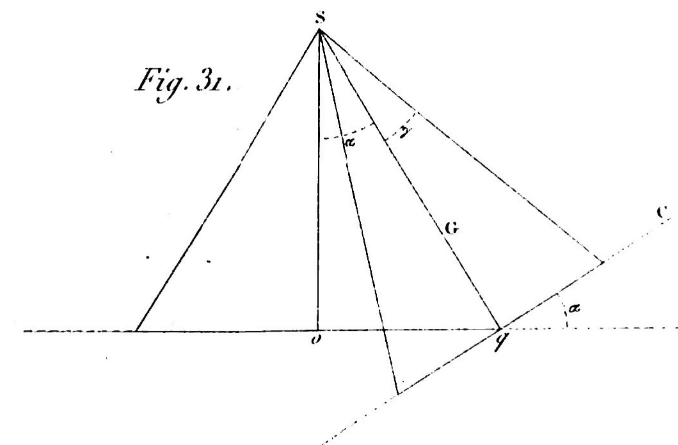
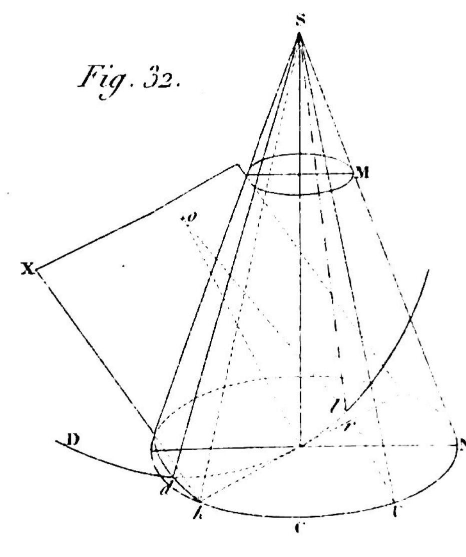
Fig. 31.


Fig. 32.


Dessiné par Théodore Olivier.