N° D'ORDRE :
798.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR Mlle D. KLUMPKE,

Attachée à l'Observatoire de Paris, Officier d'Académie.

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ANNEAUX DE SATURNE.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 décembre 1893, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président*.
TISSERAND, } *Examinateurs*.
ANDOYER, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, professeur	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES.	PASTEUR.	
	DUCHARTRE.	
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

20224 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

M. F. TISSERAND,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Hommage respectueux et reconnaissant,

D. KLUMPKE.

A LA MÉMOIRE

DU CONTRE-AMIRAL E. MOUCHEZ.

Hommage de profonde reconnaissance,

D. KLUMPKE.

A

MA MÈRE.

Hommage de profonde reconnaissance
et d'affection filiale,

Dorothea KLUMPKE.

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE DES ANNEAUX DE SATURNE.

INTRODUCTION. — HISTORIQUE.

L'anneau de Saturne s'est d'abord présenté aux instruments imparfaits des premiers observateurs du XVIIe siècle sous des formes plus ou moins étranges.

Galilée voyait Saturne triple, composé d'une étoile centrale et de deux autres plus petites, situées l'une à l'orient, l'autre à l'occident de l'astre central. Avec une lunette d'un faible grossissement, cette étoile lui paraissait allongée et de la « forme d'une olive ».

Bien que certains dessins de cette époque lointaine, ceux de Riccioli, d'Eustache de Divinis, de Gassendi entre autres, accusent nettement l'existence d'un anneau, il est probable que la véritable nature du système saturnien resta ignorée de Galilée, de Scheiner, de Fontana, d'Hévélius et de leurs contemporains.

Il était réservé à Huygens de dévoiler le mystère. De longues séries d'observations, faites avec des verres soigneusement construits, l'amenèrent à faire de ces prétendus satellites de Saturne, qui se transformaient d'année en année, un anneau plat et mince, isolé de toute part, entourant la planète et incliné sur l'écliptique.

Plus tard, on remarqua, sur les faces nord et sud de l'anneau, des traits noirs qui attirèrent à toutes époques l'attention des astronomes.

On sait aujourd'hui que l'anneau de Saturne n'est pas un anneau simple, et que les traits noirs dont il est sillonné ne sont pas permanents.

« La théorie de la pesanteur, remarqua Laplace (¹), eût suffi pour nous convaincre de la division de l'anneau de Saturne en plusieurs anneaux concentriques, quand même les observations ne nous l'auraient pas fait connaître. »

La largeur maxima que puissent présenter des anneaux simples en équilibre, situés à diverses distances de la planète, a été calculée par M. Tisserand (²).

Une question se posa bientôt :

Comment ces anneaux sont-ils constitués? comment se maintiennent-ils autour de Saturne?

Avant qu'Huygens eût dévoilé le sens de son célèbre logogriphe :

aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu

« Annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohærente, ad eclipticam inclinato, »

Roberval avait attribué la présence de l'appendice de Saturne à des vapeurs plus ou moins denses s'échappant, sous l'action du Soleil, de la zone torride de la planète. Pour ce géomètre, ces vapeurs demeuraient suspendues à une certaine distance de Saturne, autour duquel elles formaient un cercle qui devait se présenter à nous sous la forme d'une ellipse.

« Roberval, dit Delambre (³), n'avait fait que la moitié du chemin; observant peu, il ne put compléter son explication. »

Pour Huygens, l'anneau était solide et permanent, partout à égale distance de Saturne, et entraîné avec celui-ci autour du Soleil.

« L'hypothèse d'Huygens, dit J.-D. Cassini, fut trouvée admirable et très propre pour expliquer les différentes phases de Saturne, quoiqu'elle ne fût pas reçue de tous ceux qui étaient prévenus par d'autres hypothèses. Nous n'osâmes pas y comparer une pensée qui nous était venue, que cet anneau pouvait être formé d'un essaim de petits satellites, qui pourraient faire à Saturne une apparence analogue à celle que la Voie de lait fait à la Terre par une infinité de petites étoiles dont elle est formée (⁴). »

L'idée que Cassini s'était faite des anneaux de Saturne prévaut aujourd'hui, comme l'ont montré les recherches des géomètres.

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1787.
(2) *Comptes rendus*, t. LXXXV, p. 1131.
(3) *Histoire de l'Astronomie*, t. II, p. 564.
(4) *Histoire de l'Académie des Sciences*, 1705, *Mémoires*, p. 18.

Vers 1740, Maupertuis [1] se proposa le problème suivant :

« Un torrent de matière fluide circulant autour d'un axe hors du torrent, par une force centripète proportionnelle à une puissance quelconque de la distance au centre; et dans chaque section perpendiculaire à la révolution, y ayant une autre force vers un centre pris dans cette section qui soit proportionnelle à une puissance quelconque de la distance à ce centre; déterminer la figure du torrent. »

Il trouve que la section du torrent est une courbe algébrique, excepté dans le cas où les deux forces, ou l'une d'elles, varieraient en raison inverse de la distance aux centres. Si les deux forces sont proportionnelles à la distance, la section du torrent est une conique. Le torrent prend la forme d'un sphéroïde si les deux centres coïncident.

« Dans la nature, dit Laplace, chaque molécule de l'anneau ne tend point uniquement vers deux centres; elle a un nombre infini de tendances vers les autres molécules de l'anneau et vers la planète. C'est en combinant toutes ces tendances avec la force centrifuge qu'il faut déterminer la figure d'équilibre de la section génératrice de l'anneau [2]. »

Voilà le problème que résout Laplace en 1787 [3]. Plus tard, Mme Sophie Kowalewski, enlevée prématurément à la Science, reprend ce problème et y apporte un complément heureux. Elle fait voir [4] que l'ellipse, trouvée par Laplace comme figure d'équilibre du torrent, se transforme en un ovale quand on a égard aux termes des ordres supérieurs.

Sur l'invitation de M. F. Tisserand, professeur à la Faculté des Sciences dont nous avons suivi les cours, nous avons, après lui [5], repris le travail de Mme Kowalewski, et nous avons évalué les termes correspondant à la troisième approximation.

L'expression de la vitesse, à laquelle conduit la méthode de Mme Kowalewski, concorde avec celle obtenue par M. Poincaré [6], pour une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation.

Dans ces derniers temps, les figures annulaires d'équilibre d'une masse fluide ont été, de la part de ce géomètre, l'objet de recherches approfondies.

---

(1) *Discours sur les différentes figures des astres*, 2e édition, 1742; p. 160.
(2) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1787; p. 249.
(3) *Mécanique céleste*, Livre III, p. 166-177.
(4) *Astronomische Nachrichten*, n° 2643.
(5) *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 137-154.
(6) *Acta mathematica*, t. VII; *Bulletin astronomique*, t. II, p. 109 et 405

Le problème de l'équilibre des anneaux solides ou fluides fut encore étudié par le professeur G.-P. Bond (1) et par le professeur B. Peirce (2).

Ces mathématiciens démontrent que les anneaux de Saturne doivent être moins larges que ne l'avait supposé Laplace. Pour Bond, un anneau fluide ne serait pas nécessairement instable; pour Peirce, une planète ne saurait être environnée d'anneaux sans être munie d'un nombre suffisant de satellites, disposés pour le soutenir.

En 1849, Édouard Roche s'occupa du même problème; les résultats importants qu'il obtint ne furent connus que plus tard en Angleterre et en Amérique.

Les recherches du savant professeur de Montpellier montrent que, parmi les figures d'équilibre que peut prendre une masse fluide, soumise à l'attraction d'un point éloigné, il y a deux ellipsoïdes qui sont allongés suivant le rayon vecteur de la planète et deux autres, allongés suivant une direction perpendiculaire à ce rayon. Les deux premiers répondent à un équilibre stable, les deux derniers à un équilibre instable. Lorsque la vitesse angulaire de la masse fluide est inférieure à une certaine limite, l'un des deux premiers ellipsoïdes diffère peu d'une sphère, l'autre est une sorte d'aiguille allongée vers la planète. Ces deux figures se confondent quand la vitesse atteint la limite en question; pour une vitesse plus grande, ces figures cessent d'exister.

Appliquant sa théorie aux différents systèmes de satellites, Roche arrive à une conclusion importante :

« Lorsque le satellite, supposé de même densité que sa planète, est à une distance inférieure à 2,44, le rayon de la planète, toute figure ellipsoïdale d'équilibre devient impossible. »

Or le premier satellite de Saturne est à une distance 3,35; il a donc pu se former et subsister, mais la matière qui constitue aujourd'hui les anneaux s'étant trouvée trop près de Saturne n'a pu s'agglomérer sous forme de satellite, elle est restée forcément à l'état de poussière désagrégée (3).

Au mois de mars 1855, le problème de la stabilité des anneaux de Saturne fut proposé, par l'Université de Cambridge, comme sujet de concours pour le prix Adams.

Suivant le programme du concours, les anneaux, disposés symétriquement par rapport au plan de l'équateur de Saturne, pouvaient être considérés comme

(1) *On the rings of Saturn;* 1851.

(2) *On the constitution of Saturn's rings;* 1851. — *On the Adams Prize-Problem for* 1856.

(3) *Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. Essai sur la constitution et l'origine du système solaire.*

rigoureusement ou comme approximativement concentriques au globe central. On avait à examiner les cas suivants : anneaux rigides, anneaux fluides, anneaux formés de particules de matière indépendantes les unes des autres.

Dans ces trois cas, on avait à étudier les conditions de stabilité et à déterminer quelle est, parmi les hypothèses envisagées, celle qui représente le mieux le phénomène des anneaux brillants et de l'anneau obscur. On avait, en outre, à rechercher les causes auxquelles sont dus les changements survenus dans les anneaux de Saturne, et que semblent révéler les anciennes observations comparées aux observations modernes.

Le prix Adams fut décerné, en 1857, à James Clerk Maxwell.

Pour Maxwell, comme pour Roche, le seul système d'anneaux qui puisse subsister autour de Saturne doit être composé d'un nombre indéfini de particules désagrégées, circulant autour de la planète avec des vitesses et à des distances différentes.

Ces particules de matière sont peut-être réunies en une série d'anneaux étroits, peut-être s'entre-croisent-elles irrégulièrement dans leur mouvement.

Dans le premier cas, la destruction finale sera très lente; dans le second, elle sera très rapide, mais elle pourrait être ralentie par les particules elles-mêmes, qui tendent à se grouper en un anneau étroit.

Une analyse délicate et approfondie conduit G.-A. Hirn à un résultat analogue (1) :

« Si les anneaux sont gazeux ou même liquides, leur sort inévitable sera, non pas de tomber d'un côté sur la planète et de s'en écarter de l'autre, mais de s'en rapprocher lentement dans toutes les directions, et de finir par se confondre avec elle.

» Les anneaux solides et d'une pièce, à moins d'être infiniment résistants et inflexibles, ne sauraient avoir qu'une existence très courte, sans se désagréger complètement. »

Pour Hirn, les anneaux de Saturne sont très probablement constitués par des particules matérielles, solides, discontinues, séparées par des intervalles très grands et mises en relation seulement par leur attraction réciproque, très faible relativement à celle de la planète.

C'est l'idée qui fut émise par Cassini à la fin du XVIIe siècle.

Le cas que nous avons étudié est donc purement hypothétique; il ne répond

---

(1) *Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne;* 1872.

pas à l'idée que la Science moderne se fait de la constitution des anneaux de Saturne. Les pages qui suivent forment le complément d'un travail laissé inachevé par M^{me} Kowalewski, à la mémoire de laquelle nous apportons ici un hommage d'admiration et d'estime.

Dans la première Partie de notre travail, nous avons développé les formules de M^{me} Kowalewski; nous y avons conservé partout les termes en σ^4. Cette première Partie est suivie du calcul numérique des valeurs de α, γ', γ'' correspondant à la première approximation. Ce calcul est long et pénible; aussi avons-nous dû renoncer à calculer les valeurs des inconnues correspondant aux approximations II et III.

Dans la seconde Partie, nous avons considéré le cas où l'anneau de Saturne serait soumis seulement aux attractions mutuelles de ses parties et à la force centrifuge. Nous y donnons l'expression générale des inconnues correspondant aux approximations I, II et III.

PREMIÈRE PARTIE.

Dans sa *Mécanique céleste* (t. II, p. 166), Laplace montre qu'un anneau fluide ou un anneau solide recouvert d'une couche fluide peut se maintenir en équilibre autour de Saturne, en vertu de l'attraction mutuelle de ses molécules, combinée avec un mouvement de rotation, si la figure génératrice de l'anneau est une ellipse aplatie, dont le grand axe est dirigé vers le centre de Saturne.

Les dimensions de l'ellipse génératrice de l'anneau étant petites par rapport à la distance de l'anneau au centre de Saturne, Laplace remplace l'attraction de l'anneau sur un point de la section méridienne par l'attraction exercée sur le même point par un cylindre droit, indéfini dans les deux sens, ayant pour base l'ellipse génératrice, et pour densité constante la densité ρ de l'anneau.

En désignant par

M la masse de Saturne supposé sphérique;
a, b les demi grands axes de l'ellipse génératrice;
l la distance de l'anneau au centre de Saturne;
ω la vitesse de rotation de l'anneau;

f le coefficient d'attraction;
ρ la densité de l'anneau;
$\rho_{♄}$ celle de Saturne,

Laplace trouve :

1° $\omega^2 = \frac{fM}{l^3}$: la vitesse de rotation de l'anneau est la même que celle d'un satellite placé à la distance l de la planète.

2° $\frac{b}{a} > 1$: l'ellipse génératrice de l'anneau est aplatie.

3° $\frac{\rho}{\rho_{♄}} > 1,89$: la densité relative à la limite intérieure des anneaux brillants est supérieure à $1,89\,\rho_{♄}$;

$\frac{\rho}{\rho_{♄}} > 0,84$: sa densité relative à la division de Cassini est supérieure à $0,84\,\rho_{♄}$;

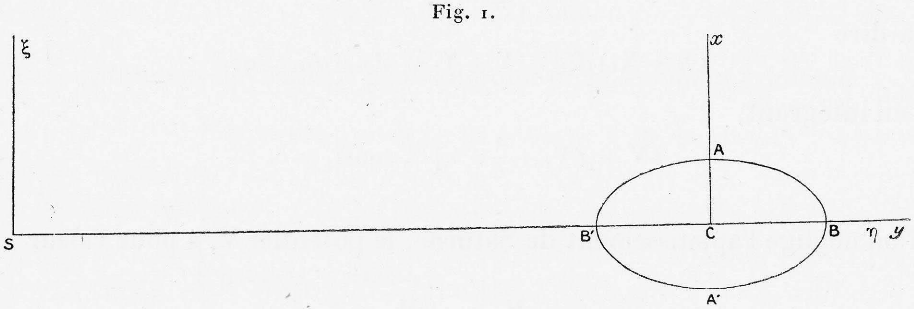
$\frac{\rho}{\rho_{♄}} > 0,55$: la densité relative à la limite extérieure des anneaux brillants est supérieure à $0,55\,\rho_{♄}$.

4° L'anneau de Saturne est de forme irrégulière.

Cette irrégularité dans la forme de l'anneau est nécessaire; pour la stabilité de l'équilibre il faut, en outre, que le centre de gravité de l'anneau ne coïncide pas avec son centre de figure.

M^me Kowalewski suppose l'anneau engendré par une courbe plane tournant

Fig. 1.



autour de l'axe $S\xi$, situé dans son plan et passant par le centre de Saturne.

ξ_1 et η_1 désignent les coordonnées d'un point quelconque de la figure génératrice méridienne rapportée à des axes rectangulaires passant par le centre de Saturne; $\sigma l x_1$ et $\sigma l y_1$ sont les coordonnées du même point par rapport à des axes parallèles aux premiers et passant par le milieu C de BB′.

Avec Laplace, nous supposerons les dimensions transversales CB, CA de l'anneau très petites par rapport à la longueur $SC = l$, et nous ferons $\frac{BC}{l} = \sigma$.

Les coordonnées absolues d'un point de la section méridienne auront alors les expressions suivantes :

$$\xi_1 = \sigma l x_1, \qquad \eta_1 = l + \sigma l y_1.$$

M^me Kowalewski exprime maintenant x et y en fonction du paramètre t; elle prend

$$y = -\cos t,$$

et elle adopte pour x une fonction arbitraire de t, telle que la courbe méridienne soit symétrique par rapport à l'axe $S\eta$,

$$x = \varphi(t) = \alpha \sin t + \alpha' \sin 2t + \alpha'' \sin 3t + \alpha''' \sin 4t + \ldots;$$

α, α', α'', ... désignant des coefficients constants qu'il faut déterminer, de manière que le fluide soit en équilibre sous l'action des forces agissant sur l'anneau, savoir :

1° L'attraction de l'anneau, de potentiel $V(X, Y, Z)$;

2° L'attraction de Saturne, de potentiel $V_1(X_1, Y_1, Z_1)$;

3° La force centrifuge $\omega^2 \eta_1$.

Un point quelconque de la section méridienne étant en équilibre, on doit avoir

$$dp = 0,$$

c'est-à-dire

$$(X + X_1)\, d\xi_1 + (Y + Y_1 + \omega^2 \eta_1)\, d\eta_1 = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$fV + fV_1 + \frac{1}{2} \omega^2 \eta_1^2 = \text{const.} = c.$$

Si l'on néglige l'aplatissement de Saturne, le potentiel V_1 a pour valeur

$$V_1 = \frac{M}{r} = \frac{M}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}},$$

et l'équation différentielle de l'équilibre devient

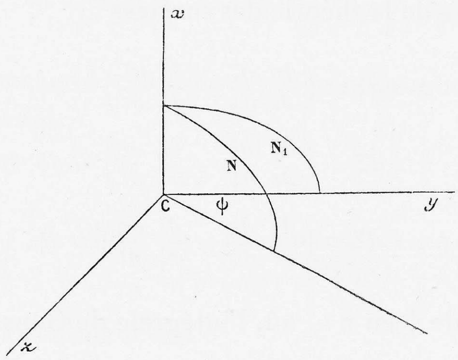
$$fV + \frac{fM}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} + \frac{1}{2} \omega^2 \eta_1^2 = c. \tag{1}$$

Pour calculer V, M^me Kowalewski fait usage de la formule de Gauss [1]

$$V = \frac{1}{2}\rho \int \cos i \, d\Sigma, \tag{2}$$

où ρ désigne la densité de l'anneau supposée constante, $d\Sigma$ l'élément de surface au point N, i l'angle que fait au point N la normale extérieure à la surface de l'anneau avec la direction NN_1 (N_1 étant un point voisin de N).

Fig. 2.



Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque N de l'anneau situé dans un plan qui fait un angle ψ avec la section méridienne auront pour valeurs

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sigma l x, \\ \eta &= l(1 + \sigma y)\cos\psi, \\ \zeta &= l(1 + \sigma y)\sin\psi. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces coordonnées deviennent pour un point de la section méridienne

$$\xi_1 = \sigma l x_1, \qquad \eta_1 = l(1 + \sigma y_1), \qquad \zeta_1 = 0 \tag{4}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma l(\alpha \sin t_1 + \alpha' \sin 2t_1 + \alpha'' \sin 3t_1 + \ldots), \\ \eta_1 &= l(1 - \sigma \cos t_1). \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

En désignant par a, b, c les cosinus directeurs de la normale extérieure au point N, et par u la distance NN_1, on aura

$$\cos i = \frac{\xi - \xi_1}{u} a + \frac{\eta - \eta_1}{u} b + \frac{\zeta - \zeta_1}{u} c$$

---

[1] *Theoria attractionis corporum sphæroidicorum ellipticorum homogeneorum*, p. 286.

et

$$u^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2;$$

ces équations deviennent, en vertu de (3) et (4),

$$(5)\qquad \cos i = a\sigma l \frac{x - x_1}{u} + bl \frac{(1+\sigma y)\cos\psi - (1+\sigma y_1)}{u} + cl \frac{(1+\sigma y)\sin\psi}{u},$$

$$(6)\qquad \frac{u^2}{l^2} = \sigma^2(x - x_1)^2 + \sigma^2(y - y_1)^2 + 4(1+\sigma y)(1+\sigma y_1)\sin^2\frac{\psi}{2}.$$

A l'aide des formules de la théorie des surfaces

$$\pm a\, d\Sigma = \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\zeta}{\partial\psi} - \frac{\partial\eta}{\partial\psi}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) dt\, d\psi,$$

$$\pm b\, d\Sigma = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial\psi} - \frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) dt\, d\psi,$$

$$\pm c\, d\Sigma = \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial\psi} - \frac{\partial\xi}{\partial\psi}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) dt\, d\psi,$$

et par le changement de ψ en $\pi - 2\theta$, l'intégrale de Gauss

$$V = \frac{1}{2}\rho \int \cos i\, d\Sigma$$

se transforme comme il suit (TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 139-140)

$$(7)\qquad \pm V = 2\rho l^2 \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma^2(x - x_1)\dfrac{dy}{dt} - \sigma^2(y - y_1)\dfrac{dx}{dt} - 2\sigma(1+\sigma y_1)\dfrac{dx}{dt}\cos^2\theta}{\sqrt{\sigma^2(x - x_1)^2 + \sigma^2(y - y_1)^2 + 4(1+\sigma y)(1+\sigma y_1)\cos^2\theta}}(1+\sigma y)\, d\theta.$$

Or on a

$$y = -\cos t, \qquad y_1 = -\cos t_1,$$
$$x = \varphi(t), \qquad x_1 = \varphi(t_1).$$

En substituant ces valeurs dans (7) et en posant, pour abréger,

$$(8)\qquad \begin{cases} A = 4(1 - \sigma\cos t)(1 - \sigma\cos t_1), \\ B = \sigma^2(\cos t - \cos t_1)^2 + \sigma^2[\varphi(t) - \varphi(t_1)]^2, \\ C = 2\sigma^2(1 - \sigma\cos t)\{(\cos t - \cos t_1)\varphi'(t) + \sin t[\varphi(t) - \varphi(t_1)]\}; \end{cases}$$

il vient

$$(9)\qquad V = \rho l^2 \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C - A\sigma\varphi'(t) + A\sigma\varphi'(t)\sin^2\theta}{\sqrt{A + B - A\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

Posons maintenant

$$k^2 = \frac{A}{A+B}, \qquad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{B}{A+B};$$

et remarquons que k^2 est voisin de 1, car A est une quantité finie et B est du deuxième ordre par rapport à σ.

A l'aide des expressions précédentes, (9) se transforme

$$V = \rho l^2 \int_0^{2\pi} dt \frac{1}{\sqrt{A+B}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C - A\sigma\varphi'(t) + A\sigma\varphi'(t)\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta. \tag{10}$$

Le calcul de V se ramène à celui d'intégrales elliptiques de Legendre de première et de deuxième espèce.

En effet, on peut poser

$$W = \frac{1}{\sqrt{A+B}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C + B\sigma\varphi'(t) - (A+B)\sigma\varphi'(t) + A\sigma\varphi'(t)\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta.$$

W se décompose alors comme il suit :

$$W = \frac{C + B\sigma\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \sigma\varphi'(t)\sqrt{A+B}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta. \tag{11}$$

Or, d'après Legendre, on a, k étant supposé voisin de l'unité,

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = (1 + \tfrac{1}{4}k'^2 + \tfrac{9}{64}k'^4 + \ldots)\log\frac{4}{k'} - \tfrac{1}{4}k'^2 - \tfrac{21}{128}k'^4 - \ldots, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = (\tfrac{1}{2}k'^2 + \tfrac{3}{16}k'^4 + \ldots)\log\frac{4}{k'} + 1 - \tfrac{1}{4}k'^2 - \tfrac{13}{64}k'^4 - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

En remplaçant $\log\frac{4}{k'}$ par $\frac{1}{2}\log\frac{16}{k'^2}$, (11) devient, en vertu des formules (12),

$$\begin{aligned} W = \frac{C + B\sigma\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} &\left\{ \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{B}{A+B} + \frac{9}{64}\left(\frac{B}{A+B}\right)^2 + \ldots\right] \log\left(16\frac{A+B}{A}\right) \right. \\ &\left. \qquad - \frac{1}{4}\frac{B}{A+B} - \frac{21}{128}\left(\frac{B}{A+B}\right)^2 - \ldots \right\} \\ - \sqrt{A+B}\,\sigma\varphi'(t) &\left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{B}{A+B} + \frac{3}{16}\left(\frac{B}{A+B}\right)^2 + \ldots\right] \log\left(16\frac{A+B}{A}\right) \right. \\ &\left. \qquad + 1 - \frac{1}{4}\frac{B}{A+B} - \frac{13}{64}\left(\frac{B}{A+B}\right)^2 - \ldots \right\} \end{aligned}$$

ou, en posant

$$(13)\quad \begin{cases} W_1 = \dfrac{C + B\sigma\varphi'(t)}{2\sqrt{A+B}}\left(1 + \dfrac{1}{4}\dfrac{B}{A+B} + \ldots\right) - \dfrac{\sqrt{A+B}}{2}\sigma\varphi'(t)\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{B}{A+B} + \ldots\right), \\ W_2 = -\dfrac{C + B\sigma\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{B}{A+B} + \ldots\right) - \sqrt{A+B}\,\sigma\varphi'(t)\left(1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{B}{A+B} - \ldots\right), \end{cases}$$

$$(14)\quad W = W_1 \log\left(16\frac{A+B}{B}\right) + W_2.$$

L'intégrale (10) prend donc la forme suivante :

$$V = \rho\, l^2 \int_0^{2\pi} W\, dt$$

ou

$$(15)\quad \frac{V}{\rho\, l^2} = \int_0^{2\pi} W_2\, dt + \int_0^{2\pi} W_1 \log[16(A+B)]\, dt - \int_0^{2\pi} W_1 \log B\, dt.$$

Les intégrales indiquées dans l'équation (15) ont été calculées par M^me^ Kowalewski dans l'hypothèse que le développement de x,

$$x = \varphi(t) = \alpha \sin t + \alpha' \sin 2t + \alpha'' \sin 3t + \ldots,$$

s'arrête au terme $\alpha' \sin 2t$, qui modifie le plus l'ellipse de Laplace.

M^me^ Kowalewski pose donc

$$\alpha'' = \alpha''' = \ldots = 0,$$

et elle fait, en outre,

$$\alpha' = \sigma\gamma',$$

où γ est supposé fini.

La courbe qui en résulte [1]

$$\xi = \sigma l(\alpha \sin t + \sigma\gamma' \sin 2t), \qquad \eta = l(1 - \sigma \cos t)$$

se réduit, dans le cas particulier de $M = 0$, à une ellipse ayant pour demi grands axes $\alpha\sigma l$ et σl, et pour aplatissement $\frac{\sigma^2}{2}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}\right)$.

La vitesse angulaire de rotation a pour valeur, dans ce cas,

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2\left(\log\frac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}\right).$$

Nous nous sommes proposé d'examiner si le terme $\alpha'' \sin 3t$ contient des quan-

---

[1] *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 153.

tités en σ^3. Ces quantités, si elles existaient, modifieraient les valeurs précédentes.

A cet effet, nous avons repris l'intégration de (15) en conservant partout les termes en σ^4 et en posant, comme l'avait indiqué M^me Kowalewski (*A. N.*, nº 2643),

$$\alpha' = \gamma'\sigma, \qquad \alpha'' = \gamma''\sigma^2. \tag{16}$$

Nous avons supposé $\alpha''' = \alpha^{\mathrm{IV}} = \ldots = 0$.

Les équations (8) qui servent de base à ce calcul deviennent, dans le cas que nous examinons,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
A &= 4[1 - \sigma(\cos t + \cos t_1) + \sigma^2 \cos t \cos t_1],\\
B &= \sigma^2(\cos t - \cos t_1)^2 + \sigma^2\alpha^2(\sin t - \sin t_1)^2\\
&\quad + 2\alpha\gamma'\sigma^3(\sin t - \sin t_1)(\sin 2t - \sin 2t_1)\\
&\quad + \gamma'^2\sigma^4(\sin 2t - \sin 2t_1)^2 + 2\alpha\gamma''\sigma^4(\sin t - \sin t_1)(\sin 3t - \sin 3t_1),\\
C &= 2\alpha\sigma^2[1 - \cos(t - t_1)] - 2\alpha\sigma^3\cos t[1 - \cos(t - t_1)]\\
&\quad + 2\gamma'\sigma^3[2\cos 2t(\cos t - \cos t_1) + \sin t(\sin 2t - \sin 2t_1)\\
&\qquad - 2\sigma\cos t\cos 2t(\cos t - \cos t_1) - \sigma\sin t\cos t(\sin 2t - \sin 2t_1)]\\
&\quad + 2\gamma''\sigma^4[3\cos 3t(\cos t - \cos t_1) + \sin t(\sin 3t - \sin 3t_1)].
\end{aligned}\right.$$

On voit ainsi que A est une quantité finie et que B et C sont du second ordre par rapport à σ; on pourra donc, dans le calcul de V, réduire W_1 et W_2 aux termes suivants :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
W_1 &= \frac{C}{2\sqrt{A+B}} + \frac{B\sigma\varphi'(t)}{4\sqrt{A+B}} + \frac{BC}{8(A+B)^{\frac{3}{2}}},\\
W_2 &= -\sqrt{A+B}\,\sigma\varphi'(t) + \frac{B\sigma\varphi'(t)}{4\sqrt{A+B}} - \frac{BC}{4(A+B)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

Or, en développant les radicaux et en ordonnant par rapport à σ, on trouve

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{\sigma}{2}(\cos t + \cos t_1) + \frac{\alpha^2\sigma^2}{8}(\sin t - \sin t_1)^2\\
&\quad + \tfrac{1}{4}\alpha\gamma'\sigma^3(\sin t - \sin t_1)(\sin 2t - \sin 2t_1)\\
&\quad + \tfrac{1}{16}\alpha^2\sigma^3(\cos t + \cos t_1)(\sin t - \sin t_1)^2,\\
2(A+B)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}\sigma(\cos t + \cos t_1) + \frac{\sigma^2}{4}(\cos t + \cos t_1)^2 - \frac{\alpha^2\sigma^2}{8}(\sin t - \sin t_1)^2,\\
(A+B)^{-\frac{3}{2}} &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{16}\sigma(\cos t + \cos t_1) + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Les expressions de W_1 et de W_2 prennent alors la forme suivante :

$$(20)\quad W_1 = \frac{C}{4}\left[1 + \tfrac{1}{2}\sigma(\cos t + \cos t_1) + \frac{\sigma^2}{4}(\cos t + \cos t_1)^2 - \frac{\alpha^2\sigma^2}{8}(\sin t - \sin t_1)^2\right] + \frac{B\sigma\varphi'(t)}{8}[1 + \tfrac{1}{2}\sigma(\cos t + \cos t_1)] + \frac{BC}{64}(1 + \ldots).$$

$$(21)\quad W_2 = -2\sigma\varphi'(t)\left[1 - \frac{\sigma}{2}(\cos t + \cos t_1) + \frac{\alpha^2\sigma^2}{8}(\sin t - \sin t_1)^2 + \tfrac{1}{4}\alpha\gamma'\sigma^3(\sin t - \sin t_1)(\sin 2t - \sin 2t_1) + \tfrac{1}{16}\alpha^2\sigma^3(\cos t + \cos t_1)(\sin t - \sin t_1)^2\right] + \frac{B\sigma\varphi'(t)}{8}[1 + \tfrac{1}{2}\sigma(\cos t + \cos t_1)] - \frac{BC}{32}(1 + \ldots).$$

Portant maintenant les valeurs (20) et (21) dans (15), l'intégrale $\int_0^{2\pi} W_2\,dt$, première partie de V, se calcule alors sans difficulté.

Calcul de $\int_0^{2\pi} W_2\,dt$.

On a

$$\int_0^{2\pi} W_2\,dt = 2\pi \text{ termes non périodiques de } W_2;$$

d'où, en négligeant partout σ^5,

$$(22)\quad \int_0^{2\pi} W_2\,dt = \pi\sigma^2[\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha\sigma\cos t_1 + \tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^2 - \tfrac{1}{64}\alpha\sigma^2(11 + 10\cos 2t_1) - \tfrac{1}{64}\alpha^3\sigma^2(15 - 10\cos 2t_1)].$$

Occupons-nous maintenant du calcul de W_1 :

$$W_1 = \frac{C}{4}\left[1 + \tfrac{1}{2}\sigma(\cos t + \cos t_1) + \frac{\sigma^2}{4}(\cos t + \cos t_1)^2 - \frac{\alpha^2\sigma^2}{8}(\sin t - \sin t_1)^2\right] + \frac{B\sigma\varphi'(t)}{8}[1 + \tfrac{1}{2}\sigma(\cos t + \cos t_1)] + \frac{BC}{64},$$

où l'on a

$$\begin{aligned} C = {} & 2\alpha\sigma^2 - 2\alpha\sigma^2\cos(t - t_1) \\ & - 2\alpha\sigma^3\cos t + 2\alpha\sigma^3\cos t\cos(t - t_1) \\ & + 4\gamma'\sigma^3\cos 2t(\cos t - \cos t_1) + 2\gamma'\sigma^3\sin t(\sin 2t - \sin 2t_1) \\ & - 4\gamma'\sigma^4\cos t\cos 2t(\cos t - \cos t_1) - 2\gamma'\sigma^4\sin t\cos t(\sin 2t - \sin 2t_1) \\ & + 6\gamma''\sigma^4\cos 3t(\cos t - \cos t_1) + 2\gamma''\sigma^4\sin t(\sin 3t - \sin 3t_1), \end{aligned}$$

$$B = \sigma^2(\cos t - \cos t_1)^2 + \sigma^2\alpha^2(\sin t - \sin t_1)^2 + 2\alpha\gamma'\sigma^3(\sin t - \sin t_1)(\sin 2t - \sin 2t_1).$$

En effectuant les multiplications indiquées et en groupant les termes, on peut écrire W_1 sous la forme

$$(23)\qquad W_1 = \mathcal{A}_0 + \sum_1^\infty (\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt),$$

les coefficients $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ ayant les valeurs suivantes :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= +\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 - \tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{7}{128}\alpha\sigma^4 - \tfrac{3}{128}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{1}{4}\alpha\sigma^3\cos t_1 + \frac{\alpha}{64}\sigma^4(5+\alpha^2)\cos 2t_1,\\
\mathcal{A}_1 &= -\tfrac{7}{32}\alpha\sigma^3 + \tfrac{3}{4}\gamma'\sigma^3 + \tfrac{3}{32}\alpha^3\sigma^3 + (-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 - \tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4 + \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{3}{8}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4)\cos t_1\\
&\quad - \tfrac{1}{16}\alpha\sigma^3(1+\alpha^2)\cos 2t_1 - (\tfrac{3}{128}\alpha\sigma^4 + \tfrac{3}{128}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4)\cos 3t_1,\\
\mathcal{B}_1 &= +[-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 - \tfrac{1}{64}\alpha\sigma^4 + \tfrac{5}{64}\alpha^3\sigma^4 - \tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{1}{8}\gamma'\alpha^2\sigma^4]\sin t_1 - \tfrac{1}{2}\sigma^3(\gamma' + \tfrac{1}{4}\alpha)\sin 2t_1\\
&\quad - (\tfrac{5}{128}\alpha\sigma^4 + \tfrac{1}{128}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{1}{2}\gamma''\sigma^4)\sin 3t_1,\\
\mathcal{A}_2 &= -\tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4 - \tfrac{1}{64}\alpha\sigma^4 + \gamma''\sigma^4 + \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{1}{4}\gamma'\alpha^2\sigma^4 - \gamma'\sigma^3\cos t_1\\
&\quad - (\tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{1}{32}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{1}{8}\gamma'\alpha^2\sigma^4)\cos 2t_1,\\
\mathcal{B}_2 &= +\tfrac{1}{8}\alpha\sigma^3(1-\alpha^2)\sin t_1 + \tfrac{1}{8}\sigma^4(\gamma' - \alpha^2\gamma' - \tfrac{3}{8}\alpha^3 + \tfrac{1}{8}\alpha)\sin 2t_1,\\
\mathcal{A}_3 &= +\tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^3 + \tfrac{1}{32}\alpha\sigma^3 - \tfrac{1}{32}\alpha^3\sigma^3 + (\tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4 - \tfrac{3}{2}\gamma''\sigma^4 + \tfrac{1}{128}\alpha\sigma^4 - \tfrac{3}{128}\alpha^3\sigma^4)\cos t_1,\\
\mathcal{B}_3 &= +(\tfrac{3}{128}\alpha\sigma^4 - \tfrac{5}{128}\alpha^3\sigma^4 - \tfrac{3}{8}\gamma'\alpha^2\sigma^4)\sin t_1,\\
\mathcal{A}_4 &= +\tfrac{1}{128}\alpha\sigma^4 - \tfrac{1}{128}\alpha^3\sigma^4 - \tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4 + \tfrac{1}{2}\gamma''\sigma^4,\\
\mathcal{B}_4 &= 0,\\
\mathcal{A}_5 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs nous permettent de calculer les deux autres intégrales dont se compose V :

$$\int_0^{2\pi} W_1 \log[16(A+B)]\,dt, \qquad -\int_0^{2\pi} W_1 \log B\,dt.$$

Calcul de $\int_0^{2\pi} W_1 \log[16(A+B)]\,dt$.

W_1 est du second ordre par rapport à σ; on pourra donc, dans le développement de $\log 16(A+B)$, négliger les termes en σ^3.

Or on a

$$16(A+B) = 64\,[1 - \sigma(\cos t + \cos t_1) + \tfrac{1}{4}\sigma^2(\cos t + \cos t_1)^2 + \tfrac{1}{4}\sigma^2\alpha^2(\sin t - \sin t_1)^2],$$

d'où

$$(25)\quad \begin{aligned}\log 16(A+B) = \log 64 + \log[1 - \sigma(\cos t + \cos t_1) &+ \tfrac{1}{4}\sigma^2(\cos t + \cos t_1)^2\\
&+ \tfrac{1}{4}\sigma^2\alpha^2(\sin t - \sin t_1)^2].\end{aligned}$$

σ étant supposé très petit, on pourra développer (25) en série convergente, d'après la formule

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

en posant

$$x = -\sigma(\cos t + \cos t_1) + \tfrac{1}{4}\sigma^2(\cos t_1 + \cos t)^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^2\sigma^2(\sin t - \sin t_1)^2.$$

On trouve

$$(26)\quad \begin{aligned} \log 16(\mathrm{A}+\mathrm{B}) &= \log 64 - \sigma(\cos t + \cos t_1) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\sigma^2(\cos t + \cos t_1)^2 + \tfrac{1}{4}\sigma^2\alpha^2(\sin t - \sin t_1)^2 \\ &= \log 64 - \sigma(\cos t + \cos t_1) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\sigma^2(1 + \tfrac{1}{2}\cos 2t + 2\cos t_1 \cos t + \tfrac{1}{2}\cos 2t_1) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\alpha^2\sigma^2(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2t - 2\sin t_1 \sin t - \tfrac{1}{2}\cos 2t_1). \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$\mathrm{W}_1 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \cos t + \mathcal{B}_1 \sin t + \mathcal{A}_2 \cos 2t + \mathcal{B}_2 \sin 2t + \ldots;$$

d'où, en substituant et en intégrant, il vient

$$(27)\quad \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \mathrm{W}_1 \log(16\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}})\,dt \\ &= 2\pi\mathcal{A}_0 \log 64 - \pi\sigma(2\mathcal{A}_0 \cos t_1 + \mathcal{A}_1) \\ &\quad + \frac{\pi}{4}\sigma^2[2(\alpha^2-1)\mathcal{A}_0 - (1+\alpha^2)\mathcal{A}_0\cos 2t_1 - 2\mathcal{A}_1\cos t_1 - 2\alpha^2\mathcal{B}_1 \sin t_1]. \end{aligned}$$

Reste à calculer $-\int_0^{2\pi} \mathrm{W}_1 \log \mathrm{B}\,dt$, où

$$\mathrm{W}_1 = \mathcal{A}_0 + \sum_1^{\infty}(\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt)$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{B} = \sigma^2(\cos t - \cos t_1)^2 + \sigma^2[\alpha(\sin t - \sin t_1) + \sigma\gamma' \,(\sin 2t - \sin 2t_1) \\ + \sigma^2\gamma''(\sin 3t - \sin 3t_1)]^2. \end{aligned}$$

Or, en remarquant que l'on a

$$(\sin 3t - \sin 3t_1) = (\sin t - \sin t_1)[3 - 4(\sin^2 t + \sin t_1 \sin t + \sin^2 t_1)],$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{B} = \sigma^2(\cos t - \cos t_1)^2 + \sigma^2\alpha^2(\sin t - \sin t_1)^2 + 2\alpha\gamma'\sigma^3(\sin t - \sin t_1)(\sin 2t - \sin 2t_1) \\ + 2\alpha\gamma''\sigma^4(\sin t - \sin t_1)^2[3 - 4(\sin^2 t + \sin t_1 \sin t + \sin^2 t_1)] \\ + \gamma'^2\sigma^4(\sin 2t - \sin 2t_1)^2 + \text{des termes en } \sigma^5, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} = {} & \sigma^2 4 \sin^2\frac{t_1+t}{2}\sin^2\frac{t_1-t}{2} + \sigma^2\alpha^2 4\sin^2\frac{t-t_1}{2}\cos^2\frac{t+t_1}{2} \\
& + 2\alpha\gamma'\sigma^3 2\sin\frac{t-t_1}{2}\cos\frac{t+t_1}{2} 4\sin\frac{t-t_1}{2}\cos\frac{t-t_1}{2}\cos(t+t_1) \\
& + 2\alpha\gamma''\sigma^4 4\sin^2\frac{t-t_1}{2}\cos^2\frac{t+t_1}{2}[3-4(\sin^2 t+\sin t_1\sin t+\sin^2 t_1)] \\
& + \gamma'^2\sigma^4 4\cos^2(t+t_1) 4\sin^2\frac{t-t_1}{2}\cos^2\frac{t-t_1}{2},
\end{aligned}$$

ou, en mettant en facteur $2\sin^2\frac{t-t_1}{2} = 1-\cos(t-t_1)$,

$$\begin{aligned}
(28)\quad \mathrm{B} = {} & \sigma^2[1-\cos(t-t_1)] \\
& \times\Big[2\sin^2\frac{t_1+t}{2} + 2\alpha^2\cos^2\frac{t+t_1}{2} + 8\alpha\gamma'\sigma\cos\frac{t+t_1}{2}\cos\frac{t-t_1}{2}\cos(t+t_1) \\
& \quad + 12\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\frac{t+t_1}{2} - 16\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\frac{t+t_1}{2}(\sin^2 t+\sin t_1\sin t+\sin^2 t_1) \\
& \quad + 8\gamma'^2\sigma^2\cos^2(t+t_1)\cos^2\frac{t-t_1}{2}\Big].
\end{aligned}$$

Pour $\gamma' = \gamma'' = 0$, B se réduit à la valeur suivante

$$\sigma^2[1-\cos(t-t_1)][1-\cos(t+t_1)+\alpha^2+\alpha^2\cos(t+t_1)],$$

on peut donc écrire

$$(29)\qquad \mathrm{B} = \sigma^2[1-\cos(t-t_1)][1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)](1+\mathrm{B}_1),$$

en posant

$$(30)\qquad \mathrm{B}_1 = \frac{\left\{\begin{aligned} & +8\alpha\gamma'\sigma\cos\frac{t+t_1}{2}\cos\frac{t-t_1}{2}\cos(t+t_1)+12\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\frac{t+t_1}{2} \\ & -16\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\frac{t+t_1}{2}(\sin^2 t+\sin t_1\sin t+\sin^2 t_1)+8\gamma'^2\sigma^2\cos^2(t+t_1)\cos^2\frac{t-t_1}{2}\end{aligned}\right\}}{1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)};$$

l'intégrale $\int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\log\mathrm{B}\,dt$ se décompose donc en quatre autres

$$\begin{aligned}
(31)\quad \int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\log\mathrm{B}\,dt = {} & \log\sigma^2\int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\,dt + \int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\log[1-\cos(t-t_1)]\,dt \\
& + \int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\log[1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)]\,dt \\
& + \int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\log(1+\mathrm{B}_1)\,dt.
\end{aligned}$$

On a immédiatement

$$(32)\qquad \log\sigma^2\int_0^{2\pi} W_1\,dt = 2\pi\,\mathcal{A}_0\log\sigma^2.$$

Calcul de R *et de* S.

Posons

$$(33)\qquad R=\int_0^{2\pi} W_1\log[1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t_1+t)]\,dt,$$

$$(34)\qquad S=\int_0^{2\pi} W_1\log[1-\cos(t-t_1)]\,dt;$$

l'intégrale S se déduit de R par le changement de t_1 en $-t_1$ et de α en o.

Transformons la quantité sous le signe logarithmique; on a

$$1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)=\frac{(1+\alpha)^2}{2}\left[\frac{2+2\alpha^2}{(1+\alpha)^2}-\frac{2(1-\alpha^2)}{(1+\alpha)^2}\cos(t+t_1)\right]$$
$$=\frac{(1+\alpha)^2}{2}\left[1+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2-2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\cos(t+t_1)\right]$$

ou, en posant $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=\beta$ et $i=\sqrt{-1}$,

$$1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)=\frac{(1+\alpha)^2}{2}(1-\beta e^{i(t+t_1)})(1-\beta e^{-i(t+t_1)}),$$

d'où

$$\log[1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)]=\log\frac{(1+\alpha)^2}{2}+\log(1-\beta e^{i(t+t_1)})+\log(1-\beta e^{-i(t+t_1)}).$$

Or, β étant inférieur à l'unité, on a

$$\log(1-\beta e^{i(t+t_1)})=-\frac{\beta}{1}e^{i(t+t_1)}-\frac{\beta^2}{2}e^{2i(t+t_1)}-\frac{\beta^3}{3}e^{3i(t+t_1)}-\frac{\beta^4}{4}e^{4i(t+t_1)}-\ldots,$$

$$\log(1-\beta e^{-i(t+t_1)})=-\frac{\beta}{1}e^{-i(t+t_1)}-\frac{\beta^2}{2}e^{-2i(t+t_1)}-\frac{\beta^3}{3}e^{-3i(t+t_1)}-\frac{\beta^4}{4}e^{-4i(t+t_1)}-\ldots;$$

d'où

$$(35)\qquad \log[1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)]$$
$$=\log\frac{(1+\alpha)^2}{2}-2\beta\cos(t+t_1)-2\frac{\beta^2}{2}\cos 2(t+t_1)-2\frac{\beta^3}{3}\cos 3(t+t_1)\ldots;$$

l'intégrale R peut donc s'écrire

$$R = \int_0^{2\pi} W_1 \log[1 + \alpha^2 - (1 - \alpha^2)\cos(t + t_1)]\, dt$$

$$= \log\frac{(1+\alpha)^2}{2}\int_0^{2\pi} W_1\, dt$$

$$- 2\int_0^{2\pi} W_1 \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cos(t+t_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \cos 2(t+t_1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3 \cos 3(t+t_1) + \ldots\right] dt$$

ou, en remplaçant W_1 par sa valeur,

$$\mathcal{A}_0 + \sum_1^\infty (\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt),$$

$$R = 2\pi\mathcal{A}_0 \log\frac{(1+\alpha)^2}{2} - 2\int_0^{2\pi}\left[\mathcal{A}_0 + \sum_1^\infty (\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt)\right]$$
$$\times\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cos(t+t_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\cos 2(t+t_1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3\cos 3(t+t_1) + \ldots\right] dt$$

ou

$$R = 2\pi\mathcal{A}_0 \log\frac{(1+\alpha)^2}{2} - 2\sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{n}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n \cos n(t+t_1)(\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt)\, dt. \tag{36}$$

En remarquant que l'on a

$$\int_0^{2\pi} \cos pt \cos qt\, dt = \begin{cases} 0 & \text{pour } p \neq q, \\ \pi & \text{pour } p = q, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos pt \sin qt\, dt = \quad 0 \quad \text{pour } p \gtrless q,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin pt \sin qt\, dt = \begin{cases} 0 & \text{pour } p \neq q, \\ \pi & \text{pour } p = q, \end{cases}$$

il vient, après l'intégration,

$$R = 2\pi\mathcal{A}_0 \log\frac{(1+\alpha)^2}{2} - 2\pi\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n (\mathcal{A}_n \cos nt_1 - \mathcal{B}_n \sin nt_1),$$

d'où l'on déduit, pour S,

$$S = -2\pi\mathcal{A}_0 \log 2 - 2\pi\sum_1^\infty \frac{1}{n}(\mathcal{A}_n \cos nt_1 + \mathcal{B}_n \sin nt_1);$$

si l'on s'arrête aux termes en σ^4, on a

$$
(37)\qquad \mathrm{R} = 2\pi\mathcal{A}_0 \log\frac{(1+\alpha)^2}{2}
$$
$$
-2\pi\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}(\mathcal{A}_1\cos t_1 - \mathcal{B}_1\sin t_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2(\mathcal{A}_2\cos 2t_1 - \mathcal{B}_2\sin 2t_1)\right.
$$
$$
\left. + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3(\mathcal{A}_3\cos 3t - \mathcal{B}_3\sin 3t_1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^4\mathcal{A}_4\cos 4t_1\right],
$$

$$
(38)\qquad \mathrm{S} = -2\pi\mathcal{A}_0\log 2 - 2\pi\left[\mathcal{A}_1\cos t_1 + \mathcal{B}_1\sin t_1 + \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_2\cos 2t_1 + \mathcal{B}_2\sin 2t_1)\right.
$$
$$
\left. + \tfrac{1}{3}(\mathcal{A}_3\cos 3t_1 + \mathcal{B}_3\sin 3t_1) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4\cos 4t_1\right].
$$

Calcul de $\int_0^{2\pi} \mathrm{W}_1 \log(1+\mathrm{B}_1)\,dt$.

W_1 étant de l'ordre de σ^2 et B_1 étant de l'ordre de σ, on peut, en négligeant comme précédemment les termes en σ^5, se borner à

$$
(39)\qquad \int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\log(1+\mathrm{B}_1)\,dt = \int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\mathrm{B}_1\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{W}_1\mathrm{B}_1^2\,dt,
$$

où l'on a (30)

$$
\mathrm{B}_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l} +8\alpha\gamma'\sigma\cos\dfrac{t+t_1}{2}\cos\dfrac{t-t_1}{2}\cos(t+t_1) + 12\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\dfrac{t+t_1}{2} \\ -16\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\dfrac{t+t_1}{2}(\sin^2 t + \sin t_1\sin t + \sin^2 t_1) + 8\gamma'^2\sigma^2\cos^2(t+t_1)\cos^2\dfrac{t-t_1}{2}\end{array}\right\}}{1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)}.
$$

D'autre part,

$$
\frac{1}{1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t+t_1)}
$$
$$
= \frac{1}{2\alpha}\left[1 + 2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\cos(t+t_1) + 2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\cos 2(t+t_1)\right.
$$
$$
\left. + 2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3\cos 3(t+t_1) + \ldots\right];
$$

l'expression de B_1 devient donc

$$
(40)\qquad \mathrm{B}_1 = \frac{1}{2\alpha}\left[1 + 2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\cos(t+t_1)\right.
$$
$$
+ 2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\cos 2(t+t_1)
$$
$$
\left. + 2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3\cos 3(t+t_1) + \ldots\right][\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}],
$$

en posant

$$\mathrm{I} \;=+\;\; 8\alpha\gamma'\sigma\cos\frac{t+t_1}{2}\cos\frac{t-t_1}{2}\cos(t+t_1),$$

$$\mathrm{II} \;=+12\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\frac{t+t_1}{2},$$

$$\mathrm{III}=-16\alpha\gamma''\sigma^2\cos^2\frac{t+t_1}{2}(\sin^2 t+\sin t_1\sin t+\sin^2 t_1),$$

$$\mathrm{IV}=+\;\; 8\gamma'^2\sigma^2\cos^2(t+t_1)\cos^2\frac{t-t_1}{2}.$$

En remplaçant les produits des quantités trigonométriques par des sommes et des différences d'après les formules fondamentales, on trouve, sans trop de peine,

$$\mathrm{I} \;=2\alpha\gamma'\sigma[\cos(2t+t_1)+\cos t_1+\cos(t+2t_1)+\cos t],$$

$$\mathrm{II} \;=6\alpha\gamma''\sigma^2[1+\cos(t_1+t)],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}=-\;2\alpha\gamma''\sigma^2[&3-\cos 2t_1+4\sin t_1\sin t-\cos(t_1-t)+4\cos(t_1+t)\\ &-2\cos 2t_1\cos(t_1+t)+2\sin t_1\sin(t_1+2t)-2\cos 2t-\cos(t_1+3t)],\end{aligned}$$

$$\mathrm{IV}=\gamma'^2\sigma^2[2+2\cos(t_1-t)+\cos(3t_1+t)+2\cos(2t_1+2t)+\cos(t_1+3t)].$$

Or on a

$$\mathrm{W}_1=\underset{(2)}{\mathcal{A}_0}+\underset{(2)}{\mathcal{A}_1}\cos t+\underset{(2)}{\mathcal{B}_1}\sin t+\underset{(3)}{\mathcal{A}_2}\cos 2t+\underset{(3)}{\mathcal{B}_2}\sin 2t+\underset{(3)}{\mathcal{A}_3}\cos 3t+\underset{(4)}{\mathcal{B}_3}\sin 3t+\underset{(4)}{\mathcal{A}_4}\cos 4t,$$

où les chiffres entre parenthèses indiquent l'ordre du terme le moins élevé en σ, contenu dans les coefficients $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$.

Au degré d'approximation adopté, il faudra, dans le produit $\mathrm{W}_1\mathrm{B}_1$, faire le développement de B_1 en négligeant respectivement les termes en

$$\sin 3t,\ \cos 4t,\ \ldots\quad \text{dans}\quad \frac{1}{2\alpha}[1+2\beta\cos(t_1+t)+2\beta^2\cos(2t_1+2t)+\ldots]\,\underset{(1)}{\mathrm{I}},$$

$$\cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots\quad \text{dans}\quad \frac{1}{2\alpha}[1+2\beta\cos(t_1+t)+2\beta^2\cos(2t_1+2t)+\ldots]\,\underset{(2)}{\mathrm{II}},$$

$$\cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots\quad \text{dans}\quad \frac{1}{2\alpha}[1+2\beta\cos(t_1+t)+2\beta^2\cos(2t_1+2t)+\ldots]\,\underset{(2)}{\mathrm{III}},$$

$$\cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots\quad \text{dans}\quad \frac{1}{2\alpha}[1+2\beta\cos(t_1+t)+\ldots\ldots\ldots\ldots]\,\underset{(2)}{\mathrm{IV}}.$$

Ici encore, les chiffres entre parenthèses indiquent l'ordre du terme le moins élevé en σ contenu dans les expressions I, II, III, IV; en outre, on a posé

$$\beta=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Occupons-nous maintenant de la transformation (40) de B_1.

Calcul de $\frac{1}{2\alpha}(\ldots)\mathrm{I}$.

On a trouvé

$$\mathrm{I} = 2\alpha\gamma'\sigma[\cos t_1 + \cos t + \cos(2t_1 + t) + \cos(t_1 + 2t)];$$

il est inutile, en effectuant la multiplication, de considérer le terme en $2\beta^6\cos(6t_1 + 6t)$, qui donnerait lieu à un terme en $\cos 4t$; ce terme doit être négligé d'après ce qui précède.

En posant

$$\begin{aligned}\gamma'\sigma[1 + 2\beta\cos(t + t_1) + 2\beta^2\cos(2t + 2t_1) + 2\beta^3\cos(3t + 3t_1)\\ + 2\beta^4\cos(4t + 4t_1) + 2\beta^5\cos(5t + 5t_1)]\\ \times[\cos t_1 + \cos t + \cos(2t_1 + t) + \cos(t_1 + 2t)] = \mathrm{S}_1,\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{S}_1}{\gamma'\sigma} = {} & \cos t_1 + 2\beta\cos t_1\cos(t + t_1) + 2\beta^2\cos t_1\cos(2t + 2t_1) + 2\beta^3\cos t_1\cos(3t + 3t_1)\\ & + \cos t + 2\beta\cos t\cos(t_1 + t) + 2\beta^2\cos t\cos(2t_1 + 2t)\\ & \qquad + 2\beta^3\cos t\cos(3t_1 + 3t) + 2\beta^4\cos t\cos(4t_1 + 4t)\\ & + \cos(2t_1 + t) + 2\beta\cos(2t_1 + t)\cos(t_1 + t) + 2\beta^2\cos(2t_1 + t)\cos(2t_1 + 2t)\\ & \qquad + 2\beta^3\cos(2t_1 + t)\cos(3t_1 + 3t) + 2\beta^4\cos(2t_1 + t)\cos(4t_1 + 4t)\\ & + \cos(t_1 + 2t) + 2\beta\cos(t_1 + 2t)\cos(t_1 + t)\\ & \qquad + 2\beta^2\cos(t_1 + 2t)\cos(2t + 2t_1) + 2\beta^3\cos(t_1 + 2t)\cos(3t + 3t_1)\\ & \qquad + 2\beta^4\cos(t_1 + 2t)\cos(4t_1 + 4t) + 2\beta^5\cos(t_1 + 2t)\cos(5t_1 + 5t)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{S}_1}{\gamma'\sigma} = {} & \cos t_1 + \cos t + \cos(2t_1 + t) + \cos(t_1 + 2t)\\ & + \beta[\cos(2t_1 + t) + \cos t + \cos(t_1 + 2t)\\ & \qquad + \cos t_1 + \cos(3t_1 + 2t) + \cos t_1 + \cos(2t_1 + 3t) + \cos t]\\ & + \beta^2[\cos(2t + 3t_1) + \cos(2t + t_1) + \cos(2t_1 + 3t)\\ & \qquad + \cos(2t_1 + t) + \cos(4t_1 + 3t) + \cos t + \cos t_1]\\ & + \beta^3[\cos(4t_1 + 3t) + \cos(2t_1 + 3t) + \cos(3t_1 + 2t) + \cos(t_1 + 2t) + \cos(2t_1 + t)]\\ & + \beta^4[\cos(4t_1 + 3t) + \cos(2t_1 + 3t) + \cos(3t_1 + 2t)]\\ & + \beta^5[\cos(4t_1 + 3t)];\end{aligned}$$

d'où, en développant et en remplaçant β par sa valeur, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{\gamma'\sigma} = {} & \frac{4}{(1+\alpha)^2}\cos t_1 \\
& + \left[\frac{4}{(1+\alpha)^2} + \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1\right]\cos t \\
& - \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sin 2t_1 \sin t \\
& + \left[\frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos t_1 + \frac{4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 3t_1\right]\cos 2t \\
& - \left[\frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sin t_1 + \frac{4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\sin 3t_1\right]\sin 2t \\
& + \left[\frac{4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 2t_1 + \frac{4(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}\cos 4t_1\right]\cos 3t.
\end{aligned}$$

Calcul de $\frac{1}{2\alpha}(\ldots)$ II.

D'après la remarque (p. 21), les termes en $\cos 2t$, $\sin 2t$, ... doivent être négligés; il vient donc, en posant

$$3\gamma''\sigma^2[1+\cos(t+t_1)][1+2\beta\cos(t_1+t)+2\beta^2\cos(2t_1+2t)] = S_2,$$

$$\frac{S_2}{3\gamma''\sigma^2} = 1+2\beta\cos(t_1+t)+\cos(t_1+t)+2\beta\cos^2(t_1+t)+2\beta^2\cos(t_1+t)\cos(2t_1+2t)$$

ou

$$\frac{S_2}{3\gamma''\sigma^2} = 1+\cos(t_1+t)+\beta[2\cos(t_1+t)+1]+\beta^2\cos(t_1+t),$$

d'où, finalement, en remplaçant β par sa valeur,

$$\frac{S_2}{3\gamma''\sigma^2} = \frac{2}{1+\alpha}+\frac{4}{(1+\alpha)^2}\cos(t_1+t).$$

Calcul de $\frac{1}{2\alpha}(\ldots)$ III.

Opérant de même avec le troisième terme dont se compose B_1, il vient, en posant

$$\begin{aligned}
-\gamma''\sigma^2[3 & - \cos 2t_1 + 4\sin t_1 \sin t \\
& - \cos(t_1-t) + 4\cos(t_1+t) - 2\cos 2t_1\cos(t_1+t) \\
& \qquad + 2\sin t_1 \sin(t_1+2t) - 2\cos 2t - \cos(t_1+3t)] \\
\times [1 & + 2\beta\cos(t_1+t) + 2\beta^2\cos(2t_1+2t) \\
& \qquad + 2\beta^3\cos(3t_1+3t) + 2\beta^4\cos(4t_1+4t)] = S_3
\end{aligned}$$

et en omettant le terme en $2\beta^5\cos(5t_1+5t)$ qui introduirait un terme en $\cos 2t$,

$$
\begin{aligned}
-\frac{S_3}{\gamma''\sigma^2} = 3 &- \cos 2t_1 + 4\sin t_1 \sin t - \cos(t_1 - t) + 4\cos(t_1+t) - 2\cos 2t_1\cos(t_1+t) \\
&+ 2\beta\,[3\cos(t_1+t) - \cos 2t_1\cos(t_1+t) + 4\sin t_1\sin t\cos(t_1+t) \\
&\qquad - \cos(t_1-t)\cos(t_1+t) + 4\cos^2(t_1+t) - 2\cos 2t_1\cos^2(t_1+t) \\
&\qquad\qquad + 2\sin t_1\sin(t_1+2t)\cos(t_1+t) - 2\cos 2t\cos(t_1+t)] \\
&+ 2\beta^2[+4\sin t_1\sin t\cos(2t_1+2t) - \cos(t_1-t)\cos(2t_1+2t) \\
&\qquad + 4\cos(t_1+t)\cos(2t_1+2t) - 2\cos 2t_1\cos(t_1+t)\cos(2t_1+2t) \\
&\qquad + 2\sin t_1\sin(t_1+2t)\cos(2t_1+2t) \\
&\qquad\qquad - 2\cos 2t\cos(2t_1+2t) - \cos(t_1+3t)\cos(2t_1+2t)] \\
&+ 2\beta^3[+2\sin t_1\sin(t_1+2t)\cos(3t_1+3t) \\
&\qquad - 2\cos 2t\cos(3t_1+3t) - \cos(t_1+3t)\cos(3t_1+3t)] \\
&+ 2\beta^4[-\cos(t_1+3t)\cos(4t_1+4t)],
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
-\frac{S_3}{\gamma''\sigma^2} = 3 &- \cos 2t_1 + 4\sin t_1\sin t - \cos(t_1-t) + 4\cos(t_1+t) - 2\cos 2t_1\cos(t_1+t) \\
&+ 2\beta\,[3\cos(t_1+t) - \cos 2t_1\cos(t_1+t) + 2\sin t_1\sin(2t+t_1) \\
&\qquad - 2\sin^2 t_1 - \tfrac{1}{2}\cos 2t_1 + 2 - \cos 2t_1 + \sin t_1\sin t - \cos(t-t_1)] \\
&+ 2\beta^2[-2\sin t_1\sin(2t_1+t) - \tfrac{1}{2}\cos(3t_1+t) + 2\cos(t_1+t) \\
&\qquad - \cos 2t_1\cos(t_1+t) - \sin^2 t_1 - \cos 2t_1 - \tfrac{1}{2}\cos(t_1-t)] \\
&+ 2\beta^3[-\sin t_1\sin(2t_1+t) - \cos(3t_1+t) - \tfrac{1}{2}\cos 2t_1] \\
&+ 2\beta^4[-\tfrac{1}{2}\cos(3t_1+t)]
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
-\frac{S_3}{\gamma''\sigma^2} = 3 &- \cos 2t_1 + 4\sin t_1\sin t - \cos(t_1-t) + 4\cos(t_1+t) - 2\cos 2t_1\cos(t_1+t) \\
&+ 2\beta\,[1 - \tfrac{1}{2}\cos 2t_1 + \sin t_1\sin t - \cos(t_1-t) \\
&\qquad - \cos 2t_1\cos(t_1+t) + 3\cos(t_1+t)] \\
&+ 2\beta^2[-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t_1 - \tfrac{1}{2}\cos(t_1-t) + 2\cos(t_1+t) \\
&\qquad - \cos 2t_1\cos(t_1+t) - \tfrac{1}{2}\cos(3t_1+t) - 2\sin t_1\sin(2t_1+t)] \\
&+ 2\beta^3[-\tfrac{1}{2}\cos 2t_1 - \sin t_1\sin(2t_1+t) - \cos(3t_1+t)] \\
&- \beta^4\cos(3t_1+t)
\end{aligned}
$$

ou, en développant, il vient

$$-\frac{S_3}{\gamma''\sigma^2}=\frac{4(1+2\alpha)}{(1+\alpha)^2}-\frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1$$
$$+\left[\frac{4(1+3\alpha)}{(1+\alpha)^3}\cos t_1-\frac{4(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 3t_1\right]\cos t$$
$$+\left[-\frac{4(3+3\alpha-2\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sin t_1+\frac{4(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\sin 3t_1\right]\sin t.$$

Calcul de $\frac{1}{2\alpha}(\ldots)$ IV.

Dans ce développement, les termes en $\cos 2t$, $\sin 2t$, ... sont à négliger.

Nous poserons encore

$$\frac{\gamma'^2\sigma^2}{2\alpha}[2+2\cos(t_1-t)+\cos(3t_1+t)+2\cos(2t_1+2t)+\cos(t_1+3t)]$$
$$\times[1+2\beta\cos(t_1+t)+2\beta^2\cos(2t_1+2t)$$
$$+2\beta^3\cos(3t_1+3t)+2\beta^4\cos(4t_1+4t)]=S_4,$$

d'où, en effectuant les multiplications indiquées,

$$\frac{2\alpha S_4}{\gamma'^2\sigma^2}=2+2\cos(t_1-t)+\cos(3t_1+t)$$
$$+2\beta\,[2\cos(t_1+t)+\cos 2t_1+\tfrac{1}{2}\cos 2t_1+\cos(t_1+t)]$$
$$+2\beta^2[\cos(3t_1+t)+\tfrac{1}{2}\cos(t_1-t)+1+\tfrac{1}{2}\cos(t_1-t)]$$
$$+2\beta^3[\cos(t_1+t)+\tfrac{1}{2}\cos 2t_1]$$
$$+2\beta^4[\tfrac{1}{2}\cos(3t_1+t)]$$

ou encore, en développant et en ordonnant suivant les cos des multiples de t,

$$\frac{2\alpha S_4}{\gamma'^2\sigma^2}=+2(1+\beta^2)+\beta(3+\beta^2)\cos 2t_1$$
$$+2(1-3\beta+\beta^2-\beta^3)\sin t_1\sin t-(1+\beta^2)^2\sin 3t_1\sin t$$
$$+2(1+3\beta+\beta^2+\beta^3)\cos t_1\cos t+(1+\beta^2)^2\cos 3t_1\cos t.$$

En remplaçant maintenant β par sa valeur et en simplifiant les expressions entre parenthèses, il vient

$$\frac{2\alpha S_4}{\gamma'^2\sigma^2}=\frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2}+\frac{4(1-\alpha^3)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1$$
$$+\frac{4(-1+\alpha+\alpha^2+3\alpha^3)}{(1+\alpha)^3}\sin t_1\sin t-\frac{4(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha)^4}\sin 3t_1\sin t$$
$$+\frac{4(3+\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^3}\cos t_1\cos t+\frac{4(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha)^4}\cos 3t_1\cos t.$$

L'expression (30) de B_1 se transforme donc finalement comme il suit

$$(41)\qquad B_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

avec

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{S_1}{\gamma'\sigma} &= \frac{4}{(1+\alpha)^2}\cos t_1 + \frac{4}{(1+\alpha)^2}\cos t + \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1 \cos t \\
&\quad - \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sin 2t_1 \sin t \\
&\quad + \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos t_1 \cos 2t + \frac{4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 3t_1 \cos 2t \\
&\quad - \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sin t_1 \sin 2t - \frac{4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\sin 3t_1 \sin 2t \\
&\quad + \frac{4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 2t_1 \cos 3t + \frac{4(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}\cos 4t_1 \cos 3t, \\
\frac{S_2}{3\gamma''\sigma^2} &= \frac{2}{1+\alpha} + \frac{4}{(1+\alpha)^2}\cos t_1 \cos t - \frac{4}{(1+\alpha)^2}\sin t_1 \sin t, \\
-\frac{S_3}{\gamma''\sigma^2} &= +\frac{4(1+2\alpha)}{(1+\alpha)^2} - \frac{4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1 \\
&\quad + \frac{4(1+3\alpha)}{(1+\alpha)^3}\cos t_1 \cos t - \frac{4(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 3t_1 \cos t \\
&\quad - \frac{4(3+3\alpha-2\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sin t_1 \sin t + \frac{4(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\sin 3t_1 \sin t, \\
\frac{\alpha S_4}{\gamma'^2\sigma^2} &= \frac{2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2} + \frac{2(1-\alpha^3)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1 \\
&\quad + \frac{2(-1+\alpha+\alpha^2+3\alpha^3)}{(1+\alpha)^3}\sin t_1 \sin t - \frac{2(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha)^4}\sin 3t_1 \sin t \\
&\quad + \frac{2(3+\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^3}\cos t_1 \cos t + \frac{2(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha)^4}\cos 3t_1 \cos t.
\end{aligned}\right.$$

En portant les valeurs précédentes dans $\int_0^{2\pi} W_1 B_1\, dt$ et en se rappelant que l'on a

$$W_1 = \underset{(2)}{\mathcal{A}_0} + \underset{(2)}{\mathcal{A}_1}\cos t + \underset{(2)}{\mathcal{B}_1}\sin t + \underset{(3)}{\mathcal{A}_2}\cos 2t + \underset{(3)}{\mathcal{B}_2}\sin 2t + \underset{(3)}{\mathcal{A}_3}\cos 3t + \underset{(4)}{\mathcal{B}_3}\sin 3t + \underset{(4)}{\mathcal{A}_4}\cos 4t;$$

l'intégrale

$$(43)\qquad \int_0^{2\pi} W_1 B_1\, dt = \int_0^{2\pi} W_1 S_1\, dt + \int_0^{2\pi} W_1 S_2\, dt + \int_0^{2\pi} W_1 S_3\, dt + \int_0^{2\pi} W_1 S_4\, dt$$

se calcule sans difficulté. En réunissant les termes provenant de $\int_0^{2\pi} W_1 S_2\,dt$ et de $\int_0^{2\pi} W_1 S_3\,dt$, le résultat de l'intégration de $\int_0^{2\pi} W_1 B_1\,dt$ peut s'écrire comme il suit :

Termes provenant de $\int_0^{2\pi} W_1 S_1\,dt$.

$$
(44)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+\frac{8\gamma'\sigma}{(1+\alpha)^2}\pi\mathcal{A}_0\cos t_1,\\
&+\frac{4\gamma'\sigma}{(1+\alpha)^2}\pi\mathcal{A}_1+4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_1\cos 2t_1,\\
&-4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{B}_1\sin 2t_1,\\
&+4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_2\cos t_1+4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{A}_2\cos 3t_1,\\
&-4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{B}_2\sin t_1-4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{B}_2\sin 3t_1,\\
&+4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{A}_3\cos 2t_1+4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}\pi\mathcal{A}_3\cos 4t_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Termes provenant de $+\int_0^{2\pi} W_1 S_2\,dt+\int_0^{2\pi} W_1 S_3\,dt$.

$$
(44')\quad \left\{
\begin{aligned}
&+4\gamma''\frac{\sigma^2(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2}\pi\mathcal{A}_0 \qquad +8\gamma''\frac{\sigma^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_0\cos 2t_1,\\
&+8\gamma''\sigma^2\frac{1}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_1\cos t_1+4\gamma''\frac{\sigma^2(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{A}_1\cos 3t_1,\\
&-8\gamma''\sigma^2\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{B}_1\sin t_1-4\gamma''\frac{\sigma^2(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{B}_1\sin 3t_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Termes provenant de $\int_0^{2\pi} W_1 S_4\,dt$.

$$
(44'')\quad \left\{
\begin{aligned}
&+4\gamma'^2\frac{\sigma^2(1+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2}\pi\mathcal{A}_0+4\gamma'^2\frac{\sigma^2(1-\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_0\cos 2t_1,\\
&+2\gamma'^2\frac{\sigma^2(3+\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_1\cos t_1+2\gamma'^2\frac{\sigma^2(1+\alpha^2)^2}{\alpha(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{A}_1\cos 3t_1,\\
&+2\gamma'^2\frac{\sigma^2(-1+\alpha+\alpha^2+3\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{B}_1\sin t_1-2\gamma'^2\frac{\sigma^2(1+\alpha^2)^2}{\alpha(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{B}_1\sin 3t_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la deuxième partie dont se compose l'intégrale (39)

$$\int_0^{2\pi} W_1 \log(1+B_1)\,dt = \int_0^{2\pi} W_1 B_1\,dt - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\,dt.$$

Calcul de $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\,dt$.

On a

$$W_1 = \mathcal{A}_0 + \Sigma(\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt),$$

$$B_1^2 = \frac{1}{4\alpha^2}\,A(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV})^2,$$

en posant

$$A = (1 + 2\beta\cos\varphi + 2\beta^2\cos 2\varphi + 2\beta^3\cos 3\varphi + \ldots)^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi = t + t_1.$$

Si maintenant on remplace les cos par leurs valeurs en exponentielles imaginaires, $\cos\varphi = \dfrac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$ et si l'on pose en outre $e^{\varphi\sqrt{-1}} = z$, il vient

$$A = \left(1 + \beta z + \beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 + \ldots + \frac{\beta}{z} + \frac{\beta^2}{z^2} + \frac{\beta^3}{z^3} + \ldots\right)^2$$

ou

$$A = \left(\frac{1}{1-\beta z} + \frac{\dfrac{\beta}{z}}{1-\dfrac{\beta}{z}}\right)^2,$$

$$A = \frac{1}{(1-\beta z)^2} + \frac{\beta^2}{z^2}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)^{-2} + \frac{2\beta}{z}\,\frac{1}{(1-\beta z)\left(1-\dfrac{\beta}{z}\right)}.$$

Décomposons maintenant le troisième terme en fractions rationnelles

$$\frac{1}{(1-\beta z)\left(1-\dfrac{\beta}{z}\right)} = \frac{1}{z^2-1}\left(\frac{z^2}{1-\beta z} - \frac{1}{1-\dfrac{\beta}{z}}\right),$$

il vient donc

$$A = (1-\beta z)^{-2} + \frac{\beta^2}{z^2}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)^{-2} + \frac{2\beta}{z(z^2-1)}\left[z^2(1-\beta z)^{-1} - \left(1-\frac{\beta}{z}\right)^{-1}\right]$$

ou, en développant par la formule du binôme

$$\begin{aligned} A = {} & 1 + 2\beta z + 3\beta^2 z^2 + 4\beta^3 z^3 + \ldots + \frac{\beta^2}{z^2}\left(1 + 2\frac{\beta}{z} + 3\frac{\beta^2}{z^2} + 4\frac{\beta^3}{z^3} + \ldots\right) \\ & + \frac{2\beta}{z(z^2-1)}\left[z^2(1 + \beta z + \beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 + \ldots) - \left(1 + \frac{\beta}{z} + \frac{\beta^2}{z^2} + \frac{\beta^2}{z^3} + \ldots\right)\right]. \end{aligned}$$

Or cette troisième partie de A peut s'écrire, en multipliant dans la parenthèse par $\frac{1}{z^2-1}$, $+2\frac{\beta}{z}\left(\frac{z^2-1}{z^2-1}+\frac{\beta}{z}\frac{z^4-1}{z^2-1}+\frac{\beta^2}{z^2}\frac{z^6-1}{z^2-1}+\ldots\right)$.

On a donc $A=(a)+(b)+(c)$,

$$A=\left\{\begin{array}{l}
1+2\beta z+3\beta^2z^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=(a)\\[1ex]
+\dfrac{\beta^2}{z^2}\left(1+2\dfrac{\beta}{z}+3\dfrac{\beta^2}{z^2}+4\dfrac{\beta^3}{z^3}+\ldots\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=(b)\\[1ex]
+2\dfrac{\beta}{z}\left[1+\dfrac{\beta}{z}(z^2+1)+\dfrac{\beta^2}{z^2}(z^4+z^2+1)+\dfrac{\beta^3}{z^3}(z^6+z^4+z^2+1)\right.\\[1ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad+\dfrac{\beta^4}{z^4}(z^8+z^6+z^4+z^2+1)\\[1ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]=(c)
\end{array}\right.$$

ou, en groupant les termes,

$$\begin{array}{l}
1+2\beta z+3\beta^2z^2+4\beta^3z^3+5\beta^4z^4+6\beta^5z^5+\ldots\\
+2\beta^2+2\beta^3z+2\beta^4z^2+2\beta^5z^3+\ldots\\
+2\beta^4+2\beta^5z+\ldots\\
+2\beta^6+\ldots\\
+\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\beta^2}{z^2}+2\dfrac{\beta^3}{z^3}+3\dfrac{\beta^4}{z^4}+4\dfrac{\beta^5}{z^5}+5\dfrac{\beta^6}{z^6}+6\dfrac{\beta^7}{z^7}+\ldots\\[1ex]
\quad+2\dfrac{\beta}{z}+2\dfrac{\beta^2}{z^2}+2\dfrac{\beta^3}{z^3}+2\dfrac{\beta^4}{z^4}+2\dfrac{\beta^5}{z^5}+\ldots\\[1ex]
\quad+2\dfrac{\beta^3}{z}+2\dfrac{\beta^4}{z^2}+2\dfrac{\beta^5}{z^3}+\ldots\\[1ex]
\quad+2\dfrac{\beta^5}{z}+\ldots\\[1ex]
\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

En groupant les termes du développement A, on voit qu'il donne lieu à deux séries de développements comprenant chacun un nombre infini de progressions géométriques, la raison de celles de la première série étant z, la raison de celles de la deuxième étant z^{-1}. De plus, si l'on groupe tous les termes d'une même puissance de z, on obtient pour coefficient de ces termes des suites infinies qui se correspondent deux à deux dans les deux séries principales. Le développement de A devient donc

$$\begin{aligned}
A = 1 &+ 2\beta^2 + 2\beta^4 + 2\beta^6 + 2\beta^8 + \ldots \\
&+ (2\beta + 2\beta^3 + 2\beta^5 + \ldots)\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
&+ (3\beta^2 + 2\beta^4 + 2\beta^6 + \ldots)\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \\
&+ (4\beta^3 + 2\beta^5 + 2\beta^7 + \ldots)\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) \\
&+ (5\beta^4 + 2\beta^6 + 2\beta^8 + \ldots)\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) \\
&+ (6\beta^5 + 2\beta^7 + 2\beta^9 + \ldots)\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où, en sommant maintenant les expressions entre parenthèses, et en remplaçant les z par leurs valeurs, on obtient pour l'expression de A la valeur suivante

$$\begin{aligned}
A = 1 &+ \frac{2\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{2\beta}{1-\beta^2}\, 2\cos(t_1 + t) \\
&+ \left(\beta^2 + \frac{2\beta^2}{1-\beta^2}\right) 2\cos(2t_1 + 2t) \\
&+ \left(2\beta^3 + \frac{2\beta^3}{1-\beta^2}\right) 2\cos(3t_1 + 3t) \\
&+ \left(3\beta^4 + \frac{2\beta^4}{1-\beta^2}\right) 2\cos(4t_1 + 4t) \\
&+ \left(4\beta^5 + \frac{2\beta^5}{1-\beta^2}\right) 2\cos(5t_1 + 5t) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais on a

$$1 + \frac{2\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}, \qquad \frac{2\beta}{1-\beta^2} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}, \qquad \ldots.$$

Il vient donc finalement pour l'expression de A

$$\begin{aligned}
A = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} &+ \frac{(1-\alpha)(1+2\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)} \cos(t_1 + t) \\
&+ \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2} \cos(2t_1 + 2t) \\
&+ \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^3} \cos(3t_1 + 3t) \\
&+ \frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^4} \cos(4t_1 + 4t) \\
&+ \frac{(1-\alpha)^5(1+10\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^5} \cos(5t_1 + 5t) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La loi des coefficients est évidente.

La valeur de A étant connue, nous pouvons procéder à la formation de $B_1^2 = \frac{1}{4\alpha^2} A \left(\underset{(\sigma)}{\mathrm{I}} + \underset{(\sigma^2)}{\mathrm{II}} + \underset{(\sigma^2)}{\mathrm{III}} + \underset{(\sigma^2)}{\mathrm{IV}} \right)^2$.

Les termes $\frac{1}{4\alpha^2} A\,\mathrm{II}^2$, $\frac{1}{4\alpha^2} A\,\mathrm{III}^2$, $\frac{1}{4\alpha^2} A\,\mathrm{IV}^2$ et les doubles produits tels que $\frac{1}{2\alpha^2} A\,\mathrm{I}.\mathrm{II}$, conduiraient dans $W_1 B_1^2$ à des termes en σ^5; on devra les négliger dans l'approximation adoptée; reste donc à développer

$$\frac{1}{4\alpha^2} A\,\mathrm{I}^2.$$

Or

$$\mathrm{I} = 2\alpha\gamma'\sigma[\cos t_1 + \cos(2t_1 + t) + \cos t + \cos(t_1 + 2t)];$$

B_1^2 contiendra donc σ^2 en facteur, et comme, du reste, on a

$$W_1 = \underset{(\sigma^2)}{\mathcal{A}_0} + \underset{(\sigma^2)}{\mathcal{A}_1} \cos t + \underset{(\sigma^2)}{\mathcal{B}_1} \sin t + \underset{(\sigma^3)}{\mathcal{A}_2} \cos 2t + \underset{(\sigma^3)}{\mathcal{B}_2} \sin 2t + \underset{(\sigma^3)}{\mathcal{A}_3} \cos 3t + \underset{(\sigma^4)}{\mathcal{B}_3} \sin 3t + \underset{(\sigma^4)}{\mathcal{A}_4} \cos 4t,$$

on devra, au degré d'approximation adopté, négliger dans le calcul de

$$\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\, dt$$

les termes en $\cos 2t$, $\sin 2t$, ...

On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}^2}{4\alpha^2\gamma'^2\sigma^2} = {} & 2 + \tfrac{3}{2}\cos 2t_1 + 2\cos(t_1 - t) + 3\cos(t_1 + t) + \cos(3t_1 + t) \\ & + \tfrac{3}{2}\cos 2t + 2\cos(2t_1 + 2t) + \tfrac{1}{2}\cos(4t_1 + 2t) \\ & + \cos(t_1 + 3t) + \cos(3t_1 + 3t) + \tfrac{1}{2}\cos(2t_1 + 4t).\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\frac{B_1^2}{\gamma'^2\sigma^2} = {} & \left[\frac{1+\alpha^2}{2\alpha} + \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\cos(t_1 + t) + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2}\cos(2t_1 + 2t)\right. \\ & + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^3}\cos(3t_1 + 3t) \\ & + \frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^4}\cos(4t_1 + 4t) \\ & \left. + \frac{(1-\alpha)^5(1+10\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^5}\cos(5t_1 + 5t) + \ldots\right] \\ & \times [2 + \tfrac{3}{2}\cos 2t_1 + 2\cos(t_1 - t) + 3\cos(t_1 + t) + \cos(3t_1 + t) \\ & + \tfrac{3}{2}\cos 2t + 2\cos(2t_1 + 2t) + \tfrac{1}{2}\cos(4t_1 + 2t) \\ & + \cos(t_1 + 3t) + \cos(3t_1 + 3t) + \tfrac{1}{2}\cos(2t_1 + 4t)].\end{aligned}$$

Effectuons maintenant le produit $\frac{B_1^2}{\gamma'^2\sigma^2}$ en négligeant partout les termes en cos et en sin dont l'argument est égal ou supérieur à $2t$.

$$
\begin{aligned}
\frac{B_1^2}{\gamma'^2\sigma^2} = {} & \frac{1+\alpha^2}{\alpha} + \frac{3(1+\alpha^2)}{4\alpha}\cos 2t_1 \\
& + \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\cos(t_1-t) + \frac{3(1+\alpha^2)}{2\alpha}\cos(t_1+t) + \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\cos(3t_1+t) \\
& + \frac{2(1-\alpha^2)}{\alpha}\cos(t_1+t) + \frac{3(1-\alpha^2)}{4\alpha}\cos(3t_1+t) + \frac{3(1-\alpha^2)}{4\alpha}\cos(t_1-t) \\
& + \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\cos 2t_1 + \frac{3(1-\alpha^2)}{2\alpha} + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\cos 2t_1 + \frac{3(1-\alpha^2)}{4\alpha}\cos(t_1-t) \\
& + \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\cos(t_1+t) + \frac{1-\alpha^2}{4\alpha}\cos(3t_1+t) \\
& + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2}\cos(3t_1+t) + \frac{3(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^2}\cos(t_1+t) \\
& + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^2}\cos(t_1-t) + \frac{3(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^2}\cos 2t_1 \\
& + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2} + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^2}\cos 2t_1 \\
& + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^2}\cos(t_1-t) + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^2}\cos(t_1+t) \\
& + \frac{3(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^3}\cos(3t_1+t) + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^3}\cos(t_1+t) \\
& + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^3}\cos(t_1-t) + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^3}\cos 2t_1 \\
& + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^3} + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^3}\cos(t_1-t) \\
& + \frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^4}\cos(3t_1+t) + \frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^4}\cos(t_1+t) \\
& + \frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^4}\cos 2t_1 + \frac{(1-\alpha)^5(1+10\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^5}\cos(3t_1+t).
\end{aligned}
$$

En groupant les coefficients des termes des mêmes arguments, il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{B_1^2}{\gamma'^2\sigma^2} = {} & \frac{1+\alpha^2}{\alpha} + \frac{3(1-\alpha^2)}{2\alpha} + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2} + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^3} \\
& + \left[\frac{3(1+\alpha^2)}{4\alpha} + \frac{3(1-\alpha^2)}{2\alpha} + \frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2}\right. \\
& \left. + \frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^3} + \frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^4}\right]\cos 2t_1
\end{aligned}
$$

$$+\left[\frac{1+\alpha^2}{\alpha}+\frac{3(1-\alpha^2)}{2\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^3}\right]\cos(t_1-t)$$
$$+\left[\frac{3(1+\alpha^2)}{2\alpha}+\frac{3(1-\alpha^2)}{\alpha}+\frac{4(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^3}+\frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^4}\right]\cos(t_1+t)$$
$$+\left[\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2(1+4\alpha+\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)^2}\right.$$
$$+\frac{3(1-\alpha)^3(1+6\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^3}+\frac{(1-\alpha)^4(1+8\alpha+\alpha^2)}{2\alpha(1+\alpha)^4}$$
$$\left.+\frac{(1-\alpha)^5(1+10\alpha+\alpha^2)}{4\alpha(1+\alpha)^5}\right]\cos(3t_1+t).$$

Réduisant maintenant les expressions entre parenthèses, on obtient

$$\frac{B_1^2}{\gamma'^2\sigma^2}=\frac{4(1+3\alpha-\alpha^2+\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}+\frac{4(1+4\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)}{\alpha(1+\alpha)^4}\cos 2t_1$$
$$+\frac{4(1+3\alpha-\alpha^2+\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}\cos t_1\cos t+\frac{4(1+3\alpha-\alpha^2+\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}\sin t_1\sin t$$
$$+\frac{8(1+4\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)}{\alpha(1+\alpha)^4}\cos t_1\cos t-\frac{8(1+4\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)}{\alpha(1+\alpha)^4}\sin t_1\sin t$$
$$+\frac{4(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)}{\alpha(1+\alpha)^5}\cos 3t_1\cos t$$
$$-\frac{4(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)}{\alpha(1+\alpha)^5}\sin 3t_1\sin t,$$

ou encore

$$\frac{B_1^2}{\gamma'^2\sigma^2}=\frac{4(1+3\alpha-\alpha^2+\alpha^3)}{\alpha(1+\alpha)^3}+\frac{4(1+4\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)}{\alpha(1+\alpha)^4}\cos 2t_1 \tag{45}$$
$$+\frac{4(3+12\alpha+2\alpha^2+4\alpha^3-\alpha^4)}{\alpha(1+\alpha)^4}\cos t_1\cos t$$
$$-\frac{4(1+4\alpha-2\alpha^2+4\alpha^3-3\alpha^4)}{\alpha(1+\alpha)^4}\sin t_1\sin t$$
$$+\frac{4(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)}{\alpha(1+\alpha)^5}\cos 3t_1\cos t$$
$$-\frac{4(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)}{\alpha(1+\alpha)^5}\sin 3t_1\sin t.$$

L'intégrale

$$-\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\, dt$$

se calcule maintenant sans difficulté :

$$W_1 = \mathcal{A}_0 + \Sigma(\mathcal{A}_n \cos nt + \mathcal{B}_n \sin nt).$$

Termes provenant de $-\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\, dt$.

$$-\frac{4\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^3}(1+3\alpha-\alpha^2+\alpha^3)\mathcal{A}_0 - \frac{4\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^4}(1+4\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)\cos 2t_1\, \mathcal{A}_0,$$

$$-\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^4}(3+12\alpha+2\alpha^2+4\alpha^3-\alpha^4)\mathcal{A}_1 \cos t_1,$$

$$-\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^5}(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)\mathcal{A}_1 \cos 3t_1,$$

$$+\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^4}(1+4\alpha-2\alpha^2+4\alpha^3-3\alpha^4)\mathcal{B}_1 \sin t_1,$$

$$+\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^5}(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)\mathcal{B}_1 \sin 3t_1.$$

Les termes précédents sont de la même forme que ceux qui proviennent de l'intégration (44″) de $\int_0^{2\pi} W_1 S_4 : dt$ on peut donc les réduire.

Réduction des termes provenant de $\int_0^{2\pi} W_1 S_4\, dt - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\, dt$.

$$+\frac{4\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^3}[(1+\alpha^2)(1+\alpha)-(1+3\alpha-\alpha^2+\alpha^3)]\mathcal{A}_0,$$

$$+\frac{4\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^4}[(1-\alpha^3)(1+\alpha)-(1+4\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)]\mathcal{A}_0 \cos 2t_1,$$

$$+\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^4}[(3+\alpha+\alpha^2-\alpha^3)(1+\alpha)-(3+12\alpha+2\alpha^2+4\alpha^3-\alpha^4)]\mathcal{A}_1 \cos t_1,$$

$$+\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^5}[(1+\alpha^2)^2(1+\alpha)-(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)]\mathcal{A}_1 \cos 3t_1,$$

$$+\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^4}[(1+\alpha)(-1+\alpha+\alpha^2+3\alpha^3)+(1+4\alpha-2\alpha^2+4\alpha^3-3\alpha^4)]\mathcal{B}_1 \sin t_1,$$

$$+\frac{2\gamma'^2\sigma^2\pi}{\alpha(1+\alpha)^5}[-(1+\alpha^2)^2(1+\alpha)+(1+5\alpha-2\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4+\alpha^5)]\mathcal{B}_1 \sin 3t_1.$$

En simplifiant les expressions entre parenthèses, il vient :

Termes provenant de $\int_0^{2\pi} W_1 S_4\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\,dt.$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &-\ 8\gamma'^2\sigma^2\frac{\pi(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}\mathcal{A}_0,\\ &-12\gamma'^2\sigma^2\frac{\pi(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\mathcal{A}_0\cos 2t_1,\\ &-\ 8\gamma'^2\sigma^2\frac{\pi(2+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\mathcal{A}_1\cos t_1,\\ &-\ 8\gamma'^2\sigma^2\frac{\pi(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^5}\mathcal{A}_1\cos 3t_1,\\ &+\ 8\gamma'^2\sigma^2\frac{\pi(1+2\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\mathcal{B}_1\sin t_1,\\ &+\ 8\gamma'^2\sigma^2\pi\frac{(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^5}\mathcal{B}_1\sin 3t_1. \end{aligned}\right.$$

Résumant les calculs effectués plus haut, on voit que l'expression V du potentiel de l'anneau sur un point quelconque de sa surface se présente sous la forme suivante

$$(15)\qquad \frac{V}{\rho l^2} = \int_0^{2\pi} W_2\,dt + \int_0^{2\pi} W_1 \log 16(\overline{A+B})\,dt - \int_0^{2\pi} W_1 \log B\,dt,$$

où l'on a, d'après ce qui précède,

$$(31)\quad \begin{aligned} -\int_0^{2\pi} W_1 \log B\,dt = &-\log\sigma^2\int_0^{2\pi} W_1\,dt - \int_0^{2\pi} W_1 \log[1-\cos(t_1-t)]\,dt\\ &-\int_0^{2\pi} W_1 \log[1+\alpha^2-(1-\alpha^2)\cos(t_1+t)]\,dt\\ &-\int_0^{2\pi} W_1 \log(1+B_1)\,dt, \end{aligned}$$

$$(39)\qquad -\int_0^{2\pi} W_1 \log(1+B_1)\,dt = -\int_0^{2\pi} W_1 B_1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} W_1 B_1^2\,dt,$$

$$(43)\quad -\int_0^{2\pi} W_1 B_1\,dt = -\int_0^{2\pi} W_1 S_1\,dt - \int_0^{2\pi} W_1 S_2\,dt - \int_0^{2\pi} W_1 S_3\,dt - \int_0^{2\pi} W_1 S_4\,dt.$$

En remplaçant les intégrales respectivement par leurs valeurs, il vient

$$\frac{V}{\rho l^2} = (22) + (27) - (32) - (38) - (37) - (44) - (44') - (46)$$

$$(22) = +\int_0^{2\pi} W_2\,dt = +\pi\sigma^2\left[\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha\sigma\cos t_1 + \tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^2 - \tfrac{1}{64}\alpha\sigma^2\,(11 + 10\cos 2t_1) - \tfrac{1}{64}\alpha^3\sigma^2(15 - 10\cos 2t_1)\right],$$

$$\begin{aligned}(27) &= +\int_0^{2\pi} W_1 \log(16\overline{A+B})\,dt\\ &= +2\pi\mathcal{A}_0\log 64 - \pi\sigma(2\mathcal{A}_0\cos t_1 + \mathcal{A}_1)\\ &\quad - \frac{\pi}{4}\sigma^2[2(1-\alpha^2)\mathcal{A}_0 + (1+\alpha^2)\mathcal{A}_0\cos 2t_1 + 2\mathcal{A}_1\cos t_1 + 2\alpha^2\mathcal{B}_1\sin t_1],\end{aligned}$$

$$-(32) = -\log\sigma^2\int_0^{2\pi} W_1\,dt = -2\pi\mathcal{A}_0\log\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}-(38) &= -\int_0^{2\pi} W_1\log[1-\cos(t_1 - t)]\,dt\\ &= +2\pi\mathcal{A}_0\log 2 + 2\pi[\mathcal{A}_1\cos t_1 + \mathcal{B}_1\sin t_1 + \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_2\cos 2t_1 + \mathcal{B}_2\sin 2t_1)\\ &\quad + \tfrac{1}{3}(\mathcal{A}_3\cos 3t_1 + \mathcal{B}_3\sin 3t_1) + \tfrac{1}{4}\mathcal{A}_4\cos 4t_1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(37) &= -\int_0^{2\pi} W_1\log[1+\alpha^2 - (1-\alpha^2)\cos(t_1+t)\,dt\\ &= -2\pi\mathcal{A}_0\log\frac{(1+\alpha)^2}{2}\\ &\quad + 2\pi\Bigg[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)(\mathcal{A}_1\cos t_1 - \mathcal{B}_1\sin t_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2(\mathcal{A}_2\cos 2t_1 - \mathcal{B}_2\sin 2t_1)\\ &\qquad + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3(\mathcal{A}_3\cos 3t_1 - \mathcal{B}_3\sin 3t_1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^4\mathcal{A}_4\cos 4t_1\Bigg],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(44) &= -\int_0^{2\pi} W_1 S_1\,dt\\ &= -\frac{8\gamma'\sigma}{(1+\alpha)^2}\pi\mathcal{A}_0\cos t_1\\ &\quad - \frac{4\gamma'\sigma}{(1+\alpha)^2}\pi\mathcal{A}_1 - 4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_1\cos 2t_1 + 4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{B}_1\sin 2t_1\\ &\quad - 4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{A}_2\cos t_1 - 4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{A}_2\cos 3t_1\\ &\quad + 4\gamma'\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\pi\mathcal{B}_2\sin t_1 + 4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{B}_2\sin 3t_1\\ &\quad - 4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\pi\mathcal{A}_3\cos 2t_1 - 4\gamma'\frac{\sigma(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}\pi\mathcal{A}_3\cos 4t_1,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-(44') &= -\int_0^{2\pi} (\mathbf{W}_1 \mathbf{S}_2 + \mathbf{W}_1 \mathbf{S}_3)\, dt \\
&= -4\gamma'' \frac{\sigma^2(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2} \pi \mathcal{A}_0 - 8\gamma'' \frac{\sigma^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3} \pi \mathcal{A}_0 \cos 2t_1 \\
&\quad - 8\gamma'' \frac{\sigma^2}{(1+\alpha)^3} \pi \mathcal{A}_1 \cos t_1 - 4\gamma'' \frac{\sigma^2(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4} \pi \mathcal{A}_1 \cos 3t_1 \\
&\quad + 8\gamma'' \frac{\sigma^2\alpha^2}{(1+\alpha)^3} \pi \mathcal{B}_1 \sin t_1 + 4\gamma'' \frac{\sigma^2(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4} \pi \mathcal{B}_1 \sin 3t_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(46) &= -\int_0^{2\pi} \mathbf{W}_1 \mathbf{S}_4\, dt + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathbf{W}_1 \mathbf{B}_1^2\, dt \\
&= +8\gamma'^2\sigma^2 \frac{\pi(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3} \mathcal{A}_0 + 12\gamma'^2\sigma^2 \frac{\pi(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4} \mathcal{A}_0 \cos 2t_1 \\
&\quad + 8\gamma'^2\sigma^2 \frac{\pi(2+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4} \mathcal{A}_1 \cos t_1 + 8\gamma'^2\sigma^2 \frac{\pi(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^5} \mathcal{A}_1 \cos 3t_1 \\
&\quad - 8\gamma'^2\sigma^2 \frac{\pi(1+2\alpha^2)}{(1+\alpha)^4} \mathcal{B}_1 \sin t_1 - 8\gamma'^2\sigma^2 \frac{\pi(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^5} \mathcal{B}_1 \sin 3t_1.
\end{aligned}
$$

Si nous remplaçons maintenant les quantités $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ par leurs valeurs, $\dfrac{\mathbf{V}}{\rho l^2}$ devient, au degré d'approximation adopté,

$$
\begin{aligned}
(47)\qquad \frac{\mathbf{V}}{\pi\rho l^2} &= +\sigma^2\Big[\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha\sigma\cos t_1 + \tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^2 - \tfrac{1}{64}\alpha\sigma^2\,(11+10\cos 2t_1) \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{64}\alpha^3\sigma^2(15-10\cos 2t_1)\Big] \\
&\quad + \alpha\sigma^2\log 64 - \tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4\log 64 + \tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4\log 64 - \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4\log 64 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^3\cos t_1\log 64 + \tfrac{5}{32}\alpha\sigma^4\cos 2t_1\log 64 + \tfrac{1}{32}\alpha^3\sigma^4\cos 2t_1\log 64 \\
&\quad - \alpha\sigma^3\cos t_1 - \tfrac{1}{4}\alpha\sigma^4(1+\cos 2t_1) \\
&\quad + \tfrac{7}{32}\alpha\sigma^4 - \tfrac{3}{4}\gamma'\sigma^4 - \tfrac{3}{32}\alpha^3\sigma^4 + \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^3\cos t_1 \\
&\quad + \tfrac{1}{16}\alpha(1+\alpha^2)\sigma^4\cos 2t_1 \\
&\quad - \tfrac{1}{4}\alpha(1-\alpha^2)\sigma^4 - \tfrac{1}{8}\alpha(1+\alpha^2)\sigma^4\cos 2t_1 \\
&\quad + \tfrac{1}{8}\alpha\sigma^4(1+\cos 2t_1) + \tfrac{1}{8}\alpha^3\sigma^4(1-\cos 2t_1) \\
&\quad - (\alpha\sigma^2 - \tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4 - \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4)\log\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^3\cos t_1\log\sigma^2 \\
&\qquad\qquad - \frac{\alpha}{32}(5+\alpha^2)\sigma^4\cos 2t_1\log\sigma^2 \\
&\quad + (\alpha\sigma^2 - \tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4 + \tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4 - \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4)\log 2 + \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^3\cos t_1\log 2 \\
&\qquad\qquad + \frac{\alpha}{32}(5+\alpha^2)\sigma^4\cos 2t_1\log 2
\end{aligned}
$$

$$+\left(-\tfrac{7}{16}\alpha\sigma^3+\tfrac{3}{2}\gamma'\sigma^3+\tfrac{3}{16}\alpha^3\sigma^3\right)\cos t_1$$

$$+\left(-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2-\tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4+\tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{3}{8}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4\right)(1+\cos 2t_1)$$

$$-\tfrac{1}{16}\alpha\sigma^3(1+\alpha^2)(\cos 3t_1+\cos t_1)$$

$$-\left(\tfrac{3}{128}\alpha\sigma^4+\tfrac{3}{128}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4\right)(\cos 4t_1+\cos 2t_1)$$

$$+\left(-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2-\tfrac{1}{64}\alpha\sigma^4+\tfrac{5}{64}\alpha^3\sigma^4-\tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4\right)(1-\cos 2t_1)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\gamma'+\tfrac{1}{4}\alpha\right)\sigma^3(\cos 3t_1-\cos t_1)$$

$$+\left(\tfrac{5}{128}\alpha\sigma^4+\tfrac{1}{128}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{2}\gamma''\sigma^4\right)(\cos 4t_1-\cos 2t_1)$$

$$+\left(-\tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4-\tfrac{1}{64}\alpha\sigma^4+\gamma''\sigma^4+\tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{4}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)\cos 2t_1$$

$$-\tfrac{1}{2}\gamma'\sigma^3(\cos 3t_1+\cos t_1)$$

$$-\left(\tfrac{1}{16}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{16}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)(1+\cos 4t_1)$$

$$-\tfrac{1}{16}\alpha(1-\alpha^2)\sigma^3(\cos 3t_1-\cos t_1)$$

$$+\tfrac{1}{16}\left(\gamma'-\alpha^2\gamma'-\tfrac{3}{8}\alpha^3+\tfrac{1}{8}\alpha\right)\sigma^4(1-\cos 4t_1)$$

$$+\left(\tfrac{1}{6}\gamma'\sigma^3+\tfrac{1}{48}\alpha\sigma^3-\tfrac{1}{48}\alpha^3\sigma^3\right)\cos 3t_1$$

$$+\left(\tfrac{1}{24}\gamma'\sigma^4-\tfrac{1}{2}\gamma''\sigma^4+\frac{1}{3.128}\alpha\sigma^4-\tfrac{1}{128}\alpha^3\sigma^4\right)(\cos 4t_1+\cos 2t_1)$$

$$+\left(\tfrac{1}{128}\alpha\sigma^4-\frac{5}{3.128}\alpha^3\sigma^4-\tfrac{1}{8}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)(\cos 2t_1-\cos 4t_1)$$

$$+\left(\frac{1}{2.128}\alpha\sigma^4-\frac{1}{2.128}\alpha^3\sigma^4-\tfrac{1}{16}\alpha^2\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{4}\gamma''\sigma^4\right)\cos 4t_1$$

$$-\left(\alpha\sigma^2-\tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4+\tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4-\tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4\right)\log\frac{(1+\alpha)^2}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^3\cos t_1\log\frac{(1+\alpha)^2}{2}-\tfrac{1}{32}\alpha(5+\alpha^2)\sigma^4\cos 2t_1\log\frac{(1+\alpha)^2}{2}$$

$$+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(-\tfrac{7}{16}\alpha\sigma^3+\tfrac{3}{2}\gamma'\sigma^3+\tfrac{3}{16}\alpha^3\sigma^3\right)\cos t_1$$

$$+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2-\tfrac{7}{64}\alpha\sigma^4+\tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{3}{8}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4\right)(1+\cos 2t_1)$$

$$-\tfrac{1}{16}\alpha\frac{1-\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha^2)\sigma^3(\cos 3t_1+\cos t_1)$$

$$-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\tfrac{3}{128}\alpha\sigma^4+\tfrac{3}{128}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{8}\alpha^2\gamma'\sigma^4\right)(\cos 4t_1+\cos 2t_1)$$

$$+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2+\tfrac{1}{64}\alpha\sigma^4-\tfrac{5}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4-\tfrac{1}{8}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)(1-\cos 2t_1)$$

$$+\frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}\left(\gamma'+\tfrac{1}{4}\alpha\right)\sigma^3(\cos t_1-\cos 3t_1)$$

$$+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\tfrac{5}{128}\alpha\sigma^4+\tfrac{1}{128}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{8}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{2}\gamma''\sigma^4\right)(\cos 2t_1-\cos 4t_1)$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(-\tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^4-\tfrac{1}{64}\alpha\sigma^4+\gamma''\sigma^4+\tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{4}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)\cos 2t_1$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\gamma'\sigma^3(\cos 3t_1+\cos t_1)$$

$$-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\tfrac{1}{16}\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{64}\alpha^3\sigma^4+\tfrac{1}{16}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)(1+\cos 4t_1)$$

$$+\tfrac{1}{16}\alpha(1-\alpha^2)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\sigma^3(\cos 3t_1-\cos t_1)$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\gamma'-\alpha^2\gamma'-\tfrac{3}{8}\alpha^3+\tfrac{1}{8}\alpha\right)\sigma^4(1-\cos 4t_1)$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3\left(\tfrac{1}{6}\gamma'\sigma^3+\tfrac{1}{48}\alpha\sigma^3-\tfrac{1}{48}\alpha^3\sigma^3\right)\cos 3t_1$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3\left(\tfrac{1}{24}\gamma'\sigma^4-\tfrac{1}{2}\gamma''\sigma^4+\tfrac{1}{3.128}\alpha\sigma^4-\tfrac{1}{128}\alpha^3\sigma^4\right)(\cos 4t_1+\cos 2t_1)$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^3\left(\tfrac{1}{128}\alpha\sigma^4-\tfrac{5}{3.128}\alpha^3\sigma^4-\tfrac{1}{8}\gamma'\alpha^2\sigma^4\right)(\cos 4t_1-\cos 2t_1)$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^4\left(\tfrac{1}{2.128}\alpha\sigma^4-\tfrac{1}{2.128}\alpha^3\sigma^4-\tfrac{1}{16}\alpha^2\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{4}\gamma''\sigma^4\right)\cos 4t_1$$

$$-\frac{4\alpha\gamma'\sigma^3}{(1+\alpha)^2}\cos t_1-\frac{\alpha\gamma'\sigma^4}{(1+\alpha)^2}(1+\cos 2t_1)$$

$$+\tfrac{7}{8}\alpha\frac{\gamma'\sigma^4}{(1+\alpha)^2}-\frac{3\gamma'^2\sigma^4}{(1+\alpha)^2}-\tfrac{3}{8}\alpha^3\frac{\gamma'\sigma^4}{(1+\alpha)^2}$$

$$+2\alpha\frac{\gamma'\sigma^3}{(1+\alpha)^2}\cos t_1+\tfrac{1}{4}\alpha\frac{\gamma'(1+\alpha^2)\sigma^4}{(1+\alpha)^2}\cos 2t_1$$

$$+\left[\tfrac{7}{8}\alpha\frac{\gamma'(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^4-3\frac{\gamma'^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^4-\tfrac{3}{8}\gamma'\frac{\alpha^3(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^4\right]\cos 2t_1$$

$$+\alpha\frac{\gamma'(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^3(\cos 3t_1+\cos t_1)+\tfrac{1}{8}\alpha\frac{\gamma'(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha)^3}\sigma^4(1+\cos 4t_1)$$

$$+\alpha\frac{\gamma'(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^3(\cos 3t_1-\cos t_1)-\frac{\gamma'(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\left(\gamma'+\tfrac{1}{4}\alpha\right)\sigma^4(1-\cos 4t_1)$$

$$+2\frac{\gamma'^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^4(1+\cos 2t_1)$$

$$+2\gamma'^2\frac{\sigma^4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}(\cos 2t_1+\cos 4t_1)$$

$$+\tfrac{1}{4}\alpha\frac{\gamma'(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2}\sigma^4(1-\cos 2t_1)$$

$$+\tfrac{1}{4}\alpha\frac{\gamma'(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\sigma^4(\cos 2t_1-\cos 4t_1)$$

$$+\left[-\gamma'^2\frac{\sigma^4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}-\tfrac{1}{8}\alpha\gamma'\frac{\sigma^4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{8}\alpha^3\gamma'\frac{\sigma^4(1-\alpha)(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\right]\cos 2t_1$$

$$+\left[-\gamma'^2\frac{\sigma^4(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}-\tfrac{1}{8}\alpha\gamma'\frac{\sigma^4(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{8}\gamma'\alpha^3\frac{\sigma^4(1-\alpha)^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^5}\right]\cos 4t_1$$

$$-2\alpha\frac{\gamma''(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2}\sigma^4-4\alpha\gamma''\frac{\sigma^4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^3}\cos 2t_1+2\frac{\alpha\gamma''\sigma^4}{(1+\alpha)^3}(1+\cos 2t_1)$$

$$+\alpha\gamma''\frac{\sigma^4(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}(\cos 4t_1+\cos 2t_1)-2\alpha^3\gamma''\frac{\sigma^4}{(1+\alpha)^3}(1-\cos 2t_1)$$

$$+\alpha\gamma''\frac{\sigma^4(1+3\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}(\cos 4t_1-\cos 2t_1)$$

$$+4\alpha\gamma'^2\frac{\sigma^4(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}+6\alpha\gamma'^2\frac{\sigma^4(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\cos 2t_1$$

$$-2\alpha\gamma'^2\frac{\sigma^4(2+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}(1+\cos 2t_1)$$

$$-2\alpha\gamma'^2\frac{\sigma^4(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^5}(\cos 4t_1+\cos 2t_1)$$

$$+2\alpha\gamma'^2\frac{\sigma^4(1+2\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}(1-\cos 2t_1)$$

$$+2\alpha\gamma'^2\frac{\sigma^4(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)}{(1+\alpha)^5}(\cos 2t_1-\cos 4t_1).$$

En groupant les coefficients des cosinus des mêmes arguments, l'expression générale de $\frac{V}{\pi\rho l^2}$ se présente sous la forme suivante

$$(48)\qquad \frac{V}{\pi\rho l^2\sigma^2}=v_0+v_1\cos t_1+v_2\cos 2t_1+v_3\cos 3t_1+v_4\cos 4t_1,$$

où l'on a

$$
(49)\quad \left\{
\begin{aligned}
v_0 &= \left(\alpha - \tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^2 + \tfrac{7}{64}\alpha\sigma^2 - \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^2\right)\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2} \\
&\quad - (35 + 56\alpha + 16\alpha^2 - 16\alpha^3 - 11\alpha^4)\frac{\alpha\sigma^2}{64(1+\alpha)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(1+2\alpha)}{2(1+\alpha)^2}\sigma^2\gamma' - \frac{2+\alpha+\alpha^2}{(1+\alpha)^3}\sigma^2\gamma'^2, \\
v_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha\sigma\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2} - \frac{(7+3\alpha)}{4(1+\alpha)}\alpha\sigma + 2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\sigma\gamma', \\
v_2 &= \tfrac{1}{32}(5+\alpha^2)\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2} - \alpha\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\
&\quad - \frac{\alpha}{96(1+\alpha)^2}(61 + 92\alpha + 34\alpha^2 + 20\alpha^3 + 13\alpha^4)\sigma^2 \\
&\quad + \frac{1+3\alpha}{3(1+\alpha)^3}\gamma'\sigma^2 - \frac{2\alpha(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\gamma'^2\sigma^2 + \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\gamma''\sigma^2, \\
v_3 &= -\frac{\alpha(1-\alpha)(1+3\alpha)}{12(1+\alpha)^2}\sigma - \frac{2(1-3\alpha-3\alpha^2-3\alpha^3)}{3(1+\alpha)^3}\gamma'\sigma, \\
v_4 &= -\frac{\alpha(1-\alpha)}{3.128(1+\alpha)^3}(13 + 52\alpha + 34\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4)\sigma^2 \\
&\quad - \frac{1}{24(1+\alpha)^4}(1 + 4\alpha - 18\alpha^2 - 12\alpha^3 - 15\alpha^4)\gamma'\sigma^2 \\
&\quad + \frac{2(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha)^5}\gamma'^2\sigma^2 - \frac{1}{2(1+\alpha)^4}(1 - 4\alpha - 6\alpha^2 - 12\alpha^3 - 3\alpha^4)\gamma''\sigma^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Comparant l'expression ci-dessus de $\frac{V}{\pi\rho l^2\sigma^2}$ à celle obtenue par M. Tisserand (*Traité de Mécanique céleste*, p. 150)

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi\rho l^2\sigma^2} &= v_0 + v_1\cos t_1 + v_2\cos 2t_1 + v_3\cos 3t_1, \\
v_0 &= \alpha\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2}, \\
v_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha\sigma\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2} - \alpha\sigma\frac{7+3\alpha}{4(1+\alpha)} + 2\gamma\sigma\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \\
v_2 &= -\alpha\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \\
v_3 &= -\frac{\alpha(1-\alpha)(1+3\alpha)}{12(1+\alpha)^2}\sigma + 2\gamma\sigma\frac{-1+3\alpha+3\alpha^2+3\alpha^3}{3(1+\alpha)^3},
\end{aligned}
$$

on voit que la seconde expression de V ne diffère de la première que par des termes en σ^2 provenant de $\alpha \sin t$, $\gamma' \sigma \sin 2t$, $\gamma'' \sigma^2 \sin 2t$. On devra donc s'attendre à avoir de légères modifications dans l'expression des valeurs des inconnues α, γ', γ'' données à la page 154 du *Traité de Mécanique céleste* et correspondant à l'approximation II.

Développons, de même, le deuxième terme de l'équation différentielle de la figure d'équilibre de l'anneau :

$$(1) \qquad f\mathrm{V} + \frac{f\mathrm{M}}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} + \tfrac{1}{2}\omega^2 \eta_1^2 = c.$$

On a, en vertu de (4') et de (16),

$$\xi_1 = \sigma l(\alpha \sin t_1 + \sigma\gamma' \sin 2t_1 + \sigma^2\gamma'' \sin 3t_1 + \ldots),$$
$$\eta_1 = l(1 - \sigma \cos t_1);$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = \frac{1}{l}\left[(1 - \sigma\cos t_1)^2 + \sigma^2(\alpha \sin t_1 + \sigma\gamma' \sin 2t_1 + \sigma^2\gamma'' \sin 3t_1 + \ldots)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ou, en négligeant dans la parenthèse les termes en σ^5,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = \frac{1}{l}\Big(1 - 2\sigma\cos t_1 + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2} + \frac{\gamma'^2\sigma^4}{2} \\ + \frac{\sigma^2}{2}\cos 2t_1 - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\cos 2t_1 - \frac{\gamma'^2\sigma^4}{2}\cos 4t_1 \\ + \alpha\gamma\sigma^3\cos t_1 - \alpha\gamma\sigma^3\cos 3t_1 + \alpha\gamma''\sigma^4\cos 2t_1 - \alpha\gamma''\sigma^4\cos 4t_1\Big)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

équation qui peut s'écrire

$$(50) \qquad \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = \frac{1}{l}(1 + a\sigma)^{-\frac{1}{2}},$$

en posant

$$\begin{aligned}(51) \qquad a = -2\cos t_1 + \frac{\sigma}{2}[1 + \alpha^2 + (1 - \alpha^2)\cos 2t_1] + \alpha\gamma\sigma^2(\cos t_1 - \cos 3t_1) \\ + \sigma^3\left(\frac{\gamma'^2}{2} - \frac{\gamma'^2}{2}\cos 4t_1 + \alpha\gamma''\cos 2t_1 - \alpha\gamma''\cos 4t_1\right).\end{aligned}$$

Or en développant, par la formule de Taylor,

$$(1 + a\sigma)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{a}{2}\sigma + \frac{1.3}{2.4}a^2\sigma^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}a^3\sigma^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^4\sigma^4 + \ldots,$$

il vient, en négligeant les termes en σ^5,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} = \frac{1}{l}\Bigg(& 1+\sigma\cos t_1 - \frac{\sigma^2}{4}[1+\alpha^2+(1-\alpha^2)\cos 2t_1] - \frac{\alpha\gamma'}{2}\sigma^3(\cos t_1-\cos 3t_1) \\
& - \frac{\sigma^4}{2}\left(\frac{\gamma'^2}{2}-\frac{\gamma'^2}{2}\cos 4t_1+\alpha\gamma''\cos 2t_1-\alpha\gamma''\cos 4t_1\right) \\
& + \frac{1.3}{2.4}\sigma^2\Big\{4\cos^2 t_1 - 2\sigma[1+\alpha^2+(1-\alpha^2)\cos 2t_1]\cos t_1 \\
& \qquad + \frac{\sigma^2}{4}[1+\alpha^2+(1-\alpha^2)\cos 2t_1]^2 \\
& \qquad - 4\alpha\gamma'\sigma^2(\cos t_1-\cos 3t_1)\cos t_1\Big\} \\
& - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sigma^3\left\{-8\cos^3 t_1+6\sigma[1+\alpha^2+(1-\alpha^2)\cos 2t_1]\cos^2 t_1\right\} \\
& + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sigma^4(16\cos^4 t_1)\Bigg).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} = \frac{1}{l}\Bigg\{ & 1-\frac{\sigma^2}{4}(1+\alpha^2)-\frac{\gamma'^2\sigma^4}{4}+\tfrac{3}{4}\sigma^2+\tfrac{3}{32}(1+\alpha^2)^2\sigma^4+\tfrac{3}{64}(1-\alpha^2)^2\sigma^4-\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'\sigma^4 \\
& -\tfrac{15}{16}\sigma^4\left[(1+\alpha^2)+\frac{1-\alpha^2}{2}\right]+\frac{35\sigma^4}{32}+\frac{35\sigma^4}{64} \\
& +\cos t_1\left[+\sigma-\frac{\alpha\gamma'\sigma^3}{2}-\tfrac{3}{4}(1+\alpha^2)\sigma^3-\tfrac{3}{8}(1-\alpha^2)\sigma^3+\tfrac{15}{8}\sigma^3\right] \\
& +\cos 2t_1\left[-\frac{\sigma^2}{4}(1-\alpha^2)-\frac{\alpha\gamma''\sigma^4}{2}+\tfrac{3}{4}\sigma^2+\tfrac{3}{16}(1-\alpha^4)\sigma^4-\tfrac{15}{8}\sigma^4+\tfrac{35}{16}\sigma^4\right] \\
& +\cos 3t_1\left[+\frac{\alpha\gamma'\sigma^3}{2}-\tfrac{3}{8}(1-\alpha^2)\sigma^3+\tfrac{5}{8}\sigma^3\right] \\
& +\cos 4t_1\Big[+\frac{\gamma'^2\sigma^4}{4}+\frac{\alpha\gamma''\sigma^4}{2}+\tfrac{3}{64}(1-\alpha^2)^2\sigma^4 \\
& \qquad +\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'\sigma^4-\tfrac{15}{32}\sigma^4(1-\alpha^2)+\tfrac{35}{64}\sigma^4\Big]\Bigg\}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
(52)\quad \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} = \frac{1}{l}\Big[& (1+\tfrac{1}{2}\sigma^2-\tfrac{1}{4}\alpha^2\sigma^2+\tfrac{3}{8}\sigma^4-\tfrac{3}{8}\alpha^2\sigma^4+\tfrac{9}{64}\alpha^4\sigma^4-\tfrac{1}{4}\gamma'^2\sigma^4-\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'\sigma^4) \\
& +(\sigma+\tfrac{3}{4}\sigma^3-\tfrac{3}{8}\alpha^2\sigma^3-\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'\sigma^3)\cos t_1 \\
& +\left(\tfrac{1}{2}\sigma^2+\frac{\alpha^2}{4}\sigma^2+\tfrac{1}{2}\sigma^4-\tfrac{3}{16}\alpha^4\sigma^4-\frac{\alpha\gamma''}{2}\sigma^4\right)\cos 2t_1 \\
& +(\tfrac{1}{4}\sigma^3+\tfrac{3}{8}\alpha^2\sigma^3+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'\sigma^3)\cos 3t_1 \\
& +\left(\tfrac{1}{8}\sigma^4+\tfrac{3}{8}\alpha^2\sigma^4+\tfrac{3}{64}\alpha^4\sigma^4+\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'\sigma^4+\tfrac{1}{4}\gamma'^2\sigma^4+\frac{\alpha}{2}\gamma''\sigma^4\right)\cos 4t_1\Big].
\end{aligned}$$

$\dfrac{M}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}$ se trouve donc développé suivant les cosinus des multiples de t; on a

$$(53)\qquad \frac{M}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} = m_0+m_1\cos t_1+m_2\cos 2t_1+m_3\cos 3t_1+m_4\cos 4t_1,$$

en posant

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned}
m_0 &= \frac{M}{l}\left[1+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\alpha^2\right)\sigma^2+\left(\tfrac{3}{8}-\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{9}{64}\alpha^4-\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'-\tfrac{1}{4}\gamma'^2\right)\sigma^4\right],\\
m_1 &= \frac{M}{l}\sigma\left[1+\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{8}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'\right)\sigma^2\right],\\
m_2 &= \frac{M}{l}\sigma^2\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\alpha^2+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{16}\alpha^4-\frac{\alpha\gamma''}{2}\right)\sigma^2\right],\\
m_3 &= \frac{M}{l}\sigma^3\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'\right),\\
m_4 &= \frac{M}{l}\sigma^4\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{3}{64}\alpha^4+\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'+\tfrac{1}{4}\gamma'^2+\frac{\alpha\gamma''}{2}\right).
\end{aligned}\right.$$

En vertu des développements de V et de $\frac{M}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}$ que nous venons d'obtenir, et de l'égalité

$$(55)\qquad \omega^2\eta_1^2 = \omega^2 l^2\left(1+\frac{\sigma^2}{2}-2\sigma\cos t_1+\frac{\sigma^2}{2}\cos 2t_1\right),$$

l'équation différentielle de l'équilibre

$$(1)\qquad fV+\frac{fM}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}+\tfrac{1}{2}\omega^2\eta_1^2 = c$$

se présente sous la forme suivante :

$$(56)\qquad \begin{aligned}
&\pi\rho l^2\sigma^2(v_0+v_1\cos t_1+v_2\cos 2t_1+v_3\cos 3t_1+v_4\cos 4t_1)\\
&\quad+m_0+m_1\cos t_1+m_2\cos 2t_1+m_3\cos 3t_1+m_4\cos 4t_1\\
&\quad+\frac{\omega^2 l^2}{2f}\left(1+\frac{\sigma^2}{2}-2\sigma\cos t_1+\frac{\sigma^2}{2}\cos 2t_1\right)=c.
\end{aligned}$$

Or l'équilibre doit avoir lieu quelle que soit la valeur de t : il faut donc que l'on ait

$$(57)\qquad \pi\rho l^2\sigma^2 v_0+m_0+\frac{\omega^2 l^2}{2f}\left(1+\frac{\sigma^2}{2}\right)=c,$$

$$(58)\qquad \pi\rho l^2\sigma^2 v_1+m_1-\frac{\omega^2 l^2}{f}\sigma = 0,$$

$$(59)\qquad \pi\rho l^2\sigma^2 v_2+m_2+\frac{\omega^2 l^2}{4f}\sigma^2 = 0,$$

$$(60)\qquad \pi\rho l^2\sigma^2 v_3+m_3 = 0,$$

$$(61)\qquad \pi\rho l^2\sigma^2 v_4+m_4 = 0.$$

Ces cinq équations détermineront ω, α, γ', γ'' et c en fonction de la densité ρ de l'anneau, de la distance $\overline{SC}=l$ et du rapport $\frac{BC}{SC}=\sigma$.

Les équations (58) et (59) combinées par voie d'addition, jointes aux deux dernières équations, forment le système

$$
(\mathrm{E})\left\{\begin{array}{lll}
(62) & \pi\rho l^2\sigma^2(\sigma v_1+4v_2)+m_1\sigma+4m_2 & =0,\\
(63) & \pi\rho l^2\sigma^2 v_3+m_3 & =0,\\
(64) & \pi\rho l^2\sigma^2 v_4+m_4 & =0,
\end{array}\right.
$$

qui servira à déterminer α, γ' et γ''; de (58) et de (57) on tirera ensuite les valeurs de ω et de c.

Remplaçant les quantités v et m par leurs valeurs (49) et (54), l'équation (62) devient

$$
\begin{aligned}
0 = & +\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2}-\frac{(7+3\alpha)}{4(1+\alpha)}\alpha\sigma^2+2\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\sigma^2\gamma' \\
& +\tfrac{1}{8}(5+\alpha^2)\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2}-\frac{(61+92\alpha+34\alpha^2+20\alpha^3+13\alpha^4)\alpha\sigma^2}{24(1+\alpha)^2}+\frac{4(1+3\alpha)\gamma'\sigma^2}{3(1+\alpha)^3} \\
& -4\alpha\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}-8\alpha\frac{(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\gamma'^2\sigma^2+\frac{4(1-2\alpha-\alpha^2)}{(1+\alpha)^2}\gamma''\sigma^2 \\
& +\frac{\mathrm{M}}{\pi\rho l^3}\left[1+\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{8}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'\right)\sigma^2\right]+\frac{\mathrm{M}}{\pi\rho l^3}\left[2+\alpha^2+\left(2-\tfrac{3}{4}\alpha^4-2\alpha\gamma''\right)\sigma^2\right].
\end{aligned}
$$

Simplifiant cette équation, et opérant de même pour (63) et (64), le système (E) devient

$$
(\mathrm{E}')\left\{\begin{aligned}
(65)\quad 0 = & \frac{\mathrm{M}}{\pi\rho l^3}\left[3+\alpha^2+\left(\tfrac{11}{4}-\tfrac{3}{8}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'-2\alpha\gamma''-\tfrac{3}{4}\alpha^4\right)\sigma^2\right] \\
& +\frac{(9+\alpha^2)}{8}\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2}-4\alpha\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \\
& -(103+152\alpha+52\alpha^2+20\alpha^3+13\alpha^4)\frac{\alpha\sigma^2}{24(1+\alpha)^2} \\
& +(10+18\alpha-6\alpha^2-6\alpha^3)\frac{\gamma'\sigma^2}{3(1+\alpha)^3} \\
& -8\alpha\frac{(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^4}\gamma'^2\sigma^2+\frac{4(1-2\alpha-\alpha^2)\gamma''\sigma^2}{(1+\alpha)^2}; \\
(66)\quad 0 = & \frac{\mathrm{M}}{\pi\rho l^3}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'+\tfrac{3}{8}\alpha^2\right)-\frac{\alpha(1-\alpha)(1+3\alpha)}{12(1+\alpha)^2}+\frac{2(-1+3\alpha+3\alpha^2+3\alpha^3)\gamma'}{3(1+\alpha)^3}; \\
(67)\quad 0 = & \frac{\mathrm{M}}{\pi\rho l^3}\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{3}{64}\alpha^4+\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma''+\tfrac{1}{4}\gamma'^2\right) \\
& -\frac{\alpha}{3.128(1+\alpha)^3}(13+39\alpha-18\alpha^2-30\alpha^3-3\alpha^4-\alpha^5) \\
& -\frac{\gamma'}{24(1+\alpha)^4}(1+4\alpha-18\alpha^2-12\alpha^3-15\alpha^4) \\
& -\frac{\gamma''}{2(1+\alpha)^4}(1-4\alpha-6\alpha^2-12\alpha^3-3\alpha^4) \\
& +\frac{\gamma'^2}{(1+\alpha)^5}(2+4\alpha^2+2\alpha^4).
\end{aligned}\right.
$$

Pour résoudre ces équations, nous aurons recours à la méthode des approximations successives.

Première approximation.

Négligeant, pour l'étude de l'approximation I, partout les termes en σ^2, le système (E′) se présente sous la forme relativement plus simple

$$(68)\quad 0 = \frac{M}{\pi\rho l^3}(3+\alpha^2) - 4\alpha\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right),$$

$$(69)\quad 0 = \frac{M}{\pi\rho l^3}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma'+\tfrac{3}{8}\alpha^2\right) - \alpha\frac{(1-\alpha)(1+3\alpha)}{12(1+\alpha)^2} + 2(-1+3\alpha+3\alpha^2+3\alpha^3)\frac{\gamma'}{3(1+\alpha)^3},$$

$$(70)\quad \begin{aligned} 0 = {} & \frac{M}{\pi\rho l^3}\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{3}{64}\alpha^4+\tfrac{3}{4}\alpha\gamma'+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma''+\tfrac{1}{4}\gamma'^2\right) \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)}{3.128(1+\alpha)^3}(13+52\alpha+34\alpha^2+4\alpha^3+\alpha^4) \\ & - \frac{\gamma'}{24(1+\alpha)^4}(1+4\alpha-18\alpha^2-12\alpha^3-15\alpha^4) \\ & - \frac{\gamma''}{2(1+\alpha)^4}(1-4\alpha-6\alpha^2-12\alpha^3-3\alpha^4) + \frac{2\gamma'^2}{(1+\alpha)^5}(1+\alpha^2)^2. \end{aligned}$$

L'équation donnant la vitesse angulaire de rotation devient, au même degré d'approximation,

$$\frac{\omega^2}{\pi f\rho} = \frac{M}{\pi\rho l^3},$$

d'où

$$(71)\quad \omega^2 = M\frac{f}{l^3}:$$

c'est le résultat de Laplace ; la valeur de la constante c est égale à

$$(72)\quad c = \frac{M}{l} + \frac{\omega^2 l^2}{2f}.$$

Étude de l'équation en α.

$$(68)\quad \frac{M}{4\pi\rho l^3} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)(3+\alpha^2)} = U.$$

Le premier membre de (68) étant positif, il doit en être de même du second ; on doit donc avoir

$$\alpha < 1.$$

Les valeurs négatives de α rendent U négatif; il suffit donc d'attribuer à α des valeurs positives :

$$\begin{array}{lll} \text{Pour } \alpha = 0 & \text{on a} & U = 0, \\ \alpha = +\varepsilon & \text{»} & U > 0, \\ \alpha = +1 & \text{»} & U = 0. \end{array}$$

Ainsi, α variant de 0 à $+1$, U part de zéro pour revenir à zéro; dans l'intervalle, U reste positif; il doit, par conséquent, présenter au moins un maximum, qu'on obtiendra par la considération de la dérivée

$$\frac{dU}{d\alpha} = \frac{3 - 6\alpha - 4\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4}{(1+\alpha)^2(3+\alpha^2)^2}. \tag{73}$$

L'équation $u' = \alpha^4 - 2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 6\alpha + 3 = 0$ a au plus deux racines positives. En substituant les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4, on trouve ces valeurs de u',

$$+3, \quad -8, \quad -25, \quad -24, \quad +43.$$

Donc il y a une racine entre 0 et 1 et une autre entre 3 et 4; on peut laisser cette dernière de côté, puisque l'on doit avoir $\alpha < 1$. On trouve ensuite, par la méthode des différences ou la formule d'approximation de Newton, que l'on a

$$\alpha = 0,385\ldots \tag{74}$$

La racine $\alpha = +0,385\ldots$ correspond à un maximum U_1 de U

$$U_1 = \frac{0,385 \times 0,615}{1,385 \times 3,148} = 0,0543. \tag{75}$$

Si donc on a

$$\frac{M}{4\pi\rho l^3} > 0,0543 \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\rho_0} < 6,14\left(\frac{r}{l}\right)^3,$$

r désignant le rayon de Saturne supposé sphérique, l'équation (68) n'aura aucune racine positive; si l'on a

$$\frac{M}{4\pi\rho l^3} < 0,0543 \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\rho_0} > 6,14\left(\frac{r}{l}\right)^3,$$

l'équation en admettra deux, α_1, α_2,

$$\alpha_1 = +0,385\ldots,$$
$$\alpha_2 = +3,540\ldots;$$

α_1 correspond à un anneau plus aplati; c'est cette valeur que nous prendrons pour le calcul de γ' et de γ''.

Calcul de γ'.

On trouve aisément

$$\gamma' = \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{8}\,\frac{(9+3\alpha+17\alpha^2+15\alpha^3)}{(3-9\alpha-11\alpha^2-15\alpha^3)}.$$

Si nous remplaçons maintenant α par sa valeur numérique $\alpha = 0,385$, il vient

$$\gamma' = -0,188. \tag{76}$$

Calcul de γ''.

En groupant dans l'équation (70) les termes en γ', γ'^2, γ'' et en remplaçant $\frac{M}{\pi\rho l^3}$ par sa valeur maxima, il vient

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\alpha(1-\alpha)}{384}\,(153+228\alpha+653\alpha^2+1088\alpha^3+611\alpha^4+140\alpha^5+71\alpha^6)\\
& +\frac{\gamma'}{24(1+\alpha)}(-3-12\alpha+125\alpha^2+176\alpha^3+63\alpha^4-132\alpha^5-57\alpha^6)\\
& +\frac{\gamma'^2}{(1+\alpha)^2}\,(+6+\alpha+17\alpha^2+2\alpha^3+8\alpha^4-3\alpha^5+\alpha^6)\\
& +\frac{\gamma''}{2(1+\alpha)}\,(-3+12\alpha+21\alpha^2+44\alpha^3+11\alpha^4+8\alpha^5+3\alpha^6)
\end{aligned}$$

ou, en remplaçant α, γ', γ'^2 par leurs valeurs et en effectuant les opérations indiquées, il vient

$$\gamma'' = -0,109. \tag{77}$$

Résumé.

Les valeurs numériques correspondant à la première approximation sont donc

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= +0,385\\ \gamma' &= -0,188\\ \gamma'' &= -0,109 \end{aligned}\right.\qquad \text{avec}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\omega^2}{\pi f\rho} = \frac{M}{\pi\rho l^3} = 0,216,\\ &c = \frac{M}{l} + \frac{\omega^2 l^2}{2f}. \end{aligned}\right.$$

La courbe rapportée aux axes des x et des y (p. 7) devient, au degré d'approximation adopté,

$$y = -\cos t,\qquad x = \alpha\sin t + \gamma'\sigma\sin 2t$$

ou

$$y = -\cos t, \qquad x = 0{,}385 \sin t - 0{,}188\sigma \sin 2t.$$

SECONDE PARTIE.

Dans ce qui suit, nous examinerons le cas plus simple où la masse de Saturne serait nulle. L'anneau sera alors soumis aux attractions mutuelles de ses molécules et à la force centrifuge. Cherchons, dans ce cas, la figure d'équilibre de la section génératrice de l'anneau.

Les équations d'équilibre (p. 44) prennent la forme suivante

$$(78)\qquad \begin{cases} \pi\rho\sigma^2 v_0 + \dfrac{\omega^2}{2f}\left(1+\dfrac{\sigma^2}{2}\right) = c, & \pi\rho\sigma v_1 - \dfrac{\omega^2}{f} = 0, \\ \pi\rho v_2 + \dfrac{\omega^2}{4f} = 0, & v_3 = v_4 = 0 \end{cases}$$

ou, en vertu des valeurs (49) de $v_0, v_1, \ldots,$

$$(79)\qquad \frac{c}{\pi\rho} = \frac{\omega^2}{2f\pi\rho} + \frac{\omega^2\sigma^2}{4f\pi\rho} + \sigma^2\left(\alpha - \tfrac{1}{4}\gamma'\sigma^2 + \tfrac{7}{64}\alpha\sigma^2 - \tfrac{3}{64}\alpha^3\sigma^2\right)\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2}$$
$$- (35 + 56\alpha + 16\alpha^2 - 16\alpha^3 - 11\alpha^4)\frac{\alpha\sigma^4}{64(1+\alpha)^2}$$
$$- \frac{\alpha(1+2\alpha)\sigma^4\gamma'}{2(1+\alpha)^2} - \frac{(2+\alpha+\alpha^2)\sigma^4\gamma'^2}{(1+\alpha)^3},$$

$$(80)\qquad \frac{\omega^2}{\pi\rho f} = \tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2} - \frac{(7+3\alpha)\alpha\sigma^2}{4(1+\alpha)} + 2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\gamma'\sigma^2,$$

$$(81)\qquad \frac{\omega^2}{4\pi\rho f} = \alpha\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \tfrac{1}{32}(5+\alpha^2)\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2}$$
$$+ \frac{\alpha}{96(1+\alpha)^2}(13\alpha^4 + 20\alpha^3 + 34\alpha^2 + 92\alpha + 61)\sigma^2$$
$$- \frac{(1+3\alpha)\gamma'\sigma^2}{3(1+\alpha)^3} + \frac{2\alpha(1+\alpha^2)\gamma'^2\sigma^2}{(1+\alpha)^4} + \frac{(\alpha^2+2\alpha-1)\gamma''\sigma^2}{(1+\alpha)^2},$$

$$(82)\qquad \gamma' = \frac{\alpha(1-\alpha^2)(1+3\alpha)}{8(3\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-1)},$$

$$(83)\qquad 0 = \frac{\alpha}{3.128}(\alpha-1)(\alpha^4+4\alpha^3+34\alpha^2+52\alpha+13)$$
$$+ \tfrac{1}{24}(1+\alpha)(15\alpha^4+12\alpha^3+18\alpha^2-4\alpha-1)\gamma' + \frac{2}{(1+\alpha)^2}(1+\alpha^2)^2\gamma'^2$$
$$+ \frac{1}{2(1+\alpha)}(3\alpha^4+12\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha-1)\gamma''.$$

Dans le Traité de la *Mécanique céleste*, le développement de $\varphi(x)$ se trouve limité au terme en $\gamma'\sigma \sin t$; aussi la valeur de $\frac{\omega^2}{4\pi\rho f}$, donnée par M. Tisserand, doit-elle se réduire à $\frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}$, et l'équation en γ'' ne doit pas exister; c'est ce qui a lieu, en effet (p. 153).

Les équations précédentes déterminent α, γ', γ'', ω et c en fonction de σ; nous les résoudrons par la méthode des approximations successives.

Première approximation.

Si nous négligeons partout les termes en σ^2, les équations (79) à (83) deviennent

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{ll} c = \dfrac{\omega^2}{2f} = 0, & \text{en vertu de l'équation ci-après,} \\ \dfrac{\omega^2}{\pi\rho f} = 0, & \\ \dfrac{\omega^2}{4\pi f\rho} = \alpha\dfrac{(1-\alpha)}{1+\alpha}, & \text{équation qui exige que } \alpha = 1, \\ \gamma' = 0, \quad \gamma'' = 0. & \end{array}\right.$$

La courbe méridienne devient

$$\xi = \sigma l \alpha \sin t,$$
$$\eta = l(1 - \sigma \cos t),$$

d'où, en éliminant t et en faisant $\alpha = 1$, il vient

$$(\mathrm{I}')\qquad \frac{\xi^2}{\sigma^2 l^2} + \frac{(\eta - l)^2}{\sigma^2 l^2} = 1.$$

La courbe d'équilibre aurait donc pour section méridienne un cercle de rayon σl, et la vitesse de rotation de l'anneau est nulle dans la première approximation.

Deuxième approximation.

L'approximation I montre que la vitesse angulaire de rotation de l'anneau est très faible et que $1 - \alpha$ est de l'ordre de ω^2. Nous obtiendrons donc une valeur plus approchée de ω en faisant, dans l'équation (80),

$$\alpha = 1, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = 0$$

et en négligeant tous les termes en σ supérieurs à σ^2; il vient alors

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \log\frac{64}{\sigma^2} - \tfrac{10}{8}\sigma^2$$

ou

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2 \log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\sigma^2 = \sigma^2\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right) = \sigma^2 h'; \tag{84}$$

ω est donc de l'ordre de σ. Or, comme $1-\alpha$ est de l'ordre ω^2, ainsi que le montre l'approximation I, on peut poser

$$1-\alpha = h\sigma^2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 1 - h\sigma^2. \tag{85}$$

En portant maintenant cette valeur dans l'équation (81), et en négligeant tous les termes en σ^3, on aura une équation déterminant h

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right) = {}& -\tfrac{1}{32}6\sigma^2\log\frac{64}{\sigma^2} + (1-h\sigma^2)h\sigma^2(2-h\sigma^2)^{-1} \\ & + \frac{(1-h\sigma^2)}{96}(2-h\sigma^2)^{-2}(13+20+34+92+61)\sigma^2\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\sigma^2}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right) = -\tfrac{3}{8}\sigma^2\log\frac{8}{\sigma} + \tfrac{1}{2}h\sigma^2 + \tfrac{55}{96}\sigma^2,$$

d'où

$$h = \tfrac{5}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right). \tag{86}$$

En portant maintenant la valeur (85) de α dans l'équation (82), il vient

$$\gamma' = \tfrac{1}{8}(1-h\sigma^2)(2h\sigma^2 - h^2\sigma^4)(4-3h\sigma^2)[2-3h\sigma^2+3(1-h\sigma^2)^2+3(1-h\sigma^2)^3]^{-1},$$

d'où, en négligeant les termes en σ^3,

$$\gamma' = \tfrac{1}{8}2h\sigma^2\tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{8}h\sigma^2. \tag{87}$$

En vertu des valeurs de α et de γ', l'équation (83) devient

$$\begin{aligned}\gamma'' = {}& 2(2-h\sigma^2)[3-4h\sigma^2+6(1-h\sigma^2)^2+12(1-h\sigma^2)^3+3(1-h\sigma^2)^4]^{-1} \\ & \times\left\{\frac{(1-h\sigma^2)h\sigma^2}{3\times128}[13+52(1-h\sigma^2)+34(1-h\sigma^2)^2+4(1-h\sigma^2)^3+(1-h\sigma^2)^4]\right. \\ & \quad + \tfrac{1}{8}h\sigma^2\tfrac{1}{24}(2-h\sigma^2)^{-1}[5-4h\sigma^2-18(1-h\sigma^2)^2-12(1-h\sigma^2)^3-15(1-h\sigma^2)^4] \\ & \quad \left. - \tfrac{1}{64}h^2\sigma^4 2(2-h\sigma^2)^{-2}(2-2h\sigma^2+h^2\sigma^4)^{+2}\right\},\end{aligned}$$

d'où, au même degré d'approximation,

$$\gamma'' = \tfrac{1}{36}h\sigma^2. \tag{88}$$

L'approximation II conduit donc aux valeurs suivantes :

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}\right) = \sigma^2 h', \qquad \text{où} \qquad h' = \log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}, \\ \alpha = 1 - h\sigma^2, \qquad \text{où} \qquad h = \frac{5}{4}\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{17}{12}\right), \\ \gamma' = \frac{1}{8}h\sigma^2, \\ \gamma'' = \frac{1}{36}h\sigma^2. \end{array}\right.$$

L'équation de la courbe méridienne

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma l(\alpha \sin t + \gamma'\sigma \sin 2t + \gamma''\sigma^2 \sin 3t), \\ \eta &= l(1 - \sigma \cos t) \end{aligned}$$

prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma l(1 - h\sigma^2)\sin t + \tfrac{1}{8} l h \sigma^4 \sin 2t + \tfrac{1}{36} l h \sigma^5 \sin 3t, \\ \eta &= l(1 - \sigma \cos t) \end{aligned}$$

ou, au degré d'approximation considéré ici,

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma l(1 - h\sigma^2)\sin t, \\ \eta &= l(1 - \sigma \cos t); \end{aligned}$$

d'où, en éliminant le paramètre t,

$$(\mathrm{II}') \qquad \frac{\xi^2}{\sigma^2 l^2 (1 - h\sigma^2)^2} + \frac{(\eta - l)^2}{l^2\sigma^2} = 1.$$

C'est l'équation d'une ellipse peu différente d'un cercle ayant pour demi grands axes

$$\sigma l(1 - h\sigma^2) \quad \text{et} \quad \sigma l,$$

et pour aplatissement

$$\frac{\sigma l - \sigma l(1 - h\sigma^2)}{\sigma l} = \sigma^2 h = \frac{5\sigma^2}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \frac{17}{12}\right).$$

Les valeurs des inconnues ω, α, γ', γ'', auxquelles nous sommes ainsi conduite diffèrent donc légèrement de celles de M. Tisserand; voici le Tableau de ces valeurs, où l'indice T se rapporte aux résultats obtenus par M. Tisserand, et l'indice K à ceux de l'auteur.

$$\mathrm{II_T}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}\right), \\ \alpha = 1 - h'\sigma^2, \\ \gamma' = \frac{1}{8}h'\sigma^2, \\ h' = \frac{1}{2}\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}\right); \end{array}\right. \qquad \mathrm{II_K}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}\right), \\ \alpha = 1 - h\sigma^2, \\ \gamma' = \frac{1}{8}h\sigma^2, \\ \gamma'' = \frac{1}{36}h\sigma^2, \\ h = \frac{5}{4}\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{17}{12}\right); \end{array}\right.$$

$$\tfrac{5}{2}h'_{\mathrm{T}} - h_{\mathrm{K}} = +\tfrac{5}{24},$$

Le petit axe de l'ellipse génératrice ainsi que l'aplatissement se modifient aussi un peu.

On a

$$\text{Petit axe}_T - \text{petit axe}_K = \sigma^3 l(h_K - h'_T)$$
$$= \sigma^3 l\left(\tfrac{5}{4}\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{85}{48} - \tfrac{1}{2}\log\frac{8}{\sigma} + \tfrac{5}{8}\right) = \sigma^3 l\left(\tfrac{3}{4}\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{55}{48}\right),$$
$$A_T - A_K = -\sigma^2\left(\tfrac{3}{4}\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{55}{48}\right).$$

Valeur de c.

En faisant dans (79)

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right); \qquad \alpha = 1 - h\sigma^2, \qquad \gamma' = \tfrac{1}{8}h\sigma^2, \qquad \gamma'' = \tfrac{1}{36}h\sigma^2$$

et en négligeant les termes en σ^3, il vient

$$\frac{c}{\pi\rho} = \sigma^2\log\frac{256}{4\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right);$$

d'où

$$\frac{c}{\pi\rho} = \frac{5\sigma^2}{8}\left(4\log\frac{8}{\sigma} - 1\right).$$

Troisième approximation.

Nous obtiendrons la valeur de ω correspondant à la troisième approximation, en faisant dans l'équation (80)

$$\alpha = 1 - h\sigma^2, \qquad \gamma' = \tfrac{1}{8}h\sigma^2, \qquad \gamma'' = \tfrac{1}{36}h\sigma^2;$$

les valeurs plus approchées de α, γ', γ'' se calculeront ensuite de proche en proche.

La forme générale des équations (80), (81), (82), (83) montre que les inconnues ne contiennent que des puissances paires de σ.

En vertu du système des valeurs II, l'équation (80) devient

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \tfrac{1}{2}(1 - h\sigma^2)\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(2 - h\sigma^2)^2} - \frac{(7 + 3 - 3h\sigma^2)(1 - h\sigma^2)\sigma^2}{4(2 - h\sigma^2)}$$
$$+ 2h\sigma^2(2 - h\sigma^2)^{-1}\tfrac{1}{8}h\sigma^2.\sigma^2;$$

d'où, en conservant jusqu'aux termes en σ^4,

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \tfrac{1}{2}(1 - h\sigma^2)\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(4 - 4h\sigma^2)} - \tfrac{1}{4}(10 - 13h\sigma^2)\sigma^2\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}h\sigma^2)^{-1}$$

ou

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \sigma^2(1 - h\sigma^2)\log\frac{8}{\sigma(1-h\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sigma^2}{8}(10 - 13h\sigma^2)(1 + \tfrac{1}{2}h\sigma^2)$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{\pi f \rho} &= \sigma^2(1 - h\sigma^2)\log\frac{8}{\sigma} + \frac{h\sigma^4}{2} - \tfrac{5}{4}\sigma^2 + h\sigma^4 \\ &= \sigma^2\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right) - h\sigma^4\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

ou

(89) $$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = h'\sigma^2 - hk\sigma^4,$$

en posant

(90) $$\left\{\begin{aligned} h &= \tfrac{5}{4}(\log\tfrac{8}{5} - \tfrac{17}{12}), \\ h' &= \log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}, \\ k &= \log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{3}{2}. \end{aligned}\right.$$

L'équation (81) devient, quand on y fait

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = h'\sigma^2 - hk\sigma^4, \qquad \gamma' = \tfrac{1}{8}h\sigma^2, \qquad \gamma'' = \tfrac{1}{36}h\sigma^2,$$

(91) $$\begin{aligned} h'\sigma^2 - hk\sigma^4 = &- \tfrac{1}{8}(5 + \alpha^2)\alpha\sigma^2\log\frac{256}{\sigma^2(1+\alpha)^2} + \frac{4\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{24(1+\alpha)^2}(13\alpha^4 + 20\alpha^3 + 34\alpha^2 + 92\alpha + 61)\sigma^2 \\ &- \frac{1}{2}\frac{(1+3\alpha)h\sigma^4}{3(1+\alpha)^3} + \frac{1}{9}\frac{(\alpha^2 + 2\alpha - 1)}{(1+\alpha)^2}h\sigma^4 \\ &+ \text{termes en } \sigma^6. \end{aligned}$$

Pour résoudre (91) par rapport à α, nous emploierons la méthode des coefficients indéterminés.

Nous poserons

(92) $$\alpha = 1 - a\sigma^2 - b\sigma^4,$$

et nous négligerons dans le développement les termes en σ supérieurs à la quatrième puissance ; il vient

$$\begin{aligned} h'\sigma^2 - hk\sigma^4 = &- \tfrac{1}{8}(1 - a\sigma^2 - b\sigma^4)\sigma^2(5 + 1 - 2a\sigma^2)\log\frac{256}{\sigma^2(2 - a\sigma^2)^2} \\ &+ 4(1 - a\sigma^2 - b\sigma^4)(a\sigma^2 + b\sigma^4)(2 - a\sigma^2 - b\sigma^4)^{-1} \\ &+ \tfrac{1}{24}(1 - a\sigma^2)\sigma^2[61 + 92(1 - a\sigma^2) + 34(1 - 2a\sigma^2) \\ &\qquad + 20(1 - 3a\sigma^2) + 13(1 - 4a\sigma^2)](2 - a\sigma^2)^{-2} \\ &- \tfrac{1}{6}h\sigma^4 4(2 - a\sigma^2)^{-3} + \tfrac{1}{9}h\sigma^4(-1 + 2 + 1)(2 - a\sigma^2)^{-2}, \end{aligned}$$

$$h'\sigma^2 - kh\sigma^4 = -\frac{\sigma^2}{4}(1-a\sigma^2)(3-a\sigma^2)\log\frac{64}{\sigma^2\left(1-\frac{a\sigma^2}{2}\right)^2}$$
$$+\tfrac{4}{2}(a\sigma^2 - a^2\sigma^4 + b\sigma^4)\left(1+\frac{a\sigma^2}{2}\right)$$
$$+\frac{\sigma^2}{96}(1-a\sigma^2)(220-272a\sigma^2)(1+a\sigma^2) - \tfrac{2}{3}h\sigma^4\frac{1}{2^3} + \tfrac{1}{9}h\sigma^4.2\frac{1}{2^2}$$

ou

$$h'\sigma^2 - hk\sigma^4 = -\tfrac{3}{2}\sigma^2\log\frac{8}{\sigma} + 2a\sigma^4\log\frac{8}{\sigma} - \frac{\sigma^2}{2}(3-4a\sigma^2)\left(\frac{a\sigma^2}{2} + \frac{a^2\sigma^4}{4} + \ldots\right)$$
$$+2(a\sigma^2 - \tfrac{1}{2}a^2\sigma^4 + b\sigma^4) + \frac{\sigma^2}{24}(55 - 68a\sigma^2) - \tfrac{1}{36}h\sigma^4,$$

ou, au degré d'approximation adopté,

$$h'\sigma^2 - hk\sigma^4 = 2a\sigma^2 + \tfrac{55}{24}\sigma^2 - \tfrac{3}{2}\sigma^2\log\frac{8}{\sigma}$$
$$-\tfrac{43}{12}a\sigma^4 - a^2\sigma^4 + 2b\sigma^4 - \tfrac{1}{36}h\sigma^4 + 2a\sigma^4\log\frac{8}{\sigma},$$

d'où, en égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de σ,

(93) $$h' = 2a + \tfrac{55}{24} - \tfrac{3}{2}\log\frac{8}{\sigma},$$

(94) $$hk = \tfrac{43}{12}a + a^2 - 2b + \tfrac{1}{36}h - 2a\log\frac{8}{\sigma}.$$

De (93) on tire, en remplaçant h' par sa valeur,

$$2a = -\tfrac{85}{24} + \tfrac{5}{2}\log\frac{8}{\sigma},$$

d'où

(95) $$a = \tfrac{5}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right) = h.$$

L'approximation III ne modifie donc pas le terme en σ^2 correspondant à α dans l'approximation II; le terme correctif qu'il faut ajouter à

$$1 - h\sigma^2,$$

pour avoir une valeur plus approchée de α, contient σ à la quatrième puissance.

L'équation (94) qui détermine b devient, en vertu de $a = h$,

$$hk = \tfrac{43}{12}h + h^2 - 2b + \tfrac{1}{36}h - 2h\log\frac{8}{\sigma},$$

d'où

$$2b = \tfrac{65}{18}h - 2h\log\frac{8}{\sigma} + h^2 - hk$$

ou

$$2b = \tfrac{325}{72}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right) - \tfrac{5}{2}\log\frac{8}{\sigma}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right)$$
$$+ \tfrac{25}{16}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right)^2 - \tfrac{5}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right)\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{3}{2}\right),$$

ou

$$2b = -\tfrac{40885}{6912} + \tfrac{2095}{288}\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{35}{16}\left(\log\frac{8}{\sigma}\right)^2,$$

$$(96)\qquad 32b = \left[-\tfrac{40885}{432} + \tfrac{2095}{18}\log\frac{8}{\sigma} - 35\left(\log\frac{8}{\sigma}\right)^2\right].$$

La valeur de α correspondant à la troisième approximation est donc égale à

$$1 - h\sigma^2 - b\sigma^4$$

ou

$$(97)\qquad \alpha = 1 - \tfrac{5}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right)\sigma^2 + \tfrac{1}{32}\left[\tfrac{40885}{432} - \tfrac{2095}{18}\log\frac{8}{\sigma} + 35\left(\log\frac{8}{\sigma}\right)^2\right]\sigma^4.$$

En faisant dans l'équation (82)

$$\alpha = 1 - h\sigma^2 - b\sigma^4,$$

il vient

$$\gamma' = \tfrac{1}{8}(1 - h\sigma^2 - b\sigma^4)(2h\sigma^2 + 2b\sigma^4 - h^2\sigma^4)(4 - 3h\sigma^2 - 3b\sigma^4)$$
$$\times[2 - 3h\sigma^2 - 3b\sigma^4 + 3(1 - h\sigma^2 - b\sigma^4)^2 + 3(1 - h\sigma^2 - b\sigma^4)^3]^{-1},$$

d'où finalement

$$(98)\qquad \gamma' = \frac{\sigma^2}{8}(h + b\sigma^2).$$

Portant maintenant les valeurs de α et de γ' dans l'équation (83), il vient, en négligeant les termes en σ^6,

$$\gamma'' = 2(2 - h\sigma^2 - b\sigma^4)[3 - 4h\sigma^2 - 4b\sigma^4 + 6(1 - 2h\sigma^2 - 2b\sigma^4 + h^2\sigma^4)$$
$$+ 12(1 - 3h\sigma^2) + 3(1 - 4h\sigma^2)]^{-1}$$
$$\times\left\{\frac{(1 - h\sigma^2 - b\sigma^4)}{3\times 128}(h\sigma^2 + b\sigma^4)[13 + 52(1 - h\sigma^2) + 34(1 - 2h\sigma^2)\right.$$
$$+ 4(1 - 3h\sigma^2) + (1 - 4h\sigma^2)]$$
$$- \frac{1}{24}\frac{\sigma^2}{8}(h + b\sigma^2)(2 - h\sigma^2\ldots)^{-1}[-5 + 4h\sigma^2 + 18(1 - 2h\sigma^2)$$
$$+ 12(1 - 3h\sigma^2) + 15(1 - 4h\sigma^2)]$$
$$\left. - \tfrac{2}{64}\sigma^4(h^2 + \ldots)(2 - h\sigma^2\ldots)^{-2}(1 + 1 - 2h\sigma^2\ldots)^2\right\},$$

d'où

$$\gamma'' = \tfrac{1}{36}\left(h\sigma^2 - \tfrac{1}{12}h^2\sigma^4 + b\sigma^4\right). \tag{99}$$

Les valeurs des inconnues correspondant à la troisième approximation sont donc les suivantes :

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{\pi f \rho} &= h'\sigma^2 - hk\sigma^4,\\
\alpha &= 1 - h\sigma^2 - b\sigma^4,\\
\gamma' &= \frac{\sigma^2}{8}(h + b\sigma^2),\\
\gamma'' &= \tfrac{1}{36}\left(h\sigma^2 - \tfrac{1}{12}h^2\sigma^4 + b\sigma^4\right)\\
&\text{avec}\\
h' &= \log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4},\\
h &= \tfrac{5}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right),\\
k &= \log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{3}{2},\\
b &= \tfrac{1}{32}\left[-\tfrac{40885}{432} + \tfrac{2095}{18}\log\frac{8}{\sigma} - 35\left(\log\frac{8}{\sigma}\right)^2\right].
\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (79) et en négligeant les termes en σ^6, il vient

$$\frac{c}{\pi\rho} = \tfrac{5}{8}\sigma^2\left(4\log\frac{8}{\sigma} - 1\right) - \tfrac{5}{8}\sigma^4\left[\tfrac{131}{24} - \tfrac{671}{60}\log\frac{8}{\sigma} + 5\left(\log\frac{8}{\sigma}\right)^2\right].$$

L'équation de la section méridienne de l'anneau

$$\begin{aligned}
\xi &= \sigma l(\alpha\sin t + \gamma'\sigma\sin 2t + \gamma''\sigma^2\sin 3t),\\
\eta &= l(1 - \sigma\cos t)
\end{aligned}$$

prend, au degré d'approximation adopté, la forme suivante :

$$\text{(III')}\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \sigma l(1 - h\sigma^2)\sin t + \frac{hl}{8}\sigma^4\sin 2t,\\
\eta &= l(1 - \sigma\cos t).
\end{aligned}\right.$$

Pour construire cette courbe, nous ne considérerons d'abord que les deux premiers termes du développement de ξ.

Les équations

$$\xi = \sigma\, l(1 - h\sigma^2)\sin t,$$
$$\eta = l(1 - \sigma\cos t)$$

donnent, par combinaison,

$$\frac{\xi^2}{\sigma^2 l^2 (1 - h\sigma^2)^2} + \frac{(\eta - l)^2}{\sigma^2 l^2} = 1.$$

Cette équation représente une ellipse ayant pour demi grands axes

$$\sigma l(1 - h\sigma^2) \quad \text{et} \quad \sigma l,$$

et pour aplatissement

$$\frac{\sigma l - \sigma l(1 - h\sigma^2)}{\sigma l} = \frac{h l \sigma^3}{\sigma l} = h\sigma^2 = \frac{5\sigma^2}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{17}{12}\right).$$

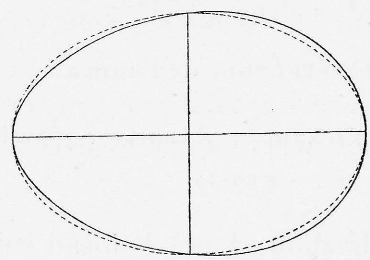
Le petit terme perturbateur $\frac{hl\sigma^4}{8}\sin 2t$ introduit des ondulations le long de cette ellipse, qui sont le plus marquées aux points correspondant à

$$t = \frac{\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4},\quad \frac{7\pi}{4},$$

et qui disparaissent aux sommets de l'ellipse, où l'on a

$$t = 0,\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{2\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}.$$

Fig. 3.



Voici la figure de la courbe méridienne, en traits pleins. L'ellipse est indiquée en pointillé.

Conclusions.

L'étude des trois approximations successives que nous venons d'examiner conduit donc aux valeurs suivantes :

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{\pi f \rho} = 0, \quad \alpha = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad c = 0, \\ \xi = \sigma l \alpha \sin t, \quad \eta = l(1 - \sigma \cos t); \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{\pi f \rho} = h'\sigma^2, \quad \alpha = 1 - h\sigma^2, \quad \gamma' = \frac{1}{8} h\sigma^2, \quad \gamma'' = \frac{1}{36} h\sigma^2, \\ h' = \log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}, \quad h = \frac{5}{4}\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{17}{12}\right), \quad \dfrac{c}{\pi\rho} = \frac{5}{8}\sigma^2\left(4\log\dfrac{8}{\sigma} - 1\right), \\ \xi = \sigma l(1 - h\sigma^2)\sin t, \quad \eta = l(1 - \sigma\cos t); \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{\pi f \rho} = h'\sigma^2 - hk\sigma^4, & h' = \log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{5}{4}, \\ \alpha = 1 - h\sigma^2 - b\sigma^4, & h = \frac{5}{4}\left(\log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{17}{12}\right), \\ \gamma' = \frac{1}{8}h\sigma^2 + \frac{1}{8}b\sigma^4, & k = \log\dfrac{8}{\sigma} - \frac{3}{2}, \\ \gamma'' = \frac{1}{36}\left(h\sigma^2 - \frac{1}{12}h^2\sigma^4 + b\sigma^4\right), & b = \frac{1}{32}\left[-\frac{40885}{432} + \frac{2095}{18}\log\dfrac{8}{\sigma} - 35\left(\log\dfrac{8}{\sigma}\right)^2\right], \\ \dfrac{c}{\pi\rho} = \frac{5}{8}\sigma^2\left(4\log\dfrac{8}{\sigma} - 1\right) - \frac{5}{8}\sigma^4\left[5\left(\log\dfrac{8}{\sigma}\right)^2 - \frac{671}{60}\log\dfrac{8}{\sigma} + \frac{131}{24}\right]; \end{cases}$$

$$\text{(III}')\quad \begin{cases} \xi = \sigma l(1 - h\sigma^2 - b\sigma^4)\sin t + \dfrac{hl}{8}\sigma^4 \sin 2t + \frac{1}{36} hl\sigma^5 \sin 3t, \\ \eta = l(1 - \sigma\cos t) \end{cases}$$

ou, en négligeant les termes en σ^5, comme nous l'avons fait dans tout le travail exposé ici,

$$\text{(III}'')\quad \begin{cases} \xi = \sigma l(1 - h\sigma^2)\sin t + \dfrac{hl}{8}\sigma^4 \sin 2t, \\ \eta = l(1 - \sigma\cos t). \end{cases}$$

Ainsi donc, la considération du terme $\alpha'' \sin 3t$, dans le développement de la fonction $x = \varphi(t) = \alpha \sin t + \alpha' \sin 2t + \alpha'' \sin 3t + \alpha''' \sin 4t + \ldots$, modifie très légèrement les valeurs de M^me Kowalewski, données à la page 154 de la *Mécanique céleste*. Dans l'étude de l'approximation (III), $\alpha'' \sin 3t$ introduit des quantités en σ^4.

La vitesse angulaire de rotation de l'anneau, qui est nulle dans l'approximation (I), reste très petite dans les approximations (II) et (III).

Le coefficient α, qui influe le plus sur la forme de la courbe méridienne, reste voisin de l'unité dans (II) et dans (III). La section méridienne présente la forme d'un cercle de rayon σl dans l'approximation (I); elle se transforme ensuite en une ellipse, l'ellipse de Laplace, dont l'aplatissement est égal à $\frac{5\sigma^2}{4}\left(\log\frac{8}{\sigma} - \frac{17}{12}\right)$, et dont les demi grands axes ont pour valeurs

$$\sigma l \quad \text{et} \quad \sigma l\left[1 - \tfrac{5}{4}\sigma^2\left(\log\frac{8}{\sigma} - \tfrac{5}{4}\right)\right].$$

Dans l'approximation (III), cette ellipse, dont l'aplatissement et les grands axes restent sensiblement les mêmes, présente des renflements aux points

$$t = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4},$$

et des aplatissements aux points

$$t = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}.$$

Il serait inutile de calculer, à l'aide de la méthode de M^{me} Kowalewski, l'influence des termes $\alpha''' \sin 4t, \ldots$ sur les valeurs (III) que nous venons d'obtenir. Ce calcul, long et pénible, n'ajouterait pas grand'chose aux valeurs des inconnues données dans les *A. N.*, n° 2643, puis corrigées, dans la *Mécanique céleste,* par M. Tisserand, valeurs que vient de confirmer, tout en les modifiant très légèrement, le travail que nous avons exposé ici.

Vu et approuvé :
Paris, le 23 juin 1893.
Le Doyen,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 23 juin 1893.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Étude des principes généraux de la Dynamique, d'après l'Ouvrage de Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*).

Vu et approuvé :
Paris, le 23 juin 1893.
Le Doyen,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 23 juin 1893.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

ERRATA.

Page 42, ligne 2 (d'en bas), *lire* formule du binôme *au lieu de* formule de Taylor.

Page 54, ligne 9 (d'en haut), *lire* $\log \frac{8}{9}$ *au lieu de* $\log \frac{8}{5}$.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION. — HISTORIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

Première approximation.

Deuxième approximation.

Troisième approximation.

20224 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.