ÉTUDE

SUR

LES FONCTIONS DES VARIABLES

IMAGINAIRES

D'APRÈS CAUCHY

PAR

M. BERGER

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE IMPÉRIAL DE MONTPELLIER

MONTPELLIER

BOEHM ET FILS, IMPRIMEURS DE L'ACADÉMIE, PLACE DE L'OBSERVATOIRE

1863

ÉTUDE

SUR LES

Fonctions des Variables imaginaires

D'APRÈS CAUCHY

Nous nous proposons d'exposer les principes de la théorie des imaginaires d'après Cauchy. Le théorème sur le développement des fonctions en série a déjà été reproduit par MM. Briot et Bouquet avec d'heureux éclaircissements ; cependant nous avons pensé que la démonstration pouvait encore être complétée. D'ailleurs, MM. Briot et Bouquet ne disent rien du développement des fonctions implicites. Nous terminons par la théorie du compteur logarithmique de Cauchy, et nous indiquons quelques-unes des conséquences importantes qu'on peut en tirer.

§ 1er.

On représente une variable imaginaire z par le symbole

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

x et y sont deux quantités réelles quelconques indépendantes ; lorsqu'elles varient d'une manière continue, on dit que z varie d'une manière continue; si y est nul, on a le cas particulier d'une variable réelle.

On voit que la variation de z est indéterminée.

En considérant x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, la position du point donne la valeur de z, et la courbe qu'il décrit figure sa variation.

La variable réelle décrit l'axe des x, la variable $z = y\sqrt{-1}$ décrit l'axe des y.

Le module de z est $+\sqrt{x^2+y^2}$; de sorte que si, pour une valeur particulière de x et y, z est représenté par le point A (*fig.* 1), OA est le module.

On peut aussi représenter la variable z par le symbole

$$r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

r est le module et p s'appelle l'argument.

Quand on égale deux quantités imaginaires, on égale séparément les parties réelles et les coefficients de l'imaginaire, de sorte que le module est déterminé, l'argument ne l'est pas; on peut le supposer pris dans l'intervalle d'une circonférence. Ainsi, quand deux quantités imaginaires sont égales, les modules sont égaux et les arguments égaux à un nombre entier de circonférences près.

Pour qu'une variable imaginaire soit infiniment petite, il faut et il suffit que son module soit infiniment petit.

Le point z est déterminé si r varie de 0 à $+\infty$, et l'argument dans l'intervalle d'une circonférence. L'angle xOA peut représenter l'argument.

La grandeur et la direction de OA peuvent donc servir à représenter une variable imaginaire, peu importe sa position dans le plan. La projection de OA sur Ox, Oy, donne les valeurs de x et y.

Représentons ainsi plusieurs quantités imaginaires OA, AB, BC (*fig.* 2); d'après le théorème des projections, la somme sera représentée par OC. Il en résulte que le module d'une somme est plus petit que la somme des modules.

Selon qu'on parcourra la ligne qui la représente dans un sens ou dans l'autre, la quantité imaginaire changera de signe. Ainsi, OB $=$ OA $+$ AB

$=$ OA — BA. Cela résulte de la manière de compter les angles dans le théorème des projections.

Nous appellerons ces figures, figures imaginaires. Alors, dans un polygone imaginaire, un côté est égal à la somme des autres; ou, en parcourant le polygone fermé dans le même sens, la somme des côtés est égale à zéro; les modules des côtés imaginaires sont représentés par les côtés réels.

D'après ce qui précède, il est aisé de représenter, soit une somme, soit une différence de quantités imaginaires. On peut aussi représenter un produit, d'après ce principe que le module du produit est le produit des modules des facteurs, et l'argument la somme des arguments. On peut aussi représenter un quotient.

Si le point z décrit une courbe AB (*fig.* 3), OA, OB étant les valeurs extrêmes de z, la somme de ses variations est représentée par la courbe imaginaire AB; mais on a : $OB - OA = AB$, de sorte que la somme des variations de z, en allant du point A au point B, est indépendante du chemin parcouru.

Si on a entre les lignes imaginaires OA, OB, O′A′, O′B′ (*fig.* 4) l'égalité $\frac{OA}{OB} = \frac{O'A'}{O'B'}$, la même égalité subsiste entre les modules, et les angles O, O′ sont égaux. Cela tient à ce qu'une égalité entre quantités imaginaires se dédouble; on a d'une part l'égalité entre les modules, d'autre part l'égalité entre les arguments, à un nombre entier de circonférences près.

Ainsi, quand deux polygones imaginaires ont les côtés imaginaires proportionnels, les côtés réels sont proportionnels et les angles sont égaux, c'est-à-dire que les polygones réels sont semblables.

Une fonction u d'une variable imaginaire z est une fonction de la forme $X + Y\sqrt{-1}$, X, Y sont des fonctions réelles quelconques de x et y. Quand X et Y varient d'une manière continue avec x et y, on dit que u est une fonction continue de z.

De même qu'on peut représenter la variable z par la position d'un point dans un plan, à l'aide des coordonnées rectangulaires x et y, on peut représenter la fonction u par la position d'un point dans un plan, à l'aide des coordonnées rectangulaires X, Y.

u peut avoir plusieurs valeurs pour une valeur initiale de z; considérons une de ces valeurs et faisons varier z ; si z décrit une courbe, u décrit une courbe correspondante. Quand z va d'un point A à un point B par divers chemins, dans une portion du plan, u acquiert diverses valeurs et décrit diverses courbes partant d'un même point A′. Si la fonction u acquiert la même valeur, c'est-à-dire si le point u arrive au même point B′ quand z arrive au même point B, par divers chemins, u est *monodrome* dans la portion du plan parcourue par z. Si z décrit une courbe fermée, la fonction *monodrome* u décrit une courbe fermée.

Il n'est pas étonnant que la fonction u n'arrive pas toujours au même point quand z y arrive. Par exemple, si $z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$, pour une valeur initiale de z, u a une certaine valeur et part d'un certain point. En faisant varier z, z arrive à un point déterminé par un module et un argument; or, on peut faire arriver z à ce point par divers chemins, en lui donnant le même module et augmentant l'argument de plusieurs circonférences, et il est bien possible que la fonction u ne conserve pas la même valeur quand l'argument augmente de plusieurs circonférences.

Une fonction rationnelle de z est monodrome dans toute l'étendue du plan, par exemple $z^2 - 3z$; de même quand X, Y sont des fonctions rationnelles quelconques de x et y. Par exemple, la fonction

$$x^2 - 3xy + (y^2 - x)\sqrt{-1}$$

est monodrome.

Si u est continu, à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction. La limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, s'appelle dérivée. On la représente par $\frac{du}{dz}$.

On a
$$u = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dx}\sqrt{-1} + \left(\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy}\sqrt{-1}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy}{dx}\sqrt{-1}}$$

de sorte que la dérivée dépend généralement de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire de la direction du déplacement infiniment petit du point z, et pour une même valeur de z la fonction peut avoir une infinité de dérivées.

Lorsque la valeur de la dérivée est indépendante de la direction du déplacement du point z, c'est-à-dire lorsque la fonction admet une dérivée unique en chaque point, la fonction est *monogène*.

Comme on applique par convention aux quantités imaginaires les règles du calcul des quantités réelles, pour qu'une fonction soit monogène il faut que :

$$\frac{dX}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dY}{dx} = \frac{\frac{dX}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dY}{dy}}{\sqrt{-1}}$$

ou

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \qquad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx}$$

Ces conditions expriment que la dérivée ne change pas quand le point z se déplace, soit parallèlement à Ox, soit parallèlement à Oy. On en conclut :

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{d^2X}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

c'est-à-dire que les deux fonctions X, Y satisfont à l'équation aux différences partielles :

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{d^2t}{dy^2} = 0$$

Soit une fonction monogène. z décrit successivement deux courbes partant du point A (*fig.* 5); u décrit deux courbes correspondantes partant de A'. Les deux arcs imaginaires infiniment petits partant de A sont dz, d_1z; ceux qui partent de A' sont du, d_1u. Or, parce que la fonction est monogène, $du = f'(z)\,dz$, $d_1z = f'(z)\,d_1z$; d'où :

$$\frac{du}{d_1u} = \frac{dz}{d_1z}$$

on en conclut que les courbes décrites par u font le même angle que les courbes décrites par z.

Une fonction peut être monodrome sans être monogène, et monogène sans être monodrome. Par exemple, la fonction $u = x^2 + y\sqrt{-1}$ est monodrome sans être monogène. La fonction définie par l'équation $u^2 - 3z = 0$ est monogène sans être monodrome. En général, une fonction définie par l'équation algébrique $f(u, z) = 0$ est monogène, elle peut ne pas être monodrome. Une fonction peut être monodrome sans être continue; par exemple:

$$u = \frac{1}{z}$$

et continue sans être monodrome; par exemple:

$$u = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p) + 2kp$$

Quand une fonction monodrome est discontinue, c'est qu'elle passe par l'infini. Ainsi, une fonction monodrome continue est finie, et monodrome finie est continue. On pourrait se contenter d'énoncer deux conditions sur trois, mais on les énonce ordinairement toutes les trois.

La fonction est monogène quand la dérivée est indépendante de $\frac{dy}{dx}$, cela ne veut pas dire que cette dérivée soit monodrome; par exemple, la fonction u définie par $u^2 - z - 1 = 0$, est une fonction monogène, $\frac{du}{dz} = \frac{1}{2u}$. Cette dérivée n'est pas monodrome. Mais si la fonction u est monodrome et monogène, la dérivée est monodrome; car, quand z va de A ou B par divers chemins, u arrive au même point, donc lim $\frac{du}{dz}$ a la même valeur.

Une fonction finie, continue, monodrome, monogène, dans toute l'étendue du plan, est *synectique* : par exemple la fonction entière de z, $u = 3z^2 - 4z$.

Une fonction finie, continue, monodrome, monogène, quand z varie dans une portion de plan, est *synectique* dans cette portion de plan.

Il est très-important de savoir si une fonction est synectique, mais avant tout il faut en fixer le sens. Après avoir défini les fonctions d'une variable réelle, on définit les fonctions d'une variable imaginaire à l'aide de conventions nouvelles. Comme on verra qu'il est avantageux, particulièrement pour le développement des fonctions en séries, de conserver aux fonctions la continuité dans le plus grand intervalle possible, il faudra adopter les conventions les plus favorables à la continuité, et, en faisant varier z, prendre pour les limites de la variation de l'argument p, celles qui maintiendront ce caractère le plus longtemps possible.

Les solutions de continuité sont en effet une conséquence immédiate des conventions à l'aide desquelles on fixe le sens des fonctions, de sorte qu'en passant d'un système de conventions à un autre, on peut rendre discontinues des fonctions qui étaient continues, et réciproquement.

Voici des exemples:

Soit la fonction réelle $$y = \text{arc tang } x$$

x variant de $-\infty$ à $+\infty$; y n'est pas déterminé.

Convenons de le prendre dans l'intervalle d'une demi-circonférence.

Si y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, pour x très-petit négatif, puis nul, puis positif, y sera continu. Si, au contraire, y varie de 0 à π, x variant d'une manière continue du négatif au positif en passant par zéro, y sera discontinu, il passera brusquement de π à la quantité positive infiniment petite α.

Soit la fonction de z

$$u = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{p}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}\right), \quad z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

ou

$$z = x + y\sqrt{-1}.$$

Convenons de faire varier p de $-\pi$ à $+\pi$. z a la même valeur pour $p = -\pi$, $p = +\pi$, mais u n'a pas la même valeur; convenons de faire varier p de $-\pi$ qu'il ne peut atteindre, à $+\pi$ qu'il atteint. Quand z variera d'une manière continue, d'une valeur négative à une valeur pour laquelle y sera négatif, p variera brusquement de π à une valeur voisine de $-\pi$, c'est-à-dire sera discontinu; il en sera de même de u qui passera brusquement de la valeur $r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$ à $-r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$. Si, au contraire, z varie d'une manière continue, d'une valeur négative à une valeur pour laquelle y est positif, il y a continuité dans la valeur de p qui reste dans le voisinage de π et dans la fonction qui garde la valeur voisine de $r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$.

Supposons maintenant [redacted] de 0 à 2π. z a la même valeur pour

0 et 2π, mais u a des valeurs différentes ; convenons de faire varier p de 0 qu'il atteint, à 2π qu'il ne peut atteindre. Étudions les variations de la même fonction $u = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{p}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}\right)$. Faisons varier z d'une manière continue, d'une valeur négative à une valeur dans laquelle y est négatif : il y a continuité dans la variation de l'argument qui reste dans le voisinage de π et de la fonction qui reste dans le voisinage de $r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$; mais si z varie d'une manière continue, d'une valeur positive à une valeur pour laquelle y est négatif, il y a discontinuité dans la valeur de p qui passe brusquement de 0 à 2π, et dans la fonction qui passe de $r^{\frac{1}{2}}$ à $-r^{\frac{1}{2}}$.

On voit, d'après ces exemples, comment les solutions de continuité sont des conséquences des conventions adoptées.

Soit en général
$$u = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{p}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}\right)$$
n entier. En faisant varier p dans l'intervalle de 0 à 2π, si z varie d'une manière continue, d'une valeur positive à une valeur pour laquelle y est négatif, p sera discontinu, il passera de 0 à 2π, et u sera aussi discontinu ; mais si z varie d'une manière continue, d'une valeur négative à une valeur pour laquelle y est négatif, il y a continuité dans l'argument et la fonction. L'inverse se présenterait si on faisait varier p de $-\pi$ à π, de sorte qu'il y a à la fois des avantages et des inconvénients à faire varier p de 0 à 2π, ou de $-\pi$ à π.

Soit
$$u = \log r + p\sqrt{-1}$$
si p varie de 0 à 2π, z variant d'une manière continue, d'une valeur positive à une valeur pour laquelle y est négatif, p passe brusquement de 0 à 2π, il y a discontinuité dans la valeur de p et dans la fonction. Il y aurait continuité si z variait d'une manière continue, d'une valeur négative à une valeur pour laquelle y serait négatif ou positif. L'inverse aurait lieu si p variait de $-\pi$ à π.

En général, on fera varier p de $-\pi$ qu'il ne peut atteindre, à π qu'il peut atteindre, ou de 0 qu'il atteint, à 2π qu'il n'atteint pas.

Mais pour voir si une fonction est monodrome dans toute l'étendue du plan, il faut faire varier p au-delà d'une circonférence, pour s'assurer si la fonction revient à la même valeur quand z y revient.

Reprenons la fonction $u = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{p}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}\right)$ en faisant varier p de 0 à 2π inclusivement, ce qui ramène z au même point, ou de $-\pi$ à π, u ne reprend pas la même valeur. Ainsi, cette fonction n'est pas monodrome dans une portion de plan comprenant l'origine.

La fonction $e^{\frac{1}{z-1}}$ est monogène, mais elle n'est pas monodrome dans toute l'étendue du plan, elle ne l'est que pour la portion de plan qui ne contient pas $z = 1$; par conséquent, si on imagine différents cercles décrits de l'origine comme centre, cette fonction est synectique seulement dans l'intérieur des cercles de rayons plus petits que 1. Soit, en effet (*fig.* 6), $OA = 1$, $OB = z$, $AB = z - 1$. Désignons le module AB par r et comptons les angles à partir de A, $\frac{1}{z-1} = \frac{\cos p - \sqrt{-1}\sin p}{r}$. Quand le point z arrive au point A en suivant l'axe des x de O vers A, $\frac{1}{z-1}$ est infiniment grand négatif; il est au contraire infiniment grand positif quand le point z arrive en A, de x vers A; ainsi, la fonction $e^{\frac{1}{z-1}}$ peut être infiniment petite ou infiniment grande au point A, et même l'expression

$$\frac{\cos p - \sqrt{-1}\sin p}{r}$$

quand on arrive au point A, peut prendre une infinité de valeurs, puisque p a une valeur quelconque.

La fonction $\sqrt{1+z}$ n'est pas monodrome pour la portion de plan comprenant le point $z = -1$. Soit, en effet, $OA = -1$ (*fig.* 7), si B est le point z, en comptant les angles à partir de A et désignant le module AB par r, $1 + z = r\,(\cos p + \sqrt{-1}\sin p$,

$$\sqrt{1+z} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{p}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}\right)$$

On sait que cette fonction n'est pas monodrome autour du point A.

§ 2.

On rencontre dans l'analyse plusieurs fonctions qui ne se définissent d'une manière nette qu'à l'aide des séries ; nous allons rappeler quelques-unes des propriétés importantes des séries.

Par définition, la série imaginaire

$$u_0 + v_0 \sqrt{-1} + u_1 + v_1 \sqrt{-1} \ldots\ldots$$

est convergente si les deux séries réelles $u_0 + u_1 \ldots\ldots v_0 + v_1 \ldots\ldots$ sont convergentes. Si une au moins des séries réelles est divergente, la série imaginaire l'est. La série imaginaire peut s'écrire :

$$r_0 (\cos p_0 + \sqrt{-1} \sin p_0) + r_1 (\cos p_1 + \sqrt{-1} \sin p_1) \ldots\ldots$$

Si la série des modules est convergente, la série imaginaire l'est ; si la série des modules est divergente, la série imaginaire peut être convergente. Cependant, si la série des modules est divergente parce que $\lim \frac{r_{n-1}}{r_n} > 1$, la série imaginaire est divergente.

Si la série imaginaire est convergente parce que la série des modules l'est, chacune des séries réelles est convergente, même en prenant les termes en valeur absolue.

Quand une série à termes réels de signe quelconque divergente reste convergente lorsqu'on prend tous les termes positivement, on peut mettre les termes dans tel ordre qu'on voudra ; la série reste convergente et a la même somme. On en conclut que, quand une série imaginaire est convergente parce que la série des modules est convergente, on peut intervertir l'ordre des termes ; la série reste convergente et a la même somme.

Quand on multiplie les termes d'une série convergente réelle à termes positifs par des nombres de signes quelconques finis, on obtient une autre série convergente.

Étant donnée une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes d'une variable imaginaire, si, pour une valeur de la variable dont le module est R, les modules des termes de la série restent finis, la série sera convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est plus petit que R ; ainsi la série sera convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon R, c'est-à-dire quand on donnera à z une valeur marquée par un point de l'intérieur du cercle, et même la série des modules sera convergente.

Si on a une série double

$$\ldots u_{-2}z^{-2} + u_{-1}z^{-1} + u_0 + u_1 z \ldots$$

r étant le plus petit module de z pour lequel les modules des termes de la seconde série restent finis, la série sera convergente dans l'intérieur de la couronne comprise entre les cercles de rayon r, R.

Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable est une fonction continue et monodrome dans l'intérieur du cercle de convergence.

Lorsqu'une série est ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable, la série des intégrales définies est convergente dans l'intérieur des cercles de convergence et représente l'intégrale de la série.

Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable a toutes ses dérivées convergentes dans l'intérieur du cercle de convergence ; hors du cercle, la série des dérivées est divergente.

Lorsqu'une série est ordonnée suivant les puissances croissantes et entières de la variable, la série des dérivées représente la dérivée de la série dans l'intérieur du cercle de convergence.

Soit, en effet :

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 \ldots$$
$$\varphi'(z) = u_1 + 2u_2 z \ldots$$

on en tire :

$$\varphi(z) = u_1 z + u_2 z^2 \ldots = f(z) + c$$

d'où on conclut :

$$\varphi'(z) = f'(z)$$

On peut aussi donner la démonstration suivante :

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 \ldots$$

en restant dans l'intérieur du cercle de convergence :

$$f(z+h) = u_0 + u_1 (z+h) + u_2 (z+h)^2 \dots$$

Comme on peut mettre les termes dans l'ordre qu'on voudra :

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\,h \dots.$$

$f'(z)$ représente la série des dérivées ; on en conclut :

$$\lim \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable est une fonction monogène dans l'intérieur du cercle de convergence.

Ainsi, les séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable sont des fonctions finies, continues, monodromes, monogènes, c'est-à-dire synectiques, dans l'intérieur du cercle de convergence.

§ 3.

Soit une fonction $f(z)$ synectique dans une certaine étendue de plan.

Considérons la valeur de l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, quand la variable z va du point fixe z_0 au point fixe z, par deux chemins infiniment voisins dans la portion de plan pour laquelle $f(z)$ est synectique. Il est aisé de voir que cette valeur reste la même.

Nous désignerons par la lettre d un déplacement infiniment petit sur une courbe, et par la lettre δ le déplacement du point z, lorsqu'il va d'une courbe à la courbe infiniment voisine.

Démontrons d'abord que $\delta dz = d\delta z$.

On va de z_0 à z (*fig.* 8) par une première courbe AB et une seconde A'B'. Les deux courbes ont été partagées en un même nombre d'éléments, et AB, A'B' sont des éléments correspondants.

$$\mathrm{AB} = dz, \quad \mathrm{A'B'} = d_1 z, \quad \mathrm{AA'} = \delta z, \quad \mathrm{BB'} = \delta z_1$$

$$\mathrm{BB'} - \mathrm{AA'} = \delta z_1 - \delta z = d\delta z$$

$$\mathrm{A'B'} - \mathrm{AB} = d_1 z - dz = \delta dz$$

Dans le quadrilatère imaginaire $AA'BB'$, on a :

$$AA' + A'B' + B'B + BA = 0$$

ou

$$BB' - AA' = A'B' - AB \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'après l'hypothèse faite sur $f(z)$, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$, quand on va de z_0 à z par un certain chemin, est une fonction de z finie et continue. Si on va de z_0 à z par un second chemin infiniment voisin, en partageant les deux courbes en un même nombre d'éléments correspondants, la valeur de l'intégrale subit la variation :

$$\delta \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z} \delta \{ f(z)\, dz \}$$

Il est aisé de voir que cette variation est nulle. Comme la fonction $f(z)$ est monodrome, on peut, pour avoir sa valeur en A', prendre le chemin $z_0\, AA'$, de sorte que la valeur en A' s'obtiendra en ajoutant à la valeur en A la variation relative au déplacement AA'. On peut donc écrire :

$$\delta \{ f(z)\, dz \} = \{ \delta f(z) \} dz + f(z)\, \delta dz$$

mais $\delta dz = d\delta z$, et comme $f(z)$ est monogène, $\delta f(z) = f'(z)\, \delta z$; de même $df(z) = f'(z)\, dz$; donc :

$$\delta \{ f(z)\, dz \} = f'(z)\, dz\, \delta z + f(z)\, d\delta z = d \{ f(z)\, \delta z \}$$

par suite :

$$\int_{z_0}^{z} \delta \{ f(z)\, dz \} = \int_{z_0}^{z} d \{ f(z)\, \delta z \} = 0$$

puisque les points extrêmes sont fixes.

La valeur de l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\, \delta z$ est donc invariable quand le point z va du point fixe z_0 au point fixe z par deux chemins infiniment voisins.

La dérivée $f'(z)$ peut passer par l'infini un nombre fini de fois, le résultat sera le même.

Soient, en effet, a et b deux valeurs de z pour lesquelles $f'(z)$ est infini ; on a :

$$\delta \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{a-\varepsilon} d\,\{f(z)\,\delta z\} + \int_{a+\varepsilon'}^{b-\mu} d\{f(z)\,\delta z\} + \int_{b+\mu'}^{z} d\,\{f(z)\,\delta z\}$$

$$+ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \delta\,\{f(z)\,dz\} + \int_{b-\mu}^{b+\mu'} \delta\,\{f(z)\,dz\}$$

Pour ε, ε', μ, μ' très-petits, les termes de la seconde ligne sont aussi petits qu'on veut. On a de même :

$$d \int_{z_0}^{z} f(z)\,\delta z = \text{la même première ligne.}$$

$$+ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon'} d\,\{f(z)\,\delta z\} + \int_{b-\mu}^{b+\mu'} d\,\{f(z)\,\delta z\}$$

Les termes de la seconde ligne sont aussi petits qu'on veut. Donc :

$$\delta \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} \delta\,\{f(z)\,dz\} = \int_{z_0}^{z} d\,\{f(z)\,\delta z\}$$

Ainsi, $f(z)$ étant synectique dans une portion de plan, et $f'(z)$ passant par l'infini un nombre fini de fois, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,\delta z$ garde la même valeur quand le point z va du point fixe z_0 au point fixe z par deux chemins infiniment voisins dans cette portion de plan.

Il en résulte que cette intégrale garde la même valeur quand le point z va du point fixe z_0 au point fixe z par diverses courbes, à des distances finies les unes des autres, dans une portion de plan pour laquelle $f(z)$ est synectique, pourvu que ces courbes soient parcourues de telle sorte qu'on puisse les ramener à la première par des transformations successives.

L'intégrale est donc une fonction monodrome. Si on la désigne par

$u = X + Y\sqrt{-1}$, on peut représenter sa valeur à l'aide des coordonnées rectangulaires X, Y; quand z va de z_0 à z, u va de A à B par divers chemins, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ est représentée (*fig.* 9) par la quantité fixe OB — OA.

L'intégrale est évidemment une fonction monogène, elle est donc synectique. Désignons-la par F (z), $\int_{z_0}^{z} F(z)\,dz$ sera synectique, et ainsi de suite à l'infini.

Supposons que le point z parcourt une courbe fermée dans une portion de plan pour laquelle $f(z)$ est synectique.

L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long du contour sera nulle, parce que l'intégrale prise de A à B (*fig.* 10) est égale et de signe contraire à l'intégrale prise de B à A.

De même l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise sur le contour d'une courbe ABCA (*fig.* 11), vaut l'intégrale prise sur le contour d'une courbe DEF, si dans la portion de plan comprise entre ces deux courbes $f(z)$ reste synectique; car l'intégrale sur le chemin ABCA vaut l'intégrale prise sur le chemin ADEFDA, et les deux portions d'intégrales sur AD et sur DA se détruisent. On suppose les chemins parcourus dans le même sens.

A l'aide des principes qui précèdent, il est aisé de développer les fonctions en série.

Suposons que $f(z)$ soit une fonction synectique dans l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon R, cette fonction sera développable en série convergente dans le cercle de rayon R, et ordonnée suivant les puissances de z pour le point considéré. Car, soit un point t, je dis qu'on aura :

(*fig.* 12) $$f(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 \ldots.$$

Considérons la fonction :

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t} = \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ sera synectique comme $f(z)$, excepté peut-être au point t. Peu importe que la dérivée $\varphi'(z)$ passe comme $f(z)$ par l'infini un nombre fini de fois. Comme $\varphi(z)$ est monogène, pour $z = t$ $\varphi(z)$ tend vers $f'(t)$. $f'(z)$ n'est pas toujours infinie, supposons-la donc finie au point t, $\varphi(z)$ sera synectique dans toute l'étendue du cercle, sans exception. Concevons un cercle de rayon ρ moindre que R et enveloppant t, décrit de 0 comme centre. Quand z parcourra ce cercle, on aura :

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{z - t}\, dz = 0$$

ou

$$f(t) \int \frac{dz}{z - t} = \int \frac{f(z)}{z - t}\, dz \tag{1}$$

Cette équation peut se démontrer directement.

Décrivons autour du point t comme centre un cercle de rayon r' contenu dans le cercle de rayon ρ. $\frac{f(z)}{z-t}$ étant synectique dans l'intervalle des cercles de rayons ρ et r', l'intégrale prise sur les deux cercles aura la même valeur ; prenons-la sur le cercle de rayon r', En comptant les angles à partir du centre t, $z - t = r' e^{\theta\sqrt{-1}}$, $\frac{dz}{z-t} = d\theta\sqrt{-1}$

d'où :

$$\int \frac{f(z)}{z - t}\, dz = \int f(t + r' e^{\theta\sqrt{-1}})\, d\theta \sqrt{-1}$$

Concevons r' infiniment petit. La fonction $f(z)$ étant monogène, d'après la définition même de la dérivée, on a :

$$f(t + r' e^{\theta\sqrt{-1}}) = f(t) + f'(t)\, r' e^{\theta\sqrt{-1}} + \varepsilon r' e^{\theta\sqrt{-1}}$$

d'où :

$$\int \frac{f(z)\, dz}{z - t} = f(t) \int \frac{dz}{z - t}$$

l'intégrale des deux derniers termes étant nulle. Ainsi l'équation (1) est démontrée. Mais comme $\frac{dz}{z-t} = d\theta\sqrt{-1}$, on a :

$$\int \frac{dz}{z - t} = 2\pi \sqrt{-1}$$

d'où :

(2) $$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-t}\, dz$$

Remarquons que z est un point de la circonférence de rayon ρ envelop-pant t, d'où mod $z >$ mod t. On peut donc remplacer $\frac{1}{z-t}$ par la série convergente :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \frac{t^2}{z^3} \cdots$$

par suite $\frac{f(z)}{z-t}$ peut se développer en série convergente, et en prenant les intégrales définies des différents termes, l'équation (2) devient :

(3) $$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int \frac{f(z)}{z}\, dz + t \int \frac{f(z)}{z^2}\, dz + t^2 \int \frac{f(z)}{z^3}\, dz \ldots \right)$$

Chaque intégrale étant prise le long d'un contour fini est finie ; on a donc l'équation :

(4) $$f(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 \ldots$$

c'est-à-dire que $f(t)$ se développe en série convergente.

Un coefficient quelconque est fourni par la formule :

(5) $$u_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\, dz}{z^{n+1}}$$

L'intégrale $\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$ peut être prise sur un cercle de rayon r quelconque $<$ R, parce que $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$ est synectique entre le cercle de convergence R et un cercle concentrique quelconque.

Posons $$z = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

on aura :

(6) $$u_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$$

Par suite, la formule (3) s'écrit :

$$(7)\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta+t\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z}\,d\theta+t^2\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z^2}\,d\theta\ldots\right\}$$

On peut trouver tous les coefficients u_n directement.

Supposons en effet r infiniment petit, ce qui est permis ; on aura :

$$f(z)=f(0+re^{\theta\sqrt{-1}})=f(0)+f'(0)re^{\theta\sqrt{-1}}+\varepsilon re^{\theta\sqrt{-1}}$$

d'où :

$$\int f(z)\,d\theta=2\pi f(0)$$

$$\int\frac{f(z)}{z}\,d\theta=\int\frac{f(z)-f(0)}{z}\,d\theta,\ \text{parce que}\ \int\frac{f(0)}{z}\,d\theta=0$$

Mais $\int\frac{f(z)-f(0)}{z}$ diffère infiniment peu de $f'(0)$; d'où :

$$\int\frac{f(z)}{z}\,d\theta=2\pi f'(0)$$

$$\int\frac{f(z)}{z^2}\,d\theta=\int\frac{f(z)-zf'(0)-f(0)}{z^2}\,d\theta=2\pi\frac{f''(0)}{1.2},\ \text{etc.}$$

On a donc :

$$(8)\qquad f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{1.2}\cdots$$

Au reste, on peut trouver bien simplement les coefficients de la formule (4), car on peut prendre les dérivées des divers ordres des deux membres et les égaler, pourvu qu'on ne sorte pas du cercle de convergence ; en faisant $t=0$, on trouve immédiatement la valeur des coefficients.

La formule (8) est donc démontrée. Elle équivaut à la formule simple (2) ou à la formule (7) qu'on peut écrire :

$$(9)\qquad f(t)=\sum_0^{\infty}{}_n\frac{t^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}z^{-n}f(z)\,d\theta$$

t est un point quelconque du cercle de convergence, excepté le point où

$f'(t)$ est infinie ou discontinue. Mais les deux membres de la formule (8) étant des fonctions continues, cette formule subsiste même en ces points. D'ailleurs la formule (8) donne :

$$f'(t) = f'(0) + f''(0)t \ldots.$$

c'est-à-dire que $f'(t)$ ne peut être infinie ou discontinue, et la circonstance d'exception ne se présente pas.

On voit que, lorsqu'une fonction est synectique dans une certaine étendue de plan, il en est de même des dérivées dans la même étendue.

Ainsi, pour qu'une fonction soit développable en série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable et convergente dans le cercle décrit de l'origine comme centre, il est nécessaire et il suffit que la fonction soit synectique dans ce même cercle. Cette condition est nécessaire, parce que la série est synectique; cette condition est suffisante, car le développement a lieu si la fonction est synectique.

On peut supposer que z est un point de l'axe des x, et on a le développement dans le cas de la variable réelle.

Le développement qui a été trouvé donne la formule :

$$f^n(0) = \frac{1 2 \ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}} d\theta \tag{10}$$

Soit une fonction synectique autour de A, h la valeur variable AB (*fig.* 13), B étant dans l'intérieur du cercle de convergence, décrit autour de A comme centre. Appelons z la quantité fixe OA, on aura $\mathrm{OB} = z + h$, et on pourra développer $f(z+h)$ comme fonction de h. D'après la formule précédente :

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + f''(z)\frac{h^2}{1.2} \ldots. \tag{11}$$

on en conclut :

$$f^n(z) = \frac{1 2 \ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}} d\theta \tag{12}$$

r est un rayon quelconque plus petit que le rayon du cercle de convergence décrit autour de A comme centre.

Lorsqu'une fonction est synectique dans la portion de plan comprise entre deux cercles ayant pour centre l'origine des coordonnées, elle est développable en une double série ordonnée, suivant les puissances entières, positives et négatives de la variable, et convergente dans cette portion de plan.

Soit t (*fig.* 14) un point intérieur de la couronne, R grand rayon, R' petit rayon, $r < R$ cercle extérieur à t, $r' > R'$ cercle intérieur à t.

Posons :

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t} = \varphi(z)$$

Si $f'(t)$ est finie, $\varphi(z)$ sera comme $f(z)$ synectique dans l'intérieur de la couronne. Désignons par les indices r, r' les intégrales prises sur les cercles r, r', on aura :

$$\int_r \frac{f(z) - f(t)}{r - t}\, dz = \int_{r'} \frac{f(z) - f(t)}{z - t}\, dz$$

d'où

$$(13) \qquad \int_r \frac{f(z)}{r - t}\, dz - f(t) \int_r \frac{dz}{z - t} = \int_{r'} \frac{f(z)}{z - t}\, dz - f(t) \int_{r'} \frac{dz}{z - t}$$

Mais $\int_{r'} \frac{dz}{z - t} = 0$; car $\frac{1}{z - t}$ est synectique dans l'intérieur du cercle r'. On peut d'ailleurs le voir directement. Comptons les angles à partir du point t, on aura :

$$z - t = tA = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

$$\frac{dz}{z - t} = \frac{d\rho}{\rho} + \sqrt{-1}\, d\theta$$

En prenant l'intégrale sur le cercle de rayon r', ρ et θ reviennent à la même valeur ; donc l'intégrale est nulle.

D'un autre côté, $\int_r \frac{dz}{z - t} = 2\pi\sqrt{-1}$. Alors l'équation (13) devient :

$$(14) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left\{ \int_r \frac{f(z)}{z - t}\, dz + \int_{r'} \frac{f(z)}{t - z}\, dz \right\}$$

On pourra développer $\frac{1}{z-t}$ et $\frac{1}{t-z}$ en série et prendre les intégrales sur un cercle de rayon quelconque r dans l'intérieur de la couronne. En posant $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$, d'où $\frac{dz}{z} = d\theta\sqrt{-1}$, l'équation (14) devient, en remplaçant t par z :

$$(15) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, z^n \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta\sqrt{-1}})\, e^{-n\theta\sqrt{-1}} d\theta$$

On peut aussi développer en série une fonction de plusieurs variables imaginaires.

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables imaginaires, synectique, quand chaque variable reste dans une portion de plan.

Supposons deux points fixes x, y, et décrivons autour de ces points deux cercles R, R′ dans l'intérieur desquels la fonction reste synectique. Changeons x en $x + h$, y en $y + h$, sans quitter l'intérieur des cercles R, R′.

Posons :

$$u = x + th, \qquad v = y + tk$$

t étant une variable imaginaire de module plus petit que 1, $f(u, v)$ est une fonction synectique de t quand t se meut dans le cercle de rayon 1 décrit de l'origine comme centre, d'où :

$$f(u, v) = \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}'(0)\, t \ldots .$$

mais

$$\mathrm{F}^n(t) = \left(h \frac{df}{du} + k \frac{df}{dv}\right)^n \text{ formule symbolique}$$

$$\mathrm{F}^n(0) = \left(h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy}\right)^n$$

d'où, en faisant $t = 1$:

$$(16) \quad f(x+h, y+k) = f(x, y) + \sum_1^{\infty} \frac{\left(h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy}\right)^n}{1 \ldots n}$$

série ordonnée suivant les puissances croissantes de h, k, et convergente dans les cercles de rayons R, R′.

On peut obtenir les coefficients au moyen d'intégrales définies.

En appliquant la formule (12), on trouve :

$$(17)\qquad \frac{d^{n+n'}}{dx^n\, dy^{n'}} f(x, y) =$$

$$\frac{1..n}{2\pi r^n}\,\frac{1..n'}{2\pi r'^{n'}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}},\ y + r'e^{\theta'\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, e^{-n'\theta'\sqrt{-1}}\, d\theta\, d\theta'$$

Le développement en série d'une fonction de plusieurs variables peut être trouvé directement.

Soit $f\,(x, y)$ une fonction de deux variables imaginaires, synectique quand chaque variable se meut dans un cercle décrit de l'origine comme centre. Considérons la fonction

$$\frac{f(x, t') - f(t, t')}{x - t}$$

t et t' étant deux points pris dans l'intérieur des cercles pour lesquels la fonction est synectique. Cette fonction est une fonction de x synectique comme $f(x, y)$, en supposant que la dérivée prise par rapport à x soit finie pour $x = t$, on en conclut :

$$\int \frac{f(x, t') - f(t, t')}{x - t}\, dx = 0$$

en prenant l'intégrale sur un cercle enveloppant t, dans l'intérieur du cercle pour lequel la fonction est synectique. Par suite, en prenant l'intégrale sur un cercle enveloppant t' dans l'intérieur du cercle pour lequel la fonction est synectique, lorsqu'on fait varier y :

$$\int\int \frac{f(x, t') - f(t, t')}{(x - t)\,(y - t')}\, dx\, dy = 0$$

Mais la fonction :

$$\frac{f(x, y) - f(x, t')}{y - t'}$$

est synectique, en supposant que la dérivée par rapport à y soit finie pour $y = t'$; d'où :

$$\int \frac{f(x, y) - f(x, t')}{y - t'}\, dy = 0$$

en prenant l'intégrale sur le cercle enveloppant t'. Par suite :

$$\int\int \frac{f(x, y) - f(x, t')}{(x-t)\,(y-t')}\, dx\, dy = 0$$

On conclut de cette équation et des équations précédentes :

$$\int\int \frac{f(x, y)}{(x-t)\, y-t')}\, dx\, dy = \int\int \frac{f(t, t')}{(x-t)\,(y-t')}\, dx\, dy$$

mais $f(t, t')$ sort du signe $\int$, et on a :

$$\int \frac{dx}{x-t} = 2\pi\sqrt{-1} = \int \frac{dy}{y-t'}$$

d'où :

$$(18) \qquad f(t, t') = \frac{1}{(2\pi)^2\,(\sqrt{-1})^2} \int\int \frac{f(x, y)}{(x-t)\,(y-t')}\, dx\, dy$$

Comme le module de t est plus petit que le module de x, et celui de t' plus petit que celui de y, on peut développer $\frac{1}{x-t}$, $\frac{1}{y-t'}$, en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de t et t'. Alors $\frac{f(x, y)}{(x-t)\,(y-t')}$ sera développé en série convergente ordonnée suivant les puissances de t, t'; et en prenant les intégrales définies de chaque terme, on aura le développement de $f(t, t')$. Les intégrales pourront être prises sur un cercle quelconque décrit de l'origine comme centre dans l'intérieur dn cercle pour lequel la fonction est synectique pour chaque variable séparément.

Ainsi, voilà $f(t, t')$ développé suivant les puissances entières, ascendantes de t, t', c'est-à-dire que $f(x, y)$ est développé en série pour deux valeurs particulières de x et y.

La formule (18) peut s'écrire :

$$(19) \quad f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int \frac{r r' e^{\theta\sqrt{-1}}\, e^{\theta'\sqrt{-1}}\, f\left(r e^{\theta\sqrt{-1}}, r' e^{\theta'\sqrt{-1}}\right) d\theta\, d\theta'}{\left(r e^{\theta\sqrt{-1}} - x\right)\left(r' e^{\theta'\sqrt{-1}} - y\right)}$$

D'un autre côté on a :

$$(20) \qquad f(x,y) = f(0,0) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\left(\frac{df}{dx_0}x + \frac{df}{dy_0}y\right)^n}{1 \ldots . n}$$

La comparaison des formules (19), (20) donne une double expression des coefficients. On en conclut une formule analogue à la formule (17).

Le développement des fonctions en série permet de démontrer plusieurs propriétés importantes des fonctions. Nous citerons seulement les propriétés suivantes :

1° Lorsqu'une fonction est synectique dans une portion de plan, toutes ses dérivées sont aussi des fonctions synectiques dans la même étendue.

2° Lorsqu'une fonction $f(z)$ synectique dans une certaine portion de plan s'annule pour une valeur $z = a$ comprise dans cette portion de plan, elle est divisible par $(z - a)^n$, n désignant un nombre entier fini, on dit alors que l'équation $f(z) = 0$ a n racines égales à a.

3° Quand une fonction $f(z)$ monodrome et monogène devient infinie pour $z = a$, quel que soit le chemin suivi pour arriver à ce point, on peut la mettre sous la forme :

$$f(z) = \frac{\chi(z)}{(z-a)^n}$$

n désignant un nombre entier fini.

Les deux premières propriétés se démontrent aisément par le développement en série, et la troisième se déduit de la seconde en remarquant qu'on a $\frac{1}{f(z)} = (z - a)^n \varphi(z)$.

Occupons-nous maintenant du développement en série d'une fonction u implicite d'une variable imaginaire z.

Soit u donné par l'équation $f(u, z) = 0$. Nous supposons que $f(u, z)$ est une fonction continue de deux variables u et z. Admettons, ce qui sera démontré plus tard, que les racines de l'équation résolue par rapport à u sont des fonctions continues de z. Plusieurs de ces racines peuvent être égales, c'est-à-dire que plusieurs de ces fonctions u continues de z peuvent se réduire à la même valeur pour un z particulier. Soit $z = a$ un z particulier pour lequel il n'y a pas de racines égales ; faisons varier z de $z = a$

à $z = b$ (*fig.* 15), en suivant un chemin sur lequel il n'y a pas de racines égales, c'est-à-dire que, pour les diverses valeurs de z correspondantes aux différents points de ce chemin, l'équation $f(u, z) = 0$ n'a pas de racines égales. Une des valeurs de u, racine de l'équation pour $z = a$ sera, par exemple, u_1, et arrivera à la valeur u_2 pour $z = b$.

Nous allons démontrer, et c'est là un théorème très-important, que si on suit un chemin infiniment voisin du chemin déjà suivi de $z = a$ à $z = b$, u_1 arrivera encore à la valeur u_2 ; car en suivant le premier chemin, u_1 arrivera en c avec la valeur u'_1 ; les racines de l'équation sont en c, u'_1, u''_1, etc., toutes distinctes par hypothèse, c'est-à-dire différant les unes des autres de quantités finies. En c' voisin de c, les racines de l'équation sont v'_1, v''_1, etc., toutes distinctes, v'_1 différant infiniment peu de u'_1, v''_1 de u''_1, etc. Sur le second chemin, u_1 arrivera en c' avec une des valeurs v'_1, v''_1, etc. ; ce sera précisément v'_1, car les valeurs de u_1 variant d'une manière continue sur deux chemins infiniment voisins, ne peuvent qu'être infiniment voisines en des points correspondants, c'est-à-dire infiniment voisins ; par suite, u_1 sur le second chemin arrivera en b avec la valeur que prendra en b, v'_1 ou u'_1, c'est-à-dire avec la valeur u_2.

On ne pourrait plus faire le même raisonnement si l'équation avait des racines égales en c ; par exemple, si u''_1 se réduisait à u'_1, u_1 pourrait arriver en c' avec la valeur v''_1, et par suite prendre en b non plus la valeur qu'y prend v'_1, mais celle qu'y prend v''_1 ou u''_1 et qui n'est pas u_2.

On peut conclure de ce qui précède que u_1 partant d'un point a pour aller à un point b par deux chemins à une distance finie l'un de l'autre, ne comprenant aucun point pour lequel l'équation $f(u, z) = 0$ a des racines égales, arrivera en b avec la même valeur.

Ainsi, non-seulement u est une fonction continue de z, mais c'est une fonction monodrome.

Supposons maintenant que z entre explicitement dans la fonction $f(u, z)$; u sera monogène, car on tire $\frac{du}{dz}$ de l'équation :

$$\frac{df}{du}\frac{du}{dz} + \frac{df}{dz} = 0$$

On voit bien que $\frac{du}{dz}$ est indépendant de $\frac{dy}{dx}$.

Ainsi, dans ce cas, u sera synectique et pourra être développé en série.

Appelons $\varphi(z)$ une valeur particulière de u, z ayant une valeur déterminée. Décrivons autour du point z un cercle avec un rayon plus petit que la plus petite distance du point z au point pour lequel l'équation $f(u, z) = 0$ a des racines égales .Le module de h étant au plus égal au rayon du cercle, la racine $\varphi(z)$ deviendra pour un point intérieur au cercle ou sur la circonférence :

$$\varphi(z+h) = \varphi(z) + \varphi'(z)h \ldots.$$

Une des racines u de l'équation $f(u, z) = 0$ sera donc développée en série, et ce sera la racine particulière qui, pour $h = 0$, se réduira à $\varphi(z)$, et variera d'une manière continue avec z, sans que le point z sorte du cercle considéré, pour aller de z à $z + h$.

On voit donc comment on peut développer en série une racine de $f(u, z) = 0$; mais il faut reconnaître pour quelle valeur de z l'équation $f(u, z) = 0$ a des racines égales.

Considérons un z particulier ; $f(u, z)$ est généralement une fonction synectique de u qu'on peut développer suivant les puissances de $u - u_0$, u_0 étant la valeur particulière de u qui donne $f(u, z) = 0$ pour le z considéré. D'après la forme même du développement, $f(u, z) = 0$ aura des racines égales, si on a à la fois $f(u, z) = 0$, $\frac{df}{du} = 0$.

En résumé, u sera développable en série, d'après la formule précédente, pour les valeurs de z pour lesquelles on n'aura pas à la fois

$$f(u, z) = 0, \quad \frac{df}{du} = 0$$

Supposons maintenant une fonction continue de u. Cette fonction sera généralement une fonction synectique de z dans les mêmes circonstances que u ; elle sera donc développable comme u en série convergente.

Soit, par exemple, l'équation

$$\text{(A)} \qquad u - z \sin u = \zeta$$

ζ étant une constante réelle ; deux racines de cette équation résolue par rapport à u deviennent égales entre elles quand on attribue à z une valeur telle que cette équation puisse être satisfaite en même temps que sa dérivée

$$(B) \qquad 1 - z \cos u = 0$$

L'équation (A) est vérifiée par $z = 0$, $u = \zeta$, et ces valeurs ne vérifient pas l'équation (B). On en conclut que u tiré de l'équation (A) sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de z, dans l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre, et ayant pour rayon le plus petit module qu'il faut attribuer à z pour que (A) et (B) aient une racine commune. Soit ρ le plus petit module de z, ou le rayon du cercle, on aura :

$$(C) \qquad u = u_0 + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1.2} \cdots$$

La valeur de u ainsi développée sera celle des racines de l'équation (A), qui se réduira à $u_0 = \zeta$ pour $z = 0$, et qui variera d'une manière continue avec z quand z variera du point O au point z sans sortir du cercle de rayon ρ. En particulier, si z est réel et inférieur à ρ, u fourni par la formule (C) sera celle des racines de l'équation (A) qui se réduit à ζ pour $z = 0$, et varie d'une manière continue avec z, quand z va du point O au point z sur l'axe des x.

Quand z est réel, l'équation (A) coïncide avec celle qui donne l'anomalie excentrique d'une planète. u est cette anomalie excentrique, z qu'on représente alors par e est l'excentricité, ζ l'anomalie moyenne, de sorte que l'anomalie excentrique est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de l'excentricité, pour toutes les valeurs de ζ si l'excentricité e est inférieure à ρ.

Pour obtenir cette valeur de ρ, on tire de (A) et (B) :

$$(D) \qquad u - \operatorname{tang} u = \zeta$$

$$(E) \qquad z = \frac{1}{\cos u}$$

et on cherche celle des racines de (D) à laquelle répond le plus petit module de $z = \frac{1}{\cos u}$; on trouve ainsi $\rho = 0,6627434$.

Si on représente par r le rayon vecteur d'une planète, par v l'anomalie vraie, on a :

$$r = a\,(1 - e\cos u),\quad \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$$

On en peut conclure que r et v sont synectiques dans les mêmes circonstantes que u. Ainsi, quand l'excentricité de l'orbite d'une planète est inférieure à 0,6627434, l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie, le rayon vecteur, sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de l'excentricité pour toutes les valeurs de l'anomalie moyenne.

Repronons la formule (2) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-t}\, dz$$

$t = \rho e^{p\sqrt{-1}}$ est un point pris dans l'intérieur du cercle de convergence de rayon R.

En posant $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$, $r < \mathrm{R} > \rho$, on peut l'écrire :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{z-t}\, f(z)\, d\theta$$

D'après cette formule, $f(t)$ est développable suivant les puissances de t ou de ρ. Proposons-nous de chercher les conditions pour que $f(t)$ soit en même temps développable suivant les puissances de p. Il faut que $\frac{z}{z-t}$ soit développable suivant les puissances de p, c'est-à-dire que $\frac{z}{z-t}$ doit rester synectique dans l'intérieur du cercle de convergence, quand le point t considéré comme fonction de deux variables imaginaires dont les modules sont ρ et p, se meut dans ce cercle.

Il faut donc que le module de t soit plus petit que le module de z ou que R, en donnant à z son module maximum. Mais quand p a des valeurs imaginaires dont le module est p, $e^{p\sqrt{-1}}$ doit être remplacé par

$e^{p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\sqrt{-1}}$ ou $e^{p\cos\varphi\sqrt{-1}}\, e^{-p\sin\varphi}$, de sorte que le module de t est $\rho e^{-p\sin\varphi}$ dont les limites sont $\rho e^{-\pi}$, ρe^{π}. Il faut donc qu'on ait :

$$\rho e^{\pi} < \mathrm{R}$$

pour que $f(t)$ soit développable suivant les puissances de p.

Prenons maintenant la formule (14) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left\{ \int_r \frac{f(z)}{z-t}\, dz + \int_{r'} \frac{f(z)}{t-z}\, dz \right\}$$

$t = \rho e^{p\sqrt{-1}}$ est un point pris dans l'intérieur de la couronne formée par les cercles de rayons R, R';

$$\begin{aligned} &\mathrm{R} > \mathrm{R}' \\ &r < \mathrm{R} > \rho \\ &r' > \mathrm{R}' < \rho \end{aligned}$$

En posant dans la première intégrale $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$

et dans la seconde $z' = r'e^{\theta\sqrt{-1}}$

la formule peut s'écrire :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{z-t} f(z)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{z-t} f(z)\, d\theta$$

D'après cette formule, $f(t)$ est développable suivant les puissances ascendantes et descendantes de t ou ρ. Proposons-nous de chercher les conditions pour que $f(t)$ soit en même temps développable suivant les puissances de p. Il faut que $\frac{z}{z-t}$ reste synectique dans chaque intégrale, quand on considère t comme fonction de deux variables imaginaires dont les modules sont ρ et p. Mais alors le module de t est compris entre les limites $\rho e^{-\pi}$, ρe^{π} ; d'où, en donnant à z les modules maximum et minimum :

$$\rho e^{\pi} < \mathrm{R} \qquad \rho e^{-\pi} > \mathrm{R}'$$

c'est-à-dire

$$\pi < l\,\frac{\mathrm{R}}{\rho} < l\,\frac{\rho}{\mathrm{R}'}$$

Telles sont les conditions qu'on doit avoir pour que $f(t)$ soit développable à la fois suivant les puissances ascendantes et descendantes de ρ et p.

§ 4.

Nous allons passer en revue les principales fonctions employées dans l'analyse, pour en fixer le sens lorsque la variable devient imaginaire, et examiner les diverses opérations auxquelles on peut les soumettre.

Toutes les fois qu'on a l'égalité

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}$$

on entend par là qu'on a séparément :

$$a = a', \qquad b = b'$$

et on convient d'appliquer aux expressions de ce genre les règles fondamentales du calcul des quantités réelles. Mais il faut voir si ces règles, qu'on applique par convention à la variable imaginaire, s'appliquent avec leurs conséquences aux fonctions de la variable imaginaire. Ce nouveau calcul fournit à l'analyse de nombreuses simplifications et un puissant moyen de généralisation ; en outre, l'emploi de la variable imaginaire permet souvent d'interpréter des résultats qui n'ont pas de sens dans le cas de la variable réelle. Par exemple :

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \mathrm{l}\,b - \mathrm{l}\,a$$

Si, dans l'intervalle de a à b, z passe par zéro, le symbole $\int_a^b \frac{dz}{z}$ n'a plus de sens dans le cas de la variable réelle. Que signifie alors $\mathrm{l}\,b - \mathrm{l}\,a$? Supposons que les limites soient -1 et $+1$, on aura dans le cas de la variable imaginaire :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z} = 1(1) - 1(-1) = (2k + 1)\pi\sqrt{-1}$$

et ce sera la valeur de l'intégrale quand le point z (*fig.* 16) ira de — 1 a + 1 par diverses courbes autour du point O. Supposons en effet OA = 1; on sait que pour aller de B en A, on peut suivre un chemin quelconque autour de O, sans que la valeur de l'intégrale change. Suivons le contour du cercle de rayon 1.

En posant $z = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, on aura $\frac{dz}{z} = d\theta\sqrt{-1}$

d'où :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z} = \int d\theta\sqrt{-1}$$

il faut prendre la seconde intégrale entre les limites $\pi + 2n\pi$ et $2n'\pi$;

d'où :

$$\int d\theta\sqrt{-1} = (2k + 1)\pi\sqrt{-1}$$

Voilà le résultat interprété.

Posons $z = x + y\sqrt{-1}$; que signifie z^m, m étant entier?

On convient d'élever à la puissance m l'expression $x + y\sqrt{-1}$ comme un binome réel; l'expression z^m réductible à la forme $x + y\sqrt{-1}$ est alors parfaitement définie. Il en est de même du polynome :

$$u = Az^n + Bz^{n-1} \ldots .$$

On peut appliquer à la fonction u les règles ordinaires du calcul dans le cas de la variable réelle. Par exemple, la fonction u étant réductible a la forme $a + b\sqrt{-1}$, si on a : $\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}}$, on peut multiplier les deux termes de la fraction imaginaire par une même quantité. Le quotient étant représenté par $x + y\sqrt{-1}$, on doit avoir en effet par définition l'identité :

$$a + b\sqrt{-1} = (a' + b'\sqrt{-1})(x + y\sqrt{-1})$$

d'où :

$$(a + b\sqrt{-1})m = (a' + b'\sqrt{-1})m(x + y\sqrt{-1})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{a + b\sqrt{-1}\ m}{(a' + b'\sqrt{-1})\,m} = x + y\sqrt{-1} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut prendre pour m $a' - b'\sqrt{-1}$, et on obtient immédiatement x et y.

La fonction u est évidemment finie, continue, monodrome, monogène, c'est-à-dire synectique dans toute l'étendue du plan.

Que signifie z^m, m étant fractionnaire ?

Si m égale, par exemple, $\frac{1}{5}$, $u = z^{\frac{1}{5}}$ est défini par l'équation

$$u^5 - z = 0$$

Il y a cinq valeurs de u qui varient d'une manière continue avec z, satisfaisant à cette équation. Une de ces valeurs est représentée par $z^{\frac{1}{5}}$.

Si m égale, par exemple, $\frac{3}{4}$, $z^m = \left(z^{\frac{1}{4}}\right)^3$.

Il y a quatre valeurs de $z^{\frac{1}{4}}$, par conséquent quatre valeurs de $z^{\frac{3}{4}}$, parce les nombres 3 et 4 sont premiers entre eux.

Quand on étudiera l'expression $u = z^m$, dans le cas de m fractionnaire, il faudra avoir soin de dire quelle est la valeur que l'on choisit.

La fonction $u = z^m$, m étant fractionnaire, n'est pas généralement monodrome, mais elle est monogène.

Le sens des fonctions algébriques explicites est donc fixé. Nous allons maintenant passer aux fonctions transcendantes.

Que signifie a^z (a positif réel), $\sin z$, $\cos z$, lorsque z est imaginaire ?

Pour z réel

$$a^z = e^{z\,\mathrm{l}\,a} = 1 + \frac{z\,\mathrm{l}\,a}{1} + \frac{z^2\,\mathrm{l}^2\,a}{1.2}\cdots$$

Cette série est convergente quel que soit z, même imaginaire. Convenons de la prendre pour la définition de a^z. a^z a alors un sens bien net, puisqu'on est ramené aux fonctions algébriques explicites.

De même les séries :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2}\cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3}\cdots$$

convergentes même pour z imaginaire, sont les définitions de $\cos z$, $\sin z$.

Remarquons que pour p et q réels, on a identiquement :

$$e^{p+q} = e^p \cdot e^q$$

c'est-à-dire :

$$1 + \frac{p+q}{1} + \frac{(p+q)^2}{1.2}\cdots = \left(1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{1.2}\cdots\right)\left(1 + \frac{q}{1} + \frac{q^2}{1.2}\cdots\right)$$

Cette identité subsiste pour p et q imaginaires ensemble ou séparément, c'est-à-dire qu'on a :

$$e^{z} = e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^{x}\,(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$$

de sorte que e^z, a^z, à cause de l'identité

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y$$

peuvent être représentés sous la forme ordinaire des imaginaires. De même on a pour z imaginaire :

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{z}, \quad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{z\sqrt{-1}}$$

c'est-à-dire que $\cos z$ et $\sin z$ peuvent être représentés sous la forme ordinaire des imaginaires.

On peut alors étendre à la variable imaginaire les équations de la trigonométrie établies dans le cas de z réel. Par exemple :

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$
$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z$$
$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \text{ etc.}$$

Ces trois fonctions : a^z, $\sin z$, $\cos z$, sont synectiques dans toute l'étendue du plan.

Nous allons maintenant examiner les fonctions inverses explicites transcendantes.

Que signifie $u = \log z$, lorsque z est imaginaire?

Posons : $$z = x + y\sqrt{-1} = re^{p\sqrt{-1}}$$
$$u = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

l'équation $$a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

a étant positif réel, définit la fonction u. Or, on sait que pour u imaginaire, a^u est défini par $$a^u = e^{u\,\mathrm{l}\,a}$$

d'où : $$e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,\mathrm{l}\,a} = x + y\sqrt{-1} = re^{p\sqrt{-1}}$$

par suite : $$\alpha\,\mathrm{l}\,a = \mathrm{l}\,r, \qquad \beta\,\mathrm{l}\,a = p + zk\pi$$
$$u = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{\mathrm{l}\,r}{\mathrm{l}\,a} + \frac{(p + 2k\pi)\sqrt{-1}}{\mathrm{l}\,a}$$

Telle est la signification de u. On voit que u a une infinité de valeurs, et que son expression s'obtient en multipliant le logarithme pris dans la base e par $\frac{1}{\mathrm{l}\,a}$ comme pour les logarithmes réels. Ainsi, il suffit de considérer la base e.

Soit donc : $$z = re^{p\sqrt{-1}}$$

on aura : $$\mathrm{l}\,z = \mathrm{l}\,r + (p + 2k\pi)\sqrt{-1}$$

On prend le logarithme d'après la règle suivie pour les logarithmes réels.

De même, si $$z' = r'e^{p'\sqrt{-1}}$$
$$\mathrm{l}\,z' = \mathrm{l}\,r' + (p' + 2k'\pi)\sqrt{-1}$$

d'où :
$$\mathrm{l}\,z + \mathrm{l}\,z' = \mathrm{l}\,rr' + \{p + p' + 2(k + k')\pi\}\sqrt{-1}$$

mais : $$zz' = rr'e^{(p+p')\sqrt{-1}}$$
$$\mathrm{l}\,zz' = \mathrm{l}\,rr' + (p + p' + 2k''\pi)\sqrt{-1}$$

Ainsi, en prenant l'expression générale, le logarithme d'un produit vaut la somme des logarithmes des facteurs, comme dans le cas des logarithmes réels; mais en prenant deux logarithmes particuliers, il n'est pas certain que leur somme fasse un logarithme particulier du produit.

La fonction $u = \mathrm{l}\, z$ n'est pas monodrome, mais en cherchant directement la dérivée on trouve $\frac{1}{\mathrm{l}\, z}$; donc cette fonction est monogène.

Que signifie $u = \operatorname{arc} \sin z$?

Posons: $u = \alpha + \beta \sqrt{-1}$

l'équation $x + y\sqrt{-1} = \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})$

définit la fonction u. On trouve aisément deux équations pour déterminer α et β.

On définirait de même arc cos z, arc tang z, mais il vaut mieux procéder autrement.

$u = \operatorname{arc} \sin z$ est défini par $z = \sin u$, d'où:

$$z = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$e^{u\sqrt{-1}} = z\sqrt{-1} \pm \sqrt{1 - z^2}$$

et avec la signification des logarithmes imaginaires:

$$u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, \mathrm{l}\left(z\sqrt{-1} \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$$

Telle est la signification de $u = \operatorname{arc} \sin z$

On trouverait de même $u = \operatorname{arc} \cos z$

Quant à la fonction $u = \operatorname{arc} \operatorname{tang} z$, on la définit:

$$z = \operatorname{tang} u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\left(e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}\right)}$$

d'où on tire:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathrm{l}\left(\frac{1 + z\sqrt{-1}}{1 - z\sqrt{-1}}\right)$$

On pourrait déduire la valeur de $u =$ arc sin z de la valeur de $u =$ arc tang z, comme dans le cas de la variable réelle.

Les trois fonctions $u =$ arc sin z, $u =$ arc cos z, $u =$ arc tang z, ne sont pas monodromes; mais comme on prend les dérivées des logarithmes dans le cas de la variable imaginaire comme dans le cas de la variable réelle, ces fonctions sont monogènes.

Que signifie z^m, z et m pouvant être imaginaires?

Si z et m sont réels, z positif, $z^m = e^{m \, \mathrm{l} z}$. Convenons que $u = z^m$ est défini dans tous les cas par :

$$u = e^{m \, \mathrm{l} z}$$

cette fonction ne sera pas monodrome, mais elle sera monogène.

Prenons pour exemple $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = u$

d'où
$$u = e^{\sqrt{-1} \, \mathrm{l} \sqrt{-1}}$$

on trouve :
$$u = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

Prenons encore l'exemple $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, α étant imaginaire infiniment petit. On aura par définition :

$$u = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{1}{\alpha} \mathrm{l}(1+\alpha)}$$

On connaît la série qui définit cette exponentielle. Il est facile de voir que cette série, dans le cas de α infiniment petit imaginaire, a pour limite e, de sorte que $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ aura pour limite e, que α soit infiniment petit, réel ou imaginaire. C'est une propriété qui peut servir dans le calcul des imaginaires.

Quant aux fonctions imaginaires implicites définies par $f(u, z) = 0$, il y a ordinairement plusieurs valeurs de u pour chaque valeur de z, et si $f(u, z)$ est continue, chacune de ces valeurs est une fonction continue de z, qui ne sera pas généralement monodrome dans toute l'étendue du plan; mais si $f(u, z)$ contient z explicitement, chaque valeur de u est généralement monogène.

Examinons maintenant si les principales règles du calcul différentiel et intégral peuvent s'appliquer aux fonctions imaginaires. Nous avons déjà admis implicitement plusieurs de ces règles.

Il est aisé de voir qu'on a pour les fonctions imaginaires, comme pour les fonctions réelles, la règle des fonctions de fonctions, des fonctions composées, des fonctions inverses, enfin toutes les règles pour trouver les différentielles ou dérivées des fonctions simples.

On a de même le théorème des fonctions homogènes.

Si on a, quel que soit z :

$$f(z) = \varphi(z)$$

$f(z)$, $\varphi(z)$ étant des fonctions synectiques, on en conclut comme dans le cas des fonctions réelles :

$$\int f(z)\, dz = \int \varphi(z)\, dz + c$$

Quant au théorème des accroissements finis, soit :

$$u = f(z) = X + Y\sqrt{-1}$$

d'où

$$du = \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx}\sqrt{-1}\right) dx + \left(\frac{dX}{dy} + \frac{dY}{dy}\sqrt{-1}\right) dy$$

on en conclut :

$$\text{(A)} \qquad \Sigma\, du = f(z+h) - f(z) = \left(\frac{dX_1}{dx} + \frac{dY_1}{dx}\sqrt{-1}\right)(x' - x)$$
$$+ \left(\frac{dX_2}{dx} + \frac{dY_2}{dy}\sqrt{-1}\right)(y' - y)$$

Les accroissements donnés à x et y sont tous dans le même sens, et $\frac{dX_1}{dx}$, $\frac{dY_1}{dx}$, $\frac{dX_2}{dx}$, $\frac{dY_2}{dx}$ sont des moyennes entre les dérivées de X, Y pour les valeurs extrêmes de x et y. On suppose en outre qu'on a suivi un chemin déterminé de z à $z+h$. On tire de cette équation les mêmes conséquences que pour les fonctions réelles.

Si la fonction u est monogène

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx}\sqrt{-1} = f'(z) = \frac{\frac{dX}{dy} + \frac{dY}{dy}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

alors (A) devient :

$$\text{(B)} \qquad f(z+h) - f(z) = f'(z_1)\,\Sigma dx + f'(z_2)\,\Sigma\, dy\sqrt{-1}$$

On peut d'ailleurs démontrer cette équation directement.

Cette équation (B) peut s'écrire :

$$f(z+h) - f(z) = f'(z_1)\,(\Sigma dx + \Sigma dy\sqrt{-1})$$
$$+ \{f'(z_2) - f'(z_1)\}\,\Sigma dy.\sqrt{-1} \qquad \text{ou}$$

$$\text{(C)} \quad f(z+h) - f(z) = f'(z_1)\,h + \{f'(z_2) - f'(z_1)\}\,\Sigma dy.\sqrt{-1}$$

Si $f'(z)$ est synectique, $\int f'(z)\,dz$ est une fonction déterminée quand on va de z à $z+h$ par différents chemins, et peut alors être représentée par la formule (C).

Lorsqu'on a une série convergente :

$$u = u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots + r$$

dont les différents termes sont des fonctions synectiques d'une variable imaginaire, on en déduit, comme dans le cas des fonctions réelles :

$$\int udz = \int u_0\,dz + \int u_1 dz \ldots\ldots$$

parce que $\int rdz$ tend vers zéro.

Lorsqu'on a l'intégrale $\int f(z)\,dz$, $f(z)$ étant une fonction synectique, on peut différentier et intégrer sous le signe $\int$ comme dans le cas des fonctions réelles.

Quand le rapport de deux fonctions imaginaires se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, si les fonctions sont monogènes on peut prendre le rapport des dérivées, comme dans le cas des fonctions réelles.

On étendrait de même aux fonctions de la variable imaginaire la plupart des règles qu'on applique aux fonctions de la variable réelle.

§ 5.

Soit une fonction $u = f(z)$ synectique au moins dans une certaine portion de plan. Considérons l'intégrale $\int \frac{u'}{u}\, dz = 1\, u$; cette intégrale sera synectique dans la même portion de plan, ne comprenant aucun point pour lequel on aura $u = 0$, de sorte qu'en suivant un contour fermé ne renfermant aucun point $u = 0$, on aura : $\int \frac{u'}{u}\, dz = 1\, u - 1\, u_0 = 0$, c'est-à-dire que dans ce cas la variation du logarithme sera nulle.

Si maintenant on suit un contour fermé renfermant plusieurs points pour lesquels on a $u = 0$, $\int \frac{u'}{u}\, dz$ aura la même valeur pour le contour ou pour la somme de petits cercles décrits autour de chaque point pour lequel on a $u = 0$. On suppose que les courbes sont toutes parcourues dans le même sens.

En effet, l'intégrale (*fig.* 17) a la même valeur sur le contour ABCA ou sur le premier cercle ; cette intégrale a aussi la même valeur sur le contour ACDA ou sur le second cercle ; mais les portions d'intégrale sur la ligne AC parcourue deux fois en sens contraire se détruisent, de sorte que l'intégrale sur le contour ABCDA vaut la somme des intégrales sur les deux cercles.

Remarquons maintenant que la fonction $f(z)$ étant synectique et s'annulant pour $z = a$, on aura $f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$, la racine a étant du degré n de multiplicité. Dans l'intérieur du cercle décrit autour du point a comme centre, la fonction $\varphi(z)$ ne s'annule pas, de sorte que la variation du logarithme de $\varphi(z)$ est nulle en suivant le contour du cercle. La variation du logarithme de $f(z)$ sur le cercle se réduit donc à la variation du logarithme de $(z - a)^n$. Mais en comptant les angles à partir du point a, $z - a = re^{\theta\sqrt{-1}}$, $\quad (z - a)^n = r^n e^{n\theta\sqrt{-1}}$,

d'où : $$1\,(z - a)^n = n\,1\,r + n\theta\sqrt{-1}.$$

En suivant le contour du cercle, l'angle θ varie de 2π ; donc, dans ce cas,

$\mathrm{l}\,u - \mathrm{l}\,u_0 = 2\pi n \sqrt{-1}$; par suite, en faisant la somme des variations pour chaque cercle dans l'intérieur du contour total, on aura pour l'expression de la variation sur le contour :

$$\mathrm{l}u - \mathrm{l}u_0 = 2\pi n \sqrt{-1} + 2\pi n' \sqrt{-1} + \ldots .$$

Si la fonction u devenait infinie pour certains points particuliers, on aurait $u = (z - a)^{-n} \varphi(z)$, a étant un point pour lequel u est infini. En décrivant un cercle autour de ce point comme centre, la variation de $\mathrm{l}\,u$ sur le périmètre du cercle se réduira à la variation de $\mathrm{l}\,(z - a)^{-n}$. Mais en comptant les angles à partir du point a,

$$(z - a)^{-n} = r^{-n} e^{-n\theta\sqrt{-1}}, \qquad \text{d'où } \mathrm{l}(z - a)^{-n} = -n\,\mathrm{l}\,r - n\theta\sqrt{-1}$$

En suivant le contour du cercle, l'angle θ variant de 2π, la variation sera $-\ 2\pi n\sqrt{-1}$. D'un autre côté, si le point z décrit un cercle autour de l'origine comme centre, la variation de $\mathrm{l}\,z$ sera $2\pi\sqrt{-1}$. Donc, en représentant par le symbole Δ la variation totale, et par k l'excès du nombre de valeurs qui rendent $f(z)$ nulle sur le nombre des valeurs qui rendent $f(z)$ infinie dans l'intérieur du contour, on aura :

$$\frac{\Delta\,\mathrm{l}\,u}{\Delta\,\mathrm{l}\,z} = k$$

d'où ce théorème :

Soit u une fonction de z synectique dans l'intérieur d'une aire S et sur le contour de cette aire, et qui ne s'annule en aucun point du contour; pour obtenir le nombre de racines égales ou inégales de l'équation $u = 0$, correspondantes à des points situés dans l'intérieur de S, il suffira de parcourir : 1° le contour S, 2° la circonférence d'un cercle qui aura pour centre l'origine des coordonnées, et de chercher le rapport des variations intégrales que subissent dans le premier cas le log continu de u, et dans le second le log de z.

Le mouvement peut être direct ou rétrograde.

Si u devenait infinie pour des points particuliers dans l'intérieur du contour, le rapport $\frac{\Delta\,\mathrm{l}\,u}{\Delta\,\mathrm{l}\,z}$ serait la différence entre le nombre des racines de $u = 0$ $\frac{1}{u} = 0$.

$\frac{\Delta \operatorname{l} u}{\Delta \operatorname{l} z}$ s'appelle le compteur logarithmique.

Soit, par exemple : $u = az^n + bz^{n-1} + cz^{n-2} \ldots . + k$

$$= z^n \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \ldots . .\right)$$

L'équation $\frac{1}{u} = 0$ ne peut être vérifiée pour aucune valeur finie de z. Si donc on cherche la variation $\frac{\Delta \operatorname{l} u}{\Delta \operatorname{l} z}$ sur un cercle de très-grand rayon, le nombre qu'on trouvera indiquera le nombre de racines de $u = 0$.

Mais

$$\operatorname{l} u = n \operatorname{l} z + \operatorname{l} \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \ldots .\right)$$

La seconde partie tendant vers $\operatorname{l} a$, la variation de $\operatorname{l} u$ se réduit à $n \Delta \operatorname{l} z$, d'où :

$$\frac{\Delta \operatorname{l} u}{\Delta \operatorname{l} z} = n$$

Ainsi, l'équation $u = 0$ a n racines.

On a pu négliger la variation du logarithme pour la seconde partie. Généralement, si on a $u = v + v'$, et si en chaque point du contour, $\frac{v'}{v}$ a un module inférieur à l'unité, on aura $\Delta \operatorname{l} u = \Delta \operatorname{l} v$

car
$$\Delta \operatorname{l} u = \Delta \operatorname{l} v + \Delta \operatorname{l} \left(1 + \frac{v'}{v}\right)$$

Mais

$$1 + \frac{v'}{v} = 1 + r(\cos p + \sqrt{-1} \sin p) = \rho (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)$$

$$1 + r \cos p = \rho \cos x$$

Comme r est plus petit que 1 par hypothèse, $\rho \cos x$ ne peut être négatif; l'argument x doit revenir à la même valeur lorsqu'on suit le contour, c'est-à-dire que la variation du logarithme de $1 + \frac{v'}{v}$ doit être nulle.

Dans l'exemple des équations algébriques, posons :

$$a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \ldots . = v + v'$$

$v = a$, $\frac{v'}{v}$ a un module inférieur à l'unité sur le contour suivi ; donc $\Delta\,\mathrm{l}(v + v') = \Delta\,\mathrm{l}\,v = 0$, puisque v est une constante.

On peut présenter le théorème de Cauchy sous une autre forme indiquée par Cauchy lui-même. Nous allons entrer à ce sujet dans quelques explications.

Soit u une fonction réelle de la variable réelle x et telle que si l'on fait croître x par degrés insensibles entre deux limites, u varie insensiblement et ne change jamais de signe sans passer par zéro ou par l'infini. Pour une valeur a de x, la fonction u passe en devenant infinie du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou bien ne change pas de signe. La quantité 1 dans le premier cas, — 1 dans le second, zéro dans le troisième, sera l'*indice* de la fonction u pour la valeur a de x, et on appellera *indice intégral* de la fonction u, quand x varie entre deux limites, la somme des indices correspondant aux diverses racines de l'équation $\frac{1}{u} = 0$. Ainsi, d'après la définition de l'indice, si la fonction u en passant par l'infini passe n fois du négatif au positif et n' fois du positif au négatif, $n - n'$ est l'indice intégral. D'après la définition de l'indice, il est évident que les deux fonctions u, $-u$ ont des indices égaux et de signe contraire.

Soit E l'indice intégral de la fonction u, E' celui de $\frac{1}{u}$; ces deux fonctions passent à la fois du négatif au positif et du positif au négatif. E' exprime évidemment la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois la première fonction, en s'évanouissant, passe du négatif au positif et du positif au négatif ; donc, si $n - n' = E$, $n_1 - n'_1 = E'$, $E + E' = n + n_1 - n' - n'_1$ est la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois, en changeant de signe, la fonction u passe du négatif au positif et du positif au négatif.

Si, quand on fait varier x de x à X, u offre les signes

extrêmes $+\ +$ ou $-\ -$	$E + E' = 0$
si les signes extrêmes sont $-\ +$	$E + E' = 1$
si les signes extrêmes sont $+\ -$	$E + E' = -1$

Il sera donc aisé de connaître E' lorsqu'on connaîtra E, ou réciproquement.

Soit maintenant $u = f(z) = X + Y\sqrt{-1}$ une fonction synectique dans une certaine étendue de plan, on peut poser :

$$X + Y\sqrt{-1} = R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P)$$

Lorsqu'on suit le contour d'une courbe fermée, si P varie d'une manière continue, en désignant par P_0, P_1 les valeurs extrêmes, l'indice intégral de $\frac{X}{Y}$ ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois cette fonction, en devenant infinie, passe du négatif au positif et du positif au négatif, est précisément $\frac{P_1 - P_0}{\pi}$. Car tang $P = \frac{Y}{X}$; faisons varier P d'une manière continue à partir d'une valeur initiale, et désignons par arc tang $\frac{Y}{X}$ le plus petit arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et ayant $\frac{Y}{X}$ pour tangente ; on aura, en suivant le contour :

$$(1) \qquad P - P_0 = \text{arc tang}\,\frac{Y}{X} - \text{arc tang}\,\frac{Y_0}{X_0}$$

Si $\frac{Y}{X}$ passe du négatif au positif en passant par l'infini, arc tang $\frac{Y}{X}$ passe de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, $P - P_0$ est discontinu ; pour que la continuité reparaisse, il faut ajouter à ce moment-là $-\pi$ au second membre de (1). Si, au contraire, $\frac{Y}{X}$ passe du positif au négatif en passant par l'infini, arc tang $\frac{Y}{X}$ passe de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$; il faut ajouter brusquement $+\pi$ au second membre de (1) pour que la continuité reparaisse. C'est-à-dire, finalement, que si e' est l'indice intégral de $\frac{Y}{X}$, on aura ajouté $-e'\pi$ au second membre de (1), pour faire reparaître la continuité en suivant le contour. On aura donc, en supposant que $P - P_0$ ait varié d'une manière continue :

$$(2) \qquad P_1 - P_0 = \text{arc tang}\,\frac{Y_1}{X_1} - \text{arc tang}\,\frac{Y_0}{X_0} - e'\pi ;$$

mais $u = f(z)$ étant synectique, si on revient au point de départ arc

$\text{tang}\,\frac{Y_1}{X_1} = \text{arc tang}\,\frac{Y_0}{X_0}$, d'où :

(3) $$P_1 - P_0 = -e'\pi$$

D'un autre côté, e désignant l'indice intégral de $\frac{X}{Y}$, et $\frac{X}{Y}$ ayant la même valeur aux points extrêmes de la variation, $e + e' = 0$, d'où :

(4) $$e = \frac{P_1 - P_0}{\pi}$$

Reprenons maintenant la fonction :

$$u = f(z) = \mathrm{R}e^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}$$

faisons varier son logarithme d'une manière continue, en suivant le contour total de l'aire considérée. Si on pose :

$$\mathrm{l}u = \mathrm{l}\,\mathrm{R} + \mathrm{P}\sqrt{-1}$$

pour que le logarithme varie d'une manière continue, on devra faire varier P d'une manière continue, et on aura :

$$\Delta\,\mathrm{l}\,u = (P_1 - P_0)\sqrt{-1}$$

c'est-à-dire :

(5) $$\Delta\,\mathrm{l}\,u = \sqrt{-1}\,e\,\pi$$

Mais en représentant par k le nombre de racines comprises dans l'aire de la courbe,

(6) $$k = \frac{\Delta\,\mathrm{l}\,u}{\Delta\,\mathrm{l}\,z} = \frac{\Delta\,\mathrm{l}\,u}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{e}{2}$$

Ainsi, voilà le théorème de Cauchy présenté sous une autre forme : le nombre de racines comprises dans l'aire considérée est la moitié de l'indice intégral de $\frac{X}{Y}$, obtenu en suivant le contour de l'aire.

On peut, à l'aide du théorème de Cauchy, obtenir le nombre de racines de $f(z) = 0$ comprises dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnés (*fig.* 18).

On a $$u = f(z) = X + Y\sqrt{-1} = 0$$

les côtés du rectangle sont :

$$x = x', \quad x = x'', \quad y = y', \quad y = y''$$

Posons $\frac{X}{Y} = \varphi(x, y)$; désignons l'indice par la lettre J, et appelons m le nombre de racines, on aura :

$$m = \tfrac{1}{2} J\varphi(x, y') + \tfrac{1}{2} J\varphi(x'', y) + \tfrac{1}{2} J\varphi(y'', x) + \tfrac{1}{2} J\varphi(x', y)$$

Le symbole $J\varphi(x, y')$ représente l'indice intégral de $\varphi(x, y)$ obtenu en suivant la ligne AB ; il faut sur cette ligne supposer $y = y'$, et faire seulement varier x. Les autres symboles ont des significations analogues ; la somme totale des indices s'obtient en suivant le contour ABCD dans le sens des lettres. Mais l'indice obtenu en allant de C à D est égal et de signe contraire à l'indice obtenu en allant de D à C, et de même pour les deux autres côtés du rectangle ; on peut donc écrire :

$$(7) \qquad m = \tfrac{1}{2} J\varphi(x, y') - \tfrac{1}{2} J\varphi(x, y'') + \tfrac{1}{2} J\varphi(x'', y) - \tfrac{1}{2} J\varphi(x', y)$$

On prend la différence des indices en allant de A à B et remplaçant sucessivement y par y' et y par y''; puis de B à C, en remplaçant successivement x par x'' et x par x'.

Si on veut le nombre de racines réelles de l'équation $u = 0$, il faut faire $y' = -\beta$, $y'' = \beta$, β étant infiniment petit. On a :

$$f(z) - X = Y\sqrt{-1}$$

d'où :

$$(8) \qquad \frac{f(z) - X}{y} = \frac{Y}{y}\sqrt{-1}$$

Si $z = x + y\sqrt{-1}$ est racine réelle, $\frac{Y}{y}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et on a :

$$\frac{Y\sqrt{-1}}{y} = f'(z)\sqrt{-1} = f'(x)\sqrt{-1}$$

d'où :

$$\frac{Y}{y} = f'(x)$$

et :

$$(9) \qquad \frac{X}{Y} = \frac{X}{yf'(x)} = \frac{f(x)}{yf'(x)}$$

On peut donc substituer ce rapport à $\frac{X}{Y}$ quand il n'y a pas de racines égales.

La formule (7) devient :

$$m = \tfrac{1}{2}\,J\,\frac{f(x)}{-\beta f'(x)} - \tfrac{1}{2}\,J\,\frac{f(x)}{+\beta f'(x)} + \tfrac{1}{2}\,J\,\frac{f(x'')}{y f'(x'')} - \tfrac{1}{2}\,J\,\frac{f(x')}{y f'(x')}$$

Il faut faire varier dans les deux premiers termes x de x' à x'', et dans les deux seconds y de $-\beta$ à $+\beta$.

$J\,\frac{f(x'')}{y f'(x'')}$ se réduit à $+1$, si $\frac{f(x'')}{f'(x'')}$ est positif, et à -1 dans le cas contraire ; et comme on peut supprimer le facteur β dans les deux premiers termes, la formule précédente devient :

$$(10) \qquad m = \tfrac{1}{2}\,\frac{f(x'')}{f'(x'')} - \tfrac{1}{2}\,\frac{f(x')}{f'(x')} - J\,\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$\frac{f(x'')}{f'(x'')}$ ainsi que $\frac{f(x')}{f'(x')}$ sont des nombres qui doivent être regardés comme égaux à $+1$ ou -1, s'ils sont positifs ou négatifs, et l'indice figuré par le dernier terme s'obtient en faisant varier x de x' à x''.

En prenant l'indice de $-\infty$ à $+\infty$, on aura le nombre total des racines réelles. Dans le cas d'une équation algébrique, en remplaçant x'' par $+\infty$, et x' par $-\infty$, les deux premiers termes se réduisent à 1, et la formule (10) devient :

$$(11) \qquad m = 1 - J\,\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Mais en considérant les fonctions inverses $\frac{f(x)}{f'(x)}$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$, comme $\frac{f(x)}{f'(x)}$ donne les signes $-$ et $+$ pour $x = -\infty$ et $+\infty$, on a :

$$J\,\frac{f(x)}{f'(x)} + J\,\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

d'où :

$$(12) \qquad m = J\,\frac{f'(x)}{f(x)}$$

C'est le théorème de Sturm.

Appliquons la méthode de Cauchy à l'équation $u - \text{tang}\, u = \zeta$ du paragraphe 3. On sait que, pour la convergence des séries astronomiques dont il a été question dans ce paragraphe, il faut déterminer quelle est celle des racines u de cette équation à laquelle répond le plus petit module de $z = \frac{1}{\cos u}$. L'équation :

(13) $$u - \operatorname{tang} u - \zeta = 0$$

a une infinité de racines réelles. Pour obtenir les racines imaginaires, posons :

$$u = x + y\sqrt{-1} \qquad \text{d'où :}$$

$$u - \operatorname{tang} u - \zeta = x + y\sqrt{-1} - \frac{\sin 2x + \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}\sqrt{-1}}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}} - \zeta = X + Y\sqrt{-1}$$

(14) $$\left\{\begin{aligned} X &= x - \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}} - \zeta \\ Y &= y - \frac{\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}} \end{aligned}\right.$$

D'après les valeurs de X, Y, il est évident que les racines imaginaires de l'équation (13) sont conjuguées, il suffit donc de chercher les valeurs positives de y. L'équation $Y = 0$ donne :

(15) $$\cos 2x = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2y} - \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}$$

En faisant varier y de 0 à $+\infty$, le second nombre de l'équation (15) varie de 1 à $-\infty$; il y a donc une valeur positive de y, et une seule, satisfaisant à (15). Le maximum des valeurs admissibles de y sera fourni par l'hypothèse $\cos 2x = -1$, d'où :

$$\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2y} - \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{2} = 0$$

et en supprimant le facteur $e^{y} - e^{-y}$

(16) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\, y = 0 \\ &e^{2y} = \frac{y+1}{y-1}, \qquad 2y - \mathrm{l}\,\frac{y+1}{y-1} = 0 \end{aligned}\right.$$

On tire de cette équation :

$$y = 1,199\,678$$

tel est le maximum des valeurs admissibles de y. Nous désignerons cette valeur par y_1.

Il est facile maintenant d'avoir le nombre des racines imaginaires de l'équation (13). Il faut appliquer la formule (7) ; $\varphi(x, y)$ est le rapport $\frac{X}{Y}$ tiré des équations (14), y' doit être supposé infiniment petit positif, y'' égal à y_1, et x doit varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Le premier terme de la formule (7) peut être remplacé sans erreur sensible par

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{J}\,\frac{X}{y f'(x)} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{J}\,\frac{X}{y\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)} = 0$$

puisque le dénominateur ne change pas de signe en passant par zéro. L'indice relatif au second terme est aussi nul, parce que Y ne peut devenir nul lorsque y est remplacé par sa valeur limite. Quant aux deux derniers termes, remplaçons successivement x', x'' par les différents termes de la progression $\ldots -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi \ldots$

La formule (7) deviendra :

$$m = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{J}\,\frac{x'' - \zeta}{Y} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{J}\,\frac{x' - \zeta}{Y}$$

y variant de 0 à y_1, Y passe par zéro une seule fois, en passant du négatif au positif. Si $x'' - \zeta$ et $x' - \zeta$ sont de même signe, la somme des indices donne zéro. Mais si ζ est compris entre x' et x'', le premier terme donne $+\frac{1}{2}$ et le second $+\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la somme des indices vaut 1. Il y a donc une seule racine $x + y\sqrt{-1}$, la valeur positive y étant comprise entre 0 et y_1, et la partie réelle x étant comprise entre les deux termes de la progression qui comprennent entre eux le nombre ζ. Ainsi, l'équation (13) n'a que deux racines imaginaires conjuguées.

Cherchons maintenant le plus petit module de $z = \frac{1}{\cos u}$, u étant une racine de l'équation (13).

Lorsque u est réel, ce module est supérieur à l'unité.

Si u est imaginaire, en désignant par ρ le module de z, on aura :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}\right)}}$$

ou d'après l'équation (15) :

$$\rho = \sqrt{\frac{4y}{e^{2y} - e^{-2y}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2y)^2}{1.2.3} \cdots}}$$

Ce module est inférieur à l'unité, et d'autant moindre que y est plus grand. Si nous voulons la valeur minimum de ρ, il faut, d'après l'équation (16), remplacer e^{2y} par $\frac{y+1}{y-1}$; d'où :

$$\rho = \sqrt{y_1^{\,2} - 1} = 0,662\,7434$$

en remplaçant y_1 par sa valeur 1, 199 678.

On en conclut la convergence des séries astronomiques énoncée dans le paragraphe 3.

On peut, à l'aide du théorème de Cauchy, démontrer que si on a une équation $f(u, z) = 0$, $f(u, z)$ étant une fonction continue des deux variables u et z, les racines de l'équation résolue par rapport à u sont généralement des fonctions continues de z.

Remarquons d'abord que si on a à prendre l'indice intégral de $\frac{X}{Y}$, en mettant à la place de la variable les différents termes d'une suite, de façon qu'aucun terme ne vérifie l'une des deux équations $X = 0$, $Y = 0$, et que jamais deux termes consécutifs ne comprennent à la fois entre eux une ou plusieurs racines réelles de l'équation $X = 0$ avec une ou plusieurs racines réelles de $Y = 0$, l'indice intégral sera connu dès qu'on connaîtra les signes de X et Y pour les termes de la suite. Car si X change de signe pour deux termes consécutifs de la suite, Y ne pouvant pas s'annuler dans l'intervalle, l'indice est nul; si X ne change pas de signe, l'indice sera zéro ou $+ 1$ ou $- 1$, selon les signes de Y.

Supposons maintenant que pour $z = z'$, u' soit racine simple ou multiple de $f(u, z') = 0$, et admettons que $f(u, z')$ soit une fonction synectique de u. Posons $u = u' + re^{p\sqrt{-1}}$ et décrivons autour de u' un cercle de rayon r assez petit pour que dans ce cercle il n'y ait que les racines qui se réduisent à u'. $f(u, z') = X + Y\sqrt{-1}$; la moitié de l'indice intégral de $\frac{X}{Y}$ considéré comme fonction de p, quand on fait le tour du cercle ou quand p varie de 0 à 2π ou de p_0 à $p_0 + 2\pi$, indique le nombre de racines qui se réduisent à u' dans l'équation $f(u, z') = 0$.

Si donc m est le nombre de racines u', $m = \frac{1}{2}\Delta$, en représentant l'indice intégral par Δ. Pour évaluer Δ, mettons de p_0 à $p_0 + 2\pi$ les valeurs $p_1, p_2 \ldots$ de façon que les termes de cette suite ne vérifient jamais l'une des équations $X = 0$, $Y = 0$, et que jamais deux termes consécutifs ne comprennent à la fois entre eux une ou plusieurs racines réelles de l'équation $X = 0$ avec une ou plusieurs racines réelles de $Y = 0$. Cette condition peut être remplie pour un cercle de rayon convenable et des substitutions suffisamment rapprochées. On pourra évaluer Δ d'après les signes de X et Y.

Considérons maintenant la fonction $f(u, z' + h) = X_1 + Y_1\sqrt{-1}$.

En posant encore $u = u' + re^{p\sqrt{-1}}$, h pourra être assez petit pour que X_1, Y_1 diffèrent infiniment peu de X, Y. $\frac{1}{2}\Delta_1$ répondant à $\frac{X_1}{Y_1}$ quand on fera le tour du cercle de rayon r et de centre u', sera le nombre de racines comprises dans le cercle. Si on substitue $p_1, p_2 \ldots$ dans X_1, Y_1, on aura les mêmes signes que pour X, Y; donc $\frac{1}{2}\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta$. Par conséquent $f(u, z') = 0$ et $f(u, z' + h) = 0$ ont le même nombre de racines dans le cercle de centre u', c'est-à-dire que la seconde équation a autant de racines de la forme $u' + k$, k étant infiniment petit avec h, que la première de racines u'. Donc, les racines varient d'une manière continue avec z.

Ainsi, si $f(u, z) = 0$, pour qu'on soit assuré que u considéré comme fonction de z reste continu dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à z, il suffit que le premier membre de l'équation donnée reste lui-même fonction continue de u et de z dans le voisinage de la valeur particulière de z et de la valeur correspondante de u.

FIN.

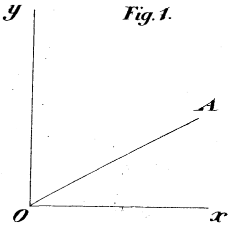

Fig. 1.

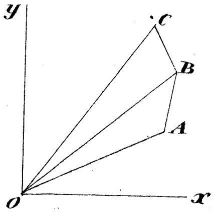

Fig. 2.

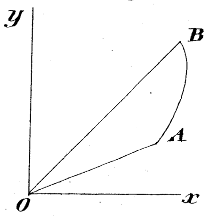

Fig 3

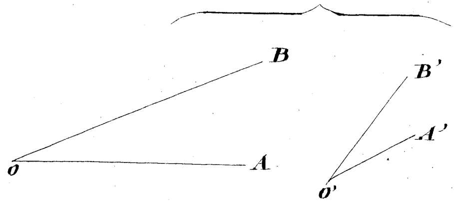

Fig. 4.

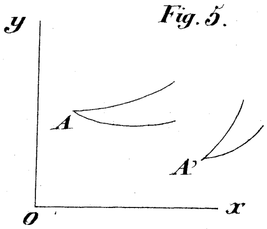

Fig. 5.

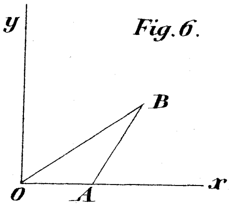

Fig. 6.

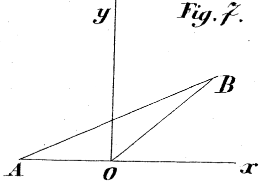

Fig. 7.

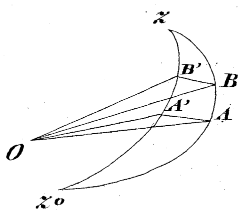

Fig. 8.

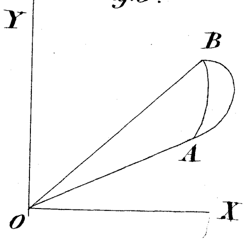

Fig. 9.

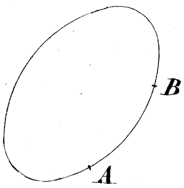

Fig. 10

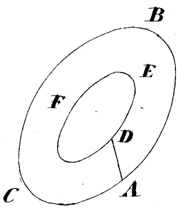

Fig. 11.

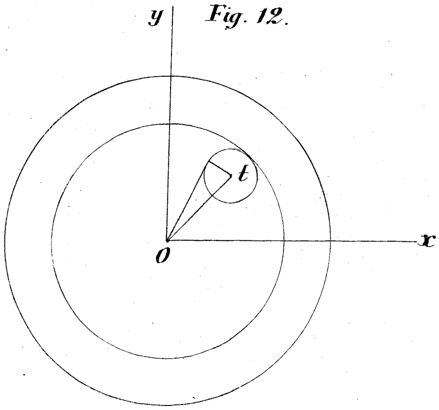

Fig. 12.

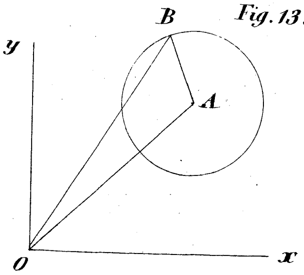

Fig. 13.

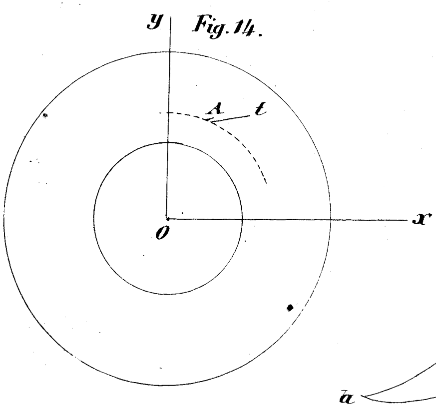

Fig. 14.

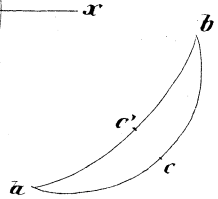

Fig. 15.

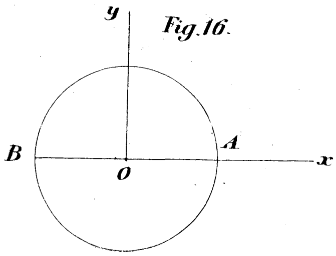

Fig. 16.

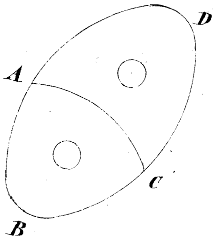

Fig 17.

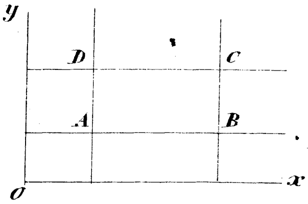

Fig. 18.