N° D'ORDRE

542.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GEORGES **HUMBERT**,

Ingénieur des Mines, Répétiteur à l'École Polytechnique.

1[re] THÈSE. — SUR LES COURBES DE GENRE UN.

2[e] THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 juillet 1885, devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*

DARBOUX, } *Examinateurs.*

POINCARÉ, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEUR HONORAIRE	PASTEUR.	
PROFESSEURS	P. DESAINS	Physique.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BOUQUET	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
CHARGÉS DE COURS	APPELL	Mécanique rationnelle.
	POINCARÉ	Mécanique physique et expérimentale.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
10974 Quai des Augustins, 55.

A

M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Hommage de reconnaissance
et de respectueux attachement,

G. HUMBERT.

THÈSE D'ANALYSE.

INTRODUCTION.

Clebsch a fait voir que les coordonnées des points d'une courbe de genre un s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre et d'un radical portant sur un polynôme du quatrième degré de ce paramètre; ou encore, n étant le degré de la courbe, x et y les coordonnées d'un de ses points, qu'on peut écrire

$$(a) \qquad x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

φ et ψ étant deux fonctions doublement périodiques d'ordre n du paramètre t, ayant mêmes périodes et mêmes infinis.

Le présent travail a pour but l'étude des courbes de genre un en partant de ce mode de représentation.

A ce sujet, les deux premières questions qui se posent sont les suivantes :

I. *Toute courbe dont les coordonnées des points sont des fonctions doublement périodiques d'un paramètre est-elle de genre un? Quel est son degré?*

II. *La representation paramétrique d'une telle courbe étant donnée, en déduire son équation.*

Ce dernier problème revient à éliminer t entre les équations (a); il a été résolu par M. Hermite pour le cas où les fonctions doublement périodiques données sont du troisième ordre, mais la méthode, appliquée à des fonctions d'ordre n, conduit, entre x et y, à une équation de degré $2n - 3$ et non de degré n.

On peut également, étant donnée la représentation paramétrique de la courbe, chercher à :

III. *En déduire l'équation de la courbe de degré* $n - 3$ *adjointe à la proposée, c'est-à-dire de la courbe de degré* $n - 3$ *qui passe par les* $\frac{1}{2}n(n-3)$ *points doubles de la courbe de degré* n *et de genre un donnée.*

En déduire également l'équation générale des courbes adjointes de degré $n - 2$.

Ce sont ces trois questions que nous nous sommes proposé de résoudre dans la première Partie de ce travail. A cet effet, nous avons employé une représentation paramétrique nouvelle, en coordonnées homogènes, où ne figurent que des sommes de fonctions Θ.

Ces fonctions Θ sont liées par des relations homogènes du second degré, d'où se déduisent des équations que nous avons appelées *fondamentales,* et dont la considération résout les trois problèmes posés plus haut.

On termine la première Partie par l'exposition de quelques conséquences géométriques, déduites d'identités algébriques qui se présentent naturellement au cours des calculs.

Dans la deuxième Partie, on traite de l'intersection d'une courbe de genre un et d'une courbe algébrique quelconque, adjointe ou non adjointe à la première; on retrouve les résultats donnés par Clebsch au sujet des courbes de contact, c'est-à-dire des courbes qui passent par un certain nombre de points fixes de la proposée et ont avec elle en tous leurs autres points de rencontre un contact d'ordre donné; on étend ces résultats, qui ne se rapportaient qu'aux propriétés des systèmes de points de contact, en donnant la forme de l'équation générale des courbes de contact, d'où l'on peut déduire des propriétés de ces courbes elles-mêmes.

Dans la troisième et dernière Partie, on définit les systèmes de points conjugués et les correspondances sur une courbe de genre un, et l'on donne des propriétés géométriques de ces systèmes de points.

Enfin on applique à la courbe du quatrième degré à deux points doubles les résultats obtenus pour la courbe générale du premier genre.

Les questions examinées dans la première Partie n'ont pas encore été résolues, à notre connaissance; dans la deuxième Partie, on nous permettra de signaler l'interprétation géométrique de *chacune* des équations établies par Clebsch (n° 48) et dont l'ensemble exprime que mn points d'une courbe de genre un et de degré n sont sur une courbe de degré m; nous appellerons également l'attention sur la solution du problème suivant :

Soit

$$mn = 2k_1 + k_2 + r_1 l_1 + \ldots + r_q l_q.$$

Trouver l'équation générale des courbes de degré m, qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur une courbe de degré n et de genre un, et qui ont avec cette courbe en l_j points, dont les arguments ont une somme donnée, un contact d'ordre $r_j - 1$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$.

La forme trouvée pour cette équation générale conduit à de nombreuses conséquences géométriques; elle sert, en outre, à établir les théorèmes principaux démontrés dans la troisième Partie.

Parmi ces théorèmes nous signalerons ceux qui sont relatifs à la courbe enveloppe des droites joignant deux points conjugués (n^os 80 et 81), à la position de ces points sur la droite qui les joint (n^os 82 et 83) et l'application de ces résultats aux courbes du cinquième degré.

La théorie des courbes du quatrième degré à deux points doubles renferme un certain nombre de propositions bien connues, mais dont la démonstration, à l'aide des fonctions Θ, est peut-être nouvelle; plusieurs propriétés du centre d'une cyclique (n^os 116 à 124) ne nous paraissent pas avoir encore été données; il en est de même du théorème du n° 127 sur les cycliques homofocales, qui entraîne de nombreuses conséquences; des propositions des n^os 135 à 141 complétant la théorie des points conjugués, et de celles des nos 154 à 160 relatives à l'intersection d'une cyclique et d'un cercle.

Nous avons eu souvent à consulter, pour la rédaction de ce travail, les Mémoires bien connus de Clebsch, publiés au *Journal de Crelle* (t. 63 et 64), les *Leçons sur la Géométrie,* du même auteur, la thèse du P. d'Esclaibes sur les courbes du premier genre, et l'Ouvrage de M. Darboux *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*.

SUR LES

COURBES DE GENRE UN.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Théorèmes généraux.

1. Soit une fonction $f(t)$, holomorphe dans tout le plan et satisfaisant aux relations

$$f(t+\omega) = f(t), \tag{1}$$

$$f(t+n\omega') = f(t)\,e^{-2n\frac{i\pi t}{\omega} - n^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega}}, \tag{2}$$

où n désigne un entier positif, ω et ω' des quantités arbitraires, telles que le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ soit positif. On peut poser

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{m^2\pi i\frac{\omega'}{\omega}} e^{2m\frac{i\pi t}{\omega}},$$

et la relation (2) montre que $A_m = A_{m-n}$. La fonction $f(t)$ est donc fonction linéaire et homogène des n fonctions

$$R_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{(kn+1)^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega} + 2(kn+1)\frac{i\pi t}{\omega}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$R_j(t) = \sum e^{(kn+j)^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega} + 2(kn+j)\frac{i\pi t}{\omega}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$R_n(t) = \sum e^{(kn)^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega} + 2(kn)\frac{i\pi t}{\omega}}.$$

Il n'existe entre ces fonctions, d'après la forme même de leurs développements, aucune relation linéaire et homogène. Nous allons les remplacer par de nouvelles fonctions, d'expression plus simple, jouissant des mêmes propriétés.

Soit $\theta_3(t)$ la fonction

$$\theta_3(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2 i\pi \frac{\omega'}{\omega} + 2m \frac{i\pi t}{\omega}},$$

p étant un entier quelconque ; on a

$$\theta_3\left(t + p\frac{\omega}{n}\right) = \sum e^{m^2 i\pi \frac{\omega'}{\omega} + 2m \frac{i\pi t}{\omega}} e^{2m \frac{i\pi p}{n}},$$

c'est-à-dire

$$\theta_3\left(t + p\frac{\omega}{n}\right) = e^{2p\frac{i\pi}{n}} \mathrm{R}_1(t) + e^{4p\frac{i\pi}{n}} \mathrm{R}_2(t) + \ldots + e^{2(n-1)p\frac{i\pi}{n}} \mathrm{R}_{n-1}(t) + \mathrm{R}_n(t).$$

En donnant à p les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, on obtient n équations de cette forme, d'où l'on déduira les expressions de $\mathrm{R}_1(t), \ldots, \mathrm{R}_n(t)$ en fonction linéaire et homogène de $\theta_3(t), \ldots, \theta_3\left[t + (n-1)\frac{\omega}{n}\right]$, si le déterminant

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
e^{\frac{2i\pi}{n}} & e^{\frac{4i\pi}{n}} & \ldots & e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} & 1 \\
e^{\frac{4i\pi}{n}} & e^{\frac{8i\pi}{n}} & \ldots & e^{\frac{4(n-1)i\pi}{n}} & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} & \ldots & \ldots & e^{\frac{2(n-1)^2 i\pi}{n}} & 1
\end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Or, en posant

$$\alpha_n = 1, \quad \alpha_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}},$$

ce déterminant devient

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\
\alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \ldots & \alpha_n^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \ldots & \alpha_n^{n-1}
\end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le produit des différences

$$(\alpha_k - \alpha_j); \quad k, \quad j = 1, \quad \ldots, \quad n-1, \quad n.$$

Mais on ne peut avoir

$$\alpha_k - \alpha_j = 0$$

que si

$$k - j \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, n),$$

relation impossible, puisque k et j sont inférieurs à n.

On exprimera donc $R_1(t), \ldots, R_n(t)$ en fonction linéaire et homogène de $\theta_3(t), \ldots, \theta_3\left[t + (n-1)\frac{\omega}{n}\right]$, et, comme il n'existe pas de relation linéaire et homogène entre $R_1, \ldots, R_n$, il n'existera aucune relation de cette nature entre les nouvelles fonctions.

De là résulte le théorème suivant :

2. Théorème I. — *Toute fonction $f(t)$, holomorphe dans tout le plan et vérifiant les relations*

$$f(t+\omega) = f(t),$$
$$f(t+n\omega') = f(t)\,e^{-2n\frac{i\pi t}{\omega} - n^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega}},$$

s'exprime linéairement en fonction des n fonctions $P_1(t), \ldots, P_n(t)$, définies par l'équation

$$P_{k+1}(t) = \theta_3\left(t + k\frac{\omega}{n}\right).$$

Il n'existe entre ces n fonctions aucune relation linéaire et homogène. Elles satisfont aux relations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} P_k(t+\omega) &= P_k(t), \\ P_k\left(t + p\frac{\omega}{n}\right) &= P_{k+p}(t), \\ P_k(t+n\omega') &= P_k(t)\,e^{-2n\frac{i\pi t}{\omega} - n^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega}}, \\ P_k(t+\omega') &= P_k(t)\,e^{-2\frac{i\pi t}{\omega} - i\pi\frac{\omega'}{\omega}}\,e^{-2(k-1)\frac{i\pi}{n}}. \end{aligned}\right.$$

3. Théorème II. — *Toute fonction linéaire et homogène de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a n zéros dans le parallélogramme ω, $n\omega'$; la somme de ces zéros est $\frac{n}{2}(\omega + n\omega')$, à des multiples près de ω, $n\omega'$.*

Car cette fonction divisée par $P_1(t)$ devient une fonction doublement périodique, aux périodes ω, $n\omega'$ [formules (3)]; ses n infinis sont les n zéros de P_1, dans le parallélogramme ω, $n\omega'$, c'est-à-dire les quantités

$$\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),\quad \tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+\omega',\quad \ldots,\quad \tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+(n-1)\omega',$$

dont la somme est

$$\frac{n}{2}(\omega+n\omega').$$

Dans ce qui suit, lorsque nous parlerons des n zéros d'une fonction linéaire et homogène de P_1, ..., P_n, il s'agira des zéros de cette fonction, compris dans un même parallélogramme ω, $n\omega'$.

4. Théorème III. — *Il existe* $(n-k)$ *fonctions linéaires et homogènes de* P_1, ..., P_n *s'annulant pour* k *valeurs données de* t $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, *et linéairement indépendantes; toute autre fonction linéaire et homogène de* P_1, ..., P_n, *ayant les zéros* t_1, t_2, ..., t_k, *sera une fonction linéaire et homogène de celles-là.*

Si l'on écrit, en effet, que la fonction

$$f(t)=a_1P_1+\ldots+a_kP_k+\ldots a_nP_n$$

s'annule pour $t=t_1$, ..., t_k, on obtient k équations linéaires et homogènes entre les constantes a_1, ..., a_n. Si ces k équations sont distinctes, elles permettent d'exprimer k de ces constantes, par exemple a_1, a_2, ..., a_k en fonction linéaire et homogène de a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n.

On a ainsi

$$f(t)=a_{k+1}(P_{k+1}+\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k)+\ldots+a_n(P_n+\sigma_1P_1+\ldots+\sigma_kP_k);$$

$f(t)$ est donc fonction linéaire et homogène des $n-k$ fonctions

$$(\mathrm{F})\qquad \begin{cases} P_{k+1}+\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_n\quad+\sigma_1P_1+\ldots+\sigma_kP_k, \end{cases}$$

qui s'annulent pour $t=t_1$, t_2, ..., t_k et sont linéairement indépendantes, puisque chacune d'elles contient une fonction P_j qui ne figure pas dans l'expression des autres.

Si les k équations qui lient a_1, a_2, ..., a_n se réduisent à un nombre moindre, $k-1$ par exemple, on exprimera $k-1$ de ces constantes en fonction linéaire et homogène des $(n-k+1)$ autres, et l'on aura

$$f(t)=a_k[P_k+\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_{k-1}P_{k-1}]+\ldots+a_n[P_n+\sigma_1P_1+\ldots+\sigma_{k-1}P_{k-1}].$$

Cette fonction s'annulant quels que soient $a_k, \ldots, a_n$ pour $t = t_1, \ldots, t_k$, on pourra toujours choisir les $(n-k+1)$ constantes $a_k, \ldots, a_n$ de façon qu'elle s'annule pour $n-k$ valeurs de t, choisies arbitrairement; on aurait ainsi formé une fonction linéaire et homogène de $P_1, \ldots, P_n$ ayant n zéros de somme quelconque, ce qui est absurde.

La première hypothèse est donc seule admissible, et le théorème est démontré.

5. *Remarque.* — Soient $\mathfrak{P}_1(t), \mathfrak{P}_2(t), \ldots, \mathfrak{P}_{n-k}(t)$ les $n-k$ fonctions (F) qu'on vient de former, et $\mathfrak{P}_{n+i-k}(t)$ une fonction linéaire et homogène de $P_1, \ldots, P_n$ quelconque, s'annulant pour les valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de la variable, la valeur t_i exceptée. Il existe évidemment une infinité de fonctions $\mathfrak{P}_{n+i-k}(t)$ satisfaisant à ces conditions.

Je dis qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$0 = \alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \alpha_2 \mathfrak{P}_2 + \ldots + \alpha_{n-k} \mathfrak{P}_{n-k} + \alpha_{n-k+1} \mathfrak{P}_{n-k+1} + \ldots + \alpha_{n+i-k} \mathfrak{P}_{n+i-k} + \ldots + \alpha_n \mathfrak{P}_n;$$

car, si une pareille relation existait, on en déduirait, en faisant $t = t_i$,

$$\alpha_{n+i-k} \mathfrak{P}_{n+i-k}(t_i) = 0,$$

ce qui entraîne, puisque la fonction $\mathfrak{P}_{n+i-k}(t)$ ne s'annule pas pour $t = t_i$,

$$\alpha_{n+i-k} = 0.$$

On aurait ainsi

$$\alpha_{n+1-k} = \alpha_{n+2-k} = \ldots = \alpha_n = 0,$$

et, par suite, puisque les fonctions $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n-k}$ sont linéairement indépendantes,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-k} = 0.$$

On peut donc former n fonctions $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ linéaires et homogènes de $P_1, \ldots, P_n$, linéairement indépendantes, et satisfaisant aux conditions suivantes :

Les $n-k$ premières $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n-k}$ s'annulent pour $t = t_1, \ldots, t_k$.

La fonction $\mathfrak{P}_{n+i-k}$ s'annule pour $t = t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_k (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Des théorèmes II et III résulte la proposition suivante :

6. Théorème IV. — *Étant donnés, dans un parallélogramme $\omega, n\omega'$, n points dont les arguments ont pour somme $\frac{n}{2}(\omega + n\omega')$ à des multiples près de $\omega, n\omega'$,*

on peut former une et une seule fonction linéaire et homogène de $P_1, \ldots, P_n$ *s'annulant en ces n points.*

7. Théorème V. — *Deux fonctions* P *n'ont pas de zéro commun.*

Car les zéros de $P_{k+1}(t)$ sont, dans un parallélogramme ω, $n\omega'$,

$$\frac{\omega+\omega'}{2} - k\frac{\omega}{n} + h\omega' \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Pour que $P_{k+1}(t)$ et $P_{k'+1}(t)$ eussent un zéro commun, il faudrait que

$$\tfrac{1}{2}(\omega+\omega') - k\frac{\omega}{n} + h\omega' = \tfrac{1}{2}(\omega+\omega') - k'\frac{\omega}{n} + h'\omega' + \rho\omega + n\rho'\omega',$$

ρ et ρ' étant entiers, ou

$$\frac{\omega}{n}(k'-k) = \omega'(h'-h) + \rho\omega + n\rho'\omega'.$$

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ étant imaginaire, cette relation entraîne les deux suivantes :

$$k'-k = n\rho, \quad h-h' = n\rho'.$$

k et k' étant inférieurs à n, on aura $k = k'$, et les deux fonctions P_{k+1}, $P_{k'+1}$ sont identiques.

8. Théorème VI. — *Entre* $(n+1)$ *fonctions,* $f_1(t), \ldots, f_{n+1}(t)$, *holomorphes dans tout le plan et satisfaisant aux relations*

$$f(t+\omega) = f(t),$$
$$f(t+\Omega') = f(t)e^{-\frac{2ni\pi t}{\omega} - h},$$

où n est un entier positif, h une constante quelconque, Ω' *et* ω *des quantités telles que le coefficient de* $\sqrt{-1}$, *dans le quotient* $\frac{\Omega'}{\omega}$, *soit positif, il existe une relation linéaire et homogène.*

Posons, en effet,

$$\Omega' = n\omega', \quad \varphi(t) = f(t+\lambda),$$

λ désignant une constante ; on a

$$\varphi(t+\omega) \quad = \varphi(t),$$
$$\varphi(t+n\omega') = \varphi(t)e^{-2n\frac{i\pi t}{\omega} - h - 2n\frac{i\pi\lambda}{\omega}}.$$

Si λ est tel que

$$h + 2ni\pi\frac{\lambda}{\omega} = n^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega},$$

les $(n+1)$ fonctions $\varphi(t)$ vérifient les relations (1) et (2) et sont fonctions linéaires et homogènes de $P_1, \ldots, P_n$. Il existe donc entre elles une relation linéaire et homogène et la même relation subsiste entre les fonctions $f_1(t), \ldots, f_{n+1}(t)$.

II.

Expression des coordonnées des points d'une courbe de genre un.

9. Le P. d'Esclaibes a mis les coordonnées des points d'une courbe quelconque, de genre un et de degré n, sous la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{A}\, e^{-\frac{i\pi h' t_1}{K}} \frac{H(t_1-\alpha_1)\ldots H(t_1-\alpha_n)}{H(t_1-\gamma_1)\ldots H(t_1-\gamma_n)}, \\ y &= \mathcal{B}\, e^{-\frac{i\pi h'_1 t_1}{K}} \frac{H(t_1-\beta_1)\ldots H(t_1-\beta_n)}{H(t_1-\gamma_1)\ldots H(t_1-\gamma_n)}; \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des constantes; on a, de plus,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n + 2h\,K + 2h' iK', \\ &\beta_1 + \ldots\ldots + \beta_n = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n + 2h_1 K + 2h'_1 iK'; \end{aligned}\right.$$

$H(t)$ est la fonction ordinaire de Jacobi; h, h', h_1, h'_1 sont des entiers; x et y sont des fonctions doublement périodiques de t_1, aux périodes $2K$ et $2iK'$ (1).

Pour transformer ces expressions, posons

$$2K = \omega, \quad 2iK' = n\omega', \quad t_1 = t + \theta,$$

θ étant une constante.

Les n zéros du dénominateur de x sont

$$t = \gamma_1 - \theta,\ \gamma_2 - \theta,\ \ldots,\ \gamma_n - \theta.$$

Nous choisirons θ de façon que leur somme soit $\frac{n}{2}(\omega + n\omega')$, c'est-à-dire

(1) D'Esclaibes, Thèse, p. 19 et 28.

qu'on ait

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_n - n\theta = \frac{n}{2}(\omega + n\omega'). \tag{5 bis}$$

On pourra, par suite (théorème IV), former une fonction

$$C_1 P_1(t) + C_2 P_2(t) + \ldots + C_n P_n(t)$$

ayant ces n zéros.

Les zéros du numérateur de x sont $\alpha_1 - \theta$, $\alpha_2 - \theta$, ..., $\alpha_n - \theta$; en tenant compte des relations (5) et (5 *bis*), on trouve, pour leur somme,

$$\alpha_1 - \theta + \alpha_2 - \theta + \ldots + \alpha_n - \theta = \frac{n}{2}(\omega + n\omega') + h\omega + nh'\omega'$$

et, par suite, on peut former une fonction

$$A'_1 P_1(t) + \ldots + A'_n P_n(t)$$

admettant ces n zéros.

La fonction

$$\frac{A'_1 P_1 + \ldots + A'_{n-1} P_{n-1} + A'_n P_n}{C_1 P_1 + \ldots + C_n P_n}$$

admet, d'après les formules (3), les périodes ω, $n\omega'$ ou $2K$ et $2iK'$, comme la fonction $x(t)$; elle a, de plus, mêmes zéros et mêmes infinis que cette fonction, dont elle ne diffère, par suite, que par un facteur constant. On a ainsi

$$x(C_1 P_1 + \ldots + C_n P_n) = A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n$$

et, de même,

$$y(C_1 P_1 + \ldots + C_n P_n) = B_1 P_1 + \ldots + B_n P_n,$$

A_1, ..., A_n; B_1, ..., B_n; C_1, ..., C_n étant des constantes. En coordonnées homogènes, on pourra donc mettre les coordonnées des points d'une courbe de genre un et de degré n sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n, \\ x_2 &= B_1 P_1 + \ldots + B_n P_n, \\ x_3 &= C_1 P_1 + \ldots + C_n P_n. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Si l'on change t en $t + \omega$, ou en $t + n\omega'$, ou retrouve [formules (3)] les mêmes valeurs proportionnelles de x_1, x_2, x_3 et, par suite, le même point de la courbe.

10. *Inversement,* soit S une courbe représentée par des équations de la forme (6), où $A_1, \ldots, C_n$ désignent des constantes arbitraires.

La courbe S est algébrique, car il existe une relation algébrique entre les deux fonctions $\frac{x_2}{x_1}(t)$ et $\frac{x_3}{x_1}(t)$, que nous désignerons respectivement par $X(t)$ et $Y(t)$, qui sont doublement périodiques aux mêmes périodes ω, $n\omega'$; de plus, il est clair que la courbe S ne saurait se décomposer en deux courbes algébriques différentes.

La courbe S est, en général, de degré n, car une droite quelconque

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

la coupe en des points dont les arguments vérifient l'équation

$$a_1(A_1 P_1 + \ldots) + \ldots = 0.$$

Cette équation ayant (th. II) n zéros, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dans tout parallélogramme ω, $n\omega'$, il y aura, en général, n points d'intersection de la droite et de la courbe : celle-ci sera donc de degré n.

Il n'existera que deux cas d'exception :

1° A un ou plusieurs des arguments $t_1, \ldots, t_n$ ne correspond aucun point de la courbe S; en d'autres termes, on aura, par exemple,

$$x_1(t_1) = x_2(t_1) = x_3(t_1) = 0.$$

En ce cas, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ont un ou plusieurs zéros communs.

2° A deux ou plusieurs des arguments $t_1, t_2, \ldots, t_n$ correspond le même point de la courbe; on a, par exemple,

$$X(t_2) = X(t_1), \quad Y(t_2) = Y(t_1).$$

En considérant une autre droite, on obtiendra des relations analogues, de sorte que l'on aura pour une infinité de systèmes de valeurs de α et de β comprises dans un même parallélogramme ω, $n\omega'$

$$X(\beta) = X(\alpha), \quad Y(\beta) = Y(\alpha), \tag{7}$$

β étant différent de α.

Je dis que dans ce cas la courbe S est une courbe de degré inférieur à n comptée plusieurs fois, c'est-à-dire qu'*à tout point de cette courbe* correspondent deux ou plusieurs valeurs de l'argument t; ou que, étant donnée dans un parallélogramme ω, $n\omega'$, une valeur *quelconque* de α, on trouvera dans ce parallélogramme une ou plusieurs valeurs de β, différentes de α, telles que les équations (7) soient vérifiées.

Soit, en effet, β une fonction d'une variable α définie par la relation

$$X(\beta) = X(\alpha).$$

Posons

$$U(\alpha) = Y(\beta) - Y(\alpha).$$

A une valeur de α correspondent, m étant l'ordre de la fonction doublement périodique aux périodes ω, $n\omega'$, $X(t)$, m séries de valeurs de β,

$$\alpha + h\omega + nh'\omega',\ \beta_1 + h\omega + nh'\omega',\ \ldots,\ \beta_{m-1} + h\omega + nh'\omega',$$

h et h' étant des entiers quelconques, et par suite m valeurs de $U(\alpha)$.

Or nous verrons plus loin (nº 30) que la fonction β a dans un parallélogramme ω, $n\omega'$ un nombre limité de points critiques, et que, si la variable α tourne autour d'un de ces points, les m séries de valeurs de la fonction β en ce point se permutent entre elles. Il en résulte que les m valeurs de $U(\alpha)$ sont également permutées entre elles, et dès lors toute fonction symétrique de ces valeurs est fonction monodrome de α dans tout le plan.

Si l'on augmente α d'une période (ω ou $n\omega'$), l'équation

$$X(\beta) = X(\alpha),$$

qui définit β, ne change pas; par conséquent, l'ensemble des m valeurs de $U(\alpha)$ ne change pas, et les fonctions symétriques de ces valeurs demeurent invariables : elles sont, par suite, fonctions doublement périodiques de α, et $U(\alpha)$ satisfait à une relation de la forme

$$U^m + A(\alpha)U^{m-1} + \ldots + M(\alpha)U + N(\alpha) = 0,$$

où $A(\alpha)$, ..., $N(\alpha)$ sont des fonctions doublement périodiques de α, aux périodes ω, $n\omega'$.

Remarquons maintenant que l'équation

$$X(\beta) = X(\alpha)$$

donne pour β la série de valeurs

$$\alpha + h\omega + nh'\omega'$$

auxquelles correspond pour $U(\alpha)$ la valeur zéro. On a donc

$$N(\alpha) = 0,$$

et l'équation en U devient, en supprimant le facteur U,

$$\text{(U)} \qquad U^{m-1} + A(\alpha)\,U^{m-2} + \ldots + M(\alpha) = 0.$$

Or, par hypothèse, on a, pour une infinité de valeurs de α et de β, comprises dans un même parallélogramme,

$$X(\alpha) = X(\beta),$$
$$Y(\alpha) = Y(\beta),$$

c'est-à-dire

$$U(\alpha) = 0.$$

Il en résulte que la fonction doublement périodique $M(\alpha)$ s'annule pour une infinité de valeurs de α comprises dans un même parallélogramme ω, $n\omega'$: elle est, par suite, identiquement nulle, et l'équation (U) a, quel que soit α, une racine nulle.

On peut donc, quel que soit α, trouver dans un parallélogramme ω, $n\omega'$, une valeur au moins de β, différente de α, telle que l'on ait à la fois

$$(7) \qquad X(\beta) = X(\alpha), \quad Y(\beta) = Y(\alpha).$$

C. Q. F. D.

11. On peut donc énoncer les résultats suivants :

1° Si les fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ n'ont aucun zéro commun et si les équations (7) n'ont d'autres solutions communes en β que celles de la forme

$$\alpha + h\omega + nh'\omega',$$

la courbe S est de degré n.

2° Si les fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ont k zéros communs, les équations (7) n'ayant pas d'autres solutions communes en β que celles de la forme

$$\alpha + h\omega + nh'\omega',$$

la courbe S est de degré $n-k$.

Car une droite

$$a_1 + a_2 X + a_3 Y = 0$$

coupe cette courbe en $n-k$ points, puisque les fonctions doublement périodiques $X(t)$ et $Y(t)$ sont d'ordre $n-k$ et ont mêmes infinis.

3° Si les équations (7) ont d'autres solutions en β que celles de la forme

$$\alpha + h\omega + nh'\omega',$$

la courbe S sera une courbe de degré inférieur à n comptée plusieurs fois; nous dirons, dans ce cas, que la courbe S n'est pas *irréductible*.

III.

Relations du second degré.

12. Avant d'aller plus loin, nous allons étudier et former les relations du second degré qui lient les fonctions $P_1(t), \ldots, P_n(t)$.

Nommons *poids* d'un produit $P_{k+1}(t)\, P_{k'+1}(t)$ la somme $k+k'$, ou plutôt le reste de la division de $k+k'$ par n.

Théorème. — *Entre trois fonctions* $P_{k+1}\; P_{k'+1}$ *de même poids existe une relation linéaire et homogène.*

On a, en effet [équation (3)],

$$(8)\quad \begin{cases} P_{k+1}(t+\omega)\, P_{k'+1}(t+\omega) = P_{k+1}(t)\, P_{k'+1}(t), \\ P_{k+1}(t+\omega')\, P_{k'+1}(t+\omega') = P_{k+1}(t)\, P_{k'+1}(t)\, e^{-4\frac{i\pi t}{\omega}-2\frac{i\pi\omega'}{\omega}}\, e^{-2(k+k')\frac{i\pi}{n}}, \end{cases}$$

et $(k+k')$ étant le même, à des multiples près de n, pour trois produits de même poids, le théorème est démontré (théorème VI).

13. Théorème. — *Toute relation linéaire et homogène entre des fonctions du second degré en* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *respectivement de poids* $p, p', p'', \ldots, \varphi_p, \varphi_{p'}, \varphi_{p''}, \ldots$ *entraîne les conditions*

$$\varphi_p = 0, \quad \varphi_{p'} = 0, \quad \varphi_{p''} = 0, \quad \ldots.$$

Supposons, en effet, qu'on ait

$$(8')\quad 0 = a_p \varphi_p + a_{p'} \varphi_{p'} + a_{p''} \varphi_{p''} + \ldots,$$

$a_p, \ldots$ étant des constantes.

Changeons, dans cette équation, t en $t+\omega'$; elle devient, en vertu des relations (8),

$$(9)\quad 0 = a_p \varphi_p e^{-2p\frac{i\pi}{n}} + a_{p'} \varphi_{p'} e^{-2p'\frac{i\pi}{n}} + \ldots.$$

Les exponentielles $e^{-2p\frac{i\pi}{n}}$, $e^{-2p'\frac{i\pi}{n}}$, ... ont des valeurs différentes, puisque p, p', ... sont différents et inférieurs à n; si donc on élimine φ_p entre les relations (8′) et (9), $\varphi_{p'}$, $\varphi_{p''}$, ... ne disparaîtront pas dans l'équation ainsi obtenue

$$o = b_{p'}\varphi_{p'} + b_{p''}\varphi_{p''} + \ldots.$$

En changeant t en $t+\omega'$, on obtient une équation de même forme, et si entre cette équation et la précédente on élimine $\varphi_{p'}$, les fonctions $\varphi_{p''}$, ... ne disparaissent pas dans l'équation nouvelle

$$o = c_{p''}\varphi_{p''} + \ldots.$$

Continuant ainsi, on arrive à une dernière équation

$$\varphi_{p^{(k)}} = o;$$

d'où, en remontant de proche en proche, on déduit

$$\ldots, \quad \varphi_{p''} = o, \quad \varphi_{p'} = o, \quad \varphi_p = o.$$

C. Q. F. D.

14. Toutes les relations du second degré entre $P_1, \ldots, P_n$ s'obtiendront donc en formant les relations qui lient les produits $P_k P_{k'}$ de même poids. On les formera de la manière suivante :

1° *Cas de n impair*; $n = 2\nu + 1$. — Les carrés $P_1^2, P_2^2, \ldots, P_n^2$ sont de poids différents; car, pour que deux d'entre eux fussent de même poids, il faudrait que

$$2k \equiv 2k' \quad [\text{mod.}(2\nu+1)]$$

ou

$$k - k' \equiv o \quad [\text{mod.}(2\nu+1)],$$

ce qui est impossible, puisque k et k' varient entre o et 2ν. On formera le Tableau suivant :

Poids.	Fonctions correspondantes.					
o........	P_1^2	$P_2 \; P_{2\nu+1}$	$P_3 \; P_{2\nu}$	...	$P_\nu P_{\nu+3}$	$P_{\nu+1} \; P_{\nu+2}$
2........	P_2^2	$P_3 \; P_1$	$P_4 \; P_{2\nu+1}$	...	......	$P_{\nu+2} \; P_{\nu+3}$
....	..	....	....	...	......	....
2ν.......	$P_{\nu+1}^2$	$P_{\nu+2} P_\nu$	$P_{\nu+3} P_{\nu-1}$	...	......	$P_{2\nu+1} P_1$
1........	$P_{\nu+2}^2$	$P_{\nu+3} P_{\nu+1}$	....	...	......	$P_1 \; P_2$
3........	$P_{\nu+3}^2$	$P_{\nu+4} P_{\nu+2}$	....	...	......	$P_2 \; P_3$
....	....	....	....	...	......	....
$2\nu - 1$...	$P_{2\nu+1}^2$	$P_1 \; P_{2\nu}$	....	...	......	$P_\nu \; P_{\nu+1}$

Il est manifeste que chaque ligne renferme $\nu + 1$ fonctions.

Cela posé, en vertu du théorème du n° 12, il existe entre trois fonctions de même poids une relation linéaire et homogène

$$AP_{k+1}P_{k'+1} + BP_{h+1}P_{h'+1} + CP_{l+1}P_{l'+1} = 0. \tag{10}$$

Aucun des coefficients A, B, C n'est nul ; car, si par exemple A était nul, P_{l+1} et P_{h+1} ou $P_{h'+1}$ auraient un zéro commun, ce qui est impossible (théorème V).

On pourra donc exprimer $\nu - 1$ des fonctions de chaque ligne en fonction linéaire et homogène des deux autres, ce qui donnera $\nu - 1$ équations de la forme (10); toute relation du second degré de poids $k + k'$ est évidemment une combinaison linéaire de celles-là.

Comme il y a $2\nu + 1$ lignes, on a en tout $(2\nu + 1)(\nu - 1)$ ou $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations du second degré.

Les premiers membres de ces relations sont linéairement indépendants, car chacun d'eux renferme un produit P_iP_j qui n'entre pas dans les autres.

2° *Cas de n pair; n = 2ν.* — On formera le Tableau :

Poids.	Fonctions correspondantes.						
0	P_1^2	$P_2 \quad P_{2\nu}$	$P_3P_{2\nu-1}$	...	...	$P_\nu P_{\nu+2}$	$P_{\nu+1}^2$
2	P_2^2	$P_3 \quad P_{2\nu+1}$	....	...	...	......	$P_{\nu+2}^2$
....	...	....	....	...	...	......	....
$2(\nu-1)$..	P_ν^2	$P_{\nu+1}P_{\nu-1}$	....	...	...	......	$P_{2\nu}^2$
1		$P_2 \quad P_1$	$P_3P_{2\nu}$	...	...	......	$P_{\nu+2}P_{\nu+1}$
3		$P_3 \quad P_2$	P_4P_1	...	...	......	$P_{\nu+3}P_{\nu+2}$
....		......	.....	...	...	......	....
$2\nu - 1$....		$P_{\nu+1}P_\nu$	.....	...	...	......	$P_1 \quad P_{2\nu}$

Dans les lignes de poids pairs, il y a $\nu + 1$ éléments, et dans celles de poids impairs, ν; on aura en tout, puisqu'il y a ν lignes de poids pairs et ν de poids impairs, $\nu(\nu-1) + \nu(\nu-2)$ relations ou $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations homogènes et du second degré en $P_1, \ldots, P_n$.

14 *bis.* Ainsi, quel que soit n, il y a entre $P_1, \ldots, P_n$ $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations homogènes, du second degré; il n'existe entre les premiers membres de ces relations aucune relation linéaire et homogène identique; enfin, toute relation du second degré en $P_1, \ldots, P_n$ est une combinaison linéaire de celles-là.

IV.

Équations fondamentales.

15. Revenons à la courbe S définie par les relations

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = A_1 P_1 + A_2 P_2 + \ldots + A_n P_n, \\ x_2 = B_1 P_1 + \ldots\ldots\ldots + B_n P_n, \\ x_3 = C_1 P_1 + \ldots\ldots\ldots + C_n P_n. \end{cases}$$

S'il n'existe entre x_1, x_2, x_3 aucune relation linéaire et homogène (auquel cas la courbe S serait une droite), on peut former $(n-3)$ fonctions linéaires et homogènes de $P_1, \ldots, P_n$, que l'on désignera par $x_4, x_5, \ldots, x_n$, telles qu'il n'y ait pas de relation linéaire et homogène entre x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots, x_n$.

Par conséquent, on exprimera $P_1, \ldots, P_n$ en fonction linéaire et homogène de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et si l'on porte ces valeurs de $P_1, \ldots, P_n$ dans les $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations du second degré formées plus haut, on obtient

$$\tfrac{1}{2}n(n-3)\,(=\delta)$$

équations de la forme

$$(11)\quad \begin{cases} 0 = A_{44}x_4^2 + A_{45}x_4x_5 + \ldots + A_{nn}x_n^2 + \Phi_1 x_4 + \ldots + X_1 x_n + \Omega_1, \\ 0 = B_{44}x_4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_{nn}x_n^2 + \Phi_2 x_4 + \ldots + X_2 x_n + \Omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = L_{44}x_4^2 + L_{45}x_4x_5 + \ldots + L_{nn}x_n^2 + \Phi_\delta x_4 + \ldots + X_\delta x_n + \Omega_\delta. \end{cases}$$

Dans ces équations,

A_{44}, A_{45}, ..., A_{nn}, B_{44}, ..., B_{nn} ..., L_{44}, ..., L_{nn} sont des constantes;
Φ_1, ..., X_1, ..., Φ_δ, ..., X_δ des polynômes homogènes du premier ordre;
Ω_1, Ω_2, ..., Ω_δ des polynômes homogènes du second ordre en x_1, x_2, x_3.

Les équations *fondamentales* (11) sont au nombre de $\frac{1}{2}n(n-3)$; elles sont du premier degré par rapport aux $\frac{1}{2}n(n-3)$ fonctions x_4^2, $x_4x_5, \ldots$, x_n^2, x_4, x_5, ..., x_n, qu'elles permettront d'exprimer en fonction de x_1, x_2, x_3.

Le déterminant de ces équations est le polynôme de degré $(n-3)$ en x_1, x_2, x_3

$$\begin{vmatrix} A_{44} & A_{45} & \dots & A_{nn} & \Phi_1 & \dots & X_1 \\ B_{44} & B_{45} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{44} & L_{45} & \dots & L_{nn} & \Phi_\delta & \dots & X_\delta \end{vmatrix} = \Delta(x_1, x_2, x_3).$$

Nous le désignerons par $\Delta(x_1, x_2, x_3)$.

Dans le cas où ce polynôme n'est pas identiquement nul, on tirera des équations (11) l'expression de $x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n$ sous la forme

$$\Delta x_4^2 = f_{44}, \quad \Delta x_4 x_5 = f_{45}, \quad \dots, \quad \Delta x_n^2 = f_{nn}, \quad \Delta x_4 = f_4, \quad \dots, \quad \Delta x_n = f_n;$$

$f_{44}, f_{45}, \dots, f_{nn}$ sont des polynômes de degré $n-1$; f_4, f_n des polynômes de degré $n-2$ en x_1, x_2, x_3, qu'on obtient sous forme de déterminants.

Restant encore dans le cas où Δ n'est pas identiquement nul, on pourra remplacer le système d'équations (11) par le système suivant : de $\frac{1}{2}(n-3)(n-2)$ des équations (11), on tirera les expressions des $\frac{1}{2}(n-3)(n-2)$ fonctions $x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n^2$, sous la forme

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_4^2 = \varphi_1 x_4 & + \psi_1 x_5 + \dots + \chi_1 x_n + \omega_1, \\ x_4 x_5 = \varphi_2 x_4 & + \dots\dots\dots\dots + \omega_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n^2 = \varphi_{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} x_4 & + \dots\dots\dots\dots + \dots \end{array} \right.$$

Cette résolution sera toujours possible, car, Δ n'étant pas identiquement nul, l'un au moins des déterminants mineurs dont les lignes sont formées par les coefficients de $x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n^2$ dans une même équation (11) n'est pas nul.

Portant ces valeurs de $x_4^2, \dots, x_n^2$ dans les $(n-3)$ autres équations (11), on obtient $(n-3)$ relations de la forme

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 x_4 + n_1 x_5 + \dots + q_1 x_n - p_1 = 0, \\ m_2 x_4 + \dots\dots\dots + q_2 x_n - p_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ m_{n-3} x_4 + \dots\dots\dots + q_{n-3} x_n - p_{n-3} = 0. \end{array} \right.$$

Dans ces relations, $\varphi_i, \psi_i, \dots, \chi_i, \dots, m_i, n_i, \dots, q_i$ désignent des polynômes du premier degré en x_1, x_2, x_3; ω_i et p_i sont des polynômes du second degré.

Le déterminant du système des équations (12) et (13) est la fonction

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & \dots & q_1 \\ m_2 & n_2 & \dots & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-3} & n_{n-3} & \dots & q_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Il est égal à $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ à un facteur constant près.

V.

Propriétés de la fonction $\Delta(x_1, x_2, x_3)$.

16. Théorème. — *Le déterminant Δ se reproduit à un facteur constant près, si l'on prend pour x_4, x_5, ..., x_n d'autres fonctions linéaires et homogènes de P_1, ..., P_n que celles primitivement choisies.*

Soient, en effet, x'_4, x'_5, ..., x'_n ces nouvelles fonctions; nous admettrons qu'il n'y a pas de relation linéaire et homogène entre x_1, x_2, x_3, x'_4, ..., x'_n. On pourra, par suite, exprimer x_4, x_5, ..., x_n en fonction linéaire de x_1, x_2, x_3, x'_4, ..., x'_n,

$$\begin{aligned} x_4 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x'_4 + \dots + \lambda_n x'_n, \\ x_5 &= \mu_1 x_1 + \dots\dots\dots + \mu_4 x'_4 + \dots + \dots\dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n &= \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \dots + \sigma_4 x'_4 + \dots + \sigma_n x'_n. \end{aligned}$$

Comme il n'existe pas de relation linéaire et homogène entre x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_5 & \dots & \lambda_n \\ \mu_4 & \dots & \dots & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_4 & \dots & \dots & \sigma_n \end{vmatrix}$$

sera différent de zéro.

Portons maintenant les valeurs précédentes de x_4, ..., x_n dans les équations (11), il vient

$$A_{44}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_4 x'_4 + \dots)^2 + A_{45}(\lambda_1 x_1 + \dots)(\mu_1 x_1 + \dots) + \dots + \Omega_1 = 0,$$

Si l'on ordonne ces $\frac{1}{2}n(n-3)$ équations par rapport à

$$x'^2_4, \; x'_4 x'_5, \; \dots, \; x'^2_n, \; x'_4, \; \dots, \; x'_n,$$

et si l'on forme le déterminant des coefficients de ces quantités, on voit aisément qu'on obtient le déterminant Δ, multiplié par D^{n-1}.

17. Théorème. — *Quand la courbe* S *est de degre* n, *la fonction* $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ *n'est pas identiquement nulle.*

Lemme. — On a vu plus haut que les premiers membres des $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations du second degré qui lient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont linéairement indépendants; or c'est en substituant à $P_1, \ldots, P_n$ dans ces relations leurs valeurs en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ qu'on a obtenu les équations (11); il en résulte que les premiers membres de ces équations sont linéairement indépendants, et qu'on ne pourra jamais arriver à une identité en combinant linéairement leurs premiers membres.

Cela posé, supposons que la fonction $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ soit identiquement nulle; elle restera nulle si l'on y fait une substitution linéaire quelconque, telle que

$$x_1 = \lambda'_1 x'_1 + \mu'_1 x'_2 + \nu'_1 x'_3, \quad x'_2 = \lambda'_2 x'_1 + \ldots, \quad x'_3 = \lambda'_3 x'_1 + \ldots.$$

En résolvant ces relations par rapport à x'_1, x'_2, x'_3, il vient

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_1 x_1 + \mu_1 x_2 + \nu_1 x_3, \\ x'_2 &= \lambda_2 x_1 + \mu_2 x_2 + \nu_2 x_3, \\ x'_3 &= \lambda_3 x_1 + \mu_3 x_2 + \nu_3 x_3. \end{aligned}$$

Nous choisirons les constantes $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3, \nu_3$ de façon que $x'_2(t)$ et $x'_3(t)$, c'est-à-dire $\lambda_2 x_1(t) + \ldots$ et $\lambda_3 x_1(t) + \ldots$ s'annulent pour une valeur α de t. On aura donc

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda_2 x_1(\alpha) + \mu_2 x_2(\alpha) + \nu_2 x_3(\alpha), \\ 0 &= \lambda_3 x_1(\alpha) + \mu_3 x_2(\alpha) + \nu_3 x_3(\alpha). \end{aligned} \right.$$

Cela posé, remplaçons dans les équations (11) x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs en x'_1, x'_2, x'_3. Deux cas sont à distinguer si $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ est identiquement nul.

(A). Les déterminants mineurs, dont les lignes sont formées des coefficients de $x_4^2, x_4 x_5, \ldots, x_n^2$ dans une même équation (11), ne sont pas tous nuls; en ce cas, éliminant $x_4^2, x_4 x_5, \ldots, x_n^2$ entre les équations (11), on obtient $(n-3)$ équations de la forme (13)

$$(13) \qquad 0 = m_i x_4 + n_i x_5 + \ldots + q_i x_n - p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-3),$$

$m_1, \ldots, q_i$ étant du premier degré en x'_1, x'_2, x'_3, p_i du second.

Le déterminant Δ

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & \dots & q_1 \\ m_2 & n_2 & \dots & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-3} & \dots & \dots & q_{n-3} \end{vmatrix}$$

est, par hypothèse, identiquement nul. Le déterminant obtenu en remplaçant chaque élément du précédent par le coefficient de x'_1 dans cet élément est également nul, puisque c'est le coefficient du terme le plus élevé en x_1 dans Δ. On pourra donc, en additionnant les premiers membres des relations (13), multipliés par des constantes convenables, faire disparaître x'_1 des coefficients de $x_4, x_5, \dots, x_n$ dans l'équation ainsi obtenue. Cette équation sera dès lors de la forme

$$(13\ bis) \quad x'_2(ax_4 + \dots + lx_n) + x'_3(a'x_4 + \dots + l'x_n) = A_1 x'^2_1 + A_2 x'^2_2 + \dots.$$

Si l'on y fait $t = \alpha$, il reste, puisque $x'_2(\alpha) = x'_3(\alpha) = 0$,

$$A_1 x'^2_1(\alpha) = 0,$$

ce qui entraîne une des conditions

$$x'_1(\alpha) = 0, \quad A_1 = 0.$$

Si $x'_1(\alpha)$ est nul, on voit par les relations qui lient x_1, x_2, x_3 à x'_1, x'_2, x'_3, que l'on aura $x_1(\alpha) = x_2(\alpha) = x_3(\alpha) = 0$. Or α, étant une quantité arbitraire, pourra toujours être choisie de façon que ces dernières égalités n'aient pas lieu. Il faut donc que A_1 soit nul, et l'équation (13 *bis*) s'écrira

$$(\mathrm{E}) \qquad x'_2(\rho_1 x'_1 + \rho_2 x'_2 + \dots + \rho_n x_n) = x'_3(\rho'_1 x'_1 + \dots + \rho'_n x_n),$$

$\rho_1, \dots, \rho'_n$ étant des constantes.

Si $x'_2(t)$ et $x'_3(t)$ n'ont que le zéro commun $t = \alpha$, les $(n-1)$ zéros de x'_2 autres que α devront, en vertu de l'équation précédente, annuler la fonction $\rho'_1 x'_1 + \dots + \rho'_n x_n$. Cette fonction (théorème III) sera donc identique à x'_2, à un facteur constant près. De même la fonction $(\rho_1 x'_1 + \dots + \rho_n x_n)$ ne différera de x'_3 que par un facteur constant, et l'équation (E) sera de la forme

$$\rho x'_2(t) x'_3(t) = 0,$$

ρ étant une constante. Il faudra nécessairement que cette constante soit nulle; on trouve donc une identité en combinant linéairement les relations (11), ce que nous savons être impossible.

Il faut donc, pour que Δ puisse être identiquement nul, que $x'_2(t)$ et $x'_3(t)$ aient d'autres zéros communs que le zéro α, et ceux de la forme

$$\alpha + h\omega + nh'\omega'.$$

Soit β un de ces zéros communs. On aura

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda_2 x_1(\beta) + \mu_2 x_2(\beta) + \nu_2 x_3(\beta), \\ 0 &= \lambda_3 x_1(\beta) + \mu_3 x_2(\beta) + \nu_3 x_3(\beta). \end{aligned} \right.$$

Mais les quantités $\lambda_2, \ldots, \nu_3$ ne sont assujetties qu'à satisfaire aux relations (α); les relations (α) et (β) devront donc être identiques, et l'on aura

$$\frac{x_1(\beta)}{x_1(\alpha)} = \frac{x_2(\beta)}{x_2(\alpha)} = \frac{x_3(\beta)}{x_3(\alpha)},$$

$\beta - \alpha$ n'étant ni nul, ni égal à un multiple des périodes ω, $n\omega'$.

Comme α a été choisi arbitrairement, β sera fonction de α, à moins que l'on n'ait

$$x_1(\beta) = x_2(\beta) = x_3(\beta) = 0.$$

(B). Si tous les déterminants mineurs dont on a parlé plus haut (A) sont nuls, on obtiendra, par l'élimination de x_4^2, $x_4 x_5$, $\ldots$, x_n^2 entre les équations (11), $n-2$ relations au moins de la forme (13), et, en les combinant linéairement, on pourra former une équation telle que (13 *bis*). On retombe ainsi dans le cas précédent, et les mêmes conclusions subsistent.

Par conséquent :

La fonction $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ *ne peut être identiquement nulle que dans deux cas :*

1° $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ *ont un ou plusieurs zéros communs;*

2° *Étant toujours posés* $X = \dfrac{x_2}{x_1}$, $Y = \dfrac{x_3}{x_1}$, *les deux équations*

$$X(\beta) = X(\alpha), \quad Y(\beta) = Y(\alpha)$$

ont, quel que soit α, *d'autres solutions communes en* β *que celles de la forme*

$$\alpha + h\omega + nh'\omega'.$$

En d'autres termes :

$\Delta(x_1, x_2, x_3)$ *ne peut être identiquement nul que si la courbe* S *n'est pas de degré* n.

18. Le théorème suivant nous sera utile plus loin :

THÉORÈME. — *Si la courbe* S *est de degré* n, *il n'existe aucune relation identique en* x_1, x_2, x_3 *de la forme*

$$a_1 x_1 \Delta + a_2 x_2 \Delta + a_3 x_3 \Delta + a_4 f_4 + \ldots + a_n f_n = 0.$$

$a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes, $\Delta, f_4, \ldots, f_n$ sont les polynômes définis au n° 15.

En effet, la fonction de degré $n-3$, $\Delta[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$, n'est pas nulle, puisque, par hypothèse, la courbe S est de degré n, et que d'ailleurs cette fonction n'est pas identiquement nulle.

On aura donc, en divisant par Δ le premier membre de la relation précédente, et en y remplaçant x_1, x_2, x_3 par $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$,

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + a_4 x_4(t) + \ldots + a_n x_n(t) = 0,$$

relation qu'on sait être impossible.

VI.

Examen du cas général.

19. Supposons maintenant que la courbe S définie par les équations (6) soit de degré n, ce qui est le cas général ; nous allons, dans cette hypothèse, former son équation, et les équations de courbes qui lui sont liées d'une manière remarquable.

20. *Équation de la courbe* S. — Les relations (11) nous ont donné les relations

$$\Delta x_4^2 = f_{44}, \quad \Delta x_4 x_5 = f_{45}, \quad \ldots, \quad \Delta x_n^2 = f_{nn}, \quad \Delta x_4 = f_4, \quad \ldots, \quad \Delta x_n = f_n;$$

on en déduit

$$x_4 = \frac{f_{44}}{f_4}, \quad x_5 = \frac{f_{45}}{f_4}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{f_{4n}}{f_4}.$$

Portant dans les relations (13) ces valeurs de $x_4, \ldots, x_n$, on a

$$m_i f_{44} + n_i f_{45} + \ldots + q_i f_{4n} - p_i f_4 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Les $(n-3)$ équations ainsi obtenues sont de degré n en x_1, x_2, x_3 ; je dis qu'elles ne peuvent être à la fois des identités.

Si toutes, en effet, étaient des identités, on en déduirait identiquement

$$f_{44}\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & q_1 \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ m_{n-3} & \cdot\cdot & q_{n-3} \end{vmatrix} = f_4\begin{vmatrix} p_1 & n_1 & q_1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ p_{n-3} & \cdot\cdot & q_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_{44}\Delta = f_4^2.$$

Par suite, $f_4(x_1, x_2, x_3)$ serait divisible par $\Delta(x_1, x_2, x_3)$, et l'on aurait, quels que soient x_1, x_2, x_3,

$$f_4 = \Delta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3),$$

λ_1, ... étant des constantes.

En particulier, remplaçant dans cette relation x_1, x_2, x_3 par $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, il viendrait

$$x_4(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \lambda_3 x_3(t),$$

relation impossible, puisque, par hypothèse, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ sont linéairement indépendants.

Par suite :

Une au moins des relations de degré n formées plus haut n'est pas une identité; elle sera l'équation de la courbe S.

Ce raisonnement souffre une exception si Δ se décompose en un produit de deux facteurs, dont l'un entre au carré.

Soit

$$\Delta = P^2 Q,$$

P et Q étant des polynômes en x_1, x_2, x_3, de degrés p et q, $(2p + q = n - 3)$. En ce cas, la relation

$$\Delta f_{44} = f_4^2$$

donne

$$f_4 = PQR = PV_4,$$

R et V_4 étant des polynômes entiers; de même, la relation

$$\Delta f_{4i} = f_4 f_i \quad (i = 5, 6, \ldots, n)$$

donnerait

$$f_i = PV_i.$$

Cela posé, on peut admettre, puisque $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ n'ont pas de zéro commun, qu'aucun des zéros de $x_1(t)$ n'annule $\Delta[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$; s'il en était autrement, un changement linéaire de variables permettrait de rentrer dans cette hypothèse.

Formons une fonction $\varphi(t)$ de la forme

$$\varphi(t) = a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + a_4 x_4(t) + \ldots + a_n x_n(t),$$

qui ait avec $x_1(t)(n-2)$ zéros communs, les deux derniers zéros étant différents des deux derniers zéros de $x_1(t)$ (théorème III); on a, d'après les formules qui précèdent,

$$\varphi(t) = \frac{a_2 x_2 \mathrm{PQ} + a_3 x_3 \mathrm{PQ} + a_4 \mathrm{V}_4 + \ldots + a_n \mathrm{V}_n}{\mathrm{PQ}}.$$

Or la courbe $0 = a_2 x_2 \mathrm{PQ} + \ldots + a_n \mathrm{V}_n$ coupe la droite $x_1 = 0$ en $n-2$ points situés sur S; son degré $p+q+1$ est au plus égal à $n-3$, puisque p est au moins égal à 1, et que $2p+q = n-3$; il en résulte que cette courbe se décompose en une courbe H de degré $p+q$, et en une droite $x_1 = 0$; on a aussi

$$\varphi(t) = \frac{x_1(t) \mathrm{H}[x_1(t), \ldots]}{\mathrm{P}[x_1(t), \ldots]\mathrm{Q}[x_1(t), \ldots]}.$$

Les deux derniers zéros de $x_1(t)$ n'annulant pas $\varphi(t)$ doivent annuler $\mathrm{PQ}(t)$ ou $\Delta(t)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La proposition est donc générale.

L'équation de S peut, d'après ce qui précède, s'obtenir immédiatement en partant des relations (11), sous forme de déterminant; on aura

$$\mathrm{S} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{44} & \mathrm{A}_{45} & \mathrm{A}_{46} & \ldots & \mathrm{A}_{4n} & \mathrm{A}_{55} & \ldots & \mathrm{A}_{nn} & \Phi_1 & \ldots & \mathrm{X}_1 & \Omega_1 \\ \mathrm{B}_{44} & \mathrm{B}_{45} & \mathrm{A}_{46} & \ldots & \mathrm{B}_{4n} & \mathrm{B}_{55} & \ldots & \mathrm{B}_{nn} & \Phi_2 & \ldots & \mathrm{X}_2 & \Omega_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{L}_{44} & \mathrm{L}_{45} & \ldots & \ldots & \mathrm{L}_{4n} & \mathrm{L}_{55} & \ldots & \mathrm{L}_{nn} & \Phi_\delta & \ldots & \mathrm{X}_\delta & \Omega_\delta \\ m_i & n_i & \ldots & \ldots & q_i & 0 & \ldots & 0 & p_i & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$m_i, \ldots, p_i$ s'obtiennent également de suite sous forme de déterminants. On a, par exemple,

$$m_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{44} & \mathrm{A}_{45} & \ldots & \mathrm{A}_{55} & \mathrm{A}_{nn} & \Phi_1 \\ \mathrm{B}_{44} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \Phi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{G}_{44} & \ldots & \ldots & \ldots & \mathrm{G}_{nn} & \Phi_{\delta'} \end{vmatrix},$$

étant posé

$$\delta' = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)+1.$$

21. Théorème. — *La courbe dont l'équation est* $\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0$ *a un point multiple d'ordre* $p-1$ *en tout point multiple d'ordre* p *de* S.

Admettons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un point triple de S, et soient α, β, γ les trois valeurs correspondantes du paramètre t. On aura

$$(14) \qquad \frac{x_1(\beta)}{x_1(\alpha)} = \frac{x_2(\beta)}{x_2(\alpha)} = \frac{x_3(\beta)}{x_3(\alpha)} = \lambda, \quad \frac{x_1(\gamma)}{x_1(\alpha)} = \frac{x_2(\gamma)}{x_2(\alpha)} = \frac{x_3(\gamma)}{x_3(\alpha)} = \mu$$

(en désignant pour abréger par λ la valeur des trois premiers rapports, par μ celle des trois derniers). La courbe S étant supposée de degré n, les quantités $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$, $x_3(\alpha)$ ne sont pas nulles à la fois; soit, par exemple, $x_1(\alpha) \gtrless 0$.

Considérons les $(n-3)$ équations (13)

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m_1 x_4 + n_1 x_5 + \ldots + q_1 x_n = p_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

et les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= m_1(\alpha)\, x_4(t) + n_1(\alpha)\, x_5(t) + \ldots + q_1(\alpha)\, x_n(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-3}(t) &= m_{n-3}(\alpha)\, x_4(t) + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_{n-3}(\alpha)\, x_n(t). \end{aligned}$$

Les quantités $m_1(\alpha)$, ... désignent les valeurs que prennent les polynômes du premier degré $m_1(x_1, x_2, x_3)\ldots$ quand on y remplace x_1, x_2, x_3 par $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$, $x_3(\alpha)$.

En vertu des relations (13) et (14), on voit que les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_{n-3} satisfont aux relations

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(\beta)}{\varphi_1(\alpha)} &= \frac{\varphi_2(\beta)}{\varphi_2(\alpha)} = \ldots = \frac{\varphi_{n-3}(\beta)}{\varphi_{n-3}(\alpha)} = \lambda, \\ \frac{\varphi_1(\gamma)}{\varphi_1(\alpha)} &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\varphi_{n-3}(\gamma)}{\varphi_{n-3}(\alpha)} = \mu. \end{aligned}$$

On en conclut que les $(n-3)$ fonctions

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(t) &= \varphi_1(t)\, x_1(\alpha) - x_1(t)\, \varphi_1(\alpha), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{F}_{n-3}(t) &= \varphi_{n-3}(t)\, x_1(\alpha) - x_1(t)\, \varphi_{n-3}(\alpha), \end{aligned}$$

qui s'annulent pour $t = \alpha$, s'annulent également pour $t = \beta$ et $t = \gamma$.

Il en est évidemment de même [équations (14)] des deux fonctions

$$\begin{aligned} & x_2(t)\, x_1(\alpha) - x_1(t)\, x_2(\alpha), \\ & x_3(t)\, x_1(\alpha) - x_1(t)\, x_3(\alpha). \end{aligned}$$

Par conséquent (théorème III), il existe entre ces deux fonctions et les

$n - 3$ fonctions $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-3}$, deux relations linéaires et homogènes, identiques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit une de ces relations

$$\begin{aligned} 0 = a_1 \mathcal{F}_1 + a_2 \mathcal{F}_2 + \ldots + a_{n-3} \mathcal{F}_{n-3} \\ + a_{n-2}[x_2(t)\,x_1(\alpha) - x_1(t)\,x_2(\alpha)] + a_{n-1}[x_3(t)\,x_1(\alpha) - x_3(\alpha)\,x_1(t)]; \end{aligned}$$

x_2 et x_3 ne figurent pas dans $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-3}$: on a donc

$$a_{n-1} = a_{n-2} = 0.$$

Il reste

$$0 = a_1[\varphi_1(t)\,x_1(\alpha) - x_1(t)\,\varphi_1(\alpha)] + \ldots,$$

ce qu'on peut écrire

$$0 = x_1(\alpha)\,[a_1\,\varphi_1(t) + \ldots + a_{n-3}\,\varphi_{n-3}(t)] - x_1(t)\,[a_1\,\varphi_1(\alpha) + \ldots + a_{n-3}\,\varphi_{n-3}(\alpha)].$$

Cette équation, puisque $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-3}(t)$ ne renferment pas $x_1(t)$ et que $x_1(\alpha)$ n'est pas nul, entraîne les suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\,\varphi_1(\alpha) + \ldots + a_{n-3}\,\varphi_{n-3}(\alpha), \\ 0 &= a_1\varphi_1(t) \;\, + \ldots + a_{n-3}\,\varphi_{n-3}(t). \end{aligned}$$

Cette dernière comprend la précédente.

Il existe donc entre $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-3}$ deux relations linéaires et homogènes, identiques en $x_4, x_5, \ldots, x_n$; en d'autres termes, si l'on se reporte à l'expression des fonctions φ, il faut que les déterminants mineurs qu'on obtient en supprimant une ligne et une colonne quelconques du déterminant

$$d = \begin{vmatrix} m_1(\alpha) & n_1(\alpha) & \ldots & q_1(\alpha) \\ m_2(\alpha) & \ldots\ldots & \ldots & q_2(\alpha) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_{n-3}(\alpha) & \ldots\ldots & \ldots & q_{n-3}(\alpha) \end{vmatrix}$$

soient nuls. Le déterminant d sera également nul.

On peut donc trouver des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}$, différentes ensemble de zéro, telles que l'on ait

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha_1 m_1(\alpha) \;\; + \alpha_2 n_1(\alpha) + \ldots + \alpha_{n-3} q_1(\alpha) \;\; = 0, \\ \alpha_1 m_2(\alpha) \;\; + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-3} q_2(\alpha) \;\; = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1 m_{n-3}(\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-3} q_{n-3}(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Si α_1, par exemple, n'est pas nul, on peut écrire

$$\alpha_1 \Delta(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1 m_1 + \alpha_2 n_1 + \ldots + \alpha_{n-3} q_1 & n_1 & \ldots & q_1 \\ \alpha_1 m_2 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \alpha_{n-3} q_2 & n_2 & \ldots & q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1 m_{n-3} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-3} q_{n-3} & n_{n-3} & \ldots & q_{n-3} \end{vmatrix};$$

d'où, en ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne,

$$(16) \qquad \alpha_1 \Delta = \Sigma(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_{n-3} q_1)\, \delta_1.$$

Or la fonction du premier degré en x_1, x_2, x_3

$$\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_{n-3} q_1$$

s'annule pour $t = \alpha$ [équations (15)]; le déterminant mineur δ_1 devient, pour $t = \alpha$, un des déterminants mineurs nuls de d; en d'autres termes, la droite

$$\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_{n-3} q_1 = 0$$

et la courbe

$$\delta_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

passent par le point triple de S considéré. Il en résulte, par l'équation (16), que la courbe

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

passe par ce point, et y a un point double.

22. Les équations (13) nous donnent $x_4, \ldots, x_n$ sous la forme

$$x_4 = \frac{f_4}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{f_n}{\Delta},$$

f_4 étant le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & n_1 & \ldots & q_1 \\ p_2 & n_2 & \ldots & q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-3} & \ldots & \ldots & q_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je dis que les courbes $f_4 = 0, \ldots, f_n = 0$, qui sont d'ordre $n-2$, ont un point multiple d'ordre $p-1$ en tout point multiple d'ordre p de S. On peut, en effet, écrire f_4, en désignant toujours par α, β, γ les valeurs de t correspondant à un point triple de S,

$$f_4 = \begin{vmatrix} p_1 & -n_1 x_5(\alpha) x_1 & -\ldots - q_1 x_n(\alpha) x_1 & n_1 & \ldots & q_1 \\ p_2 & -n_2 x_5(\alpha) x_1 & -\ldots - q_2 x_n(\alpha) x_1 & n_2 & \ldots & q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-3} & - n_{n-3} x_5(\alpha) x_1 & - \ldots - q_{n-3} x_n(\alpha) x_1 & n_{n-3} & \ldots & q_{n-3} \end{vmatrix}.$$

$x_5(\alpha)$, ..., $x_n(\alpha)$ désignant ce que deviennent les fonctions x_5, ... pour $t = \alpha$; d'où l'on tire

$$x_1(\alpha) f_4 - \Delta x_1 x_4(\alpha)$$
$$= \begin{vmatrix} x_1(\alpha) p_1 & -m_1 x_4(\alpha) x_1 & -n_1 x_5(\alpha) x_1 - \ldots - q_1 x_n(\alpha) x_1 & n_1 & \ldots & q_1 \\ x_1(\alpha) p_2 & -m_2 x_4(\alpha) x_1 & -n_2 x_5(\alpha) x_1 - \ldots - q_2 x_n(\alpha) x_1 & n_2 & \ldots & q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1(\alpha) p_{n-3} & - m_{n-3} x_4(\alpha) x_1 & - \ldots \ldots - q_{n-3} x_n(\alpha) x_1 & n_{n-3} & \ldots & q_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Ordonnons par rapport aux éléments de la première colonne; il vient

$$(17) \qquad x_1(\alpha) f_4 = \Delta x_1 x_4(\alpha) + \Sigma [x_1(\alpha) p_1 - m_1 x_4(\alpha) x_1 - \ldots - q_1 x_n(\alpha) x_1] \delta_1.$$

Or les coniques

$$0 = x_1(\alpha) p_1 - m_1 x_4(\alpha) x_1 - \ldots - q_1 x_n(\alpha) x_1$$

passent par le point triple; car, en faisant $t = \alpha$ dans les relations (13), on trouve

$$0 = p_1 - m_1(\alpha) x_4(\alpha) - \ldots - q_1(\alpha) x_n(\alpha).$$

Les courbes $\delta_1 = 0$ passent également par ce point, comme on l'a vu plus haut; il résulte donc de la relation (17) que la courbe $f_4 = 0$ passe par le point triple considéré et y a un point double.

23. Les équations (12) donnent

$$x_4^2 = \varphi_1 x_4 + \ldots + \chi_1 x_n + \omega_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$\Delta x_4^2 = f_{44} = \varphi_1 f_4 + \ldots + \chi_1 f_n + \omega_1 \Delta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par suite, les courbes de degré $n-1$, $f_{44} = 0$, $f_{45} = 0$, ..., $f_{nn} = 0$ passent par le point triple et y ont un point double.

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés des courbes $\Delta = 0$,

$f_4 = 0, \ldots, f_{44} = 0, \ldots$, qui sont, d'après ce qui précède, des *courbes adjointes* de la courbe S.

Courbes du troisième degré.

24. La théorie précédente ne s'applique pas au cas de $n = 3$, puisque le nombre des relations du second degré entre les fonctions P est $\frac{1}{2}n(n-3)$, c'est-à-dire zéro.

En ce cas, les coordonnées des points de la courbe S étant de la forme

$$x_i = A_i P_1(t) + B_i P_2(t) + C_i P_3(t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

on pourra, par une transformation linéaire, ramener l'expression des coordonnées à la forme

$$x'_1 = P_1(t), \quad x'_2 = P_2(t), \quad x'_3 = P_3(t).$$

Or les quatre fonctions $P_1^3(t)$, $P_2^3(t)$, $P_3^3(t)$, $P_1(t)P_2(t)P_3(t)$ satisfont aux relations [équations (3)]

$$\varphi(t+\omega) = \varphi(t),$$
$$\varphi(t+\omega') = \varphi(t)e^{-\frac{6i\pi t}{\omega} - \frac{3i\pi\omega'}{\omega}},$$

et sont, par suite, liées par une relation linéaire et homogène (théorème VI). Cette relation, ne changeant pas quand on y remplace t par $t + \frac{\omega}{3}$, ou $t + \frac{2\omega}{3}$, c'est-à-dire quand on change P_i en P_{i+1} ou P_{i+2}, sera symétrique en P_1, P_2, P_3 et sera dès lors de la forme

$$P_1^3 + P_2^3 + P_3^3 - 6\lambda P_1 P_2 P_3 = 0,$$

λ étant une constante. L'équation de la courbe sera donc

$$x_1'^3 + x_2'^3 + x_3'^3 - 6\lambda x'_1 x'_2 x'_3 = 0.$$

C'est la forme canonique de l'équation des courbes du troisième ordre, sans points singuliers.

VII.

Examen des cas particuliers.

25. Dans ce qui précède, nous avons supposé que la courbe S représentée par les équations (6) était de degré n; nous devons examiner maintenant les cas où elle est de degré inférieur, et que nous avons mentionnés aux n^{os} **10** et **11**.

26. *Premier cas.* — Supposons que les trois fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ aient k zéros communs, sans que les équations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

aient d'autres solutions communes que celles comprises dans la formule

$$u = t + h\omega + nh'\omega'.$$

Pour que x_1, x_2, x_3 soient linéairement distinctes, il faudra (théorème III) qu'on ait

$$k \leqq n - 3.$$

Dans cette hypothèse, la courbe S étant coupée par une droite en $n - k$ points distincts, sera de degré $n - k$, et irréductible.

Nous choisirons, pour les $n - k - 3$, trois fonctions

$$x_4, \ x_5, \ \ldots, \ x_{n-k}$$

des fonctions linéaires et homogènes de $P_1, \ldots, P_n$ s'annulant pour les k valeurs t_1, t_2, ..., t_k qui annulent simultanément x_1, x_2, x_3; et pour la fonction

$$x_{n-k+i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

une fonction linéaire de P_1, ..., P_n s'annulant pour les mêmes valeurs, la valeur t_i exceptée (*Rem.*, n° 5).

Cela posé, si l'on fait successivement $t = t_1, t_2, \ldots, t_k$ dans les relations (11), on voit que les coefficients des termes en

$$x_{n-k+1}^2, \ x_{n-k+2}^2, \ \ldots, \ x_n^2$$

doivent être nuls.

On en tire deux conclusions :

1° Le déterminant $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ a k colonnes formées de zéros et, par suite, est identiquement nul;

2° En éliminant entre les $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations (11) les fonctions

$$x_4^2, \ x_5^2, \ \ldots, \ x_n^2, \ x_4 x_5, \ \ldots, \ x_i x_j \quad (i, j = 4, \ldots, n),$$

on obtiendra $n - 3 + k$ relations de la forme

$$(22) \quad 0 = m_i x_4 + n_i x_5 + \ldots + r_i x_{n-k} + s_i x_{n-k+1} + v_i x_{n-k+2} + \ldots + q_i x_n - p_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n - 3 + k),$$

$m_i, \ldots, q_i$ désignent toujours des polynômes du premier degré en x_1, x_2, x_3 ; p_i des polynômes du second degré. Les fonctions $m_i x_4$, $n_i x_5$, $q_i x_n$, p_i admettent le zéro double t_1, la fonction $s_i x_{n-k+1}$ exceptée, car m_i et x_4, par exemple, s'annulent pour $t = t_1$. Il en résulte que t_1 sera zéro double de s_i, et, si l'on pose

$$s_i = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3,$$

on aura

$$0 = \alpha_i x'_1(t_1) + \beta_i x'_2(t_1) + \gamma_i x'_3(t_1);$$

et s_i sera de la forme

$$s_i = \alpha_i \left[x_1 - x_3 \frac{x'_1(t_1)}{x'_3(t_1)} \right] + \beta_i \left[x_2 - x_3 \frac{x'_2(t_1)}{x'_3(t_1)} \right].$$

Les fonctions $s_1, s_2, \ldots, s_{n-3+k}$ seront donc fonctions linéaires et homogènes de deux d'entre elles ; il en est de même pour les fonctions $\varphi_i, \ldots, q_i$.

Il résulte de là qu'on peut, en combinant linéairement trois des équations (22), obtenir une relation de même forme où x_{n-k+1} aura disparu, et former en tout $(n + k - 3) - 2$ relations de cette nature.

En opérant de même sur $x_{n-k+2}, \ldots, x_{n-1}$, on arrivera à $n - 3 + k - 2(k-1)$, c'est-à-dire à $n - 1 - k$ relations de la forme

$$(23) \qquad 0 = m'_j x_4 + n'_j x_5 + \ldots + r'_j x_{n-k} + q'_j x_n - p'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n - 1 - k),$$

et en éliminant x_n de la même manière, à $n - 3 - k$ relations de la forme

$$(24) \qquad 0 = \mu_h x_4 + \nu_h x_5 + \ldots + \rho_h x_{n-k} - \varpi_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n - 3 - k).$$

Soit Δ' le déterminant du degré $n - 3 - k$ en x_1, x_2, x_3,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 & \ldots & \rho_1 \\ \mu_2 & \nu_2 & \ldots & \rho_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n-3-k} & \ldots & \ldots & \rho_{n-3-k} \end{vmatrix}.$$

Je dis qu'il n'est pas nul. En effet, la courbe S étant de degré $n - k$, et irréductible, ce déterminant ne peut être nul que s'il est identiquement égal à zéro. Je dis que cette hypothèse est inadmissible.

Si, en effet, on l'admet, on en conclut, puisque $x_4, \ldots, x_{n-k}$ ont des valeurs finies, que les déterminants obtenus en remplaçant une colonne de Δ' par la colonne $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-3-k}$ sont aussi nuls identiquement, et, par suite, qu'on pourra, en combinant linéairement les premiers membres des relations (24), faire disparaître x_1 dans les coefficients de $x_4, \ldots, x_{n-k}$, et x_1^2 dans le second membre de l'équation obtenue. On aurait donc une relation de la forme

$$x_2(l_1 x_1 + \ldots + l_{n-k} x_{n-k}) = x_3(l'_1 x_1 + \ldots + l'_{n-k} x_{n-k}).$$

Les $(n-k)$ zéros de x_2 autres que $t_1, t_2, \ldots, t_k$ annulent donc la fonction $(l'_1 x_1 + \ldots + l'_{n-k} x_{n-k})$, car on peut toujours choisir un triangle de référence qui n'ait aucun sommet sur la courbe S, de telle façon que $x_2(t)$ et $x_3(t)$ n'aient que les $(n-k)$ zéros communs $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Mais la fonction $l'_1 x_1 + \ldots + l'_{n-k} x_{n-k}$ s'annule en même temps que $x_1, \ldots, x_{n-k}$ pour $t = t_1, \ldots, t_k$; elle a donc mêmes zéros que la fonction x_2, et n'en différera que par un facteur constant. En raisonnant de même sur la fonction $l_1 x_1 + \ldots$, on voit que la relation précédente serait de la forme

$$L x_2 x_3 = 0,$$

ce qui entraîne $L = 0$, et par suite une identité, résultat contraire au lemme du n° 17. Le déterminant Δ' n'est donc pas nul.

On tirera ainsi des relations (24) les valeurs de $x_4, \ldots, x_{n-k}$ sous la forme

$$x_4 = \frac{f'_4}{\Delta'}, \quad \ldots, \quad x_{n-k} = \frac{f'_{n-k}}{\Delta'}.$$

En les portant dans les relations (23), on pourra exprimer x_n en fonction de x_1, x_2, x_3, à moins que les $n-1-k$ fonctions q'_j ne soient nulles. Si ce cas se présentait, on pourrait, en combinant linéairement ces $n-1-k$ relations (23), faire disparaître x_1 dans les coefficients de $x_4, \ldots, x_{n-k}$ et x_1^2, dans le second membre de la relation obtenue, ce que nous savons être impossible. On aura donc x_n sous la forme

$$x_n = \frac{f'_n}{q\Delta'},$$

q étant du premier degré en x_1, x_2, x_3, et l'on trouvera des expressions analogues de $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}$.

On peut donc énoncer les résultats suivants :

27. *Si x_1, x_2, x_3 ont k zéros communs, sans que les équations*

$$\frac{x_2}{x_1}(u) = \frac{x_2}{x_1}(t), \quad \frac{x_3}{x_1}(u) = \frac{x_3}{x_1}(t)$$

aient d'autres solutions communes en u que celles comprises dans la formule $u = t + h\omega + nh'\omega'$, la courbe S *décrite par le point* (x_1, x_2, x_3) *est de degré* $n - k$; *le déterminant* Δ *est identiquement nul; de plus, toute fonction linéaire et homogène de* $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ *s'exprime rationnellement en fonction de* $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

28. Supposons que $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ aient $(n-3)$ zéros communs : la courbe décrite par le point (x_1, x_2, x_3) sera du troisième degré. Les fonctions $\frac{x_2}{x_1}(t)$ et $\frac{x_3}{x_1}(t)$ étant doublement périodiques, aux périodes ω, $n\omega'$, et d'ordre 3, pourront (nº 9) se mettre sous la forme

$$\frac{x_2}{x_1}(t) = \frac{b_1 \Pi_1 + b_2 \Pi_2 + b_3 \Pi_3}{a_1 \Pi_1 + a_2 \Pi_2 + a_3 \Pi_3}, \quad \frac{x_3}{x_1}(t) = \frac{c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2 + c_3 \Pi_3}{a_1 \Pi_1 + a_2 \Pi_2 + a_3 \Pi_3},$$

$a_1, \ldots, c_3$ étant des constantes, et Π_{j+1} $(j = 0, 1, 2)$ désignant la fonction

$$\theta_3\left(t + \theta + j\,\frac{\omega}{3}, \omega, \frac{n\omega'}{3}\right),$$

où θ représente une constante.

Or Π_1, Π_2, Π_3 sont liés (nº 24) par la relation

$$\Pi_1^3 + \Pi_2^3 + \Pi_3^3 - 6\lambda \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 = 0.$$

La courbe du troisième degré décrite par le point (x_1, x_2, x_3) est donc du genre 1.

De là résulte la détermination du genre de S dans le cas général.

Genre de la courbe S.

29. Soit, en effet, une courbe S définie par les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\,P_1(t) + \ldots + A_n\,P_n(t), \\ x_2 &= B_1\,P_1(t) + \ldots, \\ x_3 &= C_1\,P_1(t) + \ldots \end{aligned}$$

et supposée de degré n. Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois fonctions linéaires et homogènes de $P_1, \ldots, P_n$ ayant $n - 3$ zéros communs; la courbe S′ décrite par le point (ξ_1, ξ_2, ξ_3) est du troisième degré et du genre un. Or on a, d'après ce qui précède,

$$\xi_i = \text{fonction rationnelle de } x_1,\ x_2,\ x_3,$$
$$x_i = \text{fonction rationnelle de } \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3.$$

Les deux courbes S et S′ sont donc de même genre, d'après le théorème bien connu de Riemann, et, par suite, S est de genre un.

La courbe S, par le même raisonnement, sera encore de genre un, quand $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ auront des zéros communs, sans que les équations

$$\frac{x_2}{x_1}(u) = \frac{x_2}{x_1}(t), \quad \frac{x_3}{x_1}(u) = \frac{x_3}{x_1}(t)$$

aient d'autres solutions communes que celles comprises dans la formule

$$u = t + h\omega + nh'\omega'.$$

En conséquence :

La courbe S *est de genre un toutes les fois qu'elle est irréductible.*

30. *Second cas.* — Supposons maintenant que les fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ aient k zéros communs, et de plus que les deux équations

$$X(u) - X(t) = 0, \quad Y(u) - Y(t) = 0 \quad \left(X = \frac{x_2}{x_1},\ Y = \frac{x_3}{x_1}\right)$$

aient en u d'autres solutions communes que celles comprises dans la formule

$$u = t + h\omega + nh'\omega'.$$

Soit posé $m = n - k$: les deux fonctions doublement périodiques, aux périodes ω, $n\omega'$, $X(t)$ et $Y(t)$, sont d'ordre m.

La discussion qui va suivre nous conduira à distinguer deux cas, que nous examinerons séparément dès maintenant.

A. Les valeurs de u qui satisfont simultanément aux deux équations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

sont de la forme

$$u = t + \text{const.}$$

En ce cas, les deux fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ ont un système de périodes plus simple que le système ω, $n\omega'$; soit ω_1, ω'_1 ce système, et soit m' l'ordre des deux fonctions, c'est-à-dire le nombre des infinis de ces fonctions, contenus dans un parallélogramme ω_1, ω'_1.

Si les équations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ n'ont d'autres solutions communes en u que celles de la forme

$$u = t + h\omega_1 + h'\omega'_1,$$

il résulte de ce qui précède que la courbe décrite par le point $(1, X, Y)$ sera de degré m' et de genre un; sinon on retombera dans le cas que nous allons examiner maintenant.

B. Les équations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ sont vérifiées simultanément par des valeurs de u autres que celles de la forme $t + h\omega + nh'\omega'$, sans que les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ aient un système de périodes plus simple que le système ω, $n\omega'$.

L'équation $X(u) = X(t)$ donne, pour toute valeur finie de t, m séries de valeurs de u

$$t + h\omega + nh'\omega',\quad u_1 + h\omega + nh'\omega',\quad \ldots,\quad u_{m-1} + h\omega + nh'\omega',$$

h et h' étant des entiers quelconques. Les points critiques de la fonction u, définie par cette relation, sont donnés par l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial u} = 0,$$

qui est vérifiée, en général, pour $2m$ séries de valeurs de u

$$U_1 + h\omega + nh'\omega',\quad \ldots,\quad U_{2m} + h\omega + nh'\omega'.$$

Aux valeurs de u comprises dans une de ces séries correspondent, par l'équation $X(u) = X(t)$, m séries de valeurs de u

$$T_1 + h\omega + nh'\omega',\quad T_2 + h\omega + nh'\omega',\quad \ldots,$$

ce qui, en tout, donne $2m^2$ points critiques dans tout parallélogramme des périodes.

Supposons que la variable t arrivant à un de ces points, T_1, la branche considérée de la fonction, ait pour valeur un zéro multiple, U_1, d'ordre q, de l'équation $X(u) - X(t) = 0$.

Posant $t = T_1 + \theta$, $u = U_1 + v$, cette équation devient

$$\frac{v^q}{1.2\ldots q} X^{(q)}(U_1) + \ldots = \frac{\theta^k}{1.2\ldots k} X^{(k)}(T_1) + \ldots,$$

k étant un entier positif, non nul. Si p' est le plus grand commun diviseur de q et de k, cette relation montre que les q branches de la fonction u, dont les valeurs sont U_1 au point T_1, se partagent en p' systèmes, et que les branches d'un de ces systèmes se permutent entre elles quand la variable tourne autour d'un point critique.

La dérivée de la fonction u est donnée par l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{X'(t)}{X'(u)};$$

elle n'a que m valeurs pour une valeur de t, et un certain nombre de ces valeurs s'échangent quand la variable tourne autour d'un point critique.

Si les deux équations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ ont, quel que soit t, des solutions communes en u, il faut que les deux fonctions u et υ, définies par les relations

$$X(u) = X(t), \quad Y(\upsilon) = Y(t),$$

aient des branches communes : soient t, u_1, ..., u_{p-1} ces branches. Il est clair que, si la variable part du point t et y revient, après avoir décrit un chemin quelconque, les fonctions u_1, u_2, ..., u_{p-1} devront reprendre les mêmes valeurs, à l'ordre près, et à des multiples près des périodes ω, $n\omega'$; et, par conséquent, les dérivées de ces fonctions, données par l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{X'(u)}{X'(t)},$$

reprendront les mêmes valeurs, à l'ordre près.

Il en résulte que la somme

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \ldots + \frac{du_{p-1}}{dt}$$

est fonction monodrome de t, dans tout le plan. Je dis qu'elle n'a pas de pôle à distance finie; car, aux environs d'un point quelconque t_0, on peut, d'après ce qui précède, développer u_i en série, sous la forme

$$u_i = u_i^0 + A(t - t_0)^{\frac{k}{q}} + B(t - t_0)^{\frac{2k}{q}} + \ldots;$$

on a donc, dans le domaine du point t_0,

$$\frac{du_i}{dt} = \mathcal{A}(t - t_0)^{\frac{k}{q}-1} + \ldots.$$

Or $\frac{k}{q}$ est positif, $\frac{k}{q} - 1$ est donc plus grand que -1, et $\frac{du_i}{dt}$ ne renferme pas de puissances entières et négatives de $(t - t_0)$. Il en est, par suite, de même de la somme

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \ldots + \frac{du_{p-1}}{dt},$$

et, comme cette somme est monodrome, il ne subsistera, dans son développement en série, aux environs de t_0, que des puissances entières et non négatives de $t - t_0$: elle n'a donc pas de pôle à distance finie.

D'un autre côté, les relations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ ne changent pas si l'on augmente t d'une période : si donc la variable va du point t au point $t + \omega$, par un chemin quelconque, les fonctions $u_1, \ldots, u_{p-1}$ reprennent les mêmes valeurs, à l'ordre près, et à des multiples près de ω, $n\omega'$, et les dérivées $\frac{du_1}{dt}, \ldots$ reprennent les mêmes valeurs, à l'ordre près.

Il en résulte que la fonction $\frac{du_1}{dt} + \ldots + \frac{du_{p-1}}{dt}$ admet les périodes $\omega, n\omega'$. Comme elle n'a pas de pôles à distance finie, c'est une constante, $-A$. On a donc

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \ldots + \frac{du_{p-1}}{dt} + A = 0$$

ou

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + At = C.$$

Pour déterminer A, remarquons que les équations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ ne changent pas si l'on remplace t par $u_1(t)$, puisque $X(u_1) = X(t)$. En conséquence, la variable allant du point t au point $u_1(t)$, par un chemin quelconque, les fonctions $t, u_1(t), \ldots, u_{p-1}(t)$ deviendront $u_1(t), u_1[u_1(t)], \ldots, u_{p-1}[u_1(t_1)]$, et devront reproduire, à l'ordre près et à des multiples près des périodes, la série de valeurs $t, u_1(t), \ldots, u_{p-1}(t)$. Si donc on change t en $u_1(t)$ dans la relation

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + At = C,$$

on a

$$t + u_2 + \ldots + u_{p-1} + Au_1 = C + \lambda_1\omega + n\mu_1\omega',$$

d'où

$$(A - 1)(u_1 - t) = \lambda_1\omega + n\mu_1\omega',$$

et de même

$$(\mathrm{A}-1)(u_2-t)=\lambda_2\omega+n\mu_2\omega'+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(\mathrm{A}-1)(u_{p-1}-t)=\lambda_{p-1}\omega+n\mu_{p-1}\omega'.$$

Si A diffère de 1, on aura

$$u_k=t+\sigma_k,$$

σ_k étant une constante : c'est l'hypothèse examinée plus haut (A), et que nous avons écartée. Il faut donc que l'on ait $\mathrm{A}-1=0$, et il reste

$$t+u_1+u_2+\ldots+u_{p-1}=\mathrm{C}.$$

31. Cela posé, soit α une valeur telle que les quantités α, $u_1(\alpha)$, ..., $u_{p-1}(\alpha)$ soient différentes; d'après ce qui précède, les quantités $u_1(\alpha)$, $u_1[u_1(\alpha)]$, ..., $u_{p-1}[u_1(\alpha)]$ seront également différentes, et les points α, $u_1(\alpha)$, ..., $u_{p-1}(\alpha)$ ne seront pas des points critiques de la fonction u. Soit β une quantité analogue à α; considérons la fonction

$$\varphi(t)=\frac{\theta_1(t-\alpha)\theta_1[u_1(t)-\alpha]\ldots\theta_1[u_{p-1}(t)-\alpha]}{\theta_1(t-\beta)\theta_1[u_1(t)-\beta]\ldots\theta_1[u_{p-1}(t)-\beta]},$$

étant posé

$$\theta_1(t)=\theta_1(t,\omega,n\omega')=\frac{1}{i}\sum_{+\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}e^{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2\frac{ni\pi\omega'}{\omega}}e^{(2\mu+1)\frac{i\pi t}{\omega}}.$$

Je dis que la fonction $\varphi(t)$ est monodrome. En effet, si la variable part du point t et y revient après avoir suivi un chemin quelconque, les fonctions u_1, ..., u_{p-1} se reproduisent à l'ordre près et à des multiples près des périodes. On a ainsi, en désignant par $(u_{k'})$ ce que devient la fonction $u_{k'}$,

$$(u_{k'})=u_i+h\omega+nh'\omega'\quad(k',i=1,2,\ldots,p-1)$$

avec les conditions

$$\Sigma h=\Sigma h'=0,$$

puisque $t+u_1+\ldots+u_{p-1}$ est constant. Le facteur

$$\frac{\theta_1(u_{k'}-\alpha)}{\theta_1(u_{k'}-\beta)}$$

devient donc

$$\frac{\theta_1(u_i-\alpha)}{\theta_1(u_i-\beta)}e^{\frac{2h'i\pi}{\omega}(\alpha-\beta)},$$

et $\varphi(t)$ se reproduit multiplié par la quantité $e^{\frac{2(\alpha-\beta)i\pi}{\omega}\Sigma k'}$, c'est-à-dire l'unité. On voit de même que $\varphi(t)$ admet les périodes ω, $n\omega'$.

De même, enfin, $\varphi(t)$ ne change pas, si l'on y remplace t par une des quantités $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_{p-1}(t)$.

Les zéros de $\varphi(t)$ s'obtiendront évidemment en égalant à zéro successivement les facteurs du numérateur. Soit, par exemple,

$$\theta_1[u_1(t)-\alpha]=0.$$

On en tire

$$u_1(t)=\alpha+h\omega+nh'\omega',$$

et les relations $X(u_1)=X(t)$; $Y(u_1)=Y(t)$ montrent que l'on aura

$$X(t)=X(\alpha),\quad Y(t)=Y(\alpha),$$

c'est-à-dire

$$t=u_k(\alpha)+h\omega+nh'\omega',$$

k ayant une des valeurs $1, 2, \ldots, p-1$.

Les zéros de $\varphi(t)$ ne peuvent donc être que de la forme précédente. Inversement, toute quantité de cette forme est zéro simple de $\varphi(t)$. Soit, par exemple, la quantité $u_1(\alpha)$: les quantités

$$u_1(\alpha),\ u_1[u_1(\alpha)],\ \ldots,\ u_{p-1}[u_1(\alpha)]$$

reproduisent, à l'ordre près et à des multiples près de ω, $n\omega'$, les quantités

$$\alpha,\ u_1(\alpha),\ \ldots,\ u_{p-1}(\alpha).$$

On a ainsi

$$u_\rho[u_1(\alpha)]=\alpha+h\omega+nh'\omega',$$

et le facteur

$$\theta_1[u_\rho(t)-\alpha]$$

s'annulera pour $t=u_1(\alpha)$. Le point $u_1(\alpha)$ n'étant pas un point critique, par hypothèse, les quantités

$$u_1(\alpha),\ u_1[u_1(\alpha)],\ \ldots,\ u_{p-1}[u_1(\alpha)]$$

sont différentes, et les facteurs du numérateur autres que $\theta_1(u_\rho-\alpha)$ ne s'annulent pas pour $t=u_1(\alpha)$. La dérivée de ce facteur ne s'annule pas non plus pour cette valeur, car elle est égale à

$$\theta'_1(u_\rho - \alpha)\,\frac{du_\rho}{dt};$$

or $\theta'_1\{u_\rho[u_1(\alpha)] - \alpha\}$, c'est-à-dire $\theta'_1(0)$, n'est pas nul, et $\frac{du_\rho}{dt}$ n'est pas nul au point $t = u_1(\alpha)$, puisque les valeurs de u sont différentes en ce point.

Il résulte de là que les zéros de $\varphi(t)$ sont, dans un parallélogramme des périodes, les quantités α, $u_1(\alpha)$, ..., $u_{p-1}(\alpha)$; et ses infinis, les quantités β, $u_1(\beta)$, ..., $u_{p-1}(\beta)$. On a donc, $\mathcal{A}$ étant une constante,

$$\varphi(t) = \mathcal{A}\,\frac{\theta_1(t-\alpha)\theta_1[t-u_1(\alpha)]\ldots\theta_1[t-u_{p-1}(\alpha)]}{\theta_1(t-\beta)\ldots\theta_1[t-u_{p-1}(\beta)]} = \mathcal{A}\,Z(t).$$

Or, nous avons vu plus haut que $\varphi(t)$ ne change pas quand on y remplace t par $u_i(t)$; il en est donc de même de $Z(t)$, et l'on a

$$Z[u_i(t)] = Z(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Il en résulte que les p fonctions t, $u_1(t)$, ..., $u_{p-1}(t)$ sont, abstraction faite des multiples de ω, $n\omega'$, les zéros de la fonction de u : $Z(u) - Z(t)$, où $Z(u)$ désigne une fonction doublement périodique, aux périodes ω, $n\omega'$, et d'ordre p.

32. On en déduit que la courbe décrite par le point (x_1, x_2, x_3) ou $(1, X, Y)$ est *unicursale*.

Il existe, en effet, entre les deux fonctions doublement périodiques, aux mêmes périodes $X(t)$ et $Z(t)$, une relation algébrique. Si l'on se donne Z, on trouve pour t, abstraction faite de multiples des périodes, p valeurs. Soit a l'une d'elles. La relation

$$Z[u_i(a)] = Z(a)$$

montre que les $(p-1)$ autres seront $u_1(a)$, $u_2(a)$, ..., $u_{p-1}(a)$. Or, aux valeurs a, $u_1(a)$, ..., $u_{p-1}(a)$ de t correspond, à cause de la relation

$$X[u_i(a)] = X(a) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

une seule valeur de X. Ainsi, Z étant donné, X n'a qu'une valeur : X est donc fonction rationnelle de Z. Il en est de même de Y, et la courbe S, décrite par le point $(1, X, Y)$, est unicursale.

33. *Le degré de cette courbe est* $\frac{n-k}{p}$. — Soit, en effet, l'équation

$$X(t) = X(t_0),$$

où t_0 est une constante arbitrairement choisie. Elle donne les arguments des points d'intersection de la courbe S avec la droite $X = X(t_0)$.

Cette équation, à moins que t_0 n'ait des valeurs particulières, ce que nous ne supposons pas, n'a pas de racine commune avec l'une ou l'autre des équations

$$Z'(t) = 0, \quad X'(t) = 0;$$

de plus, les équations

$$X(t) = X(t_0), \quad Y(t) = Y(t_0)$$

n'ont, abstraction faite des multiples de ω, $n\omega'$, d'autres solutions communes que les quantités

$$t_0, \; u_1(t_0), \; \ldots, \; u_{p-1}(t_0).$$

L'équation $X(t) = X(t_0)$ admet tout d'abord comme racines ces p quantités, qui sont différentes, puisque $Z'[u_i(t_0)]$ n'est pas nul, et qui sont des racines simples, puisque $X'[u_i(t_0)]$ n'est pas nul.

A ces p racines correspond la même valeur $Y(t_0)$ de Y.

Soit v_0 une autre racine de l'équation $X(t) = X(t_0)$; les quantités v_0, $u_1(v_0)$, $\ldots$, $u_{p-1}(v_0)$ seront des racines; elles diffèrent entre elles, et sont des racines simples pour les mêmes raisons que les quantités $t_0, \ldots, u_{p-1}(t_0)$; de plus, la valeur $Y(v_0)$ de Y, qui correspond aux p racines v_0, $u_1(v_0)$, $\ldots$, $u_{p-1}(v_0)$, diffère de $Y(t_0)$. On ne peut avoir, en effet,

$$Y(v_0) = Y(t_0),$$

en même temps que

$$X(v_0) = X(t_0),$$

que si v_0 a l'une des valeurs t_0, $u_1(t_0)$, $\ldots$, $u_{p-1}(t_0)$, ce qui n'a pas lieu, puisque les quantités t_0, $\ldots$ sont des zéros simples de la fonction $X(t) - X(t_0)$.

On voit ainsi que les $(n-k)$ zéros de cette fonction, compris dans un parallélogramme ω, $n\omega'$, se partagent en groupes renfermant chacun p zéros distincts, et qui diffèrent des zéros des autres groupes. Aux p zéros d'un même groupe correspond une seule valeur de $Y(t)$, et les $\frac{n-k}{p}$ valeurs ainsi obtenues sont différentes.

Il en résulte que la droite $X = X(t_0)$ coupe la courbe S en $\frac{n-k}{p}$ points distincts; cette courbe est donc de degré $\frac{n-k}{p}$.

VIII.

Discussion générale.

34. Il nous reste maintenant à reconnaître si une courbe S, représentée par des équations de la forme (6), est de degré n et de genre un.

La considération des équations fondamentales va nous permettre de résoudre cette question.

Il a été démontré plus haut que, dans le cas où la courbe S est de degré n, la fonction $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas identiquement nulle, et qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène identique entre les n fonctions Δx_1, Δx_2, Δx_3; $f_4, f_5, \ldots, f_n$.

Ces conditions nécessaires sont en même temps suffisantes.

Si, en effet, la courbe S n'est pas de degré n, on se trouve dans un des cas particuliers examinés plus haut.

1° $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ ont des zéros communs; en ce cas, on a vu que la fonction $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ est nulle identiquement.

2° $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ ont k zéros communs, et les équations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ sont vérifiées simultanément, quel que soit t, pour p valeurs de u comprises dans un parallélogramme ω, $n\omega'$. On admet, de plus, que les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ n'ont pas de système de périodes plus simple que le système ω, $n\omega'$.

En ce cas, si k n'est pas nul, Δ est identiquement égal à zéro comme précédemment. Il en est de même si k est nul.

Admettons, en effet, que Δ ne soit pas nul identiquement; on pourra des équations (11) tirer les équations (12) et (13). Dès lors, en vertu du raisonnement du n° 21, la courbe $\Delta = 0$ a un point multiple d'ordre $p' - 1$ en tout point multiple d'ordre p' de S. Or, à tout point de S correspondent p arguments, t, $u_1(t), \ldots, u_{p-1}(t)$, et, par suite, tout point de S peut être considéré comme un point multiple d'ordre p, et l'on aura

$$S = \Sigma^p,$$

la courbe $\Sigma = 0$ étant une courbe unicursale de degré $\frac{n}{p}$. La fonction Δ sera, d'après ce qui précède, divisible par Σ^{p-1}, et l'on aura identiquement

$$\Delta = \Sigma^{p-1}\Delta_1,$$

Δ_1 étant un polynôme de degré $\frac{n}{p} - 3$ en x_1, x_2, x_3.

Remarquons maintenant qu'à un point double de la courbe $\Sigma = 0$ correspondent $2p$ arguments de la forme $t, u_1(t), \ldots, u_{p-1}(t); t', u_1(t'), \ldots, u_{p-1}(t')$; un tel point est donc un point multiple d'ordre $2p$ sur S, et, par suite, d'ordre $2p - 1$ sur Δ. Il résulte de l'identité précédente que ce point sera un point simple de la courbe $\Delta_1 = 0$.

Cette courbe est donc une courbe adjointe de Σ. Or une courbe unicursale n'a pas de courbe adjointe dont le degré soit inférieur au sien de trois unités [car une courbe adjointe de degré $m - 3$ passant par les $\frac{1}{2}m(m-3)+1$ points doubles d'une unicursale de degré m couperait cette courbe en $m(m-3)+2$ points]; il en résulte nécessairement que la fonction Δ_1 est identiquement nulle, et il en est dès lors de même de la fonction Δ.

3° Les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ ont un système de périodes ω_1, ω'_1, plus simple que le système ω, $n\omega'$, sans que les équations $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ aient dans un parallélogramme $\omega_1\omega'_1$ d'autre solution commune que la solution $u = t$.

En ce cas, si le parallélogramme ω, $n\omega'$ équivaut à p fois le parallélogramme ω_1, ω'_1, la courbe S est une courbe Σ, de genre un, de degré $\frac{n}{p}$, comptée p fois. Cela résulte immédiatement de la discussion des n^{os} 17 et 30.

On aura, comme plus haut, identiquement

$$\Delta = \Sigma^{p-1}\Delta_1,$$

la courbe de degré $\frac{n}{p} - 3$, $\Delta_1 = 0$ étant une courbe adjointe de Σ.

De même, $f_4, \ldots, f_n$ étant les fonctions définies au n° 15, on aura

$$f_4 = \Sigma^{p-1}\varphi_4, \quad \ldots, \quad f_n = \Sigma^{p-1}\varphi_n,$$

$\varphi_4, \ldots, \varphi_n$ étant des polynômes de degré $\frac{n}{p} - 2$, qui, égalés à zéro, sont les équations de courbes adjointes de Σ.

Or nous verrons plus loin que l'équation générale des courbes de degré $m - 2$, adjointes d'une courbe de degré m et de genre un, est de la forme

$$0 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_m C_m,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ étant des constantes, $C_1, \ldots, C_m$ des polynômes de degré $m-2$ en x_1, x_2, x_3.

Il en résulte que les n fonctions

$$x_1\Delta_1,\ x_2\Delta_1,\ x_3\Delta_1,\ \varphi_4,\ \ldots,\ \varphi_n$$

sont liées par $n - \frac{n}{p}$ relations linéaires et homogènes, et il en est de même des fonctions

$$x_1\Delta,\ x_2\Delta,\ x_3\Delta,\ f_4,\ \ldots,\ f_n.$$

35. Par conséquent :

Théorème. — *Pour que la courbe représentée par les équations* (6) *soit de degré n, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune relation identique (en x_1, x_2, x_3) de la forme*

$$a_1x_1\Delta + a_2x_2\Delta + a_3x_3\Delta + a_4f_4 + \ldots + a_nf_n = 0,$$

$a_1, \ldots$ *étant des constantes.*

Il résulte de ce qui précède que, si la courbe est de degré n, elle sera également de genre un.

IX.

Conséquences géométriques.

36. Soit S une courbe de degré n et de genre un, définie par des équations de la forme (6); désignons par a_2 le nombre de ses points doubles, par a_3 celui de ses points triples, etc.

On a, puisque S est de genre un,

$$a_2 + 3a_3 + \ldots + \tfrac{1}{2}p(p-1)a_p = \tfrac{1}{2}n(n-3)$$

ou

$$2a_2 + 6a_3 + \ldots + p(p-1)a_p = n(n-3).$$

La courbe Δ, dont nous avons appris à former l'équation, est de degré $n-3$ et a un point multiple d'ordre $p-1$ en tout point multiple d'ordre p de S; elle a donc avec S $p(p-1)$ points communs en un tel point, et l'équation précédente montre que Δ ne coupe S qu'aux points multiples de cette dernière courbe.

Il en résulte que la courbe Δ est unique; car, s'il existait deux courbes adjointes $\Delta = 0$ et $\Delta' = 0$ de degré $n - 3$, la courbe

$$\alpha\Delta + \alpha'\Delta' = 0,$$

où α et α' sont des constantes, serait également une courbe adjointe, et l'on pourrait la faire passer par un point quelconque de la courbe S, qu'elle couperait ainsi en $n(n-3)+1$ points, ce qui est impossible.

37. La courbe de degré $n - 2$ dont l'équation est

$$C = \Delta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) + \omega_4 f_4 + \ldots + \omega_n f_n = 0$$

($\omega_1, \ldots, \omega_n$ étant des constantes arbitraires) est une courbe adjointe de S.

Réciproquement, toute courbe adjointe de degré $n - 2$ a une équation de cette forme.

Remarquons d'abord que les arguments des mn points d'intersection avec S d'une courbe quelconque de degré m, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, sont donnés par l'équation

$$0 = f(A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n, B_1 P_1 + \ldots, C_1 P_1 + \ldots),$$

et l'on démontre sans difficulté, comme au n° 3, que cette équation a dans un parallélogramme ω, $n\omega'$, mn zéros dont la somme, à des multiples près des périodes, est $\frac{mn}{2}(\omega + n\omega')$.

Soit C′ une courbe adjointe quelconque de degré $n - 2$; elle coupe S aux points où cette courbe est coupée par Δ et en n autres points, dont les arguments ont pour somme, à des multiples près de ω, $n\omega'$, la quantité

$$\frac{n(n-2)}{2}(\omega + n\omega') - \frac{n(n-3)}{2}(\omega + n\omega'),$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{2}(\omega + n\omega').$$

On peut donc (théorème IV, n° 6) former une et une seule fonction de la forme $\omega_1 x_1(t) + \ldots + \omega_n x_n(t)$, ayant ces n arguments pour zéros, et, par suite, la courbe adjointe de degré $n - 2$, dont l'équation est

$$0 = C = (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)\Delta + \omega_4 f_4 + \ldots + \omega_n f_n,$$

coupe S aux mêmes points que la courbe C′. On en conclut immédiatement que les courbes C et C′ sont identiques.

C. Q. F. D.

38. On a trouvé (nº 15) les relations

$$\begin{aligned}
\Delta[x_1(t)\ldots]\,x_4(t) &= f_4[x_1(t)\ldots],\\
\Delta[x_1(t)\ldots]\,x_5(t) &= f_5[x_1(t)\ldots],\\
\Delta[x_1(t)\ldots]\,x_4(t)\,x_5(t) &= f_{45}[x_1(t)\ldots],\\
\Delta[x_1(t)\ldots]\,x_4^2(t) &= f_{44}[x_1(t)\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On en déduit

$$o = f_4[x_1(t)\ldots]\,f_5[x_1(t)\ldots] - \Delta[x_1(t)\ldots]\,f_{45}[x_1(t)\ldots].$$

C'est là une relation de degré $2(n-2)$ entre $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, c'est-à-dire entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe S; si donc on désigne par S le premier membre de l'équation de cette courbe, on aura identiquement, quels que soient x_1, x_2, x_3,

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{array}{l}
f_4 f_5 - \Delta f_{45} = \mathrm{S}G_{45},\\
\text{de même}\\
f_4^2 - \Delta f_{44} = \mathrm{S}G_{44},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.$$

G_{45}, G_{44}, ... étant des polynômes de degré $n-4$ en x_1, x_2, x_3.

Cela posé, soient deux courbes adjointes quelconques, de degré $n-2$, C_1 et C_2,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \Delta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) + \omega_4 f_4 + \ldots + \omega_n f_n = o,\\
C_2 &= \Delta(\omega'_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) + \omega'_4 f_4 + \ldots + \omega'_n f_n = o.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
C_1 C_2 = \Delta[&\Delta(\omega_1 x_1 + \ldots)(\omega'_1 x_1 + \ldots) + (\omega_1 x_1 + \ldots)(\omega'_4 f_4 + \ldots) + (\omega'_1 x_1 + \ldots)(\omega_4 f_4 + \ldots)]\\
&+ \omega_4 \omega'_4 f_4^2 + (\omega_4 \omega'_5 + \omega'_4 \omega_5) f_4 f_5 + \ldots
\end{aligned}$$

ou, en remplaçant f_4^2, $f_4 f_5$, ... par leurs valeurs tirées des relations (R),

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{array}{l}
C_1 C_2 = \Delta\Sigma_{12} + \mathrm{S}G_{12}.\\
\text{On trouverait de même}\\
C_1^2 = \Delta\Sigma_{11} + \mathrm{S}G_{11},
\end{array}\right.$$

G_{12}, G_{11} sont des polynômes de degré $n-4$; Σ_{12}, Σ_{11} des polynômes de degré $n-1$ en x_1, x_2, x_3.

De plus, les courbes $\Sigma_{12} = 0$, $\Sigma_{11} = 0$ sont des courbes adjointes de S, car on a, par exemple,

$$\Sigma_{12} = \Delta(\omega_1 x_1 + \ldots)(\omega'_1 x_1 + \ldots) + (\omega_1 x_1 + \ldots)(\omega'_4 f_4 + \ldots) + \ldots + \omega_4 \omega'_4 f_{44} + \ldots,$$

et l'on sait que les courbes $\Delta = 0$, $f_4 = 0$, $\ldots$, $f_{44} = 0$, $f_{45} = 0$, $\ldots$ sont des courbes adjointes de S.

La relation

$$C_1 C_2 = \Delta \Sigma_{12} + S G_{12}$$

montre, en outre, que la courbe $\Sigma_{12} = 0$ passe par les $2n$ points, autres que les points doubles, où C_1 et C_2 coupent S : il n'y a évidemment qu'une seule courbe adjointe de degré $n - 1$ remplissant ces conditions.

Cela posé, on déduit aisément des relations (S) les résultats suivants :

39. Soient

C_1 et C_2 deux courbes adjointes quelconques de degré $n - 2$;

Σ_{11} la courbe adjointe de degré $n - 1$ qui touche S aux n points, autres que les points doubles, où C_1 coupe S;

Σ_{12} la courbe adjointe de degré $n - 1$ qui coupe S aux $2n$ points, autres que les points doubles, où C_1 et C_2 coupent S;

Δ la courbe adjointe de degré $n - 3$.

1° *Il existe une courbe G_{12} de degré $n - 4$, passant par les points, autres que les points doubles de* S, *où* C_1 *et* C_2 *coupent* Δ;

2° *La courbe Σ_{12} coupe G_{12} en $(n - 1)(n - 4)$ points : la moitié de ces points est située sur C_1, l'autre moitié sur C_2 ;*

3° *Il existe une courbe G_{11}, de degré $n - 4$, tangente à Δ aux points, autres que les points doubles de* S, *où* C_1 *coupe* Δ; *les courbes G_{11} et Δ sont ainsi tangentes en tous leurs points de rencontre;*

4° Σ_{11} *touche la courbe G_{11} en tous ses points de rencontre avec elle; ces points sont situés sur* C_1.

Les théorèmes 3° et 4° sont des cas particuliers des théorèmes 1° et 2°.

40. Ces théorèmes donnent des propriétés de la courbe Δ; on peut en déduire *les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\frac{1}{2} n(n - 3)$ points d'un plan soient les points doubles d'une courbe de degré n, de genre un* (¹).

(¹) M. Halphen a traité cette question pour la courbe du sixième ordre (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. X, p. 162).

Ces conditions sont les suivantes :

Soit Δ la courbe de degré $n-3$ qui passe par les $\frac{1}{2}n(n-3)$ points donnés, cette courbe doit être unique et n'avoir de point multiple en aucun de ces points.

1° *Toute courbe* C *de degré* $n-2$ *passant par les points donnés coupe* Δ *en* $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ *points : il existe une courbe* G, *de degré* $n-4$, *touchant* Δ *en ces points;*

2° *La courbe* C *coupe* G *en* $\frac{1}{2}(n-1)(n-4)$ *points non situés sur* Δ : *il existe une courbe* Σ, *de degré* $n-1$, *touchant* G *en ces points, et passant par les* $\frac{1}{2}n(n-3)$ *points donnés.*

Ces conditions, qui reviennent aux propositions des théorèmes 1° et 2°, sont nécessaires : je dis qu'elles sont suffisantes.

Soit, en effet, la courbe ayant pour équation

$$C^2 + \lambda \Delta\Sigma = 0,$$

où λ désigne une constante arbitraire. Cette courbe de degré $2n-4$ est évidemment tangente à G en $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ points situés sur Δ, et en $\frac{1}{2}(n-1)(n-4)$ points situés sur Σ, puisqu'on suppose vérifiées les conditions 1° et 2°; on peut choisir λ de façon qu'elle passe par un point arbitraire de la courbe G, qu'elle coupe ainsi en

$$(n-3)(n-4)+(n-1)(n-4)+1,$$

c'est-à-dire en $(n-4)(2n-4)+1$ points : elle se décompose donc en deux courbes dont l'une est G et l'autre une courbe S, de degré n. On a ainsi identiquement

$$C^2 + \lambda \Delta\Sigma = GS.$$

La courbe G ne passe par aucun des $\frac{1}{2}n(n-3)$ points donnés, car elle ne rencontre Δ qu'aux $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ points, autres que les points donnés, où C coupe Δ. Il résulte dès lors de l'identité précédente que la courbe S admet les $\frac{1}{2}n(n-3)$ points donnés pour points doubles.

41. Reprenons l'identité

$$C_1C_2 - \Delta\Sigma_{12} = SG_{12}.$$

Soient $T=0$, $T'=0$ les tangentes à S en un de ses points doubles;

soient

$$\begin{aligned}
T_1 &= T + a_1 T' = 0,\\
T_2 &= T + a_2 T' = 0,\\
T_{12} &= T + a_{12} T' = 0,\\
T_\delta &= T + a_\delta T' = 0,\\
T_{11} &= T + a_{11} T' = 0
\end{aligned}$$

les tangentes en ce point aux courbes C_1, C_2, Σ_{12}, Δ et Σ_{11}. Si l'on prend pour axes de coordonnées cartésiennes les deux droites T et T′, il viendra, en égalant à zéro les termes du second degré dans l'identité précédente,

$$A(T + a_1 T')(T + a_2 T') + B(T + a_\delta T')(T + a_{12} T') = CTT',$$

A, B, C étant des constantes; on en déduit

$$A + B = 0, \quad A a_1 a_2 + B a_\delta a_{12} = 0,$$

d'où

$$a_1 a_2 = a_\delta a_{12} \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_\delta}\frac{a_2}{a_\delta} = \frac{a_{12}}{a_\delta},$$

ce qu'on peut énoncer ainsi :

Le rapport anharmonique du faisceau $(T, T_\delta, T', T_{12})$ *est égal au produit des rapports anharmoniques des faisceaux* (T, T_δ, T', T_1) *et* (T, T_δ, T', T_2).

De même :

Le rapport anharmonique du faisceau $(T, T_\delta, T', T_{11})$ *est égal au carré du rapport anharmonique du faisceau* (T, T_δ, T', T_1).

42. Si le point double considéré sur S est un point de rebroussement, les théorèmes précédents sont illusoires.

Soient

$T = 0$, la tangente de rebroussement,

$T_\delta = 0$, la tangente à Δ au point de rebroussement,

$T_1 = T_\delta + \lambda_1 T = 0$,	»	C_1	»
$T_2 = T_\delta + \lambda_2 T = 0$,	»	C_2	»
$T_{12} = T_\delta + \lambda_{12} T = 0$,	»	Σ_{12}	»
$T_{11} = T_\delta + \lambda_{11} T = 0$,	»	Σ_{11}	»

On trouve aisément, en opérant comme plus haut,

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} &= \lambda_1 + \lambda_2,\\
\lambda_{11} &= 2\lambda_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

La somme des rapports anharmoniques des faisceaux $(T_\delta, T_1, T, T_{12})$ *et* $(T_\delta, T_2, T, T_{12})$ *est égale à l'unité.*

Le rapport anharmonique du faisceau $(T_\delta, T_1, T, T_{11})$ *est égal à* $\frac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE.

I.

Intersection de la courbe de genre un et d'une courbe algébrique.

43. Soit une courbe algébrique quelconque de degré m, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Les arguments de ses mn points d'intersection avec S sont donnés par l'équation

$$0 = f(t) = f(A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n, B_1 P_1 + \ldots, C_1 P_1 + \ldots),$$

qui a, dans un parallélogramme $(\omega, n\omega')$, mn zéros dont la somme, à des multiples près des périodes, est égale à $\frac{mn}{2}(\omega + n\omega')$.

On trouve aisément, en se reportant aux relations (3),

$$\tag{29} \begin{cases} f(t+\omega) = f(t), \\ f(t+n\omega') = f(t)\, e^{-2mn\frac{i\pi t}{\omega} - mn^2\frac{i\pi\omega'}{\omega}} \end{cases}$$

Posons

$$\omega' = m\omega'_1,$$

on aura

$$\tag{29 bis} \begin{cases} f(t+\omega) = f(t), \\ f(t+mn\omega'_1) = f(t)\, e^{-2mn\frac{i\pi t}{\omega} - m^2n^2\frac{i\pi\omega'_1}{\omega}}, \end{cases}$$

et par conséquent (théorème I) $f(t)$ est fonction linéaire et homogène des mn fonctions $\Pi_1, \ldots, \Pi_{mn}$,

$$\Pi_1 = \theta_3\left(t, \omega, \frac{\omega'}{m}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_{j+1} = \theta_3\left(t + j\frac{\omega}{mn}, \omega, \frac{\omega'}{m}\right).$$

L'équation qui donne les arguments des points d'intersection d'une courbe de degré m avec S peut donc se mettre sous la forme

$$(30) \qquad f(t) = a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + \ldots + a_{mn}\Pi_{mn} = 0,$$

$a_1, \ldots, a_{mn}$ étant des constantes.

43 *bis*. D'après ce qui précède, on peut dire que :

La somme des arguments des mn points d'intersection de S et d'une courbe de degré n est égale à $\frac{mn}{2}(\omega + n\omega')$, à des multiples près de ω, $n\omega'$.

Si la courbe de degré m est la courbe adjointe à S de degré $n-3$, on voit que :

La somme des $n(n-3)$ arguments qui correspondent aux $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles de S est $\frac{m(n-3)}{2}(\omega + n\omega')$, à des multiples près de ω, $n\omega'$.

44. Inversement, les mn points de S dont les arguments vérifient une équation de la forme précédente (30) ne sont pas toujours sur une courbe de degré m. Certaines conditions doivent être satisfaites par les coefficients $a_1, a_2, \ldots$, pour qu'il en soit ainsi.

Nous distinguerons deux cas, $m < n$ et $m \geqq n$.

Si m est inférieur à n, les fonctions de la forme

$$x_1^{q_1}(t)\, x_2^{q_2}(t)\, x_3^{q_3}(t),$$

q_1, q_2, q_3 étant des entiers non négatifs de somme m, ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène (sinon, la courbe S serait décomposable); et, comme ces fonctions vérifient les relations (29) et (29 *bis*), elles s'expriment linéairement à l'aide des fonctions $\Pi_1(t), \Pi_2(t), \ldots, \Pi_{mn}(t)$. Leur nombre étant de $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$, on pourra exprimer

$$\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

des fonctions Π, en fonction linéaire des $mn - \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ autres fonctions Π et des fonctions $x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3}$: si nous portons ces valeurs dans l'équation (29), et si nous écrivons que les coefficients des fonctions Π restantes y sont nuls, nous obtenons

$$mn - \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2),$$

relations linéaires et homogènes entre $a_1, a_2, \ldots, a_{mn}$.

Si m est égal ou supérieur à n, les fonctions $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} (q_1 + q_2 + q_3 = m)$ sont liées par des relations linéaires et homogènes : soit $\varphi_m = 0$ une de ces relations, on aura identiquement

$$\varphi_m = S\psi_{m-n},$$

ψ_{m-n} étant un polynôme de degré $m - n$ en x_1, x_2, x_3.

Il y aura donc entre les fonctions $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$ un nombre de relations linéaires égal au nombre des coefficients de ψ_{m-n}, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$, et le nombre de ces fonctions linéairement distinctes sera

$$\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) - \tfrac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$$

ou

$$mn - \tfrac{1}{2}n(n-3).$$

On en conclut, par le raisonnement appliqué plus haut que les coefficients a_1, a_2, ... de l'équation (30) devront satisfaire à $\frac{1}{2}n(n-3)$ relations linéaires et homogènes, pour que les mn points de S, dont les arguments vérifient cette équation, soient situés sur une courbe de degré m.

Remarque. — Pour $m = n - 1$ et $m = n - 2$, le nombre

$$mn - \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

est égal à $\frac{1}{2}n(n-3)$, c'est-à-dire au nombre des relations trouvées pour $m \geqq n$.

45. Clebsch a mis ces relations sous une forme importante au point de vue des applications [1].

Soit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation d'une courbe quelconque de degré m, et $f(t)$ la fonction

$$f[x_1(t), \ldots].$$

Désignons par (e_1, e'_1), (e_2, e'_2), ... les arguments qui correspondent aux points doubles E_1, E_2, ... de S.

---

(1) Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 230.

On a, par hypothèse,

$$\frac{x_1(e'_1)}{x_1(e_1)} = \frac{x_2(e'_1)}{x_2(e_1)} = \frac{x_3(e'_1)}{x_3(e_1)},$$

et, par suite,

$$f[x_1(e'_1), \ldots] : x_1^m(e'_1) = f[x_1(e_1), \ldots] : x_1^m(e_1),$$

c'est-à-dire

$$f(e'_1) : x_1^m(e'_1) = f(e_1) : x_1^m(e_1).$$

Si donc les mn points, dont les arguments vérifient l'équation (30), sont situés sur une courbe de degré m, les mn coefficients de cette équation devront satisfaire aux relations

$$(31) \qquad f(e'_i) : x_1^m(e'_i) = f(e_i) : x_1^m(e_i) \quad [i = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}n(n-3)].$$

46. Les relations (31), que nous appellerons les équations de Clebsch, sont nécessairement vérifiées quand les mn points de S, dont les arguments satisfont à l'équation $f(t) = 0$, sont situés sur une courbe de degré m; je dis maintenant qu'elles sont suffisantes.

Pour le démontrer, on s'appuiera sur une interprétation géométrique qu'on peut donner de ces équations.

47. Lemme. — *Les mn points de* S, *dont les arguments vérifient une équation de la forme* (30), $f(t) = 0$, *sont situés sur une courbe adjointe* F, *de degré* $m + n - 3$.

En d'autres termes :

mn points de S, *dont les arguments ont pour somme* $\frac{mn}{2}(\omega + n\omega')$, *à des multiples près de* ω, $n\omega'$, *sont situés sur une courbe adjointe à* S, *de degré* $m + n - 3$.

Supposons d'abord qu'aucun de ces mn points ne coïncide avec un des points doubles de S.

Une courbe adjointe, de degré $m + n - 3$, coupe S aux points doubles et en mn autres points, dont les arguments ont pour somme, à des multiples près de ω, $n\omega'$, la quantité $\frac{mn}{2}(\omega + n\omega')$, ainsi qu'on le voit aisément (n° 43 *bis*).

Cette quantité est précisément la somme des mn zéros de la fonction $f(t)$, contenus dans un parallélogramme ω, $n\omega'$.

Un des points d'intersection de S et d'une courbe adjointe est donc déterminé par les autres; ces autres sont arbitraires, car on sait que, parmi les points d'intersection de deux courbes, l'une de degré n, l'autre de degré $m+n-3$ passant par $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles de la première, le nombre de ceux qui sont déterminés par les autres est, *au plus*,

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}n(n-3),$$

c'est-à-dire 1 (¹).

Il en résulte que, étant donnés, sur S, mn points quelconques, différents des points doubles, et dont les arguments ont pour somme $\frac{mn}{2}(\omega+n\omega')$, c'est-à-dire mn points, dont les arguments vérifient une équation de la forme (30), on pourra faire passer, par ces points, une courbe de degré $m+n-3$ adjointe à S, pourvu que le nombre des conditions auxquelles se trouve ainsi assujettie cette courbe, c'est-à-dire le nombre

$$\tfrac{1}{2}n(n-3)+mn-1,$$

soit inférieur ou égal au nombre des conditions qui déterminent une courbe de degré $m+n-3$, c'est-à-dire à $\frac{m+n-3}{2}(m+n)$: or, cette inégalité étant vérifiée, quels que soient les entiers positifs m et n, le lemme est démontré.

48. Cela posé, soit $F=0$ l'équation d'une courbe, de degré $m+n-3$, adjointe à S et passant par les mn points de S, dont les arguments vérifient une équation $f(t)=0$ de la forme (30). Si $m+n-3$ est égal ou supérieur à n, c'est-à-dire si $m \geqq 3$, il y aura, pour une même équation $f(t)=0$, une infinité de courbes F ayant pour équation générale

$$F=F_0+SR_{m-3}, \qquad \text{(F)}$$

$F_0=0$ étant l'équation de l'une quelconque d'entre elles, et R_{m-3} désignant un polynôme arbitraire, de degré $m-3$.

Les courbes F ont un point simple en chacun des points doubles de S, puisqu'elles coupent la courbe S en ses $\frac{1}{2}n(n-3)$ points doubles et en mn autres points, distincts des précédents, par hypothèse; il résulte de

(¹) CLEBSCH, *Leçons sur la Géométrie*, Traduction Benoist, t. II, p. 130 et suivantes.

l'équation (F) que toutes les courbes F qui correspondent à une même équation $f(t)=0$ se touchent en un quelconque des points doubles de S.

Soient

$\Delta(x_1, x_2, x_3)=0$ l'équation de la courbe, de degré $n-3$, adjointe à S;
$\Delta(t)$ la fonction $\Delta[x_1(t), \ldots]$;
$F(t)$ la fonction $f[x_1(t), \ldots]$.

En décomposant cette dernière fonction en un produit de fonctions θ, on obtiendra évidemment la relation

$$F(t)=A\,\Delta(t)\,f(t), \tag{32}$$

A étant une constante.

Supposons vérifiée une des équations de Clebsch

$$f(e'):x_1^m(e')=f(e):x_1^m(e). \tag{31}$$

Si l'on prend pour les axes $x_2=0$ et $x_3=0$ les deux tangentes à S, au point double (e, e'), $x_2=0$ étant la tangente à la branche e et $x_3=0$ la tangente à la branche e', on aura, en ordonnant F et Δ par rapport aux puissances décroissantes de x_1,

$$F(x_1, x_2, x_3)=\lambda(x_2+ax_3)x_1^{m+n-4}+(\lambda' x_2^2+\ldots)x_1^{m+n-5}+\ldots,$$
$$\Delta(x_1, x_2, x_3)=\mu(x_2+bx_3)x_1^{n-4}+\ldots.$$

λ et μ ne sont pas nuls, puisque les courbes F et Δ ont un point simple en tout point double de S.

Or, d'après la relation (32), $f(e)$ est la limite vers laquelle tend la fonction

$$\frac{1}{A}\frac{F(e+\varepsilon)}{\Delta(e+\varepsilon)}$$

quand ε tend vers zéro, c'est-à-dire, en négligeant les termes du second ordre en x_2 et x_3, la limite de l'expression

$$\frac{1}{A}\frac{\lambda[x_2(e+\varepsilon)+ax_3(e+\varepsilon)]}{\mu[x_2(e+\varepsilon)+bx_3(e+\varepsilon)]}x_1^m(e).$$

Mais $x_2(e_1+\varepsilon)$ est infiniment petit par rapport à $x_3(e+\varepsilon)$, puisque la droite $x_2=0$ est tangente à la branche e; il reste ainsi

$$f(e)=\frac{1}{A}\frac{\lambda}{\mu}\frac{a}{b}x_1^m(e).$$

De même

$$f(e') = \frac{1}{A} \frac{\lambda}{\mu} x_1^m(e'),$$

et la relation (31) donnera

$$a = b.$$

Par conséquent :

Si l'équation de Clebsch, relative à un point double, est vérifiée, les courbes F *et* Δ *se touchent en ce point.*

Telle est l'interprétation géométrique qu'on peut donner des équations de Clebsch.

49. Cela posé, supposons toutes les équations de Clebsch vérifiées par une fonction $f(t)$ de la forme (30).

Les courbes F correspondant à cette fonction et la courbe Δ sont tangentes en $\frac{1}{2}n(n-3)$ points, qui sont les points doubles de S; en d'autres termes, on peut dire que l'une quelconque des courbes F passe par les points d'intersection des courbes S et Δ; on peut donc (Clebsch, *Leçons sur la Géométrie,* traduction Benoist, t. II, p. 45 et suivantes) écrire identiquement

$$F = A\Delta + BS,$$

A étant un polynôme de degré m et B un polynôme de degré $m-3$, en x_1, x_2, x_3.

On conclut immédiatement de cette identité que les points d'intersection de la courbe F et de la courbe S, non situés sur la courbe Δ, c'est-à-dire les mn points, dont les arguments vérifient l'équation $f(t) = 0$, sont situés sur la courbe, de degré m, $A = 0$.

Les équations de Clebsch sont donc les conditions nécessaires et suffisantes, pour que les mn points de la courbe S, *dont les arguments vérifient l'équation* $f(t) = 0$, *soient sur une courbe de degré m.*

50. *Remarque I.* — Nous avons admis, dans ce qui précède, qu'aucune des quantités $f(e)$ n'était nulle. Si l'on avait $f(e) = 0$, on aurait également, en vertu de l'équation (31), $f(e') = 0$. Supposons donc que l'on ait $f(e) = 0$, $f(e') = 0$, e et e' étant respectivement des zéros multiples d'ordre p et q $(p, q \geqq 1)$, de la fonction $f(t)$.

Considérons une fonction $f_1(t)$ de la même forme que $f(t)$, ayant pour zéros multiples, d'ordres p et q, les quantités $e+\varepsilon$, $e'+\varepsilon'$, et s'annulant pour les mêmes valeurs de t que $f(t)$, les valeurs e et e' exceptées.

Si les équations de Clebsch sont vérifiées par la fonction $f_1(t)$, les mn points de S, dont les arguments sont les zéros de cette fonction, sont sur une courbe de degré m, et il en sera de même à la limite, quand ε et ε' seront nuls.

En ce cas, l'équation

$$f(e):x_1^m(e')=f(e'):x_1^m(e)$$

est vérifiée identiquement, puisque $f(e)$ et $f(e')$ sont nuls, et il suffira que les $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ autres équations de Clebsch soient également vérifiées, pour que les mn points de S, dont les arguments annulent $f(t)$, soient situés sur une courbe de degré m, passant par le point double (e, e') et ayant en ce point avec S $(p+q)$ intersections confondues.

En général, si la fonction $f(t)$ admet pour zéros les k couples de valeurs $e_1, e'_1, e_2, e'_2, \ldots, e_k, e'_k$, qui correspondent à k points doubles de S, le nombre des équations auxquelles doivent satisfaire les coefficients de cette fonction, pour que les mn zéros de $f(t)$ soient les arguments de points de S, situés sur une courbe de degré m, se réduit de k unités.

51. *Remarque II.* — Si m est inférieur ou égal à $n-3$, nous avons vu que le nombre des relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients de $f(t)$, pour que les mn zéros de cette fonction soient les arguments de points de S situés sur une courbe de degré m, est

$$mn-\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

En ce cas, il n'y aura que $mn-\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ relations de Clebsch linéairement distinctes.

52. *Remarque III.* — Si le point double (e, e') est un point de rebroussement, il faut, dans l'équation

$$f(e):x_1^m(e)=f(e'):x_1^m(e'),$$

faire $e'=e+\varepsilon$, et faire tendre ε vers zéro. On trouve ainsi

$$x_1(e)f'(e)=mx'_1(e)f(e).$$

53. *Remarque IV.* — D'après le lemme du n° 47, les mn points de S

dont les arguments vérifient une équation de la forme

$$(30) \qquad a_1 \Pi_1 + a_2 \Pi_2 + \ldots + a_{mn} \Pi_{mn} = 0$$

sont, quelles que soient les constantes a_1, a_2, ..., a_{mn}, sur une courbe adjointe de degré $m + n - 3$, dont l'équation sera évidemment de la forme

$$(33) \qquad R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_{mn} R_{mn} = 0.$$

Il en résulte qu'à toute propriété analytique de l'équation (30), c'est-à-dire à toute forme de cette équation, correspondra une forme de l'équation (33), et, par suite, une propriété des courbes adjointes R.

C'est dans ce sens que la résolution du problème suivant donnera lieu à une série d'applications géométriques, qui vont nous occuper maintenant.

II.

Problème.

54. Considérons l'équation

$$(30) \qquad a_1 \Pi_1(t) + a_2 \Pi_2(t) + \ldots + a_p \Pi_p(t) = 0 = f(t),$$

où l'on a posé

$$p = mn,$$

$$\Pi_{j+1}(t) = \theta_3\left(t + j\,\frac{\omega}{p},\ \omega,\ \omega'_1\right),$$

$$p\,\omega'_1 = n\,\omega'.$$

Soit

$$p = k + r_1 l_1 + r_2 l_2 + \ldots + r_q l_q,$$

k, r_1, l_1, ..., l_q étant des entiers positifs.

Cherchons quelle doit être la forme du premier membre de l'équation, pour que :

1° *k des zéros de cette équation soient des quantités données b_1, ..., b_k;*

2° *Les autres zéros se partagent en q groupes, comprenant respectivement l_1, l_2, ..., l_q zéros distincts, les l_j zéros du $j^{\text{ième}}$ groupe étant multiples d'ordre r_j et ayant une somme donnée s_j.*

Il est bien entendu qu'il s'agit des zéros compris dans un même parallélogramme ω, $n\omega'$, ou ω, $p\omega'_1$.

55. Soient

$c_1, c_2, \ldots, c_{l_1}$ les l_1 zéros d'ordre r_1 du premier groupe;

. . . . ;

$g_1, g_2, \ldots, g_{l_q}$ les l_q zéros d'ordre r_q du $q^{\text{ième}}$ groupe.

On aura (théorème II)

$$b_1 + \ldots + b_k + r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + r_q s_q = \frac{p}{2}(\omega + p\omega'_1) + h\omega + ph'\omega'_1,$$

h et h' étant des entiers.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\theta_1(t) = \theta_1(t, \omega, p\omega'_1) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu} e^{i\pi p \frac{\omega'_1}{\omega}(\mu+\frac{1}{2})^2 + (2\mu+1)\frac{i\pi t}{\omega}}$$

on aura évidemment, A étant une constante,

$$f(t) = \mathrm{A}\, e^{(p-2h')\frac{i\pi t}{\omega}} \theta_1(t-b_1)\ldots\theta_1(t-b_k)\,\theta_1^{r_1}(t-c_1)\ldots\theta_1^{r_1}(t-c_{l_1})\ldots\theta_1^{r_q}(t-g_1)\ldots\theta_1^{r_q}(t-g_{l_q}).$$

Posons

$$f_1(t) = \theta_1(t-c_1)\ldots\theta_1(t-c_{l_1})\, e^{l_1\frac{i\pi t}{\omega}},$$

. . . . ,

$$f_q(t) = \theta_1(t-g_1)\ldots\theta_1(t-g_{l_q})\, e^{l_q\frac{i\pi t}{\omega}},$$

$$\psi(t) = \mathrm{A}\,\theta_1(t-b_1)\ldots\theta_1(t-b_k)\, e^{(p-2h'-r_1 l_1\ldots r_q l_q)\frac{i\pi t}{\omega}}.$$

Il vient

$$f(t) = \psi(t) f_1^{r_1}(t)\ldots f_q^{r_q}(t).$$

Or la fonction $f_j(t)$ satisfait aux relations

$$f_j(t+\omega) = f_j(t),$$

$$f_j(t+p\omega'_1) = f_j(t)\, e^{-2l_j\frac{i\pi t}{\omega} + \frac{2i\pi}{\omega}s_j + l_j i\pi},$$

et, si l'on pose

$$t = t_1 + \frac{\omega}{2} + p\frac{\omega'_1}{2} - \frac{s_j}{l_j},$$

$$\mathrm{F}_j(t_1) = f_j(t),$$

$$p\omega'_1 = l_j\omega'_2,$$

les relations précédentes deviennent

$$F_j(t_1+\omega)=F_j(t_1),$$
$$F_j(t_1+l_j\omega'_2)=F_j(t_1)\,e^{-2l_j\frac{i\pi t_1}{\omega}-l_j^2\frac{i\pi\omega'_2}{\omega}}.$$

La fonction $F_j(t_1)$ est donc fonction linéaire et homogène (théorème I) des l_j fonctions

$$\theta_3\left(t_1+h\frac{\omega}{l_j},\,\omega,\,\frac{p\,\omega'_1}{l_j}\right)\qquad(h=0,1,\ldots,l_j-1),$$

et, par suite, $f_j(t)$ est fonction linéaire et homogène des l_j fonctions φ'_j, φ''_j, ..., telles que

$$(34)\qquad\left\{\begin{array}{ll}\varphi'_j(t) & =\theta_3\left(t-\dfrac{\omega}{2}-p\dfrac{\omega'_1}{2}+\dfrac{s_j}{l_j},\,\omega,\,p\dfrac{\omega'_1}{l_j}\right),\\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}\\ \varphi_j^{(h+1)}(t) & =\varphi'_j\left(t+h\dfrac{\omega}{l_j}\right),\\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}\\ \varphi_j^{(l_j)}(t) & =\varphi'_j\left[t+(l_j-1)\dfrac{\omega}{l_j}\right].\end{array}\right.$$

On a ainsi

$$f_j(t)=\eta_1\varphi'_j(t)+\eta_2\varphi''_j(t)+\ldots+\eta_{l_j}\varphi_j^{(l_j)}(t).$$

Les zéros de $f_j(t)$, c'est-à-dire les l_j zéros d'ordre r_j du $j^{\text{ième}}$ groupe, ne sont assujettis par hypothèse qu'à la condition d'avoir s_j pour somme; les constantes η_1, η_2, ... sont donc arbitraires.

De là résulte la forme cherchée de $f(t)$,

$$(35)\quad f(t)=\psi(t)\left[\alpha_1\varphi'_1+\alpha_2\varphi''_1+\ldots+\alpha_{l_1}\varphi_1^{(l_1)}\right]^{r_1}\left[\beta_1\varphi'_2+\ldots\right]^{r_2}\ldots\left[\delta_1\varphi'_q+\ldots+\delta_{l_q}\varphi_q^{(l_q)}\right]^{r_q},$$

α_1, ..., δ_{l_q} étant des constantes arbitraires.

56. La relation précédente montre que $f(t)$ est une somme de termes de la forme

$$\Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_{l_1},\ldots,\nu_1,\ldots,\nu_{l_q}}(t)=\psi(t)\,\varphi_1'^{\mu_1}\ldots\varphi_1^{(l_1)\mu_{l_1}}\ldots\varphi_q'^{\nu_1}\ldots\varphi_q^{(l_q)\nu_q},$$

μ_1, ..., μ_{l_1} étant des entiers non négatifs de somme r_1, ...;
ν, ..., ν_{l_q} étant des entiers non négatifs de somme r_q.

Les fonctions $\Phi(t)$ satisfont, comme on le voit immédiatement, aux relations

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t), \tag{1}$$

$$\Phi(t+p\omega'_1) = \Phi(t)e^{-2p\frac{i\pi t}{\omega} - p^2 i\pi\frac{\omega'_1}{\omega}}, \tag{2}$$

et sont, par suite, des fonctions linéaires de $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$.

Nous écrirons généralement, sous forme symbolique,

$$f(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l_1})^{r_1} \ldots (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{l_q})^{r_q}. \tag{35 bis}$$

57. *Remarque I.* — Si une des quantités l, l_1, par exemple, est égale à 2, on a (34)

$$\varphi'_1(t) = \theta_3\left(t - \frac{\omega}{2} - p\frac{\omega'_1}{2} - \frac{s_1}{2}, \omega, p\frac{\omega'_1}{2}\right),$$

$$\varphi''_1(t) = \varphi'_1\left(t + \frac{\omega}{2}\right).$$

On trouve aisément les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi''_1\left(t - \frac{\omega}{2}\right) = \varphi'_1(t), && \varphi'_1\left(t - \frac{\omega}{2}\right) = \varphi''_1(t), \\ &\varphi''_1\left(t - p\frac{\omega'_1}{2}\right) = \mathrm{A}e^{-\frac{2i\pi t}{\omega}}\varphi''_1(t), && \varphi'_1\left(t - p\frac{\omega'_1}{2}\right) = \mathrm{A}e^{-\frac{2i\pi t}{\omega}}\varphi'_1(t), \end{aligned}\right. \tag{36}$$

A étant une constante.

Les fonctions $\varphi'_1(t)$ et $\varphi''_1(t)$ ont deux zéros dans tout parallélogramme ω, $p\omega'_1$ (ou ω, $n\omega'$), et la somme de ces zéros est s_1, à des multiples près de ω, $p\omega'_1$. On a ainsi

$$\varphi'_1(t) = \theta_1(t - c_1, \omega, p\omega'_1)\,\theta_1(t - s_1 + c_1, \omega, p\omega'_1)e^{\frac{2i\pi t}{\omega}};$$

on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi'_1(s_1 - t) = \varphi'_1(t)e^{\frac{2i\pi}{\omega}(s_1 - 2t)}, \\ &\text{et, de même,} \\ &\varphi''_1(s_1 - t) = \varphi''_1(t)e^{\frac{2i\pi}{\omega}(s_1 - 2t)}. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Ces formules nous seront utiles plus tard.

58. *Remarque II.* — Si l'on a à la fois

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = \ldots = r_{q'}, \\ l_1 &= l_2 = \ldots = l_{q'} = 2, \\ s_1 &= s_2 = \ldots = s_{q'}, \end{aligned}$$

q' étant inférieur à q, la fonction $f(t)$ [équation (35)] prend une forme plus simple.

En ce cas, en effet, $f_1, f_2, \ldots, f_{q'}$ sont fonctions linéaires et homogènes des deux fonctions φ'_1 et φ''_1 de la remarque I.

On a ainsi

$$f(t) = \psi(t)[\alpha_1\varphi'_1 + \alpha_2\varphi''_1]^{r_1}[\beta_1\varphi'_1 + \beta_2\varphi''_1]^{r_2} \ldots [\gamma_1\varphi'_1 + \gamma_2\varphi''_1]^{r_{q'}} \ldots$$

ou, puisque $r_1 = r_2 = \ldots = r_{q'}$,

$$f(t) = \psi(t)\left[\alpha_1\beta_1 \ldots \gamma_1\varphi'^{q'}_1 + \ldots + \alpha_2\beta_2 \ldots \gamma_2\varphi''^{q'}_1\right]^{r_1} \ldots.$$

La fonction entre crochets est un polynôme homogène, de degré q', en φ_1 et φ''_1; les quantités $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_2$ étant arbitraires, il est clair, d'après la formation même de ce polynôme, que tous ses coefficients sont également arbitraires et, en posant

$$\varphi'^{q'}_1 = \varphi_1, \quad \varphi'^{q'-1}_1\varphi' = \varphi_2, \quad \ldots,$$

on aura

$$(38) \qquad f(t) = \psi(t)[p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + \ldots + p_{q'+1}\varphi_{q'+1}]^{r_1} \ldots$$

ou, symboliquement,

$$(38\ bis) \qquad f(t) = (p_1, p_2, \ldots, p_{q'+1})^{r_1} \ldots (\delta_1, \ldots, \delta_{l_q})^{r_q},$$

$p_1, p_2, \ldots$ étant arbitraires.

III.

Applications.

59. Les résultats analytiques obtenus aux paragraphes précédents permettent de traiter la question suivante.

Soit

$$p = mn = 2k_1 + k_2 + r_1 l_1 + \ldots + r_q l_q.$$

Trouver l'équation générale des courbes, de degré m, qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples, donnés sur une courbe S, *de degré n et de genre un, et qui ont avec cette courbe en l_j points, dont les arguments ont une somme donnée s_j, un contact d'ordre $r_j - 1$ ($j = 1, 2, \ldots, q$).*

Soient $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation générale cherchée, et $f(t)$ la fonction $f[x_1(t), \ldots]$. Cette fonction est fonction linéaire et homogène de $\mathrm{II}_1(t)$, $\mathrm{II}_2(t)$, ..., $\mathrm{II}_p(t)$ (n° 43), et peut se mettre sous la forme [équation (35)]

$$f(t) = \psi(t)\left[\alpha_1\varphi_1' + \ldots + \alpha_{l_1}\varphi_1^{(l_1)}\right]^{r_1} \ldots \left[\delta_1\varphi_q' + \ldots + \delta_{l_q}\varphi_q^{(l_q)}\right]^{r_q}$$

ou, en développant,

$$(39) \qquad f(t) = \Sigma \mathrm{A}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\nu_1,\ldots,\nu_{l_q}} \alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2} \ldots \delta_1^{\nu_1} \ldots \delta_{l_q}^{\nu_{l_q}} \Phi_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\nu_1,\ldots,\nu_{l_q}}(t),$$

A_{μ_1}, ... étant une constante ;
μ_1, μ_2, ... des entiers non négatifs de somme r_1, ...;
ν_1, ..., ν_{l_q} des entiers non négatifs de somme r_q;
α_1, α_2, ..., δ_1, ... des constantes.

Mais ces dernières constantes ne sont pas arbitraires, comme l'étaient les constantes analogues de l'équation générale (35); en effet, les mn points de S, dont les arguments annulent $f(t)$, sont situés, par hypothèse, sur une courbe, de degré m, passant par k_1 points doubles de S, et l'on aura, par suite, entre α_1, ..., δ_1, ... des relations de la forme

$$(40) \quad \psi(e_i)[\alpha_1\varphi_1'(e_i) + \ldots]^{r_1} \ldots : x_1^m(e_i) = \psi(e_i')[\alpha_1\varphi_1'(e_i') + \ldots] \ldots : x_1^m(e_i').$$

Ces relations seront au nombre de

$$\tfrac{1}{2}n(n-3) - k_1 \quad \text{si } m \leqq n-2,$$

et de

$$mn - \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) - k_1 \quad \text{si } m < n-2.$$

Si les quantités α_1, α_2, ..., δ_1, ... vérifient les équations (41), le second membre de l'équation (39) est une fonction linéaire et homogène des quantités $x_1^{m_1}(t)\,x_2^{m_2}(t)\,x_3^{m_3}(t)$, $(m_1 + m_2 + m_3 = m)$, et l'on a

$$(41) \qquad f(t) = \Sigma x_1^{m_1}(t)\,x_2^{m_2}(t)\,x_3^{m_3}(t)\,\Sigma \mathrm{A}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\nu_1,\ldots,\nu_{l_q}} \alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2} \ldots \delta_1^{\nu_1} \ldots \delta_{l_q}^{\nu_{l_q}},$$

α_1, ..., δ_1, ... étant des constantes arbitraires, liées par les relations (40).

On tire de là l'équation générale cherchée, en remplaçant, dans $f(t)$,

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ par x_1, x_2, x_3, et égalant à zéro la fonction ainsi obtenue.

Remarque. — Si m est supérieur ou égal à n, on devra ajouter à la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$, ainsi formée, le produit SR_{m-n}, où R_{m-n} désigne un polynôme quelconque, de degré $m-n$ en x_1, x_2, x_3.

60. Dans le cas particulier où la courbe, de degré m, passe par tous les points doubles de S, les relations (40) sont des identités (n° 50), et les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \delta_1, \ldots$ sont arbitraires. Par conséquent, l'équation générale cherchée sera donnée par (39) :

$$(42)\qquad 0 = f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma A_{\mu_1,\mu_2,\ldots} \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \ldots \delta_1^{\nu_1} \ldots \delta_{l_q}^{\nu_{l_q}} F_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\nu_{l_q}}(x_1, x_2, x_3).$$

$F_{\mu_1,\ldots}$ est un polynôme en x_1, x_2, x_3, de degré m, et la courbe $F_{\mu_1,\ldots} = 0$ coupe S en des points dont les arguments vérifient l'équation

$$0 = \Phi_{\mu_1,\mu_2,\ldots}(t) = \psi(t) \varphi_1'^{\mu_1} \varphi_1''^{\mu_2} \ldots \varphi_q'^{\nu_1} \ldots \varphi_q^{(l_q)^{\nu_{l_q}}}.$$

Elle passe par les k_2 points simples donnés sur S et par les points doubles de cette courbe, puisque les arguments de ces points annulent $\psi(t)$.

61. Nous allons maintenant appliquer à des exemples simples les principes généraux des deux derniers paragraphes.

Problème. — *Soit*

$$mn = 2k_1 + k_2 + rl \quad et \quad m \geqq n - 2.$$

Trouver l'équation générale des courbes de degré m, qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur S, *et qui ont avec* S *en l points un contact d'ordre $r-1$* [1].

Soient s_1 la somme des arguments correspondant aux points fixes donnés sur S; s celle des arguments des l points de contact. On a

$$s_1 + rs = \frac{mn}{2}(\omega + n\omega') + h\omega + nh'\omega'.$$

---

[1] Clebsch a traité (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 244 et suivantes) un problème analogue, mais il n'a fait que donner le nombre des courbes ou systèmes de courbes répondant à la question sans s'occuper des équations générales de ces courbes.

On tire de là pour s, en donnant aux entiers h et h' les valeurs o, 1, ..., $r-1$, r^2 systèmes de valeurs, aux multiples près de ω, $n\omega'$. Il y a donc r^2 systèmes de courbes répondant à la question : pour les courbes d'un même système, la somme des arguments des l points de contact est la même.

Soit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation des courbes d'un système. On aura, équation (35),

$$f(t) = \psi(t)\,[\alpha_1 \varphi'_1 + \alpha_2 \varphi''_1 + \ldots + \alpha_l \varphi_1^{(l)}]^r.$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sont des constantes liées par les $\delta - k_1$ relations

$$f(e_i) : x_1^m(e_i) = f(e'_i) : x_1^m(e'_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, \delta - k_1).$$

e_1, e'_1; e_2, e'_2; ..., $e_{\delta-k_1}$, $e'_{\delta-k_1}$ étant les couples d'arguments correspondant aux $\delta - k_1$ points doubles de S par lesquels ne passent pas les courbes de degré m considérées.

Posons

$$A_i^r = \frac{x_1^m(e_i)}{x_1^m(e'_i)}\,\frac{\psi(e'_i)}{\psi(e_i)},$$

il vient

$$(44) \qquad [\alpha_1 \varphi'_1(e_i) + \ldots + \alpha_e \varphi_1^{(l)}(e_i)]^r = [\alpha_1 \varphi'_1(e'_i) + \ldots]^r A_i^r.$$

Les $\delta - k_1$ relations (44) peuvent s'écrire

$$(45) \quad \begin{cases} \alpha_1 \varphi'_1(e_1) + \ldots + \alpha_l \varphi_1^{(l)}(e_1) = A_1 e^{2h_1 \frac{i\pi}{r}} [\alpha_1 \varphi'_1(e'_1) + \ldots + \alpha_l \varphi_1^{(l)}(e'_1)], \\ \alpha_2 \varphi'_1(e_2) + \ldots + \ldots\ldots\ldots = A_2 e^{2h_2 \frac{i\pi}{r}} [\alpha_1 \varphi'_1(e'_2) + \ldots + \ldots\ldots\ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

h_1, h_2, ... pouvant prendre les valeurs o, 1, ..., $r-1$.

En combinant ces valeurs, on aura, puisqu'il y a $\delta - k_1$ relations, $r^{\delta-k_1}$ groupes d'équations linéaires et homogènes en $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, et les solutions du problème s'obtiendront en égalant à zéro les $\delta - k_1$ premiers membres des $\delta - k_1$ équations de l'un quelconque de ces groupes.

Considérons les équations d'un groupe : on en tirera la valeur de $\delta - k_1$ des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ en fonction linéaire et homogène des $l - \delta + k_1$ autres, et l'on aura ainsi

$$f(t) = \psi(t)\,[\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \ldots + \alpha_{l-\delta+k_1} \varphi_{l-\delta+k_1}(t)]^r = \psi(t)\,\varphi^r(t),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-\delta+k_1}$ étant des constantes quelconques.

En conséquence, l'équation générale cherchée sera de la forme

$$o = f(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1^r \mathbf{A}_{r,0,0,\ldots,0} + r\alpha_1^{r-1}\alpha_2 \mathbf{A}_{r-1,1,0,\ldots,0} + \ldots + \alpha_{l-\delta+k_1}^r \mathbf{A}_{0,0,\ldots,0,r},$$

$\mathbf{A}_{r,0,0,\ldots}$, ... étant des polynômes de degré m en x_1, x_2, x_3 qui, égalés à zéro, représentent des courbes de degré m passant par les k_1 points doubles et les k_2 points simples donnés sur S; on a

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{r,0,0,\ldots} \quad [x_1(t)\ldots] = \psi(t)\,\varphi_1^r(t), \\ &\mathbf{A}_{r-1,1,0,0,\ldots}[x_1(t)\ldots] = \psi(t)\,\varphi_1^{r-1}(t)\,\varphi_2(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On peut donc énoncer les résultats suivants :

Soit posé

$$mn = 2k_1 + k_2 + rl, \quad m \geqq n - 2.$$

Les courbes de degré m qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur S, *et qui ont avec cette courbe en l points un contact d'ordre* $r - 1$, *se divisent en* r^2 *systèmes : pour les courbes d'un même système la somme des arguments des l points de contact est la même.*

Chaque système se divise en $r^{\delta-k_1}$ *groupes, et l'équation générale des courbes d'un même groupe est de la forme*

$$(46) \qquad o = \alpha_1^r \mathbf{A}_{r,0,0,\ldots,0} + r\alpha_1^{r-1}\alpha_2 \mathbf{A}_{r-1,1,0,\ldots} + \ldots + \alpha_{l-\delta+k_1}^r \mathbf{A}_{0,0,\ldots,r},$$

α_1, α_2, ..., $\alpha_{l-\delta+k_1}$ *étant des constantes arbitraires.*

62. *Remarque I.* — Si m est supérieur ou égal à n, on ajoutera au second membre de la relation (46) le produit SR_{m-n}, où R_{m-n} est un polynôme quelconque de degré $m - n$ en x_1, x_2, x_3.

Remarque II. — Si m est inférieur à $n - 2$, les équations (44) seront au nombre de $mn - \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - k_1$; il y aura ainsi dans chaque système $r^{mn - \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - k_1}$ groupes de courbes.

En particulier, pour $m = n - 3$, ce nombre devient

$$r^{\delta - k_1 - 1}.$$

63. Pour établir les résultats précédents, nous avons admis que les relations (45), appartenant à un même groupe, étaient linéairement indépendantes, et c'est évidemment le cas général. S'il en était autrement, l'équation des courbes du groupe correspondant, tout en restant de la forme (46), renferme plus de $l - \delta + k_1$ constantes arbitraires.

Nous allons donner un exemple de ce cas particulier.

Soient

$$k_1 = k_2 = 0, \quad m = r\rho,$$

ρ étant un entier positif.

On aura

$$mn = lr, \quad \text{d'où} \quad l = n\rho.$$

Il s'agit de trouver l'équation générale des courbes de degré m (ou $r\rho$), qui ont avec S *en $n\rho$ points un contact d'ordre* $\rho - 1$.

Il y a toujours r^2 systèmes de courbes répondant à la question : considérons celui de ces systèmes pour lequel la somme des arguments des $n\rho$ points de contact est égale à $\frac{1}{r}\frac{r\rho n}{2}(\omega + n\omega')$, c'est-à-dire $\frac{n\rho}{2}(\omega + n\omega')$.

Les équations (45) s'écriront

$$(45\ bis)\quad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha_1 \varphi_1'(e_1) + \alpha_2 \varphi_1''(e_1) + \ldots] : x_1^\rho(e_1) = e^{2h_1 \frac{i\pi}{r}} [\alpha_1 \varphi_1'(e_1') + \ldots] : x_1^\rho(e_1'), \\ [\alpha_1 \varphi_1'(e_2) + \alpha_2 \varphi_1''(e_2) + \ldots] : x_1^\rho(e_2) = e^{2h_2 \frac{i\pi}{r}} [\alpha_1 \varphi_1'(e_2') + \ldots] : x_1^\rho(e_2'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Ces équations sont au nombre de δ, c'est-à-dire $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Considérons le groupe d'équations (45 *bis*) pour lequel on a

$$h_1 = h_2 = \ldots = 0.$$

Il est clair (n° 46) que les $\frac{1}{2}n(n-3)$ équations ainsi considérées expriment que les ρn zéros de la fonction

$$\alpha_1 \varphi_1'(t) + \ldots$$

sont les arguments de ρn points de S, situés sur une courbe de degré ρ.

En d'autres termes, les courbes de degré $r\rho$ appartenant au groupe considéré sont des courbes quelconques de degré ρ, comptées r fois; ce qui donne bien une solution de la question.

Mais, si ρ est inférieur à $n-2$, il suffit que $n\rho - \frac{1}{2}(\rho+1)(\rho+2)$ des équations (45 *bis*), où l'on a fait $h_1 = h_2 = \ldots = 0$, soient vérifiées par les constantes $\alpha_1, \ldots$ pour que les autres le soient également; et par suite, à tout groupe d'équations (45 *bis*), pour lequel $n\rho - \frac{1}{2}(\rho+1)(\rho+2)$ des entiers h seront nuls, correspondront des courbes de degré ρ, comptées r fois.

Pour éliminer ces solutions, on ne devra considérer que les groupes d'équations (45 *bis*) où $n\rho - \frac{1}{2}(\rho+1)(\rho+2)$ des entiers $h_1, h_2, \ldots$ ne sont pas nuls à la fois; et l'on voit aisément que ces groupes sont au nombre de

$$\mathrm{N} = r^{\delta} - \left[1 + \delta(r-1) + \frac{\delta(\delta-1)}{1.2}(r-1)^2 + \ldots + \frac{\delta(\delta-1)\ldots(\lambda+1)}{1.2\ldots\delta-\lambda}(r-1)^{\delta-\lambda} \right],$$

étant posé, pour abréger,

$$\lambda = n\rho - \tfrac{1}{2}(\rho+1)(\rho+2).$$

Ainsi, ρ étant inférieur à $n-2$, le système de courbes de degré $r\rho$, pour lequel la somme des arguments des $n\rho$ points de contact est égale à $\frac{n\rho}{2}(\omega + n\omega')$, se décompose en N groupes; l'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme (46).

En outre, le système comprend toutes les courbes de degré ρ, comptées r fois.

Si ρ est égal ou supérieur à $n-2$, le nombre des groupes du système considéré sera évidemment $r^{\delta}-1$.

64. Exemple. — Soient $n=4$, $r=2$, $\rho=1$.

Les coniques tangentes en quatre points à une courbe du quatrième degré à deux points doubles forment quatre systèmes; pour les courbes d'un système, la somme des arguments des quatre points de contact est la même et a l'une des valeurs

$$0,\ \frac{\omega}{2},\ 2\omega',\ \frac{\omega}{2}+2\omega'.$$

Les courbes de chacun des trois derniers systèmes forment quatre groupes, et l'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme

$$\alpha_1^2 \mathrm{A} + 2\alpha_1\alpha_2 \mathrm{B} + \alpha_2^2 \mathrm{C} = 0,$$

α_1 et α_2 étant des constantes arbitraires.

Les coniques du premier système comprennent toutes les droites du plan, comptées deux fois, et un groupe de coniques dont l'équation générale est de la forme précédente.

65. Revenons maintenant au cas général et considérons l'équation générale des courbes de l'un des groupes définis au n° 61

$$0 = f(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1^r \mathrm{A}_{r,0,0,\ldots,0} + r\alpha_1^{r-1}\alpha_2 \mathrm{A}_{r-1,1,0,\ldots} + \ldots + \alpha_{l-\delta+k_1}^r \mathrm{A}_{0,0,\ldots,0,r}.$$

On a trouvé

$$f[x_1(t), x_2(t), x_3(t)] = f(t) = \psi(t)[\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_{l-\delta+k_1}\varphi_{l-\delta+k_1}(t)]^r = \psi(t)\varphi^r(t).$$

Quelles que soient les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, les relations (45) sont vérifiées : on a ainsi

$$(47)\qquad \varphi(e_i) = \left[\frac{x_1^m(e_i)}{x_1^m(e'_i)}\,\frac{\psi(e'_i)}{\psi(e_i)}\right]^{\frac{1}{r}} e^{\frac{2h_i i\pi}{r}}\,\varphi(e'_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, \delta - k_1).$$

Les entiers $h_1, h_2, \ldots, h_{\delta-k_1}$ ont les mêmes valeurs pour les courbes d'un même groupe.

Considérons r courbes du groupe $(h_1, h_2, \ldots)$, et soient

$$\begin{aligned} f^{(1)}(t) &= \psi(t)\,\varphi^{(1)^r}(t),\\ f^{(2)}(t) &= \psi(t)\,\varphi^{(2)^r}(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f^{(r)}(t) &= \psi(t)\,\varphi^{(r)^r}(t), \end{aligned}$$

les fonctions $f(t)$ correspondant à chacune de ces courbes.

Si l'on pose

$$F(t) = \psi(t)\,\varphi(t)\,\varphi^{(1)}(t)\,\varphi^{(2)}(t)\ldots\varphi^{(r)}(t),$$

on aura, en tenant compte de (47)

$$F(e_i) : x_1^m(e_i) = F(e'_i) : x_1^m(e'_i),$$

et, par suite, les mn points de S dont les arguments vérifient l'équation $F(t) = 0$, et ont évidemment pour somme $\frac{mn}{2}(\omega + n\omega')$ (nº 61), sont situés sur une courbe de degré m (nº 47).

Ainsi :

Les rl points de contact avec S *de r courbes de degré m du même groupe, les k_2 points simples et les k_1 points doubles donnés sur* S, *sont sur une courbe de degré m* (¹).

66. L'équation de cette dernière courbe est facile à former. Soient, en

(¹) Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 245.

effet,

$$f^{(1)}(t) = \psi(t)\left[\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + \ldots + \alpha_{l-\delta+k_1}\varphi_{l-\delta+k_1}(t)\right]^r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(r)}(t) = \psi(t)[\lambda_1\varphi_1(t)] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]^r,$$

on a

$$F(t) = \psi(t)(\alpha_1\varphi_1 + \ldots)(\beta_1\varphi_1 + \ldots)\ldots(\lambda_1\varphi_1 + \ldots).$$

En développant le second membre et en y remplaçant

$$\begin{array}{ll} \psi(t)\varphi_1^r\;(t) & \text{par } \mathbf{A}_{r,0,0\ldots0}, \\ \psi(t)\varphi_1^{r-1}(t)\varphi_2(t) & \text{par } \mathbf{A}_{r-1,1,0,0\ldots0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{»} \quad \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

on obtiendra le premier membre de l'équation cherchée, qui sera de la forme

$$0 = \alpha_1\beta_1\ldots\lambda_1\mathbf{A}_{r,0,\ldots0} + (\alpha_2\beta_1\ldots\lambda_1 + \alpha_1\beta_2\ldots\lambda_1 + \ldots + \alpha_1\beta_1\ldots\lambda_2)\mathbf{A}_{2-1,1,0\ldots0} + \ldots$$
$$+ \alpha_{l-\delta+k_1}\beta_{l-\delta+k_1}\ldots\lambda_{l-\delta+k_1}\mathbf{A}_{0,0\ldots0,r}.$$

67. Clebsch a donné le nombre des courbes de degré $n-3$ qui passent par k_1 points doubles donnés de S et qui touchent cette courbe en tous leurs autres points de rencontre avec elle ([1]).

Il résulte du théorème général du n° 61 et de la remarque II, n° 62, que :

Il y a 2^2, c'est-à-dire quatre systèmes de telles courbes; la somme des arguments des points de contact est la même pour les courbes d'un système.

Chaque système comprend $2^{\delta-k_1-1}$ courbes; on a ainsi en tout $2^{\delta-k_1+1}$ courbes répondant à la question.

On voit, comme au n° 63, que ces résultats se modifient si k_1 est nul et si $n-3$ est pair.

Soient

$$k_1 = 0, \quad n-3 = 2\rho.$$

Le système de courbes de degré 2ρ pour lesquelles la somme des arguments des points de contact est égale à $\frac{n\rho}{2}(\omega + n\omega')$ ne comprendra que

---

([1]) Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 246.

N_1 courbes proprement dites, étant posé

$$N_1 = 2^{\delta-1} - \left[1 + (\delta - 1) + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1.2} + \ldots + \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots(\lambda+1)}{1.2\ldots\delta-1-\lambda}\right]$$

et

$$\lambda = \delta - \tfrac{1}{8}(n^2 - 1).$$

De plus, le système comprendra toutes les courbes de degré ρ, comptées deux fois.

Exemple. — *Les coniques tangentes en cinq points à une courbe du cinquième degré, à cinq points doubles, forment quatre systèmes : trois d'entre eux comprennent chacun seize coniques; le dernier système, pour lequel la somme des arguments des cinq points de contact est* $\frac{5}{2}(\omega + 5\omega')$, *ne comprend que cinq coniques proprement dites*. Il comprend, en outre, toutes les droites du plan, comptées deux fois.

Nous retrouverons, dans la IIIe Partie, les cinq coniques dont on vient de démontrer l'existence.

68. Si la courbe S a des points de rebroussement, les résultats précédents se modifient légèrement [Clebsch (1)].

Supposons que les courbes de degré m que l'on considère passent par k_1 points doubles de S et que, parmi les $\delta - k_1$ autres points doubles, il y ait R points de rebroussement, auxquels correspondent les arguments

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_R.$$

La relation

$$f(e_1) : x_1^m(e_1) = f(e'_1) : x_1^m(e'_1)$$

doit être remplacée (n° 52) par la suivante

$$f'(e_1) \quad x_1(e_1) = mf(e_1)\,x'_1(e_1),$$

f' et x'_1 désignant les dérivées de $f(t)$ et $x_1(t)$ par rapport à t. Or on a

$$f(t) = \psi(t)\,(\alpha_1\varphi'_1 + \alpha_2\varphi''_1 + \ldots + \ldots)^r = \psi(t)\,\mathfrak{F}^r(t)$$

et, par suite,

$$0 = \mathfrak{F}^{r-1}(e_1)\left[\psi'(e_1)\,\mathfrak{F}(e_1) + r\,\psi(e_1)\,\mathfrak{F}'(e_1) - \frac{x'_1(e_1)}{x_1(e_1)}\,m\,\psi(e_1)\,\mathfrak{F}(e_1)\right].$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 64, p. 245.

$\mathfrak{F}(e_1)$ ne peut être nul que si la courbe $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ passe par le point de rebroussement e_1, ce qu'on ne suppose pas; en égalant à zéro la quantité entre crochets, on a une relation linéaire et homogène en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$.

De même pour les relations qui correspondent aux $R - 1$ autres rebroussements.

On en conclut que le nombre des groupes que comprend un système de courbes de degré m est

$$r^{\delta - k_1 - R}, \quad \text{si } r \geqq n - 2$$

et

$$r^{mn - \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - k_1 - R}, \quad \text{si } r < n - 2.$$

69. Pour montrer le parti qu'on peut tirer de la théorie précédente, au point de vue des applications géométriques, nous allons traiter un cas particulier.

Étudier les courbes de degré $(n - 1)$, *qui passent par tous les points doubles d'une courbe* S, *de degré* n, *de genre un, et qui ont avec cette courbe, en deux points, un contact d'ordre* $n - 1$.

On a

$$k_1 = \delta, \quad k_2 = 0, \quad r = n, \quad l = 2.$$

Nous appellerons les courbes précédentes courbe A.

I. *Il y a* n^2 *systèmes de courbes* A; la fonction $f(t)$, qui correspond aux courbes d'un même système, est de la forme

$$f(t) = [\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)]^n,$$

α_1 et α_2 étant des constantes arbitraires, et l'équation générale des courbes du système sera

$$A(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1^n A_n + n\alpha_1^{n-1}\alpha_2 A_{n-1} + \ldots + \alpha_2^n A_0.$$

La courbe de degré $n - 1$

$$A_{n-k}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

passe par les points doubles de la courbe S, qu'elle coupe en $2n$ autres points, dont les arguments vérifient l'équation

$$0 = \varphi_1^{n-k}(t)\,\varphi_2^k(t).$$

Par suite, la courbe $A_{n-k} = 0$ est la courbe de degré $n - 1$, qui passe par les points doubles de S et qui a, avec cette courbe, un contact d'ordre $n - k - 1$

aux deux points de contact de S et de $A_n = 0$, et un contact d'ordre $k - 1$ aux deux points de contact de S et de $A_0 = 0$.

70. II. Soient n courbes A, d'un même système quelconque,

$$\begin{aligned} 0 = A &= \alpha^n A_n + n\alpha^{n-1} A_{n-1} + \ldots + A_0, \qquad \left(\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \\ 0 = B &= \beta^n A_n + n\beta^{n-1} A_{n-1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = L &= \lambda^n A_n + n\lambda^{n-1} A_{n-1} + \ldots. \end{aligned}$$

Les $2n$ points de contact de ces courbes avec S sont sur une courbe de degré $n - 1$, passant par les points doubles de S, et dont l'équation est (n° 66)

$$0 = \alpha\beta \ldots \lambda A_n + (\alpha\beta \ldots + \beta \ldots \lambda + \alpha \ldots \lambda + \ldots) A_{n-1} + \ldots + A_0.$$

Le coefficient de A_k est la somme des produits k à k des n quantités α, β, ..., λ.

71. III. *Courbes* A *passant par un point du plan.*

Soit (x'_1, x'_2, x'_3) un point du plan; on peut mener par ce point n courbes A d'un même système; les valeurs de α, correspondant à ces n courbes, sont données par l'équation

$$0 = \alpha^n A_n(x'_1, x'_2, x'_3) + n\alpha^{n-1} A_{n-1}(x'_1, \ldots) + \ldots + A_0(x'_1, \ldots).$$

Soient α, β, ..., λ les n racines de cette équation.

La somme de leurs produits k à k étant

$$(-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \frac{A_{n-k}(x'_1, x'_2, x'_3)}{A_n(x'_1, x'_2, x'_3)},$$

la courbe de degré $n - 1$, qui passe par les points doubles de S et les $2n$ points de contact avec S des n courbes A menées par le point (x'_1, x'_2, x'_3), aura pour équation

$$A'_0 A_n - nA'_1 A_{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1) A'_2 A_{n-2} + \ldots + (-1)^n A'_n A_0 = 0,$$

étant posé

$$A'_k = A_k(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Le premier membre de l'équation de cette courbe ne change pas, ou change de signe, selon que n est pair ou impair, quand on permute x_1, x_2, x_3 et x'_1, x'_2, x'_3.

Cela posé, appelons courbe polaire d'un point la courbe de degré $n-1$ qui passe par les points doubles de S et les $2n$ points de contact avec S des n courbes A d'un même système, menées par ce point. Ce point sera dit pôle de sa courbe polaire.

On a ce théorème :

Si la courbe polaire d'un point P *passe par un point* P′, *la courbe polaire de* P′ *passe par* P ;

et, par suite,

Les courbes polaires de tous les points d'une courbe polaire passent par le pôle de cette courbe.

Les pôles de toutes les courbes polaires passant par un point sont sur la courbe polaire de ce point.

Si n est impair, l'équation de la courbe polaire du point x'_1, x'_2, x'_3 peut s'écrire

$$0 = (A'_0 A_n - A'_n A_0) + n(A'_1 A_{n-1} - A'_{n-1} A_1) + \ldots,$$

et, par suite,

Si n est impair, toute courbe polaire passe par son pôle.

72. Ces résultats s'appliquent aux coniques osculatrices en deux points à une cubique plane. L'équation générale des coniques d'un système est de la forme

$$\alpha^3 A_3 + 3\alpha^2 A_2 + 3\alpha A_1 + A_0 = 0,$$

α étant un paramètre variable.

On démontre aisément les propriétés suivantes :

I. *Il y a neuf systèmes de coniques biosculatrices à une cubique* S ; *la droite qui joint les deux points de contact avec* S *des coniques d'un même système passe par un des neuf points d'inflexion. Soit* I *ce point.*

II. *Par un point quelconque* A *du plan, passent trois coniques biosculatrices du même système ; ces coniques ont un second point commun* B, *sur la droite* AI ; *les six points de contact de ces trois coniques avec* S *sont sur une conique, que nous appellerons conique polaire du point* A ; A *sera dit pôle de cette conique : il est clair que* B *est également un pôle de la conique et que toute conique polaire a ainsi deux pôles.*

III. *Toute conique polaire passe par ses pôles.*

IV. *Les coniques polaires des points d'une conique polaire passent par les pôles de celle-ci.*

V. *Les pôles des coniques polaires, menées par un point, sont sur la conique polaire de ce point.*

VI. *Si un point décrit une droite passant par* I, *sa conique polaire reste bitangente à une conique fixe; les deux points de contact sont sur la tangente en* I *à la cubique* S.

VII. *Quand un point décrit une conique* C *biosculatrice à* S, *du système considéré, sa conique polaire reste bitangente à une cubique fixe, osculatrice à* S *au point* I *et aux deux points de contact de* S *et de* C.

VIII. *Supposons qu'un point* A *décrive une conique* C; *soient* C′ *et* C″ *les deux autres coniques biosculatrices du même système passant par* A. *Elles se coupent aux deux points* A *et* B, *qui décrivent* C *et, en deux autres points, qui décrivent la cubique du théorème VII.*

IX. *Les coniques polaires qui passent par un point touchent en deux points une cubique, osculatrice à* S *au point* I.

TROISIÈME PARTIE.

CONJUGAISONS ET CORRESPONDANCES.

73. Nous appellerons *points conjugués* dans un système s deux points situés sur la courbe S, dont les arguments ont la somme constante s, à des multiples près de ω, $n\omega'$.

Remarque. — Au point de vue géométrique, on peut définir comme il suit un système de points conjugués.

Soient, sur la courbe S, $n-2$ points fixes quelconques. Considérons les courbes adjointes de degré $n-2$ qui passent par ces points. Ces courbes ont $\frac{n(n-3)}{2}+n-2$, c'est-à-dire $\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1$ points fixes, et forment ainsi un faisceau. Les deux point mobiles où l'une quelconque de ces courbes coupe S ont évidemment deux arguments dont la somme est constante, et sont, par suite, conjugués dans un système fixe.

I.

Équation générale des droites joignant deux points conjugués. Enveloppe de ces droites.

74. L'équation qui donne les arguments des points d'intersection d'une droite quelconque avec S est de la forme

$$f(t)=a_1\,\mathrm{P}_1(t)+a_2\,\mathrm{P}_2(t)+\ldots+a_n\,\mathrm{P}_n(t)=0.$$

Si cette droite passe par deux points conjugués dans le système s, on connaît la somme s de deux zéros de la fonction $f(t)$; la somme des $n-2$ autres sera $\frac{n}{2}(\omega+n\omega')-s$ à des multiples près de ω, $n\omega'$. La fonction $f(t)$

sera donc de la forme [équation (35)]

$$f(t) = [\alpha_1 \varphi_1'(t) + \alpha_2 \varphi_1''(t)][\beta_1 \varphi_2'(t) + \beta_2 \varphi_2''(t) + \ldots + \beta_{n-2} \varphi^{(n-2)}(t)].$$

Pour que les n zéros de $f(t)$ soient les arguments de n points de S, situés sur une droite, il faut et il suffit que les quantités α_1, α_2; β_1, ..., β_{n-2} vérifient $(n-3)$ relations de la forme (n° 44)

$$\beta_1(m_i\alpha_1 + n_i\alpha_2) + \beta_2(m_i'\alpha_1 + n_i'\alpha_2) + \ldots = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-3),$$

m_i, ... étant des constantes.

De ces $n-3$ relations, on tirera les valeurs proportionnelles de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$,

$$\frac{\beta_1}{f_1} = \frac{\beta_2}{f_2} = \ldots = \frac{\beta_{n-2}}{f_{n-2}},$$

f_1, f_2, ... désignant des polynômes homogènes, de degré $n-3$ en α_1 et α_2, et l'on aura ainsi, sous forme symbolique,

$$f(t) = (\alpha_1, \alpha_2)(f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}).$$

Dans le second membre développé, α_1 et α_2 entrent au degré $n-2$, et, par suite, l'équation générale des droites joignant deux points conjugués dans le système s sera de la forme

$$0 = x_1\varphi_{n-2} + x_2\psi_{n-2} + x_3\chi_{n-2},$$

φ_{n-2}, ... étant des polynômes homogènes de degré $n-2$ en α_1, α_2. Il résulte de là que :

Les droites qui joignent deux points conjugués dans un système donné enveloppent une courbe de $(n-2)^{ième}$ *classe* (¹), *unicursale et dont le degré est, en général,* $2(n-3)$.

75. Le degré et la classe de cette courbe s'abaissent si la valeur donnée de s est la somme des deux arguments e_1 et e_2 qui correspondent à un point double de S : en effet, l'équation qui donne les arguments des points où S est coupée par une droite quelconque issue du point double considéré admet les zéros e_1 et e_1' dont la somme est s. La courbe enveloppe cherchée se

(¹) CLEBSCH, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 217.

décompose donc en un point et une courbe de classe $n-3$. On peut se rendre compte de ce fait directement.

On a toujours, pour la fonction $f(t)$,

$$f(t)=(\alpha_1\varphi_1'+\alpha_2\varphi_1'')(\beta_1\varphi_2'+\ldots).$$

76. Parmi les équations qui lient α_1, α_2; β_1, ... est la suivante (n° 45)

$$f(e_1):x_1(e_1)=f(e_1'):x_1(e_1'); \tag{61}$$

or on a, puisque $e_1+e_1'=s$,

$$f(e_1')=f(s-e_1)$$

et, d'après les relations (37),

$$\varphi_1'(s-t)=\varphi_1'(t)e^{\frac{2i\pi}{\omega}(s-2t)},\quad \varphi_1''(s-t)=\varphi_1''(t)e^{\frac{2i\pi}{\omega}(s-2t)}.$$

L'équation (61) devient donc, en remplaçant $\varphi_1'(e_1')$, $\varphi_1''(e_1')$ par leurs valeurs,

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{x_1(e_1)}[\alpha_1\varphi_1'(e_1)+\alpha_2\varphi_1''(e_1)][\beta_1\varphi_2'(e_1)+\ldots]\\&=\frac{e^{\frac{2i\pi}{\omega}(s-2t)}}{x_1(e_1')}[\alpha_1\varphi_1'(e_1)+\alpha_2\varphi_1''(e_1)][\beta_1\varphi_2'(e_1')+\ldots],\end{aligned}\right. \tag{62}$$

et l'expression $\alpha_1\varphi_1'(e_1)+\alpha_2\varphi_1''(e_1)$ est en facteur. Si on l'égale à zéro, on écrit que

$$f(e_1)=f(e_1')=0,$$

c'est-à-dire que la droite considérée passe par le point double (e_1, e_1').

Si on ne l'annule pas, l'équation (62), débarrassée de ce facteur, devient une relation linéaire et homogène entre β_1, ..., β_{n-2}, qui permet d'exprimer une de ces quantités en fonction linéaire et homogène des autres. On a ainsi

$$f(t)=(\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-3}),$$

et l'on en conclut, comme on l'a fait plus haut, que l'équation générale des droites joignant deux points conjugués dans le système e_1+e_1', et ne passant pas par le point double (e_1, e_1'), est de la forme

$$0=x_1\varphi_{n-3}+x_2\psi_{n-3}+x_3\chi_{n-3},$$

φ_{n-3} étant des polynômes homogènes de degré $n-3$ en α_1, α_2.

Ces droites enveloppent donc une courbe de $(n-3)^{ième}$ *classe unicursale et, en général, de degré* $2(n-4)$.

77. *Cette courbe enveloppe touche la tangente menée au point double* (e_1, e'_1) *à la courbe* Δ, *de degré* $n-3$, *adjointe à* S.

En effet, toute courbe de degré $n-3$ passant par les $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ points doubles de S, autres que le point (e_1, e'_1), coupe S en deux points mobiles dont les arguments ont pour somme $e_1 + e'_1$ (n° 43 *bis*).

La droite D joignant ces deux points sera donc une des droites considérées. Or, si la courbe de degré $n-3$, dont on vient de parler, se rapproche de la courbe Δ, la droite D tend à se confondre avec la tangente menée à Δ au point (e_1, e'_1). C. Q. F. D.

II.

Tangentes doubles de la courbe enveloppe.

78. Il est aisé de déterminer directement le nombre des tangentes doubles de la courbe enveloppe des droites joignant deux points conjugués, c'est-à-dire le nombre des droites qui passent par deux couples de points conjugués dans le système donné s.

La fonction $f(t)$, correspondant à une de ces droites, sera de la forme (n° 58, remarque II)

$$f(t) = (p_1, p_2, p_3)(d_1, d_2, \ldots, d_{n-4}).$$

En écrivant, comme plus haut, les $n-3$ relations qui lient p_1, p_2, p_3; $d_1, \ldots,$ et qui sont de la forme

$$0 = d_1(m_i p_1 + n_i p_2 + q_i p_3) + d_2(m'_i p_1 + \ldots) + \ldots,$$

$m_i, \ldots$ étant des constantes, on obtiendra, par l'élimination de $d_1, \ldots, d_{n-4}$, deux équations de degré $n-4$ en p_1, p_2, p_3. Ces deux équations se présenteront sous la forme de deux déterminants identiques l'un à l'autre, à une ligne près, et l'on sait que deux pareilles équations sont vérifiées, en général, par $\frac{1}{2}(n-4)(n-3)$ systèmes de valeurs de $\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}$. Ainsi :

THÉORÈME. — *Il existe* $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ *droites qui passent par deux couples de points conjugués, et qui sont, par suite, des tangentes doubles de l'enveloppe.*

79. Si s est la somme des deux arguments e_1 et e'_1 d'un point double de S, ce nombre de tangentes doubles se réduit, comme on le voit aisément, à $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)$.

III.

Propriétés de la courbe enveloppe.

80. La courbe enveloppe des droites D, qui joignent deux points conjugués dans un système donné s, touche la courbe S en un certain nombre de points, que nous allons déterminer.

Soit un point quelconque de S, d'argument t. Les valeurs proportionnelles de α_1 et α_2, qui correspondent aux $n-2$ droites D qu'on peut mener par ce point, sont données par l'équation

$$(63) \qquad o = [\alpha_1 \varphi'_1(t) + \alpha_2 \varphi''_1(t)][f_1(\alpha_1, \alpha_2)\varphi'_2(t) + f_2(\alpha_1, \alpha_2)\varphi''_2(t) + \ldots] \quad (\text{n}^\text{o}\ 74);$$

f_1, f_2 sont les valeurs proportionnelles trouvées plus haut pour $\beta_1, \beta_2, \ldots,$ c'est-à-dire des polynômes de degré $n-3$ et homogènes en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

L'équation (63) admet tout d'abord la solution

$$\alpha_1 = \varphi''_1(t), \quad \alpha_2 = -\varphi'_1(t),$$

qui correspond évidemment à la droite joignant le point considéré, d'argument t, au point d'argument $s-t$.

Cela posé, remarquons que les points de S situés sur l'enveloppe des droites D sont évidemment les points dont les arguments sont tels que l'équation (63) ait deux racines égales en $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, et qu'en ces points l'enveloppe touche la droite D qui correspond à la racine double.

Or, parmi ces points, nous rencontrons ceux dont les arguments t sont tels que les deux facteurs du second membre de l'équation (63) aient une racine commune, c'est-à-dire ceux dont les arguments satisfont à l'équation

$$(64) \qquad o = f_1[\varphi''_1(t), -\varphi'_1(t)]\varphi'_2(t) + f_2[\varphi''_1(t), -\varphi'_1(t)]\varphi''_2(t) + \ldots.$$

Soit t_0 une solution de cette équation. La droite D_0, joignant les points d'arguments t_0 et $s-t_0$, coupe S en des points dont les arguments vérifient l'équation (63)

$$(63\ bis) \qquad o = [\alpha_1^0 \varphi'_1(t) + \alpha_2^0 \varphi''_1(t)][f_1(\alpha_1^0, \alpha_2^0)\varphi'_1(t) + \ldots],$$

α_1^0 et α_2^0 satisfaisant à la relation

$$\alpha_1^0 \varphi_1'(t_0) + \alpha_2^0 \varphi_1''(t_0) = 0.$$

Or la fonction

$$f(\alpha_1^0, \alpha_2^0)\varphi_2'(t) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$f[\varphi_1''(t_0), -\varphi_1'(t_0)]\varphi_2'(t) + \ldots,$$

s'annule, par hypothèse, pour $t = t_0$: les deux facteurs du second membre de l'équation (63 *bis*) s'annulent donc séparément pour $t = t_0$, et, par suite, la droite D_0 est tangente à S au point t_0.

D'un autre côté, nous avons vu que l'enveloppe des droites D passait par le point t_0 et y touchait la droite D, correspondant à la racine double

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{\varphi_1'(t_0)}{\varphi_1''(t_0)}.$$

Cette droite D est ici la droite D_0, et, par conséquent :

La courbe enveloppe des droites D *touche* S *en tous les points dont les arguments vérifient l'équation* (64).

Cette équation est de la forme

$$(65) \qquad \Theta(t) = \Sigma \varphi_j(t)\varphi_1'^{k}(t)\varphi_1''^{n-3-k}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots n-3),$$

$\varphi_j(t)$ étant fonction linéaire et homogène des fonctions φ_2', φ_2'', ... de l'équation (63).

Or, dans le parallélogramme ω, $n\omega'$, $\varphi_j(t)$ a $n-2$ zéros ; φ_1' et φ_1'' en ont deux ; il en résulte immédiatement que le premier membre de la relation (65) en aura

$$(n-2) + 2(n-3), \text{ c'est-à-dire } 3n-8.$$

La somme des deux zéros de φ_1' ou φ_1'' étant s, celle des $n-2$ zéros de $\varphi_j(t)$ est $\frac{n}{2}(\omega + n\omega') - s$, et celle des $3n-8$ zéros de $\Theta(t)$ sera évidemment

$$\frac{n}{2}(\omega + n\omega') - s + ks + (n-3-k)s = (n-4)s + \frac{n}{2}(\omega + n\omega').$$

Ainsi :

L'enveloppe des droites D *touche* S *en* $3n-8$ *points, dont les arguments ont pour somme*

$$(n-4)s + \frac{n}{2}(\omega + n\omega')$$

à des multiples près de ω, $n\omega'$.

81. Si s est la somme des deux arguments e_1, e'_1 d'un point double de S, on verra de même que l'enveloppe touche S en $3n - 10$ points dont les arguments ont pour somme $(n-5)s + \frac{n}{2}(\omega + n\omega')$; ce qu'on peut énoncer ainsi :

Soit E *un point double d'une courbe* S *de degré n et de genre un : les courbes de degré $n - 3$ qui passent par les autres points doubles de* S *coupent cette courbe en deux points mobiles; la droite qui joint ces points enveloppe une courbe unicursale de degré $2(n-4)$, de classe $(n-3)$, qui touche* S *en $3n - 10$ points dont les arguments ont pour somme $(n-5)s + \frac{n}{2}(\omega + n\omega')$ à des multiples près de ω, $n\omega'$.*

IV.

Propriété géométrique des couples de points conjugués.

82. Théorème. — *Le conjugué harmonique par rapport à deux points conjugués dans un système s, du point où la droite qui les joint coupe une droite fixe, décrit une courbe unicursale de degré n* (¹).

Soient, en effet,

$$U = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

l'équation de la droite fixe considérée, t et $s - t$ les arguments de deux points conjugués M et N; le conjugué harmonique du point d'intersection des droites U et MN, par rapport aux points M et N, a pour coordonnées

$$X_i = U(t)\,x_i(s-t) + U(s-t)\,x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

étant posé

$$U(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t),$$
$$U(s-t) = a_1 x_1(s-t) + a_2 x_2(s-t) + a_3 x_3(s-t).$$

Les deux fonctions $\frac{X_2}{X_1}$ et $\frac{X_3}{X_1}$ sont doublement périodiques aux périodes ω, $n\omega'$ d'ordre $2n$; de plus, elles ne changent pas, si l'on y remplace t par $s - t$. Il en résulte (nos 32 et 33) que la courbe décrite par le point (X_1, X_2, X_3) est unicursale, et de degré $\frac{2n}{2}$, c'est-à-dire n.

C. Q. F. D.

(¹) P. d'Esclaibes, Thèse, p. 9.

83. *Remarques.* — I. Si la droite U passe par deux points de S conjugués dans le système s, d'arguments a et $s - a$, la fonction $U(t)$ s'annule pour $t = a$ et $t = s - a$, et il en est de même de la fonction $U(s - t)$. Les trois fonctions $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ ont donc deux zéros communs, et le degré de la courbe unicursale décrite par le point (X_1, X_2, X_3) sera $\frac{2n-2}{2}$, c'est-à-dire $n - 1$.

II. Si la droite U est tangente double de l'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués dans le système s, le degré sera $\frac{2n-4}{2}$, c'est-à-dire $n - 2$.

III. Si la droite U passe par un des quatre points de S dont les arguments sont respectivement $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{n}{2}\omega'$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{n}{2}\omega'$, par le point $\frac{s}{2}$ par exemple, les fonctions $U(t)$ et $U(s - t)$ s'annulent pour $t = \frac{s}{2}$. Il en est, par suite, de même des fonctions $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$. Or, de la relation

$$X_i(s - t) = X_i(t)$$

on déduit, par dérivation,

$$X'_i(s - t) = -X'_i(t).$$

Cette dernière équation montre que les fonctions $X'_1(t)$, $X'_2(t)$, $X'_3(t)$ s'annulent pour $t = \frac{s}{2}$; $\frac{s}{2}$ est donc un zéro double de $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, et la courbe décrite par le point (X_1, X_2, X_3) est de degré $n - 1$.

Il est clair, en vertu de ce raisonnement, que, si la droite U passe par le point d'argument $\frac{s}{2}$, et par deux autres points de S conjugués dans le système s, le degré du lieu décrit par le point (X_1, X_2, X_3) sera $\frac{2n-4}{2}$, c'est-à-dire $n - 2$.

En général, si la droite U passe par h des quatre points d'arguments $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{n}{2}\omega'$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{n}{2}\omega'$, et par h' couples de points conjugués dans le système s, le lieu du point (X_1, X_2, X_3) sera de degré $\frac{2n - 2h' - 2h}{2}$, c'est-à-dire $n - h - h'$.

Exemple. — *Sur une courbe* S *du quatrième degré et de genre un, le conjugué harmonique par rapport à deux points conjugués dans un système* s, *du point où la droite qui les joint coupe une droite fixe, décrit une conique pour quatre* *positions de la droite fixe. Les quatre droites en question sont celles qui joignent les pôles d'arguments* $\frac{s}{2}$ *et* $-\frac{3s}{2}$; $\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}$ *et* $-\frac{3s}{2}+\frac{\omega}{2}$; $\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}+2\omega'$ *et* $-\frac{3s}{2}+\frac{\omega}{2}+2\omega'$; $\frac{s}{2}+2\omega'$ et $-\frac{3s}{2}+2\omega'$.

La conique devient une droite si $-\frac{3s}{2}$ est égal à l'une des quantités $\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{s}{2}+2\omega'$, $\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}+2\omega'$, c'est-à-dire si s a l'une des douze valeurs $\frac{\omega}{4}+\frac{h\omega}{2}+2h'\omega'$; $\omega'+\frac{h\omega}{2}+2h'\omega'$; $\frac{\omega}{4}+\omega'+\frac{h\omega}{2}+2h'\omega'$; $(h, h'=0, 1)$.

V.

Courbes menées par des couples de points conjugués.

84. Théorème. — *Les courbes de degré* $n-3$ *passant par* k_1 *points doubles donnés de* S, *et dont les autres points d'intersection avec* S *sont deux à deux conjugués dans un même système* s, *forment un faisceau.*

Soit s_1 la somme des $2k_1$ arguments qui correspondent aux k_1 points doubles donnés; on aura

$$s_1+[\tfrac{1}{2}n(n-3)-k_1]s=\tfrac{1}{2}n(n-3)(\omega+n\omega')+h\omega+nh'\omega',$$

h et h' étant des entiers quelconques. On tire de là, pour s, $(\delta-k_1)^2$ valeurs (à des multiples près de ω, $n\omega'$).

Il y a donc $(\delta-k_1)^2$ systèmes de courbes de degré $(n-3)$ répondant à la question.

Soit la fonction $f(t)$ qui correspond aux courbes de l'un des systèmes. On a (*Rem. II*, n° 58)

$$f(t)=\psi(t)[p_1\varphi_1(t)+\ldots+p_{\delta-k_1+1}\varphi_{\delta-k_1+1}(t)],$$

$p_1, p_2, \ldots$ étant des constantes. Pour que les zéros de $f(t)$ soient les arguments de points situés sur une courbe de degré $(n-3)$ passant par k_1 points doubles, il faut que $p_1, p_2, \ldots, p_{\delta-k_1+1}$ vérifient $\delta-k_1-1$ relations linéaires et homogènes (n^{os} 45, 50, 51).

On pourra donc exprimer $\delta-k_1-1$ de ces constantes en fonction linéaire et homogène des deux autres, et l'on aura

$$f(t)=p_1V_1(t)+p_2V_2(t),$$

p_1 et p_2 étant des constantes *arbitraires*. L'équation générale des courbes de degré $(n-3)$ appartenant au système considéré est donc de la forme

$$o = f(x_1, x_2, x_3) = p_1 V_1(x_1, x_2, x_3) + p_2 V_2(x_1, x_2, x_3),$$

et ces courbes forment un faisceau.

85. Plus généralement considérons les courbes de degré $(n-3)$ passant par k_1 points doubles donnés de S. On peut les assujettir à couper en outre S en $\delta - k_1 - 1$ couples de points conjugués dans un système donné s; si ce système n'est pas un des $(\delta - k_1)^2$ systèmes définis au numéro précédent, la somme des arguments des deux derniers points d'intersection avec S des courbes considérées aura une valeur constante s' différente de s.

La fonction $f(t)$ correspondant à de telles courbes sera de la forme

$$f(t) = (p_1, p_2, \ldots, p_{\delta - k_1})(\beta_1, \beta_2).$$

Les constantes $p_1, \ldots, \beta_1, \beta_2$ sont liées par $\delta - k_1 - 1$ relations de la forme

$$p_1(m_i\beta_1 + n_i\beta_2) + p_2(q_i\beta_1 + r_i\beta_2) + \ldots = o \quad (i = 1, 2, \ldots, \delta - k_1 - 1).$$

On déduit de là les relations

$$\frac{p_1}{f_1} = \frac{p_2}{f_2} = \ldots = \frac{p_{\delta - k_1}}{f_{\delta - k_1}},$$

$f_1, \ldots$ étant des polynômes homogènes de degré $\delta - k_1 - 1$ en β_1 et β_2. L'équation générale des courbes de degré $(n-3)$ considérées sera donc de la forme

$$\begin{aligned} o &= f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \beta_1^{\delta - k_1}\varphi_{n-3}(x_1, x_2, x_3) + \beta_1^{\delta - k_1 - 1}\beta_2\chi_{n-3}(x_1, x_2, x_3) + \ldots + \beta_2^{\delta - k_1}\psi_{n-3}(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

$\varphi_{n-3}, \ldots, \psi_{n-3}$ étant des polynômes de degré $n-3$ en x_1, x_2, x_3, et β_1, β_2 des constantes arbitraires.

On verrait aisément, en appliquant la méthode du n° 80, que l'enveloppe de ces courbes touche S en $4(\delta - k_1 - 1)$ points.

86. On peut donner des résultats analogues pour les courbes de degré supérieur à $n-3$; mais nous n'insisterons pas sur ce point, car nous aborderons plus loin une théorie plus générale que celle des points conjugués.

VI.

Application aux courbes du cinquième degré.

87. I. *La courbe* H, *enveloppe des droites joignant deux points conjugués dans un système s, sur une courbe* S *du cinquième degré, et de genre un, est une courbe unicursale, de quatrième degré, de troisième classe, ayant une tangente double.*

La courbe H *touche* S *en sept points.*

II. *Le conjugué harmonique, par rapport à deux points conjugués dans un système s, du point où la droite qui les joint coupe une droite fixe quelconque, décrit une courbe unicursale du cinquième degré.*

Si la droite fixe est la tangente double de la courbe H *correspondant au système s, le lieu précédent devient une courbe unicursale du troisième degré.*

Dans le cas où s a l'une des vingt-cinq valeurs données par la formule

$$s = \tfrac{1}{5}(k\omega + 5k'\omega') \quad (k, k', = 0, 1, 2, 3, 4),$$

la valeur o, par exemple, la tangente double de la courbe H correspondante coupe S en deux couples de points conjugués dans le système o, et en un cinquième point dont l'argument est $\frac{1}{2}(\omega + 5\omega')$ (nº 43 *bis*). Il résulte de là (*Rem. III* du nº 83) le théorème suivant :

Le conjugué harmonique, par rapport à deux points de S, *conjugués dans un système* $\frac{1}{5}(k\omega + 5k'\omega')$, *du point où la droite qui les joint coupe la tangente double de la courbe* H *correspondant au système, décrit une conique.*

III. *Les coniques* G *qui coupent* S *en cinq couples de points conjugués dans l'un des vingt-cinq systèmes* $\frac{1}{5}(k\omega + 5k'\omega')$ *forment un faisceau* (nº 84).

Soit le système o, par exemple.

La tangente double de la courbe H correspondant au système considéré coupe S, comme on l'a dit, en deux couples de points conjugués dans le système o, et au point d'argument $\frac{1}{2}(\omega + 5\omega')$, qui est à lui-même son conjugué dans ce système. Cette droite, comptée deux fois, est donc une des coniques G du faisceau qui correspond au système o, et, par suite :

Les coniques G *d'un même système touchent deux droites en deux points fixes, situés sur la tangente double de la courbe* H *correspondante.*

On peut déduire de là plusieurs conséquences que nous ne ferons qu'énoncer, et, pour simplifier le langage, nous admettrons que les deux points fixes dont il vient d'être question sont les points cycliques du plan.

Le milieu du segment formé par deux points conjugués dans le système o [*ou l'un des systèmes* $\frac{1}{5}(k\omega + 5k'\omega')$] *est une conique* K.

Tous les cercles ayant pour centre un certain point fixe A *coupent* S *en dix points conjugués deux à deux dans ce système.*

Le point A *est situé sur la conique* K.

La conique K *est la podaire, par rapport au point* A, *de la courbe* H, *enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués dans le système considéré.*

IV. *Si s est la somme des deux arguments* e_i *et* e'_i *correspondant à l'un des cinq points doubles* E_i *de* S, *l'enveloppe des droites qui joignent deux points de* S, *conjugués dans ce système, est une conique tangente à* S *en cinq points.*

La somme des arguments de ces cinq points est $\frac{5}{2}(\omega + 5\omega')$; *par suite, ces cinq points sont situés avec les cinq points doubles de* S *sur une cubique.*

Or on a vu (n° 67) qu'il n'existe que cinq coniques tangentes à S en cinq points situés avec les points doubles sur une cubique; soit C_i l'une de ces coniques; il résulte de ce qui précède que :

Les tangentes de C_i *joignent sur* S *deux points conjugués dans le système* $e_i + e'_i$, *et la tangente en* E_i *à la conique qui passe par les cinq points doubles de* S *est une tangente de* C_i (n° 77).

On peut énoncer autrement ces résultats :

Soit S *une courbe du cinquième ordre à cinq points doubles, a, b, c, d, e; les coniques qui passent par quatre de ces points a, b, c, d coupent* S *en deux points mobiles : la droite qui joint ces points enveloppe une conique qui est tangente à* S *en cinq points, situés avec a, b, c, d, e sur une même cubique, et qui touche la tangente menée au point e à la conique des points a, b, c, d, e.*

VII.

Correspondances.

88. La relation qui lie les arguments de deux points conjugués n'est qu'un cas particulier d'une relation plus générale, que nous avons déjà rencontrée.

Soit $Z(t)$ une fonction doublement périodique quelconque, aux périodes ω, $n\omega'$, et d'ordre p. L'équation

$$Z(u) - Z(t) = 0$$

donne pour u, abstraction faite des multiples des périodes, p valeurs

$$t,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{p-1}.$$

Soient sur la courbe S les p points dont les arguments sont t, u_1, ..., u_{p-1} : nous dirons qu'ils constituent une *correspondance*. Ainsi, étant donnée la fonction Z, un point quelconque de S, d'argument t, détermine une correspondance, et une seule.

La somme des arguments des points d'une correspondance est constante : elle est égale, en effet, à la somme des zéros de la fonction de u : $Z(u) - Z(t)$, contenus dans un même parallélogramme, ω, $n\omega'$, c'est-à-dire à la somme des infinis de $Z(u)$, contenus dans ce parallélogramme (à des multiples près des périodes). On a donc

$$t + u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} = c + h\omega + nh'\omega'.$$

Dans le cas particulier où $Z(t)$ est du second ordre, on a

$$t + u_1 = \text{const.},$$

et les deux points de la correspondance sont conjugués.

89. Soient α_1, α_2, ..., α_p les zéros de $Z(t)$; β_1, β_2, ..., β_{p-1} les infinis contenus dans un même parallélogramme des périodes.

En appliquant la méthode du nº 9, on mettra cette fonction sous la forme

$$Z(t) = \frac{a_2\Pi_1 + b_2\Pi_2 + \ldots + l_2\Pi_p}{a_1\Pi_1 + b_1\Pi_2 + \ldots + l_1\Pi_p} = \frac{M(t)}{N(t)},$$

étant posé

$$\Pi_{j+1}(t) = \theta_3\left[t + j\frac{\omega}{p} + \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{n\omega'}{2}\right) - \frac{c}{p}, \omega, \frac{n\omega'}{p}\right]$$

et

$$c = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p.$$

90. Cela posé, soit une courbe de degré m; $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ passant par tous les points d'une correspondance, dont nous désignerons les arguments par a, $u_1(a)$, ..., $u_{p-1}(a)$. La fonction $f[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ ou $f(t)$ ren-

fermera (n° 55) le facteur

$$f_1(t) = \theta_1(t-a)\,\theta_1[t-u_1(a)]\ldots\theta_1[t-u_{p-1}(a)]\,e^{p\frac{i\pi t}{\omega}},$$

étant posé

$$\theta_1(t) = \theta_1(t, \omega, n\omega') = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}e^{n\frac{i\pi\omega'}{\omega}(\mu+\frac{1}{2})^2}e^{(2\mu+1)\frac{i\pi t}{\omega}}.$$

La somme $a + u_1(a) + \ldots + u_{p-1}(a)$ est égale à $c + h\omega + nh'\omega'$; on peut, en ajoutant ou retranchant à l'une des quantités $u_i(a)$ un certain nombre de périodes, ce qui ne change pas sur la courbe S le point d'argument $u_i(a)$, faire en sorte que cette somme soit exactement égale à c; on a alors

$$f_1(t+\omega) = f_1(t), \quad f_1(t+n\omega') = f_1(t)\,e^{-2p\frac{i\pi t}{\omega}+2\frac{i\pi t}{\omega}}(-1)^p,$$

et l'on en conclut aisément que $f_1(t)$ s'exprime linéairement à l'aide des fonctions $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$ définies au numéro précédent.

D'ailleurs la fonction $\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(a) - \mathrm{N}(t)\mathrm{M}(a)$, qui est une fonction linéaire de $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$, admet les zéros $a, u_1(a), \ldots, u_{p-1}(a)$; puisque l'on a

$$\mathrm{Z}(t) = \frac{\mathrm{M}(t)}{\mathrm{N}(t)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}[u_i(t)] = \mathrm{Z}(t).$$

Il en résulte que l'on a, $\mathcal{A}$ étant un facteur constant,

$$f_1(t) = \mathcal{A}[\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(a) - \mathrm{N}(t)\mathrm{M}(a)]$$

et, par conséquent,

$$f(t) = [\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(a) - \mathrm{N}(t)\mathrm{M}(a)][\ldots\ldots\ldots]$$

ou, sous forme symbolique,

$$f(t) = [\mathrm{N}(a), -\mathrm{M}(a)][\ldots\ldots\ldots].$$

Remarque. — La quantité a étant quelconque, le quotient $\frac{\mathrm{M}(a)}{\mathrm{N}(a)}$ sera aussi quelconque, et l'on pourra écrire, α et β étant deux constantes *arbitraires*,

$$f(t) = (\alpha, \beta)(\ldots\ldots\ldots).$$

91. De là se déduisent, par la méthode appliquée aux n^os 61 et 65, les résultats suivants.

Dans ce qui suit, il s'agit des correspondances définies par une fonction donnée $Z(t)$.

Soit

$$mn = 2k_1 + k_2 + prl \quad (m \geqq n - 2).$$

Les courbes de degré m, passant par k_1 points doubles, k_2 points simples donnés de S, *et ayant avec* S *en pl points, formant l correspondances, un contact d'ordre $r-1$, forment $r^{\delta-k_1}$ groupes; l'équation générale des courbes d'un même groupe est*

$$p_1^r \mathbf{A}_{r,0,0,\ldots,0} + rp_1^{r-1} p_2 \mathbf{A}_{r-1,1,0,\ldots,0} + \ldots + p_{l+1-\delta+k_1}^r \mathbf{A}_{0,0,\ldots,0,r} = 0,$$

$p_1, p_2, \ldots$ étant des constantes arbitraires; $\mathbf{A}_{r,0,\ldots}, \ldots$ *des polynômes de degré m en x_1, x_2, x_3.*

Les points de contact avec S *de r courbes d'un même groupe, les k_1 points doubles et les k_2 points simples donnés sur* S, *sont sur une courbe de degré m,* R.

Si

$$\begin{array}{llll}
p_1, & p_2, & \ldots, & p_{l+1-\delta+k_1}, \\
p'_1, & p'_2, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
p_1^{(r-1)}, & p_2^{(r-2)}, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

sont les valeurs des paramètres correspondant aux r courbes considérées, l'équation de la courbe R sera

$$0 = \Sigma \mathcal{A}_{k'_1, k'_2, \ldots} \mathbf{A}_{k'_1, k'_2, \ldots, k'_{l+1-\delta+k_1}}(x_1, x_2, x_3),$$

$k'_1, k'_2, \ldots$ étant des entiers, non négatifs, de somme r, et $\mathcal{A}_{k'_1}, \ldots$ désignant la somme des produits

$$p_1^{(\alpha_1)} p_1^{(\alpha_2)} \ldots p_1^{(\alpha_{k'_1})} p_2^{(\beta_1)} \ldots p_2^{(\beta_{k'_2})} \ldots p_{l+1-\delta+k_1}^{(\lambda_1)} \ldots p_{l+1-\delta+k_1}^{(\lambda_{k'_{l+1-\delta+k_1}})},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k'_1}; \beta_1, \ldots, \beta_{k'_1}, \ldots$ sont des entiers, prenant les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$.

92. On peut déduire de ces théorèmes quelques conséquences.

Soient

$$r = 1, \quad k_1 = \tfrac{1}{2} n(n-3) - l + 2, \quad mn = 2k_1 + k_2 + pl.$$

L'équation générale des courbes de degré m, qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur S, et qui coupent cette courbe en pl autres points, formant l correspondances, sera

$$p_1 C_1 + p_2 C_2 + p_3 C_3 = 0,$$

p_1, p_2, p_3 étant des constantes arbitraires. Nous désignerons ces courbes sous le nom de courbes C.

D'après ce qui précède (n^o 90), la fonction $C_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ est de la forme

$$C_1[x_1(t), \ldots] = C_1(t) = \psi(t)(\alpha_1 M + \beta_1 N)(\alpha'_1 M + \beta'_1 N)(\alpha''_1 M + \beta''_1 N)$$

ou

$$C_1(t) = N^l(t)[\alpha_1 Z(t) + \beta_1]\ldots[\alpha_1^{(l-1)} Z(t) + \beta_1^{(l-1)}]\psi(t)$$

On en conclut, puisque $Z[u_i(t)] = Z(t)$,

$$C_1[u_i(t)] = N^l[u_i(t)][\alpha_1 Z(t) + \beta_1]\ldots[\alpha_1^{(l-1)} Z(t) + \beta_1^{(l-1)}]\psi[u_i(t)],$$

et, par suite,

$$(\rho) \qquad \frac{C_1[u_i(t)]}{C_1(t)} = \frac{C_2[u_i(t)]}{C_2(t)} = \frac{C_3[u_i(t)]}{C_3(t)}.$$

Cela posé, soit un point X du plan, défini par les relations

$$\frac{X_1}{C_1(t)} = \frac{X_2}{C_2(t)} = \frac{X_3}{C_3(t)}.$$

Les fonctions $C_i(t)$ ont, dans un parallélogramme $(\omega, n\omega')$, pl zéros variables; comme, de plus, elles satisfont aux relations (ρ), la courbe décrite par le point (X_1, X_2, X_3) sera une courbe unicursale de degré l (n^{os} 32 et 33).

Soit $G(X_1, X_2, X_3) = 0$ son équation.

Par la substitution

$$X_1 = C_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$X_2 = C_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$X_3 = C_3(x_1, x_2, x_3),$$

cette courbe se transforme en courbe de degré lm, qui se décompose évidemment en la courbe S et en une courbe D, de degré $lm - n$.

Par cette transformation, une droite $p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 = 0$ devient une courbe C quelconque. On en déduit aisément les résultats suivants :

Les courbes C *tangentes à* S *en tous les points d'une correspondance touchent* *en* $m^2 - k_1 - k_2 - p$ *points une courbe* D *de degré* $lm - n$; *par ces points et les* p *points de la correspondance de contact, passe un faisceau de courbes* C.

La courbe D *a un point multiple d'ordre* $l - 1$ *en chacun des* k_2 *points simples donnés sur* S, *et un point multiple d'ordre* $l - 2$ *en chacun des* k_1 *points doubles donnés.*

Par un point du plan, passent $2l - 2$ *courbes* C *tangentes à* S *aux points d'une correspondance.*

Il y a $2(l-2)(l-3)$ *courbes* C *tangentes à* S *aux points de deux correspondances.*

Il y a $3(n-2)$ *courbes* C *osculatrices à* S *aux points d'une correspondance.*

93. En particulier, si l'on a $l = 2$ et, par suite,

$$k_1 = \tfrac{1}{2}n(n-3) \quad \text{et} \quad mn = n(n-3) + k_2 + 2p,$$

les courbes C seront des courbes de degré m, passant par les points doubles de S, par k_2 points simples donnés sur cette courbe, et la coupant, en outre, en $2p$ points, formant deux correspondances.

En ce cas, la courbe G est une conique, et les théorèmes descriptifs relatifs aux coniques, dans l'énoncé desquels ne figurent que des droites, donneront des propriétés correspondantes des courbes C et de la courbe S.

Ainsi :

1° *A un point du plan de la conique* G *correspondent, dans le plan de la courbe* S, m^2 *points, parmi lesquels figurent les points doubles et les* k_2 *points simples donnés sur* S; *en ne considérant que les points variables, on peut dire qu'à un point du plan* G *correspondent* $m^2 - k_2 - \delta$ *points du plan* S; *nous appellerons ces points « points associés ».*

2° *Par un point du plan, on peut mener deux courbes* C *tangentes à* S *aux* p *points d'une correspondance; les deux correspondances de contact ainsi déterminées sont sur une courbe* C, *que nous appellerons courbe polaire du point considéré : ce point sera dit pôle de la courbe polaire.*

3° *Toute courbe* C *est une courbe polaire, ayant* $m^2 - \delta - k_2$ *pôles associés.*

4° *Les courbes polaires des points d'une courbe* C *passent par les pôles de cette courbe.*

5° *Les pôles des courbes* C *passant par un point sont sur la courbe polaire de ce point.*

COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

I.

Expression des coordonnées.

94. Si l'on pose, comme dans la première partie,

$$P_1(t) = \theta_3(t, \omega, \omega') = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2m\frac{i\pi t}{\omega} + m^2 \frac{i\pi\omega'}{\omega}},$$

$$P_{j+1}(t) = \theta_3\left(t + j\frac{\omega}{4}, \omega, \omega'\right) \quad (j = 1, 2, 3),$$

les coordonnées d'un point d'une courbe S, de quatrième degré et de genre un, pourront se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 P_1(t) + A_2 P_2(t) + A_3 P_3(t) + A_4 P_4(t), \\ X_2 &= B_1 P_1(t) + \ldots, \\ X_3 &= C_1 P_1(t) + \ldots, \end{aligned}$$

ou, en posant

$$P_1 + P_3 = u_0, \quad P_2 + P_4 = u_1, \quad P_1 - P_3 = u_2, \quad P_2 - P_4 = u_3,$$

sous la forme

$$\begin{aligned} X_1 &= a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, \\ X_2 &= b_0 u_0 + \ldots, \\ X_3 &= c_0 u_0 + \ldots, \end{aligned}$$

$a_0, \ldots$, étant des constantes.

X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants (sinon la courbe serait une droite); on pourra donc résoudre les trois équations précédentes par rapport à trois des fonctions u : u_1, u_2, u_3, par exemple, et écrire

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \omega_3 X_3 - \lambda u_0, \\ u_2 &= \omega'_1 X_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots - \mu u_0, \\ u_3 &= \omega''_1 X_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots - \nu u_0. \end{aligned}$$

Les fonctions de t : $\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \omega_3 X_3$; $\omega'_1 X_1 + \ldots$; $\omega''_1 X_1 + \ldots$ sont linéairement indépendantes, sinon il y aurait une relation linéaire entre u_0, u_1, u_2, u_3, c'est-à-dire entre P_1, P_2, P_3, P_4, ce que nous savons être impossible. Nous désignerons ces trois fonctions par x_1, x_2, x_3 ; nous aurons ainsi

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 = u_1 + \lambda u_0, \\ x_2 = u_2 + \mu u_0, \\ x_3 = u_3 + \nu u_0. \end{cases}$$

C'est la représentation paramétrique que nous utiliserons ; x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point quelconque de la courbe S ; λ, μ, ν désignent des constantes.

Relations du second degré.

95. Les trois fonctions du second degré : P_1^2, P_3^2, $P_2 P_4$ ont le même poids (nº 12) ; elles sont donc liées par une relation de la forme

$$\alpha_1 P_1^2 + \beta_1 P_3^2 + \gamma_1 P_2 P_4 = 0;$$

α_1, ... étant des constantes.

Changeons t en $t + \frac{\omega}{2}$; il vient

$$\alpha_1 P_3^2 + \beta_1 P_1^2 + \gamma_1 P_4 P_2 = 0,$$

d'où

$$(\alpha_1 - \beta_1)(P_1^2 - P_3^2) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0.$$

On a, par suite, entre les trois fonctions considérées la relation

$$P_1^2 + P_3^2 = 2 a P_2 P_4;$$

et, changeant t en $t + \frac{\omega}{4}$, il vient

$$P_2^2 + P_4^2 = 2 a P_1 P_3,$$

a étant une constante. Remplaçant, dans ces relations, les fonctions P par les fonctions u, on a

$$(B)\quad \begin{cases} u_0^2 + u_2^2 = a(u_1^2 - u_3^2), \\ u_1^2 + u_3^2 = a(u_0^2 - u_2^2). \end{cases}$$

96. Cela posé, tirons des équations (A) les valeurs de u_1, u_2, u_3 en fonc-

tion de x_1, x_2, x_3, u_0, et portons-les dans les relations (B). Il vient

$$(C)\left\{\begin{array}{l} u_0^2(1+\mu^2-a\lambda^2+a\nu^2)+2u_0(a\lambda x_1-\mu x_2-a\nu x_3)+x_2^2-ax_1^2-ax_3^2=0, \\ u_0^2(\lambda^2+\nu^2-a+a\mu^2)+2u_0(-\lambda x_1-a\mu x_2-\nu x_3)+x_1^2+ax_2^2+x_3^2=0. \end{array}\right.$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} p &= (a^2+1)\mu^2-(a^2-1)+2a\nu^2, \\ q &= -(a^2+1)\lambda^2+2a \qquad +(a^2-1)\nu^2, \\ r &= -(a^2-1)\lambda^2-2a\mu^2 \quad +(a^2+1). \end{aligned}$$

On trouve, en éliminant u_0^2 entre les équations (C),

$$2u_0(p\lambda x_1+q\mu x_2+r\nu x_3)=px_1^2+qx_2^2+rx_3^2.$$

Il résulte de la première Partie de ce travail que les deux points doubles de S sont à l'intersection de la conique

$$px_1^2+qx_2^2+rx_3^2=0$$

et de la droite

$$\Delta=p\lambda x_1+q\mu x_2+r\nu x_3=0.$$

97. Dans ce qui suit, nous supposerons, pour simplifier les énoncés, que les deux points doubles de S sont les points circulaires à l'infini, communs à tous les cercles du plan; la courbe S sera une *cyclique*.

On a immédiatement les propriétés suivantes (n^{os} 43 *bis*, 47) :

I. *Un cercle coupe une cyclique en quatre points, autres que les points doubles, dont les arguments ont une somme nulle, aux multiples près de* ω, $4\omega'$.

Ce cercle, passant par les points d'intersection de la conique

$$px_1^2+qx_2^2+rx_3^2=0,$$

et de la droite Δ, aura pour équation, dans le système de coordonnées adopté,

$$0=2(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)(p\lambda x_1+q\mu x_2+r\nu x_3)+\alpha_0(px_1^2+qx_2^2+rx_3^2)=0,$$

et les arguments des quatre points, autres que les points doubles, où il coupe la cyclique, vérifieront l'équation

$$\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)+\alpha_3x_3(t)+\alpha_0u_0(t)=0.$$

II. *Quatre points d'une cyclique, dont les arguments ont une somme nulle, sont sur un cercle.*

Les quatre arguments, dont la somme est nulle, vérifieront une équation de la forme (n° 6)

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) + \alpha_0 u_0(t) = 0,$$

et les quatre points correspondants de la cyclique seront sur le cercle

$$2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\Delta + \alpha_0(p x_1^2 + q x_2^2 + r x_3^2) = 0,$$

III. *Une droite coupe une cyclique en quatre points, dont les arguments ont une somme nulle (à des multiples près de* ω, $4\omega'$).

II [1].

Système principaux de conjugaison.

98. Nous dirons que deux points de la cyclique S sont conjugués dans un système principal, si la droite qui les joint coupe la cyclique en deux autres points, conjugués dans le même système. On aura ainsi, en désignant par s la somme des arguments de deux points conjugués dans un système principal

$$2s = h\omega + 4h'\omega',$$

h, h' étant des entiers, et de là résultent pour les s les quatre valeurs

$$0, \quad \frac{\omega}{2}, \quad 2\omega', \quad 2\omega' + \frac{\omega}{2}.$$

Il y a donc quatre systèmes principaux.

99. Théorème. — *Les droites qui joignent deux points d'une cyclique, conjugués dans un système principal, passent par un point fixe.*

Ce théorème est un cas particulier de la proposition démontrée au n° 84; nous allons le prouver directement de la manière suivante :

Soit d'abord le système principal, pour lequel on a $s = 0$, et supposons que la droite $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ passe par les deux points d'argu-

---

[1] Les résultats géométriques de ce paragraphe sont bien connus; la démonstration seule nous semble nouvelle.

ments α et $-\alpha$, conjugués dans ce système, on a

$$a_1 x_1(\alpha) + a_2 x_2(\alpha) + a_3 x_3(\alpha) = 0,$$
$$a_1 x_1(-\alpha) + a_2 x_2(-\alpha) + a_3 x_3(-\alpha) = 0.$$

Or on a identiquement

$$(D)\quad \left\{\begin{array}{l} P_1(-t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2m\frac{i\pi t}{\omega} + m^2 \frac{i\pi\omega'}{\omega}} = P_1(t), \\ \text{et, par suite,} \\ P_2(-t) = P_1\left(-t + \frac{\omega}{4}\right) = P_1\left(t - \frac{\omega}{4}\right) = P_1\left(t + \frac{3\omega}{4}\right) = P_4(t), \\ P_3(-t) = P_1\left(-t + \frac{\omega}{2}\right) = P_1\left(t - \frac{\omega}{2}\right) = P_1\left(t + \frac{\omega}{2}\right) = P_3(t), \\ P_4(-t) = P_1\left(-t + \frac{3\omega}{4}\right) = P_1\left(t - \frac{3\omega}{4}\right) = P_1\left(t + \frac{\omega}{4}\right) = P_2(t); \end{array}\right.$$

d'où l'on tire

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{l} u_0(-t) = u_0(t), \\ u_1(-t) = u_1(t), \\ u_2(-t) = u_2(t), \\ u_3(-t) = -u_3(t). \end{array}\right.$$

D'après cela, l'équation

$$a_1 x_1(-\alpha) + \ldots + a_3 x_3(-\alpha) = 0$$

devient

$$0 = a_1[u_1(\alpha) + \lambda u_0(\alpha)] + a_2[u_2(\alpha) + \mu u_0(\alpha)] + a_3[-u_3(\alpha) + \nu u_0(\alpha)];$$

on a d'ailleurs

$$0 = a_1[u_1(\alpha) + \lambda u_0(\alpha)] + a_2[u_2(\alpha) + \mu u_0(\alpha)] + a_3[u_3(\alpha) + \nu u_0(\alpha)].$$

On en tire, par soustraction,

$$a_3 u_3(\alpha) = 0,$$

ce qui exige, puisque α est quelconque, que l'on ait

$$a_3 = 0.$$

L'équation de la droite considérée est alors de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0;$$

elle passe bien par deux couples de points conjugués dans le système zéro, puisque les fonctions $u_0(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ et, par suite, les fonctions $u_1(t)+\lambda u_0(t)$, $u_2(t)+\mu u_0(t)$, c'est-à-dire $x_1(t)$, $x_2(t)$ sont paires. On voit que cette droite a un point fixe, le point $(x_1=0,\ x_2=0)$.

Par une méthode analogue, on déterminerait, en s'appuyant sur les équations (3) de la première Partie, les points fixes par lesquels passent respectivement les droites joignant deux points de la cyclique, conjugués dans les autres systèmes principaux; on arrive ainsi aux résultats suivants :

Les droites qui joignent deux points d'une cyclique, conjugués dans l'un des quatre systèmes principaux 0, $\frac{\omega}{2}$, $2\omega'$, $2\omega'+\frac{\omega}{2}$, *passent par un point fixe; les points fixes définis ainsi sont :*

Pour le système	0	$x_1=0,\quad x_2=0,$	point	O_1.
»	$\frac{\omega}{2}$	$x_1=0,\quad x_3=0,$	»	O_2.
»	$2\omega'$	$x_2=0,\quad x_3=0,$	»	O_3.
»	$2\omega'+\frac{\omega}{2}$ ...	$x_1=\lambda,\quad x_2=\mu,\quad x_3=\nu,$	»	O_4.

Nous désignerons ces quatre points, O_1, O_2, O_3, O_4, sous le nom de *pôles principaux.*

Ainsi, les coordonnées des points de la courbe S étant mises sous la forme (A), trois des pôles principaux sont les sommets du triangle de référence.

100. *Un pôle principal est à l'intersection des hauteurs du triangle formé par les trois autres.*

Nous avons vu, en effet, que les points doubles de la courbe S sont à l'intersection de la droite

$$p\lambda x_1+q\mu x_2+r\nu x_3=0$$

et de la conique

$$px_1^2+qx_2^2+rx_3^2=0.$$

Le triangle de référence est autopolaire par rapport à cette conique, et la droite des points doubles de S est, par rapport à cette même conique, la polaire du point (λ,μ,ν), c'est-à-dire du point O_4.

Ainsi, le point O_4 est le centre d'un cercle, par rapport auquel le triangle $O_1O_2O_3$ est autopolaire; il est donc à l'intersection des hauteurs de ce triangle. C. Q. F. D.

101. *La cyclique est anallagmatique par rapport à ses quatre pôles principaux.*

Soient, en effet, quatre points quelconques, d'une cyclique A et B, A′ et B′, conjugués deux à deux dans un système principal. La somme des arguments de ces quatre points est nulle; ils sont donc sur un cercle, et l'on a, puisque les droites AB, A′B′ concourent en un des pôles principaux O,

$$\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OA'}.\overline{OB'}.$$

Par suite, la cyclique est sa propre transformée, par rayons vecteurs réciproques, quand on prend pour pôle d'inversion un pôle principal, et pour puissance d'inversion le produit des distances de ce pôle à deux points de la cyclique, conjugués dans le système principal correspondant.

On appelle *cercle directeur* un cercle décrit d'un pôle principal comme centre, avec un rayon égal à la racine carrée de la puissance d'inversion correspondante. Il y a donc quatre cercles directeurs.

102. *Les cercles directeurs se coupent à angle droit.*

Soient, en effet, sur la cyclique les quatre points d'arguments

$$\theta, \quad -\theta, \quad -\theta + \frac{\omega}{2}, \quad \theta - \frac{\omega}{2},$$

θ étant quelconque.

Les droites $(\theta, -\theta)$, $\left(-\theta + \frac{\omega}{2}, \theta - \frac{\omega}{2}\right)$ passent par O_1; de même, les droites $\left(\theta, -\theta + \frac{\omega}{2}\right)$, $\left(-\theta, \theta - \frac{\omega}{2}\right)$ passent par O_2. Les quatre points considérés sont d'ailleurs sur un cercle, et les puissances des pôles O_1 et O_2, par rapport à ce cercle, sont respectivement les carrés des cercles directeurs correspondants. Or, d'après la disposition même des quatre points, on voit que la polaire du point O_1, par rapport à ce cercle, passe par O_2; et, par suite, on aura, en désignant par a_3 la distance O_1O_2, par k_1 et k_2 les rayons des deux cercles directeurs,

$$k_1^2 + k_2^2 = a_3^2.$$

Les cercles directeurs de centres O_1 et O_2 se coupent donc à angle droit.

103. *Remarque.* — Les points O_1, O_2, O_3, O_4 étant donnés, les cercles directeurs sont déterminés.

104. *Le triangle, formé par trois pôles principaux d'une cyclique, est autopolaire par rapport au cercle directeur qui a le quatrième pôle principal pour centre.*

Car on a, dans le triangle $O_1 O_2 O_3$, en désignant par P le point de rencontre des droites $O_2 O_4$ et $O_1 O_3$,

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 . \overline{O_1 P},$$

d'où

$$k_1^2 = a_2 \times O_1 P.$$

La droite $O_2 O_4$ est donc la polaire du point O_3, par rapport au cercle directeur du centre O_1. On démontrerait, de même, que la droite $O_3 O_4$ est la polaire de O_2.

105. Théorème. — *Le conjugué harmonique d'un pôle principal* O *par rapport à deux points d'une cyclique conjugués dans le système principal correspondant est une conique.*

Soit, par exemple, le pôle O_4; on démontre aisément les relations

$$-\frac{u_0\left(2\omega' + \frac{\omega}{2} - t\right)}{u_0(t)} = \frac{u_1\left(2\omega' + \frac{\omega}{2} - t\right)}{u_1(t)} = \frac{u_2\left(2\omega' + \frac{\omega}{2} - t\right)}{u_2(t)} = \frac{u_3\left(2\omega' + \frac{\omega}{2} - t\right)}{u_3(t)},$$

et, par suite, deux points de la cyclique, conjugués dans le système $2\omega' + \frac{\omega}{2}$, ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(\theta) + \lambda u_0(\theta), & x'_1 &= u_1(\theta) - \lambda u_0(\theta), \\ x_2 &= u_2(\theta) + \mu u_0(\theta), & x'_2 &= u_2(\theta) - \mu u_0(\theta), \\ x_3 &= u_3(\theta) + \nu u_0(\theta), & x'_3 &= u_3(\theta) - \nu u_0(\theta). \end{aligned}$$

Le conjugué harmonique du point λ, μ, ν, par rapport à ces deux points, a pour coordonnées

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(\theta), \\ X_2 &= u_2(\theta), \\ X_3 &= u_3(\theta). \end{aligned}$$

Or on tire des relations (B), en éliminant u_0^2,

$$2au_2^2 + u_1^2(1 - a^2) + u_3^2(1 + a^2) = 0.$$

Le point (X_1, X_2, X_3) décrit donc la conique

$$(1 - a^2)X_1^2 + 2aX_2^2 + (1 + a^2)X_3^2 = 0.$$

Nous l'appellerons la *conique harmonique* correspondant au pôle principal O_4. Le triangle $O_1 O_2 O_3$ est autopolaire par rapport à cette conique.

III.

Cercles doublement tangents à une cyclique.

106. Soit un cercle, bitangent à la cyclique S en deux points, d'arguments θ et θ'. On a

$$2(\theta + \theta') = h\omega + 4h'\omega',$$

et, par suite :

Les deux points de contact d'un cercle bitangent à la cyclique sont conjugués dans un des systèmes principaux.

Il y a ainsi quatre systèmes de cercles bitangents, et l'équation générale des cercles d'un système sera de la forme (nº 61)

$$0 = \omega^2 A + 2\omega B + C,$$

ω étant une constante arbitraire.

Il en résulte aisément que :

Les centres des cercles bitangents d'un même système décrivent une conique.

Les quatre coniques ainsi obtenues se nomment *déférentes;* chacune d'elles correspond à un système principal et à un pôle principal.

La puissance d'un pôle principal par rapport aux cercles bitangents du système correspondant est évidemment égale au carré du cercle directeur qui a ce pôle pour centre; par suite :

Il y a dans un système de cercles bitangents quatre cercles de rayon nul; leurs centres sont à l'intersection de la déférente et du cercle directeur correspondant au système.

Ces quatre points sont appelés *foyers*. Une cyclique a ainsi seize foyers. Tous ces résultats sont bien connus, et nous n'y insisterons pas davantage.

107. *La conique harmonique et la conique déférente correspondant à un pôle principal sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport au cercle directeur qui a ce pôle pour centre.*

Soient, en effet, A et B deux points de la cyclique conjugués dans le système principal correspondant au pôle O considéré; il est géométriquement évident que la déférente est l'enveloppe des perpendiculaires élevées aux segments AB en leurs milieux. Soient M le conjugué harmonique de O par rapport au segment AB, ρ_1 la distance OA, ρ_2 la distance OB, ρ la distance OM. On a

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \quad \text{ou} \quad \rho\,\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_1\rho_2 = k^2,$$

k étant le rayon du cercle directeur du centre O. Par suite :

Le point M est le pôle par rapport à ce cercle directeur de la droite élevée perpendiculairement au segment AB en son milieu. C. Q. F. D.

Corollaire. — Les quatre points de contact d'un cercle directeur avec les tangentes communes à ce cercle et à la conique harmonique correspondante sont des foyers de la cyclique.

108. *Par un pôle principal passent deux tangentes doubles de la cyclique.*

Ces droites sont les tangentes menées du pôle principal à la conique harmonique correspondante. Les quatre points de contact de ces deux droites et de la cyclique étant deux à deux conjugués dans un même système principal sont sur un cercle. On trouve ainsi huit tangentes doubles. Il n'existe pas de tangente double ne passant pas par un pôle principal; car, si θ et θ' sont les arguments des deux points de contact d'une tangente double, on a

$$2(\theta + \theta') = h\omega + 4h'\omega',$$

et, par suite, ces deux points sont conjugués dans un système principal.

109. *Remarque.* — Le cercle directeur de centre O_4 est un cercle décrit de O_4 comme centre, et par rapport auquel le triangle $O_1O_2O_3$ est autopolaire; par conséquent (n° 100), ce cercle a pour équation

$$(\alpha) \qquad px_1^2 + qx_2^2 + rx_3^2 = 0.$$

La conique harmonique qui correspond au point O_4 a pour équation

$$(1 - a^2)x_1^2 + 2ax_2^2 + (1 + a^2)x_3^2 = 0.$$

La conique déférente correspondant au même point est, par rapport au cercle directeur, la polaire réciproque de la conique harmonique; on a ainsi, pour son équation,

$$(\beta) \qquad \frac{p^2 x_1^2}{1-a^2} + \frac{q^2 x_2^2}{2a} + \frac{r^2 x_3^2}{1+a^2} = 0.$$

Or on a vu que la cyclique a quatre foyers à l'intersection d'une déférente et d'un cercle directeur correspondants; de la forme même des équations (α) et (β) résulte le théorème suivant :

110. *Dans le quadrilatère formé par les quatre foyers d'une cyclique équidistants d'un pôle principal, les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales coïncident avec les trois autres pôles principaux.*

IV.

Systèmes généraux de conjugaison.

111. Soient deux points A et B de la cyclique, d'arguments θ et $s-\theta$; ces deux points sont, par définition, conjugués dans le système s. Tout cercle qui passe par ces deux points coupe la cyclique en deux nouveaux points, conjugués dans le système $-s$. On en déduit immédiatement ce théorème, de M. Darboux :

Si l'on coupe une cyclique par un cercle quelconque, que par deux des quatre points d'intersection on fasse passer un cercle, et, par les deux autres, un autre cercle, les deux nouveaux cercles couperont la cyclique en quatre points nouveaux, situés sur un cercle.

112. *L'équation générale des cercles qui coupent la cyclique en quatre points, dont deux sont conjugués dans le système donné, s,* s'obtient comme il suit. Les deux autres points d'intersection d'un de ces cercles et de la cyclique étant conjugués dans le système $-s$, l'équation qui donne les arguments des points d'intersection du cercle et de la cyclique sera de la forme (35)

$$f(t) = \psi(t)(\alpha_1\varphi_1' + \alpha_2\varphi_1'')(\beta_1\varphi_2' + \beta_2\varphi_2'') = 0$$

ou, à un facteur constant près,

$$(t) = \psi(t)(\varphi'_1 + \lambda\varphi''_1)(\varphi'_2 + \mu\varphi''_2),$$

λ et μ étant des constantes arbitraires.

Les fonctions $\psi(t)$, $\varphi'_1(t)$, ..., $\varphi''_2(t)$ sont de la forme indiquée au n° 55; les quatre zéros de $\psi(t)$ sont les quatre arguments qui correspondent aux deux points doubles de S.

L'équation générale cherchée sera donc de la forme

$$o = \lambda\mu A + \lambda B + \mu C + D,$$

et, comme elle représente un cercle, quels que soient λ et μ, les courbes $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$ sont des cercles.

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} A(t) &= A[x_1(t), x_2(t), x_3(t)] = \psi(t)\varphi''_1(t)\varphi''_2(t), \\ B(t) &= B[x_1(t), \ldots\ldots\ldots\ldots] = \psi(t)\varphi''_1(t)\varphi'_2(t), \\ C(t) &= C[x_1(t), \ldots\ldots\ldots\ldots] = \psi(t)\varphi'_1(t)\varphi''_2(t), \\ D(t) &= D[x_1(t), \ldots\ldots\ldots\ldots] = \psi(t)\varphi'_1(t)\varphi'_2(t) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$A(t)D(t) - B(t)C(t) = o.$$

On en conclut que le premier membre S de l'équation de la cyclique divise le polynôme du quatrième degré AD — BC; en d'autres termes, on a

$$S = AD - BC.$$

113. On déduit de là l'*équation générale des droites qui joignent deux points conjugués dans le système s* (*ou* — *s*).

Il suffit, en effet, d'exprimer que la courbe (c'est-à-dire le cercle)

$$\lambda\mu A + \lambda B + \mu C + D = o$$

se décompose en deux droites, dont l'une est la droite des points doubles de S. En exprimant cette condition, on obtient évidemment une équation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o,$$

a, b, c, d étant des constantes.

Si l'on porte la valeur de μ tirée de cette relation, dans l'équation générale des cercles passant par deux points conjugués dans le système s, on obtient l'équation

$$o = \lambda^2(aB - bA) + \lambda(cB - dA + aD - bC) + cD - dC$$

et les trois fonctions du second degré

$$aB - bA,\ cB - dA + aD - bC,\ cD - dC$$

seront divisibles par le premier membre Δ, de l'équation de la droite qui joint les points doubles de S.

Désignant respectivement par A', B', C' les quotients de ces trois fonctions par Δ, on aura, pour l'équation générale des droites joignant deux points conjugués dans le système s,

$$o = \lambda^2 A' + \lambda B' + C'.$$

Les arguments des points d'intersection d'une de ces droites avec S vérifieront l'équation

$$(\varphi'_1 + \lambda\varphi''_1)(\varphi'_2 + \mu\varphi''_2) = o,$$

μ étant lié à λ par la relation $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o$.

114. Par conséquent :

L'enveloppe des droites joignant deux points conjugués dans un système donné est une conique.

L'équation de cette conique, le système donné étant le système s, est

$$B'^2 - 4A'C' = o.$$

Or on peut écrire identiquement

$$\Delta^2(B'^2 - 4A'C') = [(aD + dA - cB - bC)]^2 + 4(bc - ad)(AD - BC)$$

ou

$$\Delta^2(B'^2 - 4A'C') = (aD + dA - cB - bC)^2 + 4(bc - ad)S.$$

Cette identité montre que la conique enveloppe touche la cyclique en quatre points, situés sur le cercle

$$aD + dA - cB - bC = o.$$

Ainsi :

115. *Les droites joignant deux points d'une cyclique, conjugués dans un système donné, enveloppent une conique, qui touche la cyclique en quatre points, situés sur un cercle.*

Nous dirons qu'une pareille conique est *inscrite* dans la cyclique, et nous appellerons *cercle de contact* le cercle qui passe par ses quatre points de contact avec la cyclique.

Remarque. — Ces résultats sont un cas particulier de ceux qu'on a établis au n° 80.

A chaque valeur de s correspond ainsi une conique inscrite et un cercle de contact; nous allons démontrer que :

116. *Tous les cercles de contact ont même centre.*

Supposons pour un instant que les points doubles de S soient deux points quelconques E_1 et E_2 du plan.

On peut considérer le système formé par une conique inscrite à S et par la droite Δ des points doubles, comme une courbe adjointe du troisième degré, tangente à S en quatre points, situés sur une courbe adjointe du second degré, que nous nommerons *conique de contact*. Par suite, si $T=0$, $T'=0$ sont les équations des tangentes à S au point double E_1; si

$$\Delta = T + a_\delta T' = 0, \quad T + a_1 T' = 0$$

sont respectivement les équations de la droite des points doubles et de la tangente en E_1 à la conique de contact, on aura (n° 41)

$$a_1^2 = a_\delta^2,$$

puisqu'ici $a_{11} = a_\delta$, d'où

$$a_1 = \pm a_\delta.$$

La solution $a_1 = a_\delta$ est à rejeter, car elle exprime que la conique de contact touche Δ au point E_1, et, par suite, puisqu'elle passe par E_2, se décompose en deux droites, dont l'une est Δ, et dont l'autre est une droite D du plan; la conique inscrite correspondante serait alors la droite D comptée deux fois.

Pour obtenir une conique inscrite proprement dite, on doit donc prendre le signe $-$; on a ainsi $a_1 = -a_\delta$.

De là cette conséquence :

Les coniques de contact ont en un quelconque des points doubles de S *une tangente commune; cette tangente est conjuguée harmonique de la droite des points doubles par rapport aux deux tangentes de* S, *au point double considéré.*

Dans le cas où S est une cyclique, on voit ainsi que tous les cercles de contact ont même centre.

On appelle *foyers singuliers* d'une cyclique les quatre points d'intersection des tangentes à cette courbe en un de ses points doubles avec les tangentes en l'autre point double; ces quatre points sont évidemment situés deux à deux sur deux droites rectangulaires, se coupant en leur milieu.

Il résulte de ce qui précède que :

117. *Le centre commun des cercles de contact coïncide avec le point de rencontre des deux droites rectangulaires qui joignent deux à deux les foyers singuliers de la cyclique.*

V.

Propriétés du centre.

118. Le centre commun des cercles de contact jouit de propriétés importantes; nous l'appellerons dorénavant *centre de la cyclique*. Les propositions suivantes justifieront cette dénomination.

Soient deux droites quelconques, joignant respectivement deux points conjugués dans le système s,

$$\lambda^2 A' + \lambda B' + C' = 0,$$
$$\lambda'^2 A' + \lambda' B' + C' = 0.$$

Les équations aux arguments des points d'intersection de ces droites avec la cyclique sont respectivement

$$(\varphi'_1 + \lambda \varphi''_1)(\varphi'_2 + \mu \varphi''_2) = 0,$$
$$(\varphi'_1 + \lambda' \varphi''_1)(\varphi'_2 + \mu' \varphi''_2) = 0,$$

μ et μ' étant liés à λ et λ' par les relations

$$0 = a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d, \quad 0 = a\lambda'\mu' + b\lambda' + c\mu' + d.$$

Les huit points où les deux droites considérées coupent la cyclique forment quatre couples; deux de ces couples sont conjugués dans le système s, les deux autres le sont dans le système $-s$. Il en résulte que ces huit points sont quatre à quatre sur deux cercles, et les équations aux arguments des points d'intersection avec S de ces cercles sont respectivement

$$\mathrm{o} = (\varphi'_1 + \lambda\,\varphi''_1)(\varphi'_2 + \mu'\varphi''_2),$$
$$\mathrm{o} = (\varphi'_1 + \lambda'\varphi''_1)(\varphi'_2 + \mu\,\varphi''_2).$$

Par suite, on a, pour les équations de ces cercles,

$$\mathrm{o} = \lambda\,\mu' \mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B} + \mu'\mathrm{C} + \mathrm{D},$$
$$\mathrm{o} = \lambda'\mu\,\mathrm{A} + \lambda'\mathrm{B} + \mu\,\mathrm{C} + \mathrm{D}$$

ou, en tenant compte des relations qui lient λ et μ, λ' et μ',

$$\mathrm{o} = \lambda\lambda'(a\mathrm{B} - b\mathrm{A}) + \lambda\,(c\mathrm{B} - d\mathrm{A}) + \lambda'(a\mathrm{D} - b\mathrm{C}) + c\mathrm{D} - d\mathrm{C},$$
$$\mathrm{o} = \lambda\lambda'(a\mathrm{B} - b\mathrm{A}) + \lambda'(c\mathrm{B} - d\mathrm{A}) + \lambda\,(a\mathrm{D} - b\mathrm{C}) + c\mathrm{D} - d\mathrm{C},$$

ce qu'on peut écrire (n° 113)

$$\mathrm{o} = \frac{\lambda' - \lambda}{2}(a\mathrm{D} + d\mathrm{A} - c\mathrm{B} - b\mathrm{C}) + \lambda\lambda'\mathrm{A}' + \frac{\lambda + \lambda'}{2}\mathrm{B}' + \mathrm{C}',$$
$$\mathrm{o} = \frac{\lambda - \lambda'}{2}(a\mathrm{D} + d\mathrm{A} - c\mathrm{B} - b\mathrm{C}) + \lambda\lambda'\mathrm{A}' + \frac{\lambda + \lambda'}{2}\mathrm{B}' + \mathrm{C}'.$$

Si l'on remarque que le cercle de contact de la conique $\mathrm{B}'^2 - 4\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ a pour équation (n° 114)

$$a\mathrm{D} + d\mathrm{A} - c\mathrm{B} - b\mathrm{C} = \mathrm{o},$$

et que l'équation de la droite qui joint les deux points de contact des droites considérées avec cette conique est

$$\lambda\lambda'\mathrm{A}' + \frac{\lambda + \lambda'}{2}\mathrm{B}' + \mathrm{C}' = \mathrm{o},$$

on arrive, par des considérations simples de Géométrie analytique, aux résultats suivants :

119. Soient

A et B deux points d'une cyclique, conjugués dans un système donné s;
a et b les points nouveaux où la droite AB coupe la cyclique;

A′ et B′, a' et b' deux couples de points analogues, situés sur une seconde droite;

H et H′ les points où les droites AB et A′B′ touchent la conique C, enveloppe des droites joignant deux points conjugués dans le système s;

M le milieu de AB;

m le milieu de ab.

I. *Les points* A, B, a', b' *sont sur un cercle* Σ;
Les points A′, B′, a, b *sont sur un cercle* Σ′.

II. *Les cercles* Σ *et* Σ′ *se coupent en deux points, situés sur le cercle de contact de la conique* C, *et sur la droite* HH′.

III. *Le centre du cercle de contact est le milieu de la ligne des centres des cercles* Σ *et* Σ′.

IV. *Le point* H *est le centre de l'involution déterminée sur la droite* AB *par les segments* AB, ab; *on a ainsi*

$$HA.HB = Ha.Hb,$$

et la valeur commune de ces deux produits est égale à la puissance du point H *par rapport au cercle de contact.*

120. De la troisième de ces propositions, on déduit une conséquence intéressante.

Le centre du cercle Σ est sur la perpendiculaire, élevée à la droite AB en son milieu M; de même le centre du cercle Σ′ est sur la perpendiculaire élevée au milieu m de ab. D'après le théorème III ci-dessus, le centre du cercle de contact est au milieu de la ligne des centres des cercles Σ et Σ′; il en résulte que la perpendiculaire abaissée du centre du cercle de contact sur AB tombe au milieu des points M et m.

En d'autres termes :

121. *Le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la cyclique sur une droite quelconque est le centre des moyennes distances des quatre points où cette droite coupe la cyclique.*

122. *Corollaire I.* — Les perpendiculaires élevées aux huit tangentes doubles d'une cyclique, au point milieu des deux points de contact, concourent au centre de la cyclique.

123. *Corollaire II.* — Si l'on connaît le centre d'une cyclique, et trois points de cette courbe, situés sur une droite D, le quatrième point où cette droite coupe la cyclique est déterminé.

124. *Corollaire III.* — Le centre de la cyclique est le centre des quatre coniques déférentes.

Soient, en effet, A et B deux points conjugués dans un système principal; a et b les deux points conjugués dans le même système, où la droite AB coupe la cyclique; M le milieu du segment AB; m celui du segment ab.

D'après ce qui a été dit au n° 107, les deux droites élevées perpendiculairement à AB aux points M et m touchent la conique déférente correspondant au système principal considéré; par suite, le centre de cette conique est sur la droite P, élevée perpendiculairement à AB au milieu du segment Mm, et les droites telles que P passent ainsi par un point fixe, qui est le centre de la déferente. Or nous savons, d'après le théorème précédent, que la droite P passe par le centre de la cyclique; il en résulte, puisque la droite P a une direction variable avec la direction de la droite AB, que le centre de la déférente considérée coïncide avec le centre de la cyclique.

VI.

Coniques inscrites.

125. L'équation générale des coniques inscrites peut se mettre sous une forme simple. Si l'on suppose, en effet, que le rayon du cercle de contact augmente indéfiniment, ce cercle aura pour limite la droite de l'infini comptée deux fois, et la conique inscrite correspondante aura la même limite. En d'autres termes, la courbe $\Delta^2 = 0$ est une des coniques inscrites à S.

Or l'équation générale des coniques inscrites est de la forme

$$M\lambda^2 + 2N\lambda + P = 0,$$

λ étant arbitraire (n° 64), et $M = 0$ étant évidemment l'équation d'une quelconque d'entre elles. Si l'on fait $M = \Delta^2$, on aura, en coordonnées cartésiennes, pour l'équation générale des coniques inscrites

$$(E') \qquad \lambda^2 + 2\lambda C + G = 0.$$

La conique $C = 0$ est évidemment le cercle de contact de la conique inscrite $G = 0$.

126. On en déduit immédiatement les résultats suivants :

Les coniques inscrites à une cyclique ont mêmes directions d'axes. Le lieu des centres des coniques inscrites à une cyclique est une hyperbole équilatère, passant par le centre de la cyclique. Les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux axes des coniques inscrites.

Nous appellerons *directions axiales* de la cyclique les directions axiales des coniques inscrites. Parmi les coniques inscrites, figure évidemment le couple de tangentes doubles issues d'un pôle principal; par conséquent, la conique, lieu des centres, passe par les quatre pôles principaux.

Nous appellerons cette conique, qui passe par le centre et les pôles principaux de la cyclique, *conique principale*.

VII.

Cycliques homofocales.

127. L'étude des cycliques homofocales est liée intimement à celle des points conjugués. Le théorème suivant est dans ce sens fondamental :

Le lieu des centres des cercles de rayon nul passant par deux points d'une cyclique S, *conjugués dans un système donné s, est une cyclique* S', *homofocale à* S.

1° Le lieu est une cyclique. En effet, les cercles passant par deux points conjugués dans le système *s* ont pour équation générale (n° 112)

$$\lambda\mu A + \lambda B + \mu C + D = 0,$$

λ et μ étant des constantes arbitraires, A, B, C, D les premiers membres des équations de quatre cercles. Soit, en coordonnées cartésiennes,

$$\begin{aligned}
A &= a(x^2+y^2) + 2(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \gamma_1,\\
B &= b(x^2+y^2) + 2(\alpha_2 x + \beta_2 y) + \gamma_2,\\
C &= c\,(x^2+y^2) + 2(\alpha_3 x + \beta_3 y) + \gamma_3,\\
D &= d(x^2+y^2) + 2(\alpha_2 x + \beta_4 y) + \gamma_4.
\end{aligned}$$

Le cercle $\lambda\mu A + \lambda B + \mu C + D = 0$ sera de rayon nul si les équations

$$\begin{aligned}
&\lambda\mu[ax + \alpha_1] + \lambda[bx + \alpha_2] + \mu(cx + \alpha_3) + dx + \alpha_4 = 0,\\
&\lambda\mu[ay + \beta_1] + \lambda[by + \beta_2] + \mu(cy + \beta_3) + dy + \beta_4 = 0,\\
&\lambda\mu[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1] + \lambda[\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2] + \mu(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3) + \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 = 0
\end{aligned}$$

sont compatibles, et le lieu des centres des cercles de rayon nul passant par deux points conjugués s'obtiendra en éliminant λ et μ entre ces trois équations.

On trouve, en les résolvant par rapport à $\lambda\mu$, λ et μ,

$$\lambda\mu = \frac{P}{Q}, \quad \lambda = \frac{R}{Q}, \quad \mu = \frac{T}{Q},$$

P, Q, T, R étant les premiers membres des équations de quatre cercles. Le lieu cherché a pour équation

$$PQ = RT;$$

c'est donc bien une cyclique S'.

2° Cette cyclique est homofocale à S.

Revenons, pour plus de clarté dans le langage, au cas où les points doubles de S sont deux points quelconques E_1 et E_2 du plan; et soient e_1, e'_1; e_2, e'_2 les couples d'arguments qui leur correspondent respectivement. On a $e_1 + e'_1 + e_2 + e'_2 = 0$ (n° 43 *bis*). D'après ce qui précède, la droite qui joint E_1 à un point quelconque A de la courbe S, et d'argument θ, et celle qui joint E_2 au point B d'argument $s - \theta$, se coupent sur une courbe du quatrième degré, S', dont E_1 et E_2 sont des points doubles. La droite E_1A coupe S en un quatrième point d'argument $-(e'_1 + e_1 + \theta)$; de même, la droite E_2B coupe S en un quatrième point d'argument $-(e'_2 + e_2 + s - \theta)$, et l'on voit que la somme des arguments de ces deux points est $-s$. En d'autres termes, la droite qui joint E_1 à un point quelconque de S, d'argument θ' et celle qui joint E_2 au point d'argument $-s-\theta'$ se coupent également sur la courbe S'.

Cela posé, étant donnée une droite quelconque issue de E_1 et coupant S au point A d'argument θ, on obtiendra les deux points de la courbe S' (autres que E_1) situés sur cette droite en prenant son intersection avec la droite qui joint E_2 au point d'argument $s - \theta$ et celle qui joint E_2 au point d'argument $-s-\theta$. Si ces deux dernières droites se confondent, la droite E_1A sera tangente à S'. Il faut, pour cela, que les points d'arguments $s - \theta$, $-s - \theta$ et le point E_2 soient en ligne droite, c'est-à-dire que l'on ait

$$e_2 + e'_2 + s - \theta - s - \theta = 0$$

ou

$$2\theta = e_2 + e'_2.$$

En ce cas, le quatrième point où la droite E_1A coupe S, et qui a pour argument $-(e_1 + e'_1 + \theta)$, c'est-à-dire $e_2 + e'_2 - \theta$, coïncidera avec le point d'argument θ, et la droite E_1A sera tangente à la courbe S en ce point.

Par conséquent :

Les tangentes menées aux courbes S *et* S′, *par les points* E_1 *et* E_2, *sont les mêmes.*

En d'autres termes :

Les cycliques S *et* S′ *sont homofocales.*

128. Il résulte de là que les huit points de la cyclique S, dont les arguments sont

$$\frac{s}{2},\ -\frac{s}{2},\ \frac{s}{2}+\frac{\omega}{2},\ -\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2},\ \frac{s}{2}+2\omega',\ -\frac{s}{2}+2\omega';\ \frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}+2\omega';\ -\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}+2\omega',$$

sont situés sur la cyclique S′; ces points sont, en effet, conjugués à eux-mêmes dans le système s ou dans le système $-s$.

Les deux cycliques ne se coupant qu'en huit points, à distance finie, on a ainsi les arguments de tous leurs points d'intersection. Ils sont de la forme

$$\pm\frac{s}{2} + h\,\frac{\omega}{2} + 2h'\omega' \quad (h, h' = 0, 1).$$

129. *Remarque.* — Nous dirons désormais que les deux systèmes de conjugaison s et $-s$ sont complémentaires.

130. *Les cycliques homofocales ont mêmes pôles principaux et mêmes cercles directeurs.*

Ce théorème résulte directement de ce qui a été dit au nº 106.

131. D'après ce qui précède, les huit points d'intersection de deux cycliques homofocales, situés à distance finie, ont pour argument sur l'une,

S, de ces cycliques, huit quantités de la forme

$$\pm \frac{s}{2} + \frac{h\omega}{2} + 2h'\omega' :$$

la tangente à S en un de ces points joint donc sur cette courbe deux points conjugués dans le système s, ou le système complémentaire, et, par suite :

Les huit tangentes menées à une cyclique en ses points d'intersection avec une cyclique homofocale touchent une conique inscrite dans la première cyclique.

132. La définition donnée plus haut d'une cyclique S′, homofocale à S, peut se traduire ainsi :

Soient A *et* B *deux points d'une cyclique* S, *conjugués dans un système donné,* s, *ou dans le système complémentaire. Les points* A_1 *et* B_1 *situés sur la perpendiculaire élevée au segment* AB *en son milieu* M, *et tels que*

$$MA_1 = MB_1 = MA\sqrt{-1},$$

sont sur la cyclique S′.

Car ces deux points sont bien les centres des deux cercles de rayon nul qui passent par A et B.

De là résulte la propriété connue :

Les cycliques homofocales se coupent à angle droit.

Soient, en effet, sur la cyclique S, deux points A et B, d'arguments $\frac{s}{2} + \varepsilon$ et $\frac{s}{2} - \varepsilon$. La quantité ε étant très petite, ces deux points sont voisins; pour $\varepsilon = 0$, ils se confondent en un des points d'intersection A_0 des cycliques S et S′, et la droite AB a pour limite la tangente en A_0 à la cyclique S.

D'après la construction indiquée plus haut, les points A_1 et B_1 qui correspondent sur la cyclique S′ aux points A et B sont voisins, et la droite A_1B_1 a pour limite la tangente en A_0 à la cyclique S′. Or les droites A_1B_1 et AB restent perpendiculaires; il en résulte que les deux cycliques se coupent à angle droit au point A_0. C. Q. F. D.

133. Des deux théorèmes précédents on déduit le suivant :

Les huit normales menées à une cyclique en ses points d'intersection avec une cyclique homofocale touchent une conique inscrite dans la deuxième cyclique.

134. *Les huit points d'intersection de deux cycliques homofocales sont sur une cubique circulaire, qui passe par les sommets, les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère formé par les quatre pôles principaux des cycliques.*

Tout d'abord, ces huit points sont bien sur une cubique circulaire, car la somme de leurs arguments $\pm \frac{s}{2} + \frac{h}{2}\omega + 2h'\omega'$ sur la cyclique S est nulle (nº 47), à des multiples près de ω, $4\omega'$.

Remarquons maintenant que les quatre arguments $\frac{s}{2}$, $-\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}$, $-\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}$ ont une somme nulle (à des multiples près de ω, $4\omega'$), et qu'ils vérifient, par suite, une équation de la forme

$$a_0 u_0(t) + a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + a_3 u_3(t) = 0.$$

Or les fonctions $u_0(t), u_1(t), u_2(t)$ sont paires, la fonction $u_3(t)$ est impaire, éq. (E), nº 99; il en résulte que la constante a_3 est nulle.

De même, les fonctions u_0, u_1, u_3 ne changent pas quand on y remplace t par $\frac{\omega}{2} - t$, la fonction u_2 change de signe, et l'on a $a_2 = 0$.

L'équation est donc de la forme

$$a_0 u_0(t) + a_1 u_1(t) = 0.$$

Les quantités $\frac{s}{2} + 2\omega'$, $-\frac{s}{2} + 2\omega'$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2} + 2\omega'$, $-\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2} + 2\omega'$ vérifient par suite l'équation

$$a_0 u_0(t - 2\omega') + a_1 u_1(t - 2\omega'),$$

c'est-à-dire, à un facteur exponentiel près,

$$a_0 u_0(t) - a_1 u_1(t) = 0.$$

Les arguments des huit points d'intersection de la cyclique S et d'une cyclique homofocale S′ vérifient donc la relation

$$(a_0 u_0 + a_1 u_1)(a_0 u_0 - a_1 u_1) = a_0^2 u_0^2 - a_1^2 u_1^2 = 0.$$

Le rapport $\frac{a_1}{a_0}$ varie avec s, c'est-à-dire avec la cyclique homofocale S′ considérée.

Les huit points d'intersection de S et de S′ sont donc situés sur la cubique circulaire, dont l'équation est

$$a_0^2 U_0 - a_1^2 U_1 = 0,$$

en désignant par $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ les équations des cubiques circulaires qui coupent respectivement S aux points dont les arguments vérifient les relations

$$u_0^2(t) = 0, \quad u_1^2(t) = 0.$$

Les huit points d'intersection de deux cycliques homofocales sont donc sur une cubique circulaire, passant par sept points fixes à distance finie.

Il reste à déterminer ces sept points.

Or nous avons trouvé (n° 96)

$$p x_1^2(t) + q x_2^2(t) + r x_3^2(t) = 2 u_0(t)\,\Delta(t).$$

Il en résulte que la cubique, dont l'équation est

$$x_1[\lambda(p x_1^2 + q x_2^2 + r x_3^2) - x_1(p\lambda x_1 + q\mu x_2 + r\nu x_3)] = 0,$$

coupe S aux points doubles et en huit autres points, dont les arguments vérifient l'équation

$$0 = x_1(t)[2\lambda\, u_0(t) - x_1(t)] \quad \text{ou} \quad (u_1 + \lambda u_0)(u_1 - \lambda u_0) = u_1^2 - \lambda^2 u_0^2 = 0.$$

Cette cubique fait donc partie du faisceau (U_0, U_1); son équation est

$$U_1 - \lambda^2 U_0 = 0;$$

on vérifie aisément qu'elle passe par les sept points

$$(x_2 = 0, x_1 = 0), \ (x_3 = 0, x_1 = 0), \ (x_2 = 0, x_3 = 0), \ (x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = \nu),$$

c'est-à-dire les pôles principaux de S, et

$$(x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = 0), \ (x_1 = \lambda, x_2 = 0, x_3 = \mu), \ (x_1 = 0, x_2 = \mu, x_3 = \nu),$$

c'est-à-dire les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère formé par les pôles principaux.

D'un autre côté, u_0^2, u_1^2, u_2^2 sont liés par une relation linéaire (n° 95); si donc $U_2 = 0$ est l'équation de la cubique circulaire qui coupe S aux points dont les arguments vérifient la relation $u_2^2(t) = 0$, le faisceau de cubiques (U_0, U_2) est identique au faisceau (U_0, U_1) : or on trouve, comme plus haut, que la cubique $\mu^2 U_0 - U_2 = 0$ a pour équation

$$x_2[\mu(px_1^2 + qx_2^2 + rx_3^2) - x_2(p\lambda x_1 + q\mu x_2 + r\nu x_3)] = 0,$$

et l'on vérifie qu'elle passe par les sept points mentionnés plus haut.

Toutes les cubiques du faisceau $a_0^2 U_0 - a_1^2 U_1 = 0$ passent donc par ces points. C. Q. F. D.

VIII.

Systèmes paraboliques de conjugaison.

135. Soient e_1, e'_1 ; e_2, e'_2 les couples d'arguments qui correspondent respectivement aux deux points doubles E_1 et E_2 d'une courbe du quatrième degré S; considérons sur cette courbe deux points conjugués dans le système $e_1 + e_2$, ou dans le système complémentaire $-(e_1 + e_2)$, c'est-à-dire $e'_1 + e'_2$. La droite qui les joint touche une conique inscrite dans S, et, comme la droite E_1E_2 joint le point d'argument e_1 au point d'argument e_2, cette conique touche E_1E_2; dans le cas où S est une cyclique, la conique est donc une parabole.

De même, les droites qui joignent deux points de la cyclique S conjugués dans le système $e_1 + e'_2$, ou dans le système complémentaire $e'_1 + e_2$, enveloppent une parabole.

Nous appellerons *systèmes paraboliques de conjugaison* les systèmes $e_1 + e_2$, $e_1 + e'_2$ et les systèmes complémentaires.

136. *Remarque.* — L'équation générale des coniques inscrites dans une cyclique

$$G + 2\lambda C + \lambda^2 = 0$$

montre que, parmi ces coniques, il n'y a que deux paraboles, et que ces deux courbes ont leurs axes rectangulaires et parallèles respectivement aux directions axiales de la cyclique.

137. Nous avons rappelé plus haut la définition des foyers singuliers d'une cyclique. Dans ce qui suit, nous désignerons par

Foyer singulier	F	le point de rencontre des tangentes aux branches	e_1	et	e_2,
»	F′	»	e'_1	et	e'_2,
»	F_1	»	e_1	et	e'_2,
»	F'_1	»	e'_1	et	e_2.

Les foyers F et F′, F_1 et F'_1 sont situés sur deux droites rectangulaires, se coupant au centre de la cyclique, en leurs milieux; on a $F_1F'_1 = FF'\sqrt{-1}$. Nous dirons que les foyers F et F′, F_1 et F'_1 sont conjugués.

138. *Tout cercle décrit d'un foyer singulier d'une cyclique comme centre coupe cette courbe en deux points à distance finie, et la ligne qui joint ces deux points enveloppe une parabole inscrite dans la cyclique.*

A deux foyers singuliers conjugués correspond la même parabole.

Soit, en effet, un cercle décrit de F comme centre; ce cercle est tangent aux points E_1 et E_2 aux branches e_1 et e_2 de la cyclique; il coupe donc cette courbe, à distance finie, en deux points dont les arguments ont pour somme $-(e_1+e_2)$, c'est-à-dire $e'_1+e'_2$.

De même, les deux points à distance finie où la cyclique est coupée par des cercles ayant leur centre en F′, F_1, F'_1 sont respectivement conjugués dans les systèmes e_1+e_2, e'_1+e_2, $e_1+e'_2$. C. Q. F. D.

139. Reprenons l'équation des coniques inscrites dans une cyclique

$$G + 2\lambda C + \lambda^2 = 0,$$

et choisissons, comme axes de coordonnées cartésiennes, les axes de la conique $G = 0$. L'équation précédente devient

$$(\mathrm{H}) \qquad 0 = l^2x^2 + m^2y^2 - l^2m^2 + 2\lambda C + \lambda^2,$$

étant posé

$$C = a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + d.$$

Considérons les cercles qui sont bitangents à l'une des coniques représentées par cette équation, et qui ont leur centre sur l'axe de cette conique parallèle à l'axe des x. L'équation de l'un quelconque U de ces cercles sera, λ' désignant une constante arbitraire et n^2 la quantité $l^2 - m^2$,

$$0 = U = l^2x^2 + m^2y^2 - l^2m^2 + 2\lambda C + \lambda^2 - n^2(x+\lambda')^2.$$

La cyclique S, enveloppe des coniques représentées par l'équation (H), a pour équation

$$0 = S = C^2 - l^2x^2 - m^2y^2 + l^2m^2.$$

On a donc identiquement

$$S = C^2 - U + 2\lambda C + \lambda^2 - n^2(x+\lambda')^2,$$

ou

$$S = [C + \lambda - n(x + \lambda')][C + \lambda + n(x + \lambda')] - U.$$

Cette identité donne aisément les conséquences suivantes :

1° Les quatre points d'intersection, à distance finie du cercle U et de la cyclique S, sont à l'intersection de ce cercle avec les deux cercles

$$C + \lambda - n(x + \lambda') = 0, \quad C + \lambda + n(x + \lambda') = 0,$$

dont les centres respectifs sont fixes, quels que soient la conique inscrite et le cercle bitangent à cette conique, que l'on considère.

2° Les asymptotes de ces deux cercles coïncident avec les asymptotes de la cyclique ; en d'autres termes, leurs centres sont deux foyers singuliers conjugués de la cyclique.

3° La ligne qui joint les centres de ces deux cercles est parallèle à l'axe des x.

Par conséquent :

140. *Les directions axiales d'une cyclique sont celles des droites qui joignent le centre aux foyers singuliers.*

Et :

141. *Étant donnée une conique inscrite dans une cyclique, les cercles qui touchent doublement cette conique et qui ont leur centre sur l'axe parallèle à une direction axiale donnée coupent la cyclique en quatre points : deux de ces points sont conjugués dans un système parabolique, les deux autres le sont dans le système parabolique complémentaire.*

Si la direction axiale donnée est celle de la droite FF', les deux systèmes dont il s'agit sont les systèmes $e_1 + e_2$ et $e'_1 + e'_2$; si la direction donnée est celle de $F_1F'_1$, ce sont les systèmes $e'_1 + e_2$ et $e_1 + e'_2$.

IX.

Centres et foyers singuliers des cycliques homofocales.

142. Nous avons appelé *conique principale* d'une cyclique l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre pôles principaux et le centre de la

cyclique : cette conique est le lieu des centres des coniques inscrites dans la cyclique.

La conique principale passe par les milieux des droites qui joignent deux à deux les quatre foyers de la cyclique, situés sur un quelconque des cercles directeurs.

Considérons, en effet, les quatre foyers d'une cyclique S, situés sur le cercle directeur dont le centre est le pôle principal O. Le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère formé par ces quatre points est une conique qui passe par les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales de ce quadrilatère, et par les milieux des six droites qui joignent deux à deux les quatre foyers.

On sait, de plus (n^{os} 106, 124), que par les quatre foyers d'une cyclique, situés sur un cercle directeur, passe une conique (déférente), qui a pour centre le centre de la cyclique.

Si donc on se reporte au théorème du n^o 110, on peut dire que les quatre pôles principaux et le centre d'une cyclique, les milieux des droites qui joignent deux à deux les foyers situés sur un quelconque des cercles directeurs sont sur une conique, qui est évidemment la conique principale de la cyclique. C. Q. F. D.

143. *Les cycliques homofocales ont même conique principale.*

Cette conique est l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre pôles principaux et les milieux des droites qui joignent deux à deux les quatre foyers situés sur un cercle directeur.

144. *Les cycliques homofocales ont mêmes directions axiales.*

Car les directions axiales d'une cyclique sont celles des asymptotes de la conique principale.

145. *Le lieu des centres des cycliques homofocales est la conique principale, commune à ces cycliques.*

Car le centre d'une cyclique est sur la conique principale.

146. *Dans une quelconque des coniques inscrites à une cyclique, les deux foyers situés sur l'axe (de cette conique) qui est parallèle à une direction axiale donnée sont sur une cubique circulaire, homofocale à la cyclique et ayant une asymptote parallèle à la direction considérée.*

En effet, d'après le théorème du n° 141, ces deux foyers sont les centres de cercles de rayon nul passant par deux points de la cyclique considérée S, conjugués dans un système parabolique : le lieu de ces foyers est donc une cyclique S′, homofocale à S. Mais, si l'on considère la parabole inscrite dans S, dont l'axe est parallèle à la direction axiale donnée (n° 136, *Remarque*), on voit qu'un des foyers étant à l'infini dans cette direction, la cyclique S′ coupera la droite de l'infini en cinq points. Elle se décomposera donc en la droite de l'infini et en une cubique circulaire, homofocale à S, dont une asymptote sera parallèle à la direction axiale considérée ([1]).

147. *Remarque.* — Dans un système de cycliques homofocales ne figurent que deux cubiques circulaires, puisque, par un point du plan et en particulier par un point à l'infini, ne passent que deux cycliques du système.

Les deux cubiques que nous avons rencontrées au paragraphe précédent, en considérant successivement les deux directions axiales, sont donc les deux cubiques circulaires faisant partie du système de cycliques homofocales à S.

Si l'on se reporte au théorème du n° 134, on voit que :

148. *Les deux cubiques circulaires homofocales à une cyclique passent par les sommets, les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère formé par les quatre pôles principaux de la cyclique.*

Nous appellerons T la cubique circulaire homofocale à S, dont une direction asymptotique est parallèle à la droite FF′; T_1 la cubique circulaire homofocale à S, dont une asymptote est parallèle à $F_1F'_1$.

149. Une droite parallèle à FF′ coupe la cubique T en deux points à distance finie : ces deux points sont les foyers d'une conique inscrite dans la cyclique S; le centre de cette conique étant sur la conique principale, on a cette proposition :

Dans une cubique circulaire, homofocale à une cyclique donnée, le lieu des milieux des cordes parallèles à la direction asymptotique réelle est la conique principale de la cyclique.

([1]) M. Darboux a donné un théorème analogue pour les surfaces du quatrième ordre qui admettent le cercle à l'infini comme ligne double. (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 334.)

La conique principale est donc la conique harmonique du point situé à l'infini, dans la direction asymptotique, sur la cubique circulaire considérée. Si l'on se reporte à des propriétés connues des cubiques et si l'on remarque que la conique principale et la cubique considérée passent par les pôles principaux de la cyclique S, on peut dire que :

Une cubique circulaire, homofocale à une cyclique donnée, a une asymptote commune avec la conique principale de la cyclique.

Les tangentes menées à cette cubique aux pôles principaux de la cyclique sont parallèles à cette asymptote.

150. *Le lieu des foyers des coniques inscrites dans une cyclique est le même que le lieu des foyers des coniques inscrites dans toute cyclique homofocale* (1).

Ce lieu se compose, en effet, des deux cubiques circulaires qui ont mêmes foyers que les cycliques considérées.

151. Le théorème démontré au n° 146 peut s'énoncer ainsi :

Le lieu des centres des cercles de rayon nul passant par deux points d'une cyclique, conjugués dans un système parabolique donné ou dans le système complémentaire, est une cubique circulaire, homofocale à la cyclique.

Si les systèmes paraboliques considérés sont des systèmes complémentaires $e_1 + e_2$, $e'_1 + e'_2$, la cubique circulaire correspondante passe par les foyers singuliers de la cyclique F et F' : ces points sont, en effet, les centres de deux cercles de rayon nul passant par deux points de la cyclique conjugués dans le système $e_1 + e_2$ ou le système complémentaire (n° 138).

Si donc nous nommons *axes d'une cyclique* les deux droites rectangulaires qui joignent le centre aux foyers singuliers de cette cyclique, nous aurons ce théorème :

152. *Dans une cyclique quelconque, homofocale à une cyclique* S, *les deux foyers singuliers situés sur l'axe qui est parallèle à une direction axiale donnée sont sur une cubique circulaire, homofocale à* S, *ayant une asymptote parallèle à la direction considérée.*

Ainsi, le lieu des foyers des coniques inscrites dans une série de cycliques homofocales et le lieu des foyers singuliers de ces cycliques coïncident.

---

(1) *Voir*, pour un théorème analogue dans l'espace, l'ouvrage cité de M. Darboux, p. 334.

X.

Intersections d'un cercle et d'une cyclique.

153. Nous avons vu comment, étant donnés le centre d'une cyclique et trois des points communs à cette courbe et à une droite, on pouvait déterminer le quatrième point commun. Nous allons traiter une question analogue pour les points d'intersection d'un cercle et d'une cyclique.

154. A *et* B *étant deux points d'une cyclique conjugués dans un système donné*, s, *la perpendiculaire élevée au milieu* M *du segment* AB *enveloppe une conique* V.

Cette conique a pour centre et pour foyers le centre et les foyers singuliers de la cyclique.

On obtient la même conique quand on considère, au lieu du système de conjugaison donné, le système complémentaire.

Soient, en effet, sur la perpendiculaire élevée au milieu M du segment AB, les points A_1 et B_1, définis comme au n° 132, c'est-à-dire tels que

$$MA_1 = MB_1 = MA\sqrt{-1}.$$

Soient

a, b les points nouveaux où la droite AB coupe la cyclique considérée S;

A', B'; a', b' deux couples de points respectivement conjugués dans les systèmes s et $-s$, et situés sur une même droite;

a_1, b_1; A'_1, B'_1; a'_1, b'_1 les points définis à l'aide des points a, b; A', B'; a', b', comme les points A_1 et B_1 le sont à l'aide des points A et B.

Les points A_1, B_1; a'_1, b'_1; a_1, b_1; A'_1, B'_1 sont sur une cyclique S', homofocale à S (n° 132).

Les points A, B; a', b' sont sur un cercle (n° 97): je dis qu'il en est de même des points A_1, B_1; a'_1, b'_1.

Soit, en effet, L le point d'intersection des droites AB, $a'b'$. On a, puisque A_1 est le centre d'un cercle de rayon nul passant par A et B,

$$\overline{LA_1}^2 = \overline{LB_1}^2 = \overline{LA}.\overline{LB};$$

de même

$$\overline{La'_1}^2 = \overline{Lb'_1}^2 = \overline{La'}.\overline{Lb'}.$$

Mais A, B; a', b' étant sur un cercle, on a

$$\overline{\mathrm{LA}}.\overline{\mathrm{LB}} = \overline{\mathrm{L}a'}.\overline{\mathrm{L}b'}$$

et, par suite,

$$\overline{\mathrm{LA}_1}^2 = \overline{\mathrm{LB}_1}^2 = \overline{\mathrm{L}a'_1}^2 = \overline{\mathrm{L}b'_1}^2.$$

Les points A_1, B_1; a'_1, b'_1 sont donc sur un cercle de centre L; de même les points A'_1, B'_1; a_1, b_1. D'un autre côté, les points A_1, B_1; a_1, b_1 sont évidemment sur un cercle, ainsi que les points A'_1, B'_1; a'_1, b'_1. Il en résulte que, sur la cyclique S', les points A_1, B_1; A'_1, B'_1 sont conjugués dans un même système $-\sigma$, et que les points a_1, b_1; a'_1, b'_1 sont conjugués dans le système σ.

Par conséquent (n° 114) :

Les droites A_1B_1, a'_1b_1, $A'_1B'_1$, $a'_1b'_1$, ... *touchent une conique* V *inscrite dans la cyclique* S'.

Le centre de cette conique est, sur la perpendiculaire élevée à la droite AB, à égale distance des perpendiculaires A_1B_1 et a_1b_1; or cette perpendiculaire (n° 121) passe par un point fixe qui est le centre de la cyclique S; il en résulte que le centre de cette cyclique coïncide avec le centre de la conique V.

Les axes de la conique V sont parallèles aux directions axiales de la cyclique S' et, par suite, coïncident avec les axes de la cyclique S (n^{os} 126-144).

Les foyers de la conique V sont les points à distance finie où l'axe FF' coupe la cubique T et où l'axe $F_1F'_1$ coupe la cubique T_1; ce sont donc les points F, F', F_1, F'_1 eux-mêmes (n^{os} 146-152). C. Q. F. D.

Corollaire. — Si le système considéré s est un des systèmes principaux, la conique V est une déférente (n° 107).

Par suite :

155. *Les coniques déférentes d'une cyclique ont pour foyers les foyers singuliers de cette courbe.*

Soit maintenant un cercle quelconque de centre K coupant une cyclique S aux quatre points (à distance finie) A, B, a', b'; soient M et m' les milieux des cordes AB et $a'b'$. Les points A et B sont conjugués dans un système s, les points a' et b' le sont dans le système $-s$ (n° 97).

En vertu du théorème précédent, les droites KM et Km' touchent une conique V, dont les foyers sont les foyers singuliers de la cyclique S. On peut donc dire, en s'appuyant sur une propriété bien connue des coniques, que les bissectrices des droites KM et Km' (qui sont parallèles aux bissectrices des droites AB et $a'b'$) coïncident avec les bissectrices des droites KF et KF', qui joignent le point K à deux foyers singuliers conjugués F et F′ de la cyclique S.

En d'autres termes, si nous nommons *cordes communes* à une cyclique et à un cercle un des trois systèmes de deux droites qui passent par les quatre points, à distance finie, où le cercle coupe la cyclique, nous avons ce théorème :

156. *Les bissectrices de tout système de cordes communes à une cyclique et à un cercle coïncident avec les bissectrices des droites qui joignent le centre du cercle à deux foyers singuliers conjugués de la cyclique.*

Ce théorème permet, étant donnés deux foyers singuliers conjugués F et F′ d'une cyclique et trois points communs à cette cyclique et à un cercle, de déterminer sans ambiguïté le quatrième point d'intersection des deux courbes. Soient, en effet, trois points A, B, a' d'une cyclique, situés sur un cercle, dont nous désignerons le centre par K. On mènera par ce point la droite KM perpendiculaire à AB, puis la droite Km' symétrique de la précédente par rapport aux bissectrices des droites KF et KF′ ; le quatrième point b', commun au cercle et à la cyclique, est le symétrique du point a' par rapport à la droite Km'.

Corollaire. — Les bissectrices de tout système de cordes communes à une cyclique et à un cercle ayant son centre sur un des axes de la cyclique sont parallèles aux axes de cette courbe.

157. Problème. — *Construire une cyclique connaissant les foyers singuliers et quatre points de cette courbe, non situés sur un cercle.*

On construira autant de points de la cyclique qu'on voudra par la méthode suivante :

Soient α, β, γ, δ les arguments des quatre points donnés. En appliquant la construction du paragraphe précédent, on déterminera sur le cercle (α, β, γ) qui passe par les points d'arguments α, β, γ le point de la cyclique dont l'argument est $-(\alpha+\beta+\gamma)$; et de même, sur les cercles (α, β, δ), (α, γ, δ), (β, γ, δ) les points d'arguments $-(\alpha+\beta+\delta)$, $-(\alpha+\gamma+\delta)$, $-(\beta+\gamma+\delta)$.

On combinera ensuite tous ces points trois à trois et l'on obtiendra, comme on le voit aisément, de nouveaux points de la cyclique, et ainsi de suite.

Tangente en un point. — On peut construire la tangente à la cyclique en un de ses points, le point α par exemple.

On déterminera	sur le cercle	(α, γ, β)	le point d'argument	$-(\alpha+\gamma+\beta)$
»	sur le cercle	$(\delta, \gamma, -\gamma-\beta-\alpha)$	le point »	$\alpha+\beta-\delta$
»	sur le cercle	$(\alpha, \delta, \alpha+\beta-\delta)$	le point »	$-2\alpha-\beta$.

Le cercle $(\alpha, \beta, -2\alpha-\beta)$ sera tangent à la cyclique au point α; il coupe, en effet, cette courbe aux points d'arguments α, β, $-2\alpha-\beta$, et son quatrième point d'intersection avec la cyclique aura pour argument

$$-\alpha-\beta+2\alpha+\beta,$$

c'est-à-dire α. C. Q. F. D.

Cercle osculateur en un point. — Supposons construites les tangentes à la cyclique aux points d'arguments α et β.

On déterminera	sur le cercle	$(\beta, \beta, -2\alpha-\beta)$	le point d'argument	$2\alpha-\beta$
»	sur le cercle	$(\alpha, \beta, \; 2\alpha-\beta)$	le point »	-3α.

Le cercle $(\alpha, \alpha, -3\alpha)$ coupera la cyclique en un quatrième point d'argument $-\alpha-\alpha+3\alpha$, c'est-à-dire α, et sera par suite le cercle osculateur à la cyclique au point α.

158. *Remarque.* — Si les quatre points donnés sont sur un cercle, il faut que les bissectrices de tout système de deux droites passant par ces points soient parallèles aux bissectrices des droites qui joignent le centre du cercle à deux foyers singuliers conjugués F et F′ donnés.

Si cette condition n'est pas remplie, la cyclique cherchée sera la courbe du quatrième degré formée par le cercle donné et la droite de l'infini comptée deux fois.

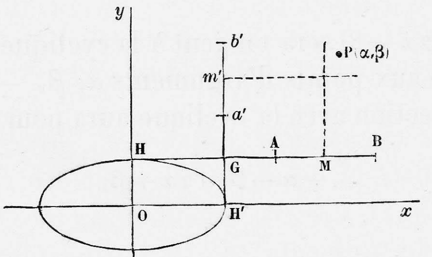
Si cette condition est remplie, il y aura une infinité de cycliques répondant à la question, et il faudra connaître un nouveau point de l'une d'elles pour la déterminer.

159. On peut compléter de la manière suivante le théorème du n° 154.

Soient A et B deux points d'une cyclique S, conjugués dans le système *s*. La perpendiculaire élevée au segment AB en son milieu enveloppe une conique V; nous savons d'ailleurs (n° 114) que la droite AB enveloppe une conique C inscrite dans la cyclique S.

Si l'on fait tourner la conique V *de* 90^o *autour de son centre, elle devient homothétique à la conique* C.

Prenons pour axes, en coordonnées cartésiennes, les axes de la conique C. Soient A et B (*fig.* 1) les deux points conjugués dans le système s, où la



tangente au sommet H de cette conique coupe la cyclique S; a' et b' les deux points conjugués dans le système $-s$ situés sur la tangente au sommet H'. Soit

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$$

l'équation du cercle de contact de la conique C; le centre $P(\alpha, \beta)$ de ce cercle est le centre de la cyclique S et celui de la conique V.

Les axes de cette dernière conique sont, en direction, parallèles à ceux de C (n^{os} 154, 140), et, en grandeur, ce sont les distances du point P aux droites élevées perpendiculairement aux segments AB, $a'b'$ en leurs milieux.

Or on sait que le produit HA.HB est égal à la puissance du point H par rapport au cercle de contact de la conique C (n° 119, § IV); on a donc

$$\overline{HA}.\overline{HB}=(\alpha)^2+(b-\beta)^2-R^2,$$

de même

$$\overline{H'}a'.\overline{H'}b'=(a-\alpha)^2+\beta^2-R^2.$$

Les points A, B, a', b' étant sur un cercle, on a

$$GA.GB=Ga'.Gb'$$

ou

$$(\overline{HA}-a)(\overline{HB}-a)=(\overline{H'}a'-b)(\overline{H'}b'-b).$$

Remplaçant dans cette égalité les produits HA.HB, H$'a'$.H$'b'$ par leurs valeurs, il vient

$$a(2\alpha - \mathrm{HA} - \mathrm{HB}) = b(2\beta - \mathrm{H}'a' - \mathrm{H}'b').$$

D'après ce qu'on a dit plus haut, les longueurs des axes de la conique V sont

Pour l'axe parallèle à Ox....... $\alpha - \frac{1}{2}(\mathrm{HA} + \mathrm{HB})$.
Pour l'axe parallèle à Oy....... $\beta - \frac{1}{2}(\mathrm{H}'a' + \mathrm{H}'b')$.

Le théorème est donc démontré, en vertu de l'égalité précédente.

160. *Remarque.* — Le point M milieu de la droite AB est, d'après cela, situé sur la courbe, lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés restent tangents à deux coniques, C et V, homothétiques à 90°. Il en est de même du point m', milieu du segment $a'b'$. Or le lieu précédent est, comme le calcul le montre aisément, une courbe du huitième degré, qui se décompose en deux cycliques, ayant chacune un point double à distance finie. Si l'on se reporte au théorème général du n° 83, on peut énoncer les résultats suivants :

Le lieu du milieu du segment formé par deux points d'une cyclique S *conjugués dans un système donné est une cyclique ayant un point double à distance finie.*

Le lieu du milieu du segment formé par deux points de la cyclique S *conjugués dans le système complémentaire du premier est une seconde cyclique à point double.*

L'ensemble de ces deux cycliques est le lieu décrit par le sommet d'un angle droit dont les côtés restent respectivement tangents aux coniques C *et* V, *définies plus haut.*

XI.

Théorèmes divers.

161. *Les quatre cercles directeurs d'un système de cycliques homofocales font partie de ce système.*

Soit, en effet, un cercle de rayon nul passant par deux points d'une cyclique S, conjugués dans un des systèmes principaux, le système o par exemple. La puissance, par rapport à ce cercle, du pôle principal O_1 de la cyclique est égale au carré du rayon du cercle directeur de centre O_1

(n° 101) et, par suite, le centre du cercle de rayon nul considéré est sur le cercle directeur précédent.

Un cercle directeur d'une cyclique est donc le lieu des centres des cercles de rayon nul passant par deux points de cette cyclique conjugués dans un système principal. C. Q. F. D.

162. *Le lieu des pieds des normales abaissées du centre d'une cyclique sur les coniques inscrites dans cette cyclique est la conique principale.*

On le vérifie immédiatement par le calcul, en partant de l'équation générale des coniques inscrites dans une cyclique. Par conséquent :

163. *Le lieu des pieds des normales abaissées du centre d'une quelconque des cycliques d'un système homofocal sur les coniques inscrites dans cette cyclique est la conique principale du système.*

164. Nous savons que la perpendiculaire élevée en son milieu au segment formé par deux points d'une cyclique S, conjugués dans un système principal, enveloppe une déférente de cette cyclique. D'après ce qui a été dit au n° 154, cette déférente est inscrite dans la cyclique S′, homofocale à S, qui est le lieu des centres des cercles de rayon nul passant par deux points de S conjugués dans le système principal considéré.

Si ce système est le système o, la cyclique S′ sera le cercle directeur de centre O_1 et, par suite, d'après le théorème précédent :

Les pieds des normales abaissées d'un pôle principal d'une cyclique sur la déférente correspondante sont sur la conique principale de la cyclique.

165. Le lieu des foyers singuliers des cycliques d'un système homofocal coïncide avec le lieu des foyers des déférentes de ces courbes (n° 155).

Or les déférentes correspondant à un même pôle principal passent par les quatre foyers situés sur le cercle directeur dont ce pôle est le centre. Par conséquent :

Le lieu des foyers des coniques passant par quatre points situés sur un cercle se compose de deux cubiques circulaires, ayant ces quatre points pour foyers. (SYLVESTER.)

Ces deux cubiques passent par les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère formé par les quatre points. Elles passent également par le centre du cercle sur lequel ces points sont situés.

XII.

Cycliques inscrites.

166. Nous dirons que deux cycliques S et S′ sont *inscrites* l'une dans l'autre si elles se touchent en quatre points (à distance finie) situés sur un cercle.

L'équation générale des cycliques S′ inscrites dans la cyclique S sera, en coordonnées cartésiennes,

$$0 = S' = S + M^2,$$

$M = 0$ étant l'équation d'un cercle.

167. *Les cercles d'un même système, bitangents à une cyclique* S′ *inscrite dans une cyclique* S, *coupent cette dernière en quatre points : deux de ces points sont conjugués dans un système fixe, les deux autres le sont dans le système complémentaire.*

En effet, $U = 0$ étant l'équation d'un cercle bitangent à la cyclique S′, on a (nº 106)

$$U = \omega^2 A + 2\omega B + C;$$

ω étant une constante. L'équation de la cyclique S′, enveloppe des cercles U, sera

$$S' = B^2 - AC = 0.$$

On a ainsi l'identité

$$B^2 - AC = S + M^2$$

ou

$$B^2 - A(U - A\omega^2 - 2B\omega) = S + M^2,$$

c'est-à-dire

$$S + AU = (A\omega + B)^2 - M^2 = (A\omega + B + M)(A\omega + B - M).$$

Par conséquent, les points communs à la cyclique S et au cercle U sont à l'intersection de ce cercle avec les deux cercles

$$A\omega + B + M = 0, \quad A\omega + B - M = 0.$$

Or le cercle $A\omega + B + M$ a deux points fixes, quel que soit ω, et ces deux points sont situés sur S, puisque, si l'on fait dans l'identité précédente

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B + M = 0,$$

on trouve

$$S = 0.$$

Il en résulte que deux des points communs à la cyclique S et au cercle U sont situés sur un cercle passant par deux points fixes de S, c'est-à-dire ont des arguments de somme constante. C. Q. F. D.

168. Corollaire I. — *Deux des points communs à une cyclique et à un cercle qui touche deux cercles d'un même système, bitangents à cette cyclique, sont conjugués dans un système fixe.*

Corollaire II. — *Les cercles qui passent par deux points d'une cyclique conjugués dans un système donné, et qui touchent un cercle fixe bitangent à la cyclique, touchent un second cercle fixe, bitangent à la cyclique et du même système que le premier.*

Corollaire III. — *Les cercles qui passent par deux points d'une cyclique conjugués dans un système donné, et par un foyer de la cyclique, touchent un cercle, bitangent à cette courbe.*

Corollaire IV. — *Les quatre foyers, situés sur un cercle directeur, d'une cyclique S′ inscrite dans une cyclique* S, *sont sur une cyclique homofocale à* S (M. Darboux).

Car ces quatre points sont les centres de cercles de rayon nul passant par deux points de S, conjugués dans un même système.

Vu et approuvé :

Paris, le 1er mai 1885.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 2 mai 1885.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Figures d'équilibre d'une masse fluide dont les molécules s'attirent suivant la loi de Newton.

Vu et approuvé :

Paris, le 1er mai 1885.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 2 mai 1885.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

10974 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.