THESES

DE

MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LE 8 ~~[illegible]~~ mai 1852,

PAR M. BOURGET,

Ancien Elève de l'École Normale, Agrégé de l'Université, Professeur de Mathématiques au Lycée d'Amiens.

AMIENS,

IMPRIMERIE DE DUVAL ET HERMENT, PLACE PÉRIGORD, 3.

1852.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. MILNE EDWARDS, Doyen,

Professeurs honoraires :
THÉNARD,
PONCELET,
BIOT,
DE MIRBEL,

Professeurs :
POUILLET,
CONSTANT PRÉVOST,
DUMAS,
AUGUSTE DE SAINT-HILAIRE,
DESPRETZ,
STURM,
DELAFOSSE,
BALARD,
LEFEBURE DE FOURCY,
LE VERRIER,
CHASLES,
CAUCHY,
DUHAMEL,
DE JUSSIEU,
GEOFFROY SAINT-HILAIRE,
LAMÉ,
DELAUNAY,

Agrégés :
VIEILLE,
BERTRAND,
MASSON,
PELIGOT,
PAYER,
DUCHARTRE,

A

MM. DUHAMEL ET VIEILLE,

MES ANCIENS PROFESSEURS.

HOMMAGE D'AFFECTION ET DE RECONNAISSANCE.

THÈSE

DE

MÉCANIQUE.

ATTRACTION DES PARABOLOÏDES ELLIPTIQUES.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

Attraction des Paraboloïdes elliptiques.

INTRODUCTION.

M. Chasles, dans un mémoire remarquable inséré dans le *Journal d l'Ecole Polytechnique*, a montré que l'attraction d'une couche homogèn comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques peut se déduire de l'équatior du second ordre, à laquelle satisfait le potentiel V, comme on le fait pour l'attraction d'une couche sphérique. L'illustre Géomètre fait observer dans ce mémoire que la plupart des théorèmes relatifs à l'ellipsoïde, sont applicables au paraboloïde elliptique. Bien que l'attraction d'un pareil corps ait peu d'importance dans la physique mathématique, il m'a paru intéressant sous le rapport analytique de l'étudier directement. C'est ce que je me propose dans cette thèse.

On verra que malgré les analogies qui existent nécessairement entre les deux théories, la plupart des théorèmes relatifs au paraboloïde, présentent quelque différence notable avec ceux qu'on trouve dans le mémoire de M. Chasles ; cette différence est surtout remarquable dans les théorèmes de géométrie qui forment la base de la théorie, ce sont les analogues de ceux que M. Chasles rappelle dans son mémoire, néanmoins je les crois complètement nouveaux.

I.

Définitions Préliminaires.

Si l'on imagine que tous les points d'un paraboloïde elliptique décrivent des droites égales entr'elles, et parallèles à l'axe principal, on formera une couche comprise entre les deux positions extrêmes. Nous nommerons ces paraboloïdes extrêmes *isothétiques*, Si on cherche la limite vers laquelle tend la couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques, dont les deux sommets restent à la même distance, on trouve la couche que nous considérons ici. — Nous la supposerons remplie de matière homogène.

Si par un pont extérieur au paraboloïde on mène une sécante OAB, et par le sommet S une parallèle SC ; nous appellerons pour abréger *corde* cette ligne SC. (*fig* 1.)

Par l'extrémité de la corde menons un plan perpendiculaire à cette corde et par suite à la sécante; soit D le point où ce plan coupe l'axe, nous appelerons *sous-corde* cette longueur SD. On saura donc ce que nous entendons par sécante, corde, et sous-corde correspondantes.

Imaginons deux paraboloïdes isothétiques, leurs sommets sont à une certaine distance ω, nous appelerons simplement cette ligne *distance des paraboloïdes.*

II.

Théorèmes et problèmes de géométrie relatifs au paraboloïde elleptique.

THÉORÈME I. — *Si d'un point extérieur à un paraboloïde on mène une sécante, le rapport est constant entre le rectangle de la sécante entière par sa partie extérieure, et la sous-corde correspondante.*

En effet soit:

$$x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} \tag{1}$$

l'équation d'un paraboloïde elliptique rapporté à son sommet et à ses plans principaux. Soient de plus

$$\alpha, \beta, \gamma$$

les coordonnés du point extérieur O, et

$$\lambda, \mu, \nu$$

les cos. des angles que la demi droite OAB fait avec les axes. Les équations de la sécante seront

$$\frac{x-\alpha}{\lambda} = \frac{y-\beta}{\mu} = \frac{z-\gamma}{\nu} = \rho \tag{2}$$

ρ sera la longueur de OA, ou de OB, si x, y, z sont les coordonnées du point de rencontre de la sécante avec la surface. L'équation qui donne cette longueur s'obtient en éliminant $x\ y\ z$ entre les équations (2) et l'équation (1). Cette équation finale est:

$$\left(\frac{\mu^2}{2p} + \frac{\nu^2}{2q}\right)\rho^2 + 2\left(\frac{\beta\mu}{2p} + \frac{\gamma\nu}{2q} - \frac{\lambda}{2}\right)\rho + \frac{\beta^2}{2p} + \frac{\gamma^2}{2q} - \alpha = o \tag{3}$$

dans cette équation le dernier terme est positif puisque le point est extérieur, on a donc:

$$(4)\qquad \mathrm{OA.OB} = \frac{\dfrac{\beta^2}{2p} + \dfrac{\gamma^2}{2q} - \alpha}{\dfrac{\mu^2}{2p} + \dfrac{\nu^2}{2q}}$$

Actuellement par le sommet S menons une parallèle à la sécante OAB, dans le cas de la fig. (1), ces équations seront

$$(5)\qquad \frac{x}{-\lambda} = \frac{y}{-\mu} = \frac{z}{-\nu} = \mathrm{R}$$

R sera la longueur SC de la corde, si x, y, z sont les coordonnées du point de rencontre avec la surface. L'équation qui donne R sera :

$$-\lambda\,\mathrm{R} = \mathrm{R}^2\left(\frac{\mu^2}{2p} + \frac{\nu^2}{2q}\right)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{R}}{-\lambda} = \frac{1}{\dfrac{\mu^2}{2p} + \dfrac{\nu^2}{2q}}$$

mais on a : $$\frac{\mathrm{R}}{-\lambda} = \mathrm{SD}$$

donc enfin

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{OA.OB}}{\mathrm{SD}} = \frac{\beta^2}{2p} + \frac{\gamma^2}{2q} - \alpha$$

le second membre ne varie pas pour le même point O, donc le théorème est démontré :

Remarque. — Menons par le point O une parallèle à l'axe, soit E le point de rencontre ; il est facile de voir que :

$$\frac{\beta^2}{2p} + \frac{\gamma^2}{2q} - \alpha = \mathrm{OE}$$

le théorème peut donc s'énoncer par la proportion :

$$\mathrm{OA.OB} = \mathrm{SD.\ OE} \quad \text{ou} \quad \mathrm{OA : SD :: OE : OB}.$$

PROBLÈME I. — *Trouver l'équation du cone circonscrit au paraboloïde ayant l'origine au sommet.*

L'équation (3) donne les parties extérieure et intérieure d'une sécante OAB rencontrant le paraboïde. La condition de tangence de la ligne OAB avec le paraboloïde est donc

$$(7) \qquad \left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)\delta=0$$

en posant :

$$(8) \qquad \frac{\beta^2}{2p}+\frac{\gamma^2}{2q}-\alpha=\delta=0\ \mathrm{R}$$

Ainsi la droite (2) sera tangente si $\lambda\,\mu\,\nu$ satisfont à la relation (7) et de plus à

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

si donc nous éliminons $\lambda\,\mu\,\nu$ entre ces quatre équations, on aura l'équation du cone circonscrit. Cette élimination s'exécute immédiatement en observant que (7) est une équation homogène en $\lambda\,\mu\,\nu$, et que d'après (2) ces quantités sont proportionnelles à $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; donc l'équation du cone est :

$$(9) \qquad \left[\frac{\beta(y-\beta)}{2p}+\frac{\gamma(z-\gamma)}{2q}-\frac{x-\alpha}{2}\right]^2-\delta\left[\frac{(y-\beta)^2}{2p}+\frac{(z-\gamma)^2}{2q}\right]=0$$

Problème II. — *Trouver l'équation du cone formé par les sécantes telles le rapport entre la partie intérieure* AB *de la sécante, et la sous-corde correspondant soit constant.*

De l'équation (3) on tire deux valeurs de ρ dont l'une représente OB, dont l'autre de représente OA ; on a donc :

$$\mathrm{OB}=\frac{-\left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\delta\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)}}{\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{-\left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\delta\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)}}{\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}}$$

Donc : $$\mathrm{A\,B}=\frac{2\sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\delta\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)}}{\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}}$$

Donc : $$\frac{\mathrm{A\,B}}{\mathrm{S\,D}}=2\sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\delta\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)}$$

si donc on veut que ce rapport reste constant et égal a $2m$, il faudra poser entre $\lambda\,\mu\,\nu$ l'égalité:

$$(10) \qquad \left(\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\delta\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)=m^2$$

on aura l'équation du cone formé par toutes les sécantes qui jouissent de cette propriété en éliminant $\lambda\,\mu\,\nu$, entre les équations (2), l'équation (10), et la relation

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

Cette élimination s'opère sans difficulté et élégamment au moyen de la théorie des fractions égales. En effet, on a la série des égalités suivantes :

$$\frac{x-\alpha}{\lambda}=\frac{y-\beta}{\mu}=\frac{z-\gamma}{\nu}=\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{\left[\frac{\beta(y-\beta)}{2p}+\frac{\gamma(z-\gamma)}{2q}-\frac{x-\alpha}{2}\right]^2-\delta\left[\frac{(y-\beta)^2}{2p}+\frac{(z-\gamma)^2}{2q}\right]}}{\sqrt{\left[\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}\right]^2-\delta\left(\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}\right)}}$$

donc l'équation du cone est :

$$(11) \quad \left[\frac{\beta(y-\beta)}{2p}+\frac{\gamma(z-\gamma)}{2q}-\frac{x-\alpha}{2}\right]^2-\delta\left[\frac{(y-\beta)^2}{2p}+\frac{(z-\gamma)^2}{2q}\right]=m^2[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]$$

cette équation coïncide avec celle du problème précédent si $m=o$ en d'autres termes si la sécante devient tangente, c'est ce qui devait arriver.

THÉORÈME II. — *Les deux cones précédents ont les mêmes plans diamétraux principaux.*

En effet, une équation du second ordre étant :

$$Lx^2+Mz^2+Nz^2+2Pyz+2Qzx+2Rxy+2Sx+2Ty+2Uz+V=o$$

Les plans diamétraux principaux des surfaces qu'elle détermine ont des perpendiculaires dont les cosinus $x\;y\;z$ sont donnés par :

$$(12) \qquad \frac{Lx+Ry+Qz}{x}=\frac{Rx+My+Pz}{y}=\frac{Rx+Py+Nz}{z}$$

cette équation étant unie à : $x^2+y^2+z^2=1$.

On voit immédiatement par la forme des équations (12), que si les trois coefficiens L M N augmentent d'une même quantité G quelconque, les équations (12) ne changent pas ; par suite $x\;y\;z$ restent les mêmes. Or, les deux cones (9) et (11) offrent des équations, qui réalisent cette condition. Donc le théorème se trouve démontré.

THÉORÈME III. — *L'axe principal du cone circonscrit est normal au paraboloïde homofocal passant par le point* O, *sommet de ce cone.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de celui-ci démontré par M. Chasles, dans son aperçu historique sur les méthodes géométriques : Si d'un point on circonscrit une série de cones à une série de surfaces du second degré homofocales, ces cones ont les mêmes axes principaux.

En effet la limite de ces cones, est le plan tangent en O, a la surface homofocale passant par O; or l'axe principal intérieur de ce cone limite n'est autre chose que la normale à cette surface.

THÉORÈME IV. — *Les deux parties d'une sécante comprise entre deux paraboloïdes isothétiques sont égales.*

Pour démontrer ce théorème il suffit de faire voir que le milieu de la partie intérieure de la sécante est le même pour les deux paraboloïdes.

Or pour le premier paraboloïde, on a pour déterminer les coordonnées du milieu la valeur de ρ suivante (voir les calculs du 1.er théorème) :

$$\rho_1 = -\frac{\frac{\beta\mu}{2p}+\frac{\gamma\nu}{2q}-\frac{\lambda}{2}}{\frac{\mu^2}{2p}+\frac{\nu^2}{2q}}$$

Le second paraboloïde isothétique aura pour équation :

$$x-\omega=\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}$$

on aura donc la même valeur pour le ρ du milieu de la partie intérieure de la sécante. Le théorème est donc démontré.

III.

Attraction d'une couche paraboloïdale sur un point intérieur.

THÉORÈME V. — *Une couche homogène de matière comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, n'exerce aucune action sur un point intérieur.*

En effet soit O le point attiré (*fig.* 2); imaginons un cone d'ouverture infiniment petite ayant O pour sommet Il interceptera dans la couche deux petites portions de masse

AB A'B' et CD C'D'

si nous prouvons que les attractions de ces deux masses sur O sont égales, le théorème sera démontré.

Or du point O comme centre et avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère; le cone intercepte sur cette sphère une petite portion de surface qui peut être regardée comme plane et que nous désignerons par σ. Actuellement, au moyen de sphères concentriques, on peut décomposer le volume AB A'B' en élémens cylindriques ayant chacun pour valeur :

$$\sigma r^2 dr$$

r étant le rayon de l'une de ces sphères. Si nous désignons par ρ la densité de la couche, par μ la masse du point O, par f l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, l'élément ci-dessus exercera sur O l'action :

$$\mu f \rho \sigma dr$$

l'action de la masse entière AB A'B' sera donc :

$$\mu f \rho \sigma . \overline{\mathrm{AB}}$$

Pour la même raison l'action de CD C'D' sera :

$$\mu f \rho \sigma . \overline{\mathrm{CD}}$$

Or d'après le théorème IV, les deux lignes AB et CD sont égales; donc notre théorème est démontré.

IV.

Nature des surfaces de niveau relatives à l'attraction d'une couche paraboloïdale sur un point extérieur.

THÉORÈME VI. — *L'attraction sur un point extérieur d'une couche homogène infiniment mince, comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, est dirigée suivant l'axe principal du cone circonscrit au paraboloïde extérieur.*

Nous supposerons les deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins, et nous prendrons pour l'élément différentiel de volume, la portion comprise dans l'intérieur d'un petit cone ayant son sommet au point O attiré. Soit dv ce volume, ρ la densité de la couche, et r sa distance au point O. L'attraction exercée par cet élément sur le point O dont nous prendrons la masse pour unité sera :

$$\frac{\rho\, dv}{r^2}$$

Menons par le point O, trois axes rectangulaires O ξ, O η, O ζ soit θ l'angle que le rayon γ fait avec le premier O ξ, φ l'angle que sa projection fait avec l'un des deux autres O η. Le volume dv pourra être remplacé par celui d'un parallelélipipède qui a une de ses arètes dirigée suivant r égale à dr, une seconde perpendiculaire au rayon r et égale à $r\, d\theta$, et la troisième perpendiculaire au plan des deux autres éléments et égale à $r \sin\theta\, d\varphi$; on a donc :

$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

l'attraction exercée par la masse de ce volume devient donc :

$$\rho\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Actuellement menons pour les deux paraboloïdes, la corde et la sous-corde correspondantes à la sécante, et aussi par le point attiré une parallèle à l'axe comme on le voit dans la figure (3). On a d'après un théorème démontré :

$$\frac{OA\ .\ OB}{SD} = OR$$

$$\frac{OA'\ .\ OB'}{S'D'} = OR' = OR + \omega$$

en désignant par ω la distance des deux paraboloïdes. Il est clair que

$$S'D' = SD$$

donc :

$$OA'.OB' - OA.OB = \omega.SD$$

mais si nous désignons par M le milieu de AB ou A'B', nous aurons :

$$OA'\ .\ OB' = \overline{OM}^2 - \overline{MA}^{2\prime} \text{ et } OA\ .\ OB = \overline{OM}^2 - \overline{MA}^2$$

donc:
$$\overline{MA}^2 - \overline{MA}^{2\prime} = \omega.\ SD$$

d'ou enfin:
$$AA' = \frac{\omega.\ SD}{MA + MA'}$$

Or ω étant la quantité infiniment petite qui détermine la couche attirante infiniment mince, AA' n'est autre chose que dr, donc :

$$dr = \frac{\omega.\ SD}{MA + MA'}$$

ou bien encore en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à lui :

(2)
$$dr = \frac{\omega}{2} \cdot \frac{SD}{AB}$$

transportons cette valeur dans l'expression (1) de l'attraction de dv elle deviendra :

(3)
$$\rho\, \omega\, \frac{SD}{AB} \operatorname{Sin}\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Cette expression nous représente l'action du volume correspondant à AA′ nous aurons une action parfaitement égale pour le volume correspondant à BB′. Donc l'action totale sur O du volume intercepté dans la couche paraboloïdale par le cone infiniment petit d'ouverture imaginé par O, a pour expression :

$$2\,\rho\,\omega\,\frac{SD}{AB}\,Sin\,\theta\,d\theta\,d\phi \tag{4}$$

Jusqu'ici l'axe Oξ est indéterminé de direction. Prenons maintenant pour cette ligne, l'axe principal intérieur du cône circonscrit au paraboloïde extérieur : désignons par C le cone formé par les sécantes telles que $\frac{SD}{AB}$ soit constant, ce cone C à même axe principal intérieur que le cone circonscrit d'après le théorème II. Imaginons un plan par l'axe Oξ, le cone C est coupé par ce plan suivant deux génératrices formant des angles égaux θ avec Oξ, donc d'après la forme de l'expression (4), les éléments de volume situés aux extrémités de ces génératrices, exercent sur le point O des attractions égales, et dont la résultante est dirigée conséquemment suivant Oξ, on peut donc affirmer les propositions suivantes :

1.° Deux cones infiniment voisins déterminés par l'équation

$$\frac{SD}{AC} = \text{Const.}$$

interceptent dans la couche paraboloïdale une portion de volume (qui a la forme de deux anneaux), dont l'attraction sur le point O est dirigée suivant l'axe principal intérieur Oξ, du cone circonscrit à la surface extérieure de la couche.

2.° Deux plans infiniments voisins menés par OA interceptent dans la couche entre deux angles dièdres opposés, une portion de volume dont l'attraction sur le point O est dirigée suivant cet axe.

Il est clair que le théorème VI énoncé est une conséquence de l'une ou de l'autre proposition.

Théorème vii.—*L'attraction d'une couche homogène infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale en ce point au paraboloïde qui y passe, et qui est homofocal à la surface extérieure de la couche.*

Ce théorème résulte immédiatement de ce que Oξ, d'après le théorème III est normal au paraboloïde homofocal à la surface extérieure, passant par le point O.

Conclusion. — On appelle surfaces de niveau, celles sur lesquelles un point matériel attiré resterait en équilibre sous l'influence des forces qui le sollicitent, on voit donc par le théorème précédent que les surfaces de niveau relatives à une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, sont des paraboloïdes dont les sections principales ont les mêmes foyers que celle de la surface extérieure de la couche.

V.

Valeur de l'attraction d'une couche paraboloïdale sur un point extérieur.

THÉORÈME VIII — *La valeur du potentiel est constante pour tous les points d'une même surface de niveau.*

Nous poserons :

$$V = \iiint \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} \tag{1}$$

la somme triple s'étendant à toute la couche attirante, r étant la distance du point O, à un point quelconque de cette couche ; et nous nommerons cette intégrale le potentiel du point O. On sait que l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse étant l'unité de force, la masse de O étant l'unité, on a pour les composantes de l'action de la couche sur O :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{dV}{d\alpha} \\ Y &= \frac{dV}{d\beta} \\ Z &= \frac{dV}{d\gamma} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'attraction de la couche étant normale à la surfaee de niveau qui passe par ce point, on a pour tous les points α, β, γ de cette surface,

$$\frac{dV}{d\alpha} d\alpha + \frac{dV}{d\beta} d\beta + \frac{dV}{d\gamma} d\gamma = o$$

$d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ désignant les coordonnées d'un point voisin sur la surface de niveau ; cette équation montre que

$$V = const. \tag{3}$$

pour tous les points d'une surface de niveau, en sorte que si la fonction V de α, β, γ était connue, l'équation (3) serait celle de ces surfaces remarquables.

Remarque. — Nous avons démontré que les surfaces de niveau relatives à une couche paraboloïdale, sont des paraboloïdes homofocaux, leur équation est donc généralement

$$X + \varepsilon = \frac{Y^2}{2P} + \frac{Z^2}{2Q}$$

comme il doit avoir mêmes foyers que le premier

$$\frac{P}{2} - \varepsilon = \frac{p}{2} \quad \text{d'ou } 2\,P = 2\,p + 4\,\varepsilon$$

$$\frac{Q}{2} - \varepsilon = \frac{q}{2} \quad \text{d'ou } 2\,Q = 2\,q + 4\,\varepsilon$$

son équation est donc :

$$(4) \qquad X + \varepsilon = \frac{Y^2}{2\,p + 4\,\varepsilon} + \frac{Z^2}{2\,q + 4\,\varepsilon}$$

On voit donc que ε détermine ces diverses surfaces, par suite V est fonction de ε seulement, car il reste constant sur tous les points d'une même surface.

Si on veut trouver celle qui passe par un point déterminé α, β, γ, il suffit de résoudre l'équation :

$$(5) \qquad \alpha + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2\,p + 4\,\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2\,q + 4\,\varepsilon}$$

par rapport à ε. Il est très-facile de voir que cette équation a ses trois racines réelles et une seule positive ; il suffit de remarquer que si ε varie de $+\infty$ à $-\infty$, le premier membre

$$\frac{\beta^2}{2\,p + 4\,\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2\,q + 4\,\varepsilon} - \alpha - \varepsilon = o$$

change quatre fois de signes en s'annulant. Or, si $\varepsilon = +\infty$, le premier membre est négatif ; si $\varepsilon = 0$, il est positif ; si ε est négatif et très-peu inférieur à $\frac{q}{2}$ en valeur absolue le premier membre est encore positif ; si ε dépasse en valeur absolue $\frac{q}{2}$ le premier membre est négatif, mais il a passé par l'infini, nous négligeons ce changement de signes ; si ε toujours négatif est très-près de $\frac{p}{2}$ le premier membre redevient positif, il y a donc une racine négative comprise entre

$$-\frac{q}{2} \text{ et } -\frac{p}{2}$$

puis en continuant à augmenter ε, on fait passer le premier membre par l'infini ; et il change de signe ; enfin si $\varepsilon = -\infty$ le premier membre est positif, il y a donc encore une racine négative, inférieure à

$$-\frac{p}{2}$$

dans ce raisonnement on suppose $p > q$. On voit donc qu'il n'existe qu'une seule racine positive.

Problème III. — *Trouver la valeur de l'attraction d'une couche homogène comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, infiniment voisins.*

D'après ce qu'on a vu dans le théorème VIII, il suffit de trouver :

$$\frac{dV}{d\alpha}, \frac{dV}{d\beta}, \frac{dV}{d\gamma}$$

Or V étant fonction de ε seulement on a :

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dV}{d\alpha} &= \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\alpha} \\ \frac{dV}{d\beta} &= \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\beta} \\ \frac{dV}{d\gamma} &= \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\gamma} \end{aligned}\right.$$

On aura donc en posant :

$$(7) \qquad h^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\gamma}\right)^2$$

l'expression suivante :

$$(8) \qquad A = \frac{dV}{d\varepsilon}\,.\,h$$

pour l'attraction totale A de la couche.

Pour déterminer $\frac{dV}{d\varepsilon}$, nous rappellerons que le potentiel satisfait à l'équation du second ordre :

$$(9) \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = o$$

Cette équation peut se transformer en une autre aux différences ordinaires. En effet :

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{d^2V}{d\varepsilon^2}\left(\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)^2 + \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2}$$

$$\frac{d^2 V}{d \beta^2} = \frac{d^2 V}{d \varepsilon^2} \left(\frac{d \varepsilon}{d \beta}\right)^2 + \frac{d V}{d \varepsilon} \quad \frac{d^2 \varepsilon}{d \beta^2}$$

$$\frac{d^2 V}{d \gamma^2} = \frac{d^2 V}{d \varepsilon^2} \left(\frac{d \varepsilon}{d \gamma}\right)^2 + \frac{d V}{d \varepsilon} \quad \frac{d^2 \varepsilon}{d \gamma^2}$$

donc en posant :

(10) $$\Delta^2 \varepsilon = \frac{d^2 \varepsilon}{d \alpha^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{d \beta^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{d \gamma^2}$$

on a à la place de (9) :

(11) $$\frac{d^2 V}{d \varepsilon^2} \cdot h^2 + \frac{d V}{d \varepsilon} \cdot \Delta^2 \varepsilon = o$$

d'ou l'on tire :

(12) $$\frac{d V}{d \varepsilon} = C\, e^{-\int \frac{\Delta^2 \varepsilon}{h^2} d \varepsilon}$$

C désigne une quantité indépendante de ε. On a donc :

(13) $$A = C\, h\, e^{-\int \frac{\Delta^2 \varepsilon}{h^2} d \varepsilon}$$

il reste pour achever le problème, à trouver : 1.° h et $\Delta^2 \varepsilon$ en fonction de ε ; 2.° à déterminer la constante C.

1.°

L'équation qui lie ε à $\alpha\, \beta\, \gamma$ est :

(14) $$\alpha + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2 p + 4 \varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2 q + 4 \varepsilon}$$

On en tire par la dérivation les valeurs suivantes en posant :

(15) $$\varpi = 1 + \frac{4 \beta^2}{(2 p + 4 \varepsilon)^2} + \frac{4 \gamma^2}{(2 q + 4 \varepsilon)^2}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\,\varepsilon}{d\,\alpha} &= -\frac{1}{\varpi} \\
\frac{d\,\varepsilon}{d\,\beta} &= \frac{1}{\varpi}\,\frac{2\,\beta}{2\,p+4\,\varepsilon} \\
\frac{d\,\varepsilon}{d\,\gamma} &= \frac{1}{\varpi}\,\frac{2\,\gamma}{2\,q+4\,\varepsilon}
\end{aligned}\right.$$

et aussi

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\,\varepsilon}{d\alpha^2} &= \frac{1}{\varpi^3}\,\frac{3\,2\,\beta^2}{(2\,p+4\,\varepsilon)^3} + \frac{1}{\varpi^3}\,\frac{3\,2\,\gamma^2}{(2\,q+4\,\varepsilon)^3} \\
\frac{d^2\,\varepsilon}{d\beta^2} &= \frac{1}{\varpi}\,\frac{2}{2\,p+4\varepsilon} - \frac{1}{\varpi^2}\,\frac{3\,2\,\beta^2}{(2\,p+4\,\varepsilon)^3} + \frac{1}{\varpi^3}\,\frac{4\,\beta^2}{(2\,p+4\,\varepsilon)^2}\left[\frac{3\,2\,\beta^2}{(2\,p+4\,\varepsilon)^3} + \frac{3\,2\,\gamma^2}{(2\,q+4\,\varepsilon)^3}\right] \\
\frac{d^2\,\varepsilon}{d\gamma^2} &= \frac{1}{\varpi}\,\frac{2}{2\,q+4\varepsilon} - \frac{1}{\varpi^2}\,\frac{3\,2\,\gamma^2}{(2\,q+4\,\varepsilon)^3} + \frac{1}{\varpi^3}\,\frac{4\,\gamma^2}{(2\,q+4\,\varepsilon)^2}\left[\frac{3\,2\,\beta^2}{(2\,p+4\,\varepsilon)^3} + \frac{3\,2\,\gamma^2}{(2\,q+4\,\varepsilon)^3}\right]
\end{aligned}\right.$$

Donc :

(16) $$h^2 = \frac{1}{\varpi}$$

(17) $$\Delta^2\,\varepsilon = \frac{1}{\varpi}\left[\frac{2}{2\,p+4\,\varepsilon} + \frac{2}{2\,q+4\,\varepsilon}\right]$$

De ces valeurs on tire :

(18) $$\frac{\Delta^2\,\varepsilon}{h^2} = \frac{2}{2\,p+4\,\varepsilon} + \frac{2}{2\,q+4\,\varepsilon}$$

Or :

$$\int^{\varepsilon} \frac{\Delta^2\,\varepsilon}{h^2}\,d\,\varepsilon = \frac{1}{2}\int^{\varepsilon}\frac{2\,d\,\varepsilon}{p+2\,\varepsilon} + \frac{1}{2}\int^{\varepsilon}\frac{2\,d\,\varepsilon}{q+2\,\varepsilon} = \frac{1}{2}\,l\,(p+2\varepsilon)\,(q+2\varepsilon) = l\sqrt{(p+2\,\varepsilon)\,(q+2\,\varepsilon)},$$

donc enfin :

(19) $$\mathrm{A} = \frac{2\,\mathrm{C}}{\sqrt{\varpi}\;\sqrt{(2\,p+4\,\varepsilon)\,(2\,q+4\,\varepsilon)}}$$

2.°

Pour déterminer la constante nous remarquerons que par l'équation (19) nous avons une première valeur de l'attraction quand le point est sur la couche ellipsoïdale ; il suffit de faire $\varepsilon = o$, on obtient :

$$(20)\qquad A' = \frac{2\,C}{\sqrt{4pq}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{p^2}+\frac{\gamma^2}{q^2}}}$$

cherchons à déterminer directement cette attraction.

Supposons le point O très-voisin de la couche (*fig. 4*), la ligne nommée O ξ dans le n° IV est très-voisine de la normale à la surface menée par O. Menons une sécante OAB à laquelle correspondent deux volumes infiniments petits en A et B, menons la corde et la sous-corde correspondantes, joignons aussi OIS, menons la sous-corde SH correspondante à cette sécante, enfin abaissons de S une perpendiculaire sur O ξ.

L'angle GOB $= \theta$,' et les lignes AG, IG peuvent être regardées comme des lignes droites, perpendiculaires sur OG.

Cela posé, on a trouvé pour l'attraction des deux élémens réunis A et B, au n.° IV.

$$2\,\rho\,\omega\,\frac{SD}{AB}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Or:

$$\frac{SD}{AB} = \lim \frac{SD}{OB}$$

Mais:

$$\frac{SD}{OA\,.\,OB} = \frac{SH}{OI\,.\,OS}$$

donc:

$$\frac{SD}{OB} = \frac{OA\,.\,SH}{OI\,.\,OS}$$

multipliant les deux termes du second membre par *cos* θ, et remarquant que OA. *cos* $\theta =$ OG, il vient :

$$\frac{SD}{OB} = \frac{OG\,.\,SH}{\cos\theta\,.\,OI\,.\,OS}$$

Des deux triangles OIG, OSP, on tire :

$$\frac{OI}{OS} = \frac{OG}{OP}$$

substituant OG dans l'équation précédente, il nous vient enfin :

$$\frac{SD}{OB} = \frac{OP\,.\,SH}{\cos\theta\,.\,OS^2}$$

si le point O vient sur la surface même (*fig. 5*), ce second membre garde sa forme première; on a donc pour l'attraction des deux élémens en O et B

$$2\,\rho\,\omega\,\frac{\mathrm{OP.\,SH}}{\overline{\mathrm{OS}}^2}\,\frac{Sin\,\theta}{\cos\,\theta}\,d\,\theta\,d\,\varphi$$

sa composante suivant la normale O ξ sera :

$$2\,\rho\,\omega\,\frac{\mathrm{OP.\,SH}}{\overline{\mathrm{OS}}^2}\,Sin\,\theta\,d\,\theta\,d\,\varphi$$

en intégrant pour θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et pour φ de 0 à $2\,\pi$, on aura pour l'attraction totale,

(21) $$A' = 4\,\pi\,\rho\,\omega\,\frac{\mathrm{OP.\,SH}}{\overline{\mathrm{OS}}^2}$$

Ainsi en comparant à (20), on a :

(22) $$C = 2\,\pi\,\rho\,\omega\,\frac{\mathrm{OP.\,SH}}{\overline{\mathrm{OS}}^2}\,\sqrt{4\,p\,q}\,\sqrt{1+\frac{\beta^2}{p^2}+\frac{\gamma^2}{q^2}}$$

Cette expression se simplifie considérablement : en effet si on mène l'ordonnée de O, on obtient :

$$\mathrm{SK} = \alpha = \frac{\overline{\mathrm{OS}}^2}{\mathrm{SH}}$$

donc :

$$C = 2\,\pi\,\rho\,\omega\,\frac{\mathrm{OP}}{\alpha}\,\sqrt{4\,p\,q}\,\sqrt{1+\frac{\beta^2}{p^2}+\frac{\gamma^2}{q}}$$

D'ailleurs OP est la perpendiculaire abaissée de S sur le plan tangent en O, or on trouve pour cette perpendiculaire :

$$\mathrm{OP} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\beta^2}{p^2}+\frac{\gamma^2}{q^2}}}$$

on a donc enfin :

(23) $$C = 2\,\pi\,\rho\,\omega\,\sqrt{4\,p\,q}$$

On aura donc enfin pour l'attraction cherchée

(24) $$A = \frac{4\,\pi\,\rho\,\omega\,\sqrt{4\,p\,q}}{\sqrt{(2\,p+4\,\varepsilon)\,(2\,q+4\,\varepsilon)}\,\sqrt{1+\frac{4\,\beta^2}{(2\,p+4\,\varepsilon)^2}+\frac{4\,\gamma^2}{(2\,q+4\,\varepsilon)^2}}}$$

Remarque I. — Il faut remarquer que l'on a pour les composantes de l'attraction :

$$X = \frac{dV}{d\alpha} = \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$$

$$Y = \frac{dV}{d\beta} = \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\beta}$$

$$Z = \frac{dV}{d\gamma} = \frac{dV}{d\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\gamma}$$

et pour l'attraction totale :

$$A = + \sqrt{\left(\frac{dV}{d\varepsilon}\right)^2 . h^2}$$

ou bien :

$$A = \pm \frac{dV}{d\varepsilon} . h$$

le signe + devant être pris si $\frac{dV}{d\varepsilon}$ est positif, et le signe — si $\frac{dV}{d\varepsilon}$ est négatif, car h est une quantité positive si on se borne au signe + du radical pour $\sqrt{\varpi}$. En d'autres termes on doit prendre pour A la valeur absolue de $h\,\frac{dV}{d\varepsilon}$.

Il faut remarquer par conséquent que la valeur de $\frac{dV}{d\varepsilon}$ ne peut se déduire de A qu'en valeur absolue, et non en signe. Le signe se trouve directement. On voit ici que $\frac{dV}{d\varepsilon}$ est négatif car X est positif d'après la direction de A, et $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ est négatif, d'après le calcul fait précédemment. On a donc

$$(25) \qquad \frac{dV}{d\varepsilon} = - \frac{4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}$$

Cette remarque est indispensable dans l'écriture des composantes X Y Z, et dans le calcul qui aurait pour objet de trouver le potentiel V.

Remarque II. — Comme vérification nous pouvons chercher à déduire la valeur que nous avons trouvée directement pour A de celle que M. Chasles donne pour l'attraction d'une couche ellipsoïdale. Dans le mémoire cité (tome XV du *Journal de l'école Polytechnique*, page 279) je trouve :

$$(26)\ A = \frac{4\pi\rho\, bc\, da}{a_1\sqrt{a_1^2+b^2-a^2}\sqrt{a_1^2+c^2-a^2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{a_1^4}+\frac{\beta^2}{(a_1^2+b^2-a^2)^2}+\frac{\gamma^2}{(a_1^2+c^2-a^2)^2}}}$$

dans laquelle :

a, b, c — sont les axes principaux de la surface extérieure de la couche attirante

$d\,a$ — la distance des deux sommets des ellipsoïdes qui limitent cette couche

a_1 — l'axe principal analogue à a de l'ellipsoïde homofocal passant par le point α, β, γ.

Posons : $$a_1 = a + \delta$$

la limite de δ quand a augmentera indéfiniment sera ε, puisque nous avons désigné par cette lettre la distance des sommets des paraboloïdes homofocaux.

Transportons l'origine au sommet de l'ellipsoïde attirant, situé à gauche du centre, et en laissant fixe les foyers des sections principales, posons :

$$b^2 = ap - \frac{p^2}{4}$$

$$c^2 = aq - \frac{q^2}{4}$$

observons enfin que $d\,a$ est ce que nous avons appelé ω ; il viendra

$$= \frac{4\pi\rho\omega\sqrt{ap-\frac{p^2}{4}}\sqrt{aq-\frac{q^2}{4}}.}{(a+\delta)\sqrt{2a\delta+\delta^2+ap-\frac{p^2}{4}}\sqrt{2a\delta+\delta^2+qa-\frac{q^2}{4}}\sqrt{\frac{(a-\alpha)^2}{(a+\delta)^4}+\frac{\beta^2}{\left(2a\delta+\delta^2+ap-\frac{p^2}{4}\right)^2}+\frac{\gamma^2}{\left(2a\delta+\delta^2+aq-\frac{q^2}{4}\right)^2}}}$$

Faisons maintenant croitre a indéfiniment et nous obtiendrons la limite suivante :

$$A = \frac{4\pi\rho\omega\sqrt{pq}}{\sqrt{(p+2\varepsilon)(q+2\varepsilon)}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{(p+2\varepsilon)^2}+\frac{\gamma^2}{(q+2\varepsilon)^2}}}$$

ou bien :

$$A = \frac{4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}\sqrt{1+\frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}+\frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}$$

c'est justement l'expression que nous avons trouvée d'une manière directe.

VI.

Valeur de l'attraction d'une couche finie comprise entre deux paraboloïdes isothétiques.

Nous avons pour les composantes de l'attraction d'une couche infiniment mince :

$$(1)\quad \begin{cases} X = \dfrac{4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}}{\varpi\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} \\ Y = -\dfrac{8\pi\rho\omega\beta\sqrt{4pq}}{\varpi\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}\,(2p+4\varepsilon)} \\ Z = -\dfrac{8\pi\rho\omega\gamma\sqrt{4pq}}{\varpi\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}\,(2q+4\varepsilon)} \\ \varpi = 1 + \dfrac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \dfrac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2} \end{cases}$$

si l'on intègre ces formules entre deux valeurs extrêmes de ε correspondant aux deux paraboloïdes isothétiques qui terminent la couche, on aura les composantes de l'attraction totale. Avant d'effectuer l'intégration, il faut remplacer ω par sa valeur en ε.

Nous remarquerons d'abord que ces composantes auraient gardé exactement la même forme si nous avions pris pour paraboloïde, non pas celui qui a son sommet à l'origine, mais celui-ci quelconque :

$$(2)\qquad x - k = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q}$$

Le paraboloïde homofocal passant par le point $\alpha\beta\gamma$ serait alors :

$$(3)\qquad x - k + \varepsilon = \frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon}$$

par conséquent ε serait déterminé par l'équation :

$$(4)\qquad \gamma - k + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon}$$

on voit donc que ε est fonction de k

augmentons k de ω, on aura :

$$-\omega + d\varepsilon = -\frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}\,d\varepsilon - \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}\,d\varepsilon$$

ou bien :

(5) $$\omega = \varpi \,.\, d\varepsilon$$

Les composantes de l'attraction deviennent donc :

(6) $$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{4\pi\rho\sqrt{4pq}\;d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} \\ Y &= -\frac{8\pi\rho\beta\sqrt{4pq}\;d\varepsilon}{(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} \\ Z &= -\frac{8\pi\rho\gamma\sqrt{4pq}\;d\varepsilon}{(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} \end{aligned} \right.$$

Actuellement on peut supposer que k varie de o à une certaine valeur, si on nomme ε_0 la valeur correspondante à $k = o$, déterminée par :

(7) $$\alpha + \varepsilon_0 = \frac{\beta^2}{2p + 4\varepsilon_0} + \frac{\gamma^2}{2q + 4\varepsilon_0}$$

si en outre on suppose ρ une fonction quelconque de k, en posant :

(8) $$\rho = \mathrm{F}(k) = \mathrm{F}\left[\alpha + \varepsilon - \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} - \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon}\right]$$

on aura pour les composantes de l'attraction totale que nous appellerons U V W

$$\mathrm{U} = 4\pi\sqrt{4pq}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\rho\, d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}$$

$$\mathrm{V} = -8\pi\beta\sqrt{4pq}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\rho\, d\varepsilon}{(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2q+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}$$

$$\mathrm{W} = -8\pi\gamma\sqrt{4pq}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\rho\, d\varepsilon}{(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}$$

On peut parvenir à ces formules d'une manière toute différente et encore plus simple par la théorie des *points correspondants ;* en suivant une marche semblable à celle de M. Chasles dans un mémoire inséré au tome V du Journal de M. Liouville.

VII.

Propriétés de l'attraction d'une couche paraboloïdale sur divers points de l'espace.

THÉORÈME I. — *Le maximum d'attraction d'une couche paraboloïdale sur des points matériels égaux placés en divers points d'une surface de niveau a lieu quand le point est au sommet.*

En effet nous avons trouvé pour la valeur de l'attraction exercée par une couche infiniment mince :

$$(1)\qquad A = \frac{4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}\sqrt{1+\frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}+\frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}$$

Cette quantité devient maximum, ε ne variant pas, quand

$$\beta = o \qquad \gamma = o$$

ce qui donne
$$\alpha = -\varepsilon$$

en vertu de l'équation :

$$(2)\qquad \alpha + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon}$$

On voit de plus par l'équation (1), que A tend vers zéro quand le point $(\alpha\beta\gamma)$ s'éloigne indéfiniment sur la nappe infinie de la surface de niveau. Ce théorème d'ailleurs n'est qu'un cas particulier du suivant.

THÉORÈME II. — *Les attractions que la couche exerce sur divers points d'une même surface de niveau, sont proportionnelles aux épaisseurs en ces points d'une couche infiniment mince qui a pour paroi externe cette surface, et pour paroi interne une surface isothétique.*

En effet soit O le point $\alpha\beta\gamma$ sur le paraboloïde homofocal à celui qui termine la couche attirante (*fig.* 6), soit

$$\omega' = \mathrm{OI}$$

la distance des deux paraboloïdes isothétiques; soit :

$$\mathrm{OO}' = \delta n$$

la portion de normale comprise entre ces deux couches. Si nous désignons par $l\, m\, n$ les *cos.* des angles que la normale $\overline{\mathrm{ON}}$ fait avec les axes, on aura

$$(3)\qquad \frac{l}{-1}=\frac{m}{\dfrac{2\beta}{2p+4\varepsilon}}=\frac{n}{\dfrac{2\gamma}{2q+4\varepsilon}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}+\dfrac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}$$

d'ailleurs

$$\delta n = l\,\omega'$$

donc

$$(4)\qquad \frac{\delta n}{\omega'}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}+\dfrac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}$$

Transportons cette valeur dans A, elle devient :

$$(5)\qquad \mathrm{A}=\frac{4\pi\rho\,\omega\,\delta n\,\sqrt{4pq}}{\omega'\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}$$

expression qui démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME III. — *Les attractions que la couche exerce sur divers points d'une même surface de niveau sont en raison inverse des épaisseurs en ces points de la couche comprise entre cette surface, et la surface de niveau infiniment voisine.*

En effet prenons les notations de la première figure, et soit OO′ l'épaisseur de la couche formée par deux surfaces de niveau infiniment voisines; par le point O menons une parallèle à l'axe des x, et soit $\mathrm{O\,I} = d\,\alpha$, la ligne comprise. Les deux surfaces de niveau ont pour équations :

$$\alpha+\varepsilon=\frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon}+\frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon}$$

$$\alpha'+\varepsilon'=\frac{\beta'^2}{2p+4\varepsilon'}+\frac{\gamma'^2}{2q+4\varepsilon'}$$

si le point I infiniment voisin qui la détermine a même β et même γ que le premier O, il vient en retranchant :

$$d\,\alpha+d\,\varepsilon=-\frac{4\beta^2\,d\varepsilon}{(2p+4\varepsilon)^2}-\frac{4\gamma^2\,d\varepsilon}{(2q+4\varepsilon)^2}$$

ainsi :

$$(6)\qquad d\alpha = -\left[1 + \frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}\right] d\varepsilon$$

mais on a : $$OO' = dn = d\alpha \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}$$

donc :

$$(7)\qquad dn = -d\varepsilon \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}$$

donc il vient pour A

$$(8)\qquad A = -\frac{4\pi\rho\omega\, d\varepsilon \sqrt{4pq}}{dn \sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}$$

Or ce qui varie sur une même surface de niveau c'est dn seulement.

Le 12 mars 1852.

Vu et approuvé,

Le Doyen,

MILNE EDWARS.

Permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de la Seine,

CAYX.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Variation des Constantes arbitraires dans les Problêmes de la Mécanique céleste.

INTRODUCTION.

La méthode si féconde de la variation des constantes arbitraires dans les problêmes de la Mécanique céleste est due à l'illustre Lagrange. On sait que son emploi ramène la recherche des perturbations à l'intégration d'un système d'équations simultanées du premier ordre, dans lesquelles entrent quinze coefficients indépendants du temps explicitement. M. Cauchy a donné dans les comptes rendus (1840, 2.^{e} sem.) une méthode très-remarquable pour faire cette intégration. D'ailleurs, M. Binet, envisageant la question de la variarion des constantes sous un point de vue analytique plus général (28.^{e} cahier du Journ. de l'Ec. Pol.) a fait voir que l'on peut s'affranchir du calcul direct des quinze coefficients, et trouver en même temps toutes les équations du mouvement troublé.

Appliquer la théorie de M. Binet seulement au problême de la mécanique céleste ; retrouver par sa méthode les variations des éléments elliptiques sous la forme simple donnée par M. Cauchy dans le mémoire cité plus haut ; sous la forme plus complexe employée par Poisson (tome VIII du Journ. de l'Ecole Polytech.) ; enfin intégrer ces équations en suivant la méthode de M. Cauchy ; tel est le but de cette thèse. Je l'ai divisée en trois parties, dont voici le programme sommaire :

Dans la première j'établis d'une manière que je crois nouvelle les équations générales du mouvement ou entre la fonction T des forces vives. La démonstration de ces équations a été donnée avec toute la généralité désirable par M. Vieille, dans le tome X du Journal de M. Liouville ; je crois l'avoir rendue plus simple encore. J'applique ensuite à ces équations particulières la méthode générale de M. Binet, et j'en conclus la marche à suivre dans tous les cas pour passer le plus rapidement possible du mouvement primitif au mouvement troublé.

Dans la seconde partie, je fais l'application de la théorie précédente au mouvement des planètes en suivant encore les indications de M. Binet pour le cas plus général d'un corps attiré vers un centre fixe par une force fonction quelconque de la distance. En prenant les éléments elliptiques choisis par M. Cauchy, je retrouve les équations de ce géomètre (Compt. rend., 1840, 2.e sem., page 512). Enfin, je développe les transformations indiquées dans le mémoire de M. Binet, et relatives au changement des éléments elliptiques, j'en conclus les variations employées par M. Liouville, dans son cours au Collége de France, en 1840 (voir la thèse de Victor Puyseux, même année (*)). Ces équations sont celles de Poisson, à une constante près.

Dans la troisième partie, je n'ai fait que reproduire à peu près le mémoire de M. Cauchy, cité plus haut.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — Equations génerales de la dynamique.

Les équations du mouvement d'un système de points sont données par l'équation

$$(1) \qquad \sum \left\{ \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\} = o$$

qui résulte du principe des vitesses virtuelles appliqué au principe de Dalembert. Il faut joindre à cette équation les suivantes entre $t\ x\ y\ z$.

(*) Une faute de signe s'est glissée dans la cinquième formule de M. Puyseux, il faut un signe + au lieu du second signe —.

$$(2) \qquad L = 0 \qquad M = 0 \qquad \ldots\ldots$$

qui expriment les liaisons des points du système. Admettons que

$$(3) \qquad \sum (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \delta V$$

V ne contenant que $x\ y\ z$ ... et non leurs dérivées $x'\ y'\ z'$, relatives au temps. Posons de plus suivant la notation habituelle :

$$(4) \qquad T = \frac{1}{2} \sum m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

On aura évidemment :

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \frac{d}{dt}\,\Sigma\, m\,(x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z)$$

$$- \Sigma\, m\,(x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z')$$

$$= \frac{d}{dt}\,\Sigma\left(\frac{dT}{dx'}\delta x + \frac{dT}{dy'}\delta y + \frac{dT}{dz'}\delta z\right) - \delta T$$

On peut donc mettre l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{dT}{dx'}\delta x + \frac{dT}{dy'}\delta y + \frac{dT}{dz'}\delta z\right) = \delta T + \delta V$$

Ou bien en posant :

$$(5) \qquad T + V = U$$

et remarquant de plus que V ne contient pas les dérivées $x'\ y'\ z'$ ..., sous la forme :

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{dU}{dx'}\delta x + \frac{dU}{dy'}\delta y + \frac{dU}{dz'}\delta z\right) = \delta U$$

Cette équation unie aux équations (2) peut donner toutes les équations du mouvement.

Cela posé prenons le mot *Coordonnées* dans son sens le plus général pour désigner un ensemble de variables propres à fixer la position d'un système de points. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'équation* (6) *contient toutes les équations du mouvement pour un premier système de coordonnées, une équation toute semblable les contiendra toutes aussi quand on substituera aux premières coordonnées le système des variables* $\theta\ \varphi\ \psi$... *réduites au plus petit nombre possible* k–i, *si entre les premières au nombre de* k, *il y avait* i *équations de condition.*

En effet les anciennes variables sont des fonctions de t, et des nouvelles θ, φ, ψ... qui suffisent à la détermination des points du système, par exemple :

$$x = \text{fonct}\,(t, \theta, \varphi, \psi \ldots)$$

donc en différentiant par rapport à t, et désignant par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ... les dérivées partielles de $x\,y$ ... relativement au temps, s'il entre dans les valeurs de ces variables d'une manière explicite, on aura :

$$(7)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dx}{d\theta}\theta' + \dfrac{dx}{d\varphi}\varphi' + \ldots \\ y' = \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dy}{d\theta}\theta' + \dfrac{dy}{d\varphi}\varphi' + \ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

et aussi :

$$(8)\quad \begin{cases} \delta x = \dfrac{dx}{d\theta}\delta\theta + \dfrac{dx}{d\varphi}\delta\varphi \\ \delta y = \dfrac{dy}{d\theta}\delta\theta + \dfrac{dy}{d\varphi}\delta\varphi \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Car les δ doivent être pris sans faire varier le temps. La quantité U est une fonction de $t\,x\,y\,z \ldots x'\,y'\,z' \ldots$; par la substitution des valeurs de $x\,y\,z \ldots x'\,y'\,z'$ en fonction de $t\,\theta\,\varphi\,\psi \ldots \theta'\,\varphi'\,\psi' \ldots$; elle devient fonction de $t\,\theta\,\varphi\,\psi \ldots \theta'\,\varphi'\,\psi' \ldots$ mais $\theta'\,\varphi'\,\psi' \ldots$ n'y entrent que par $x'\,y'\,z' \ldots$; donc :

$$\frac{dU}{d\theta'} = \frac{dU}{dx'}\frac{dx'}{d\theta'} + \frac{dU}{dy'}\frac{dy'}{d\theta'} + \frac{dU}{dz'}\frac{dz'}{d\theta'} + \ldots$$

ou bien à cause des équations (7)

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{d\theta'} = \dfrac{dU}{dx'}\dfrac{dx}{d\theta} + \dfrac{dU}{dy'}\dfrac{dy}{d\theta} + \dfrac{dU}{dz'}\dfrac{dz}{d\theta} + \ldots \\ \dfrac{dU}{d\varphi'} = \dfrac{dU}{dx'}\dfrac{dx}{d\varphi} + \dfrac{dU}{dy'}\dfrac{dy}{d\varphi} + \dfrac{dU}{dz'}\dfrac{dz}{d\varphi} + \ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Multiplions ces dernières équations respectivement par $\delta\theta\ \delta\varphi\ \delta\psi \ldots$ et ajoutons, il nous viendra en désignant par Σ une somme de termes semblables s'étendant à toutes les variables $\theta\ \varphi\ \psi \ldots$

$$\sum \frac{dU}{d\theta'}\delta\theta = \frac{dU}{dx'}\left(\frac{dx}{d\theta}\delta\theta + \frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi + \ldots\right) + \frac{dU}{dy'}\left(\frac{dy}{d\theta}\delta\theta + \frac{dy}{d\varphi}\delta\varphi + \ldots\right) + \ldots$$

ou bien en tenant compte des équations (8)

$$\sum \frac{dU}{d\theta'}\delta\theta = \left(\frac{dU}{dx'}\delta x + \frac{dU}{dy'}\delta y + \frac{dU}{dz'}\delta z\right)$$

Si donc nous désignons encore par δU la variation de U rapportée aux nouvelles coordonnées, l'équation (6) se transformera en cette autre toute semblable :

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\sum \frac{dU}{d\theta'}\delta\theta = \delta U$$

Les nouvelles variables n'ayant entr'elles aucune relation, cette seule équation conduira aux k-i équations du mouvement, en identifiant les coefficients des mêmes variations.

Il résulte du théorème que nous venons de démontrer, que réciproquement si du système des variables $\theta\ \varphi\ \psi$... réduites au plus petit nombre possible, on veut passer à un autre système de variables.

$$\xi\ \eta\ \zeta \ldots\ldots$$

qui auraient entr'elles un certain nombre de relations

$$\lambda = 0 \qquad \mu = 0 \ldots\ldots$$

ou t pourrait entrer explicitement, l'équation (11) sera remplacée par une autre toute semblable

$$(12) \qquad \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{dU}{d\xi'}\delta\xi + \frac{dU}{d\eta'}\delta\eta + \frac{dU}{d\zeta'}\delta\zeta\right) = \delta U$$

unie à

$$(13) \qquad \lambda = 0 \qquad \mu = 0$$

et l'équation (12) combinée avec les relations (13) donnera encore toutes les équations du mouvement.

Enfin si l'on voulait passer directement du système des coordonnées $x\ y\ z$... au système des coordonnées $\xi\ \eta\ \zeta$... en nombre différent, on voit que l'ensemble des relations (2) et (6), devra être remplacé par l'ensemble des relations analogues (12) et (13).

§ II. — Propriétés des équations intégrales du mouvement.

Admettons que dans un problème le nombre des variables propres à fixer la position de chacun des points du système ait été réduit au minimum p; les équations différentielles du problème seront données par la seule relation

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\sum \frac{dU}{d\theta'}\,\delta\theta = \delta U$$

U étant définie par l'équation.

$$(2) \qquad T + V = U$$

L'intégration des p équations qui résultent de (1), fournira pour les variables des valeurs fonctions du temps et de $2p$ constantes arbitraires

$$a,\, b,\, c\ldots\ldots$$

si l'on mettait dans l'équation (1) ces valeurs de $\theta\ \varphi\ \psi\ldots$ il y aurait identité entre les deux membres, quelles que fussent les variations $\delta\theta\ \delta\varphi\ldots$; on peut donc supposer que ces variations résultent d'accroissements arbitraires

$$\delta a\ \ \delta b\ \ \delta c\ldots\ldots$$

donnés aux constantes de l'intégration. D'ailleurs cette équation ayant lieu indépendamment de toute valeur attribuée à chacune des quantités

$$a,\, b,\, c\ldots\ldots\,\delta a,\, \delta b,\, \delta c\ldots\ldots$$

on peut donner à ces constantes a, b, c... de nouveaux accroissements complètement arbitraires et indépendants des premiers. Nous les désignerons par

$$\Delta a,\, \Delta b,\, \Delta c\ldots\ldots$$

et nous désignerons par Δ F l'accroissement de toute fonction résultant de ces variations. On aura donc l'identité :

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\sum \Delta\left(\frac{dU}{d\theta'}\,\delta\theta\right) = \Delta\,\delta U$$

Nous aurions pu supposer les constantes différentiées d'abord par Δ et puis les différentier par δ, par le même raisonnement. On peut donc échanger dans l'identité (3) les deux caractéristiques δ et Δ, et l'on aura la nouvelle identité .

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\sum \delta\left(\frac{dU}{d\theta'}\,\Delta\theta\right) = \delta\,\Delta U$$

Par la soustraction nous en concluons la nouvelle identité :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum \delta\left(\frac{dU}{d\theta'}\,\Delta\theta\right) - \sum \Delta\left(\frac{dU}{d\theta'}\,\delta\theta\right)\right] = o$$

ou plus simplement ·

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\left[\sum \delta\frac{dU}{d\theta'}.\Delta\,\theta - \sum \Delta\frac{dU}{d\theta'}.\,\delta\,\theta\right] = o$$

Il faut bien entendre cette relation (5) : les variables $\theta\ \phi\ldots$ y sont supposées remplacées par leurs valeurs en $t, a, b, c\ldots$, les variations $\delta\theta\ldots\ \Delta\theta\ldots$ par leurs valeurs en $t\ a\ b\ c\ldots\ \delta a\ldots\ \Delta a\ldots$, en sorte que la parenthèse est une fonction de $t, a, b\ldots\ \delta a,\ \delta b\ldots\ \Delta a,\ \Delta b\ldots$.. Or l'identité (5) nous apprend que, ces substitutions faites dans la parenthèse, t disparaît, et qu'elle ne renferme plus que :

$$a, b, c\ldots\ \delta a, \delta b, \delta c\ldots\ \Delta a, \Delta b, \Delta c\ldots$$

Cette parenthèse est donc une constante, nous la désignerons par la notation $[\delta, \Delta]$, en sorte qu'on a pour définition :

$$(6) \qquad [\delta, \Delta] = \sum \delta\frac{dU}{d\theta'}.\Delta\,\theta - \sum \Delta\frac{dU}{d\theta'}.\,\delta\,\theta$$

Remarque I. — Dans le second membre de la relation (6) les δ et les Δ sont complétement arbitraires et indépendants des uns des autres ; on peut donc en supposer nuls autant qu'on voudra. Si par exemple on suppose tous les Δ nuls à l'exception de

$$\Delta\,a$$

et tous les δ nuls à l'exception de

$$\delta\,b$$

on obtient :

$$(7) \qquad \Delta\,a\,\delta\,b\left[\frac{d\theta}{da}\ \frac{d^2U}{d\,b\,d\theta'} - \frac{d\theta}{db}\ \frac{d^2U}{d\,a\,d\theta'} + \ldots\right] = \text{const.}$$

En d'autres termes, les termes en t disparaissent dans la parenthèse (7), si aux variables on substitue leurs valeurs en $t\ a\ b\ldots$ Nous tombons ainsi sur les parenthèses de Lagrange. et nous démontrons leur importante propriété *(tome* I *de la mécanique analytique. p.* 328*)*. Mais on voit que notre équation (6) est beaucoup plus générale.

Remarque II. — On peut arriver d'une autre manière à la relation (6) et au théorème qui en dépend.

Supposons que dans l'équation (1)

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}\sum\frac{dU}{d\theta'}\,\delta\,\theta = \delta\,U$$

on ait mis pour $\theta\ \phi\ldots\ \delta\theta\ \delta\varphi\ldots$ leurs valeurs en $t\ a\ b\ c\ldots\ \delta a\ \delta b\ \delta c\ldots$, les deux membres identiques seront des fonctions de $t\ a\ldots\ \delta a\ldots$ Donc en intégrant on aura l'identité:

$$\left[\sum \frac{dU}{d\theta'} \delta\theta\right]_0^t = \int_0^t \delta U . dt = \delta \int_0^t U\, dt \tag{9}$$

car le δ indique une variation prise dans une fonction sans faire varier le temps. Désignons par $\delta\theta_0$ $\delta\phi_0$ ... les valeurs de $\delta\theta$ $\delta\phi$... en t, a, b... δa δb... ou pour t on a mis zéro, l'identité (9) devient la suivante :

$$\sum \frac{dU}{d\theta'} \delta\theta = \sum \left(\frac{dU}{d\theta'}\right)_0 \delta\theta_0 + \delta \int_0^t U\, dt \tag{10}$$

On peut actuellement donner aux constantes de nouveaux accroissements

$$\Delta a \quad \Delta b \quad \Delta c \dots$$

entièrement arbitraires et indépendants des premiers, il en résultera l'identité

$$\sum \Delta \left\{\frac{dU}{d\theta'} \delta\theta\right\} = \sum \Delta \left\{\left(\frac{dU}{d\theta'}\right)_0 \delta\theta_0\right\} + \Delta\delta \int_0^t U\, dt$$

si on échange ensuite les caractéristiques au moyen du raisonnement déjà employé, on obtiendra

$$\sum \delta \left\{\frac{dU}{d\theta'} \Delta\theta\right\} = \sum \delta \left\{\left(\frac{dU}{d\theta'}\right)_0 \Delta\theta_0\right\} + \delta\Delta \int_0^t U\, dt$$

et en soustrayant on aura enfin cette dernière relation identique :

$$\sum \delta \frac{dU}{d\theta'} . \Delta\theta - \sum \Delta \frac{dU}{d\theta'} . \delta\theta = \sum \delta \left(\frac{dU}{d\theta'}\right)_0 . \Delta\theta_0 - \sum \Delta \left(\frac{dU}{d\theta'}\right)_0 . \delta\theta_0 \tag{11}$$

qui conduit aux mêmes conclusions que la relation (6).

L'identité (10) est à remarquer. On y voit que

$$\sum \frac{dU}{d\theta'} . \delta\theta$$

après la substitution des variables en $t\, a$... δa ... se compose de deux parties dont l'une ne contient pas le temps explicitement, et dont l'autre est une variation exacte par δ d'une fonction qui renferme le temps. On voit donc que si l'on avait pour but de calculer $[\delta, \Delta]$, après avoir formé

$$\sum \frac{dU}{d\theta'} . \delta\theta$$

en fonction de $t, a, b, \ldots \delta a, \delta b \ldots$ on pourrait alors sans inconvénient y faire $t = 0$, et continuer avec le résultat ainsi obtenu, car la fonction de t donnée par $\int_0^t U\, dt$, disparait dans $[\delta, \Delta]$ après l'échange des caractéristiques δ et Δ, et la soustraction. Mais il ne faut pas oublier qu'on ne doit faire $t = 0$ qu'après la substitution des variables exprimées en $t\; a, b, c \ldots \delta a, \delta b, \delta c$.

§ III. — Calcul de la constante désignée par $[\delta, \Delta]$.

Le calcul de cette constante est comme nous le verrons plus loin très-important dans la théorie des perturbations, voici deux procédés pour y arriver simplement.

PREMIER PROCÉDÉ.

1.° On formera l'expression :

$$\sum \frac{dU}{d\theta'} \delta\theta = \frac{dU}{d_{\theta}'} \delta\theta + \frac{dU}{d\varphi'} \delta\varphi + \ldots\ldots.$$

en mettant pour les variables $\theta\; \varphi \ldots$ les valeurs données par l'intégration en $t\; a\; b\; c \ldots$ On remplacera aussi $\delta\theta\;\; \delta\varphi \ldots$ par leurs valeurs tirées des mêmes équations en $t\; a, b, \ldots \delta a, \delta b \ldots$ La somme précédente prendra la forme :

$$A\,\delta a + B\,\delta b + C\,\delta c + \ldots..$$

$A, B, C \ldots$ désignant certaines fonctions de $t\; a, b, c \ldots$

D'après la dernière remarque précédente on peut laisser dans cette somme t algébriquement, ou lui donner une valeur particulière quelconque.

Si on trouve une variation exacte δR dans cette somme, on peut la négliger pour la suite des calculs, car les termes auxquels elle donnera lieu dans $[\delta, \Delta]$ se détruiront. On peut donc en particulier négliger tous les termes qui ne renferment qu'une seule constante, comme par exemple

$$f(t, a)\, \delta a$$

car de pareilles termes sont des variations exactes de certaines fonctions.

Si on rencontre dans cette somme des termes de la forme $S\,\delta R$, comme on a identiquement :

$$S\,\delta R = \delta(S\,R) - R\,\delta S$$

on pourra négliger le premier terme $\delta(SR)$, et prendre $-R\,\delta S$ qui peut être d'un emploi plus commode que le terme primitif.

2.° La somme précédente étant réduite à son expression la plus simple on la différentiera par Δ, ce qui donnera :

$$\Delta A.\ \delta a + \Delta B.\ \delta b + \Delta C.\ \delta c + \ldots$$

3.° On intervertira l'ordre des caractéristiques ce qui conduira à :

$$\delta A.\ \Delta a + \delta B.\ \Delta b + \delta C.\ \Delta c + \ldots$$

4.° Enfin du dernier résultat on retranchera le précédent, ce qui donnera :

$$[\delta, \Delta] = \delta A.\ \Delta a - \Delta A.\ \delta a + \ldots$$

Et si l'on veut, on peut ordonner après le développement par rapport à Δa, Δb...

DEUXIÈME PROCÉDÉ.

On peut encore opérer de la manière suivante

1.° On formera d'abord :

$$\frac{dU}{d\theta'}\ \frac{dU}{d\varphi'}\ldots.$$

en fonction des variables $\theta\ \varphi\ \psi\ldots$

2.° On différentiera par δ chacune de ces expressions, ce qui donnera :

$$\delta\frac{dU}{d\theta'} = \frac{d^2 U}{d\theta'\,d\theta}\delta\theta + \frac{d^2 U}{d\theta'\,d\varphi}\delta\varphi + \frac{d^2 U}{d\theta'\,d\psi}\delta\psi + \ldots$$
$$\delta\frac{dU}{d\varphi'} = \frac{d^2 U}{d\varphi'\,d\theta}\delta\theta + \frac{d^2 U}{d\varphi'\,d\varphi}\delta\varphi + \frac{d^2 U}{d\varphi'\,d\psi}\delta\psi + \ldots$$
$$\ldots\ldots$$

3.° Dans chacune de ces expressions on remplacera les variables $\theta\ \varphi\ \psi\ldots$ et leurs variations par leurs valeurs en fonction de $t\ a\ b\ldots\ \delta a\ \delta b\ldots$; ces expressions deviendront :

$$\delta\frac{dU}{d\theta'} = A\,\delta a + B\,\delta b + C\,\delta c + \ldots.$$
$$\delta\frac{dU}{d\varphi'} = A_1\,\delta a + B_1\,\delta b + C_1\,c + \ldots.$$
$$\ldots\ldots$$

4.° On multipliera respectivement ces sommes par $\Delta\theta\ \Delta\varphi\ldots$ qui se déduiront de

$\delta\theta$ $\delta\varphi$... trouvés précédemment; on ajoutera en négligeant dans la somme tous les termes renfermant les deux variations d'une même lettre, tels que

$$P\,\delta a \Delta a$$

On négligera encore deux termes qui en présentant les variations de deux lettres différentes, auraient le même coefficient, tels que

$$P\,\delta a\,\Delta b + P\,\Delta a\,\delta b$$

5.° On changera enfin l'ordre des caractéristiques, et l'on retranchera le dernier résultat du premier, ce qui donnera évidemment la constante

$$[\delta, \Delta] = \sum \delta \frac{dU}{d\theta'} \,.\, \Delta\theta - \sum \Delta \frac{dU}{d\theta'} \,.\, \delta\theta$$

Avant cette dernière opération, il est clair qu'on a pu donner au temps une valeur particulière quelconque.

§ IV. — Mouvements troublés.

L'équation (11) du § I donne pour les équations différentielles du mouvement :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{dU}{d\theta'} = \dfrac{dU}{d\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dU}{d\varphi} = \dfrac{dU}{d\varphi} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

en même nombre que les variables θ φ ... Supposons que les seconds membres se trouvent augmentés de nouvelles quantités, résultant de l'introduction de nouvelles forces dans le système. Si

$$(\theta) \qquad (\varphi) \ldots\ldots$$

désignent les fonctions de t θ φ ψ ... résultant de cette introduction; les nouvelles équations différentielles seront :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{dU}{d\theta'} = \dfrac{dU}{d\theta} + (\theta) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dU}{d\varphi'} = \dfrac{dU}{d\varphi} + (\varphi) \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Nous supposerons même, ce qui n'arrive pas dans les problèmes d'astronomie, que (θ) (φ) ... puissent contenir θ' φ'... Le mouvement donné par les équations (2) se nomme *mouvement troublé*, par rapport à celui des équations (1), qui en est une première approximation, si (θ) (φ)... sont des quantités petites par rapport à celles qu'elles accompagnent, quel que soit t.

Supposons qu'on ait intégré généralement les équations (1) ; θ φ... seront donnés en fonction du temps et de $2p$ constantes arbitraires, on aura donc :

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta = \text{fonct.}\ (t, a, b, c\ldots) \\ \varphi = \text{fonct.}\ (t, a, b, c\ldots) \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Ces intégrales peuvent être regardées comme celles des équations (2), pourvu que a, b, c... soient considérées comme des fonctions du temps convenablement choisies. Pour trouver ces fonctions du temps, il suffit d'exprimer que les fonctions (3) satisfont aux équations (2); mais comme nous n'aurons ainsi qu'un nombre p d'équations de condition, nous pourrons en outre assujettir ces fonctions à p nouvelles conditions que nous choisirons.

Nous désignerons par d la différentielle complète d'une fonction en considérant $t\,a\,b\,c$... comme variables; par δ la différentielle qu'on obtient en faisant varier seulement les paramètres $a\,b\,c$... et par un accent ou par D_t la dérivée prise en faisant varier seulement t, sans faire varier les constantes. D'après cela on aura :

$$(4)\qquad \begin{cases} d\,\theta = \theta'\,dt + \delta\theta \\ d\,\varphi = \varphi'\,dt + \delta\varphi \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

et aussi :

$$(5)\qquad \begin{cases} \delta\theta = \dfrac{d\theta}{da}\,\delta a + \dfrac{d\theta}{db}\,\delta b + \ldots \\ \delta\varphi = \dfrac{d\varphi}{da}\,\delta a + \dfrac{d\varphi}{db}\,\delta b + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supposons que $\delta\theta$, $\delta\varphi$ soient nulles, c'est-à-dire que l'on ait entre les variations $\delta a\,\delta b$... au nombre de $2p$, les p équations :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{da}\,d\,a + \dfrac{d\theta}{db}\,d\,b + \ldots = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{da}\,d\,a + \dfrac{d\varphi}{db}\,d\,b + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations (4) deviendront alors :

$$(7)\qquad \begin{cases} d\,\theta = \theta' \, dt \\ d\,\varphi = \varphi' \, dt \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Les dérivées nouvelles de θ φ... par rapport au temps, seront donc les mêmes fonctions de $t\,a\,b\,c$... que dans le mouvement non troublé, et par suite une fonction quelconque de

$$t\,\theta\,\varphi\,\psi\ldots\ \theta'\,\varphi'\,\psi'\ldots$$

sera la même fonction de $t\,a\,b\,c$ dans les deux mouvements. Notre conclusion s'applique en particulier aux fonctions :

$$\frac{dU}{d\theta}\ \frac{dU}{d\varphi}\ \ldots\ \frac{dU}{d\theta'}\ \frac{dU}{d\varphi'}\ \ldots$$

On aura encore en vertu des notations adoptées :

$$(8)\qquad \begin{cases} d\,\dfrac{dU}{d\theta'} = D_t\,\dfrac{dU}{d\theta'}\,.\,dt + \delta\,\dfrac{dU}{d\theta'} \\ d\,\dfrac{dU}{d\varphi'} = D_t\,\dfrac{dU}{d\varphi'}\,.\,dt + \delta\,\dfrac{dU}{d\varphi,} \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

substituons dans les équations (2) et remarquons que l'on a identiquement à cause des équations (1) :

$$(9)\qquad \begin{cases} D_t\,\dfrac{dU}{d\theta'} = \dfrac{dU}{d\theta} \\ D_t\,\dfrac{dU}{d\varphi'} = \dfrac{dU}{d\varphi} \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

nous conclurons les p conditions suivantes entre $\delta\,a$ $\delta\,b$...

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta\,\dfrac{dU}{d\theta'} = (\theta)\;dt \\ \delta\,\dfrac{dU}{d\varphi'} = (\varphi)\,dt \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations (10) unies aux équations (6) fourniraient par la résolution d'équations du premier degré les valeurs cherchées de $\frac{da}{dt}\frac{db}{dt}\dots$ Mais un artifice ingénieux va nous fournir toutes ces équations en même temps, et nous indiquer un procédé de calcul simple, annoncé dans l'introduction.

Admettons que les fonctions du temps t

$$a,\ b,\ c\dots$$

aient été choisies convenablement pour identifier les équations (10). Donnons à ces fonctions des accroissements arbitraires et indépendants désignés par :

$$\Delta a\ \Delta b\ \Delta c\dots$$

il en résultera pour $\theta\ \varphi\ \psi\dots$ des accroissements arbitraires et indépendants des premiers. Multiplions les identités (10) respectivement par :

$$\Delta\theta\ \Delta\varphi\ \Delta\psi\dots$$

et ajoutons, il viendra l'identité :

$$\sum \delta \frac{dU}{d\theta'} \,.\, \Delta\,\theta = dt\,\Sigma\,(\theta)\,\Delta\,\theta \tag{11}$$

De cette identité retranchons membre à membre cette autre

$$\sum \Delta \frac{dU}{d\theta'} \,.\, \delta\,\theta = 0 \tag{12}$$

qui résulte des équations $\delta\theta = 0\ \delta\phi = 0\dots$; on en conclura encore l'identité :

$$\sum \delta \frac{dU}{d\theta'} \,.\, \Delta\,\theta - \sum \Delta \frac{dU}{d\theta'} \,.\, \delta\theta = d\,t\,\Sigma\,(\theta)\,\Delta\,\theta \tag{13}$$

Mais nous avons vu que le premier membre après la substitution des valeurs trouvées dans le mouvement non troublé pour $\theta\ \varphi\ \psi\dots$ en fonction de $t\ a\ b\dots$ devient une simple fonction de

$$a\ b\ c\ \dots\quad \delta a\ \delta b\ \delta c\ \dots\quad \Delta\,a\ \Delta\,b\ \Delta\,c\ \dots$$

Donc après cette substitution faite et au moyen des notations adoptées nous aurons :

$$[\delta,\ \Delta] = dt\ \Sigma\ (\theta)\ \Delta\ \theta \tag{14}$$

Si on développe le second membre, en mettant pour les variables leurs valeurs, i prendra la forme :

$$[\alpha\,\Delta\,a + \beta\,\Delta\,b + \gamma\,\Delta\,c\dots]\ dt$$

$\alpha\ \beta\ \gamma$... désignant des fonctions de $t\ a\ b\ c$... D'ailleurs le calcul du premier membre de (14) conduit à une expression de la forme:

$$P \Delta a + Q \Delta b + R \Delta c...$$

P Q R... désignant des fonctions indépendantes du temps et linéaires en $\delta a\ \delta b\ \delta c$... ; donc on sera conduit par la seule équation (14) aux $2p$ équations du premier degré, propres à donner $\frac{da}{dt}\ \frac{db}{dt}$...

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P = \alpha\, dt \\ Q = \beta\, dt \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Ainsi, pour conclure, les équations qui donnent $\frac{da}{dt}\ \frac{db}{dt}$... dépendent uniquement de la difficulté de développer $[\delta, \Delta]$. Nous avons vu que la marche du calcul de cette constante est à la *fois simple* et naturelle. La recherche ordinaire des 15 coefficients de Poisson n'est pas sans difficulté, et d'ailleurs pour l'abréger il faut souvent avoir recours à des artifices de calcul qui se présentent peu naturellement.

SECONDE PARTIE.

§ I. — Mouvement elliptique d'une Planète.

Prenons pour origine mobile le centre du soleil, et pour axes de coordonnées dans le mouvement relatif des planètes autour de ce centre, trois axes fixes passant par ce centre, le plan des xy pouvant coïncider avec le plan invariable de notre système planétaire. Réduisons à leurs centres de gravité respectifs les planètes, et soient :

M — la masse du soleil ;

m, m'... les masses des planètes ;

r, r'... leurs distances du soleil ;

ρ... les distances de m aux diverses planètes ;

xyz, $x'y'z'$... les coordonnées rectangulaires relatives de m, m'...

δ... l'angle sous lequel on verrait ρ du centre du soleil.

On trouve facilement que les équations du mouvement de m sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=-\frac{dR}{dx}\\ &\frac{d^2 y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=-\frac{dR}{dy}\\ &\frac{d^2 z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=-\frac{dR}{dz}\end{aligned}\right.$$

ou l'on a :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu = M + m\\ &r^2 = x^2+y^2+z^2, \qquad r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \ldots\\ &\rho^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\\ &\cos\delta = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\\ R &= \frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\ldots-\frac{m'}{\rho}-\ldots\\ &= \frac{m' r}{r'^2}\cos.\,\delta+\ldots-\frac{m'}{\rho}-\ldots\end{aligned}\right.$$

La quantité R se nomme *fonction perturbatrice ;* si cette quantité devenait nulle, le mouvement de la planète serait produit par l'action du soleil seulement. Cette dernière force est très grande par rapport à celle qui provient des planètes, le mouvement de m différera donc peu du mouvement fourni par :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0\\ &\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=0\\ &\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=0\end{aligned}\right.$$

Nous allons d'abord étudier ce mouvement, et pour montrer l'application des diverses parties de la théorie exposée précédemment, nous entrerons ici dans quelques détails, bien que le sujet soit traité dans tous les ouvrages de dynamique. D'ailleurs nous avons besoin de fixer le sens des diverses constantes de l'intégration, que nous allons substituer à celles que l'on considère généralement.

Nous allons substituer aux coordonnés rectangulaires, des coordonnées polaires, qui se présentent assez naturellement dans cette question. Projetons m sur le plan des xy, soit P cette projection. Nommons : θ l'angle de r avec sa projection, ou la latitude de m; φ l'angle du plan z M m avec le plan $z\,x$, ou la longitude de m ; nous aurons :

$$(4) \quad \begin{cases} x = r \cos\theta \cos\varphi \\ y = r \cos\theta \sin\varphi \\ z = r \sin\theta \end{cases}$$

Pour avoir les équations du mouvement dans ce nouveau système de coordonnées, transformons

$$(5) \quad 2T = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

nous trouvons :

$$(6) \quad 2T = r'^2 + r^2\varphi'^2 Cos^2\theta + r^2\theta'^2$$

D'ailleurs :

$$(7) \quad X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta\frac{\mu}{r} = \delta V$$

donc :

$$(8) \quad U = T \div V = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2\cos^2\theta + r^2\theta'^2) + \frac{\mu}{r}$$

on en déduit pour les équations du mouvement :

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{dr'}{dt} = r\varphi'^2\cos^2\theta + r\theta'^2 - \dfrac{\mu}{r^2} \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\varphi'\cos^2\theta) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\theta') = -r^2\varphi'^2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

Nous allons intégrer ces équations.

1.° Le principe des forces vives nous fournit immédiatement l'intégrale

$$T - V + H = 0$$

H étant une constante arbitraire ; cette équation se réduit à :

$$(10) \quad r'^2 + r^2\varphi'^2\cos^2\theta + r^2\theta'^2 = \frac{2\mu}{r} - 2H$$

On retrouverait cette intégrale au moyen des équations (9), en les multipliant respectivement par dr, $d\theta$, $d\varphi$, les ajoutant, et intégrant.

2.° La seconde des équations (9) nous donne :

$$(11) \quad r^2\varphi'\cos^2\theta = C$$

C étant une constante arbitraire, dépendante des conditions initiales, nous la supposerons positive, ce qui est toujours permis, puisque l'on peut prendre le système d'axes, de manière à voir s'exécuter de x à y le mouvement de P.

3.° Eliminons φ' entre (11) et la dernière équation (9), nous aurons :

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = -\frac{C^2 \sin\theta}{r^2 \cos^3\theta}$$

d'où, multipliant par $2\,r^2\,\theta'$ et intégrant :

$$r^4\,\theta'^2 + \frac{C^2}{\cos^2\theta} = K^2 \tag{12}$$

la constante du second membre est essentiellement positive, nous la représentons par le carré d'une quantité, que nous pouvons supposer positive.

4.° Eliminons φ et θ entre les trois intégrales premières que nous venons de trouver, il en résultera toute réduction faite :

$$r\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2\,\mu\,r - 2\,\mathrm{H}\,r^2 - K^2} \tag{13}$$

Nous prendrons le signe +, en supposant que nous considérions le mouvement pendant que r augmente avec le temps. Si on veut avoir le minimum et le maximum de r il suffit d'égaler le radical à zéro. Ce qui donne :

$$2\,\mathrm{H}\,r^2 - 2\,\mu\,r + K^2 = 0 \tag{14}$$

On en conclut pour la valeur minimum de r que nous désignerons par ρ

$$\rho = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 2\,\mathrm{H}K^2}}{2\,\mathrm{H}} \tag{15}$$

Désignons par τ le temps du passage de r par cette valeur minimum, nous conclurons de (13), l'intégrale :

$$t - \tau = \int_\rho^r \frac{r\,d\,r}{\sqrt{2\,\mu\,r - 2\,\mathrm{H}\,r^2 - K^2}} \tag{16}$$

Pour exécuter cette intégration on se sert ordinairement d'une variable auxiliaire u que l'on nomme l'*anomalie excentrique*.

5.° L'équation (11) donne dt ; mettons sa valeur dans l'équation (12) nous en conclurons :

$$\frac{C^2\,d\,\theta^2}{d\,\varphi^2\,\cos^4\theta} + \frac{C^2}{\cos^2\theta} = K^2$$

soit γ l'angle aigu maximum de θ, pour lequel on a $\frac{d\theta}{d\varphi}=o$, on conclut de la précédente relation :

(17) $$C^2 = K^2 \cos^2\gamma \qquad \text{d'où} \qquad C = K\cos\gamma$$

L'équation précédente devient par cette valeur de K^2

$$\frac{1}{\cos^4\varphi}\frac{d\theta^2}{d\varphi^2}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\gamma}$$

d'où en intégrant :

(18) $$\varphi-\alpha = \text{arc }\sin\frac{tg\,\theta}{tg\,\gamma}$$

ou ce qui est la même chose :

(19) $$tg\,\theta = tg\,\gamma\sin(\varphi-\alpha)$$

La quantité α est la valeur de φ répondant à $\theta=o$; c'est donc l'angle du nœud ascendant avec l'axe des x Je dis *nœud ascendant* car pour trouver l'équation (18), j'ai extrait une racine, et en ne prenant que le signe +, j'ai supposé que θ augmentait avec φ.

Cette relation (19) nous apprend un fait important, qui, du reste, résulte immédiatement des équations écrites en coordonnées rectangles, à savoir que la courbe est plane. En effet, la relation (19) est celle qui existe entre deux côtés perpendiculaires.

$$\theta,\ \varphi-\alpha$$

d'un triangle sphérique rectangle, l'hypothénuse formant l'angle constant γ avec le côté $\varphi-\alpha$. L'orbite de m est donc dans un plan incliné de γ sur $x\,y$, et dont la trace fait un angle constant α, avec M x. Désignons par v l'hypothénuse de ce triangle, c'est-à-dire l'angle du rayon vecteur avec la ligne du nœud ascendant, on aura :

(20) $$\left\{\begin{array}{l}\cos v = \cos\theta\cos(\varphi-\alpha)\\ \sin\theta = \sin v\sin\gamma\\ \mathrm{tg}(\varphi-\alpha)=\mathrm{tg}\,v\cos\gamma\end{array}\right.$$

6.° De la dernière des équations (20) nous concluons par la différentiation

$$\frac{d\varphi}{\cos^2(\varphi-\alpha)}=\frac{d\,v\cos\gamma}{\cos^2 v}=\frac{d\,v\cos\gamma}{\cos^2\theta\cos^2(\varphi-\alpha)}$$

et en tenant compte de l'équation (11), et aussi de l'équation (17)

$$\frac{r^2\, dv}{dt} = \mathrm{K} \tag{21}$$

La constante K est donc celle que fournirait le principe des aires appliqué au problème, il est facile de voir que cette quantité représente le moment de la vitesse de la planète relativement au point M, ou la moitié de l'aire décrite dans l'unité de temps. Comme $\mathrm{C} = \mathrm{K}\cos\gamma$, la constante C est la projection sur $x\,y$, de ce moment, ou de cette aire.

En remplaçant dans l'équation (21) dt par sa valeur en r il vient

$$dv = \frac{\mathrm{K}\, dr}{r\sqrt{2\mu r - 2\mathrm{H} r^2 - \mathrm{K}^2}}$$

d'où l'on tire en désignant par ω la longitude héliocentrique du périhélie, c'est-à-dire la valeur de v correspondante à la plus petite valeur de r

$$v - \omega = \int_\rho^r \frac{\mathrm{K}\, dr}{r\sqrt{2\mu r - 2\mathrm{H} r^2 - \mathrm{K}^2}} \tag{22}$$

ou bien :

$$v - \omega = \arc\cos \frac{\mathrm{K}^2 - \mu r}{r\sqrt{\mu^2 - 2\mathrm{HK}^2}} \tag{23}$$

Cette dernière intégrale fait voir la nature de la courbe décrite. C'est une ellipse dont le foyer est le soleil M, si H est positif, car l'excentricité que nous représenterons par ε (*) est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\mathrm{HK}^3}}{\mu}$$

L'intégrale (23) combinée avec les équations (20) et (19), fera connaître θ et φ en fonction de r, qui est connu en fonction du temps au moyen de l'équation (16)

Si on veut revenir des coordonnées polaires, aux coordonnées rectangulaires, on se reportera aux équations (19) et (20), on conclut de la première équation (20)

$$\cos v = \cos\theta\cos\varphi\cos\alpha + \cos\theta\sin\varphi\sin\alpha$$

d'où

$$r\cos v = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

(*) Il nous parait utile de désigner comme M. Cauchy l'excentricité par ε et non par e, car la lettre e représente généralement la base du système népérien des logarithmes, et son usage est fréquent en astronomie.

de la seconde équation (20) on tire

$$z = r \sin v \sin \gamma$$

de l'équation (19)

$$r \sin v \cos \gamma = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

d'où enfin :

$$(24) \quad \begin{cases} x = r \cos v \cos \alpha - r \sin v \sin \alpha \cos \gamma \\ y = r \cos v \sin \alpha + r \sin v \cos \alpha \cos \gamma \\ z = r \sin v \sin \gamma \end{cases}$$

§ II. — Équations différentielles du mouvement troublé.

En suivant la méthode indiquée dans la première partie, je vais calculer la constante $[\delta, \Delta]$ relative au mouvement elliptique que nous venons d'étudier. Pour cela :

1.° Je forme la somme :

$$S = \frac{dT}{dr'} \delta r + \frac{dT}{d\varphi'} \delta \varphi + \frac{dT}{d\theta'} \delta \theta$$

il s'agit d'y remplacer les variables par leurs valeurs exprimées en fonction de t et des constantes

$$\tau \quad \omega \quad \alpha \qquad H \quad K \quad C$$

de l'intégration. Je remplace d'abord les dérivées de T par leurs valeurs, il vient :

$$(1) \qquad S = r' \delta r + C \delta \varphi + r^2 \theta' \delta \theta$$

puis de la troisième des équations (20), nous concluons :

$$(2) \qquad \delta \varphi = \delta \alpha + \frac{\cos \gamma}{\cos^2 \theta} \delta v - \frac{\sin v \cos v \sin \gamma}{\cos^2 \theta} \delta \gamma$$

et de la seconde

$$\theta' \cos \theta = \cos v \sin \gamma . v'$$

$$\delta \theta . \cos \theta = \cos v \sin \gamma \delta v + \sin v \cos \gamma \delta \gamma$$

d'où

$$r^2 \theta' \delta \theta = \frac{r^2 v'}{\cos^2 \theta} [\cos^2 v \sin^2 \gamma \delta v + \sin v \cos v \sin \gamma \cos \gamma \delta \gamma]$$

$$= \frac{K}{\cos^2 \theta} [\cos^2 v \sin^2 \gamma \delta v + \sin v \cos v \sin \gamma \cos \gamma \delta \gamma]$$

On conclut de là

$$C\,\delta\varphi + r^2\theta'\,\delta\theta = C\,\delta\alpha + K\,\delta v$$

toute réduction faite, on a donc au lieu de (1)

(3) $$S = r'\,\delta r + C\,\delta\alpha + K\,\delta v$$

Pour transformer $r'\,\delta r$, posons :

(4) $$Q = \int_\rho^r \frac{dr\,\sqrt{2\mu r - 2Hr^2 - K^2}}{r}$$

on a d'après l'équation (13) du § précédent :

(5) $$r' = \frac{\sqrt{2\mu r - 2Hr^2 - K^2}}{r}$$

et l'on déduit de l'équation (4) en remarquant que Q est fonction de H, K, r; et de ρ qui est fonction de H et K,

(6) $$\delta Q = \frac{dQ}{dr}\,\delta r + \frac{dQ}{dH}\,\delta H + \frac{dQ}{dK}\,\delta K + \frac{dQ}{d\rho}\,\delta\rho$$

Mais on a :

$$\frac{dQ}{dr} = r'$$

$$\frac{dQ}{dH} = \int_\rho^r \frac{-r\,dr}{\sqrt{2\mu r - 2Hr^2 - K^2}} - \frac{\sqrt{2\mu\rho - 2H\rho^2 - K^2}}{\rho}\,\frac{d\rho}{dH}$$

ou d'après (16) $= -(t - \tau)$

$$\frac{dQ}{dK} = \int_\rho^r \frac{-K\,dr}{r\sqrt{2\mu r - 2Hr^2 - K^2}} - \frac{\sqrt{2\mu\rho - 2H\rho^2 - K^2}}{\rho}\,\frac{d\rho}{dK}$$

ou d'après (22) $= -(v - \omega)$

$$\frac{dQ}{d\rho} = -\frac{\sqrt{2\mu\rho - 2H\rho^2 - K^2}}{\rho} = 0$$

donc il vient :

$$\delta Q = r'\,\delta r + (\tau - t)\,\delta H + (\omega - v)\,\delta K$$

d'où $$S = \delta Q - \tau\,\delta H + t\,\delta H - \omega\,\delta K + v\,\delta K + C\,\delta\alpha + K\,\delta v$$

Nous pouvons négliger δQ, $t\,\delta H$, $v\,\delta K + K\,\delta v$, et remplacer $C\,\delta\alpha$ par $-\alpha\,\delta C$, d'où

$$S = -\alpha\,\delta C - \tau\,\delta H - \omega\,\delta K$$

2.° Je différentie par Δ, j'obtiens

$$\Delta S = -\Delta\alpha\,\delta C - \Delta\tau\,\delta H - \Delta\omega\,\delta K$$

3.° J'intervertis l'ordre des caractéristiques, j'obtiens

$$\delta S = -\delta\alpha\,\Delta C - \delta\tau\,\Delta H - \delta\omega\,\Delta K$$

4.° D'où par la soustraction :

$$[\delta, \Delta] = \Delta\tau\,\delta H + \Delta\omega\,\delta K + \Delta\alpha\,\delta C - \delta\tau\,\Delta H - \delta\omega\,\Delta K - \delta\alpha\,\Delta C \tag{7}$$

Cette expression d'après la méthode indiquée, doit être égalée à $\Sigma\,(\theta)\,\Delta\theta\,.\,dt$, nous avons donc ici

$$\left.\begin{array}{r}\Delta\tau\,\delta H + \Delta\omega\,\delta K + \Delta\alpha\,\delta C \\ -\delta\tau\,\Delta H - \delta\omega\,\Delta K - \delta\alpha\,\Delta C\end{array}\right\} = dt \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{dR}{d\tau}\Delta\tau - \dfrac{dR}{d\omega}\Delta\omega - \dfrac{dR}{d\alpha}\Delta\alpha \\ -\dfrac{dR}{dH}\Delta H - \dfrac{dR}{dK}\Delta K - \dfrac{dR}{dC}\Delta C\end{array}\right.$$

D'où l'on conclut pour déterminer les fonctions du temps $\tau\ \omega\ \alpha$ H K C les six équations simples :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dH}{dt} = -\dfrac{dR}{d\tau} & \qquad & \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{dR}{dH} \\ \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{dR}{d\omega} & & \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{dR}{dK} \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{dR}{d\alpha} & & \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dR}{dC} \end{array}\right. \tag{8}$$

Nos six constantes H K C $\tau\,\omega\,\alpha$, ont une signification que nous allons rappeler :

1.° H est la constante introduite par le principe des forces vives, il est facile de voir que cette constante positive représente la force vive de la planète m à l'époque de son passage par l'extrémité du petit axe de l'ellipse qui est son orbite.

En effet v désignant la vitesse de m à l'époque t, la force vive est donnée à la même époque par :

$$\frac{1}{2}\,8^2 = \frac{\mu}{r} - H \tag{9}$$

D'un autre côté la plus grande et la plus petite valeur de r sont déterminées par :

$$(10) \qquad r^2 - \frac{2\mu}{2H} r + \frac{K^2}{2H} = 0$$

et la trajectoire étant une ellipse, les deux racines de cette équation sont :

$$\rho = a(1-\varepsilon) \quad \rho' = a(1+\varepsilon)$$

a, ε désignant respectivement le demi grand axe, et l'excentricité. On a donc :

$$(11) \qquad \mu = 2Ha \quad , \quad \text{ou} \quad H = \frac{\mu}{2a}$$

Quand m passe par l'extrémité du petit axe, on a $r = a$, donc alors la force vive est :

$$\frac{\mu}{a} - H = 2H - H = H$$

ce qu'il fallait prouver.

2.° K est le moment de la vitesse sur le plan de l'orbite, par rapport à l'origine.

3.° C en est la projection sur le plan des xy.

4.° τ est le temps du passage de la planète au périhélie.

5.° ϖ est l'angle de la ligne du périhélie avec la ligne des nœuds, ou la longitude héliocentrique du périhélie.

6.° α est l'angle que fait la ligne du nœud ascendant avec une ligne fixe située sur xy.

Remarque. — En étudiant le mouvement primitif de la planète en coordonnées polaires, nous avons eu un exemple du passage d'un système de variables à un autre. En général on expose le mouvement elliptique en se servant des coordonnées rectilignes $x\, y\, z$; (voir le traité de mécanique de M. Duhamel, tome II). On trouve ainsi simplement pour déterminer r et v en t

$$t - \tau = \int_\rho^r \frac{r\,dr}{\sqrt{2\mu r - 2Hr^2 - K^2}}$$

$$v - \varpi = \int_\rho^r \frac{K\,dr}{r\sqrt{2\mu r - 2Hr^2 - K^2}}$$

et en suite :

$$x = r\cos v \cos\alpha - \frac{r\,C \sin v \sin\alpha}{K}$$

$$y = r\cos v \sin\alpha + \frac{r\,C \sin v \cos\alpha}{K}$$

$$z = \frac{r \sin v \sqrt{K^2 - C^2}}{K}$$

Si avec ce système de coordonnées on veut calculer [δ, Δ] par la méthode de M. Binet; il faut d'abord former en fonction des constantes et de leurs variations : $x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z$. Or on trouve d'abord en indiquant les calculs :

$$x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z =$$

$$\left[\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] r' \delta r + \left[\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2\right] v' \delta v$$

$$+\left(\frac{dx}{dr}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{dr}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{dr}\frac{dz}{dv}\right)(r' \delta v + v' \delta r)$$

$$+ r' \delta\alpha\left(\frac{dx}{dr}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{dr}\frac{dy}{d\alpha}\right) + v' \delta\alpha\left(\frac{dx}{dv}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{dv}\frac{dy}{d\alpha}\right)$$

$$+ r' \delta C\left(\frac{dx}{dr}\frac{dx}{dC} + \frac{dy}{dr}\frac{dy}{dC} + \frac{dz}{dr}\frac{dz}{dC}\right) + v' \delta C\left(\frac{dx}{dv}\frac{dx}{dC} + \frac{dy}{dv}\frac{dy}{dC} + \frac{dz}{dv}\frac{dz}{dC}\right)$$

$$+ r' d K\left(\frac{dx}{dr}\frac{dx}{dK} + \frac{dy}{dr}\frac{dy}{dK} + \frac{dz}{dr}\frac{dz}{dK}\right) + v' \delta K\left(\frac{dx}{dv}\frac{dx}{dK} + \frac{dy}{dv}\frac{dy}{dK} + \frac{dz}{dv}\frac{dz}{dK}\right)$$

Mais $\frac{dx}{dr}$ $\frac{dy}{dr}$ $\frac{dz}{dr}$ sont les cos. des angles que le rayon r fait avec les axes et $\frac{dx}{r\,dv}$, $\frac{dy}{r\,dv}$, $\frac{dz}{r\,dv}$ les cos. des angles que la perpendiculaire à ce rayon fait avec les axes, donc :

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = 1\,; \qquad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = r^2\,;$$

$$\frac{dx}{dr}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{dr}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{dr}\frac{dz}{dv} = 0$$

d'ailleurs le calcul direct montre très-simplement que toutes les autres parenthèses sont nulles à l'exception de celle qui multiplie $v' \delta\alpha$, pour laquelle on trouve

$$\frac{dx}{dv}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{dv}\frac{dy}{d\alpha} = \frac{r^2 C}{K}$$

donc :

$$x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z = r' \delta r + r^2 v' \delta v + r^2 v' \frac{C \delta\alpha}{K} = r' \delta r + K \delta v + C \delta\alpha$$

à partir delà le calcul continue comme précédemment, et au moyen de l'intégrale Q on trouve :

$$x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z = \delta(Q + t\,H + v\,K + \alpha\,C) - \tau\,\delta H - \omega\,\delta K - \alpha\,\delta C$$

§ III. — Changement de Constantes.

On peut avoir besoin de changer de constantes arbitraires pour l'étude des perturbations; nous allons montrer comment s'effectuerait ce changement, en passant de nos équations différentielles (8) à celles qu'on emploie généralement.

Supposons les nouvelles constantes liées aux anciennes par :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} H &= \frac{a^2 n^2}{2} \\ K &= a^2 n \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ C &= a^2 n \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos \gamma \\ n\tau &= -(\zeta - \omega') \\ \omega &= \omega' \\ \alpha &= \alpha' \\ n &= \left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right.$$

Les constantes primitives sont donc remplacées par six autres qui sont :

a —— le demi-grand axe de l'orbite;

ε —— l'excentricité;

ω' —— l'angle de la ligne du nœud ascèndant avec celle du périhélie;

α' —— l'angle de la ligne du nœud ascendant avec l'axe des x;

γ —— l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan des xy;

ζ —— une constante telle qu'au passage au périhélie on ait $n\,t + \zeta - \omega' = o$.

Pour trouver $\frac{da}{dt}\ \frac{d\varepsilon}{dt}\ \frac{d\alpha'}{dt}\ \frac{d\omega'}{dt}\ \frac{d\gamma}{dt}\ \frac{d\zeta}{dt}$, voici la marche que je suis :

1.° Je cherche les dérivées des anciennes constantes en fonction des dérivées des nouvelles constantes, ce qui me donne toute déduction faite :

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dH}{dt} = -\frac{an^2}{2}\frac{da}{dt}\\
&\frac{dK}{dt} = \frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\frac{da}{dt} - \frac{a^2 n \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{d\varepsilon}{dt}\\
&\frac{dC}{dt} = \frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\gamma}{2}\frac{da}{dt} - \frac{a^2 n \varepsilon\cos\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{d\varepsilon}{dt} - a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}\\
&n\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\omega'}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} + \frac{3(\omega'-\zeta)}{2a}\frac{da}{dt}\\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt}\\
&\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha'}{dt}
\end{aligned}
\right.
$$

2.° J'en conclus le tableau (3) des dérivées des anciennes constantes par rapport aux nouvelles dont elles sont des fonctions :

$$
(3)\left\{
\begin{array}{lll}
\frac{dH}{da} = -\frac{an^2}{2} & \frac{dK}{da} = \frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2} & \frac{dC}{da} = \frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\gamma}{2}\\
\frac{dH}{d\varepsilon} = 0 & \frac{dK}{d\varepsilon} = -\frac{a^2 n\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} & \frac{dC}{d\varepsilon} = -\frac{a^2 n\varepsilon\cos\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\\
\frac{dH}{d\alpha'} = 0 & \frac{dK}{d\alpha'} = 0 & \frac{dC}{d\alpha'} = 0\\
\frac{dH}{d\omega'} = 0 & \frac{dK}{d\omega'} = 0 & \frac{dC}{d\omega'} = 0\\
\frac{dH}{d\gamma} = 0 & \frac{dK}{d\gamma} = 0 & \frac{dC}{d\gamma} = -a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma\\
\frac{dH}{d\zeta} = 0 & \frac{dK}{d\zeta} = 0 & \frac{dC}{d\zeta} = 0\\
\\
\frac{d\tau}{da} = \frac{3(\omega'-\zeta)}{2an} & \frac{d\omega}{da} = 0 & \frac{d\alpha}{da} = 0\\
\frac{d\tau}{d\varepsilon} = 0 & \frac{d\omega}{d\varepsilon} = 0 & \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = 0\\
\frac{d\tau}{d\alpha'} = 0 & \frac{d\omega}{d\alpha'} = 0 & \frac{d\alpha}{d\alpha'} = 1\\
\frac{d\tau}{d\omega'} = \frac{1}{n} & \frac{d\omega}{d\omega'} = 1 & \frac{d\alpha}{d\omega'} = 0\\
\frac{d\tau}{d\gamma} = 0 & \frac{d\omega}{d\gamma} = 0 & \frac{d\alpha}{d\gamma} = 0\\
\frac{d\tau}{d\zeta} = -\frac{1}{n} & \frac{d\omega}{d\zeta} = 0 & \frac{d\alpha}{d\zeta} = 0
\end{array}
\right.
$$

3.° Je cherche les dérivées de R par rapport aux nouvelles constantes, et m'aidant des équations (8) du § précédent, et des résultats qui précèdent, je trouve :

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dR}{da} &= \frac{an}{2}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{d\omega'}{dt}\right)+\frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\frac{d\omega'}{dt}+\frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\gamma}{2}\frac{d\alpha'}{dt}\\
\frac{dR}{d\varepsilon} &= -\frac{a^2 n\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{d\omega'}{dt}-\frac{a^2 n\varepsilon\cos\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{d\alpha'}{dt}\\
\frac{dR}{d\alpha'} &= -\frac{an\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\gamma}{2}\frac{da}{dt}+\frac{a^2 n\varepsilon\cos\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{d\varepsilon}{dt}+a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}\\
\frac{dR}{d\omega'} &= \frac{an}{2}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)\frac{da}{dt}+\frac{a^2 n\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{d\varepsilon}{dt}\\
\frac{dR}{d\gamma} &= -a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma\frac{d\alpha'}{dt}\\
\frac{dR}{d\zeta} &= -\frac{an}{2}\frac{da}{dt}
\end{aligned}\right.$$

4.° Je résous enfin ces équations par rapport aux dérivées $\frac{d\,a}{d\,t}$ ... ce qui me donne :

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{an}\frac{dR}{d\zeta}\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2 n\varepsilon}\frac{dR}{d\omega'}+\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}{a^2 n\varepsilon}\frac{dR}{d\zeta}\\
\frac{d\alpha'}{dt} &= -\frac{1}{a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma}\frac{dR}{d\gamma}\\
\frac{d\omega'}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2 n\varepsilon}\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{\cos\gamma}{a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma}\frac{dR}{d\gamma}\\
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma}\frac{dR}{d\alpha}-\frac{\cos\gamma}{a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma}\left(\frac{dR}{d\zeta}+\frac{dR}{d\omega'}\right)\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2}{an}\frac{dR}{da}-\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}{a^2 n\varepsilon}\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{\cos\gamma}{a^2 n\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\gamma}\frac{dR}{d\gamma}
\end{aligned}\right.$$

Ces formules coincideraient avec celles de Poisson en y remplaçant encore $\zeta - \omega$ par ε. Ce sont celles employées par M. Liouville dans son cours, au Collège de France, en 1841. On les retrouve dans la thèse de Victor Puyseux, sur l'invariabilité des grands axes, présentée à la Faculté de Paris.

TROISIÈME PARTIE.

§ I. — Intégration d'un système d'équations différentielles.

1. — Entre les variables principales $x\ y\ z \ldots$ et une dernière variable indépendante t soient les équations différentielles :

$$(1) \qquad dt = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad \ldots.$$

X Y Z... étant des fonctions de $x\ y\ z \ldots t$. Les quantités $x\ y\ z \ldots$ seront des fonctions de t parfaitement déterminées si on les assujettit à vérifier les équations (1), quel que soit t, et à se réduire pour $t = \theta$ respectivement à

$$(2) \qquad \xi \quad \eta \quad \zeta \ldots.$$

soient A B C ... ce que deviennent les fonctions X Y Z... quand aux variables $x\ y\ z \ldots t$ on met, $\xi\ \eta\ \zeta \ldots \theta$; les variations de ces quantités arbitraires seront liées par :

$$(3) \qquad d\,\theta = \frac{d\,\xi}{A} = \frac{d\,\eta}{B} = \frac{d\,\zeta}{C} \ldots.$$

En vertu des relations (1) et (2), $x\ y\ z \ldots$ sont des fonctions parfaitement déterminées de $\xi\ \eta\ \zeta \ldots \theta, t$; on a par exemple :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi\,(\xi, \eta, \zeta \ldots \theta, t) \\ y = \psi\,(\xi, \eta, \zeta \ldots \theta, t) \\ z = \chi\,(\xi, \eta, \zeta \ldots \theta, t) \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

$\varphi\ \psi\ \chi \ldots$ étant assujetties à vérifier identiquement :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \varphi\,(\xi, \eta, \zeta \ldots \theta, \theta) \\ \eta = \psi\,(\xi, \eta, \zeta \ldots \theta, \theta) \\ \zeta = \chi\,(\xi, \eta, \zeta \ldots \theta, \theta) \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

soit d'ailleurs l'équation aux différentielles partielles :

$$(6) \qquad \frac{d\,\Omega}{d\,\theta} + \frac{d\,\Omega}{d\,\xi}\,A + \frac{d\,\Omega}{d\,\eta}\,B + \frac{d\,\Omega}{d\,\zeta}\,C \ldots = o$$

Nous arriverons aux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Les fonctions* (4) *et généralement une fonction déterminée*

$$s = f(x, y, z \dots) \tag{7}$$

de ces fonctions satisfait identiquement à (6).

En effet en vertu des équations (4), s est une fonction de $\xi, \eta, \zeta \dots \theta, t$ donnée par exemple par :

$$s = F(\xi, \eta, \zeta \dots \theta, t) \tag{8}$$

mais comme le système des variables

$$\xi, \eta, \zeta \dots \theta$$

peut varier indépendamment du système des variables :

$$s \; x \; y \; z \dots t$$

les variations $d\xi$, $d\eta \dots d\theta$ satisferont à la relation :

$$\frac{dF}{d\theta} d\theta + \frac{dF}{d\xi} d\xi + \frac{dF}{d\eta} d\eta + \frac{dF}{d\zeta} d\zeta \dots = 0$$

mais à cause des relations (3), il en résulte entre ξ η, $\zeta \dots \theta$, t la relation :

$$\frac{dF}{d\theta} + \frac{dF}{d\xi} A + \frac{dF}{d\eta} B + \frac{dF}{d\zeta} C \dots = 0$$

Cette relation devant avoir lieu quels que soient :

$$\xi \quad \eta \quad \zeta \dots \theta, \quad t.$$

est une identité : ce qu'il fallait démontrer.

Théorème II. — *Soient* φ ψ $\chi \dots$ *des fonctions de* ξ η $\zeta \dots \theta$, t *ayant la double propriété de satisfaire à l'équation* (6) *et de se réduire respectivememt à* ξ, η, $\zeta \dots$ *pour* $t = \theta$, *on aura les intégrales des équations* (1) *en posant :*

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(\xi, \eta, \zeta \dots \theta, t) \\ y = \psi(\xi, \eta, \zeta \dots \theta, t) \\ z = \chi(\xi, \eta, \zeta \dots \theta, t) \\ \dots \end{array}\right. \tag{9}$$

Je remarquerai d'abord que la condition (2) étant satisfaite il reste à prouver que les variations dt dx dy $dz \dots$ sont assujetties aux conditions (1).

Or les quantités ξ, η, $\zeta \dots \theta$, formant un système de variables arbitraires et indépendantes de x y z .. t, nous aurons entre leurs variations les relations :

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\theta} + \dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\theta} + \dfrac{d\varphi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\theta} + \dfrac{d\varphi}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{d\theta} + \cdots = 0 \\ \dfrac{d\psi}{d\theta} + \dfrac{d\psi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\theta} + \dfrac{d\psi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\theta} + \dfrac{d\psi}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{d\theta} + \cdots = 0 \\ \dfrac{d\chi}{d\theta} + \dfrac{d\chi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d_\theta} + \dfrac{d\chi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\theta} + \dfrac{d\chi}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{d\eta} + \cdots = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

En retranchant membre à membre ces inégalités de celles qu'on obtient en exprimant que φ ψ χ ... satisfont à l'équation (6) ; il vient :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\xi}\left(\dfrac{d\xi}{d\theta} - A\right) + \dfrac{d\varphi}{d\eta}\left(\dfrac{d\eta}{d\theta} - B\right) + \dfrac{d\varphi}{d\zeta}\left(\dfrac{d\zeta}{d\theta} = C\right)\cdots = 0 \\ \dfrac{d\psi}{d\xi}\left(\dfrac{d\xi}{d\theta} - A\right) + \dfrac{d\psi}{d\eta}\left(\dfrac{d\eta}{d\theta} - B\right) + \dfrac{d\psi}{d\zeta}\left(\dfrac{d\zeta}{d\theta} - C\right)\cdots = 0 \\ \dfrac{d\chi}{d\xi}\left(\dfrac{d\chi}{d\theta} - A\right) + \dfrac{d\chi}{d\eta}\left(\dfrac{d\eta}{d\theta} - B\right) + \dfrac{d\chi}{d\zeta}\left(\dfrac{d\zeta}{d\theta} = C\right)\cdots = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

Et comme le déterminant des parenthèses n'est pas identiquement nul il faut que l'on ait:

$$(12)\qquad d\,\theta = \frac{d\xi}{dA} = \frac{d\eta}{dB} = \frac{d\zeta}{dC}\cdots$$

Telles sont donc les relations qui lieront entr'elles ξ η ζ... θ, $d\xi$ $d\eta$ ... $d\theta$, dans les hypothèses du théorème II. Comme d'ailleurs ξ η ζ... θ sont des variables indépendantes susceptibles de prendre respectivement les valeurs

$$x \;\; y \;\; z \ldots \; t$$

il en résulte que x y z ... t, dx dy dz ... dt satisfont dans les hypothèses du théorème II aux relations (1) : ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — On est donc ramené généralement à cette question pour intégrer les équations (1) : *trouver une fonction* s *de* ξ, η, ζ ... θ *satisfaisant identiquement à* (6) ; *et se réduisant pour* t $= \theta$ *à une fonction déterminée*

$$\sigma = \mathrm{f}\,(\xi,\ \eta,\ \zeta \ldots)$$

de ξ, η, ζ ... C'est ce que nous allons chercher actuellement.

2. — Posons pour abréger :

$$(13)\qquad \nabla\Omega = A\,\frac{d\Omega}{d\xi} + B\,\frac{d\Omega}{d\eta} + C\,\frac{d\Omega}{d\zeta} + \cdots$$

L'équation (6) prend la forme :

(14) $$\frac{d\Omega}{d\theta} + \nabla \Omega = 0$$

Pour trouver une fonction s de ξ, η, $\zeta \ldots \theta$, t satisfaisant identiquement à (13) et se réduisant pour $t = \theta$ à une fonction déterminée σ de ξ, η, $\zeta \ldots$ il suffit de poser :

(14) $$s = \sigma + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \ldots\ldots$$

σ_1 σ_2 $\sigma_3 \ldots$ étant donnés par :

(15) $$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \int_\theta^t \nabla\sigma \; d\theta \\ \sigma_2 = \int_\theta^t \nabla\sigma_1 \, d\theta \\ \sigma_3 = \int_\theta^t \nabla\sigma_2 \, d\theta \\ \ldots \end{array} \right.$$

en effet on a avec l'équation (14)

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{d\sigma_1}{d\theta} + \frac{d\sigma_2}{d\theta} \ldots = -\nabla\sigma - \nabla\sigma_1 - \nabla\sigma_2 \ldots$$
$$\nabla s = \nabla\sigma + \nabla\sigma_1 + \nabla\sigma_2 \ldots$$

donc c'est bien l'équation (14) unie aux équations (15) qui fournit l'intégrale cherchée, si toutefois la série (14) est convergente.

On peut la mettre sous une autre forme. Pour cela désignons par U_1 U_2 ce que devient une fonction U de ξ, η, $\zeta \ldots \theta$, quand on y met pour θ successivement θ_1 $\theta_2 \ldots$ il est facile de voir que :

$$\sigma_1 = \int_\theta^t \nabla_1 \, \sigma \, d\theta$$
$$\sigma_2 = \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \nabla_1 \, \sigma \, d\theta_2 \, d\theta_1$$

dont l'intégrale cherchée est :

(16) $$s = \sigma + \int_\theta^t \nabla_1 \sigma \, d\theta_1 + \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla^2 \nabla^1 \, \sigma \, d\theta_2 \, d\theta_1 \ldots$$

dans le cas où la série est convergente.

§ II. — Développement de la fonction pertubatrice.

Nous avons trouvé pour la fonction pertubatrice.

$$(1) \qquad R = \sum \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\rho}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les planètes perturbatrices m' m''... D'après ce que nous avons vu dans le mouvement elliptique de m, les coordonnées x y z sont liées aux coordonnées polaires r et v par :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos v \cos \alpha - r \sin v \sin \alpha \cos \gamma \\ y = r \cos v \sin \alpha + r \sin v \cos \alpha \cos \gamma \\ z = r \sin v \sin \gamma \end{array} \right.$$

si u désigne l'anomalie excentrique, on a d'après la formule (16, du § I, 2.me partie).

$$(3) \qquad r = a(1 - \varepsilon \cos u)$$

on en conclut d'après la même formule (16)

$$(4) \qquad n(t - \tau) = T = u - \varepsilon \sin u$$

l'angle T est ce qu'on nomme l'anomalie moyenne. Enfin de l'équation (23) du § I seconde partie, on conclut :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos}(v - \omega) = \dfrac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u} \\[2ex] \operatorname{Sin}(v - \omega) = \dfrac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \sin u}{1 - \varepsilon \cos u} \end{array} \right.$$

En accentuant toutes les lettres ces formules seront relatives aux planètes m' m'' ..

Par la formule (4), et au moyen de la série de Lagrange, u peut être développé en une série de termes proportionnels aux sinus et cosinus des multiples de l'angle T, il en est de même de toute fonction explicite de u, et par suite de r, $\cos v$, $\sin v$, x, y, z. Donc en vertu de la formule (1) R est développable en une série de termes dont l'un quelconque sera proportionnel au sinus ou cosinus de la somme de deux multiples quelconques, des anomalies moyennes ainsi groupées :

$$T,\ T'; \quad T,\ T''; \ \ldots..$$

D'ailleurs comme en vertu de formules connues de semblables sinus ou cosinus s'expriment à l'aide des puissances entières positives nulles ou négatives de deux des exponentielles :

$$e^{T\sqrt{-1}} \qquad e^{T'\sqrt{-1}} \qquad e^{T''\sqrt{-1}} \ldots\ldots$$

R est développable en une série de termes donnée par :

$$R = \sum (m, m')_{p,p'} \, e^{(pT + p'T')\sqrt{-1}} \tag{6}$$

Dans cette formule, $p\ p'$ désignent deux nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, $(m, m')_{p,p'}$ désigne le coefficient indépendant de $T\ T'$, de l'exponentielle dont l'argument est $pT + p'T'$; enfin le signe sommatoire désigne une somme de termes analogues, et s'étend d'une part aux diverses valeurs possibles de p, p'; de l'autre aux diverses planètes perturbatrices m', m'' ...

§ III. — Intégration des équations du mouvement troublé.

Si dans les formules du mouvement elliptique nous mettons les valeurs de $\tau\ \omega\ \alpha$ H K C déterminées par les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{dR}{dH} & \dfrac{dH}{dt} = -\dfrac{dR}{d\tau} \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{dR}{dK} & \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{dR}{d\omega} \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dR}{dC} & \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{dR}{d\alpha} \end{array} \right.$$

nous aurons les intégrales du mouvement troublé (1), or elles sont de la forme étudiée au §. I.

Pour éviter toute confusion nous appellerons :

$$\tau \quad \omega \quad \alpha \quad H \quad K \quad C$$

les valeurs des éléments à une époque θ prise arbitrairement, et

$$\tau_t \quad \alpha_t \quad \omega_t \quad H_t \quad K_t \quad C_t$$

les valeurs de ces mêmes éléments à l'époque variable t. Nous désignerons aussi par

$$\mathcal{R}$$

ce que devient R, quand on y met θ à la place de t, et par suite $\tau\ \omega\ \alpha$ H K C pour les éléments. L'équation *caractéristique* aux différentielles partielles qui fournit toutes les intégrales du système (1) est

$$\frac{d\Omega}{d\theta} + \nabla\Omega = 0 \tag{2}$$

en posant :

$$\nabla\Omega = \frac{d\mathcal{R}}{dH}\frac{d\Omega}{d\tau} - \frac{d\mathcal{R}}{d\tau}\frac{d\Omega}{dH} + \frac{d\mathcal{R}}{dK}\frac{d\Omega}{d\omega} - \frac{d\mathcal{R}}{d\omega}\frac{d\Omega}{dK} + \frac{d\mathcal{R}}{dC}\frac{d\Omega}{d\alpha} - \frac{d\mathcal{R}}{d\alpha}\frac{d\Omega}{dC} \tag{3}$$

Si l'on appelle σ la valeur donnée pour $t = \theta$ d'une fonction déterminée s des éléments $\tau_t\ \omega_t\ \alpha_t\ H_t\ K_t\ C_t$, on a pour la déterminer la formule :

$$s = \sigma + \int_\theta^t \nabla_1 \sigma\, d\theta_1 + \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \nabla_1 \sigma\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots \tag{4}$$

Si on veut en déduire les valeurs des six éléments, il suffit d'y remplacer successivement σ par $\tau\ \omega\ \alpha\ H\ K\ C$, d'ailleurs comme en vertu de la formule (3) on a simplement :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \nabla\tau = \dfrac{d\mathcal{R}}{dH} & \nabla H = -\dfrac{d\mathcal{R}}{d\tau} \\ \nabla\omega = \dfrac{d\mathcal{R}}{dK} & \nabla K = -\dfrac{d\mathcal{R}}{d\omega} \\ \nabla\alpha = \dfrac{d\mathcal{R}}{dC} & \nabla C = -\dfrac{d\mathcal{R}}{d\alpha} \end{array}\right.$$

les valeurs des six éléments sont données par les six équations suivantes :

$$\tau_t = \tau + \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{dH}\, d\theta_1 + \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \frac{d\mathcal{R}_1}{dH}\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots$$

$$\omega_t = \omega + \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{dK}\, d\theta_1 + \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \frac{d\mathcal{R}_1}{dK}\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots$$

$$\alpha_t = \alpha + \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{dC}\, d\theta_1 + \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \frac{d\mathcal{R}_1}{dC}\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots$$

$$H_t = H - \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\tau}\, d\theta_1 - \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \frac{d\mathcal{R}_1}{d\tau}\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots$$

$$K_t = K - \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\omega}\, d\theta_1 - \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \frac{d\mathcal{R}_1}{d\omega}\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots$$

$$C_t = C - \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\alpha}\, d\theta_1 - \int_\theta^t \int_{\theta_1}^t \nabla_2 \frac{d\mathcal{R}_1}{d\alpha}\, d\theta_2\, d\theta_1 + \ldots$$

Il ne faut pas oublier que dans les seconds membres les valeurs des éléments sont rapportées à l'époque θ.

Regardons $m'\ m''\ldots$ les masses des planètes perturbatrices, comme des quantités très-petites du premier ordre; R est alors une quantité très-petite du premier ordre, il en sera de même de $\nabla\,\sigma$, et par suite de toutes les intégrales simples dans les formules qui précèdent. La quantité $\nabla^{0}\ \nabla_{1}\ \sigma$ contiendra à tous ses termes soit le produit de deux masses perturbatrices, soit le carré de l'une de ces masses, elle sera donc du second ordre d e petitesse; aussi toutes les intégrales doubles des formules ci-dessus sont des quantités très-petites du second ordre; et ainsi de suite. On désigne ces diverses parties de la valeurs de s, par le nom d'*inégalités.* On voit donc que les inégalités du premier ordre des six éléments, sont données par :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\tau_1 &= \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\mathrm{H}}\,d\theta_1 = \frac{d}{d\mathrm{H}}\int_\theta^t \mathcal{R}_1\,d\theta_1\\
\omega_1 &= \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\mathrm{K}}\,d\theta_1 = \frac{d}{d\mathrm{K}}\int_\theta^t \mathcal{R}_1\,d\theta_1\\
\alpha_1 &= \int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\mathrm{C}}\,d\theta_1 = \frac{d}{d\mathrm{C}}\int_\theta^t \mathcal{R}_1\,d\theta_1\\
\mathrm{H}_1 &= -\int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\tau}\,d\theta_1 = -\frac{d}{d\tau}\int_\theta^t \mathcal{R}_1\,d\theta_1\\
\mathrm{K}_1 &= -\int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\omega}\,d\theta_1 = -\frac{d}{d\omega}\int_\theta^t \mathcal{R}_1\,d\theta_1\\
\mathrm{C}_1 &= -\int_\theta^t \frac{d\mathcal{R}_1}{d\alpha}\,d\theta_1 = -\frac{d}{d\alpha}\int_\theta^t \mathcal{R}_1\,d\theta_1
\end{aligned}\right.$$

§ IV. — Inégalités séculaires du premier ordre.

Les inégalités du premier ordre dépendent toutes comme l'on voit du calcul de l'intégrale.

$$(1)\qquad \int_\theta^t \mathcal{R}\,d\theta$$

Désignons par $\Theta\ \Theta'$ ce que deviennent les anomalies moyennes $\tau\ \tau'$ quand on y remplace t par θ, nous aurons :

$$(2)\qquad \mathcal{R} = \sum (m, m')_{p,p'}\, e^{(p\Theta + p'\Theta')\sqrt{-1}}$$

le coefficient $(m, m')_{p,p}$ et $\Theta\ \Theta'$ renfermant les valeurs des éléments pour l'époque θ. Or :

$$\Theta = n\,(\theta - \tau) \quad \Theta' = n'\,(\theta - \tau')\ldots$$

donc :

$$p\,\Theta + p'\,\Theta' = (n\,p + n'\,p')\,\theta - (n\,p\,\tau + n'\,p'\,\tau')$$

donc :

$$\mathcal{R} = \sum (m, m')_{p,\,p'}\; e^{(p\,n + p'\,n')\,\theta\sqrt{-1}}\; e^{-(p\,n\,\tau + p'\,n'\,\tau')\sqrt{-1}}$$

donc :

$$\int_\theta^t \mathcal{R}\,d\theta = \sum (m, m')_{p,\,p'}\, e^{-(p\,n\,\tau + p'\,n'\,\tau')\sqrt{-1}} \int_\theta^t e^{(p\,n + p'\,n')\,\theta\sqrt{-1}}$$

$$(3) = \sum (m, m')_{p,\,p'}\, \frac{e^{(p\,n + p'\,n')\,t\sqrt{-1}} - e^{(p\,n + p'\,n')\,\theta\sqrt{-1}}}{(p\,n + p'\,n')\sqrt{-1}}\; e^{(p\,n\,\tau + p'\,n'\,\tau')\sqrt{-1}}$$

Admettons que p p' aient des valeurs telles que :

$$(4) \qquad p\,n + p'\,n' = o$$

la valeur de la fraction qui se trouve dans la formule (3) est alors

$$t - \theta$$

Désignons par S l'ensemble des termes pour lesquels elle n'est pas remplie, la formule (3) devient :

$$(5) \qquad \int_\theta^t \mathcal{R}\,d\theta = \mathrm{S} + \mathrm{P}$$

et l'on a :

$$(6) \quad \mathrm{S} = \sum (m, m')_{p,\,p'}\,(t - \theta)\; e^{-(p\,n\,\tau + p'\,n'\,\tau')\sqrt{-1}}$$

avec $\qquad p\,n + p'\,n' = o$

et :

$$(7) \quad \mathrm{P} = \sum (m, m')_{p,\,p'}\, \frac{e^{(pn + p'\,n')\,t\sqrt{-1}} - e^{(pn + p'\,n')\,\theta\sqrt{-1}}}{(pn + p'\,n')\sqrt{-1}}\; e^{-(pn\,\tau + p'\,n'\,\tau')\sqrt{-1}}$$

avec $\qquad pn + p'\,n' \gtrless 0$

On aura donc en substituant dans les formules du paragraphe précédent par exemple la formule :

$$(8) \qquad H_1 = -\frac{dS}{d\tau} - \frac{dP}{d\tau}$$

et il faut remarquer que $\frac{dS}{d\tau}\ \frac{dS}{d\omega}$ ... renferment $t - \theta$ en facteur dans tous leurs termes, ils croissent donc proportionnellement au temps compté à partir d'une certaine origine ; au contraire dans tous les termes de $\frac{dP}{d\tau}\ \frac{dP}{d\omega}$ ... le temps t sera toujours l'un des facteurs de l'exposant d'une exponentielle népérienne, que l'on peut transformer en sinus ou cosinus. Donc en définitive la variation du premier ordre de chaque élément se compose de deux espèces de termes. Les uns reprennent périodiquement la même valeur, quand leur argument c'est-à-dire l'angle renfermé sous le signe sinus ou cosinus croît d'une ou de plusieurs circonférences ; on les désigne pour cette raison sous le nom de *Inégalités périodiques*. Les autres qui croisent proportionnellement au temps, peuvent être considérés comme provenant du développement de sinus ou cosinus correspondants à des périodes embrassant un grand nombre de siècles, on les nomme *Inégalités séculaires*.

On voit donc que si l'on veut les inégalités séculaires du premier ordre pour l'élément H, on se servira de la formule

$$(9) \qquad H_1 = -\frac{dS}{d\tau}$$

Dans notre système planétaire les moyens mouvements n et n' sont toujours incommensurables, donc la condition (4) ne peut être remplie à moins que :

$$(10) \qquad p = 0 \quad p' = 0$$

Dans ce cas :

$$(11) \qquad S = \sum (m, m')_{0,0} (t - \theta)$$

On en déduit

$$\frac{dS}{d\tau} = 0$$

Donc la variation du premier ordre de l'élément H, n'offrira point d'inégalités séculaires ; il en sera de même du grand axe $2a$ lié à H par

$$(12) \qquad 2a = \frac{\mu}{H}$$

Nous démontrons comme l'on voit d'une manière très-simple et très-générale le beau théorème que Laplace découvrit en 1773, mais en ne tenant compte que des premières puissances des excentricités et des inclinaisons. C'est Lagrange qui le premier en 1776 le démontra dans toute sa généralité.

Le 12 Mars 1852.

Vu et approuvé,

Le Doyen,

MILNE EDWARS.

Permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de la Seine,

CAIX.

Amiens. — Imp. de Duval et Herment.

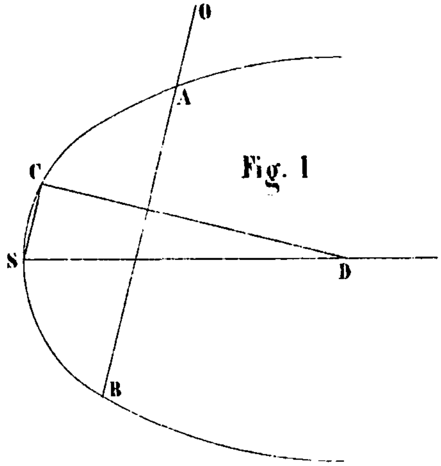

Fig. 1

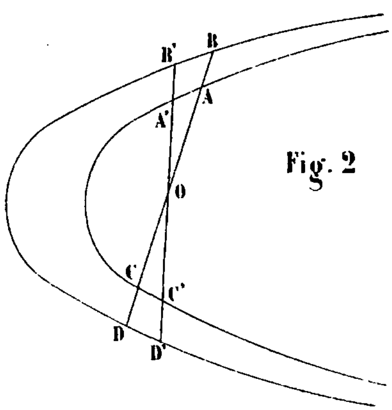

Fig. 2

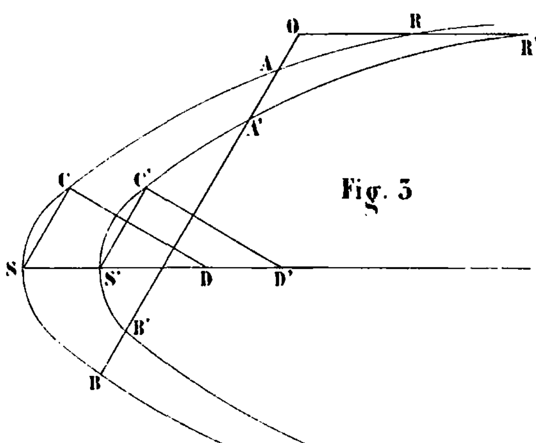

Fig. 3

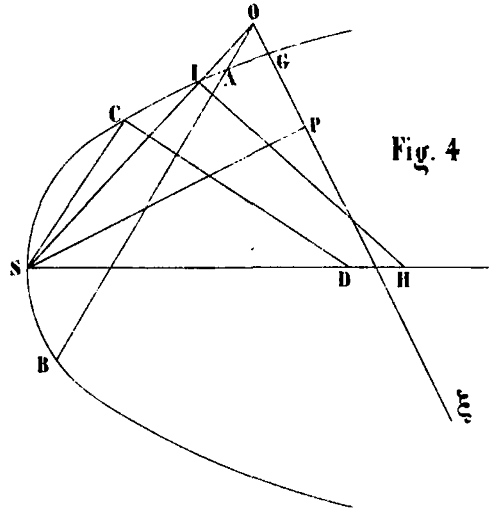

Fig. 4

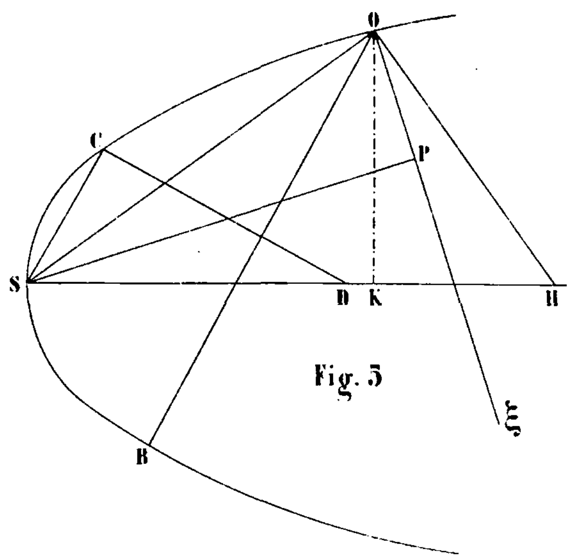

Fig. 5

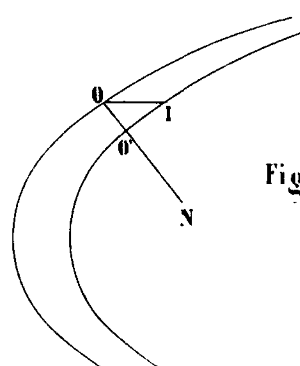

Fig. 6