N° D'ORDRE :
555.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. C. RIQUIER,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Caen.

1re THÈSE. — EXTENSION A L'HYPERESPACE DE LA MÉTHODE DE M. CARL NEUMANN POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES RELATIFS AUX FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES QUI VÉRIFIENT L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $\Delta F = 0$.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 2 avril 1886, devant la Commission d'examen.

MM. HERMITE, *Président.*
DARBOUX, PICARD, } *Examinateurs.*

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8, RUE DE LA SORBONNE, 8

1886

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	JAMIN, Professeur	Physique.
PROFESSEUR HONORAIRE	PASTEUR.	
PROFESSEURS	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
CHARGÉS DE COURS	POINCARÉ	Mécanique physique et et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

Bordeaux. — Imprimerie G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

A MON ANCIEN MAITRE

MONSIEUR G. DARBOUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage de respect et de reconnaissance.

C. RIQUIER.

PREMIÈRE THÈSE.

EXTENSION

À

L'HYPERESPACE

DE LA MÉTHODE

DE M. CARL NEUMANN

POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES RELATIFS AUX FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES QUI VÉRIFIENT L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $\Delta F = 0$.

INTRODUCTION.

Depuis longtemps déjà, les théories de la Mécanique rationnelle et de la Physique mathématique ont conduit les géomètres à l'étude des fonctions de variables réelles qui vérifient l'équation différentielle $\Delta F = 0$. Les recherches se poursuivent dans la voie ouverte par Laplace, Green, Gauss, Thomson, Dirichlet et Riemann, et parmi les travaux remarquables publiés récemment sur ce sujet, il faut citer au premier rang ceux de M. Carl Neumann [1]. L'éminent géomètre s'est occupé des problèmes auxquels donnent lieu les fonctions dont il s'agit, lorsqu'on les assujettit à prendre des valeurs données soit sur un contour, soit sur une surface fermée (suivant qu'il s'agit d'une fonction à deux ou à trois variables), et il est parvenu à les résoudre dans des cas extrêmement étendus par une méthode à la fois très rigoureuse et très élégante. Préoccupé surtout des applications physiques de ses théories, M. Neumann n'a pas cherché à les étendre au cas d'un nombre quelconque de variables : le but principal de notre travail est précisément de faire voir qu'elles subsistent,

---

(1) *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential.* Leipsig, 1877.

indépendamment de ce nombre, et qu'elles s'appliquent, avec les mêmes restrictions, aux surfaces fermées de l'espace à p dimensions.

Après avoir établi rigoureusement les propositions générales relatives aux fonctions de p variables réelles qui vérifient l'équation différentielle $\Delta F = 0$, et avoir énoncé les problèmes dont nous aurons à nous occuper, nous exposons les propriétés d'une intégrale remarquable, à l'aide de laquelle M. Neumann les résout, puis la belle méthode de la *moyenne arithmétique* (chapitres I, II et III). Il nous a semblé que certaines démonstrations de M. Neumann, par la manière même dont il les expose, laissaient subsister quelques doutes dans l'esprit du lecteur : nous nous sommes efforcé de mettre partout en pleine lumière la rigueur parfaite dont la méthode est susceptible (1). Enfin nous avons indiqué brièvement les quelques différences que présente avec le cas général celui des fonctions de *deux* variables.

Le chapitre IV traite du cas particulier de la sphère dans l'espace à p dimensions. Nous en donnons deux solutions directes, extrêmement simples l'une et l'autre, en combinant les propriétés de l'intégrale de M. Neumann tantôt avec celles du potentiel, tantôt avec le théorème de Thomson, préalablement généralisé, sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous retrouvons de cette manière et nous étendons à l'hyperespace les formules connues depuis longtemps pour l'espace à deux et à trois dimensions.

Dans le cas des fonctions de deux variables, et pour la résolution du problème dit *intérieur,* les travaux de M. Neumann se trouvent complétés en grande partie par ceux de M. Schwarz, dont la méthode, extrêmement élégante, suppose essentiellement le nombre des variables égal à deux (2). Le chapitre V est consacré à la résolution du même problème dans quelques cas spéciaux de l'espace à p dimensions auxquels la méthode de la moyenne arithmétique n'est pas applicable : citons entre autres le cas du parallélipipède rectangle. Dans cette partie de notre travail, certaines idées nous ont été suggérées par la lecture d'un passage de Riemann (3), et, comme dans le chapitre précédent, nous avons fait un fréquent usage des propriétés de l'intégrale de M. Neumann.

---

(1) Voir en particulier les numéros 28 et 29.

(2) Dans l'espace à deux dimensions, la méthode de la moyenne arithmétique est applicable à un contour convexe quelconque, le triangle et le quadrilatère exceptés. Dans un de ses mémoires, M. Schwarz traite avec détail le cas d'un polygone limité par des droites ou des arcs de cercle.

(3) *Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernhardt Riemann, bearbeitet von Karl Hattendorf.* Hannover, 1876. Voir le paragraphe intitulé : *Die Green'sche Function für ein Parallelepipedon,* pages 84 à 88.

CHAPITRE PREMIER.

PROPOSITIONS GÉNÉRALES.

1. Avant d'établir les propositions générales relatives aux fonctions de p variables réelles qui vérifient l'équation différentielle :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0,$$

il est indispensable de donner quelques explications sur ce que l'on nomme l'*espace à p dimensions.*

I. Étant donné un déterminant à éléments réels, nous dirons qu'il est *orthogonal* si dans toute ligne la somme des carrés des éléments est égale à l'unité, et si dans toute combinaison de deux lignes la somme des produits des éléments de même rang est égale à zéro. On sait que les mêmes propriétés subsistent alors pour les colonnes, que le déterminant a pour valeur $+1$ ou -1, et que le coefficient de chaque élément dans le déterminant développé est égal à l'élément lui-même multiplié par la valeur du déterminant.

Étant donné un tableau rectangulaire à éléments réels contenant moins de lignes que de colonnes ($p-q$ lignes et p colonnes), si les lignes de ce tableau satisfont aux deux conditions énoncées dans la définition précédente, on peut toujours, en y ajoutant q lignes convenablement choisies, le transformer en un déterminant orthogonal. Il suffit en effet de faire voir que, si l'on ajoute au tableau donné une ligne à éléments réels, on peut toujours choisir les éléments de la ligne ajoutée de telle sorte que le tableau rectangulaire ainsi obtenu satisfasse encore aux deux conditions dont il s'agit. Or, soient

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_p, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1, & g_2, & \ldots, & g_p, \end{array}$$

le tableau donné, et

$$h_1, \quad h_2, \ldots, \quad h_p$$

la ligne ajoutée. Les $p-q$ équations linéaires et homogènes :

$$\begin{array}{l} a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots + a_p h_p = 0, \\ b_1 h_1 + b_2 h_2 + \ldots + b_p h_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots + g_p h_p = 0, \end{array}$$

admettent par rapport aux p inconnues $h_1, h_2, \ldots, h_p$ quelque solution où ces inconnues sont réelles et non nulles à la fois, et où par suite la somme des carrés des inconnues n'est pas nulle. Soit

$$\eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_p$$

l'une de ces solutions; il suffira alors de faire :

$$\frac{h_1}{\eta_1} = \frac{h_2}{\eta_2} = \ldots = \frac{h_p}{\eta_p} = \frac{1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_p^2}}.$$

II. Nous appellerons *point* dans l'espace à p dimensions un système de valeurs réelles particulières attribué aux p variables indépendantes $x, y, \ldots, t$. Par analogie avec ce qui a lieu dans l'espace à deux et à trois dimensions, nous appellerons *changement des coordonnées rectangulaires* dans l'espace à p dimensions le changement de variables défini par les formules suivantes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = x' + a_1\xi + b_1\eta + \ldots + l_1\tau, \\ y = y' + a_2\xi + b_2\eta + \ldots + l_2\tau, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = t' + a_p\xi + b_p\eta + \ldots + l_p\tau, \end{array} \right.$$

où $x', y', \ldots, t'$ désignent les coordonnées d'un point particulier, et où le déterminant formé par les coefficients des nouvelles variables $\xi, \eta, \ldots, \tau$ est supposé orthogonal. Ce changement de variables peut d'ailleurs se décomposer en deux de la manière suivante :

$$(2) \qquad x = x' + (\xi), \quad y = y' + (\eta), \ldots, \quad t = t' + (\tau),$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\xi) = a_1\xi + b_1\eta + \ldots + l_1\tau, \\ (\eta) = a_2\xi + b_2\eta + \ldots + l_2\tau, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\tau) = a_p\xi + b_p\eta + \ldots + l_p\tau. \end{array} \right.$$

Nous dirons encore que par les formules (2) on transporte parallèlement à eux-mêmes les plans coordonnés rectangulaires, que par les formules (3) on change les directions de ces plans sans changer l'origine.

On appelle *distance* de deux points :

$$\begin{array}{lll} x_1, & y_1, \ldots, & t_1, \\ x_2, & y_2, \ldots, & t_2, \end{array}$$

la racine carrée positive de la quantité :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots + (t_1 - t_2)^2.$$

On démontre très facilement que la distance de deux points a une valeur indépendante des plans coordonnés rectangulaires.

Enfin, la transformation définie par les formules (1) n'altère pas la forme de l'équation différentielle $\Delta F = 0$.

III. 1° *Étant donnés dans l'espace à p dimensions p — 1 points :*

$$\begin{array}{llll} x_1, & y_1, & \ldots, & t_1, \\ x_2, & y_2, & \ldots, & t_2, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{p-1}, & y_{p-1}, & \ldots, & t_{p-1}, \end{array}$$

on peut toujours, en changeant la direction des plans coordonnés rectangulaires, annuler p — 1 coordonnées situées dans une même file verticale du tableau ci-dessus.

2° *Étant donné dans l'espace à p dimensions un point quelconque, on peut toujours, en changeant la direction des plans coordonnés rectangulaires, annuler p — 1 de ses coordonnées.*

Les formules pour changer la direction des plans coordonnés sont :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a_1\xi + b_1\eta + \ldots + l_1\tau, \\ y = a_2\xi + b_2\eta + \ldots + l_2\tau, \\ \dotfill \\ t = a_p\xi + b_p\eta + \ldots + l_p\tau, \end{array} \right.$$

et comme le déterminant formé avec les coefficients des nouvelles variables doit être supposé orthogonal, ces formules, résolues par rapport à ξ, η, ..., τ, donnent :

$$(4\ bis)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi = a_1 x + a_2 y + \ldots + a_p t, \\ \eta = b_1 x + b_2 y + \ldots + b_p t, \\ \dotfill \\ \tau = l_1 x + l_2 y + \ldots + l_p t. \end{array} \right.$$

Désignons par

$$\begin{array}{llll} \xi_1, & \eta_1, & \ldots, & \tau_1, \\ \xi_2, & \eta_2, & \ldots, & \tau_2, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \xi_{p-1}, & \eta_{p-1}, & \ldots, & \tau_{p-1}, \end{array}$$

les nouvelles coordonnées des points donnés.

1° On peut disposer des éléments du déterminant des formules (4) de manière à annuler ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{p-1}.

En effet, on doit avoir entre ces éléments les relations :

$$\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 y_1 + \ldots + a_p t_1 = 0, \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 + \ldots + a_p t_2 = 0, \\ \dotfill \\ a_1 x_{p-1} + a_2 y_{p-1} + \ldots + a_p t_{p-1} = 0; \end{array}$$

on en peut tirer pour a_1, a_2, ..., a_p des valeurs réelles, non nulles à la fois, et dont la somme des carrés soit égale à l'unité. Il suffit alors d'ajouter à cette première colonne $p - 1$ colonnes choisies de manière à former un déterminant orthogonal.

2° On peut disposer des éléments du déterminant de manière à annuler η_1, ..., τ_1. Donnons en effet à a_1, a_2, ..., a_p des valeurs proportionnelles à x_1, y_1, ..., t_1, et dont la somme des carrés soit égale à 1; puis ajoutons $p-1$ colonnes choisies de manière à former un déterminant orthogonal : à cause de la proportionnalité supposée, les formules (4 *bis*) donnent des valeurs nulles pour $\eta_1, \ldots, \tau_1$.

2. Si l'on considère tous les systèmes de valeurs qui, substituées aux p lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta, \varepsilon$, vérifient la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + \delta^2 + \varepsilon^2 = 1, \tag{5}$$

il est facile de se rendre compte que l'on obtient une fois et une seule chacun de ces systèmes de valeurs, en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \cos\theta_1, \\ \beta = \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ \gamma = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{p-2} \cos\theta_{p-1}, \\ \varepsilon = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{p-2} \sin\theta_{p-1}, \end{array}\right. \tag{6}$$

avec les inégalités :

$$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi, \quad 0 \leqq \theta_2 \leqq \pi, \ldots, \quad 0 \leqq \theta_{p-2} \leqq \pi, \quad 0 \leqq \theta_{p-1} < 2\pi. \tag{7}$$

Cela étant, si on considère tous les points de l'espace qui se trouvent à la distance ρ d'un point fixe quelconque $x_0, y_0, \ldots, t_0$, c'est à dire qui vérifient la relation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \ldots + (t - t_0)^2 = \rho^2,$$

il est clair que chacun de ces points sera donné une fois et une seule par les formules :

$$x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho, \ldots, \quad t = t_0 + \varepsilon\rho, \tag{8}$$

$\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ étant définis par les relations (6) jointes aux inégalités (7). Si enfin dans les formules (8) on considère ρ comme étant lui-même un paramètre arbitraire pouvant varier de 0 à $+\infty$, les formules (8) donneront une fois et une seule chaque point de l'espace, à l'exception toutefois du point $x_0, y_0, \ldots, t_0$, que l'on obtiendra pour $\rho = 0$, indépendamment des valeurs attribuées aux angles θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_{p-1}$.

3. I. Si dans les formules (8) on considère ρ comme un paramètre arbitraire pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$, et $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ comme des constantes, que l'on peut toujours supposer vérifier la relation (5), l'ensemble des points ainsi obtenus forme une *droite* dans l'espace à p dimensions. Les équations (8) ne changent pas de forme par la transformation des coordonnées rectangulaires : si l'on applique en effet les formules (1) et que l'on désigne par $\xi_0, \eta_0, \ldots, \tau_0$ les nouvelles coordonnées du point $x_0, y_0, \ldots, t_0$, on trouve aisément :

$$\xi = \xi_0 + \alpha' \rho, \quad \eta = \eta_0 + \beta' \rho, \ldots, \quad \tau = \tau_0 + \varepsilon' \rho,$$

où $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ ont les valeurs suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = a_1 \alpha + a_2 \beta + \ldots + a_p \varepsilon, \\ \beta' = b_1 \alpha + b_2 \beta + \ldots + b_p \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon' = l_1 \alpha + l_2 \beta + \ldots + l_p \varepsilon, \end{array} \right.$$

et par conséquent vérifient la relation (5), comme $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$.

Il est évident que la droite (8) est également représentée par les formules :

$$(10) \qquad x = x_0 - \alpha\rho, \quad y = y_0 - \beta\rho, \ldots, \quad t = t_0 - \varepsilon\rho.$$

Il est facile de voir en outre que si $x_1, y_1, \ldots, t_1$ désignent les coordonnées d'un point particulier de la droite (8), cette droite se trouve encore représentée par les formules :

$$x = x_1 + \alpha\rho, \quad y = y_1 + \beta\rho, \ldots, \quad t = t_1 + \varepsilon\rho.$$

Si dans les formules (8) et (10) on assujettit ρ à varier seulement de 0 à $+\infty$, chacun de ces systèmes donne seulement une portion de la droite, et leur réunion la droite tout entière : aussi chacune des portions considérées s'appelle-t-elle une *demi-droite*. Le point $x_0, y_0, \ldots, t_0$ s'appelle le *point initial* de la demi-droite représentée par les formules (8); les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, assujetties à vérifier la relation (5), en sont les *paramètres directeurs,* et les valeurs des angles θ, déterminées au moyen des relations (6), en sont les *angles directeurs.* Deux demi-droites sont dites *parallèles et de même sens,* lorsqu'elles ont les mêmes paramètres directeurs; *parallèles et de sens contraires,* lorsque leurs paramètres directeurs sont égaux et de signes contraires chacun à chacun. Deux demi-droites parallèles, de sens contraires, et ayant même point initial [par exemple (8) et (10)], sont dites *opposées.* Enfin il est facile de calculer les paramètres directeurs d'une demi-droite ayant pour point initial un point donné $x_0, y_0, \ldots, t_0$, et passant par un point donné $x_1, y_1, \ldots, t_1$: car, en appelant d la distance des deux points, on doit avoir :

$$x_1 = x_0 + \alpha d, \quad y_1 = y_0 + \beta d, \ldots, \quad t_1 = t_0 + \varepsilon d,$$

d'où l'on tire les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$.

II. Étant données deux directions respectivement définies par les paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \ldots, \quad \varepsilon,$$

et

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \ldots, \quad \varepsilon_1,$$

on appelle *angle* de ces deux directions l'angle V, compris entre 0 et π, dont le cosinus est donné par la formule :

$$\cos V = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \ldots + \varepsilon\varepsilon_1 \text{ (1)}.$$

On démontre très facilement au moyen des formules (9) que *l'angle de deux directions a une valeur indépendante des plans coordonnés rectangulaires.*

On peut remarquer que deux directions parallèles et de même sens font entre elles un angle nul, et réciproquement; que deux directions parallèles et de sens contraires font entre elles un angle égal à π, et réciproquement.

III. THÉORÈME. *Étant donnés trois points dans l'espace à p dimensions, désignons par a, b, c les longueurs des côtés du triangle formé par ces trois points, et par* A, B, C *les angles respectivement opposés à ces côtés; on a la formule :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Soient en effet

$$\begin{array}{lll} x_1, & y_1, \ldots, & t_1, \\ x_2, & y_2, \ldots, & t_2, \\ x_3, & y_3, \ldots, & t_3, \end{array}$$

les coordonnées des trois sommets A, B, C. On a :

$$a^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \ldots + (t_2 - t_3)^2,$$

ou bien, à cause de l'égalité : $x_2 - x_3 = (x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)$,

$$\begin{aligned} a^2 = {} & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots + (t_1 - t_2)^2 \\ & + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + \ldots + (t_1 - t_3)^2 \\ & - 2\left[(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) + \ldots + (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\right]. \end{aligned}$$

Or, la première ligne du second membre est égale à c^2, et la seconde à b^2; si d'autre part on désigne par

$$\begin{array}{lll} \alpha_2, & \beta_2, \ldots, & \varepsilon_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, \ldots, & \varepsilon_3, \end{array}$$

les paramètres directeurs des côtés AB et AC, on a :

$$\begin{array}{lll} x_2 = x_1 + \alpha_2 c, & y_2 = y_1 + \beta_2 c, \ldots, & t_2 = t_1 + \varepsilon_2 c, \\ x_3 = x_1 + \alpha_3 b, & y_3 = y_1 + \beta_3 b, \ldots, & t_3 = t_1 + \varepsilon_3 b, \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) + \ldots + (t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \\ & \qquad = bc(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \ldots + \varepsilon_2\varepsilon_3) = bc \cos A. \end{aligned}$$

---

(1) Il est facile de voir que le second membre de cette formule ne dépasse pas l'unité en valeur absolue : car l'inégalité

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \ldots + \varepsilon\varepsilon_1)^2 < 1$$

peut s'écrire :

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \ldots + \varepsilon_1^2) - (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \ldots + \varepsilon\varepsilon_1)^2 > 0,$$

et le premier membre de cette dernière peut être converti en une somme de carrés.

Du théorème qui précède on déduit par un calcul élémentaire la formule :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

4. Dans l'espace à p dimensions, si les coordonnées d'un point variable sont des fonctions de $p - 1$ paramètres arbitraires, on dit que ce point décrit une *surface*. Si l'on prend comme paramètres arbitraires $p - 1$ des coordonnées du point, la relation qui détermine la coordonnée restante en fonction des premières s'appelle l'*équation de la surface*.

On appelle *plan* la surface dont l'équation est du premier degré. Soient

$$AX + BY + \ldots + ET + F = 0$$

l'équation d'un plan, et $x, y, \ldots, t$ les coordonnées d'un point particulier du plan; menons par ce point une demi-droite quelconque :

$$(11) \qquad X = x + \alpha\rho, \quad Y = y + \beta\rho, \ldots, \quad T = t + \varepsilon\rho,$$

et substituons à X, Y, ..., T dans l'équation du plan les coordonnées d'un point quelconque de cette demi-droite. En observant que l'équation du plan peut s'écrire :

$$A(X - x) + B(Y - y) + \ldots + E(T - t) = 0,$$

le résultat de la substitution est évidemment :

$$\rho(A\alpha + B\beta + \ldots + E\varepsilon),$$

et comme ρ désigne ici une variable essentiellement positive, ce produit a le signe du second facteur :

$$(12) \qquad A\alpha + B\beta + \ldots + E\varepsilon.$$

Si l'on fait abstraction des demi-droites pour lesquelles cette quantité est nulle et qui sont situées tout entières dans le plan, deux quelconques des autres sont dites situées par rapport au plan du même côté ou de côtés opposés, suivant que leurs paramètres directeurs donnent à la quantité (12) le même signe ou des signes contraires. Par exemple deux demi-droites opposées (ayant pour point initial celui dont il s'agit) sont toujours situées de côtés différents.

Une demi-droite perpendiculaire à toutes celles qui sont contenues dans le plan est dite elle-même perpendiculaire au plan. Il est facile de voir qu'il existe deux demi-droites opposées, partant du point $x, y, \ldots, t$, qui satisfont à cette condition; car en désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ les paramètres directeurs d'une perpendiculaire au plan, et par $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ ceux d'une demi-droite contenue dans le plan, les deux équations :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \ldots + \varepsilon\varepsilon' = 0,$$
$$A\alpha' + B\beta' + \ldots + E\varepsilon' = 0,$$

doivent avoir les mêmes solutions par rapport à α', β', ..., ε', d'où l'on déduit :

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \dots = \frac{\varepsilon}{E} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + \dots + E^2}}.$$

Si, par un point situé dans un plan, on mène une demi-droite perpendiculaire au plan, et une autre demi-droite quelconque, cette dernière fait avec la première un angle aigu ou obtus, suivant qu'elle est située par rapport au plan du même côté ou du côté opposé.

Soient en effet

$$\alpha, \quad \beta, \quad \dots, \quad \varepsilon,$$

et

$$\alpha', \quad \beta', \dots, \quad \varepsilon',$$

les paramètres directeurs de ces deux demi-droites, et V l'angle qu'elles forment; on a :

$$\cos V = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \dots + \varepsilon\varepsilon'$$
$$= \frac{A\alpha' + B\beta' + \dots + E\varepsilon'}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + \dots + E^2}},$$

et

$$A\alpha + B\beta + \dots + E\varepsilon = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + \dots + E^2},$$

les signes se correspondant dans les deux formules. On en tire :

$$\cos V = \frac{A\alpha' + B\beta' + \dots + E\varepsilon'}{A\alpha + B\beta + \dots + E\varepsilon},$$

ce qui démontre la proposition.

5. Considérons maintenant une surface ayant pour équation $f(X, Y, \dots, T) = 0$, et cherchons les droites joignant un point donné de cette surface $x, y, \dots, t$, aux points infiniment voisins. Nous supposerons pour l'instant que le point donné n'est pas un point singulier de la surface, c'est à dire que les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t}$ ne s'y annulent pas à la fois. Les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersection de la droite (11) avec la surface sont données par l'équation :

$$f(x + \alpha\rho, \quad y + \beta\rho, \dots, \quad t + \varepsilon\rho) = 0,$$

ou bien, si on suppose le premier membre développable par la série de Taylor :

$$\rho\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \dots + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \rho^2 \dots = 0.$$

Nous obtiendrons les directions des droites cherchées en exprimant que cette équation a deux racines nulles, et il vient ainsi :

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \dots + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

dès lors ces droites sont toutes contenues dans un même plan, qui a pour équation :

$$(13) \qquad (\mathrm{X}-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(\mathrm{Y}-y)\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+(\mathrm{T}-t)\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

et qu'on appelle le *plan tangent* à la surface au point $x, y, \ldots, t$.

Si par le point de contact on mène une demi-droite non située dans le plan tangent, et que l'on considère sur cette demi-droite une portion suffisamment voisine du point initial, les coordonnées d'un point variable de la portion considérée, substituées successivement dans $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{T})$ et dans le premier membre de (13), donnent des résultats de même signe, savoir :

$$\rho\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\rho^2\ldots,$$

et

$$\rho\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Il suit de là que, si l'on considère dans une portion suffisamment voisine du point de contact deux demi-droites partant de ce point, les coordonnées de deux points pris respectivement sur ces dernières donnent au premier membre de l'équation de la surface le même signe ou des signes contraires, suivant que les demi-droites dont il s'agit sont situées par rapport au plan tangent du même côté ou de côtés opposés.

La droite menée perpendiculairement à un plan tangent par le point de contact est dite *normale* à la surface en ce point. Elle a pour équations :

$$\frac{\mathrm{X}-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\ldots=\frac{\mathrm{T}-t}{\frac{\partial f}{\partial t}},$$

et ses paramètres directeurs sont :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}}, \ldots,$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}},$$

ou bien, en considérant sur la surface la coordonnée x comme une fonction de $y, \ldots, t$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}, \quad \frac{-\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}, \ldots, \quad \frac{-\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}.$$

6. Sur une portion de surface limitée, c'est à dire sur toute l'étendue de laquelle les coordonnées d'un point variable restent finies, considérons l'une d'entre elles comme fonction des $p-1$ coordonnées restantes, x par exemple comme fonction de $y, \ldots, t$; puis, désignant par μ une quantité qui varie d'une manière continue sur cette portion de surface, considérons l'intégrale multiple :

$$\int \cdots \int \mu \times \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dy \ldots dt, \tag{14}$$

où le multiplicateur de μ est pris constamment avec sa valeur positive, et où l'intégration doit s'étendre à toute la portion de surface dont nous venons de parler. Nous nous proposons de faire voir que l'expression (14) ne change pas de forme par la transformation des coordonnées rectangulaires; la chose étant d'ailleurs évidente quand il s'agit d'un simple déplacement d'origine, il suffira de faire la démonstration pour la transformation que définissent les formules (4).

En prenant comme nouvelles variables indépendantes $\eta, \ldots, \tau$, différentiant les $p-1$ dernières formules (4), et remplaçant $d\xi$ par sa valeur $\frac{d\xi}{d\eta}d\eta+\ldots+\frac{d\xi}{d\tau}d\tau$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}
dy=\left(b_2+a_2\frac{d\xi}{d\eta}\right)d\eta+\ldots+\left(l_2+a_2\frac{d\xi}{d\tau}\right)d\tau,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dt=\left(b_p+a_p\frac{d\xi}{d\eta}\right)d\eta+\ldots+\left(l_p+a_p\frac{d\xi}{d\tau}\right)d\tau,
\end{array}\right.$$

et il est facile de voir qu'en vertu des propriétés connues du déterminant orthogonal, le déterminant formé avec les coefficients de $d\eta, \ldots, d\tau$ dans les seconds membres a pour valeur $\pm\left(a_1-b_1\frac{d\xi}{d\eta}-\ldots-l_1\frac{d\xi}{d\tau}\right)\cdot$ Cherchons maintenant les nouvelles expressions des dérivées partielles $\frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{dx}{dt}$, par exemple de la première $\frac{dx}{dy}\cdot$ Les variables qui suivent y étant alors considérées comme des constantes, on tire des formules (4), en remplaçant $d\xi$ par sa valeur :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left(b_3+a_3\frac{d\xi}{d\eta}\right)d\eta+\ldots+\left(l_3+a_3\frac{d\xi}{d\tau}\right)d\tau=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(b_p+a_p\frac{d\xi}{d\eta}\right)d\eta+\ldots+\left(l_p+a_p\frac{d\xi}{d\tau}\right)d\tau=0,
\end{array}\right. \tag{15}$$

et

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\left(b_1+a_1\frac{d\xi}{d\eta}\right)d\eta+\ldots+\left(l_1+a_1\frac{d\xi}{d\tau}\right)d\tau}{\left(b_2+a_2\frac{d\xi}{d\eta}\right)d\eta+\ldots+\left(l_2+a_2\frac{d\xi}{d\tau}\right)d\tau},$$

$d\eta, \ldots, d\tau$ devant être remplacés dans la dernière formule par leurs valeurs tirées de (15). On en déduit facilement :

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{a_2 - b_2 \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_2 \frac{d\xi}{d\tau}}{a_1 - b_1 \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_1 \frac{d\xi}{d\tau}}.$$

Et l'on trouverait des expressions analogues pour les dérivées partielles de x par rapport aux variables suivantes :

$$\pm \frac{a_3 - b_3 \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_3 \frac{d\xi}{d\tau}}{a_1 - b_1 \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_1 \frac{d\xi}{d\tau}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{a_p - b_p \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_p \frac{d\xi}{d\tau}}{a_1 - b_1 \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_1 \frac{d\xi}{d\tau}}.$$

L'expression qui figure sous les signes d'intégration dans la formule (14) devient donc, après la transformation :

$$\mu \times \sqrt{\left(a_1 - b_1 \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_1 \frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \ldots + \left(a_p - b_p \frac{d\xi}{d\eta} - \ldots - l_p \frac{d\xi}{d\tau}\right)^2} \times d\eta \ldots d\tau,$$

ou

$$\mu \sqrt{1 + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2} \cdot d\eta \ldots d\tau,$$

et ainsi se trouve démontré le point que nous avions en vue.

Nous désignerons désormais par $d\sigma$ et nous appellerons *élément de surface* l'élément différentiel $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \, . \, dy \ldots dt$. La valeur de l'intégrale (14), lorsqu'on y suppose $\mu = 1$, se nomme l'*aire* de la portion de surface considérée.

Examinons en particulier le cas de la sphère, c'est à dire de la surface qui a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \ldots + (t - t_0)^2 - R^2 = 0.$$

Il est alors très avantageux de représenter un point variable de la surface sphérique par les formules :

(16) $$x = x_0 + \alpha R, \quad y = y_0 + \beta R, \ldots, \quad t = t_0 + \varepsilon R,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ étant définis par les formules (6), et de choisir comme variables indépendantes les $p-1$ angles qui entrent dans les seconds membres de ces formules. Si l'on pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dy}{d\theta_1} & \frac{dy}{d\theta_2} & \cdots & \frac{dy}{d\theta_{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dt}{d\theta_1} & \frac{dt}{d\theta_2} & \cdots & \frac{dt}{d\theta_{p-1}} \end{vmatrix},$$

et que l'on calcule les éléments de Δ au moyen des formules (16) et (6), on voit facilement que la première colonne de ce déterminant contient en facteur $R \cos \theta_1$, la seconde $R \sin \theta_1$, la troisième $R \sin \theta_1 \sin \theta_2$, etc., enfin la $(p-1)^{\text{ième}}$ $R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-2}$; et que si l'on supprime dans chaque colonne le facteur commun qu'elle contient, le déterminant qui résulte de cette suppression est orthogonal. Il vient dès lors :

$$\Delta = \pm R^{p-1} \cos \theta_1 \sin^{p-2} \theta_1 \sin^{p-3} \theta_2 \ldots \sin^2 \theta_{p-3} \sin \theta_{p-2}.$$

D'autre part, le radical qui figure dans l'expression générale de $d\sigma$ a pour valeur, au signe près :

$$\frac{R}{x - x_0} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\cos \theta_1}.$$

On a donc :

$$\int \mu \, d\sigma = R^{p-1} \iint \cdots \int \mu \sin^{p-2} \theta_1 \sin^{p-3} \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-2} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_{p-1},$$

μ désignant alors une fonction continue des $p-1$ angles. Si l'intégration doit être étendue à toute la surface sphérique, les limites de l'intégration sont 0 et π pour les $p-2$ premiers angles, 0 et 2π pour le dernier.

Quand on suppose $\mu = 1$, l'intégrale multiple qui précède se réduit à un produit de $p-1$ intégrales simples, et on obtient pour l'aire de la surface sphérique :

$$R^{p-1} \times \int_0^{\pi} \sin^{p-2} \theta_1 \, d\theta_1 \times \int_0^{\pi} \sin^{p-3} \theta_2 \, d\theta_2 \times \ldots \times \int_0^{\pi} \sin \theta_{p-2} \, d\theta_{p-2} \times \int_0^{2\pi} d\theta_{p-1}.$$

7. Étant donné un système d'inégalités entre les coordonnées d'un point variable $x, y, \ldots, t$, si d'une part elles entraînent comme conséquence que $x, y, \ldots, t$ restent finies, si d'autre part, considérant deux points quelconques qui satisfont à ces inégalités, on peut toujours *cheminer* de l'un à l'autre d'une manière continue sans que jamais aucune d'elles cesse d'être vérifiée [1], les points qui satisfont aux inégalités dont il s'agit sont dits *intérieurs à une surface*

---

[1] Si $f(x, y, \ldots, t) > 0$ est l'une des inégalités, il faut que l'on puisse cheminer d'un point à l'autre d'une manière continue, sans que jamais $f(x, y, \ldots, t)$ devienne négatif ou nul.

fermée. Il en est ainsi par exemple des points qui satisfont à l'inégalité :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \dots + (t - t_0)^2 - R^2 < 0,$$

ou encore au système d'inégalités :

$$x^2 - a^2 < 0, \quad y^2 - b^2 < 0, \dots, \quad t^2 - e^2 < 0.$$

Dans le premier cas, les points de la surface fermée sont ceux pour lesquels l'inégalité se change en égalité, et les points extérieurs ceux pour lesquels l'inégalité est renversée; dans le second cas, les points de la surface fermée sont ceux pour lesquels une ou plusieurs inégalités se changent en égalités, les inégalités restantes ne cessant pas d'être vérifiées, et les points extérieurs ceux pour lesquels une des inégalités au moins se trouve renversée. Nous verrons plus loin d'autres exemples de surfaces fermées.

Étant données n surfaces fermées dont chacune est extérieure à toutes les autres, nous désignerons par $A^{(n)}$ la portion illimitée de l'espace extérieure à la fois aux n surfaces. Étant données $n - 1$ surfaces fermées dont chacune est extérieure aux autres, et qui sont toutes intérieures à une dernière surface, nous appellerons $I^{(n)}$ la portion limitée de l'espace extérieure aux $n - 1$ premières surfaces, mais intérieure à la $n^{\text{ième}}$ (1).

Une surface fermée peut se composer de plusieurs portions de surfaces analytiquement définies par des équations différentes, et il en est de même *à fortiori* de l'ensemble des surfaces fermées qui limitent un espace $I^{(n)}$ (ou $A^{(n)}$). Considérons sur cet ensemble de surfaces un point qui ne soit pas commun à plusieurs des portions de surfaces dont il s'agit, qui en outre ne soit pas un point singulier, et où existe par suite un plan tangent unique. Il résulte du numéro **5** que, dans une portion suffisamment voisine du point de contact, deux demi-droites partant de ce point et situées du même côté par rapport au plan tangent se trouvent à la fois dans l'espace considéré ou à la fois en dehors; et qu'au contraire deux demi-droites situées par rapport au plan tangent de côtés opposés sont situées l'une dans cet espace, et l'autre en dehors. Si l'on désigne en effet par $f(x, y, \dots, t) = 0$ l'équation de la portion de surface sur laquelle se trouve situé le point de contact, et que l'on substitue dans $f(x, y, \dots, t)$ les coordonnées de deux points pris respectivement sur ces deux demi-droites dans le voisinage du point de contact, on sait que les résultats de ces substitutions sont de même signe ou de signes contraires, suivant que les demi-droites sont situées par rapport au plan tangent du même côté ou de côtés opposés. En particulier, si on considère les deux demi-droites opposées normales à la surface, l'une d'elles se trouve dans l'espace $I^{(n)}$ (ou $A^{(n)}$), et l'autre en dehors de cet espace.

---

(1) Voir C. Neumann, *Untersuchungen*, etc., p. 23.

8. Étant donnée une fonction de p variables indépendantes $f(x, y, \ldots, t)$, si l'on pose :

$$x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho, \ldots, \quad t = t_0 + \varepsilon\rho,$$

formules dans les seconds membres desquelles $x_0, y_0, \ldots, t_0$ sont les coordonnées d'un point fixe, $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ des constantes vérifiant la relation (5), et ρ un paramètre arbitraire pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$, $f(x, y, \ldots, t)$ devient une fonction de la seule variable ρ ayant pour dérivée :

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Cette dernière quantité est ce qu'on appelle la dérivée de la fonction donnée prise au point $x, y, \ldots, t$ suivant la direction $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$. En un même point, les dérivées prises suivant des directions opposées ont évidemment des valeurs égales et de signes contraires.

Extension du théorème de Green aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

$f(x, y, \ldots, t)$ et $f_1(x, y, \ldots, t)$ désignant deux fonctions finies et continues dans un espace $\mathrm{I}^{(n)}$ (1), ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, on a l'équation :

$$\int (f\Delta f_1 - f_1 \Delta f)\, dx\, dy \ldots dt = -\int \left(f \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}} - f_1 \frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}} \right) d\sigma,$$

où la première intégrale est étendue à tout l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, et la seconde à l'ensemble des surfaces limites; $d\sigma$ désigne un élément de ces surfaces, $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}$ la dérivée de la fonction f prise suivant la portion de normale dirigée vers l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, et $\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}}$ la dérivée de f_1 prise suivant cette même normale.

Posons :

$$\varphi(x, y, \ldots, t) = f \frac{\partial f_1}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f}{\partial x},$$

et dans l'intégrale multiple :

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy \ldots dt \tag{17}$$

effectuons l'intégration relative à la variable x. A tout système de valeurs des variables $y, \ldots, t$ correspondent un nombre pair de points situés sur les surfaces qui limitent l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, et dont les premières coordonnées, rangées par ordre

(1) Et un peu au delà des surfaces limites.

de grandeur croissante, seront désignées par $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2q-1}, x_{2q}$, toutes fonctions de $y, \ldots, t$. En effectuant l'intégration relative à x, l'expression précédente devient donc :

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} \int [\varphi(x_2, y, \ldots, t) - \varphi(x_1, y, \ldots, t)]\, dy \ldots dt \\ + \int [\varphi(x_4, y, \ldots, t) - \varphi(x_3, y, \ldots, t)]\, dy \ldots dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \int [\varphi(x_{2q}, y, \ldots, t) - \varphi(x_{2q-1}, y, \ldots, t)]\, dy \ldots dt. \end{array} \right.$$

On a d'ailleurs, en désignant par $x, y, \ldots, t$ les coordonnées d'un point d'une surface limite :

$$d\sigma = dy \ldots dt \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

(nº **6**), c'est à dire que $dy \ldots dt$ est égal au produit de $d\sigma$ par la valeur absolue du cosinus de l'angle que fait la portion de normale dirigée vers l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$ avec la direction définie par les paramètres 1, 0, ..., 0 (nºˢ **3** et **5**). Or cet angle est aigu ou obtus suivant que la coordonnée x du point considéré sur les surfaces limites est affectée d'un indice impair ou d'un indice pair. En effet, si laissant fixes les $p - 1$ dernières coordonnées et faisant croître la première d'une manière continue, on franchit la valeur x_1, on passe de l'extérieur à l'intérieur de l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, et dès lors la demi-droite :

$$X = x_1 + \rho, \quad Y = y, \ldots, \quad T = t$$

(où ρ désigne une variable positive), est intérieure à cet espace dans une portion suffisamment voisine de son point initial $x_1, y, \ldots, t$. Elle fait donc un angle aigu avec la normale intérieure, car ces deux demi-droites sont situées d'un même côté du plan tangent (nº **7**), et l'une d'elles est perpendiculaire au plan (nº **4**). Lorsqu'on franchit ensuite la valeur x_2, on passe au contraire de l'intérieur à l'extérieur de l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, et on en conclut de la même manière que l'angle dont il s'agit est obtus; et ainsi de suite jusqu'à la valeur x_{2q}. Désignons maintenant par $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ les paramètres directeurs de la normale intérieure; on voit bien facilement par ce qui précède que l'expression (17) ou (18) peut s'écrire :

$$-\int \varphi(x, y, \ldots, t)\, \alpha\, d\sigma,$$

l'intégration s'étendant à l'ensemble des surfaces limites, et si on remplace φ par sa valeur, il vient :

$$\int \left(f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx\, dy \ldots dt = -\int \alpha \left(f \frac{\partial f_1}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f}{\partial x} \right) d\sigma.$$

On aura de même :

$$\int\left(f\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}-f_1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy\ldots dt=-\int\beta\left(f\frac{\partial f_1}{\partial y}-f_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\sigma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\left(f\frac{\partial^2 f_1}{\partial t_2}-f_1\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)dx\,dy\ldots dt=-\int\varepsilon\left(f\frac{\partial f_1}{\partial t}-f_1\frac{\partial f}{\partial t}\right)d\sigma.$$

On obtiendra immédiatement la proposition à démontrer en ajoutant membre à membre les formules qui précèdent, et tenant compte des relations :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}}=\alpha\frac{\partial f_1}{\partial x}+\beta\frac{\partial f_1}{\partial y}+\ldots+\varepsilon\frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

Corollaire. — Si les fonctions f et f_1 satisfont dans l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$ aux relations $\Delta f=0$, $\Delta f_1=0$, on a la formule :

$$\int\left(f\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}}-f_1\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}\right)d\sigma=0. \tag{19}$$

En particulier, si l'on pose : $f_1(x, y, \ldots, t)=1$, il vient :

$$\int\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}\,d\sigma=0. \tag{20}$$

9. Dans ce qui suit et jusqu'à nouvel ordre, nous supposerons p au moins égal à 3, nous réservant de dire plus tard quelques mots sur le cas de l'espace à deux dimensions, qui présente avec les autres de légères différences.

On déduit aisément de la formule (19) une autre formule très utile. Désignons par $f(x, y, \ldots, t)$ une fonction finie et continue dans l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant l'équation différentielle $\Delta f=0$; par $\xi, \eta, \ldots, \tau$ les coordonnées d'un point quelconque intérieur à cet espace ; et posons :

$$\mathrm{G}(x, y, \ldots, t)=\frac{1}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\ldots+(t-\tau)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}}. \tag{21}$$

Si du point $\xi, \eta, \ldots, \tau$ comme centre on décrit une sphère d'un rayon ρ suffisamment petit, on forme un espace $\mathrm{I}^{(n+1)}$, dans lequel les deux fonctions f et G satisfont à toutes les conditions qui viennent d'être énoncées. On aura donc, en vertu de (19) :

$$\int\left(f\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{N}}-\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}\right)d\sigma=0.$$

D'ailleurs, en vertu de cette même formule (19), la portion d'intégrale relative à la surface sphérique ne change pas de valeur lorsqu'on fait tendre le rayon vers zéro, et si l'on désigne par $d\omega$ l'élément de surface d'une sphère de rayon 1, elle a pour expression :

$$\int\left(f\frac{\partial\frac{1}{\rho^{p-2}}}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^{p-2}}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)\rho^{p-1}\,d\omega,$$

ou

$$-\int\left[(p-2)f+\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right]d\omega,$$

dont la limite, pour $\rho=0$, est évidemment :

$$-(p-2)\,2\mathrm{S}\,f(\xi,\eta,\ldots,\tau),$$

2 S désignant l'aire de la surface sphérique de rayon 1. Il vient dès lors :

$$f(\xi,\eta,\ldots,\tau)=\frac{1}{(p-2)\,2\mathrm{S}}\int\left(f\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{N}}-\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial\mathrm{N}}\right)d\sigma, \tag{22}$$

l'intégrale du second membre étant étendue aux n surfaces qui forment la limite de l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$, et N désignant la portion de normale dirigée vers cet espace.

10. Théorème. — *Si dans le voisinage d'un point $x_0, y_0, \ldots, t_0$ (c'est à dire dans l'intérieur d'une sphère de rayon suffisamment petit décrite de ce point comme centre) une fonction $f(x, y, \ldots, t)$ est finie et continue ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, et vérifie l'équation différentielle $\Delta f=0$, elle est développable en une série convergente entière en $x-x_0$, $y-y_0, \ldots, t-t_0$, pour des valeurs de ces différences suffisamment voisines de zéro.*

I. Étant donnés dans l'espace à p dimensions des points en nombre quelconque (au moins égal à 3), A, B, C, ..., H, K, L, on a la relation :

$$\mathrm{AL}\leqq\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\ldots+\mathrm{HK}+\mathrm{KL}.$$

D'abord, si la proposition est vraie pour n points, A, B, C, ..., H, K, elle est vraie aussi pour $n+1$ points A, B, C, ..., H, K, L : car, en ajoutant membre à membre les inégalités :

$$\mathrm{AK}\leqq\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\ldots+\mathrm{HK},$$
$$\mathrm{AL}\leqq\mathrm{AK}+\mathrm{KL},$$

vraies par hypothèse, on obtient précisément celle qu'il s'agit de prouver. Il suffit dès lors de considérer le cas de trois points. Or, dans l'espace à deux ou à trois dimensions, la proposition est évidente; d'autre part, étant donnés trois points dans l'espace à $p+1$ dimensions :

$$\begin{array}{lll} x_1, & y_1, \ldots, & t_1, \\ x_2, & y_2, \ldots, & t_2, \\ x_3, & y_3, \ldots, & t_3, \end{array}$$

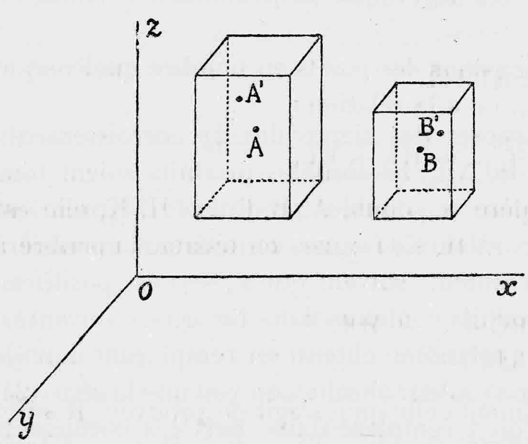
on peut toujours, en changeant les directions des plans coordonnés rectangulaires, annuler les trois coordonnées placées dans une même file verticale (nº **1**), d'où il résulte que, si la proposition est vraie dans l'espace à p dimensions, elle l'est aussi dans l'espace à $p+1$ dimensions ; elle est donc absolument générale.

II. Dans l'espace à p dimensions, les points dont les coordonnées sont respectivement comprises entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$, $y_0 - k$ et $y_0 + k$, ..., $t_0 - l$ et $t_0 + l$, sont dits intérieurs à un parallélipipède rectangle ayant son centre en $x_0, y_0, \ldots, t_0$, ses faces parallèles aux plans coordonnés, ses dimensions et sa diagonale respectivement égales à $2h, 2k, \ldots, 2l, 2\sqrt{h^2 + k^2 + \ldots + l^2}$.

Cela posé, soient σ une portion limitée de surface, A $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ un point non situé sur elle, A′ $(x, y, \ldots, t)$ un point variable situé à l'intérieur d'un cube de centre A ayant ses faces parallèles aux plans coordonnés, B′ un point variable de σ, m un nombre commensurable quelconque, positif ou négatif : si l'on donne au cube des dimensions suffisamment petites, la puissance m de la distance A′B′ est développable en une série convergente, entière par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$, ayant pour coefficients des fonctions continues des coordonnées du point B′, et ayant ses termes respectivement plus petits en valeur absolue que les termes correspondants positifs d'une série convergente fixe, quelles que soient les positions des points A′ et B′ dans leurs domaines respectifs (c'est à dire du point A′ à l'intérieur du cube, et du point B′ sur la surface σ).

Soient d'abord A et B deux points quelconques de l'espace ayant respectivement pour coordonnées $x_0, y_0, \ldots, t_0$ et $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$; considérons ces points comme centres de deux parallélipipèdes ayant leurs faces parallèles aux plans coordonnés, et désignons par d et δ les demi-diagonales de ces parallélipipèdes (¹). Soient maintenant A′ et B′ deux points variables situés respectivement à l'intérieur de ces deux solides ou sur leur surface, et ayant pour coordonnées $x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0, \ldots, t_0 + \Delta t_0$ d'une part, $\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots, \varepsilon + \Delta\varepsilon$ d'autre part (²). Posons :

Fig. 1.



$$u_0 = \overline{AB}^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 + \ldots + (t_0 - \varepsilon)^2,$$

$$u_0 + \Delta u_0 = \overline{A'B'}^2 = (x_0 + \Delta x_0 - \alpha - \Delta\alpha)^2 + (y_0 + \Delta y_0 - \beta - \Delta\beta)^2 + \ldots + (t_0 + \Delta t_0 - \varepsilon - \Delta\varepsilon)^2.$$

(¹) En supposant $p = 3$, les parallélipipèdes sont représentés par la figure 1.

(²) Le symbole Δ n'a pas ici la même signification que dans l'énoncé qui figure en tête du présent numéro ; mais il n'y a évidemment aucune confusion possible.

Nous ferons voir en premier lieu que si l'on a :

$$d + \delta < \mathrm{AB}\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{ [1]}, \tag{23}$$

la quantité $(u_0 + \Delta u_0)^m$, où m a la signification indiquée plus haut, est développable en une série convergente entière par rapport aux $2p$ accroissements Δx_0, Δy_0, ..., Δt_0, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ..., $\Delta\varepsilon$.

En effet, tant que la valeur absolue de Δu_0 est inférieure à u_0, on peut appliquer la formule du binôme, et écrire :

$$(u_0 + \Delta u_0)^m = u_0^m + \frac{m}{1} u_0^{m-1} \Delta u_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} u_0^{m-2} (\Delta u_0)^2 + \ldots, \tag{24}$$

Δu_0 étant donné par la formule :

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u_0 = {} & 2(x_0 - \alpha)\Delta x_0 - 2(x_0 - \alpha)\Delta\alpha - 2\Delta x_0 \Delta\alpha + (\Delta x_0)^2 + (\Delta\alpha)^2 \\ & + 2(y_0 - \beta)\Delta y_0 - 2(y_0 - \beta)\Delta\beta - 2\Delta y_0 \Delta\beta + (\Delta y_0)^2 + (\Delta\beta)^2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 2(t_0 - \varepsilon)\Delta t_0 - 2(t_0 - \varepsilon)\Delta\varepsilon - 2\Delta t_0 \Delta\varepsilon + (\Delta t_0)^2 + (\Delta\varepsilon)^2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

En vertu de l'inégalité (23), on a constamment, en valeur algébrique, $\Delta u_0 < u_0$; car cette dernière inégalité revient à : $u_0 + \Delta u_0 < 2u_0$, ou $\mathrm{A'B'} < \mathrm{AB}\sqrt{2}$. Or, on a :

$$\mathrm{A'B'} \leqq \mathrm{A'A} + \mathrm{AB} + \mathrm{BB'},$$

à fortiori :

$$\mathrm{A'B'} \leqq \mathrm{AB} + d + \delta,$$

d'où, en tenant compte de (23) :

$$\mathrm{A'B'} < \mathrm{AB}\sqrt{2}.$$

Remarquons maintenant qu'on peut disposer des signes des $2p$ accroissements de manière à ce que, dans l'expression de Δu_0, les doubles produits soient tous positifs : il suffit en effet, si l'on considère les doubles produits de la première ligne de (25), de donner à Δx_0 et $\Delta\alpha$ des valeurs de signes contraires, la première positive et la seconde négative, ou inversement, suivant que $x_0 - \alpha$ est positif ou négatif; et de même pour les doubles produits contenus dans les lignes suivantes. D'après cela, si l'on désigne par $[\Delta u_0]$ le polynôme obtenu en remplaçant dans le second membre de (25) chaque terme par sa valeur absolue, on voit que la série (24) ne cesse pas d'être convergente lorsqu'on y remplace d'une part les coefficients des diverses puissances de Δu_0 par leurs valeurs absolues, et d'autre part Δu_0 par $[\Delta u_0]$. On peut donc, après avoir remplacé Δu_0 par sa valeur tirée de (25), ordonner la série par rapport à tels qu'on voudra des $2p$ accroissements Δx_0,

---

[1] Il résulte de cette inégalité, comme on le démontre aisément, que les parallélipipèdes sont extérieurs l'un à l'autre.

$\Delta y_0, \ldots, \Delta t_0, \Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots, \Delta\varepsilon$, sans que la somme soit changée. En outre il est facile de voir que, si l'on fait varier d'une façon arbitraire la position des points A' et B' à l'intérieur des parallélipipèdes, la série ainsi obtenue a ses termes respectivement plus petits en valeur absolue que les termes correspondants d'une série convergente fixe à termes positifs, et qu'il en est ainsi notamment de la série obtenue en ordonnant par rapport aux p accroissements $\Delta x_0, \Delta y_0, \ldots, \Delta t_0$. Enfin, dans cette dernière, les coefficients des diverses puissances des p accroissements sont des fonctions continues des coordonnées du point B', puisque ce sont des séries entières en $\Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots, \Delta\varepsilon$.

Cela posé, soient A $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ un point non situé sur σ, ρ le minimum de sa distance à un point variable de σ, d et δ deux quantités positives vérifiant la relation :

$$d + \delta < \rho\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

enfin δ' la demi-arête d'un cube ayant pour demi-diagonale δ. Partageons la surface σ en un nombre limité de fragments $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(N)}$, dans chacun desquels la distance mutuelle de deux points ne puisse surpasser δ', et considérons deux cubes dont l'un ait pour demi-diagonale d et pour centre A, dont l'autre ait pour demi-diagonale δ et pour centre un point B pris à volonté sur le fragment $\sigma^{(1)}$: tout point de $\sigma^{(1)}$ se trouve alors nécessairement à l'intérieur du second cube. Désignons maintenant par $x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0, \ldots, t_0 + \Delta t_0$ les coordonnées d'un point A' situé à l'intérieur du premier cube, et par B' un point quelconque du fragment $\sigma^{(1)}$: comme on a $d + \delta < \rho\left(\sqrt{2} - 1\right)$, et que d'ailleurs la distance des centres des cubes est au moins égale à ρ, il résulte de ce qui précède, en premier lieu, que toute puissance commensurable, positive ou négative, de la distance A'B' est exprimable par une série convergente entière en $\Delta x_0, \Delta y_0, \ldots, \Delta t_0$, ayant pour coefficients des fonctions continues des coordonnées du point B'; en second lieu que si l'on fait varier arbitrairement les points A' et B' dans leurs domaines respectifs, c'est à dire le premier à l'intérieur du cube de centre A et le second sur $\sigma^{(1)}$, les valeurs absolues des termes de cette série sont respectivement inférieures aux termes correspondants positifs d'une certaine série convergente, soit :

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \tag{26}$$

On peut répéter le même raisonnement en remplaçant le fragment $\sigma^{(1)}$ successivement par tous les autres. Si donc on désigne maintenant par B' un point variable de la surface σ, la même conclusion subsiste, en remplaçant la série (26) par celle que l'on obtiendrait en ajoutant terme à terme les N séries analogues à (26).

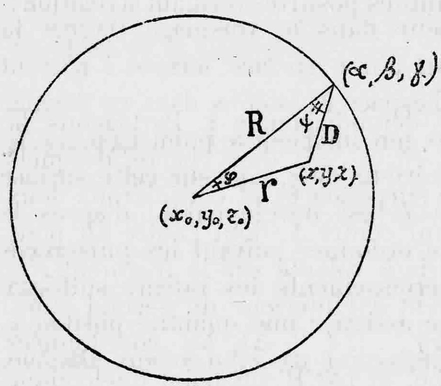
III. Soit $x_0, y_0, \ldots, t_0$ un point dans le voisinage duquel une fonction $f(x, y, \ldots, t)$ est finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifie l'équation différentielle $\Delta f = 0$. De ce point comme centre décrivons une sphère d'un rayon R suffisamment petit, et posons :

$$G(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = \frac{1}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + \ldots + (t-\varepsilon)^2]^{\frac{p-2}{2}}}.$$

En tout point $x, y, \ldots, t$ intérieur à la sphère, on a, d'après la formule (22) :

$$(27) \qquad f(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{(p-2)\,2S} \int \left(f \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial f}{\partial N} \right) d\sigma,$$

Fig. 2.



l'intégration devant s'étendre à toute la surface sphérique, et $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ désignant les coordonnées d'un point de l'élément $d\sigma$. D'ailleurs, si on considère le triangle formé par le point $x, y, \ldots, t$, le point $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, et le centre de la sphère, si on désigne par φ l'angle qui a son sommet au centre, et par ψ celui qui a son sommet sur la surface, si on pose enfin :

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \ldots + (t-t_0)^2},$$
$$D = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + \ldots + (t-\varepsilon)^2},$$

on a :

$$G = \frac{1}{D^{p-2}} = \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi)^{\frac{p-2}{2}}} \qquad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{3}),$$

d'où :

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \frac{(p-2)(R - r\cos\varphi)}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi)^{\frac{p}{2}}} = \frac{(p-2)\cos\psi}{D^{p-1}},$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \frac{p-2}{R} \frac{(x_0-\alpha)(x-\alpha) + (y_0-\beta)(y-\beta) + \ldots + (t_0-\varepsilon)(t-\varepsilon)}{D^p}.$$

Dans le voisinage du point $x_0, y_0, \ldots, t_0$, chacune des quantités $\frac{1}{D^{p-2}}$ et $\frac{1}{D^p}$ est développable en une série convergente entière par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$, ayant pour coefficients des quantités qui varient d'une manière continue avec la position du point $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ sur la sphère, et ayant ses termes respectivement plus petits en valeur absolue que les termes correspondants positifs d'une certaine série convergente, indépendamment de la position du point $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ sur la sphère. D'ailleurs le numérateur de $\frac{\partial G}{\partial N}$ jouit évidemment d'une propriété analogue; il en est donc de même de la quantité $f \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial f}{\partial N}$, et dès lors, pour effectuer sur cette dernière l'intégration indiquée par la formule (27), il suffira de l'effectuer séparément sur les termes de la série suivant laquelle elle se trouve développée. Comme les puissances des binômes $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$ peuvent se mettre en dehors des signes d'intégration, la proposition est démontrée.

11. THÉORÈME. — *Une fonction* $f(x, y, \ldots, t)$, *finie et continue dans un espace continu à* p *dimensions* E, *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant en outre l'équation différentielle* $\Delta f = 0$, *est constante dans tout l'espace* E, *lorsqu'elle l'est dans le voisinage de quelque point intérieur à cet espace* (1).

Désignons par $x_0, y_0, \ldots, t_0$ le point intérieur dans le voisinage duquel la fonction est supposée constante, et au moyen d'une surface fermée σ n'ayant aucun point commun avec celles qui limitent l'espace E, isolons dans ce dernier une portion finie quelconque E′ contenant dans son intérieur le point $x_0, y_0, \ldots, t_0$. Pour chaque point $x, y, \ldots, t$ situé soit à l'intérieur de σ, soit sur cette surface même, la quantité $f(x + h, y + k, \ldots, t + l)$ est développable, d'après le théorème précédent, en une série convergente ordonnée suivant les puissances de $h, k, \ldots, l$, pourvu que l'on donne à ces accroissements des valeurs suffisamment voisines de zéro. On peut en conséquence assigner une quantité positive ρ, telle que, les accroissements $h, k, \ldots, l$ ne dépassant pas ρ en valeur absolue, la quantité $f(x + h, y + k, \ldots, t + l)$ soit toujours développable en une série entière par rapport à $h, k, \ldots, l$, indépendamment des positions que peut occuper le point $x, y, \ldots, t$ à l'intérieur de la surface σ et sur cette surface même.

Cela posé, désignons par ρ' une quantité positive inférieure à ρ, et partageons l'espace E′ en un nombre limité de fragments dans chacun desquels la distance mutuelle de deux points ne puisse surpasser ρ'. Si dans le voisinage du point x_0, $y_0, \ldots, t_0$ on développe la différence $f(x, y, \ldots, t) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ en une série entière par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$, il résulte de l'hypothèse que tous les coefficients du développement sont nuls, et que par conséquent la fonction $f(x, y, \ldots, t)$ a une valeur constante en tous les points de l'espace partiel contenant $x_0, y_0, \ldots, t_0$. D'autre part, ρ' étant inférieur à ρ, l'emploi du développement est permis un peu au delà de l'espace partiel considéré, de telle sorte que dans tout espace partiel contigu il existe certainement quelque point dans le voisinage duquel la fonction a une valeur constante. Partant de là, on démontrera que la fonction est constante dans tous les espaces partiels contigus au premier, puis dans tous les espaces partiels contigus aux précédents, et ainsi de suite jusqu'à épuisement complet de l'espace E′.

12. THÉORÈME. — *Soient* E *un espace continu à* p *dimensions,* $f(x, y, \ldots, t)$ *une*

(1) C'est à dire non situé sur les surfaces limites.

fonction finie et continue dans cet espace, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant en outre l'équation différentielle $\Delta f = 0$: *en un point quelconque intérieur à l'espace* E [1], *la fonction* $f(x, y, \ldots, t)$ *n'est ni maximum ni minimum.*

Désignons par $x_0, y_0, \ldots, t_0$ les coordonnées d'un point intérieur, et de ce point comme centre décrivons une sphère de rayon R entièrement située dans l'espace E. Nous avons, en vertu de la formule (22) :

$$(p-2)\, 2S\, f(x_0, y_0, \ldots, t_0) = -\int \left(f \frac{\partial \frac{1}{R^{p-2}}}{\partial R} - \frac{1}{R^{p-2}} \frac{\partial f}{\partial R} \right) d\sigma,$$

l'intégrale du second membre étant étendue à la surface sphérique; d'ailleurs, en vertu de la formule (20) :

$$\int \frac{\partial f}{\partial R}\, d\sigma = 0,$$

et par suite :

$$\int f(x, y, \ldots, t)\, d\sigma = 2SR^{p-1} f(x_0, y_0, \ldots, t_0),$$

ou :

$$\int [f(x, y, \ldots, t) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0)]\, d\sigma = 0. \tag{28}$$

Cela posé, faisons tendre vers zéro le rayon de la sphère; il arrive de deux choses l'une : ou bien, pour une valeur suffisamment petite de R, $f(x, y, \ldots, t) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ est nul en tout point intérieur à la sphère, et alors la fonction $f(x, y, \ldots, t)$ a une valeur constante dans tout l'espace E (n° **11**); ou bien, quelque petit que soit R, on peut toujours assigner à l'intérieur de la sphère un point A dans le voisinage duquel cette différence n'est pas nulle. Si du point x_0, $y_0, \ldots, t_0$ comme centre nous décrivons une sphère passant par A, la formule (28), qui est vérifiée lorsqu'on étend à la surface de cette dernière l'intégrale du premier membre, exige qu'en quelque autre région de cette surface, la différence considérée ait un signe contraire à celui qu'elle possède en A. Donc, ou bien la fonction $f(x, y, \ldots, t)$ se réduit à une constante, ou bien, dans l'intérieur d'une sphère de rayon infiniment petit décrite du point $x_0, y_0, \ldots, t_0$ comme centre, elle possède à la fois des valeurs supérieures et des valeurs inférieures à $f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ [2].

13. D'après le théorème qui précède, les valeurs extrêmes de la fonction dans l'espace E ne peuvent correspondre qu'à des points situés soit sur les surfaces limites, soit à l'infini si l'espace E est illimité. De là résultent immédiatement les deux propositions que nous allons énoncer.

---

[1] C'est à dire non situé sur les surfaces limites.

[2] Voir dans l'ouvrage déjà cité de M. Carl Neumann le paragraphe intitulé : *Die Maxima und Minima des Potentials*, p. 27.

THÉORÈME I. — *Il ne peut exister qu'une seule fonction satisfaisant à la fois aux conditions suivantes :*

1° *D'être finie et continue dans un espace* $\mathrm{I}^{(n)}$, *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres;*

2° *D'y vérifier l'équation différentielle* $\Delta = 0$;

3° *De prendre sur les n surfaces limites des valeurs données formant sur chacune un ensemble continu.*

Soient en effet $f(x, y, \ldots, t)$ et $\varphi(x, y, \ldots, t)$ deux fonctions satisfaisant à toutes ces conditions; la différence $f - \varphi$ satisfait aux deux premières, et prend en chaque point des surfaces limites la valeur zéro. Comme ses valeurs extrêmes correspondent nécessairement à quelques-uns de ces derniers points, elle est nulle dans tout l'espace $\mathrm{I}^{(n)}$.

THÉORÈME II. — *Il ne peut exister qu'une seule fonction satisfaisant à la fois aux conditions suivantes :*

1° *D'être finie et continue dans un espace* $\mathrm{A}^{(n)}$, *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres;*

2° *D'y vérifier l'équation différentielle* $\Delta = 0$;

3° *De prendre à l'infini une valeur donnée, et sur les n surfaces limites des valeurs données formant sur chacune un ensemble continu.*

La démonstration est identique à celle qui précède.

14. Considérons la série :

$$\mathrm{C} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathrm{V}_n (x - x', y - y', \ldots, t - t')}{r'^{2n+p-2}}, \tag{29}$$

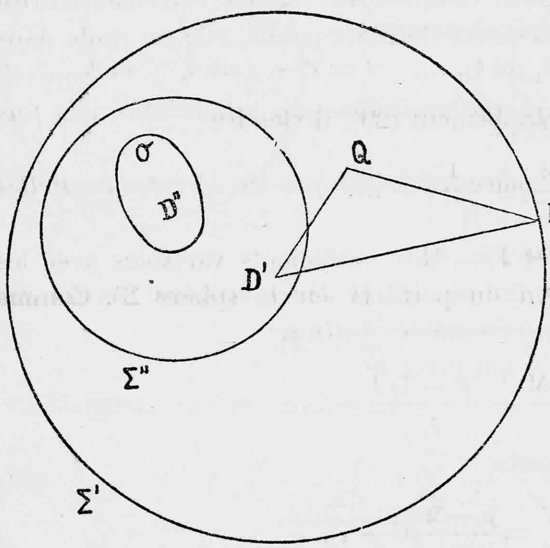
où C désigne une constante, V_n un polynôme homogène de degré n, et r' la racine carrée positive de $(x - x')^2 + (y - y')^2 + \ldots + (t - t')^2$. Si sur toute la surface d'une sphère de centre $x', y', \ldots, t'$, la valeur absolue du terme général reste constamment inférieure à un nombre positif fixe L, la série est convergente en tout point extérieur à la sphère considérée. En effet, soient R' le rayon de la sphère, A un point extérieur, et A' le point d'intersection avec la sphère de la demi-droite dirigée du centre vers le point A : quand on passe du point A' au point A, le terme général se trouve multiplié par $\left(\frac{\mathrm{R}'}{r'}\right)^{n+p-2}$, et dès lors les valeurs absolues des termes de la série sont respectivement inférieures aux termes correspondants de la série convergente :

$$\mathrm{L} + \mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}'}{r'}\right)^{p-2} + \mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}'}{r'}\right)^{p-1} + \ldots + \mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}'}{r'}\right)^{n+p-2} + \ldots$$

La série (29) définit donc à l'extérieur de la sphère une fonction, dont il est d'ailleurs très facile de démontrer la continuité.

Cela posé, considérons une fonction $f(x, y, \ldots, t)$, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'extérieur d'une surface fermée σ, et vérifiant l'équation différentielle $\Delta f = 0$. Elle est dite *régulière à l'infini,* lorsqu'on peut assigner un point $D'(x', y', \ldots, t')$ et un nombre positif R' tels que, pour tous les points extérieurs à la sphère de centre D' et de rayon R', la fonction soit développable en une série convergente de la forme (29) [1]. Nous ferons voir que la propriété dont jouit par définition la sphère de centre D' et de rayon R' s'applique à toute autre sphère enveloppant complètement la surface fermée σ.

Fig. 3.



En effet, soient Σ'' cette deuxième sphère, $D''(x'', y'', \ldots, t'')$ et R'' son centre et son rayon, et $Q(\xi, \eta, \ldots, \tau)$ un point qui lui soit extérieur. Du point D' comme centre décrivons une sphère Σ' enveloppant complètement la précédente et le point Q *(fig. 3)*, et en outre de rayon suffisamment grand pour que le développement (29) soit applicable à tous les points extérieurs. Les deux sphères Σ'' et Σ' limitent un espace $I^{(2)}$ auquel s'applique la formule (22), et en posant comme précédemment :

$$G(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \ldots + (t-\tau)^2]^{\frac{p-2}{2}}},$$

on a :

$$f(\xi, \eta, \ldots \tau) = \frac{1}{(p-2)\,2S}\int \left(f\frac{\partial G}{\partial N} - G\frac{\partial f}{\partial N}\right) d\sigma.$$

En vertu de la formule (19), la portion d'intégrale relative à la sphère Σ' ne change pas de valeur lorsqu'on fait augmenter le rayon indéfiniment. Soient ρ ce rayon, δ la distance $D'Q$, H un point quelconque de la sphère Σ', et γ l'angle $QD'H$. La valeur de G au point H est donnée par la formule : $G = \frac{1}{(QH)^{p-2}}\cdot$ Or :

$$\frac{1}{QH} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2\delta\rho\cos\gamma}} = \frac{1}{\rho} + \frac{\delta}{\rho^2}P_1(\cos\gamma) + \ldots + \frac{\delta^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\gamma) + \ldots,$$

---

(1) Voir le mémoire de M. Appell intitulé : *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$ (*Acta Mathematica,* année 1884, p. 320).

P_n désignant une fonction de Legendre, d'où :

$$G = \frac{1}{\rho^{p-2}} + \frac{\delta}{\rho^{p-1}} \Omega_1 (\cos \gamma) + \dots + \frac{\delta^n}{\rho^{n+p-2}} \Omega_n (\cos \gamma) + \dots,$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \frac{p-2}{\rho^{p-1}} + \frac{(p-1)\,\delta}{\rho^p} \Omega_1 (\cos \gamma) + \dots + \frac{(n+p-2)\,\delta^n}{\rho^{n+p-1}} \Omega_n (\cos \gamma) + \dots,$$

Ω_n désignant une somme de produits de fonctions P, dans chacun desquels la somme des indices de ces fonctions est égale à n. Maintenant, pour calculer les valeurs de f et $\frac{\partial f}{\partial N}$ au point H, posons :

$$x = x' + \rho \cos \theta_1, \quad y = y' + \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \quad t = t' + \rho \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{p-1},$$

et substituons ces valeurs dans le développement (29), il viendra :

$$f = C + \frac{M}{\rho^{p-2}} + \frac{J}{\rho^{p-1}} + \dots,$$

C et M désignant deux constantes, et J, ... des coefficients variables avec les angles θ, c'est à dire avec la position du point H sur la sphère Σ'. Comme précédemment, on aura :

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \frac{(p-2)\,M}{\rho^{p-1}} + \frac{(p-1)\,J}{\rho^p} + \dots,$$

et on déduira des formules qui précèdent :

$$f \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial f}{\partial N} = \frac{p-2}{\rho^{p-1}} (C + \varepsilon),$$

ε étant infiniment petit pour ρ infini. Dès lors, en désignant par $d\omega$ l'élément de surface d'une sphère de rayon 1, la portion d'intégrale relative à Σ' peut s'écrire : $(p-2)\int (C + \varepsilon)\, d\omega$, expression qui, pour ρ infini, prend la valeur $(p-2)\,2SC$. On a donc :

$$(30) \qquad f(\xi, \eta, \dots, \tau) = C + \frac{1}{(p-2)\,2S} \int \left(f \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial f}{\partial N} \right) d\sigma,$$

l'intégrale du second membre s'étendant à la surface de la sphère Σ'', et N désignant la portion de normale extérieure à cette sphère.

Cela posé, soient K un point quelconque de la sphère Σ'', ψ l'angle QD″K, et r'' la distance D″Q *(fig. 4)*. La valeur de G au point K est donnée par la formule :

$$G = \frac{1}{r''^{p-2}} + \frac{R''}{r''^{p-1}} \Omega_1 (\cos \psi) + \dots + \frac{R''^n}{r''^{n+p-2}} \Omega_n (\cos \psi) + \dots,$$

ou

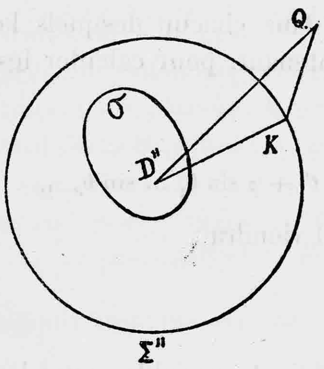
$$(31) \qquad G = \frac{1}{r''^{p-2}} + \frac{R'' r'' \Omega_1 (\cos \psi)}{r''^p} + \dots + \frac{R''^n r''^n \Omega_n (\cos \psi)}{r''^{2n+p-2}} + \dots$$

Posons maintenant :

$$\xi = x'' + r'' \cos \theta_1, \quad \eta = y'' + r'' \sin \theta_1 \cos \theta_2, \ldots, \quad \tau = t'' + r'' \sin \theta_1 \ldots \sin \theta_{p-1} \text{ (1)},$$

désignons par $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_{p-1}$ les coordonnées hypersphériques du point K, analogues à $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}$, et remplaçons $\cos \psi$ par sa valeur en fonction des angles θ et θ' (au nombre de $2p - 2$) : il est facile de se rendre compte que $r''^n P_n (\cos \psi)$ devient un polynôme homogène et de degré n en $\xi - x''$, $\eta - y''$, ..., $\tau - t''$, que dès lors il en est de même de $r''^n \Omega_n (\cos \psi)$, et qu'en définitive la valeur de G prend la forme :

Fig. 4.



$$\text{(32)} \qquad G = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Phi_n (\xi - x'', \eta - y'', \ldots, \tau - t'')}{r''^{2n+p-2}},$$

Φ_n désignant un polynôme homogène de degré n. D'autre part, en différentiant par rapport à R' la formule (31), on a :

$$\text{(33)} \qquad \frac{\partial G}{\partial N} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Psi_n (\xi - x'', \eta - y'', \ldots, \tau - t'')}{r''^{2n+p-2}},$$

Ψ_n désignant encore un polynôme homogène, d'où :

$$\text{(34)} \qquad f \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial f}{\partial N} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Lambda_n (\xi - x'', \eta - y'', \ldots, \tau - t'')}{r''^{2n+p-2}},$$

les coefficients du polynôme Λ_n étant des fonctions continues des angles θ'.

On verra facilement que dans chacune des séries (32) et (33), les valeurs absolues des termes sont respectivement inférieures aux termes correspondants positifs d'une série convergente fixe, quelles que soient les valeurs attribuées aux angles θ', et que par suite la série (34) jouit d'une propriété semblable. Pour effectuer l'intégration indiquée dans le second membre de la formule (30), il suffit donc de l'effectuer séparément sur les termes successifs de la série (34), et en remplaçant $\xi, \eta, \ldots, \tau$ par $x, y, \ldots, t$, la formule (30) devient :

$$f(x, y, \ldots, t) = C + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{V_n (x - x'', y - y'', \ldots, t - t'')}{r''^{2n+p-2}},$$

où V_n désigne un polynôme homogène de degré n, et r'' la racine carrée positive de $(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + \ldots + (t - t'')^2$.

Il est essentiel de remarquer que les deux constantes qui figurent respectivement dans les deux premiers termes conservent toujours la même valeur, quelle

(1) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}$ ne représentent plus les mêmes quantités que dans la première partie de la démonstration.

que soit la sphère à l'extérieur de laquelle on développe la fonction en série. Car la première est la valeur limite de la fonction quand le point $x, y, \ldots, t$ s'éloigne indéfiniment, et la seconde est la valeur limite vers laquelle tend, dans les mêmes circonstances, le produit $[f(x, y, \ldots, t) - \mathrm{C}] \cdot d^{p-2}$, d désignant la distance du point variable $x, y, \ldots, t$ à un point fixe choisi à volonté dans l'espace. Nous appellerons *masse* de la fonction cette deuxième constante.

15. Théorème. — *Soient $f(x, y, \ldots, t)$ et $f_1(x, y, \ldots, t)$ deux fonctions finies et continues dans un espace $\mathrm{A}^{(n)}$* (1), *ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$, et régulières à l'infini; soient C et C_1 les valeurs qu'elles prennent respectivement à l'infini, M et M_1 leurs masses respectives; on a la formule :*

$$\int\left(f\,\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}} - f_1\,\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}\right) d\sigma = -(p-2)\,2\,\mathrm{S}\,(\mathrm{CM}_1 - \mathrm{C}_1\mathrm{M}), \tag{35}$$

l'intégrale du premier membre étant étendue à l'ensemble des surfaces limites, et $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}, \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}}$ désignant les dérivées des fonctions f et f_1 prises suivant la portion de normale dirigée vers l'espace $\mathrm{A}^{(n)}$.

Décrivons en effet d'un point quelconque, de l'origine des coordonnées par exemple, une sphère de rayon ρ enveloppant toutes les surfaces limites; nous formons ainsi un espace $\mathrm{I}^{(n+1)}$ auquel la formule (19) est applicable, et, d'après cette même formule, la portion d'intégrale relative à la sphère ne change pas de valeur, lorsqu'on fait augmenter le rayon indéfiniment. Or, la valeur de f en un point de la sphère est donnée par la formule :

$$f = \mathrm{C} + \frac{\mathrm{M}}{\rho^{p-2}} + \frac{\mathrm{J}}{\rho^{p-1}} + \ldots,$$

les coefficients J, ... variant avec la direction du rayon; on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}} = \frac{(p-2)\,\mathrm{M}}{\rho^{p-1}} + \frac{(p-1)\,\mathrm{J}}{\rho^{p}} + \ldots$$

On a de même :

$$f_1 = \mathrm{C}_1 + \frac{\mathrm{M}_1}{\rho^{p-2}} + \frac{\mathrm{J}_1}{\rho^{p-1}} + \ldots,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}} = \frac{(p-2)\,\mathrm{M}_1}{\rho^{p-1}} + \frac{(p-1)\,\mathrm{J}_1}{\rho^{p}} + \ldots,$$

d'où il résulte que, sur la surface de la sphère, la quantité $f\,\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{N}} - f_1\,\frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}$ a pour valeur :

$$\frac{p-2}{\rho^{p-1}}\,(\mathrm{CM}_1 - \mathrm{C}_1\mathrm{M} + \varepsilon),$$

(1) Et un peu en deçà des surfaces limites.

ε étant infiniment petit pour ρ infini. Donc, en désignant par $d\omega$ l'élément de surface d'une sphère de rayon 1, la portion d'intégrale relative à la sphère peut s'écrire :

$$(p-2)\int (\mathrm{CM}_1 - \mathrm{C}_1\mathrm{M} + \varepsilon)\, d\omega,$$

dont la valeur pour ρ infini est $(p-2)\, 2\mathrm{S}\, (\mathrm{CM}_1 - \mathrm{C}_1\mathrm{M})$.

En particulier, si l'on pose : $f_1(x, y, \ldots, t) = 1$, la formule (35) devient :

$$\int \frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}\, d\sigma = -(p-2)\, 2\mathrm{SM}. \tag{36}$$

Corollaire. — *Soit $f(x, y, \ldots, t)$ une fonction finie et continue à l'extérieur d'une sphère de rayon* R [1], *ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, vérifiant l'équation différentielle $\Delta f = 0$, et régulière à l'infini; on a la formule :*

$$\int f\, d\sigma = 2\mathrm{SCR}^{p-1} + 2\mathrm{SMR}, \tag{37}$$

l'intégrale du premier membre étant étendue à la surface de la sphère, C *désignant la valeur de la fonction à l'infini, et* M *sa masse.*

Posons en effet : $\mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{D}^{p-2}}$, D désignant la distance du point $x, y, \ldots, t$ au centre de la sphère; la fonction G possède toutes les propriétés que l'énoncé suppose à la fonction f, s'annule à l'infini et a une masse égale à 1. On a donc, en vertu de la formule (30) :

$$\int \left(f \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{N}} - \mathrm{G} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}} \right) d\sigma = -(p-2)\, 2\mathrm{SC},$$

l'intégrale du premier membre étant étendue à la surface de la sphère, ou bien :

$$\frac{p-2}{\mathrm{R}^{p-1}} \int f\, d\sigma + \frac{1}{\mathrm{R}^{p-2}} \int \frac{\partial f}{\partial \mathrm{N}}\, d\sigma = (p-2)\, 2\mathrm{SC},$$

d'où, en ayant égard à la formule (36), on tire immédiatement la formule (37).

16. Théorème. — *Il ne peut exister qu'une seule fonction satisfaisant à la fois aux conditions suivantes :*

1° *D'être finie et continue dans un espace* $\mathrm{A}^{(n)}$, *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres;*

2° *D'y vérifier l'équation différentielle $\Delta = 0$;*

3° *D'être régulière à l'infini et d'avoir une masse donnée;*

4° *De prendre sur les n surfaces limites des valeurs données formant sur chacune un ensemble continu.*

---

[1] Et un peu en deçà de la surface sphérique.

Soient en effet $f(x, y, ..., t)$ et $\varphi(x, y, ..., t)$ deux fonctions satisfaisant à toutes les conditions ci-dessus énoncées : la différence $f - \varphi$ satisfait aux deux premières, elle est en outre régulière à l'infini avec une masse nulle, et prend la valeur zéro sur les n surfaces limites. Soit k la valeur qu'elle prend à l'infini ; si d'un point quelconque de l'espace on décrit une sphère de rayon R enveloppant toutes les surfaces limites, on a, en vertu de la formule (37) :

$$\int (f - \varphi)\, d\sigma = 2\mathrm{S}\, k\, \mathrm{R}^{p-1},$$

l'intégrale du premier membre étant étendue à la surface de la sphère. Cette égalité entraîne forcément la relation $k = 0$; car si k était différent de zéro, positif pour fixer les idées, $f - \varphi$ prendrait en un point variable de la sphère une valeur comprise entre 0 et k, et en désignant par k' le maximum de cette valeur, on aurait :

$$\int (f - \varphi)\, d\sigma \leqq 2\mathrm{S}\, k'\, \mathrm{R}^{p-1} < 2\mathrm{S}\, k\, \mathrm{R}^{p-1}.$$

La différence $f - \varphi$, étant nulle à l'infini et sur les n surfaces limites, est nulle dans tout l'espace $\mathrm{A}^{(n)}$.

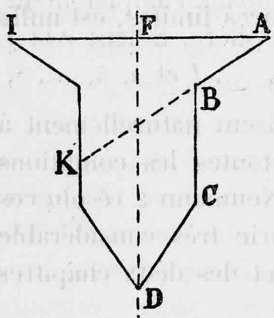
17. Les trois théorèmes des numéros **13** et **16** conduisent naturellement à rechercher s'il existe en effet une fonction satisfaisant à toutes les conditions imposées par l'un ou par l'autre de leurs énoncés. M. Carl Neumann a résolu ces problèmes, dans le cas où n est égal à 1, pour une catégorie très considérable de surfaces fermées. L'exposition de sa méthode fait l'objet des deux chapitres suivants.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA FONCTION W.

18. Étant donnée une surface fermée σ, si on la coupe par une droite quelconque, on peut obtenir comme intersection des points séparés les uns des autres, et aussi des segments entiers de la droite. Par exemple, si on considère dans l'espace à trois dimensions la surface engendrée par la révolution autour de DF de la ligne polygonale FABCD *(fig. 5)*, dont le côté AF est perpendiculaire sur DF, une droite quelconque la coupe en général en deux ou quatre points isolés; à la droite AI correspondra comme intersection un segment; à la droite AB un segment AB et un point K, etc... Toutes les fois qu'en coupant la surface par une droite on obtiendra un ou plusieurs segments, on conviendra de ne compter comme points d'intersection, pour chaque segment, que le point initial et le point final : d'après cette convention, la droite AI coupe la surface en deux points seulement, A et I, la droite AB en trois points A, B, K, etc... Dans ce qui suit, nous supposerons constamment que la surface fermée σ est coupée par une droite quelconque de l'espace en un nombre fini de points, dont le maximum est nécessairement pair, et nous appellerons *rang* de la surface ce nombre maximum [1]. Nous supposerons d'ailleurs que sauf en certains points, dont l'ensemble ne forme jamais une portion de surface, si petite qu'elle soit, le plan tangent est déterminé et unique, et varie d'une manière continue.

Fig. 5.



19. Considérons l'intégrale :

$$W(x, y, ..., t) = \int \frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} \, d\sigma,$$

où μ désigne une quantité qui varie d'une manière continue sur la surface fermée σ, D la distance du point $x, y, ..., t$ à un point $\alpha, \beta, ..., \varepsilon$ pris sur l'élément $d\sigma$, et φ l'angle de la normale intérieure en $\alpha, \beta, ..., \varepsilon$ avec la demi-droite qui va

(1) Définition donnée par M. Carl Neumann. *Untersuchungen*, etc., p. 167.

de ce point au point $x, y, \ldots, t$; l'intégration est supposée étendue à toute la surface σ.

1° *Dans le voisinage de tout point non situé sur la surface σ, la fonction* W *est finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifie l'équation différentielle* $\Delta W = 0$.

Si l'on désigne en effet par $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ les paramètres directeurs de la normale intérieure au point $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, on a :

$$\frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} = \frac{\mu\left[\alpha'(x-\alpha)+\beta'(y-\beta)+\ldots+\varepsilon'(t-\varepsilon)\right]}{D^p},$$

et on constate facilement que cette fonction satisfait à toutes les conditions ci-dessus énoncées. On en conclut, au moyen des raisonnements usités en pareil cas, qu'il en est de même de la fonction $W(x, y, \ldots, t)$, qui s'en déduit par une intégration.

2° *La fonction* $W(x, y, \ldots, t)$ *est régulière à l'infini, s'y annule, et a une masse nulle.*

De l'origine comme centre, décrivons une sphère enveloppant complètement la surface σ, et supposons le point $x, y, \ldots, t$ extérieur à la sphère. Soient r et ρ les distances respectives de l'origine aux deux points $x, y, \ldots, t$ et $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ψ l'angle formé par ces deux demi-droites. En posant :

$$\begin{aligned} H &= \mu(\alpha' x + \beta' y + \ldots + \varepsilon' t), \\ K &= -\mu(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \ldots + \varepsilon\varepsilon'), \end{aligned}$$

on a :

$$\frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} = \frac{H+K}{D^p}.$$

Or, de la formule :

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi}},$$

on tire, comme au n° **14** :

$$\frac{1}{D} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{V_n(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+1}},$$

d'où :

$$\frac{1}{D^p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Phi_n(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p}},$$

V_n et Φ_n désignant des polynômes homogènes de degré n. On en déduit :

$$\frac{H}{D^p} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Pi_n(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p-2}},$$

et

$$\frac{K}{D^p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Psi_n(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^2\Psi_n(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p+2}} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\Lambda_n(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p-2}},$$

par suite :

$$\frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} = \frac{H + K}{D^p} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{X_n (x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p-2}},$$

et en intégrant :

$$\int \frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} \, d\sigma = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Omega_n (x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p-2}},$$

Π_n, Ψ_n, Λ_n, X_n et Ω_n désignant des polynômes homogènes de degré n. Il résulte de là que la fonction $W(x, y, \ldots, t)$ est régulière à l'infini, et, comme le développement qui précède est privé de terme constant et de terme en $\frac{1}{r^{p-2}}$, la fonction s'annule à l'infini et a une masse nulle.

20. Il nous reste à étudier maintenant les valeurs que prend la fonction $W(x, y, \ldots, t)$, soit lorsque le point $x, y, \ldots, t$ est situé sur la surface σ, soit lorsqu'il tend vers un point de cette surface. Cette étude a été faite de la façon la plus complète par M. Carl Neumann (1). Suivant la notation adoptée par l'éminent géomètre, nous désignerons par x un point quelconque de l'espace, par a un point extérieur à σ, par i un point intérieur, par s un point situé sur la surface même. W_x désignera la valeur de la fonction W au point x, etc.

Étant donnée une surface fermée σ de rang quelconque, les demi-droites issues d'un point fixe non situé sur la surface la rencontrent en un nombre pair ou impair de points, suivant que le point fixe est extérieur ou intérieur. Considérons maintenant un point s, situé sur la surface même. Si on le joint à tous les points infiniment voisins de la surface, les demi-droites ainsi obtenues forment une nappe conique divisant l'espace indéfini en deux régions : les demi-droites partant du point s et situées dans l'une de ces régions sont intérieures à la surface σ dans une portion de leur étendue suffisamment voisine du point s, et par suite la rencontrent en un nombre impair de points autres que s; les demi-droites situées dans l'autre région sont au contraire extérieures à la surface dans le voisinage du point s, et par suite la rencontrent en un nombre pair de points. Cela posé, si du point s comme centre on décrit une sphère de rayon 1, la portion de surface sphérique ω_s située dans la première région s'appelle l'*ouverture de la surface* σ *au point* s; en outre, 2S désignant l'aire de la surface sphérique de rayon 1, la différence $S - \omega_s = \psi_s$ s'appelle le *supplément de l'ouverture*.

Pour calculer ω_s, on peut procéder de la manière suivante. Une surface fermée, comme nous l'avons déjà fait remarquer, se compose en général de portions de surfaces analytiquement représentées par des équations différentes. Considérons sur la surface fermée un point s $(x', y', \ldots, t')$ commun à un certain nombre de ces portions de surfaces; *dans le voisinage du point* s, les points intérieurs à la

(1) *Untersuchungen*, etc., chapitre IV, p. 113 à 160.

surface fermée sont définis par un certain nombre d'inégalités, trois par exemple :

$$(1)\qquad \begin{cases} f\ (x, y, \ldots, t) > 0, \\ f_1\ (x, y, \ldots, t) > 0, \\ f_2\ (x, y, \ldots, t) > 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres sont tous nuls pour $x = x'$, $y = y'$, ..., $t = t'$. Soient :

$$(2)\qquad x = x' + \alpha\rho, \quad y = y' + \beta\rho, \ldots, \quad t = t' + \varepsilon\rho,$$

les équations d'une demi-droite quelconque menée du point s. En remplaçant x, y, ..., t par leurs valeurs tirées des formules (2), et supposant les premiers membres développables par la série de Taylor, les inégalités (1) peuvent s'écrire :

$$\frac{\rho^q}{1.2\ldots q}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x'} + \beta\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t'}\right)^q f + \ldots > 0,$$

$$\frac{\rho^{q_1}}{1.2\ldots q_1}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x'} + \beta\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{q_1} f_1 + \ldots > 0,$$

$$\frac{\rho^{q_2}}{1.2\ldots q_2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x'} + \beta\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{q_2} f_2 + \ldots > 0,$$

q, q_1, q_2 désignant trois entiers positifs. Comme ρ désigne ici une variable essentiellement positive, les demi-droites qui, dans le voisinage immédiat du point s, sont intérieures à la surface fermée, ont évidemment des directions définies par les inégalités :

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\alpha\dfrac{\partial}{\partial x'} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t'}\right)^q f > 0, \\ \left(\alpha\dfrac{\partial}{\partial x'} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t'}\right)^{q_1} f_1 > 0, \\ \left(\alpha\dfrac{\partial}{\partial x'} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t'}\right)^{q_2} f_2 > 0. \end{cases}$$

Pour avoir la valeur de ω_s, il suffira donc d'évaluer, sur la sphère $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 = 1$, l'aire de la portion de surface définie par les inégalités (3).

21. Exemple I. — Examinons le cas général où le point s appartient à une seule des portions de surfaces dont se compose la surface fermée σ, et n'est pas un point singulier pour cette portion de surface. Si l'on désigne par $f(x, y, \ldots, t)$ le premier membre de l'équation de la surface, les dérivées partielles du premier ordre de f ne sont pas nulles à la fois au point s, et les inégalités (3) se réduisent alors à celle-ci :

$$(4)\qquad \alpha\frac{\partial f}{\partial x'} + \beta\frac{\partial f}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial t'} > 0.$$

Or la surface de la sphère $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 = 1$ peut se partager en deux régions : l'une où l'inégalité (4) est vérifiée, l'autre où l'on a au contraire :

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x'} + \beta \frac{\partial f}{\partial y'} + \ldots + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial t'} < 0, \tag{5}$$

et ces deux régions ont évidemment des aires égales, car, au signe près, les inégalités (4) et (5) ont les mêmes solutions en α, β, ..., ε. Chacune des régions considérées a donc une aire égale à la moitié de l'aire totale, et l'on a : $\omega_s = S$, $\psi_s = 0$.

Exemple II. — Considérons la surface fermée du second rang définie par les inégalités :

$$x + \frac{a}{2} > 0, \quad y + \frac{b}{2} > 0, \ldots, \quad t + \frac{e}{2} > 0,$$

$$x - \frac{a}{2} < 0, \quad y - \frac{b}{2} < 0, \ldots, \quad t - \frac{e}{2} < 0 \text{ (1)}.$$

Soit s un point de la surface (x', y', ..., t') et k le nombre des inégalités précédentes qui se transforment en égalités pour $x = x'$, $y = y'$, ..., $t = t'$ (ici k est au plus égal à p).

Si $k = 1$, on a d'après ce qui précède : $\omega_s = S$.

Si $k = 2$, si l'on a par exemple : $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$, les inégalités au moyen desquelles on définit la valeur de ω_s, sont : $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

Si $k = 3$, si l'on a par exemple : $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$, $z' = \frac{c}{2}$, il vient : $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$.

Et ainsi de suite. Si $k = p$, et que l'on ait : $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$, ..., $t' = \frac{e}{2}$, on aura les inégalités : $\alpha < 0$, $\beta < 0$, ..., $\varepsilon < 0$.

Il est facile de trouver dans chaque cas la valeur de ω_s. Posons en effet :

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha = \cos\theta_1, \\
\beta = \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\
\gamma = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2} \cos\theta_{p-1}, \\
\varepsilon = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2} \sin\theta_{p-1},
\end{array}\right. \tag{6}$$

et remarquons que pour obtenir tous les points situés sur la sphère $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 = 1$, il suffit de faire varier le dernier angle θ_{p-1} entre 0 et 2π, et chacun des autres entre 0 et π. Les inégalités :

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \ldots, \quad \varepsilon < 0$$

(1) Rectangle dans l'espace à deux dimensions; parallélipipède rectangle dans l'espace à trois dimensions.

deviennent alors :

$$\cos\theta_1 < 0, \ldots, \quad \cos\theta_{p-2} < 0, \quad \cos\theta_{p-1} < 0, \quad \sin\theta_{p-1} < 0,$$

ou bien :

$$(7) \qquad \frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi, \ldots, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{p-2} < \pi, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{p-1} < \frac{3\pi}{2}, \quad \pi < \theta_{p-1} < \frac{3\pi}{2}.$$

On a d'ailleurs :

$$2\mathrm{S} = \int_0^\pi \sin^{p-2}\theta_1\, d\theta_1 \times \int_0^\pi \sin^{p-3}\theta_2\, d\theta_2 \times \ldots \times \int_0^\pi \sin\theta_{p-2}\, d\theta_{p-2} \times \int_0^{2\pi} d\theta_{p-1}.$$

Si aux limites qui figurent dans ces intégrales on substitue successivement les limites fournies par les inégalités (7), on verra qu'à chaque fois l'une des intégrales est divisée par 2. On a dès lors : $\omega_s = \frac{\mathrm{S}}{2^{k-1}}$.

Exemple III. — Considérons la surface fermée du quatrième rang définie par l'inégalité :

$$(x^2 + y^2 + \ldots + t^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2 + \ldots + t^2) < 0 \text{ (1)}.$$

En tout point de la surface, on a : $\omega_s = \mathrm{S}$, sauf à l'origine des coordonnées qui est un point singulier. On a alors, pour calculer ω_s, l'inégalité : $\alpha^2 - 1 < 0$, vérifiée d'elle-même en vertu de la relation : $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 = 1$. Il en résulte : $\omega_s = 2\mathrm{S}$, $\psi_s = -\mathrm{S}$.

Exemple IV. — Considérons la surface fermée du second rang définie par le système d'inégalités :

$$(y^2 + \ldots + t^2)(x + a) + x^2(x - a) < 0,$$
$$x > 0,$$

où a est supposé positif (2). Pour évaluer ω_s à l'origine des coordonnées, on a les inégalités :

$$\beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 - \alpha^2 < 0,$$
$$\alpha > 0,$$

qui, en vertu des formules (6), deviennent :

$$\sin^2\theta_1 - \cos^2\theta_1 < 0, \quad \cos\theta_1 > 0,$$

ou :

$$\cos 2\theta_1 > 0, \quad \cos\theta_1 > 0,$$

ou enfin :

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}.$$

---

(1) Quand on suppose le nombre des variables égal à 2, cette inégalité définit les points intérieurs à un limaçon de Pascal avec point de rebroussement.

(2) Quand on suppose le nombre des variables égal à 2, ces inégalités définissent les points intérieurs à la boucle d'une strophoïde droite.

On a dès lors :

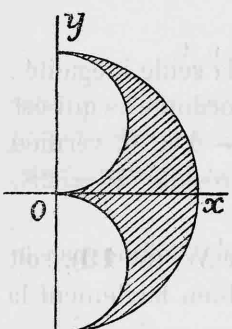
$$\omega_s = 2S \times \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{p-2}\theta_1\, d\theta_1}{\int_0^{\pi} \sin^{p-2}\theta_1\, d\theta_1}.$$

Exemple V. — Considérons la surface fermée du sixième rang, définie par le système des inégalités :

$$(8)\quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + y^2 + \ldots + t^2 - R^2 < 0, \\ (x^2 + y^2 + \ldots + t^2)^2 - R^2(y^2 + \ldots + t^2) > 0. \end{cases}$$

Quand on suppose le nombre des variables égal à 2, on obtient le contour fermé représenté par la *fig.* 6.

Fig. 6.



A l'origine des coordonnées, on a, pour évaluer ω_s, les inégalités :

$$\alpha > 0, \quad \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 < 0,$$

dont la seconde est impossible : par suite, $\omega_s = 0$.

Considérons sur la surface fermée un point dont les coordonnées x', y', ..., t' vérifient les relations :

$$x' = 0, \quad y'^2 + \ldots + t'^2 - R^2 = 0,$$

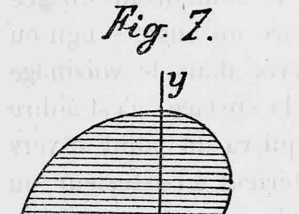
et par conséquent annulent à la fois les premiers membres des inégalités (8). On arrivera, par l'application de la méthode, aux inégalités :

$$\alpha > 0, \quad \beta y' + \ldots + \varepsilon t' < 0, \quad \beta y' + \ldots + \varepsilon t' > 0,$$

dont les deux dernières sont contradictoires; donc $\omega_s = 0$.

Exemple VI. — Considérons l'ensemble des points satisfaisant à l'un ou à l'autre des deux systèmes d'inégalités :

Fig. 7.



$$(9)\quad \begin{cases} x \leqq 0, \\ x^2 + y^2 + \ldots + t^2 - R^2 < 0, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} x > 0, \\ (x^2 + y^2 + \ldots + t^2)^2 - R^2(y^2 + \ldots + t^2) < 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que ces points sont intérieurs à une surface fermée du quatrième rang ; quand on suppose le nombre des variables égal à 2, on obtient le contour représenté par la *fig.* 7.

A l'origine des coordonnées, on a évidemment la relation : $\omega_s = \omega'_s + \omega''_s$, en désignant par ω'_s et ω''_s les quantités analogues à ω_s relatives aux deux surfaces fermées séparément définies par les systèmes (9) et (10). Or le système (9) donne l'inégalité $\alpha < 0$, d'où $\omega'_s = S$; le système (10) donne les inégalités :

$$\alpha > 0, \quad \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 > 0,$$

dont la seconde est verifiée d'elle-même; donc $\omega''_s = S$, et par suite $\omega_s = 2S$.

Considérons sur la surface fermée un point dont les coordonnées $x', y', \ldots, t'$ vérifient les relations :

$$x' = 0, \quad y'^2 + \ldots + t'^2 - R^2 = 0.$$

Il est commun aux deux surfaces fermées (9) et (10), et l'on a encore $\omega_s = \omega'_s + \omega''_s$. Or le système (9) donne les inégalités :

$$\alpha < 0, \quad \beta y' + \ldots + \varepsilon t' < 0;$$

le système (10) donne les inégalités :

$$\alpha > 0, \quad \beta y' + \ldots + \varepsilon t' < 0.$$

Donc ω_s est l'aire de la portion de surface sphérique définie par la seule inégalité :

$$\beta y' + \ldots + \varepsilon t' < 0,$$

et dès lors ω_s a pour valeur S.

22. Supposons que la quantité μ, qui figure dans l'intégrale W_x (n° **19**), soit égale à 1 sur toute l'étendue de la surface σ; on trouve alors bien facilement la valeur de l'intégrale suivant la position du point x.

Pour abréger, nous poserons :

$$(d\sigma)_x = \frac{\cos\varphi \, d\sigma}{D^{p-1}}.$$

En premier lieu, $(d\sigma)_x$ est positif ou négatif, suivant que la demi-droite dirigée de l'élément $d\sigma$ vers le point x fait avec la normale intérieure un angle φ aigu ou obtus, c'est-à-dire suivant que cette demi-droite, considérée dans le voisinage immédiat de l'élément $d\sigma$, est intérieure ou extérieure à la surface, c'est-à-dire enfin suivant que, sur la demi-droite de direction opposée qui va du point x vers l'élément $d\sigma$, on passe, en franchissant cet élément, de l'intérieur à l'extérieur, ou inversement.

En second lieu, nous ferons voir que si on considère le faisceau des demi-droites partant du point x et aboutissant à l'élément $d\sigma$, il détermine sur la sphère de rayon 1 décrite du point x comme centre un élément de surface précisément égal à la valeur absolue de $(d\sigma)_x$ (à un infiniment petit près par rapport à lui).

Si on désigne en effet par $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, comme au n° **19**, les coordonnées d'un point variable de σ, et si on remplace cos φ et $d\sigma$ par leurs valeurs (n^{os} **3**, **5**, **6**), on trouvera facilement :

$$(d\sigma)_x = \pm \frac{(\alpha - x) - \frac{d\alpha}{d\beta}(\beta - y) - \dots - \frac{d\alpha}{d\varepsilon}(\varepsilon - t)}{\mathrm{D}^p}\, d\beta \dots d\varepsilon;$$

en transportant l'origine des coordonnées au point x, c'est-à-dire en posant :

$$\alpha - x = \alpha_1, \quad \beta - y = \beta_1, \dots, \varepsilon - t = \varepsilon_1,$$

$$\mathrm{D} = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \varepsilon_1^2},$$

il viendra :

$$(11) \qquad (d\sigma)_x = \pm \frac{\alpha_1 - \frac{d\alpha_1}{d\beta_1}\beta_1 - \dots - \frac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\varepsilon_1}{\mathrm{D}^p}\, d\beta_1 \dots d\varepsilon_1.$$

Désignons maintenant par $\xi, \eta, \dots, \tau$ les coordonnées (nouvelles) du point où la surface sphérique de rayon 1 décrite du point x comme centre est percée par la demi-droite qui va du point x au point $\alpha_1, \beta_1, \dots, \varepsilon_1$, c'est-à-dire les paramètres directeurs de cette demi-droite; prenons comme nouvelles variables indépendantes $p-1$ des quantités $\xi, \eta, \dots, \tau$, par exemple les $p-1$ dernières, et calculons le déterminant Δ qui a pour éléments les dérivées partielles du premier ordre de $\eta, \dots, \tau$ par rapport à $\beta_1, \dots, \varepsilon_1$. Considérons pour cela les relations :

$$\alpha_1 = \mathrm{D}\xi, \quad \beta_1 = \mathrm{D}\eta, \dots, \quad \varepsilon_1 = \mathrm{D}\tau;$$

on tire de la seconde par différentiation :

$$d\beta_1 = \eta\, d\mathrm{D} + \mathrm{D}\, d\eta,$$

ou

$$\mathrm{D}\, d\beta_1 = \eta\, \mathrm{D} d\mathrm{D} + \mathrm{D}^2 d\eta;$$

d'ailleurs :

$$\mathrm{D} d\mathrm{D} = \alpha_1 d\alpha_1 + \beta_1 d\beta_1 + \dots + \varepsilon_1 d\varepsilon_1 = \left(\beta_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right) d\beta_1 + \dots + \left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) d\varepsilon_1,$$

d'où résulte :

$$d\eta = \frac{\left[\mathrm{D} - \eta\left(\beta_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right)\right] d\beta_1 - \eta\left(\gamma_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\gamma_1}\right) d\gamma_1 - \dots - \eta\left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) d\varepsilon_1}{\mathrm{D}^2},$$

et en multipliant les deux termes par D :

$$d\eta = \frac{\left[\mathrm{D}^2 - \beta_1\left(\beta_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right)\right] d\beta_1 - \beta_1\left(\gamma_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\gamma_1}\right) d\gamma_1 - \dots - \beta_1\left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) d\varepsilon_1}{\mathrm{D}^3}.$$

On trouverait de même les valeurs de $d\zeta, \ldots, d\tau$, et dès lors :

$$D^{3p-3}\Delta = \begin{vmatrix} D^2 - \beta_1\left(\beta_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right) & -\beta_1\left(\gamma_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\gamma_1}\right) & \text{etc.} \ldots & -\beta_1\left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) \\ -\gamma_1\left(\beta_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right) & D^2 - \gamma_1\left(\gamma_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\gamma_1}\right) & \text{etc.} \ldots & -\gamma_1\left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\varepsilon_1\left(\beta_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right) & -\varepsilon_1\left(\gamma_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\gamma_1}\right) & \text{etc.} \ldots & D^2 - \varepsilon_1\left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) \end{vmatrix}.$$

Chaque colonne de ce déterminant peut être considérée comme composée de deux sous-colonnes, dont la première aurait un élément égal à D^2 et tous les autres nuls. Si l'on remarque d'ailleurs que deux sous-colonnes quelconques du second rang ont leurs éléments proportionnels, on trouvera aisément :

$$D^{3p-3}\Delta = D^{2p-2} - \beta_1\left(\beta_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right) D^{2p-4} - \ldots - \varepsilon_1\left(\varepsilon_1 + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right) D^{2p-4}$$
$$= \alpha_1 D^{2p-4}\left(\alpha_1 - \beta_1 \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} - \ldots - \varepsilon_1 \frac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right),$$

d'où :

$$\Delta = \frac{\alpha_1\left(\alpha_1 - \beta_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\beta_1} - \ldots - \varepsilon_1 \dfrac{d\alpha_1}{d\varepsilon_1}\right)}{D^{p+1}}.$$

On en conclut immédiatement, en se reportant à la formule (11) :

$$\frac{d\eta \ldots d\tau}{\xi} = \pm (d\sigma)_x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, supposons que le point x soit extérieur à la surface fermée. Si l'on mène de ce point une demi-droite quelconque sur laquelle on marche toujours dans le même sens [1] à partir de x, il est clair qu'on rencontre la surface un nombre pair de fois, en passant alternativement de l'extérieur à l'intérieur et inversement. Dès lors, un cône d'ouverture infiniment petite ayant son sommet en x intercepte sur σ un nombre pair d'éléments successifs pour lesquels $(d\sigma)_x$ est alternativement négatif et positif, et égal en valeur absolue à l'élément intercepté par le même cône sur la surface sphérique de rayon 1 décrite du point x comme centre ; par suite, l'intégrale considérée est nulle. Si le point x est intérieur à la surface, les éléments interceptés sont en nombre impair, et alternativement positifs et négatifs ; l'intégrale a donc pour valeur 2S. Si le point x est sur la surface, elle a pour valeur ω_x.

[1] Il est aisé de voir quel sens on doit attribuer ici à cette locution géométrique.

23. Avant de passer au cas général, nous établirons quelques propositions auxiliaires.

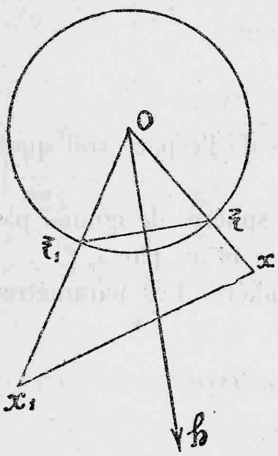
Soient x et x_1 deux points situés à l'extérieur d'une sphère de rayon ρ, r et r_1 les distances respectives du centre à ces deux points, R *une demi-droite quelconque partant du centre, et m un entier quelconque, positif ou nul; on a la formule :*

$$\left| \frac{\cos(r, \mathrm{R})}{r^m} - \frac{\cos(r_1, \mathrm{R})}{r_1^m} \right| < \frac{(m+1)(xx_1)}{\rho^{m+1}} \text{ (1)}, \tag{12}$$

où (xx_1) désigne la distance des deux points donnés.

I. Nous supposerons d'abord le nombre des dimensions de l'espace égal à 3.

Fig. 8.



1° La formule (12) est vraie pour $m = 0$.

En effet, soient h la demi-droite qui divise en deux parties égales l'angle des demi-droites r, r_1, et ψ l'angle des deux plans rh, Rh. On a, d'après une formule connue :

$$\cos(r, \mathrm{R}) = \cos(r, h)\cos(\mathrm{R}, h) + \sin(r, h)\sin(\mathrm{R}, h)\cos\psi,$$
$$\cos(r_1, \mathrm{R}) = \cos(r, h)\cos(\mathrm{R}, h) - \sin(r, h)\sin(\mathrm{R}, h)\cos\psi,$$

d'où, en retranchant :

$$\cos(r, \mathrm{R}) - \cos(r_1, \mathrm{R}) = 2\sin(r, h)\sin(\mathrm{R}, h)\cos\psi,$$

et par suite :

$$|\cos(r, \mathrm{R}) - \cos(r_1, \mathrm{R})| \leqq 2\sin(r, h),$$
$$\leqq \frac{(\xi\xi_1)}{\rho},$$

ξ et ξ_1 désignant les intersections respectives avec la sphère des demi-droites r et r_1. Or, x et x_1 étant extérieurs à la sphère, on a évidemment $(\xi\xi_1) < (xx_1)$, et dès lors :

$$|\cos(r, \mathrm{R}) - \cos(r_1, \mathrm{R})| < \frac{(xx_1)}{\rho}. \tag{13}$$

2° On a la formule :

$$\left| \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r_1^m} \right| < \frac{m(xx_1)}{\rho^{m+1}}. \tag{14}$$

En effet :

$$\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r_1^m} = \frac{r_1^m - r^m}{r_1^m r^m},$$
$$= \frac{(r_1 - r)(r_1^{m-1} + r_1^{m-2} r + \ldots + r^{m-1})}{r_1^m r^m},$$
$$= (r_1 - r)\left(\frac{1}{r_1 r^m} + \frac{1}{r_1^2 r^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{r_1^m r}\right),$$

---

(1) La notation $|a|$, empruntée à M. Weierstrass, signifie *valeur absolue de a*.

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité (14) en remarquant que $\frac{1}{r} < \frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{\rho}$ et $| r_1 - r | \leqq (xx_1)$.

3° La formule (12) est vraie pour toute valeur entière et positive de m.

Posons, pour abréger : $\Delta = \frac{\cos(r, \mathrm{R})}{r^m} - \frac{\cos(r_1, \mathrm{R})}{r_1^m}$. On a évidemment :

$$\Delta = \frac{\cos(r, \mathrm{R}) - \cos(r_1, \mathrm{R})}{r^m} + \left(\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r_1^m}\right) \cos(r_1, \mathrm{R}),$$

d'où l'on déduit :

$$| \Delta | < \frac{| \cos(r, \mathrm{R}) - \cos(r_1, \mathrm{R}) |}{\rho^m} + \left| \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r_1^m} \right|,$$

et en vertu des formules (13) et (14) :

$$| \Delta | < \frac{(x x_1)}{\rho^{m+1}} + \frac{m\,(x x_1)}{\rho^{m+1}}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

II. Supposons maintenant que le nombre des dimensions de l'espace soit quelconque.

Prenant comme origine des coordonnées le centre de la sphère, désignons par $x, y, \ldots, t$ et $x_1, y_1, \ldots, t_1$ les coordonnées des deux points x et x_1, par $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ les coordonnées du point où la demi-droite R perce la sphère. Les paramètres directeurs des demi-droites r, r_1, R sont respectivement :

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \ldots, \quad \frac{t}{r},$$
$$\frac{x_1}{r_1}, \quad \frac{y_1}{r_1}, \ldots, \quad \frac{t_1}{r_1},$$
$$\frac{\alpha}{\rho}, \quad \frac{\beta}{\rho}, \ldots, \quad \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

On est ramené dès lors à démontrer l'inégalité :

$$\left| \frac{\alpha x + \beta y + \ldots + \varepsilon t}{r^{m+1}} - \frac{\alpha x_1 + \beta y_1 + \ldots + \varepsilon t_1}{r_1^{m+1}} \right| < \frac{(m+1)\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \ldots + (t - t_1)^2}}{\rho^m},$$

dans laquelle on suppose :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + \ldots + t^2},$$
$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \ldots + t_1^2},$$
$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2},$$
$$r > \rho, \quad r_1 > \rho.$$

Or, le nombre des dimensions de l'espace étant supérieur à 3, on peut, en changeant les directions des plans coordonnés rectangulaires (n° **1**), annuler les trois quantités t, t_1 et ε, par où l'on voit que si le théorème est vrai dans l'espace à $p-1$ dimensions, il l'est également dans l'espace à p dimensions. Il est donc général, puisqu'il a été démontré dans l'espace à trois dimensions.

Il résulte de là que *si on désigne par $d\sigma$ un élément de surface dont tous les points soient à des distances supérieures à ρ de deux points x et x_1, on a :*

$$(15)\qquad |(d\sigma)_x - (d\sigma)_{x_1}| < \frac{p\,(xx_1)}{\rho^p}\,d\sigma.$$

On a en effet, en désignant par N la normale à l'élément, et par r et r_1 les distances de l'élément aux deux points x et x_1 :

$$(d\sigma)_x = \frac{\cos(r, \mathrm{N})}{r^{p-1}}\,d\sigma, \qquad (d\sigma)_{x_1} = \frac{\cos(r_1, \mathrm{N})}{r_1^{p-1}}\,d\sigma,$$

d'où l'on tire :

$$(d\sigma)_x - (d\sigma)_{x_1} = \left(\frac{\cos(r, \mathrm{N})}{r^{p-1}} - \frac{\cos(r_1, \mathrm{N})}{r_1^{p-1}}\right) d\sigma.$$

Il suffit dès lors de se reporter à la formule (12).

24. *Soient deux sphères concentriques de rayons* R *et* R′ (R > R′), *x un point extérieur à la première, x' un point intérieur à la seconde; on a :* $(xx') > \mathrm{R} - \mathrm{R}'$.

Cela revient à démontrer que des inégalités :

$$\mathrm{R} > \mathrm{R}', \quad x^2 + y^2 + \ldots + t^2 - \mathrm{R}^2 > 0, \quad x'^2 + y'^2 + \ldots + t'^2 - \mathrm{R}'^2 < 0,$$

résulte nécessairement l'inégalité :

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + \ldots + (t - t')^2 > (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2.$$

Il suffira de prouver que l'on a :

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + \ldots + (t-t')^2 > \left[\sqrt{x^2 + y^2 + \ldots + t^2} - \sqrt{x'^2 + y'^2 + \ldots + t'^2}\right]^2,$$

calcul d'une extrême facilité.

25. *Soient s un point fixe quelconque pris sur une surface fermée σ, μ une quantité qui varie d'une manière continue sur cette surface, μ_s sa valeur au point s. Si l'on pose :*

$$\Omega_x = \int \mu\,(d\sigma)_x - \mu_s \int (d\sigma)_x,$$

la fonction Ω_x est continue dans le voisinage du point s, c'est-à-dire que pour tous les points x intérieurs à une sphère de centre s et de rayon suffisamment petit, on a l'inégalité :

$$|\Omega_x - \Omega_s| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée.

Posons : $\int |(d\sigma)_x| = \Psi_x$. Quelle que soit la position du point x dans l'espace, la fonction Ψ_x conserve toujours une valeur finie : car, si l'on désigne par $2q$ le rang de la surface, par $d\omega$ l'élément de surface d'une sphère de rayon 1 décrite du point x comme centre, et par $2\mathrm{S}$ l'aire de cette surface, on a évidemment :

$$\int |(d\sigma)_x| < \int 2q\, d\omega < 4q\mathrm{S}.$$

Nous appellerons M le maximum de Ψ_x, et nous poserons en outre : $\int d\sigma = \mathrm{C}$.

Si l'on désigne par μ_σ la valeur de la quantité variable μ en un point de l'élément $d\sigma$, on peut écrire :

$$\Omega_x = \int (\mu_\sigma - \mu_s)\,(d\sigma)_x,$$

d'où :

$$\Omega_s = \int (\mu_\sigma - \mu_s)\,(d\sigma)_s,$$

et

$$\Omega_x - \Omega_s = \int (\mu_\sigma - \mu_s) \left\{ (d\sigma)_x - (d\sigma)_s \right\}.$$

Du point s comme centre, décrivons une petite sphère (A), et désignons par α la portion de σ qui se trouve à l'intérieur de (A), par β celle qui se trouve à l'extérieur. L'intégrale précédente peut se décomposer en deux parties, correspondant respectivement à α et à β :

$$\Omega_x - \Omega_s = \mathrm{J}_\alpha + \mathrm{J}_\beta,$$

$$\mathrm{J}_\alpha = \int (\mu_\alpha - \mu_s) \left\{ (d\alpha)_x - (d\alpha)_s \right\},$$

$$\mathrm{J}_\beta = \int (\mu_\beta - \mu_s) \left\{ (d\beta)_x - (d\beta)_s \right\}.$$

Considérons d'abord l'intégrale J_α. On a évidemment :

$$|\mathrm{J}_\alpha| < \int |\mu_\alpha - \mu_s| \times |(d\alpha)_x - (d\alpha)_s|,$$

d'où :

$$|\mathrm{J}_\alpha| < \mathrm{G} \int |(d\alpha)_x - (d\alpha)_s|,$$

G désignant le maximum de $|\mu_\alpha - \mu_s|$. *A fortiori :*

$$|\mathrm{J}_\alpha| < \mathrm{G} \int \left\{ |(d\alpha)_x| + |(d\alpha)_s| \right\},$$

et par conséquent :

$$|\mathrm{J}_\alpha| < 2\mathrm{GM}.$$

Or, la fonction μ étant continue sur la surface σ, la quantité $|\mu_\alpha - \mu_s|$ et son maximum G tendent vers zéro avec le rayon de la sphère (A), et dès lors, pour une valeur suffisamment petite de ce rayon, soit R, on aura, quelle que soit la position du point x dans l'espace :

$$| J_\alpha | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela posé, laissons fixe le rayon R, et par suite α et β. On a :

$$\begin{aligned} | J_\beta | &< \int | \mu_\beta - \mu_s | \times | (d\beta)_x - (d\beta)_s |, \\ &< G' \int | (d\beta)_x - (d\beta)_s |, \end{aligned}$$

G' désignant le maximum de $\mu_\beta - \mu_s$. Décrivons maintenant une seconde sphère concentrique à la première, et de rayon $R' < R$; pour tout point x pris à l'intérieur de la sphère R', on a, en vertu de la formule (15) :

$$| (d\beta)_x - (d\beta)_s | < \frac{p\,(xs)}{(R - R')^p}\, d\beta,$$

car les points x et s se trouvent à des distances de l'élément $d\beta$ supérieures à $R - R'$ (n° **24**). Dès lors :

$$| J_\beta | < \frac{p G'\,(xs)}{(R - R')^p} \int d\beta < \frac{p\, CG' R'}{(R - R')^p}.$$

Cette dernière quantité tend vers zéro avec R'. Si donc on donne à R' une valeur suffisamment petite, on aura, pour tous les points intérieurs à la sphère de rayon R':

$$| J_\beta | < \frac{\varepsilon}{2};$$

on a d'ailleurs :

$$| J_\alpha | < \frac{\varepsilon}{2};$$

d'où l'on tire :

$$| J_\alpha + J_\beta | < \varepsilon,$$

ou $| \Omega_x - \Omega_s | < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

26. Théorème. — $2S$ *désignant l'aire de la surface sphérique de rayon* 1, ψ_s *le supplément de l'ouverture de la surface* σ *au point* s (n° **20**), W_{as} *la limite de* W_a *lorsque le point* a *tend vers* s, W_{is} *la limite de* W_i *lorsque le point* i *tend vers* s :

1° *La quantité* $f_s = W_s + \psi_s \mu_s$ *varie d'une manière continue sur la surface;*

2° $W_{as} = f_s - S\mu_s$;

3° $W_{is} = f_s + S\mu_s$.

Rappelons-nous en effet qu'en vertu du n° **22**, on a :

$$\int (d\sigma)_a = 0, \quad \int (d\sigma)_i = 2S, \quad \int (d\sigma)_s = \omega_s = S - \psi_s.$$

Cela posé, de la formule :

$$\Omega_x = W_x - \mu_s \int (d\sigma)_x, \tag{16}$$

on tire :

$$\Omega_s = f_s - S\mu_s, \tag{17}$$

et

$$\Omega_{s_1} = W_{s_1} + \psi_{s_1}\mu_s - S\mu_s,$$

égalité qui peut s'écrire :

$$\psi_{s_1}(\mu_{s_1} - \mu_s) + \Omega_{s_1} = f_{s_1} - S\mu_s. \tag{18}$$

En retranchant membre à membre les relations (17) et (18), il vient :

$$\psi_{s_1}(\mu_{s_1} - \mu_s) + (\Omega_{s_1} - \Omega_s) = f_{s_1} - f_s.$$

Si le point s_1 tend vers s, les deux termes du premier membre tendent vers zéro, par suite aussi le second membre, ce qui démontre 1°.

D'autre part, on tire de la formule (16) :

$$\Omega_a = W_a,$$
$$\Omega_i = W_i - 2S\mu_s,$$

d'où :

$$\Omega_a - \Omega_s = W_a - (f_s - S\mu_s),$$
$$\Omega_i - \Omega_s = W_i - (f_s + S\mu_s).$$

Des deux dernières relations, on déduit de la même manière 2° et 3°.

CHAPITRE III.

MÉTHODE DE M. CARL NEUMANN OU DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE [1].

27. Nous dirons qu'une surface, ouverte ou fermée, est *multiétoilée* [2] *d'ordre n*, lorsqu'il est possible d'assigner dans l'espace n points fixes tels que tout plan tangent à la surface passe par l'un d'entre eux, mais lorsqu'en même temps il est impossible d'assigner $n - 1$ points fixes jouissant de cette propriété.

Une surface uniétoilée se compose nécessairement d'une portion de cône, et par suite est nécessairement ouverte. Comme exemples de surfaces biétoilées, on peut citer (dans l'espace à trois dimensions) le parallélipipède, l'octaèdre, le tétraèdre, la surface engendrée par la révolution d'un losange autour d'une de ses diagonales, etc. Dans cette dernière surface, les deux points fixes de la définition sont les extrémités de la diagonale considérée; dans le parallélipipède et l'octaèdre, les extrémités d'une diagonale quelconque; dans le tétraèdre, un sommet quelconque et un point quelconque de la face opposée.

28. Soient σ une surface fermée du second rang (n° **18**), s un point pris sur cette surface, φ l'angle de la normale intérieure en un point variable de σ avec la demi-droite qui va de ce point au point s. Il peut arriver que le point s soit le sommet de quelque portion de surface conique contenue dans σ; en rapprochant l'expression de $\cos\varphi$ de l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques [3], on voit immédiatement que $\cos\varphi$ est nul sur toute la portion considérée. Sur la portion restante σ', l'ensemble des points pour lesquels $\cos\varphi$ est nul ne peut former une portion de surface, si petite qu'elle soit, et, si l'on en fait abstraction, $\cos\varphi$ est toujours positif : car, la surface étant du second rang, il est facile de se rendre compte qu'une demi-droite allant du point s à un point quelconque de σ' commence par être intérieure à la surface, et la traverse une fois et une seule en passant de l'intérieur à l'extérieur.

---

(1) *Untersuchungen*, etc., chapitre V, p. 160 à 220.

(2) *Vielsternig*, dit M. Carl Neumann, p. 168.

(3) En désignant par D la distance du point $x, y, \ldots, t$ au point $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ de la surface, et par $f(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = 0$ l'équation de la portion de surface sur laquelle ce dernier est situé, on trouve facilement :

$$\cos\varphi = \pm \frac{(x-\alpha)f'_\alpha + (y-\beta)f'_\beta + \ldots + (t-\varepsilon)f'_\varepsilon}{D\sqrt{f'^2_\alpha + f'^2_\beta + \ldots + f'^2_\varepsilon}}.$$

D'autre part, dans une surface du second rang, ω_s ne peut surpasser S. En effet, sur deux demi-droites opposées partant du point s, il ne peut y en avoir plus d'une dirigée vers l'intérieur de la surface. Dès lors, le faisceau des demi-droites dirigées vers l'intérieur de la surface et le faisceau des demi-droites opposées déterminent sur la sphère de rayon 1 décrite du point s comme centre deux régions symétriques n'ayant aucune partie commune, et dont les aires sont égales. Chacune de ces aires est donc au plus égale à la moitié de l'aire sphérique.

Cela posé, si on désigne par α une portion quelconque de σ, on a :

$$0 \leqq \int (d\alpha)_s \leqq \int (d\sigma)_s = \omega_s \leqq \mathrm{S}.$$

Partageons alors la surface σ en deux portions α et β (dont chacune peut elle-même se composer d'un nombre quelconque de parties séparées), et soient s et s_1 deux points quelconques de la surface. On a, d'après ce qui précède :

$$0 \leqq \int (d\alpha)_s \leqq \mathrm{S},$$

$$0 \leqq \int (d\beta)_{s_1} \leqq \mathrm{S},$$

d'où, en ajoutant :

$$0 \leqq \int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_{s_1} \leqq 2\mathrm{S}.$$

Nous ferons voir maintenant que, la surface étant supposée en outre non biétoilée, la valeur de l'expression $\int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_{s_1}$ ne tombe jamais au-dessous d'une quantité fixe θ, *supérieure à zéro,* quels que soient d'une part s et s_1, d'autre part α et β.

Supposons d'abord que les deux points s et s_1 aient sur la surface une position particulière déterminée; désignons par φ le même angle que précédemment [1], et par φ_1 l'angle analogue lorsqu'on remplace s par s_1. Il peut arriver que le point s soit le sommet de quelque portion de surface conique contenue dans σ, et de même le point s_1; soit σ' la surface partielle déduite de σ en enlevant ces portions de surfaces coniques. σ' ne peut se réduire à zéro : car il faudrait pour cela, si s et s_1 coïncident, que la surface σ fût uniétoilée, et par suite ouverte, et, s'ils ne coïncident pas, qu'elle fût biétoilée, ce qui est contre l'hypothèse. D'ailleurs, sur toute l'étendue de σ', cos φ est positif, sauf en certains points dont l'ensemble ne peut former une portion de surface, et il en est de même de cos φ_1. Cela posé, retranchons de σ' une portion choisie de telle sorte que la portion restante σ'' ne se réduise pas à zéro, et en outre qu'en aucun point de σ'' cos φ ni cos φ_1 ne

(1) C'est à dire l'angle de la normale intérieure en un point variable de σ avec la demi-droite qui va de ce point au point s.

soient nuls; désignons par m une quantité positive au plus égale à la plus petite des valeurs que peuvent prendre sur σ'' cos φ et cos φ_1, et remarquons que les quantités m et σ'' sont complètement indépendantes du mode de division (α et β) que l'on considère sur la surface; enfin appelons α'' et β'' les portions de σ'' respectivement comprises dans α et β. Cela posé, on a évidemment :

$$\int (d\alpha)_s \geqq \frac{m\alpha''}{L^{p-1}}, \quad \int (d\beta)_{s_1} \geqq \frac{m\beta''}{L^{p-1}},$$

L désignant la distance maximum de deux points variables sur σ, d'où en ajoutant :

$$\int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_{s_1} \geqq \frac{m\sigma''}{L^{p-1}}.$$

Dès lors, si on donne aux points s et s_1 sur la surface une position particulière déterminée, on peut assigner une quantité *positive* au-dessous de laquelle ne tombe jamais la valeur de l'expression considérée, lorsqu'on fait varier α et β d'une manière complètement arbitraire. Si maintenant on considère toutes les positions possibles des points s et s_1 sur la surface σ, il est clair qu'on peut assigner un nombre *positif* θ tel que l'on ait :

$$\theta \leqq \int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_{s_1} \leqq 2S,$$

quels que soient d'une part s et s_1, d'autre part α et β. En posant : $1 - \frac{\theta}{2S} = \lambda$, on en déduit facilement :

$$(1) \qquad \lambda \geqq 1 - \frac{\int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_{s_1}}{2S} \geqq 0,$$

où λ désigne une constante positive, *inférieure à l'unité.*

29. Désignons par f des valeurs formant un ensemble continu sur une surface fermée σ, par f_s la valeur particulière de cette fonction au point s, et posons :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} W_x = \frac{1}{S}\int f \ (d\sigma)_x, & f'_s = W_s + \frac{\psi_s f_s}{S}, \\ W'_x = \frac{1}{S}\int f' \ (d\sigma)_x, & f''_s = W'_s + \frac{\psi_s f'_s}{S}, \\ W''_x = \frac{1}{S}\int f'' \ (d\sigma)_x, & f'''_s = W''_s + \frac{\psi_s f''_s}{S}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \right.$$

et ainsi de suite indéfiniment (d'après le n° **26**, les valeurs $f^{(n)}$ forment sur σ un ensemble continu). La surface étant supposée du second rang et non biétoilée, nous ferons voir qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande, on a, pour toutes les valeurs positives de l'entier q, et pour toutes les positions possibles des points s et s' sur la surface :

$$| f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)} | < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée.

Désignons par G et K la plus grande et la plus petite des valeurs f, et par M la moyenne arithmétique entre ces deux quantités, d'où résultent évidemment les relations :

$$\mathrm{M} - \mathrm{K} = \mathrm{G} - \mathrm{M} = \frac{\mathrm{G} - \mathrm{K}}{2}.$$

Désignons de même par G' et K' la plus grande et la plus petite des valeurs f', et en général par $\mathrm{G}^{(n)}$ et $\mathrm{K}^{(n)}$ la plus grande et la plus petite des valeurs $f^{(n)}$. Rappelons enfin que, la surface σ étant du second rang, les quantités $(d\sigma)_s$ et ψ_s sont positives ou nulles en un point quelconque de la surface (n° **28**). On a d'après cela :

$$\mathrm{W}_s \leqq \mathrm{G}\,\frac{\omega_s}{\mathrm{S}}, \quad \mathrm{W}_s \geqq \mathrm{K}\,\frac{\omega_s}{\mathrm{S}},$$

d'où :

$$f'_s \leqq \mathrm{G}\,\frac{\omega_s + \psi_s}{\mathrm{S}} = \mathrm{G}, \quad f'_s \geqq \mathrm{K}\,\frac{\omega_s + \psi_s}{\mathrm{S}} = \mathrm{K},$$

c'est-à-dire que toutes les valeurs f', ou, ce qui revient au même, G' et K', sont comprises entre G et K. De même les valeurs G'' et K'' sont comprises entre G' et K', et ainsi de suite indéfiniment.

Maintenant, séparons sur la surface σ les régions où les valeurs f sont comprises entre K et M, de celles où les valeurs f sont comprises entre M et G. Il peut se faire que dans le voisinage de certains points, dont l'ensemble ne forme jamais une portion de surface, si petite qu'elle soit, le nombre des continuums de points ainsi obtenus soit infini. Isolons ces points du reste de la surface en retranchant de σ une portion γ convenablement choisie, et sur la partie restante appelons α et β les deux systèmes de régions dans lesquels les valeurs f satisfont respectivement aux deux conditions ci-dessus énoncées, et dont chacun se compose alors d'un nombre fini de continuums de points [1]. On a, par définition de f'_s [voir les formules (2)] :

$$\mathrm{S} f'_s = \psi_s f_s + \int f\,(d\sigma)_s,$$

ou

$$\mathrm{S} f'_s = \psi_s f_s + \int f\,(d\alpha)_s + \int f\,(d\beta)_s + \int f\,(d\gamma)_s,$$

d'où l'on déduit :

$$\mathrm{S} f'_s \leqq \mathrm{G}\psi_s + \mathrm{M}\int (d\alpha)_s + \mathrm{G}\int (d\beta)_s + \mathrm{G}\int (d\gamma)_s,$$

---

[1] Une région dans laquelle f serait constamment égal à M doit être considérée comme faisant partie de α ou de β indifféremment.

et

$$Sf'_s \geqq K\psi_s + K\int(d\alpha)_s + M\int(d\beta)_s + K\int(d\gamma)_s,$$

c'est-à-dire :

$$Sf'_s \leqq G\left[\psi_s + \int(d\alpha)_s + \int(d\beta)_s + \int(d\gamma)_s\right] + (M - G)\int(d\alpha)_s,$$

et

$$Sf'_s \geqq K\left[\psi_s + \int(d\alpha)_s + \int(d\beta)_s + \int(d\gamma)_s\right] + (M - K)\int(d\beta)_s,$$

ou enfin :

$$f'_s \leqq G - \frac{G-K}{2S}\int(d\alpha)_s,$$

et

$$f'_s \geqq K + \frac{G-K}{2S}\int(d\beta)_s.$$

Appelons s_0 et s_1 deux points situés d'une manière quelconque sur la surface, mais ne coïncidant avec aucun de ceux que la région γ sert à isoler. On a, d'après ce qui précède :

$$f'_{s_1} \leqq G - \frac{G-K}{2S}\int(d\alpha)_{s_1},$$

$$f'_{s_0} \geqq K + \frac{G-K}{2S}\int(d\beta)_{s_0},$$

d'où, en retranchant membre à membre :

$$f'_{s_1} - f'_{s_0} \leqq (G-K)\left[1 - \frac{\int(d\alpha)_{s_1} + \int(d\beta)_{s_0}}{2S}\right].$$

Cette inégalité peut s'écrire :

$$f'_{s_1} - f'_{s_0} \leqq (G-K)\left[1 - \frac{\int(d\alpha)_{s_1} + \int\{(d\beta)_{s_0} + (d\gamma)_{s_0}\}}{2S} + \frac{\int(d\gamma)_{s_0}}{2S}\right],$$

d'où, *à fortiori,* en vertu de l'inégalité (1) (n° **28**) :

$$f'_{s_1} - f'_{s_0} \leqq (G-K)\left[\lambda + \frac{\int(d\gamma)_{s_0}}{2S}\right].$$

Si γ tend vers zéro, comme le point s_0 se trouve à l'extérieur de cette région infiniment petite, $\int(d\gamma)_{s_0}$ tend aussi vers zéro, et il vient :

$$f'_{s_1} - f'_{s_0} \leqq (G-K)\,\lambda.$$

D'ailleurs, en vertu de la continuité des valeurs f', cette inégalité subsiste alors même que le point s_0 ou le point s_1 coïnciderait avec quelqu'un de ceux que la région γ a servi à isoler. Dès lors, si on considère sur la surface deux points où la fonction f' prenne respectivement les valeurs G' et K', on aura :

$$G' - K' \leqq (G - K)\lambda,$$

où λ désigne, comme on sait, une constante positive *inférieure à l'unité* et *indépendante des valeurs f*. On aura de même :

$$G'' - K'' \leqq (G' - K')\lambda,$$

et ainsi de suite indéfiniment, d'où l'on tire :

$$G^{(n)} - K^{(n)} \leqq (G - K)\lambda^n.$$

Cela posé, puisque $f_s^{(n+q)}$ est compris entre $G^{(n)}$ et $K^{(n)}$ quels que soient le point s et l'entier q, on a :

$$| f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)} | \leqq G^{(n)} - K^{(n)},$$

et par suite :

$$(3) \qquad | f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)} | \leqq (G - K)\lambda^n;$$

λ étant inférieur à l'unité, le second membre, et *à fortiori* le premier, est inférieur à ε à partir d'une valeur de n suffisamment grande, ce qu'il fallait démontrer.

De ce qui précède résulte évidemment qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande, la quantité $f_s^{(n)}$, pour toutes les positions possibles du point s sur la surface, diffère d'une certaine constante C d'une quantité moindre que toute quantité donnée. Si donc, laissant n fixe dans l'inégalité précédente, on fait augmenter q indéfiniment, il vient :

$$(4) \qquad | C - f_s^{(n)} | \leqq (G - K)\lambda^n.$$

30. LEMME. — *Si l'on désigne par σ une surface fermée du second rang, par μ une quantité qui varie d'une manière continue sur cette surface, enfin par* L *la plus grande valeur absolue de μ, l'intégrale $W_x = \int \mu\,(d\sigma)_x$ ne peut dépasser en valeur absolue* 2SL.

En effet, puisque la surface est du second rang, $(d\sigma)_s$ est positif ou nul, ainsi que ψ_s, et l'on a :

$$| W_s | \leqq L\omega_s \leqq SL.$$

D'autre part (n° **26**),

$$W_{as} = W_s + \psi_s\mu_s - S\mu_s,$$
$$W_{is} = W_s + \psi_s\mu_s + S\mu_s,$$

d'où résulte qu'aucune des quantités $| W_{as} |$, $| W_{is} |$ ne peut surpasser L $(\omega_s + \psi_s)$ + SL ou 2SL. Enfin, la fonction W_x s'annulant à l'infini, les valeurs maxima de $| W_a |$ et $| W_i |$ sont respectivement égales aux valeurs maxima de $| W_{as} |$ et $| W_{is} |$ (n° **13**).

31. THÉORÈME. — *σ désignant une surface fermée du second rang non biétoilée, et $f, f', f'', \ldots,$ C ayant la même signification qu'au n° **29**, si l'on pose :*

$$(5) \qquad \mu = \frac{1}{S}[(C-f) + (C-f') + (C-f'') + \ldots \textit{ in inf.}],$$

la fonction $F_a = \int \mu \, (d\sigma)_a$ *satisfait à la relation :*

$$F_{as} = f_s - C.$$

En premier lieu, la formule (5) définit une fonction continue sur σ. Posons en effet :

$$\mu = \mu^{(n)} + \rho^{(n)},$$

$$\mu^{(n)} = \frac{1}{S}[(C-f) + (C-f') + \ldots + (C-f^{(n)})],$$

$$\rho^{(n)} = \frac{1}{S}[(C-f^{(n+1)}) + (C-f^{(n+2)}) + \ldots \textit{ in inf.}].$$

On a, en vertu de la relation (4) :

$$(6) \qquad |\rho^{(n)}| \leqq \frac{G-K}{S} \cdot \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda},$$

d'où résulte qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande on a, pour toutes les positions possibles du point s sur la surface :

$$(7) \qquad |\rho^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donnons à n une valeur *fixe* satisfaisant à cette condition, et formons la différence :

$$(8) \qquad \mu_{s_1} - \mu_s = (\mu_{s_1}^{(n)} - \mu_s^{(n)}) + (\rho_{s_1}^{(n)} - \rho_s^{(n)}).$$

D'après (7), on a, quels que soient s et s_1 :

$$(9) \qquad |\rho_{s_1}^{(n)} - \rho_s^{(n)}| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ étant des fonctions continues sur σ, il en est de même de $\mu^{(n)}$, et l'on a, pour s_1 suffisamment voisin de s :

$$(10) \qquad |\mu_{s_1}^{(n)} - \mu_s^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il résulte de (8), (9) et (10) que, pour s_1 suffisamment voisin de s, on a :

$$|\mu_{s_1} - \mu_s| < \varepsilon.$$

Je dis maintenant qne la fonction F_a satisfait à la relation : $F_{as} = f_s - C$. Posons en effet :

$$F_a^{(n)} = \int \mu^{(n)} \, (d\sigma)_a,$$

d'où résulte :

(11) $$F_a - F_a^{(n)} = \int \rho^{(n)} (d\sigma)_a.$$

La différence $F_{as} - (f_s - C)$ peut s'écrire :

$$[F_{as} - F_{as}^{(n)}] + [F_{as}^{(n)} - (f_s - C)].$$

En rapprochant du numéro précédent (**30**) les formules (11) et (6), on obtient :

(12) $$| F_{as} - F_{as}^{(n)} \ | \leqq 2 (G - K) \frac{\lambda^{n+1}}{1 - \lambda}.$$

D'autre part, puisque $\int C (d\sigma)_a = 0$, on a :

$$F_a^{(n)} = -\frac{1}{S}\int f (d\sigma)_a - \frac{1}{S}\int f' (d\sigma)_a - \ldots - \frac{1}{S}\int f^{(n)} (d\sigma)_a,$$

ou :

$$F_a^{(n)} = - W_a - W'_a - \ldots - W_a^{(n)},$$

d'où :

$$F_{as}^{(n)} = - W_{as} - W'_{as} - \ldots - W_{as}^{(n)},$$

W_x, W'_x, etc., ayant la même signification qu'au n° **29**. Or, en vertu du n° **26** et des formules (2) du n° **29**, on a :

$$\begin{aligned}
W_{as} &= f'_s - f_s,\\
W'_{as} &= f''_s - f'_s,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
W_{as}^{(n)} &= f_s^{(n+1)} - f_s^{(n)},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre :

$$F_{as}^{(n)} = f_s - f_s^{(n+1)},$$

ou

$$F_{as}^{(n)} - (f_s - C) = C - f_s^{(n+1)},$$

et par suite, en vertu de la formule (4) :

(13) $$| F_{as}^{(n)} - (f_s - C) | \leqq (G - K) \lambda^{n+1}.$$

Des inégalités (12) et (13), on déduit aisément :

(14) $$| F_{as} - (f_s - C) | \leqq \frac{(G - K)(3 - \lambda)}{1 - \lambda} \lambda^{n+1}.$$

Si l'on fait augmenter n indéfiniment, le second membre de (14) tend vers zéro; donc le premier, qui est une quantité fixe, est rigoureusement nul.

32. THÉORÈME. — σ, f, f', f'', ..., C *ayant le même sens qu'au numéro précé-*

dent, si l'on pose :

$$(15) \qquad \nu = \frac{1}{S}\left[(f - f') + (f'' - f''') + (f^{(\text{IV})} - f^{(\text{V})}) + \ldots \textit{ in inf.}\right],$$

la fonction $H_i = \int \nu \, (d\sigma)_i$ *satisfait à la relation :*

$$H_{is} = f_s - C.$$

La démonstration est complètement analogue à la précédente.

En premier lieu, la formule (15) définit une fonction continue sur σ. Posons en effet :

$$\nu = \nu^{(n)} + \tau^{(n)},$$

$$\nu^{(n)} = \frac{1}{S}\left[(f - f') + (f'' - f''') + \ldots + (f^{(2n)} - f^{(2n+1)})\right],$$

$$\tau^{(n)} = \frac{1}{S}\left[(f^{(2n+2)} - f^{(2n+3)}) + (f^{(2n+4)} - f^{(2n+5)}) + \ldots \textit{ in inf.}\right].$$

On a, en vertu de la relation (3) :

$$(16) \qquad |\, \tau^{(n)} \,| \leqq \frac{G - K}{S} \cdot \frac{\lambda^{2n+2}}{1 - \lambda^2},$$

d'où résulte qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande, on a, pour toutes les positions possibles du point s sur la surface :

$$(17) \qquad |\, \tau^{(n)} \,| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donnons à n une valeur *fixe* satisfaisant à cette condition, et formons la différence :

$$(18) \qquad \nu_{s_1} - \nu_s = (\nu_{s_1}^{(n)} - \nu_s^{(n)}) + (\tau_{s_1}^{(n)} - \tau_s^{(s)}).$$

D'après (17), on a, quels que soient s et s_1 :

$$(19) \qquad |\, \tau_{s_1}^{(n)} - \tau_s^{(n)} \,| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, $f, f', f'', \ldots, f^{(2n+1)}$ étant des fonctions continues sur σ, il en est de même de $\nu^{(n)}$, et l'on a, pour s_1 suffisamment voisin de s :

$$(20) \qquad |\, \nu_{s_1}^{(n)} - \nu_s^{(n)} \,| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il résulte de (18), (19) et (20) que, pour s_1 suffisamment voisin de s, on a :

$$|\, \nu_{s_1} - \nu_s \,| < \varepsilon.$$

Je dis maintenant que la fonction H_i satisfait à la relation : $H_{is} = f_s - C$. Posons en effet :

$$H_i^{(n)} = \int \nu^{(n)} \, (d\sigma)_i,$$

d'où résulte :

$$(21) \qquad H_i - H_i^{(n)} = \int \tau^{(n)}\,(d\sigma)_i.$$

La différence $H_{is} - (f_s - C)$ peut s'écrire :

$$[H_{is} - H_{is}^{(n)}] + [H_{is}^{(n)} - (f_s - C)].$$

En rapprochant du n° **30** les formules (21) et (16), on obtient :

$$(22) \qquad |\, H_{is} - H_{is}^{(n)} \,| \leqq 2\,(G - K)\,\frac{\lambda^{2n+2}}{1 - \lambda^2}.$$

On a d'autre part :

$$H_i^{(n)} = W_i - W_i' + W_i'' - W_i''' + \ldots + W_i^{(2n)} - W_i^{(2n+1)},$$

d'où :

$$H_{is}^{(n)} = W_{is} - W_{is}' + W_{is}'' - W_{is}''' + \ldots + W_{is}^{(2n)} - W_{is}^{(2n+1)},$$

W_x, W_x', etc., ayant la même signification qu'au n° **29**. Or, en vertu du n° **26** et des formules (2) du n° **29**, on a :

$$\begin{aligned}
W_{is} &= f_s + f_s', \\
W_{is}' &= f_s' + f_s'', \\
W_{is}'' &= f_s'' + f_s''', \\
W_{is}''' &= f_s''' + f_s^{\mathrm{IV}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_{is}^{(2n)} &= f_s^{(2n)} + f_s^{(2n+1)}, \\
W_{is}^{(2n+1)} &= f_s^{(2n+1)} + f_s^{(2n+2)},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}
W_{is} - W_{is}' &= f_s - f_s'', \\
W_{is}'' - W_{is}''' &= f_s'' - f_s^{\mathrm{IV}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_{is}^{(2n)} - W_{is}^{(2n+1)} &= f_s^{(2n)} - f_s^{(2n+2)},
\end{aligned}$$

et, en ajoutant membre à membre :

$$H_{is}^{(n)} = f_s - f_s^{(2n+2)},$$

ou :

$$H_{is}^{(n)} - (f_s - C) = C - f_s^{(2n+2)},$$

et par suite, en vertu de la formule (4) :

$$(23) \qquad |\, H_{is}^{(n)} - (f_s - C) \,| \leqq (G - K)\,\lambda^{2n+2}.$$

Des inégalités (22) et (23), on déduit :

$$|\, H_{is} - (f_s - C) \,| \leqq \frac{(G - K)\,(3 - \lambda^2)}{1 - \lambda^2}\,\lambda^{2n+2},$$

formule dans laquelle il suffit de faire augmenter n indéfiniment.

33. Les théorèmes qui précèdent permettent de résoudre simplement les trois problèmes dont il est parlé au n° **17**.

PROBLÈME I. — C'est celui qui correspond au théorème I du n° **13**, lorsqu'on suppose $n = 1$. La fonction $H_i + C$ répond évidemment à la question.

PROBLÈME II. — C'est celui qui correspond au théorème II du n° **13**, lorsqu'on suppose $n = 1$. En désignant par A la valeur que la fonction doit prendre à l'infini, ce problème revient évidemment au suivant : déterminer une fonction finie et continue à l'extérieur de σ, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$, s'annulant à l'infini, et prenant sur σ les valeurs $f - A$, ou, pour ne pas compliquer la notation, les valeurs f.

Considérons à l'intérieur de la surface σ un point fixe quelconque, et désignons par φ_x l'inverse de la puissance $p - 2$ de la distance du point x au point considéré, par φ_s les valeurs que cette fonction prend sur σ, par Φ_a la fonction composée avec les valeurs φ_s comme F_a (n° **31**) a été composée avec les valeurs f_s, enfin par Γ la constante analogue à C. La fonction $F_a + k(\varphi_a - \Phi_a)$, où k désigne une constante provisoirement indéterminée, est finie et continue à l'extérieur de σ, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, vérifie l'équation différentielle $\Delta = 0$, et s'annule à l'infini, puisque chacune des trois fonctions F_a, φ_a, Φ_a jouit de toutes ces propriétés. D'ailleurs, en vertu des relations :

$$F_{as} = f_s - C,$$
$$\Phi_{as} = \varphi_s - \Gamma,$$

elle prend sur σ les valeurs f_s à une constante additive près, qui a pour valeur $-C + k\Gamma$. Il suffira donc, pour obtenir la fonction cherchée, de déterminer k par l'équation : $-C + k\Gamma = 0$, ce qui est toujours possible : car les deux valeurs extrêmes de la fonction φ_s étant positives, la valeur de la constante Γ, qui leur est intermédiaire, est nécessairement positive.

Remarquons enfin que les trois fonctions F_a, Φ_a et φ_a étant régulières à l'infini et ayant respectivement pour masses 0, 0 et 1, la fonction $F_a + k(\varphi_a - \Phi_a)$ est régulière à l'infini, et a pour masse $k = \frac{C}{\Gamma}$.

PROBLÈME III. — C'est celui qui correspond au théorème du n° **16**, lorsqu'on suppose $n = 1$. Il revient évidemment au suivant : déterminer une fonction finie et continue à l'extérieur de σ, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$, régulière à l'infini, s'y annulant, ayant une masse donnée M, et prenant sur σ les valeurs f à une constante additive près (dont la valeur n'est pas donnée à l'avance).

La fonction $F_a + M(\varphi_a - \Phi_a)$ répond évidemment à la question, et la constante additive a pour valeur $-C + M\Gamma$.

34. Nous terminerons ce chapitre par quelques mots sur les questions analogues que l'on rencontre dans la théorie des fonctions à deux variables réelles. Cette théorie présente, avec celle qui vient d'être exposée jusqu'à présent, certaines différences qu'il importe de signaler.

Les numéros **8**, **9**, **10**, **11**, **12**, et le théorème I du n° **13** sont encore applicables. On remplacera seulement la formule (22) du n° **9** par la suivante :

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int\left(f\frac{\partial G}{\partial N} - G\frac{\partial f}{\partial N}\right) d\sigma,$$

en posant :

$$G(x, y) = L\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

où L désigne un logarithme népérien; en outre, dans la démonstration du n° **10** (paragraphe II), on étendra à $L\frac{1}{A'B'}$ la proposition démontrée pour $(A'B')^m$: il suffira pour cela de remarquer que $L\frac{1}{A'B'} = -\frac{1}{2}L(A'B')^2$, et de répéter les mêmes raisonnements, en remplaçant la formule (24), qui donne le développement de $(u_0 + \Delta u_0)^m$ par celle qui donne le développement de $L(u_0 + \Delta u_0)$.

Une fonction $f(x, y)$, finie et continue à l'extérieur d'une courbe fermée σ, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$, est dite *régulière à l'infini,* lorsqu'on peut assigner dans le plan un point $D'(x', y')$ et un nombre positif R', tels que, pour tous les points extérieurs au cercle de centre D' et de rayon R', la fonction soit développable en une série convergente de la forme :

$$C + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{V_n(x-x', y-y')}{r^{2n}},$$

où C désigne une constante, V_n un polynôme homogène de degré n, et r la racine carrée positive de $(x-x')^2 + (y-y')^2$.

Remarquons que, si la fonction $f(x, y)$ satisfait à la définition précédente, on a :

$$(24) \qquad \int\frac{\partial f}{\partial N}d\sigma = 0,$$

l'intégrale du premier membre s'étendant à toute courbe fermée enveloppant σ, et N désignant la normale à cette courbe. Si l'on décrit en effet du point D' comme centre un cercle de rayon ρ infiniment grand, on forme un espace $I^{(2)}$, auquel s'applique la formule (20) du n° **8**. A l'aide des coordonnées polaires, la valeur de la fonction f en un point du cercle est exprimable par une série de la forme :

$$f = C + \frac{F}{\rho} + \frac{J}{\rho^2} + \ldots,$$

où F, J, ... désignent des coefficients variables avec la position du point sur le cercle. On en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \frac{F}{\rho^2} + \frac{2J}{\rho^3} + \ldots,$$

et par conséquent la portion d'intégrale relative au cercle peut s'écrire :

$$\int \frac{1}{\rho}(F + \varepsilon)\, d\omega,$$

ε étant infiniment petit pour ρ infini, et $d\omega$ désignant un élément de la circonférence de rayon 1. Il suffit alors, pour obtenir la formule (24), de remarquer que cette expression est nulle pour ρ infini.

En s'aidant de cette formule, on pourra, par une démonstration tout à fait analogue à celle du n° **14**, faire voir que la propriété dont jouit par définition le cercle de centre D′ et le rayon R′ s'applique à tout autre cercle enveloppant complètement le contour fermé σ. Seulement, au lieu de faire usage, dans le courant de la démonstration, de la formule :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma}} = \frac{1}{\rho} + \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\gamma) + \ldots + \frac{r^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\gamma) + \ldots$$

(où ρ est supposé plus grand que r), on fera usage de la suivante :

$$L\frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma}} = L\frac{1}{\rho} + \frac{r}{\rho}\cos\gamma + \frac{r^2}{2\rho^2}\cos 2\gamma + \ldots + \frac{r^n}{n\rho^n}\cos n\gamma + \ldots$$

THÉORÈME. — *Il ne peut exister qu'une seule fonction satisfaisant à la fois aux conditions suivantes :*

1° *D'être finie et continue dans un espace* $A^{(n)}$, *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres ;*

2° *D'y vérifier l'équation différentielle* $\Delta = 0$;

3° *D'être régulière à l'infini, et de prendre sur les n courbes limites des valeurs données formant sur chacune un ensemble continu.*

La démonstration de ce théorème repose sur la proposition suivante, analogue au corollaire du n° **15**. Soit $f(x, y)$ une fonction finie et continue à l'extérieur d'un cercle de rayon R (et un peu en deçà), ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, vérifiant l'équation différentielle $\Delta f = 0$, régulière à l'infini, et y prenant la valeur A ; on a la formule :

$$\int f d\sigma = 2\pi AR, \tag{25}$$

où l'intégrale du premier membre est étendue à la circonférence du cercle considéré.

En effet, désignons par $G(x, y)$ le logarithme népérien de l'inverse de la distance du point x, y au centre du cercle, et décrivons un cercle concentrique de rayon quelconque $\rho \geqq R$. En vertu de la formule (19) du n° **8**, la valeur de l'intégrale :

$$\int \left(f \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial f}{\partial N}\right) d\sigma, \tag{26}$$

étendue à la circonférence de rayon ρ, est indépendante de la valeur de ρ. Si l'on tient compte de la formule (24), si l'on remarque d'autre part que sur la circonférence la valeur de G est constante, et celle de $\frac{\partial G}{\partial N}$ égale à $\frac{1}{\rho}$, la valeur de l'intégrale (26) devient $\frac{1}{\rho}\int f d\sigma$, d'où l'on déduit la formule (25) en faisant successivement $\rho = R$ et $\rho = \infty$.

Cela posé, on fera une démonstration entièrement analogue à celle du n° **16**.

On voit par ce qui précède que, dans la théorie des fonctions de deux variables réelles, il n'y a plus que deux problèmes analogues à ceux du n° **17**. Si l'on fait $n = 1$, et si l'on suppose en outre que le contour fermé est du second rang et non biétoilé [1], la méthode de M. Carl Neumann est encore applicable, *mutatis mutandis*. On fera l'étude de la fonction $W(x, y) = \int \frac{\mu \cos \varphi}{D} d\sigma$, et on verra sans peine que les deux fonctions $H_i + C$ et $F_a + C$ constituent respectivement les solutions des deux problèmes, σ, μ, φ, D, H_i, F_a, C ayant des significations analogues à celles que nous leur avons attribuées dans les numéros **19**, **31** et **32**. La dernière de ces fonctions prend à l'infini la valeur C.

---

[1] Un contour uniétoilé se compose nécessairement de deux droites limitées ou illimitées partant d'un même point, et par suite est nécessairement ouvert. Les contours fermés biétoilés sont le quadrilatère et le triangle.

CHAPITRE IV

MÉTHODES ET FORMULES PARTICULIÈRES AU CAS DE LA SPHÈRE. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE THOMSON.

35. Première méthode. — Considérons l'intégrale :

$$\int \frac{\mu\, d\sigma}{D^{p-2}}, \tag{1}$$

où $d\sigma$ désigne un élément d'une portion finie de surface, μ une quantité qui varie d'une manière continue sur la surface, et D la distance du point $x, y, \ldots, t$ à l'élément $d\sigma$. On sait que, dans le voisinage d'un point non situé sur la surface, la quantité $\frac{1}{D^{p-2}}$, et par suite l'intégrale elle-même, est finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifie l'équation différentielle $\Delta = 0$. Nous ferons voir actuellement qu'en un point A de la surface, la fonction définie par cette intégrale est continue.

Nous supposerons, dans la démonstration qui suit, que si du point A comme centre on décrit une sphère de rayon suffisamment petit, la normale en un point variable de la portion de surface comprise à l'intérieur de cette sphère fait avec une direction fixe convenablement choisie un angle différant toujours d'un angle droit d'une quantité finie. Désignons par σ_1 la portion de la surface σ comprise à l'intérieur de la sphère, par σ_2 la portion restante, par v, v_1, v_2 les portions de l'intégrale (1) qui correspondent respectivement à σ, σ_1, σ_2, et évaluons une limite supérieure de la valeur absolue de v_1 pour une position quelconque du point $x, y, \ldots, t$ dans l'espace. Pour cela, prenons ce point comme origine des coordonnées, et changeons les directions des plans coordonnés rectangulaires de telle façon que la droite avec laquelle, par hypothèse, la normale en un point variable de σ_1 fait un angle ψ toujours aigu, ait pour paramètres directeurs, après la transformation, les quantités $1, 0, \ldots, 0$ [1]. Puis, désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ les coor-

---

[1] Il suffit de considérer sur la demi-droite parallèle menée par la nouvelle origine le point situé à la distance 1, et de changer les directions des plans coordonnés rectangulaires de manière à ce que les coordonnées de ce point deviennent toutes nulles, à l'exception de la première, qui deviendra égale à 1 (nº **1**).

données d'un point variable de σ_1, posons :

$$\begin{aligned}
\beta &= \rho \cos \theta_1, \\
\gamma &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2}, \\
\varepsilon &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-3} \sin \theta_{p-2},
\end{aligned}$$

et effectuons le changement de variables ainsi défini sur l'intégrale v_1. Cette dernière peut s'écrire :

$$\int \frac{\mu}{D^{p-2}} \sqrt{1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right)^2}\, d\beta \ldots d\varepsilon,$$

ou encore :

$$\int \frac{\mu}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{D^{p-2}} \cdot d\beta \ldots d\varepsilon.$$

Si l'on calcule le déterminant qui a pour éléments les dérivées partielles du premier ordre des anciennes variables $\beta, \ldots, \varepsilon$ par rapport aux variables nouvelles $\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{p-2}$, il est facile de voir que dans ce déterminant la deuxième colonne contient en facteur ρ, la troisième $\rho \sin \theta_1$, etc., enfin la $(p-1)^{\text{ième}}$ $\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-3}$, et que le déterminant qui résulte de la suppression de ces facteurs est orthogonal ; l'expression de l'intégrale devient dès lors :

$$\int \frac{\mu}{\cos \psi} \frac{\rho^{p-2}}{D^{p-2}} \sin^{p-3} \theta_1 \sin^{p-4} \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-3}\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{p-2}.$$

Le facteur $\frac{\mu}{\cos \psi}$ reste toujours fini et inférieur en valeur absolue à un nombre fixe M, $\frac{\rho}{D}$ ne peut dépasser l'unité, car $\rho = \sqrt{\beta^2 + \ldots + \varepsilon^2}$ et $D = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2}$; on a par suite :

$$| v_1 | < M \int \sin^{p-3} \theta_1 \ldots \sin \theta_{p-3}\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{p-2},$$

d'où, en désignant par L le maximum de la distance de deux points variables sur σ_1, et par $2S'$ l'aire de la surface sphérique de rayon 1 dans l'espace à $p-1$ dimensions :

$$| v_1 | < 2MS'L.$$

Or, la quantité L tend vers zéro avec le rayon de la sphère décrite du point A comme centre ; de là résulte qu'à partir d'une valeur suffisamment petite de ce rayon, et pour toutes les positions possibles du point $x, y, \ldots, t$ dans l'espace, v_1 est plus petit en valeur absolue qu'une quantité donnée $\frac{\lambda}{3}$.

Cela posé, donnons au rayon une valeur suffisamment petite pour qu'il en soit ainsi, et soient Δv, Δv_1, Δv_2 les accroissements respectifs de v, v_1, v_2 lorsqu'on passe du point A à un point voisin (1); entre ces accroissements on a la relation :

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2.$$

A l'intérieur de la sphère $|\Delta v_1|$ est plus petit que $\frac{2}{3}\lambda$. D'ailleurs, le point A étant extérieur à σ_2, si on décrit de ce point comme centre une seconde sphère intérieure à la première et de rayon suffisamment petit, on aura, à l'intérieur de cette seconde sphère, $|\Delta v_2| < \frac{\lambda}{3}$, et par suite $|\Delta v| < \lambda$.

Ce qui précède s'applique évidemment à une portion de surface sphérique.

36. Soient σ une sphère de rayon R, μ une fonction continue sur sa surface, D la distance du point $x, y, ..., t$ à l'élément $d\sigma$, φ l'angle de la normale intérieure avec la demi-droite qui va de l'élément au point, enfin 2S l'aire de la surface sphérique de rayon 1 dans l'espace à p dimensions. La fonction :

$$F(x, y, ..., t) = \frac{1}{S}\left[\int \frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} d\sigma - \frac{1}{2R}\int \frac{\mu\, d\sigma}{D^{p-2}}\right]$$

est évidemment finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, dans le voisinage de tout point non situé sur la sphère, et vérifie l'équation différentielle $\Delta F = 0$; elle est en outre régulière à l'infini, et si l'on suppose $p > 2$, elle s'y annule et a pour masse $-\frac{1}{2RS}\int \mu d\sigma$. Je dis qu'en adoptant des notations analogues à celles du n° **26**, elle satisfait aux relations :

$$F_{is} = \mu_s \quad \text{et} \quad F_{as} = -\mu_s.$$

D'abord, si l'on désigne par s et s' deux points pris sur la surface de la sphère, et par φ l'angle de la normale intérieure en s avec la demi-droite ss', on a la relation :

$$\cos \varphi = \frac{(ss')}{2R}. \tag{2}$$

Supposons en effet pour un instant l'origine des coordonnées transportée au centre, et soient alors $x, y, ..., t$ et $x', y', ..., t'$ les coordonnées des deux points s et s'. On trouve facilement :

$$\cos \varphi = \frac{x(x-x') + y(y-y') + ... + t(t-t')}{R \times (ss')}$$
$$= \frac{R^2 - (xx' + yy' + ... + tt')}{R \times (ss')}.$$

Or on a :

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + ... + (t-t')^2 = (ss')^2,$$

(1) Situé ou non sur la surface.

c'est-à-dire :

$$R^2 - (xx' + yy' + \ldots + tt') = \frac{(ss')^2}{2},$$

d'où l'on tire immédiatement la relation (2).

Cela étant, posons :

$$W_x = \int \frac{\mu \cos \varphi}{D^{p-1}} d\sigma \quad \text{et} \quad V_x = \frac{1}{2R} \int \frac{\mu \, d\sigma}{D^{p-2}}.$$

En tenant compte de la relation (2), on a évidemment : $W_s = V_s$. D'ailleurs, en vertu du n° **26** :

$$W_{is} = W_s + S\mu_s = V_s + S\mu_s,$$

et en vertu du numéro précédent :

$$V_{is} = V_s.$$

En retranchant membre à membre, il vient :

$$W_{is} - V_{is} = S\mu_s,$$

d'où :

$$F_{is} = \mu_s.$$

De la même manière :

$$W_{as} = W_s - S\mu_s = V_s - S\mu_s,$$
$$V_{as} = V_s,$$

d'où :

$$W_{as} - V_{as} = - S\mu_s,$$

et

$$F_{as} = - \mu_s.$$

La fonction F $(x, y, \ldots, t)$ fournit donc la solution du problème I (n° **33**), et cette même fonction changée de signe la solution du problème II. Enfin, p étant supposé plus grand que 2, si dans la fonction F changée de signe on remplace la quantité μ, qui figure sous les signes d'intégration, par $\mu - C$, et que l'on détermine la constante C par la relation :

$$\frac{1}{2RS} \int (\mu - C) \, d\sigma = M,$$

ou

$$\int \mu \, d\sigma = 2SC\, R^{p-1} + 2R\, SM,$$

la fonction ainsi obtenue s'annule à l'infini, a pour masse M, et prend sur la sphère les valeurs μ à une constante additive près; elle fournit donc la solution du problème III.

37. *Diverses expressions de la fonction* F. — Désignons par r la distance du centre de la sphère au point $x, y, \ldots, t$, et par γ l'angle de la demi-droite r avec le rayon qui aboutit à un point quelconque de la sphère. Dans le triangle formé par le centre, le point $x, y, \ldots, t$, et le point situé sur la sphère, on a :

$$r \cos\gamma + \mathrm{D}\cos\varphi = \mathrm{R}$$

(nº **3**), d'où :

$$\frac{\cos\varphi}{\mathrm{D}^{p-1}} = \frac{\mathrm{R} - r\cos\gamma}{\mathrm{D}^p}.$$

Cette valeur portée dans la formule qui définit F $(x, y, \ldots, t)$ donne :

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{2\mathrm{S}}\int \frac{\mu\,(\mathrm{R}^2 - r^2)}{\mathrm{R}\mathrm{D}^p}\,d\sigma,$$

formule bien connue pour l'espace à deux et à trois dimensions.

D'ailleurs, si l'on pose $\mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{D}^{p-2}}$, de la relation :

$$\mathrm{D}^2 = r^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}\,r\cos\gamma,$$

on tire facilement :

$$\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{R}} = \frac{(p-2)(r\cos\gamma - \mathrm{R})}{\mathrm{D}^p},$$

d'où :

$$\frac{\cos\varphi}{\mathrm{D}^{p-1}} = -\frac{1}{p-2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{R}},$$

et par suite :

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, t) = -\frac{1}{2\mathrm{S}}\int \mu\left[\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}} + \frac{2}{p-2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{R}}\right]d\sigma.$$

Cela posé, nous distinguerons deux cas, suivant que le point $x, y, \ldots, t$ est intérieur ou extérieur à la sphère. On a dans le premier cas (nº **14**) :

$$\mathrm{G} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n\,\Omega_n(\cos\gamma)}{\mathrm{R}^{n+p-2}},$$

$$\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{R}} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n+p-2)\,r^n\,\Omega_n(\cos\gamma)}{\mathrm{R}^{n+p-1}},$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}} + \frac{2}{p-2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{R}} = -\frac{1}{\mathrm{R}^{p-1}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+p-2}{p-2}\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^n\Omega_n(\cos\gamma),$$

et enfin :

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{2\mathrm{SR}^{p-1}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\int \mu\,\frac{2n+p-2}{p-2}\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^n\Omega_n(\cos\gamma)\,d\sigma. \tag{3}$$

On a dans le second cas :

$$G = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{R^n\, \Omega_n(\cos\gamma)}{r^{n+p-2}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n R^{n-1}\, \Omega_n(\cos\gamma)}{r^{n+p-2}},$$

d'où :

$$\frac{G}{R} + \frac{2}{p-2}\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{1}{R^{p-1}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+p-2}{p-2}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+p-2} \Omega_n(\cos\gamma),$$

et enfin :

$$(4) \qquad F(x, y, \ldots, t) = -\frac{1}{2SR^{p-1}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int \mu\, \frac{2n+p-2}{p-2}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+p-2} \Omega_n(\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Si l'on fait $p = 3$ dans les formules (3) et (4), $\Omega_n(\cos\gamma)$ se réduit à $P_n(\cos\gamma)$, P_n désignant une fonction de Legendre, S à 2π, et on retombe sur des formules connues.

Le calcul des formules (3) et (4) suppose $p > 2$; soit maintenant $p = 2$. On a alors :

$$\frac{\cos\varphi}{D} = \frac{R - r\cos\gamma}{D^2} = -\frac{\partial G}{dR},$$

en posant : $G = L\,\frac{1}{D}$, où L désigne un logarithme népérien, et par suite :

$$F(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int \mu \left(\frac{1}{2R} + \frac{\partial G}{\partial R}\right) d\sigma.$$

Si le point x, y est intérieur au cercle, on a :

$$G = L\,\frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\gamma,$$

$$\frac{\partial G}{\partial R} = -\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\gamma,$$

d'où :

$$\frac{1}{2R} + \frac{\partial G}{\partial R} = -\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\gamma,$$

et par suite :

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi R}\int \mu\, d\sigma + \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{n=\infty} \int \mu \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\gamma\, d\sigma.$$

Si le point x, y est extérieur au cercle, on a :

$$G = L\,\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\gamma,$$

$$\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\gamma,$$

d'où :

$$F(x, y) = -\frac{1}{2\pi R}\int \mu\, d\sigma - \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int \mu \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\gamma\, d\sigma.$$

38. Deuxième méthode. — On sait qu'en supposant l'origine des coordonnées transportée au pôle de la transformation, les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques sont :

$$x' = \frac{k^2 x}{r^2}, \quad y' = \frac{k^2 y}{r^2}, \dots, \quad t' = \frac{k^2 t}{r^2},$$

où k^2 désigne une constante, $x, y, \dots, t$ et $x', y', \dots, t'$ les coordonnées de deux points correspondants, r la valeur positive du radical $\sqrt{x^2 + y^2 + \dots + t^2}$.

Extension du théorème de Thomson aux fonctions d'un nombre quelconque de variables (1).

Soit $f(x', y', \dots, t')$ une fonction finie et continue dans le voisinage d'un point $x'_0, y'_0, \dots, t'_0$, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, et vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = 0. \tag{5}$$

Dans le voisinage du point correspondant $x_0, y_0, \dots, t_0$, la fonction :

$$\varphi(x, y, \dots, t) = \frac{1}{r^{p-2}} f\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \dots, \frac{k^2 t}{r^2}\right)$$

est elle-même finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, et vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

En effet, dans le voisinage du point $x'_0, y'_0, \dots, t'_0$, la fonction $f(x', y', \dots, t')$ est développable en une série Λ, entière par rapport aux différences $x' - x'_0$, $y' - y'_0, \dots, t' - t'_0$, et convergente, ainsi que la série des valeurs absolues, tant que les valeurs absolues de ces différences ne dépassent pas certains nombres positifs $\lambda, \mu, \dots, \sigma$ (n° **10**). D'autre part, r n'étant pas nul dans le voisinage du point $x_0, y_0, \dots, t_0$, les quantités :

$$x' - x'_0 = \frac{k^2 x}{r^2} - x'_0, \dots, \quad t' - t'_0 = \frac{k^2 t}{r^2} - t'_0,$$

(1) La démonstration que l'on donne ordinairement du théorème de Thomson semble se prêter assez peu à une généralisation. Celle que nous donnons ici est toute différente.

sont exprimables par des séries Λ_1, entières en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$, et privées de termes constants. Les séries formées par les valeurs absolues des termes de Λ_1 ont des sommes qui tendent vers zéro en même temps que les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$, et qui dès lors sont respectivement inférieures à λ, μ, ..., σ, lorsque ces différences sont suffisamment voisines de zéro. Il résulte de là que dans les mêmes limites on peut remplacer, dans le développement Λ, $x' - x'_0$, $y' - y'_0$, ..., $t' - t'_0$ par les séries Λ_1, puis ordonner cette série de séries par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$. Dès lors, la fonction $f\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \ldots, \frac{k^2 t}{r^2}\right)$ est exprimable par une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $t - t_0$, dans le voisinage du point $x_0, y_0, \ldots, t_0$. D'ailleurs il en est de même de $\frac{1}{r^{p-2}}$, et par suite du produit de ces deux fonctions. Il reste à vérifier que la fonction φ vérifie l'équation différentielle (6).

Dans le développement Λ, désignons par $V_n\,(x' - x'_0, y' - y'_0, \ldots, t' - t'_0)$ l'ensemble des termes de degré n en $x' - x'_0$, $y' - y'_0$, ..., $t' - t'_0$, et remarquons qu'en vertu de (5), le polynôme homogène V_n, et par suite ses dérivées, vérifient l'équation différentielle $\Delta = 0$. Si l'on pose :

$$U_n\,(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{r^{p-2}}\, V_n\left(\frac{k^2 x}{r^2} - x'_0, \ldots, \quad \frac{k^2 t}{r^2} - t'_0\right),$$

on voit aisément, par ce qui précède, que, dans le voisinage du point $x_0, y_0, \ldots, t_0$, on a :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n,$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \varphi}{d t^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right].$$

Or $V_n\,(x' - x'_0, \ldots, t' - t'_0)$ peut être développé par la formule de Taylor en un polynôme entier par rapport à $x'_0, \ldots, t'_0$, et les coefficients du développement sont des polynômes homogènes en $x', \ldots, t'$, qui satisfont à l'équation différentielle $\Delta = 0$. Dès lors tout se réduit à vérifier l'exactitude du théorème, dans le cas particulier où la fonction f est un polynôme homogène en $x', \ldots, t'$.

Soit donc V un polynôme homogène de degré n; on a alors :

$$\varphi\,(x, y, \ldots, t) = \frac{k^{2n}\, V\,(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p-2}} = \frac{Q\,(x, y, \ldots, t)}{r^{2n+p-2}},$$

en posant : $k^{2n} V = Q$. On tire de là par dérivation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r^{2n+p-2}}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{2n + p - 2}{r^{2n+p}}\, Q x,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{r^{2n+p-2}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - 2\, \frac{2n+p-2}{r^{2n+p}}\, x \frac{\partial Q}{dx} - \frac{2n+p-2}{r^{2n+p}}\, Q + \frac{(2n+p-2)(2n+p)}{r^{2n+p+2}}\, Q x^2,$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^{2n+p-2}}\, \Delta Q - 2\, \frac{2n+p-2}{r^{2n+p}} \left(x \frac{\partial Q}{\partial x} + \dots + t \frac{\partial Q}{\partial t} \right) - \frac{p(2n+p-2)}{r^{2n+p}}\, Q$$
$$+ \frac{(2n+p-2)(2n+p)}{r^{2n+p}}\, Q,$$

ou enfin, en ayant égard au théorème des fonctions homogènes, et réduisant :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^{2n+p-2}}\, \Delta Q.$$

Or, si l'on suppose $\Delta V = 0$, c'est à dire $\Delta Q = 0$, il vient $\Delta \varphi = 0$.

39. A ce qui précède il est nécessaire d'ajouter ceci :

1° *Lorsque la fonction $f(x', y', \dots, t')$ jouit des propriétés ci-dessus énoncées dans le voisinage de l'origine, la fonction $\varphi(x, y, \dots, t)$ est régulière à l'infini (en y prenant la valeur zéro, si $p > 2$).*

2° *Inversement, lorsque la fonction $f(x', y', \dots, t')$ est régulière à l'infini (en y prenant la valeur zéro, si $p > 2$), la fonction $\varphi(x, y, \dots, t)$ jouit dans le voisinage de l'origine des propriétés dont il s'agit.*

Nous poserons $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \dots + t'^2}$.

1° On a dans le voisinage de l'origine :

$$f(x', y', \dots, t') = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_n(x', y', \dots, t'),$$

V_n désignant un polynôme homogène de degré n. Il en résulte qu'à l'extérieur d'une sphère de rayon suffisamment grand décrite de l'origine comme centre, on a :

$$\varphi(x, y, \dots, t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{U_n(x, y, \dots, t)}{r^{2n+p-2}},$$

U_n désignant encore un polynôme homogène de degré n.

2° A l'extérieur d'une sphère de rayon suffisamment grand ayant pour centre l'origine, on a :

$$f(x', y', \dots, t') = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{V_n(x', y', \dots, t')}{r'^{2n+p-2}}.$$

Il en résulte immédiatement qu'à l'intérieur d'une sphère concentrique de rayon suffisamment petit, on a :

$$\varphi(x, y, \dots, t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n(x, y, \dots, t), \tag{7}$$

que sur toute la surface d'une certaine sphère, dont nous désignerons le rayon par ρ, la valeur absolue du terme général de la série (7) est constamment inférieure à un nombre positif fixe L, et que dès lors, pour tous les points intérieurs à une sphère de rayon $\rho_1 < \rho$, les valeurs absolues des termes de cette série sont respectivement moindres que les termes correspondants de la progression géométrique décroissante :

$$L + L\frac{\rho_1}{\rho} + L\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 + \ldots$$

On en déduira très facilement que la fonction φ est continue à l'intérieur de la sphère ρ_1, et par suite dans le voisinage de l'origine. Il reste à démontrer que l'origine n'est pas un point de discontinuité pour les dérivées.

Désignons par $\xi, \eta, \ldots, \tau$ les coordonnées d'un point quelconque intérieur à la sphère ρ_1, et posons :

$$G(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \ldots + (t-\tau)^2]^{\frac{p-2}{2}}}.$$

En supposant d'abord que le point $\xi, \eta, \ldots, \tau$ ne coïncide pas avec l'origine, on peut de l'origine comme centre décrire une sphère de rayon ρ_2, à laquelle le point considéré soit extérieur : celui-ci se trouve alors situé dans l'espace compris entre les deux sphères, et l'on a, en vertu de la formule (22) du n° **9** :

$$(8) \quad \varphi(\xi, \eta, \ldots, \tau) = \frac{1}{(p-2)\,2S}\left[\int\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial \rho_2} - G\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}\right)d\sigma_2 - \int\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial \rho_1} - G\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\right)d\sigma_1\right],$$

les deux intégrales s'étendant respectivement aux surfaces des deux sphères ρ_2 et ρ_1. Lorsque ρ_2 tend vers zéro, G et $\frac{\partial G}{\partial \rho_2}$ restent finis, puisque la fonction $G(x, y, \ldots, t)$ est développable, dans le voisinage de l'origine, en une série entière par rapport à $x, y, \ldots, t$. D'après ce qu'on a vu tout à l'heure, la fonction φ tend vers une valeur déterminée φ_0, et quant à la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}$, elle reste finie : car si l'on passe aux coordonnées hypersphériques, et qu'on donne aux angles θ des valeurs quelconques, mais fixes, la formule (7) fait voir que $\varphi(x, y, \ldots, t)$ est exprimable par une série convergente entière en r. La première intégrale tend donc vers zéro avec ρ_2, et la formule (8) devient :

$$(9) \quad \varphi(\xi, \eta, \ldots, \tau) = -\frac{1}{(p-2)\,2S}\int\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial \rho_1} - G\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\right)d\sigma_1.$$

D'ailleurs, la formule (9) subsiste même quand le point $\xi, \eta, \ldots, \tau$ coïncide avec l'origine. Appliquons en effet la formule (19) du n° **8** à l'espace compris entre les deux sphères ρ_1 et ρ_2, il viendra :

$$\int\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial\rho_1}-G\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)d\sigma_1-\int\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial\rho_2}-G\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)d\sigma_2=0.$$

Sur la surface de la sphère ρ_2, on a :

$$G=\frac{1}{\rho_2^{p-2}},\quad \frac{\partial G}{\partial\rho_2}=-\frac{p-2}{\rho_2^{p-1}},\quad d\sigma_2=\rho_2^{p-1}\,d\omega,$$

$d\omega$ désignant l'élément de surface de la sphère de rayon 1. Lorsque ρ_2 diminue indéfiniment, φ tendant vers φ_0 et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}$ restant fini, on voit immédiatement que la seconde intégrale a pour limite $-(p-2)\,2S\varphi_0$, d'où :

$$\varphi_0=-\frac{1}{(p-2)\,2S}\int\left(\varphi\frac{\partial G}{\partial\rho_1}-G\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)d\sigma_1.$$

De la formule (9) on déduira, comme au n° **10**, que dans le voisinage d'un point quelconque intérieur à la sphère ρ_1 (et en particulier dans le voisinage de l'origine), la fonction φ est développable en une série convergente, entière par rapport aux accroissements que l'on attribue aux variables.

Le calcul précédent suppose $p>2$: si p est égal à 2, on posera :

$$G(x,y)=L\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}},$$

où L désigne un logarithme népérien, et on raisonnera de la même manière.

40. Soient σ une sphère de rayon R, μ une fonction continue sur sa surface, $x, y, \ldots, t$ un point quelconque de l'espace, $x', y', \ldots, t'$ le point qui correspond au premier dans une transformation par rayons vecteurs réciproques où l'on choisit comme pôle le centre de la sphère donnée, et où l'on donne à la constante k^2 (n° **38**) la valeur R^2; soient enfin r et r' les distances au centre des deux points considérés, liées par la relation $rr'=R^2$. Désignons par $W(x, y, \ldots, t)$ la valeur que prend au point $x, y, \ldots, t$ l'intégrale de M. Neumann formée avec les valeurs μ, et posons :

$$\Phi(x,y,\ldots,t)=\frac{1}{2S}\left[W(x,y,\ldots,t)-\frac{R^{p-2}}{r^{p-2}}W(x',y',\ldots,t')\right]$$

(en supposant $x', y', \ldots, t'$ remplacés par leurs valeurs en $x, y, \ldots, t$). La fonction $W(x, y, \ldots, t)$ est finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, dans le voisinage de tout point non situé sur la sphère, et vérifie l'équation différentielle $\Delta=0$; elle est en outre régulière à l'infini et s'y annule. En vertu des deux numéros précédents, il en est de même de la fonction $\frac{1}{r^{p-2}}$ W $(x', y', ..., t')$, et par suite aussi de la fonction $\Phi(x, y, ..., t)$. D'ailleurs W_0 désignant la valeur de la fonction W au centre de la sphère, il est facile de voir que la fonction Φ a pour masse $-\frac{R^{p-2}}{2S} W_0$, ou $-\frac{1}{2RS}\int \mu d\sigma$. Dans le cas où $p = 2$, ce que nous venons de dire ne cesse pas d'être vrai, à l'exception de ce qui concerne la masse et la valeur de la fonction Φ à l'infini [1].

Remarquons maintenant que les deux points correspondants $x, y, ..., t$ et $x', y', ..., t'$ ont entre eux une relation telle que si l'un quelconque tend vers un point de la surface sphérique en restant toujours intérieur à la sphère, l'autre tend vers la même position limite en restant toujours extérieur, et inversement. En nous reportant aux relations démontrées au n° **26**, nous verrons alors très facilement que l'on a :

$$\Phi_{is} = \mu_s \quad \text{et} \quad \Phi_{as} = -\mu_s.$$

La fonction Φ est donc identique à la fonction F du n° **36**, et fournit comme elle la solution des trois problèmes du n° **33**.

Un calcul très simple permet d'ailleurs de constater directement l'identité des deux fonctions. Désignons en effet par D la distance du point $x, y, ..., t$ à l'élément $d\sigma$, par φ l'angle de la normale intérieure avec la demi-droite qui va de l'élément au point, par D' et φ' les quantités analogues relatives au point correspondant $x', y', ..., t'$, enfin par γ l'angle du rayon qui aboutit à l'élément $d\sigma$ avec celui qui contient les deux points considérés. On a (n° **37**) :

$$\frac{\cos\varphi}{D^{p-1}} = \frac{R - r\cos\gamma}{D^p},$$

$$\frac{\cos\varphi'}{D'^{p-1}} = \frac{R - r'\cos\gamma}{D'^p} = \frac{R(r - R\cos\gamma)}{rD'^p}.$$

D'autre part :

$$D'^2 = R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma = \frac{R^2}{r^2}(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma),$$

ou :

$$D' = \frac{R}{r} D;$$

d'après cela :

$$\frac{\cos\varphi'}{D'^{p-1}} = \frac{r^{p-1}}{R^{p-1}} \cdot \frac{r - R\cos\gamma}{D^p},$$

---

[1] Si $p = 2$, il n'y a plus de masse, et la fonction prend à l'infini la valeur $-\frac{1}{2\pi R}\int \mu d\sigma$.

et

$$\frac{\cos\varphi}{D^{p-1}} - \frac{\cos\varphi'}{D'^{p-1}} \cdot \frac{R^{p-2}}{r^{p-2}} = \frac{R - r\cos\gamma}{D^p} + \frac{r}{R}\,\frac{R\cos\gamma - r}{D^p} = \frac{R^2 - r^2}{RD^p},$$

d'où :

$$\Phi(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{2S}\int \frac{\mu\,(R^2 - r^2)}{RD^p}\, d\sigma,$$

expression obtenue plus haut pour la fonction F.

40 *bis*. Des formules précédentes on déduit aisément une proposition remarquable démontrée par M. Picard (1).

Théorème. — *Une fonction* F $(x, y, \ldots, t)$ *se réduit nécessairement à une constante, lorsqu'elle satisfait à la fois aux conditions suivantes :*

1° *D'être finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, dans le voisinage d'un point quelconque;*

2° *De vérifier l'équation différentielle* $\Delta F = 0$;

3° *De rester toujours comprise entre deux limites fixes.*

D'un point quelconque de l'espace décrivons une sphère de rayon R comprenant dans son intérieur le point $x, y, \ldots, t$, et désignons par μ les valeurs de la fonction sur cette surface, par $d\omega$ l'élément de surface d'une sphère de rayon 1. On a immédiatement :

$$F(x, y, \ldots, t) = -\frac{1}{2S}\int \mu\left[\left(\frac{R}{D}\right)^{p-2} + \frac{2\,(r\cos\gamma - R)}{R}\left(\frac{R}{D}\right)^{p}\right] d\omega.$$

D'ailleurs $\frac{R}{D}$ tend vers l'unité lorsque R augmente indéfiniment, et l'on peut écrire :

$$F(x, y, \ldots, t) = \frac{1}{2S}\int \mu\,(1 + \varepsilon)\, d\omega,$$

ε étant infiniment petit pour R infini. En désignant par $x_1, y_1, \ldots, t_1$ les coordonnées d'un autre point, on a de même :

$$F(x_1, y_1, \ldots, t_1) = \frac{1}{2S}\int \mu\,(1 + \varepsilon_1)\, d\omega,$$

d'où :

$$F(x, y, \ldots, t) - F(x_1, y_1, \ldots, t_1) = \frac{1}{2S}\int \mu\,(\varepsilon - \varepsilon_1)\, d\omega.$$

La quantité μ restant toujours comprise entre deux limites fixes, le second membre peut être rendu plus petit que toute quantité donnée pour une valeur de R suffisamment grande; donc le premier, qui est indépendant de R, est rigoureusement nul.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 601.

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME INTÉRIEUR DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS OÙ LA MÉTHODE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE N'EST PAS APPLICABLE.

41. Nous appellerons points intérieurs à un parallélipipède rectangle dans l'espace à p dimensions l'ensemble des points définis par le système des inégalités :

$$(1) \qquad x^2 - \frac{a^2}{4} < 0, \quad y^2 - \frac{b^2}{4} < 0, \quad z^2 - \frac{c^2}{4} < 0, \ldots, \quad t^2 - \frac{e^2}{4} < 0,$$

ou par tout autre pouvant se ramener au précédent au moyen d'une transformation des coordonnées rectangulaires.

Imaginons à l'intérieur du parallélipipède (1) une surface fermée quelconque σ (pouvant comme cas particulier coïncider avec la sienne), désignons par μ une quantité qui varie sur σ d'une manière continue, par $x, y, z, \ldots, t$ les coordonnées d'un point intérieur au parallélipipède, et posons :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_k = ka + (-1)^k x, \\ y_l = lb + (-1)^l y, \\ z_m = mc + (-1)^m z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_q = qe + (-1)^q t, \end{array} \right.$$

où $k, l, m, \ldots, q$ peuvent prendre toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$ (¹). Désignons enfin par $W_{k,l,m,\ldots,q}$ la valeur prise au point $x_k, y_l, z_m, \ldots, t_q$ par l'intégrale de M. Neumann formée avec les valeurs μ. La série à p entrées :

$$(3) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l+\ldots+q} W_{k,l,\ldots,q},$$

fournit, comme nous allons le voir, une solution du problème intérieur dans deux cas particuliers où la méthode de la moyenne arithmétique n'est pas applicable.

Si l'on désigne par $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ les coordonnées d'un point de l'élément $d\sigma$, par $\alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ les paramètres directeurs de la normale intérieure en ce point,

---

(¹) Dans le cas de deux variables, l'ensemble des points définis par les formules (2) est représenté par la *fig.* 9 (supposée indéfinie dans tous les sens).

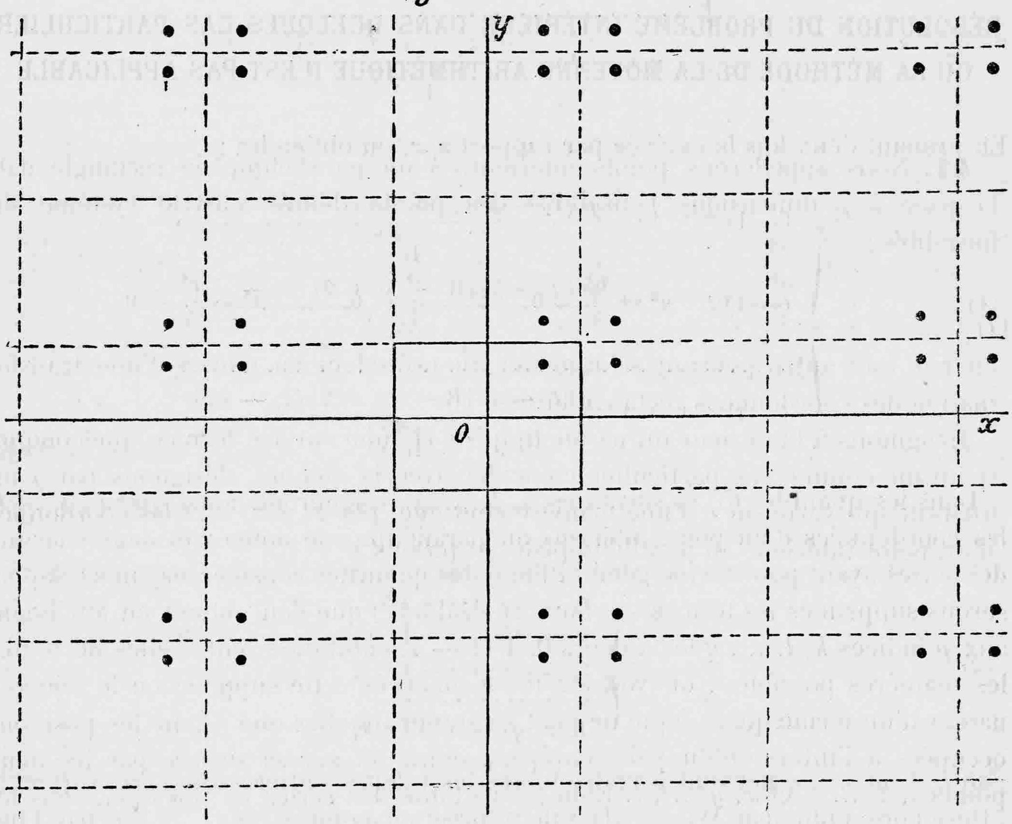
et si l'on pose :

$$R = (x_k - \alpha)^2 + (y_l - \beta)^2 + \ldots + (t_q - \varepsilon)^2,$$

on a :

$$(4) \qquad W_{k, l, \ldots, q} = \int \mu \alpha' \frac{x_k - \alpha}{R^{\frac{p}{2}}} d\sigma + \int \mu \beta' \frac{y_l - \beta}{R^{\frac{p}{2}}} d\sigma + \ldots + \int \mu \varepsilon' \frac{t_q - \varepsilon}{R^{\frac{p}{2}}} d\sigma.$$

Fig. 9.



Nous commencerons donc par étudier les séries ayant pour terme général l'une des quantités :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{k+l+\ldots+q} \dfrac{x_k - \alpha}{R^{\frac{p}{2}}}, \\ (-1)^{k+l+\ldots+q} \dfrac{y_l - \beta}{R^{\frac{p}{2}}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{k+l+\ldots+q} \dfrac{t_q - \varepsilon}{R^{\frac{p}{2}}}, \end{array} \right.$$

ou l'une des quantités qui s'en déduisent en effectuant sur elles une ou deux dérivations relatives aux variables x, y, ..., t. En prenant par exemple les dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, on obtiendra :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^{l+\dots+q} \dfrac{R-p\,(x_k-\alpha)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}}, \\ (-1)^{l+\dots+q+1} \dfrac{p\,(x_k-\alpha)\,(y_l-\beta)}{R^{\frac{p+2}{2}}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-1)^{l+\dots+q+1} \dfrac{p\,(x_k-\alpha)\,(t_q-\varepsilon)}{R^{\frac{p+2}{2}}}. \end{array}\right.$$

En prenant deux fois la dérivée par rapport à x, on obtiendra :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^{k+l+\dots+q} \dfrac{p\,(x_k-\alpha\,[(p+2)\,(x_k-\alpha)^2-3R]}{R^{\frac{p+4}{2}}}, \\ (-1)^{k+l+\dots+q+1} \dfrac{p\,(y_l-\beta)\,[R-(p+2)\,(x_k-\alpha)^2]}{R^{\frac{p+4}{2}}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-1)^{k+l+\dots+q+1} \dfrac{p\,(t_q-\varepsilon)\,[R-(p+2)\,(x_k-\alpha)^2]}{R^{\frac{p+4}{2}}}. \end{array}\right.$$

Dans les quantités (5) et suivantes, α, β, ..., ε désigneront, ainsi que x, y, ... t, les coordonnées d'un point intérieur au parallélipipède donné; et dans chacune des séries ayant pour terme général l'une des quantités considérées, nous supposerons supprimés les termes (en nombre égal à 3^p) que l'on obtient en attribuant aux p indices k, l, ..., q les valeurs 0, 1 et — 1, combinées entre elles de toutes les manières possibles : on voit aisément qu'après cette suppression le dénominateur d'un terme quelconque ne peut s'annuler, quelles que soient les positions occupées à l'intérieur du parallélipipède donné et sur sa surface par les deux points α, β, ..., ε et x, y, ..., t. Enfin, dans l'une des séries en question, tous les termes correspondant à des valeurs fixes de $p-1$ indices seront dits appartenir à une même *file;* tous les termes correspondant à des valeurs fixes d'un seul indice seront dits appartenir à une même *tranche* [1].

42. Nous rappellerons d'abord une proposition connue.

La série à p entrées ayant pour terme général :

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\dots+m_p^2)^\alpha},$$

où m_1, m_2, ..., m_p peuvent prendre toutes les valeurs entières de $-\infty$ *à* $+\infty$,

---

[1] Les mots *file* et *tranche* deviennent synonymes, lorsque p est égal à 2.

et où α désigne une constante positive, est convergente pour $\alpha > \frac{p}{2}$, et divergente pour $\alpha \leqq \frac{p}{2}$ (on supprime le terme correspondant à $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = 0$, qui serait infini) (1).

Nous démontrerons en outre le lemme suivant :

LEMME. — *La somme de la série :*

$$\sum_{m_1=0}^{m_1=\infty} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} \frac{1}{[k^2 + m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^\alpha},$$

où l'on suppose $\alpha > \frac{p}{2}$, et où k désigne une constante, tend vers zéro lorsque la constante k augmente indéfiniment en valeur absolue.

Il est clair qu'il suffit de démontrer la proposition dans l'hypothèse où k augmente indéfiniment par des valeurs entières et positives. Or, on a dans ce cas :

$$\sum_{m_1=0}^{m_1=\infty} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} = \sum_{m_1=0}^{m_1=k} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} + \sum_{m_1=k+1}^{m_1=\infty} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty}.$$

Dans le second membre, le dernier terme tend vers zéro lorsque l'entier k augmente indéfiniment, parce que la quantité $\frac{1}{[k^2 + m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^\alpha}$ est inférieure à $\frac{1}{[m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^\alpha}$, terme général d'une série convergente. Je dis qu'il en est de même du premier terme. Posons en effet : $\alpha = \frac{p}{2} + h$, h désignant une quantité positive ; on a :

$$\sum_{m_1=0}^{m_1=k} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} \frac{1}{[k^2 + m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^\alpha} < (k+1) \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{m_p=\infty} \frac{1}{[k^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^\alpha}.$$

Dans cette dernière série, à $p - 1$ entrées, le terme correspondant à $m_2 = m_3 = \ldots = m_p = 0$ a pour valeur $\frac{1}{k^{2\alpha}}$, et son produit par $k + 1$ tend vers zéro pour k infini. Pour tout autre système de valeurs des indices, on a :

$$\frac{k+1}{[k^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^\alpha} = \frac{k+1}{[k^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^{\frac{1+h}{2}}} \cdot \frac{1}{[k^2 + m_2^2 + \ldots + m_p^2]^{\frac{p-1}{2} + \frac{h}{2}}},$$

$$< \frac{k+1}{k^{1+h}} \cdot \frac{1}{[m_2^2 + \ldots + m_p^2]^{\frac{p-1}{2} + \frac{h}{2}}}.$$

(1) Voir le *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* de M. C. Jordan, t. I, p. 162 et 163.

La quantité $\frac{k+1}{k^{1+h}}$, indépendante des valeurs attribuées aux indices, tend vers zéro pour k infini, et quant au second facteur, c'est le terme général d'une série convergente.

43. *Soit* $\Lambda_{k,l,\ldots,q}$ *l'une quelconque des quantités* (5); *à partir de valeurs suffisamment grandes des entiers* K′, K″, L′, L″, ..., Q′, Q″, *la quantité :*

$$(8) \qquad \sum_{-(K'+k')}^{K''+k''} \sum_{-(L'+l')}^{L''+l''} \cdots \sum_{-(Q'+q')}^{Q''+q''} \Lambda_{k,l,\ldots,q} - \sum_{-K'}^{K''} \sum_{-L'}^{L''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} \Lambda_{k,l,\ldots q}$$

est plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée θ, *indépendamment des valeurs attribuées aux entiers positifs* k', k'', l', l'', ..., q', q'', *et indépendamment des positions que peuvent occuper à l'intérieur du parallélipipède donné et sur sa surface les deux points* α, β, ..., ε *et* x, y, ..., t.

I. Dans la série considérée, appelons S_k tout groupe de termes obtenu en donnant à l'indice k une même valeur et aux autres indices toutes les valeurs possibles comprises entre des limites données, quelconques d'ailleurs. Je dis que l'on peut assigner pour l'entier k une valeur absolue à partir de laquelle la valeur absolue de S_k est inférieure à une quantité donnée, indépendamment des limites entre lesquelles on fait varier les indices autres que k, et indépendamment des positions que peuvent occuper à l'intérieur du parallélipipède et sur sa surface les deux points α, β, ..., ε et x, y, ..., t.

Considérons la série à $p - 1$ entrées :

$$(9) \qquad \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \cdots \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \Lambda_{k,l,m,\ldots,q},$$

d'où l'on a extrait la tranche limitée S_k. L'ensemble des termes où l'on donne la valeur zéro à $p - 1 - g$ indices déterminés et des valeurs non nulles aux g indices restants, forme évidemment une série à g entrées. Chacun des indices non nuls peut d'ailleurs recevoir tant la suite des valeurs positives de 1 à $+\infty$, que la suite des valeurs négatives de -1 à $-\infty$. On voit dès lors bien facilement qu'avec les termes de la série (9) convenablement groupés on peut former un nombre fini de séries partielles dans chacune desquelles le nombre des entrées ou des indices variables est au plus égal à $p - 1$, et dans chacune desquelles un indice variable quelconque prend des valeurs différentes de zéro et toutes de même signe. D'après cela, on peut aussi former avec les termes de S_k un nombre fini de groupes dont les termes appartiennent respectivement aux séries partielles dont nous venons de parler; et pour démontrer le point en question, il suffit de le démontrer séparément pour chacun de ces groupes.

Considérons un groupe correspondant à une série partielle à g entrées, et supposons d'abord $g < p - 1$. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on donne des valeurs non nulles aux g premiers indices $l, m, \ldots, n$, et la valeur zéro à tous les suivants. L'une quelconque des quantités (5) est plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{R^{\frac{p-1}{2}}}$; observons d'ailleurs que, en supposant les entiers $k, l, m, \ldots$ différents de zéro, et en désignant par $k_1, l_1, m_1, \ldots$ leurs valeurs absolues, on a :

$$\begin{gathered}(k_1+1)\,a \geqq |\, x_k - \alpha \,| \geqq (k_1-1)\,a,\\ (l_1+1)\,b \geqq |\, y_l - \beta \,| \geqq (l_1-1)\,b,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Donc, dans le groupe dont il s'agit, un terme quelconque est inférieur à

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \frac{1}{[(k_1-1)^2+(l_1-1)^2+\ldots+(n_1-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

ρ désignant la plus petite dimension du parallélipipède, et la somme des termes qui composent le groupe est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \sum_{l_1=1}^{l_1=\infty} \cdots \sum_{n_1=1}^{n_1=\infty} \frac{1}{[(k_1-1)^2+(l_1-1)^2+\ldots+(n_1-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

quantité qui tend vers zéro pour k_1 infini, en vertu du lemme précédent combiné avec l'hypothèse $g < p-1$.

Soit maintenant $g = p-1$, et supposons d'abord :

$$\Lambda_{k,l,\ldots,q} = (-1)^{k+l+\ldots+q}\,\frac{x_k-\alpha}{R^{\frac{p}{2}}}. \tag{10}$$

Décomposons le groupe en files (limitées) dans lesquelles l'indice variable soit l'un quelconque des indices $l, \ldots, q$, par exemple l. Lorsqu'on donne à l dans l'expression (10) soit la série des valeurs positives de 1 à $+\infty$, soit la série des valeurs négatives de -1 à $-\infty$, les autres indices gardant des valeurs fixes, il est extrêmement facile de s'assurer que la valeur absolue de $y_l - \beta$ augmente constamment, et que par conséquent la valeur absolue de l'expression (10), qui prend alternativement des signes contraires, décroît constamment. Dès lors, dans chacune des files, la somme des termes est plus petite en valeur absolue que le terme initial, *à fortiori* plus petite que

$$\frac{1}{[(x_k-\alpha)^2+(z_m-\gamma)^2+\ldots+(t_q-\varepsilon)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

et que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \times \frac{1}{[(k_1-1)^2+(m_1-1)^2+\ldots+(q_1-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Donc la somme des files du groupe est plus petite que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \sum_{m_1=1}^{m_1=\infty} \cdots \sum_{q_1=1}^{q_1=\infty} \frac{1}{[(k_1-1)^2+(m_1-1)^2+\ldots+(q_1-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

quantité qui tend vers zéro pour k_1 infini.

Supposons enfin que, g étant toujours égal à $p-1$, $\Lambda_{k,l,\ldots,q}$ désigne, parmi les quantités (5), l'une quelconque de celles qui suivent la première, et que l'on ait par exemple :

$$\Lambda_{k,l,\ldots,q} = (-1)^{k+l+\ldots+q} \frac{y_l - \beta}{R^{\frac{p}{2}}}. \tag{11}$$

Décomposons alors le groupe en files dans lesquelles l'indice variable soit l. Lorsqu'on donne à l, dans l'expression (11), soit la série des valeurs positives, soit la série des valeurs négatives, les autres indices gardant des valeurs fixes, l'expression prend alternativement des signes contraires, mais ne décroît pas constamment : car, si l'on désigne par $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ les valeurs absolues des différences $x_k - \alpha$, $y_l - \beta$, $z_m - \gamma, \ldots, t_q - \varepsilon$, et que l'on considère l'expression :

$$\frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p}{2}}},$$

sa dérivée par rapport à η est :

$$\frac{\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2-(p-1)\,\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p+2}{2}}},$$

et l'expression, considérée comme fonction de la seule variable η, passe, pour $\eta = \sqrt{\frac{\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2}{p-1}}$, par un maximum dont la valeur est :

$$\frac{(p-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{(\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p-1}{2}}}. \tag{12}$$

D'après cela, chacune des files considérées peut elle-même se décomposer en deux files partielles : dans l'une d'elles, la valeur absolue des termes croît avec celle de l, dans l'autre elle décroît quand celle de l augmente. Ces deux files partielles ont d'ailleurs des sommes de signes contraires et inférieures en valeur absolue à l'expression (12). La file totale a donc une somme plus petite que l'expression (12), et *à fortiori* que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{[(k_1-1)^2+(m_1-1)^2+\ldots+(q_1-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Dès lors la somme des files a une valeur absolue plus petite que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{p}{2}}} \sum_{m_1=1}^{m_1=\infty} \cdots \sum_{q_1=1}^{q_1=\infty} \frac{1}{[(k_1-1)^2+(m_1-1)^2+\dots+(q_1-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

quantité qui tend vers zéro pour k_1 infini.

II. Cela posé, donnons aux entiers K′, K″, L′, L″, ..., Q′, Q″, et k', k'', l', l'', ..., q', q'' des valeurs déterminées, quelconques d'ailleurs. La quantité (8) est, comme chacun des termes $\Lambda_{k, l, \dots, q}$ qui la composent, une fonction de x, y, ..., t finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'intérieur du parallélipipède, et vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$. Il suffira donc, pour obtenir une limite supérieure de sa valeur absolue, de considérer, parmi les valeurs de la fonction, celles qui correspondent aux positions limites du point x, y, ..., t situées sur la surface du parallélipipède.

Supposons par exemple que le point x, y, ..., t tende vers un point situé sur l'une des faces $x = \frac{a}{2}$, $x = -\frac{a}{2}$. Nous grouperons alors les termes de (8) par files (limitées) dans lesquelles l'indice variable soit k. En désignant par $f_{l, \dots, q}$ l'une quelconque de ces files, elles seront comprises, les unes dans la formule :

$$\sum_{-\mathrm{L}'}^{\mathrm{L}''} \cdots \sum_{-\mathrm{Q}'}^{\mathrm{Q}''} f_{l, \dots, q},$$

les autres dans la formule :

$$\sum_{-(\mathrm{L}'+l')}^{\mathrm{L}''+l''} \cdots \sum_{-(\mathrm{Q}'+q')}^{\mathrm{Q}''+q''} f_{l, \dots, q} - \sum_{-\mathrm{L}'}^{\mathrm{L}''} \cdots \sum_{-\mathrm{Q}'}^{\mathrm{Q}''} f_{l, \dots, q}.$$

Chaque file du premier groupe est composée de deux portions séparées dont les termes correspondent aux diverses valeurs de k comprises soit entre $-(\mathrm{K}' + k')$ et $-(\mathrm{K}' + 1)$, soit entre $\mathrm{K}'' + 1$ et $\mathrm{K}'' + k''$. Chaque file du second groupe se compose au contraire d'une seule portion, dont les termes correspondent aux diverses valeurs de k comprises entre $-(\mathrm{K}' + k')$ et $\mathrm{K}'' + k''$. Remarquons maintenant qu'à chaque terme de (8) correspond un point donné par les formules (2); que ces points peuvent se grouper par files, comme les termes qui leur correspondent; que dans une même file ou portion de file, les points ne peuvent différer que par leur première coordonnée; que lorsque le point x, y, ..., t tend vers sa position limite $\left(\text{et par suite } x \text{ vers } \frac{a}{2} \text{ ou } -\frac{a}{2}\right)$, ces premières coordonnées deviennent deux par deux égales, sauf exception possible pour les deux points extrêmes de la portion de file qui peuvent rester isolés; et qu'en conséquence les termes correspondants de (8), précédés alternativement de signes contraires, ont des sommes deux à deux qui tendent vers zéro, sauf exception possible pour les deux termes extrêmes. On en conclura bien facilement que les termes de (8) ont des sommes deux à deux qui tendent vers zéro, sauf exception possible pour quatre groupes de termes; deux de ces groupes sont donnés par la formule :

$$\sum_{-(L'+l')}^{L''+l''} \cdots \sum_{-(Q'+q')}^{Q''+q''} A_{k,l,\ldots,q},$$

où k doit recevoir successivement les deux valeurs $-(K'+k')$ et $K''+k''$; les deux autres par la formule :

$$\sum_{-L'}^{L''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} A_{k,l,\ldots,q},$$

où k doit recevoir successivement les deux valeurs $-(K'+1)$ et $K''+1$. On arriverait à une conclusion analogue, en supposant que le point $x, y, \ldots, t$ tend vers un point situé sur une autre face du parallélipipède. Si donc on a égard à la proposition précédemment établie (I), on voit immédiatement qu'en attribuant aux entiers $K', K'', L', L'', \ldots, Q', Q''$ des valeurs suffisamment grandes, la quantité (8) reste, sur toute la surface du parallélipipède, constamment plus petite en valeur absolue que $4. \frac{\theta}{4} = \theta$, et cela indépendamment de toutes les autres circonstances indiquées par l'énoncé.

44. *La proposition du numéro précédent ne cesse pas d'être vraie, si* $A_{k,l,\ldots,q}$ *désigne une dérivée partielle du premier ordre de l'une des quantités* (5).

Considérons une série ayant pour terme général l'une des quantités (6) : on fera voir, comme plus haut, qu'avec les termes de cette série, convenablement groupés, on peut former un nombre fini de séries partielles dans chacune desquelles le nombre des entrées ou des indices variables est au plus égal à p, et dans chacune desquelles un quelconque de ces indices prend des valeurs différentes de zéro et toutes de même signe; que, d'après cela, on peut aussi former avec les termes de (8) un nombre fini de groupes, respectivement extraits des séries partielles dont nous venons de parler. Il suffit donc de démontrer que, dans les conditions ci-dessus énoncées, chacun de ces groupes est plus petit en valeur absolue qu'une quantité donnée.

I. Considérons d'abord un groupe extrait d'une série partielle où le nombre des entrées g soit inférieur à p : nous supposerons par exemple que l'on donne des valeurs positives aux g premiers indices $k, l, m, \ldots, n$, et la valeur zéro aux indices suivants. Les termes du groupe sont alors compris dans la formule :

$$\sum_{1}^{K''+k''} \sum_{1}^{L''+l''} \cdots \sum_{1}^{N''+n''} A_{k,l,\ldots,q} - \sum_{1}^{K''} \sum_{1}^{L''} \cdots \sum_{1}^{N''} A_{k,l,\ldots,q},$$

les indices qui suivent n ayant tous la valeur zéro. L'une quelconque des quantités (6) est plus petite en valeur absolue que $\frac{p}{R^{\frac{p}{2}}}$, et *à fortiori* que

$$\frac{p}{\rho^p}\cdot\frac{1}{[(k-1)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p}{2}}};$$

donc la somme des valeurs absolues des termes du groupe est plus petite que

$$\frac{p}{\rho^p}\left\{\sum_1^\infty\sum_1^\infty\cdots\sum_1^\infty\frac{1}{[(k-1)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p}{2}}}-\sum_1^{K''}\sum_1^{L''}\cdots\sum_1^{N''}\frac{1}{[(k-1)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p}{2}}}\right\}.$$

Or, le nombre des entrées g étant inférieur à p, la série définie par le premier terme de la parenthèse est convergente, d'où résulte que la quantité entre parenthèses tend vers zéro pour K″, L″, ..., N″ infinis.

II. Soit maintenant $g=p$, et supposons, pour fixer les idées, qu'on donne à tous les indices des valeurs positives. Nous examinerons en premier lieu le cas où

$$A_{k,l,m,\ldots,q}=(-1)^{l+m+\ldots+q}\frac{R-p\,(x_k-\alpha)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}}.$$

Ce terme général peut se décomposer comme il suit :

$$(13)\qquad \frac{(-1)^{l+m+\ldots+q}}{R^{\frac{p}{2}}}+\frac{(-1)^{l+m+\ldots+q+1}\,p\,(x_k-\alpha)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}}.$$

Si l'on effectue cette décomposition sur chacun des termes du groupe considéré, on obtient deux sous-groupes, dans chacun desquels on disposera les termes par files, en choisissant pour l'indice variable de ces files l'un quelconque des indices l, m, ..., q, le premier par exemple. Dans chaque file, les termes sont alternativement de signes contraires et décroissent constamment; chacune d'elles a dès lors une valeur absolue plus petite que son terme initial. En désignant par $f_{k,m,\ldots,q}$ l'une quelconque d'entre elles, les unes sont comprises dans la formule :

$$(14)\qquad \sum_1^{K''}\sum_1^{M''}\cdots\sum_1^{Q''}f_{k,m,\ldots,q},$$

et leurs différents termes correspondent aux valeurs de l comprises entre L″ + 1 et L″ + l''; les autres sont comprises dans la formule :

$$(15)\qquad \sum_1^{K''+k''}\sum_1^{M''+m''}\cdots\sum_1^{Q''+q''}f_{k,m,\ldots,q}-\sum_1^{K''}\sum_1^{M''}\cdots\sum_1^{Q''}f_{k,m,\ldots,q},$$

et leurs différents termes correspondent aux valeurs de l comprises entre 1 et

$L'' + l''$. Comme d'ailleurs l'un ou l'autre des deux termes qui composent l'expression (13) est plus petit en valeur absolue que $\frac{p}{R^{\frac{p}{2}}}$, la somme des files est plus petite que

$$\frac{p}{\rho^p}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\cdots\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{1}{[L''^2+(k-1)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p}{2}}}$$

$$+\frac{p}{\rho^p}\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\cdots\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{1}{[(k-1)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p}{2}}}\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{k=K''}\sum_{m=1}^{m=M''}\cdots\sum_{q=1}^{q=Q''}\frac{1}{[(k-1)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p}{2}}}\right\},$$

quantité qui tend vers zéro, lorsque K'', L'', M'', ..., Q'' augmentent indéfiniment.

III. g étant toujours égal à p, supposons que $\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}$ désigne l'une des quantités (6) autre que la première, par exemple la seconde :

$$(-1)^{l+m+\ldots+q+1}\frac{p\,(x_k-\alpha)\,(y_l-\beta)}{R^{\frac{p+2}{2}}},$$

et prenons encore dans (8) le groupe de termes qui correspond à la série partielle où les indices ont tous des valeurs positives. Si dans cette série partielle on dispose les termes par files dont l'indice variable soit l, il est facile de voir que dans chaque file les termes sont alternativement de signes contraires, mais ne décroissent pas constamment : car si l'on désigne, comme plus haut, par ξ, η, ζ, ..., τ les valeurs absolues des différences $x_k-\alpha$, $y_l-\beta$, $z_m-\gamma$, ..., $t_q-\varepsilon$, et que l'on considère l'expression :

$$\frac{p\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p+2}{2}}},$$

sa dérivée par rapport à η est :

$$(16)\qquad \frac{p\xi\,[\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2-(p+1)\,\eta^2]}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p+4}{2}}},$$

et l'expression, considérée comme fonction de la seule variable η, passe, pour $\eta=\sqrt{\frac{\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2}{p+1}}$, par un maximum dont la valeur est égale à

$$p\,\frac{(p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(p+2)^{\frac{p+2}{2}}}\,\frac{\xi}{(\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p+1}{2}}},$$

et par suite inférieure à

$$(17)\qquad p\,\frac{(p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(p+2)^{\frac{p+2}{2}}}\cdot\frac{1}{(\xi^2+\zeta^2+\ldots+\tau^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

D'après cela, chaque portion de file composée d'un nombre quelconque de termes consécutifs peut se décomposer en deux parties : dans l'une, la valeur absolue des termes croît avec celle de l, dans l'autre elle décroît quand celle de l augmente ; ces deux parties ont des sommes de signes contraires et inférieures en valeur absolue à l'expression (17) ; donc la portion de file a elle-même une somme plus petite que (17).

D'autre part, considérons l'inégalité :

$$(18)\qquad (k+1)^2 a^2 + (m+1)^2 c^2 + \ldots + (q+1)^2 e^2 < (p+1)\,L''^2 b^2,$$

et L'' étant supposé donné, désignons par H le plus grand entier positif tel que, si on substitue à $k, m, \ldots, q$ des entiers quelconques pris dans la suite $0, 1, 2, \ldots, H$, l'inégalité (18) soit toujours vérifiée. L'entier H augmente indéfiniment avec L'', car c'est évidemment le plus grand entier qui, substitué à u, vérifie l'inégalité :

$$(u+1)^2(a^2+c^2+\ldots+e^2) < (p+1)\,L''^2 b^2.$$

Si maintenant on désigne par H' le plus grand entier positif satisfaisant à la condition précédemment énoncée, et en outre ne surpassant aucun des entiers K'', M'', ..., Q'', il est clair que H' augmente indéfiniment lorsque les p entiers K'', L'', M'', ..., Q'' augmentent à la fois indéfiniment.

Cela posé, les files du groupe extrait de (8) sont comprises, comme nous l'avons vu, les unes dans la formule (14), les autres dans la formule (15). Prenons seulement parmi les premières celles qui sont comprises dans la formule :

$$(19)\qquad \sum_1^{H'}\sum_1^{H'}\cdots\sum_1^{H'} f_{k,m,\ldots,q};$$

leurs différents termes correspondent aux valeurs de l comprises entre $L''+1$ et $L''+l''$. Les files restantes du groupe sont alors comprises dans la formule :

$$(20)\qquad \sum_1^{K''+k''}\sum_1^{M''+m''}\cdots\sum_1^{Q''+q''} f_{k,m,\ldots,q} - \sum_1^{H'}\sum_1^{H'}\cdots\sum_1^{H'} f_{k,m,\ldots,q},$$

et leurs différents termes correspondent aux valeurs de l comprises, tantôt entre $L''+1$ et $L''+l''$, tantôt entre 1 et $L''+l''$. Remarquons maintenant que pour chacune des files (19) les valeurs correspondantes des indices $k, m, \ldots, q$ vérifient l'inégalité (18). Il en résulte que pour le terme initial de cette file (correspondant à $l = L''+1$), et par suite pour tous les termes suivants, se trouve vérifiée l'inégalité :

$$\xi^2 + \zeta^2 + \ldots + \tau^2 - (p+1)\,\eta^2 < 0$$

(dont le premier membre ne diffère de l'expression (16) que par un facteur positif), et cela indépendamment des positions occupées à l'intérieur du parallélipipède par les deux points $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, \ldots, t$. Dès lors, chaque file (19) a une somme plus petite que son terme initial, et *à fortiori* que

$$\frac{p}{\rho^p} \cdot \frac{1}{\left[(k-1)^2 + \mathrm{L}''^2 + (m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2\right]^{\frac{p}{2}}};$$

la somme de ces files est donc plus petite que

$$\frac{p}{\rho^p} \cdot \sum_{k=1}^{k=\mathrm{H}'} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{H}'} \cdots \sum_{q=1}^{q=\mathrm{H}'} \frac{1}{\left[\mathrm{L}''^2 + (k-1)^2 + (m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2\right]^{\frac{p}{2}}},$$

et *à fortiori* que

$$\frac{p}{\rho^p} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \cdots \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\left[\mathrm{L}''^2 + (k-1)^2 + (m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2\right]^{\frac{p}{2}}}. \tag{21}$$

En posant $\mathrm{A} = p\,\dfrac{(p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(p+2)^{\frac{p+2}{2}}}$, l'une quelconque des files (20) est plus petite, d'après ce qui a été vu plus haut, que

$$\frac{\mathrm{A}}{\left[(x_k - \alpha)^2 + (z_m - \gamma)^2 + \ldots + (t_q - \varepsilon)^2\right]^{\frac{p}{2}}},$$

et *à fortiori* que

$$\frac{\mathrm{A}}{\rho_p} \cdot \frac{1}{\left[(k-1)^2 + (m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2\right]^{\frac{p}{2}}};$$

leur somme est donc plus petite que

$$\frac{\mathrm{A}}{\rho^p} \left\{ \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \cdots \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\left[(k-1)^2 + (m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2\right]^{\frac{p}{2}}} - \sum_{k=1}^{k=\mathrm{H}'} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{H}'} \cdots \sum_{q=1}^{q=\mathrm{H}'} \frac{1}{\left[(k-1)^2 + (m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2\right]^{\frac{p}{2}}} \right\}. \tag{22}$$

En résumé, la somme des files (19) et (20) est plus petite en valeur absolue que la somme des quantités (21) et (22). Or, lorsque K″, L″, M″, ..., Q″ augmentent indéfiniment, il en est de même de H′, et chacune de ces deux quantités tend vers zéro.

45. *La proposition du n° **43** ne cesse pas d'être vraie, si* $\Lambda_{k,l,\ldots,q}$ *désigne une dérivée partielle du second ordre de l'une des quantités* (5).

Comme dans le numéro précédent, considérons un groupe de termes extrait de (8) et correspondant à une série partielle à g entrées ($g \leqq p$); nous supposerons par exemple que l'on donne aux g premiers indices $k, l, m, \ldots, n$ des valeurs positives, et la valeur zéro à tous les suivants. Les termes de ce groupe sont compris dans la formule :

$$\sum_1^{K''+k''}\sum_1^{L''+l''}\cdots\sum_1^{N''+n''}\Lambda_{k,l,\ldots,q}-\sum_1^{K''}\sum_1^{L''}\cdots\sum_1^{N''}\Lambda_{k,l,\ldots,q},$$

les indices qui suivent n ayant tous la valeur zéro. D'ailleurs il est facile de voir que l'une des quantités (7) est plus petite en valeur absolue que $\frac{p\,(p+1)}{R^{\frac{p+1}{2}}}$, et *à fortiori* que

$$\frac{p\,(p+1)}{\rho^{p+1}}\cdot\frac{1}{[(k-1)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p+1}{2}}};$$

donc la somme des valeurs absolues des termes du groupe est plus petite que

$$\frac{p\,(p+1)}{\rho^{p+1}}\left\{\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\cdots\sum_1^{\infty}\frac{1}{[(k-1)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p+1}{2}}}\right.$$
$$\left.-\sum_1^{K''}\sum_1^{L''}\cdots\sum_1^{N''}\frac{1}{[(k-1)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p+1}{2}}}\right\}.$$

Or, la quantité entre parenthèses tend vers zéro pour K'', L'', ..., N'' infinis, puisque, dans la série définie par le premier terme, le nombre des entrées g est $\leqq p < p+1$.

46. Il est facile de démontrer maintenant qu'à l'intérieur et sur la surface du parallélipipède donné, les séries à p entrées ayant pour terme général l'une des quantités (5) ou l'une de leurs dérivées partielles des deux premiers ordres relatives aux variables $x, y, \ldots, t$ [1], définissent des fonctions continues des coordonnées des deux points $x, y, \ldots, t$ et $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$. Désignons en effet par

$$f(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$$

la somme de l'une de ces séries, par $\Lambda_{k,l,\ldots,q}$ son terme général, et posons :

$$\varphi(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)=\sum_{-K'}^{K''}\sum_{-L'}^{L''}\cdots\sum_{-Q'}^{Q''}\Lambda_{k,l,\ldots,q},$$
$$f(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)=\varphi(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)+\psi(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon).$$

---

[1] On fait toujours abstraction des termes, en nombre égal à 3^p, qui correspondent aux valeurs 0, 1, et -1 des indices $k, l, \ldots, q$.

Si l'on donne aux variables indépendantes les accroissements respectifs Δx, Δy, ..., Δt, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, ..., $\Delta \varepsilon$, l'accroissement correspondant de la fonction f est égal à la somme des accroissements des fonctions φ et ψ. Or, on peut, d'après les propositions démontrées dans les trois numéros qui précèdent, donner aux entiers K', K'', L', L'', ..., Q', Q'' des valeurs suffisamment grandes pour que dans la différence :

$$\psi(x+\Delta x, \quad y+\Delta y, \ldots, \quad t+\Delta t, \quad \alpha+\Delta\alpha, \quad \beta+\Delta\beta, \ldots, \quad \varepsilon+\Delta\varepsilon) - \psi(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$$

chacun des deux termes soit plus petit en valeur absolue qu'une quantité donnée $\frac{\theta}{3}$, indépendamment des positions occupées à l'intérieur du parallélipipède et sur sa surface par les quatre points :

$$\begin{array}{lll} x, & y, \ldots, & t, \\ \alpha, & \beta, \ldots, & \varepsilon, \\ x+\Delta x, & y+\Delta y, \ldots, & t+\Delta t, \\ \alpha+\Delta\alpha, & \beta+\Delta\beta, \ldots, & \varepsilon+\Delta\varepsilon. \end{array}$$

D'autre part, φ étant une fonction continue, si on donne aux variables des accroissements suffisamment voisins de zéro, l'accroissement correspondant de φ est plus petit en valeur absolue que $\frac{\theta}{3}$, et par suite l'accroissement de f plus petit que θ.

On fera voir ensuite, au moyen du raisonnement usité en pareil cas, que certaines de ces fonctions [celles que l'on forme au moyen des quantités (5)] admettent les autres fonctions comme dérivées partielles du premier et du second ordre relativement aux variables x, y, ..., t. Enfin les fonctions formées au moyen des quantités (5) vérifient l'équation différentielle $\Delta = 0$, puisque chacune de ces quantités la vérifie séparément (1).

47. Désignons par $f(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$ une fonction continue des coordonnées des deux points :

$$\begin{array}{lll} x, & y, \ldots, & t, \\ \alpha, & \beta, \ldots, & \varepsilon, \end{array}$$

à l'intérieur du parallélipipède et sur sa surface; supposons que les dérivées partielles des deux premiers ordres de cette fonction par rapport aux variables x, y, ..., t jouissent de la même propriété, et en outre que la fonction vérifie l'équation differentielle $\Delta f = 0$. Cela posé, soient σ une surface fermée intérieure au parallélipipède (et pouvant comme cas particulier se confondre avec lui), α, β, ..., ε un point variable de σ, α', β', ..., ε' les paramètres directeurs de la normale intérieure en ce point, μ une quantité qui varie sur σ d'une manière continue. En faisant usage du mode de raisonnement habituel, on démontrera

(1) Dans les numéros **46** et **47**, nous donnons au symbole Δ deux sens différents, suivant les cas; mais il n'y a évidemment aucune confusion possible.

en premier lieu que l'une quelconque des intégrales :

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \int \mu\alpha' f(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)\, d\sigma, \\ \int \mu\beta' f(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)\, d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int \mu\varepsilon' f(x, y, \ldots, t, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)\, d\sigma, \end{array}\right.$$

supposée étendue à toute la surface σ, est une fonction continue de $x, y, \ldots, t$ à l'intérieur du parallélipipède et sur sa surface, et qu'il en est de même pour les intégrales que l'on déduit des précédentes en remplaçant f par l'une de ses dérivées partielles du premier ou du second ordre relatives aux variables $x, y, \ldots, t$; on démontrera en second lieu que ces dernières intégrales sont les dérivées partielles des premières par rapport aux mêmes variables, et que par conséquent les fonctions (23) vérifient l'équation différentielle $\Delta = 0$.

Cela étant, désignons par $\Lambda_{k, l, \ldots, q}$ l'une quelconque des quantités (5), et posons :

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} \Lambda_{k,l,\ldots,q},$$

en supposant supprimés dans cette série certains termes, indiqués plus haut (n° **41**). Il résulte du n° **43** que l'on a :

$$\int \mu\, \alpha' f\, d\sigma = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} \int \mu\, \alpha'\, \Lambda_{k,l,\ldots,q}\, d\sigma,$$

et que par conséquent la série à p entrées qui figure dans le second membre définit, quand on y supprime certains termes, une fonction de $x, y, \ldots, t$ finie et continue à l'intérieur et sur la surface du parallélipipède, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant en outre l'équation différentielle $\Delta = 0$. Dès lors, en ayant égard à la formule (4), on verra qu'il en est de même de la série (3), et si l'on rétablit maintenant dans cette dernière les termes supprimés, la fonction ainsi obtenue est finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifie l'équation différentielle $\Delta = 0$, tant à l'intérieur de σ que dans tout continuum de points situé entre σ et la surface du parallélipipède.

En outre, on déduira bien facilement du n° **43** la proposition suivante :

A partir de valeurs suffisamment grandes des entiers K′, K″, L′, L″, …, Q′, Q″, *la quantité :*

$$\sum_{-(K'+k')}^{K''+k''} \sum_{-(L'+l')}^{L''+l''} \cdots \sum_{-(Q'+q')}^{Q''+q''} (-1)^{k+l+\ldots+q}\, W_{k,l,\ldots,q} - \sum_{-K'}^{K''} \sum_{-L'}^{L''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} (-1)^{k+l+\ldots+q}\, W_{k,l,\ldots,q}$$

est plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée, indépendamment des *valeurs attribuées aux entiers k', k'', l', l'', ..., q', q'', et de la position occupée à l'intérieur du parallélipipède ou sur sa surface par le point $x, y, \ldots, t$.*

48. Désignons, comme plus haut, par $2\mathrm{S}$ l'aire de la surface sphérique de rayon 1 dans l'espace à p dimensions, et posons :

$$(24) \qquad \mathrm{F}(x, y, \ldots, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l+\cdots+q}\, \mathrm{W}_{k,l,\ldots,q}.$$

1° *Si l'on désigne par s un point commun à la surface du parallélipipède et à la surface fermée σ qui lui est intérieure, et par μ_s la valeur prise par la quantité μ au point s, la fonction $\mathrm{F}(x, y, \ldots, t)$ tend vers la valeur $2\mathrm{S}\mu_s$, lorsque le point $x, y, \ldots, t$ tend vers s en restant constamment intérieur à σ.*

Supposons par exemple que le point s soit situé sur la face $x = \frac{a}{2}$, et posons :

$$(25) \qquad \mathrm{F}(x, y, \ldots, t) = \sum_{-2\mathrm{K}'}^{2\mathrm{K}''+1} \sum_{-\mathrm{L}'}^{\mathrm{L}''} \cdots \sum_{-\mathrm{Q}'}^{\mathrm{Q}''} (-1)^{k+l+\cdots+q}\, \mathrm{W}_{k,l,\ldots,q} + \omega(x, y, \ldots, t).$$

D'après ce que nous venons de voir, pour des valeurs suffisamment grandes des entiers K', K'', L', L'', ..., Q', Q'', $\omega(x, y, \ldots, t)$ est plus petit qu'une quantité donnée $\frac{\theta}{2}$, indépendamment de la position occupée par le point $x, y, \ldots, t$ à l'intérieur du parallélipipède ou sur sa surface. Donnons alors à K', K'', L', L'', ..., Q', Q'' des valeurs satisfaisant à cette condition, et laissons-les fixes. Puis, considérant l'ensemble des termes de la série (24) compris dans le premier terme du second membre de (25), disposons-les par files dont l'indice variable soit k. A chaque terme du groupe considéré correspond un point donné par les formules (2); on voit immédiatement que, lorsque le point $x, y, \ldots, t$ tend vers s, les points correspondant aux termes d'une même file se confondent deux par deux, et qu'en conséquence les sommes deux à deux de ces termes tendent vers zéro, à l'exception toutefois des deux termes situés dans la file $l = m = \ldots = q = 0$, et fournis respectivement par les valeurs 0 et 1 de l'indice k. Des deux points correspondants, le premier, qui n'est autre que $x, y, \ldots, t$, tend vers s en restant, d'après l'hypothèse, constamment intérieur à σ; le second tend aussi vers s, mais en restant constamment extérieur au parallélipipède, et par suite à la surface fermée. D'après les propriétés de l'intégrale de M. Neumann (n° **26**), la somme de ces deux termes tend vers $2\mathrm{S}\mu_s$. Donc, pour toutes les positions du point $x, y, \ldots, t$ intérieures à σ et suffisamment rapprochées de s, le premier terme du second membre de (25) diffère de $2\mathrm{S}\mu_s$ d'une quantité moindre que $\frac{\theta}{2}$, et par suite $\mathrm{F}(x, y, \ldots, t)$ diffère de $2\mathrm{S}\mu_s$ d'une quantité moindre que θ.

2° *Si l'on désigne par s un point commun à σ et à la surface du parallélipipède,* *la fonction* F $(x, y, \ldots, t)$ *tend vers zéro, lorsque le point* $x, y, \ldots, t$, *intérieur au parallélipipède, tend vers s en restant constamment extérieur à* σ.

De même, si l'on désigne par s' un point situé sur la surface du parallélipipède, mais non sur σ, *la fonction* F $(x, y, \ldots, t)$ *tend vers zéro lorsque le point* $x, y, \ldots, t$ *tend vers s'*.

Il suffit de répéter la démonstration précédente, en observant seulement que les deux termes dont la somme tendait tout à l'heure vers $2S\mu_s$, ont maintenant une somme qui tend vers zéro.

3° *Soient* $x, y, \ldots, t$ *et* $x', y', \ldots, t'$ *deux points intérieurs l'un et l'autre au parallélipipède, et s un point de la surface* σ. *La différence :*

$$F(x, y, \ldots, t) - F(x', y', \ldots, t')$$

tend vers $2S\mu_s$ *lorsque les deux points* $x, y, \ldots, t$ *et* $x', y', \ldots, t'$ *tendent vers s, le premier en restant constamment intérieur à* σ, *le second en lui restant constamment extérieur.*

Dans la série (24), désignons par $\varphi(x, y, \ldots, t)$ la somme des termes, en nombre égal à 3^p, qui correspondent à toutes les combinaisons possibles des valeurs 0, 1 et -1 des indices, et posons :

$$F(x, y, \ldots, t) = \varphi(x, y, \ldots, t) + \psi(x, y, \ldots, t).$$

La fonction ψ étant continue à l'intérieur du parallélipipède et sur sa surface, la différence $\psi(x, y, \ldots, t) - \psi(x', y', \ldots, t')$ tend vers zéro dans les circonstances ci-dessus énoncées, et quant à la différence $\varphi(x, y, \ldots, t) - \varphi(x', y', \ldots, t')$, il est extrêmement facile de s'assurer qu'elle tend vers $2S\mu_s$.

49. 1° Supposons que la surface σ soit précisément celle du parallélipipède. La fonction $\frac{1}{2S}$ F $(x, y, \ldots, t)$ prend les valeurs μ sur cette surface (n° **48**, 1°), et le problème intérieur est résolu.

2° Considérons un parallélipipède rectangle ayant deux de ses dimensions égales, et dont les points intérieurs sont définis par les inégalités :

$$x^2 - \frac{a^2}{4} < 0, \quad y^2 - \frac{a^2}{4} < 0, \quad z^2 - \frac{c^2}{4} < 0, \ldots, \quad t^2 - \frac{c^2}{4} < 0;$$

en ajoutant à ces dernières l'inégalité suivante :

$$x + y > 0,$$

on obtient une surface fermée intérieure au parallélipipède, et que nous supposerons être la surface σ des numéros précédents (1). Désignons maintenant par x, $y, z, \ldots, t$ un point intérieur à σ; les coordonnées du point symétrique par rapport

(1) Dans le cas de deux variables, on obtient le triangle rectangle isocèle; dans le cas de trois variables, le prisme droit ayant ce triangle pour base.

au plan $x + y = 0$ [1] sont alors $-y, -x, z, \ldots, t$, et ce point est nécessairement extérieur à σ, mais intérieur au parallélipipède. Je dis que la fonction :

$$\Phi(x, y, z, \ldots, t) = \frac{1}{2S}[F(x, y, z, \ldots, t) - F(-y, -x, z, \ldots, t)]$$

satisfait à l'équation différentielle $\Delta = 0$, et prend sur σ les valeurs μ.

En effet, la fonction $F(x, y, z, \ldots, t)$ satisfait à l'équation différentielle dont il s'agit, et il en est de même de la fonction $F(-y, -x, z, \ldots, t)$, transformée de la première par symétrie. Cela étant, supposons en premier lieu que le point $x, y, z, \ldots, t$ tende vers un point de σ non situé dans le plan $x + y = 0$, et situé par conséquent sur la surface du parallélipipède. On voit d'abord (n° **48**, 1°) que $\frac{1}{2S} F(x, y, z, \ldots, t)$ tend vers μ_s; d'autre part, le point symétrique $-y, -x, z, \ldots, t$ tendant vers un point de la surface du parallélipipède, mais restant toujours extérieur à σ, la quantité $\frac{1}{2S} F(-y, -x, z, \ldots, t)$ tend vers zéro (n° **48**, 2°); donc la fonction $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$ tend vers μ_s. Si l'on suppose en second lieu que le point $x, y, z, \ldots, t$ tend vers un point de σ situé dans le plan $x + y = 0$, $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$ tend encore vers μ_s (n° **48**, 3°).

50. Soit $x, y, z, \ldots, t$ un point intérieur à la surface fermée P définie par le système d'inégalités [2] :

$$(26) \quad \begin{cases} y - \dfrac{a\sqrt{3}}{2} < 0, \quad y - x\sqrt{3} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} > 0, \quad y + x\sqrt{3} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} > 0, \\ z^2 - \dfrac{c^2}{4} < 0, \ldots, \quad t^2 - \dfrac{e^2}{4} < 0, \end{cases}$$

et soit Q_n le plan qui a pour équation :

$$(27) \qquad y = (-1)^n \sqrt{3}\left[x - (2n + 1)\frac{a}{2}\right].$$

Prenons le point symétrique du point donné par rapport au plan Q_0, puis le symétrique du point ainsi obtenu par rapport au plan Q_1, puis le symétrique de ce dernier par rapport au plan Q_2, et ainsi de suite indéfiniment; faisons la même

---

(1) On dit que deux points sont symétriques par rapport à un plan, lorsque leurs coordonnées, substituées dans le premier membre de l'équation du plan, lui donnent des valeurs égales et de signes contraires, et qu'en même temps la droite qui joint les deux points est perpendiculaire au plan. Il est bon de remarquer que les coordonnées correspondant aux variables qui ont leurs coefficients nuls dans l'équation du plan, sont les mêmes pour les deux points symétriques. Dans le cas actuel par exemple, où l'équation du plan est $x + y = 0$, on a, en désignant par $x', y', z', \ldots, t'$ les coordonnées du point symétrique : $x' = -y$, $y' = -x$, $z' = z, \ldots, t' = t$. — Il est extrêmement facile de démontrer, d'abord que l'on peut toujours, par une transformation des coordonnées rectangulaires, faire coïncider un plan quelconque avec l'un des plans coordonnés; puis, en s'aidant de cette proposition, que la transformation par symétrie n'altère pas l'équation différentielle $\Delta = 0$.

(2) Dans le cas de deux variables x et y, les inégalités (26) définissent les points intérieurs à un triangle équilatéral de côté $2a$; dans le cas de trois variables x, y et z, les points intérieurs à un prisme droit ayant ce triangle pour base.

opération avec la série indéfinie des plans Q_{-1}, Q_{-2}, Q_{-3}, etc. Il résulte d'une remarque faite antérieurement (note de la page 94), que l'une quelconque des $p - 2$ dernières coordonnées a la même valeur pour tous les points considérés, et que pour obtenir les valeurs des deux premières, on a à faire exactement les mêmes calculs que si l'équation (27) représentait une série de droites dans un plan. Les résultats de ce calcul seront donc représentés géométriquement par la figure suivante :

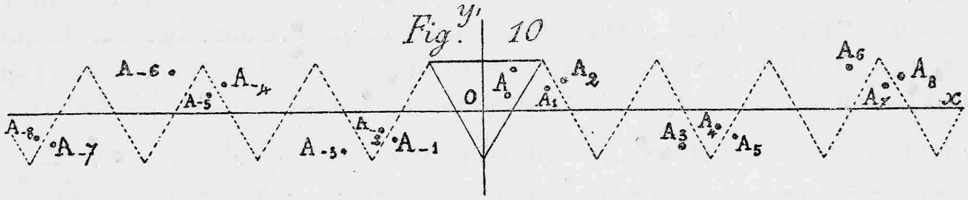


Fig. 10

Dans cette figure, A_0 est le point qui a pour coordonnées x et y; on en déduit par la symétrie, d'une part la série des points A_1, A_2, A_3, etc., d'autre part la série des points A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, etc. Si l'on désigne par k un entier quelconque, positif, négatif ou nul, par x_k et $y_{k,0}$ les coordonnées du point A_k, et si l'on pose :

$$k = 6i + j,$$

j étant l'un des six entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, il est facile de voir que l'on a :

$$x_k = x_j + 6ia, \qquad y_{k,0} = y_{j,0}.$$

Cela posé, imaginons à l'intérieur de la surface P une surface fermée quelconque σ (pouvant comme cas particulier coïncider avec P), désignons par μ une quantité qui varie sur σ d'une manière continue, et considérons dans l'espace à p dimensions l'ensemble des points définis par les formules :

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_k &= x_j + 6ia, \\ y_{k,l} &= la\sqrt{3} + (-1)^l\, y_{k,0}, \\ z_m &= mc + (-1)^m\, z, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_q &= qe + (-1)^q\, t, \end{aligned} \right.$$

où $k, l, m, \ldots, q$ peuvent prendre toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$ (dans le cas où les variables se réduisent à deux, x et y, l'ensemble des points définis par les formules (28) est représenté graphiquement par la *fig. 11*). Désignons enfin par $W_{k,l,m,\ldots,q}$ la valeur prise au point x_k, $y_{k,l}$, z_m, ..., t_q par l'intégrale de M. Neumann formée avec les valeurs μ. La série à p entrées :

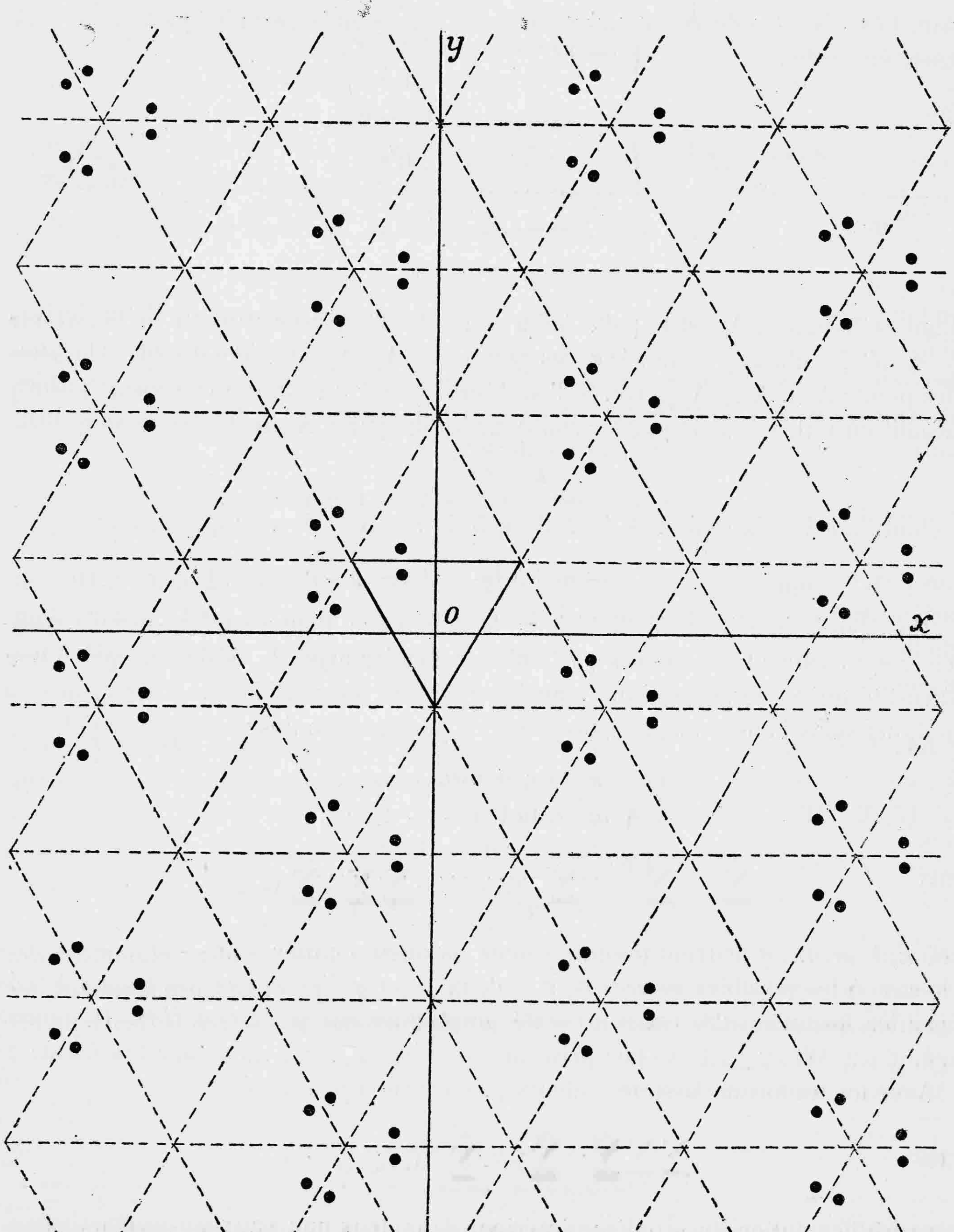
$$(29) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{k+l+m+\ldots+q}\, W_{k,l,m,\ldots,q},$$

fournit la solution du problème intérieur dans deux nouveaux cas particuliers.

Comme précédemment, on posera :

$$R = (x_k - \alpha)^2 + (y_{k,l} - \beta)^2 + (z_m - \gamma)^2 + \dots + (t_q - \varepsilon)^2,$$

Fig. 11.



$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ désignant, comme $x, y, z, \ldots, t$, les coordonnées d'un point intérieur à P, et on commencera par faire l'étude des séries ayant respectivement pour terme général :

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^{k+l+m+\ldots+q}\dfrac{x_k-\alpha}{R^{\frac{p}{2}}}, \\ (-1)^{k+l+m+\ldots+q}\dfrac{y_{k,l}-\beta}{R^{\frac{p}{2}}}, \\ (-1)^{k+l+m+\ldots+q}\dfrac{z_m-\gamma}{R^{\frac{p}{2}}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{k+l+m+\ldots+q}\dfrac{t_q-\varepsilon}{R^{\frac{p}{2}}}, \end{array}\right.$$

ou l'une des quantités qui se déduisent des précédentes par une ou deux dérivations relatives aux variables $x, y, z, \ldots, t$. On supprimera seulement dans chacune de ces séries les termes obtenus en associant à toutes les combinaisons possibles des valeurs 0, 1 et -1 des $p-2$ derniers indices $m, \ldots, q$, les treize combinaisons suivantes des deux premiers indices k, l :

$$\begin{array}{lll} l=0, 1 & \text{avec} & k=-2, -1, 0, 1, 2; \\ l=-1 & \text{avec} & k=-1, 0, 1. \end{array}$$

Les termes supprimés dans chaque série sont au nombre de $13 \times 3^{p-2}$. On voit facilement qu'après cette suppression un terme quelconque ne peut devenir infini, quelles que soient les positions occupées à l'intérieur de P et sur sa surface par les deux points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, z, \ldots, t$.

51. I. *Désignons par* $\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}$ *l'une quelconque des quantités* (30), *et donnons à* k *une valeur fixe. A partir de valeurs suffisamment grandes des entiers positifs* L$'$, L$''$, M$'$, M$''$, ..., Q$'$, Q$''$, *la quantité :*

$$(31)\quad \sum_{-(L'+l')}^{L''+l''}\sum_{-(M'+m')}^{M''+m''}\cdots\sum_{-(Q'+q')}^{Q''+q''}\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}-\sum_{-L'}^{L''}\sum_{-M'}^{M''}\cdots\sum_{-Q'}^{Q''}\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}$$

est plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée, indépendamment des valeurs attribuées aux entiers $l', l'', m', m'', \ldots, q', q''$, *et indépendamment des positions que peuvent occuper à l'intérieur de* P *ou sur sa surface les deux points* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ *et* $x, y, z, \ldots, t$.

Avec les termes de la série :

$$(32)\quad \sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\cdots\sum_{q=-\infty}^{q=\infty}\Lambda_{k,l,m,\ldots,q},$$

convenablement groupés, on peut former un nombre fini de séries partielles dans chacune desquelles le nombre des entrées ou des indices variables est au plus égal à $p - 1$, et dans chacune desquelles un indice variable quelconque prend des valeurs différentes de zéro et toutes de même signe. On peut donc, avec les termes de (31), former un nombre fini de groupes correspondant respectivement à ces séries partielles, et dès lors il suffira de démontrer que, dans les conditions énoncées, chacun de ces groupes est plus petit qu'une quantité donnée.

Soit g le nombre des entrées de la série partielle qui correspond à l'un quelconque de ces groupes, et supposons d'abord $g < p - 1$. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on donne des valeurs positives aux g premiers indices l, m, ..., n, et la valeur zéro à tous les suivants. Observons d'abord qu'en désignant par k_1, l_1, m_1, ... les valeurs absolues des entiers k, l, m, ..., et en supposant k_1 supérieur à l'unité, l_1, m_1, ... supérieurs à zéro, on a :

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} (k_1+2)\, a \geqq |\, x_k - \alpha \,| \geqq (k_1-2)\, a, \\ (l_1+1)\, a\sqrt{3} \geqq |\, y_{k,l} - \beta \,| \geqq (l_1-1)\, a\sqrt{3}, \\ (m_1+1)\, c \geqq |\, z_m - \gamma \,| \geqq (m_1-1)\, c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, l'une quelconque des quantités (30) est plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{R^{\frac{p-1}{2}}}$, et *à fortiori* que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \frac{1}{[(l-1)^2 + (m-1)^2 + \ldots + (n-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

ρ désignant la plus petite des quantités a, $a\sqrt{3}$, c, ..., e. Dès lors, la somme des termes du groupe considéré est plus petite que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}}\left\{\sum_1^{\infty}\cdots\sum_1^{\infty} \frac{1}{[(l-1)^2 + \ldots + (n-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}} - \sum_1^{L''}\cdots\sum_1^{N''} \frac{1}{[(l-1)^2 + \ldots + (n-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}}\right\},$$

quantité qui tend vers zéro pour L″, ..., N″ infinis, à cause de l'hypothèse $g < p - 1$.

Supposons $g = p - 1$. Si l'on a :

$$\Lambda_{k,l,m,\ldots,q} = (-1)^{k+l+m+\ldots+q}\, \frac{x_k - \alpha}{R^{\frac{p}{2}}},$$

le numérateur $x_k - \alpha$ a la même valeur dans tous les termes de la série (32), et reste fini indépendamment de la position occupée à l'intérieur de P par les deux points α, β, γ, ..., ε et x, y, z, ..., t. On a d'ailleurs :

$$\frac{1}{R^{\frac{p}{2}}} < \frac{1}{\rho^p} \cdot \frac{1}{[(l-1)^2 + \ldots + (q-1)^2]^{\frac{p}{2}}},$$

et dès lors le raisonnement s'achèvera comme nous venons de le faire. Si $\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}$ désigne, parmi les quantités (30), une de celles qui suivent la première, par exemple la seconde, on décomposera le groupe en files dont l'indice variable soit l, on verra (n° **43**, I) que la somme d'une file est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{[(m-1)^2 + \ldots + (q-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

et le raisonnement s'achèvera encore de même.

II. *La proposition précédente ne cesse pas d'être vraie, si* $\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}$ *désigne une dérivée partielle du premier ou du second ordre de l'une des quantités* (30).

Observons que les quantités x_j et $y_{j,0}$ (¹) sont des fonctions linéaires de x et y, et que dès lors, k étant donné, les quatre dérivées :

$$\frac{\partial x_k}{\partial x} = \lambda, \quad \frac{\partial y_{k,0}}{\partial x} = \rho, \quad \frac{\partial x_k}{\partial y} = \lambda', \quad \frac{\partial y_{k,0}}{\partial y} = \rho',$$

sont des constantes. On a d'ailleurs, en désignant par U l'une quelconque des quantités (30) :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \frac{\partial U}{\partial x_k} + (-1)^l \rho \frac{\partial U}{\partial y_{k,l}}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \lambda' \frac{\partial U}{\partial x_k} + (-1)^l \rho' \frac{\partial U}{\partial y_{k,l}}, \\ &\frac{\partial U}{\partial z} = (-1)^m \frac{\partial U}{\partial z_m}, \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = (-1)^q \frac{\partial U}{\partial t_q}, \end{aligned} \right.$$

puis :

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + 2\lambda\, \rho\, (-1)^l \frac{\partial^2 U}{\partial x_k\, \partial y_{k,l}} + \rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y_{k,l}^2}, \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \lambda'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + 2\lambda' \rho' (-1)^l \frac{\partial^2 U}{\partial x_k\, \partial y_{k,l}} + \rho'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y_{k,l}^2}, \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_m^2}, \ldots, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t_q^2}. \end{aligned} \right.$$

En conséquence, la proposition sera démontrée, si nous parvenons à faire voir qu'elle est vraie lorsque, au lieu d'attribuer à $\Lambda_{k,l,m,\ldots,q}$ la signification que nous lui avons donnée dans l'énoncé, on désigne par là la valeur absolue de l'une des quantités :

$$(36) \quad \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_{k,l}}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_m}, \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial t_q},$$

$$(37) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_k\, \partial y_{k,l}}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_{k,l}^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z_m^2}, \ldots, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t_q^2}.$$

Or, les dérivées partielles (36) et (37) sont respectivement inférieures en valeur

(¹) Voir la définition de j au n° **50**.

absolue aux deux quantités :

$$\frac{p}{R^{\frac{p}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{p(p+1)}{R^{\frac{p+1}{2}}},$$

d'où l'on déduira bien facilement le point dont il s'agit.

III. On conclut aisément de ce qui précède que :

A l'intérieur de P *et sur cette surface, la série* (32), *où l'on attribue à* $\Lambda_{k, l, m, \ldots, q}$ *l'une quelconque des valeurs* (30), *définit une fonction des coordonnées des deux points* $x, y, z, \ldots, t$ *et* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$, *qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres relatives aux variables* $x, y, z, \ldots, t$, *et qui en outre vérifie l'équation différentielle* $\Delta = 0$.

52. Dans une série à p entrées ayant pour terme général l'une des quantités (30), appelons S_k tout groupe de termes obtenu en donnant à l'indice k une même valeur, et aux autres indices toutes les valeurs possibles comprises entre des limites données, quelconques d'ailleurs. Je dis qu'*on peut assigner pour l'entier* k *une valeur absolue à partir de laquelle la valeur absolue de* S_k *est inférieure à une quantité donnée, indépendamment des limites entre lesquelles on fait varier les indices autres que* k, *et indépendamment des positions que peuvent occuper à l'intérieur de* P *et sur sa surface les deux points* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ *et* $x, y, z, \ldots, t$.

On partagera, comme précédemment, la série (32) en séries partielles, et la tranche limitée S_k en groupes correspondants. Soit g le nombre des entrées de la série partielle qui correspond à l'un d'entre eux, et supposons d'abord $g < p - 1$, en donnant par exemple des valeurs positives aux g premiers indices $l, m, \ldots, n$. La valeur absolue du terme général est plus petite que $\frac{1}{R^{\frac{p-1}{2}}}$, *à fortiori* que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \frac{1}{\left[(k-2)^2 + (l-1)^2 + \ldots + (n-1)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Donc la somme des termes du groupe est plus petite que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \sum_{l=1}^{l=\infty} \cdots \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\left[(k-2)^2 + (l-1)^2 + \ldots + (n-1)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}},$$

quantité qui tend vers zéro pour k infini, à cause de l'hypothèse $g < p - 1$.

Supposons $g = p - 1$. S'il s'agit d'une série ayant pour terme général la première des quantités (30), en décomposant le groupe en files dont l'indice variable soit l'un quelconque des indices $l, \ldots, q$, par exemple l, on constatera facilement que chaque file est plus petite en valeur absolue que son terme initial, plus petite *à fortiori* que

$$\frac{1}{\left[(x_k - \alpha)^2 + (z_m - \gamma)^2 + \ldots + (t_q - \varepsilon)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}},$$

et que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \cdot \frac{1}{[(k-2)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}};$$

que dès lors la somme des files est plus petite que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \cdots \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{[(k-2)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

quantité qui tend vers zéro pour k infini. S'il s'agit d'une série ayant pour terme général l'une des quantités (30) qui suivent la première, par exemple la seconde, on décomposera le groupe en files dont l'indice variable soit l, on verra, comme au n° **43**, I, que la somme d'une file est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{\rho^{p-1}} \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{[(k-2)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p-1}{2}}},$$

et le raisonnement s'achèvera de même.

53. *Désignons par* $\Lambda_{k,\,l,\,m,\ldots,\,q}$ *l'une quelconque des quantités* (30), *et posons :*

$$\varphi_k = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \cdots \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \Lambda_{k,l,\ldots,q};$$

à partir de valeurs suffisamment grandes des entiers K′ *et* K″, *la quantité :*

$$\sum_{-(\mathrm{K}'+k')}^{\mathrm{K}''+k''} \varphi_k - \sum_{-\mathrm{K}'}^{\mathrm{K}''} \varphi_k \tag{38}$$

est plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée, indépendamment des valeurs attribuées aux entiers k' et k'', et indépendamment des positions que peuvent occuper à l'intérieur de P *et sur sa surface les deux points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, z, \ldots, t$.*

La quantité (38) peut s'écrire :

$$\sum_{-(\mathrm{K}'+k')}^{-(\mathrm{K}'+1)} \varphi_k + \sum_{\mathrm{K}''+1}^{\mathrm{K}''+k''} \varphi_k,$$

et il suffit de démontrer que, dans les conditions ci-dessus énoncées, chacun de ces deux termes est plus petit qu'une quantité donnée θ.

Donnons aux entiers K″ et k'' des valeurs déterminées, quelconques d'ailleurs. La quantité $\sum_{\mathrm{K}''+1}^{\mathrm{K}''+k''} \varphi_k$ est une fonction de $x, y, z, \ldots, t$ finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'intérieur de P, et vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$. Il suffira donc, pour obtenir une limite supérieure de sa valeur absolue, de considérer, parmi les valeurs de la fonction, celles qui correspondent aux positions limites du point $x, y, z, \ldots, t$ situées sur la surface P.

Supposons d'abord que $x, y, z, \ldots, t$ tende vers un point de la surface situé dans l'un des plans :

$$y - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad y - x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad y + x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0,$$

dans le premier par exemple. Puis posons :

$$\psi_k = \sum_{-L'}^{L''} \sum_{-M'}^{M''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} A_{k,l,m,\ldots,q},$$

et

$$\varphi_k = \psi_k + \omega_k.$$

A chaque valeur de l'indice k compris entre $K'' + 1$ et $K'' + k''$ nous pouvons faire correspondre des valeurs de $L', L'', M', M'', \ldots, Q', Q''$ telles que la quantité $\sum_{K''+1}^{K''+k''} \omega_k$ soit plus petite en valeur absolue que $\frac{\theta}{3}$, indépendamment de la position des points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, z, \ldots, t$ à l'intérieur de P et sur sa surface (nº **51**). D'ailleurs, dans les limites où nous faisons varier k (c'est-à-dire de $K''+1$ à $K''+k''$), nous pouvons attribuer aux entiers $M', M'', \ldots, Q', Q''$ des valeurs indépendantes de k, et en outre assujettir les entiers L' et L'' aux conditions suivantes : pour toute valeur de k égale à un multiple de 6, nous donnerons au premier une valeur paire et au second une valeur impaire ; pour toute valeur de k égale à un multiple de 6 augmenté de 3, nous ferons l'inverse ; enfin, pour deux valeurs consécutives de k de la forme $3h + 1$ et $3h + 2$, nous donnerons à l'entier L' deux valeurs égales, ainsi qu'à l'entier L''. Ces entiers étant ainsi déterminés, groupons les termes $A_{k,l,m,\ldots,q}$ compris dans le symbole $\sum_{K''+1}^{K''+k''} \psi_k$ en files (limitées) dont l'indice variable soit l, et considérons les k'' files obtenues en attribuant aux indices $m, \ldots, q$ un système déterminé de valeurs particulières. A ces files de termes correspondent, d'après les formules (28), k'' files de points qui ne diffèrent les uns des autres que par leurs deux premières coordonnées, et qui dès lors, si on supprime par la pensée les $p - 2$ dernières, peuvent être représentées par une figure plane, obtenue en extrayant de la *fig. 11,* supposée indéfinie dans tous les sens, une portion convenablement limitée. Si l'on a égard à la manière dont nous avons déterminé L' et L'' pour chaque valeur de k comprise entre $K'' + 1$ et $K'' + k''$, et si d'autre part on examine attentivement la *fig. 11,* il est bien facile de se rendre compte : 1º que dans toute file pour laquelle la valeur de k est un multiple de 3, les points tendent à se réunir deux par deux lorsque le point $x, y, z, \ldots, t$ tend vers sa position limite, et qu'en conséquence les termes correspondants, précédés alternativement de signes contraires, ont une somme qui tend vers zéro; 2° que dans deux files consécutives correspondant à deux valeurs de k de la forme $3h + 1$ et $3h + 2$, les deux points fournis par une même valeur de l tendent aussi à se réunir, que les deux termes correspondants, précédés de signes contraires, ont une somme qui tend vers zéro, et que dès lors la somme des deux files tend vers zéro. Donc la somme des termes compris dans le symbole $\sum\limits_{K''+1}^{K''+k''} \psi_k$ tend vers zéro, sauf exception possible pour deux groupes de termes, savoir :

$$\sum_{-L'_1}^{L''_1} \sum_{-M'}^{M''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} A_{k,l,m,\ldots,q},$$

où l'on doit donner à k la valeur $K'' + 1$, et où L'_1, L''_1 désignent les valeurs de L', L'' qui correspondent à cette valeur de k; et

$$\sum_{-L'_2}^{L''_2} \sum_{-M'}^{M''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} A_{k,l,m,\ldots,q},$$

où l'on doit donner à k la valeur $K'' + k''$, et où L'_2, L''_2 désignent les valeurs de L', L'' qui correspondent à cette valeur de k. Si l'on désigne les sommes de ces deux groupes par $S_{K''+1}$ et $S_{K''+k''}$, on voit que sur toute l'étendue de la face considérée $\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0\right)$, la quantité $\sum\limits_{K''+1}^{K''+k''} \varphi_k$ est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{\theta}{3} + | S_{K''+1} | + | S_{K''+k''} |.$$

Par un raisonnement tout à fait semblable, on arriverait à la même conclusion, relativement aux faces situées dans les plans :

$$y - x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad y + x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Supposons maintenant que le point $x, y, z, \ldots, t$ tende vers un point de la surface P situé dans un des plans restants, par exemple dans le plan $z = \frac{c}{2}$. Si l'on pose :

$$\psi_k = \sum_{-L'}^{L''} \sum_{-2M'}^{2M''+1} \sum_{-N'}^{N''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} A_{k,l,m,\ldots,q},$$

$$\varphi_k = \psi_k + \omega_k,$$

on peut donner aux entiers L', L'', M', M'', ..., Q', Q'' des valeurs suffisamment grandes pour que la quantité $\sum\limits_{K''+1}^{K''+k''} \omega_k$ soit plus petite en valeur absolue que θ, indépendamment de la position des deux points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, z, \ldots, t$ à l'intérieur de P et sur cette surface. Les valeurs de ces entiers étant ainsi déterminées, groupons les termes de la série compris dans le symbole $\sum_{K''+1}^{K''+k''} \varphi_k$ en files dont l'indice variable soit m. Il est facile de voir que, dans chaque file, les sommes deux à deux des termes tendent vers zéro, lorsque le point $x, y, z, \ldots, t$ tend vers sa position limite. Donc, sur toute l'étendue de la face considérée, la quantité $\sum_{K''+1}^{K''+k''} \varphi_k$ est plus petite en valeur absolue que θ.

Si enfin on rapproche du numéro précédent les conclusions auxquelles nous venons d'arriver, on voit immédiatement qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier K'', la quantité dont il s'agit est plus petite en valeur absolue que θ, indépendamment de toutes les circonstances indiquées par l'énoncé.

54. *La proposition du numéro précédent ne cesse pas d'être vraie, lorsque* $\Lambda_{k, l, m, \ldots, q}$ *désigne une dérivée partielle du premier ordre de l'une des quantités* (30).

Si l'on désigne par U l'une quelconque des quantités (30), et si l'on remarque que les quantités λ, ρ, λ', ρ', variables avec k [formules (34)], ne possèdent qu'un nombre essentiellement limité de valeurs différentes, et par suite restent toujours finies, il est clair qu'il suffira de considérer les séries ayant respectivement pour terme général :

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad (-1)^l \frac{\partial U}{\partial y_{k,l}}, \quad (-1)^m \frac{\partial U}{\partial z_m}, \ldots, \quad (-1)^q \frac{\partial U}{\partial t_q}, \tag{39}$$

et de faire voir qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de K'', la somme des valeurs absolues des tranches de rangs $K''+1$, $K''+2$, ..., $K''+k''$ est plus petite dans chacune de ces séries qu'une quantité donnée, indépendamment de la valeur attribuée à l'entier k'', et des positions que peuvent occuper à l'intérieur de P et sur cette surface les deux points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, z, \ldots, t$. Or, chaque tranche constitue une série à $p-1$ entrées convergente ainsi que la série formée par les valeurs absolues de ses termes (n° **51**, II), et peut être considérée comme la somme d'un nombre fini de séries partielles dans chacune desquelles le nombre des entrées ou indices variables ne peut surpasser $p-1$, et dans chacune desquelles un indice variable quelconque prend des valeurs différentes de zéro et toutes de même signe. Dans les diverses tranches, nous appellerons *sous-tranches de même espèce* les séries partielles où les valeurs positives, les valeurs négatives et la valeur zéro sont attribuées respectivement aux mêmes indices, et nous démontrerons le point en question en substituant aux diverses tranches que nous avons à considérer les sous-tranches d'une même espèce quelconque. Nous supposerons de plus, pour fixer les idées, que les indices non nuls ont tous des valeurs positives.

1° Considérons d'abord des sous-tranches où le nombre des entrées g soit inférieur à $p-1$, et soient $l, m, \ldots, n$ les g indices qui reçoivent des valeurs positives. Chacune des quantités (39) étant plus petite en valeur absolue que $\frac{p}{R^{\frac{p}{2}}}$, et *à fortiori* que

$$\frac{p}{\rho^p}\frac{1}{[(k-2)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p}{2}}},$$

la somme des valeurs absolues des sous-tranches de rangs $K''+1$, $K''+2$, ..., $K''+k''$ est plus petite que

$$\frac{p}{\rho^p}\sum_{k=K''+1}^{k=\infty}\sum_{l=1}^{l=\infty}\cdots\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{[(k-2)^2+(l-1)^2+\ldots+(n-1)^2]^{\frac{p}{2}}},$$

quantité qui tend vers zéro pour K'' infini, à cause de la convergence de la série à termes positifs :

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty\cdots\sum_0^\infty\frac{1}{(k^2+l^2+\ldots+n^2)^{\frac{p}{2}}},$$

où le nombre des entrées $g+1$ est par hypothèse inférieur à p.

2° Supposons maintenant $g=p-1$. La première des quantités $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ [c'est-à-dire celle qui se déduit par dérivation de la première des quantités (30)] a pour valeur :

$$(-1)^{k+l+m+\ldots+q}\frac{R-p(x_k-\alpha)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}},$$

qui peut s'écrire :

$$(-1)^{k+l+m+\ldots+q}\frac{1}{R^{\frac{p}{2}}}+(-1)^{k+l+m+\ldots+q+1}\frac{p(x_k-\alpha)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}}.$$

Effectuons cette décomposition sur chacun des termes de la sous-tranche considérée, et dans l'une quelconque des deux sous-tranches partielles qui en résultent, groupons les termes par files dont l'indice variable soit l'un quelconque des indices $l, m, \ldots, q$, par exemple l. Dans chaque file, les termes sont alternativement de signes contraires et décroissent constamment et indéfiniment; chaque file est donc plus petite en valeur absolue que son terme initial, et *à fortiori* que

$$\frac{p}{\rho^p}\cdot\frac{1}{[(k-2)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p}{2}}};$$

par suite la somme des files contenues dans la sous-tranche est plus petite que

$$\frac{p}{\rho^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}\cdots\sum_{=1}^{q=\infty}\frac{1}{[(k-2)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p}{2}}},$$

et enfin la somme des valeurs absolues des sous-tranches plus petite que

$$\frac{p}{\rho^p}\sum_{k=K''+1}^{k=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\cdots\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{1}{[(k-2)^2+(m-1)^2+\ldots+(q-1)^2]^{\frac{p}{2}}}, \tag{40}$$

quantité qui tend vers zéro pour K″ infini.

g étant toujours égal à $p-1$, prenons, parmi les quantités $\frac{\partial U}{\partial x_k}$, l'une de celles qui suivent la première, par exemple celle-ci :

$$(-1)^{k+l+m+\ldots+q+1}\frac{p\,(x_k-\alpha)\,(y_{k,l}-\beta)}{R^{\frac{p+2}{2}}}.$$

Dans chaque sous-tranche, on disposera les termes par files dont l'indice variable soit l, et en posant $A = p\frac{(p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(p+2)^{\frac{p+2}{2}}}$, on verra comme au nº **44** (III), que chaque file est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{A}{[(x_k-\alpha)^2+(z_m-\gamma)^2+\ldots+(t_q-\varepsilon)^2]^{\frac{p}{2}}},$$

d'où l'on déduira que la somme des valeurs absolues des sous-tranches est plus petite que la quantité (40), multipliée par $\frac{A}{p}$.

La quantité $(-1)^l\frac{\partial U}{\partial y_{k,l}}$ a pour valeurs, suivant qu'elle provient des diverses quantités (30) :

$$(-1)^{k+m+\ldots+q+1}\frac{p\,(x_k-\alpha)\,(y_{k,l}-\beta)}{R^{\frac{p+2}{2}}},$$

$$(-1)^{k+m+\ldots+q}\left[\frac{1}{R^{\frac{p}{2}}}-\frac{p\,(y_{k,l}-\beta)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}}\right],$$

$$(-1)^{k+m+\ldots+q+1}\frac{p\,(z_m-\gamma)\,(y_{k,l}-\beta)}{R^{\frac{p+2}{2}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on considère parmi ces quantités l'une quelconque de celles qui suivent les deux premières, la troisième par exemple, on disposera les termes de chaque sous-tranche par files dont l'indice variable soit m, et on fera un raisonnement analogue au précédent. Si, effectuant sur la seconde la décomposition indiquée, on considère l'une quelconque des trois quantités :

$$(-1)^{k+m+\ldots+q+1}\frac{p\,(x_k-\alpha)\,(y_{k,l}-\beta)}{R^{\frac{p+2}{2}}},$$

$$(-1)^{k+m+\ldots+q}\frac{1}{R^{\frac{p}{2}}},$$

$$(-1)^{k+m+\ldots+q+1}\frac{p\,(y_{k,l}-\beta)^2}{R^{\frac{p+2}{2}}},$$

on groupera les termes de chaque sous-tranche par files dont l'indice variable soit l'un des $p - 2$ indices $m, \ldots, q$, et dans chacune des files ainsi obtenues la valeur absolue du terme général décroîtra constamment et indéfiniment, d'où résulte que chaque file sera plus petite en valeur absolue que son terme initial (1).

S'il s'agit enfin de l'une des quantités $(-1)^m \frac{\partial U}{\partial z_m}$, etc., on fera des raisonnements analogues à ceux qui précèdent.

55. *La proposition du n° **53** ne cesse pas d'être vraie, lorsque $\Lambda_{k,\,l,\,m,\ldots,\,q}$ désigne une dérivée partielle du second ordre de l'une des quantités* (30).

On se reportera aux formules (35), et on fera une démonstration analogue à celle du n° **54**, 1°.

De la proposition précédente, et des numéros **51** (III), **53** et **54** on déduira facilement que :

A l'intérieur de la surface P *et sur cette surface même, la série $\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k$, où φ_k a le même sens qu'au n° **53**, définit une fonction des coordonnées des deux points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ et $x, y, z, \ldots, t$, qui reste finie et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres relatives à $x, y, z, \ldots, t$, et qui vérifie en outre l'équation différentielle $\Delta = 0$* (2).

56. Désignons par $\Lambda_{k,\,l,\ldots,\,q}$ l'une quelconque des quantités (30), et posons :

$$f = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \varphi_k,$$

$$\varphi_k = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \cdots \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \Lambda_{k,l,\ldots,q},$$

en supposant supprimés dans quelques tranches certains termes, indiqués plus haut (n° **50**); enfin, attribuons aux lettres $\sigma, \mu, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon, \alpha', \beta', \ldots, \varepsilon'$ les mêmes significations qu'au n° **47**, avec cette seule différence que σ, au lieu de désigner une surface fermée intérieure à un parallélipipède rectangle, désignera une surface fermée intérieure à P. Il résulte successivement du n° **53** et du n° **51** que l'on a :

$$\int \mu\,\alpha'\, f\, d\sigma = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int \mu\,\alpha'\, \varphi_k\, d\sigma,$$

$$\int \mu\,\alpha'\, \varphi_k\, d\sigma = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \cdots \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \int \mu\,\alpha'\, \Lambda_{k,l,\ldots,q}\, d\sigma,$$

(1) Il est bon de remarquer que cette partie de la démonstration suppose le nombre des dimensions de l'espace au moins égal à 3; mais cette lacune est de peu d'importance, M. Schwarz ayant résolu le problème intérieur par une méthode fort élégante dans le cas d'un polygone limité par des droites et des arcs de cercle.

(2) On supprimera seulement dans quelques tranches certains termes indiqués plus haut (n° **50**).

les intégrations s'étendant à toute la surface σ, et que par conséquent la série à p entrées :

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{\infty}\int \mu\,\alpha'\, \Lambda_{k,l,\ldots,q}\, d\sigma$$

définit, quand on y supprime certains termes, une fonction de $x, y, \ldots, t$, finie et continue à l'intérieur de P et sur cette surface, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant l'équation différentielle $\Delta = 0$. On verra dès lors qu'il en est de même de la série :

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{k+l+\cdots+q}\,\mathrm{W}_{k,l,\ldots,q}, \tag{41}$$

et si l'on rétablit maintenant dans cette dernière les termes supprimés, la fonction ainsi obtenue est finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifie l'équation différentielle $\Delta = 0$, tant à l'intérieur de σ que dans tout continuum de points situé entre σ et P.

En outre, on déduira bien facilement du n° **51** (I) et du n° **53** les deux propositions suivantes :

1° *A partir de valeurs suffisamment grandes des entiers* $\mathrm{L}', \mathrm{L}'', \ldots, \mathrm{Q}', \mathrm{Q}''$, *la quantité :*

$$\sum_{-(\mathrm{L}'+l')}^{\mathrm{L}''+l''}\cdots\sum_{-(\mathrm{Q}'+q')}^{\mathrm{Q}''+q''}(-1)^{k+l+\cdots+q}\,\mathrm{W}_{k,l,\ldots,q}-\sum_{-\mathrm{L}'}^{\mathrm{L}''}\cdots\sum_{-\mathrm{Q}'}^{\mathrm{Q}''}(-1)^{k+l+\cdots+q}\,\mathrm{W}_{k,l,\ldots,q},$$

où l'on attribue à k *une valeur fixe, est plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée, indépendamment des valeurs attribuées aux entiers* $l', l'', \ldots, q', q''$, *et de la position occupée à l'intérieur de* P *et sur cette surface par le point* $x, y, \ldots, t$.

2° *Si l'on pose :*

$$u_k(x, y, \ldots, t) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty}\cdots\sum_{q=-\infty}^{q=\infty}(-1)^{k+l+\cdots+q}\,\mathrm{W}_{k,l,\ldots,q},$$

la quantité :

$$\sum_{-(\mathrm{K}'+k')}^{\mathrm{K}''+k''}u_k(x, y, \ldots, t)-\sum_{-\mathrm{K}'}^{\mathrm{K}''}u_k(x, y, \ldots, t)$$

est, à partir de valeurs suffisamment grandes des entiers K' *et* K'', *plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée, indépendamment des valeurs attribuées aux entiers* k' *et* k'', *et de la position occupée à l'intérieur de* P *et sur cette surface par le point* $x, y, \ldots, t$.

57. Posons :

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}u_k(x, y, \ldots, t).$$

1° *Si l'on désigne par s un point commun aux deux surfaces* P *et* σ, *et par* μ_s *la valeur prise par la quantité* μ *au point s, la fonction* $F(x, y, \ldots, t)$ *tend vers* $2S\mu_s$ *lorsque le point* $x, y, \ldots, t$ *tend vers s en restant constamment intérieur à* σ.

Supposons d'abord que le point s soit situé dans l'un des trois plans :

$$y - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad y - x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad y + x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0,$$

par exemple dans le premier, et posons :

$$F(x, y, z, \ldots, t) = \sum_{-3K'}^{3K''} u_k(x, y, z, \ldots, t) + \omega(x, y, z, \ldots, t),$$

puis :

$$\tau_k(x, y, z, \ldots, t) = \sum_{-L'}^{L''} \cdots \sum_{-Q'}^{Q''} (-1)^{k+l+\ldots+q} W_{k,l,\ldots,q},$$

et

$$u_k(x, y, z, \ldots, t) = \tau_k(x, y, z, \ldots, t) + \psi_k(x, y, z, \ldots, t),$$

d'où résulte :

$$F(x, y, z, \ldots, t) = \sum_{-3K'}^{3K''} \tau_k + \sum_{-3K'}^{3K''} \psi_k + \omega. \tag{42}$$

D'après ce qui précède, pour des valeurs suffisamment grandes des entiers K′ et K″, ω est plus petit en valeur absolue qu'une quantité donnée $\frac{\theta}{3}$, indépendamment de la position du point $x, y, z, \ldots, t$ à l'intérieur de P et sur cette surface; donnons à K′ et K″ des valeurs satisfaisant à cette condition, et laissons-les fixes. A chaque valeur de k comprise entre $-3K'$ et $3K''$ nous pouvons faire correspondre des valeurs de L′, L″, M′, M″, ..., Q′, Q″, de telle manière que la quantité $\sum_{-3K'}^{3K''} \psi_k$ soit plus petite en valeur absolue que $\frac{\theta}{3}$, indépendamment de la position du point $x, y, z, \ldots, t$ à l'intérieur de P et sur cette surface. D'ailleurs, dans les limites où varie k, nous pouvons attribuer à M′, M″, ..., Q′, Q″ des valeurs indépendantes de k, et en outre assujettir les entiers L′ et L″ aux conditions suivantes : pour toute valeur de k égale à un multiple de 6, nous donnerons au premier une valeur paire et au second une valeur impaire; pour toute valeur de k égale à un multiple de 6 augmenté de 3, nous ferons l'inverse; enfin, pour deux valeurs consécutives de k de la forme $3h + 1$ et $3h + 2$, nous donnerons à L′ deux valeurs égales, ainsi qu'à L″. Les valeurs de ces entiers étant ainsi déterminées, laissons-les fixes. Puis, considérant les termes de la série (41) compris dans la formule $\sum_{-3K'}^{3K''} \tau_k$, groupons-les par files (limitées) dont l'indice variable soit l. Si l'on considère l'ensemble des files obtenues en attribuant aux $p - 2$ indices

$m, \ldots, q$ un système déterminé de valeurs particulières, on verra facilement (comme au n° **53**) que les sommes deux à deux des termes convenablement groupés tendent vers zéro lorsque le point $x, y, z, \ldots, t$ tend vers s, et qu'il n'y a d'exception que pour les deux termes situés dans la file $k = 0$, $m = 0, \ldots, q = 0$, et correspondant respectivement à $l = 0$ et $l = 1$, dont la somme tend vers $2S\mu_s$. D'après cela, dans le second membre de la formule (42), le premier terme diffère de $2S\mu_s$ d'une quantité moindre que $\frac{\theta}{3}$, pour toutes positions du point $x, y, z, \ldots, t$ intérieures à σ et suffisamment rapprochées de s; par suite $F(x, y, z, \ldots, t)$ diffère de $2S\mu_s$ d'une quantité moindre que θ.

On ferait un raisonnement analogue en supposant le point s situé dans le plan $y - x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$, ou dans le plan $y + x\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$.

Supposons enfin que le point s soit situé dans l'un des plans restants, par exemple dans le plan $z = \frac{c}{2}$. Posons :

$$F(x, y, z, \ldots, t) = \sum_{-K'}^{K''} u_k(x, y, z, \ldots, t) + \omega(x, y, z, \ldots, t),$$

puis :

$$\tau_k(x, y, z, \ldots, t) = \sum_{-L'}^{L''} \sum_{-2M'}^{2M''+1} \sum_{-N'}^{N''} \ldots \sum_{-Q'}^{Q''} (-1)^{k+l+m+n+\ldots+q}\, W_{k+l+m+n+\ldots+q},$$

et

$$u_k(x, y, z, \ldots, t) = \tau_k(x, y, z, \ldots, t) + \psi_k(x, y, z, \ldots, t),$$

d'où résulte :

$$F(x, y, z, \ldots, t) = \sum_{-K'}^{K''} \tau_k + \sum_{-K'}^{K''} \psi_k + \omega.$$

Donnons à K' et K'' des valeurs telles que ω soit plus petit en valeur absolue que $\frac{\theta}{3}$, indépendamment de la position du point $x, y, z, \ldots, t$ à l'intérieur de P et sur cette surface; puis à $L', L'', M', M'', \ldots, Q', Q''$ des valeurs telles que la quantité $\sum_{-K'}^{K''} \psi_k$ satisfasse à la même condition; et laissons fixes tous ces entiers ainsi déterminés. Si l'on groupe les termes compris dans la formule $\sum_{-K'}^{K''} \tau_k$ par files dont l'indice variable soit m, on voit facilement que dans chaque file les sommes deux à deux de ces termes tendent vers zéro, à l'exception des deux termes situés dans la file $k = 0$, $l = 0$, $n = 0, \ldots, q = 0$, et correspondant respectivement à $m = 0$ et $m = 1$, dont la somme tend vers $2S\mu_s$. On en déduira comme précédemment le point à démontrer.

2° *Si l'on désigne par* s *un point commun à* σ *et à* P, *la fonction* $F(x, y, z, \ldots, t)$

tend vers zéro, lorsque le point $x, y, z, \ldots, t$, intérieur à P, *tend vers s en restant constamment extérieur à* σ.

De même, si l'on désigne par s' un point situé sur P, *mais non sur* σ, *la fonction* $F(x, y, z, \ldots, t)$ *tend vers zéro lorsque le point* $x, y, z, \ldots, t$ *tend vers s'.*

Il suffit de répéter la démonstration précédente, en observant seulement que les deux termes dont la somme tendait tout à l'heure vers $2S\mu_s$, ont maintenant une somme qui tend vers zéro.

3° *Soient* $x, y, z, \ldots, t$ *et* $x', y', z', \ldots, t'$ *deux points intérieurs à* P, *et s un point de la surface* σ; *la différence* $F(x, y, z, \ldots, t) - F(x', y', z', \ldots, t')$ *tend vers* $2S\mu_s$, *lorsque les deux points en question tendent vers s, le premier en restant constamment intérieur à* σ, *le second en lui restant constamment extérieur.*

On fera une démonstration analogue à celle du n° **48**, 3°.

58. Si on suppose que σ coïncide avec P, la fonction $\frac{1}{2S} F(x, y, z, \ldots, t)$ résout le problème intérieur pour la surface P.

Si aux inégalités (26) qui définissent les points intérieurs à P, on ajoute l'inégalité $x > 0$, on obtient une nouvelle surface fermée P′ (1); et en supposant que la surface σ des numéros précédents coïncide avec P′, la fonction :

$$\frac{1}{2S}\left[F(x, y, z, \ldots, t) - F(-x, y, z, \ldots, t)\right]$$

résout évidemment le problème intérieur pour P′.

(1) Dans l'espace à deux dimensions, on obtient un triangle rectangle où les angles aigus sont respectivement égaux à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$; dans l'espace à trois dimensions, un prisme droit ayant pour base le triangle précédent.

Vu et approuvé :

Paris, le 27 novembre 1885.

Pour le Doyen de la Faculté des Sciences, empêché,

E. HÉBERT.

Vu et permis d'imprimer :

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Équations générales de la Mécanique; intégrale d'Hamilton; théorème de Poisson.

Vu et approuvé :
Paris, le 27 novembre 1885.
Pour le Doyen de la Faculté des Sciences, empêché,
E. HÉBERT.

Vu et permis d'imprimer :
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.