HF uf 166. (44) 1 -4°

9945

N° D'ORDRE :
1199.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR M. LUDOVIC ZORETTI.
Agrégé-Préparateur à l'École Normale.

1re THÈSE. — SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES QUI POSSÈDENT UN ENSEMBLE PARFAIT DISCONTINU DE POINTS SINGULIERS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 janvier 1905, devant la Commission d'examen.

MM. PAUL APPELL, *Président.*
PAINLEVÉ,
HADAMARD, } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
Quai des Grands-Augustins, 55.
—
1905

DONS
N° 49945

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	DARBOUX, professeur	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	TROOST, CH. WOLF.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Enseignemt P. C. N.).
	P. JANET	Physique.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	P. CURIE	Physique.
	TANNERY	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY	Application de l'analyse à la géométrie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	N	Chimie biologique.
	N	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	LEDUC	Physique.
	HADAMARD	Calcul différentiel et intégral.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

36121 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

A MA MÈRE.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES

QUI POSSÈDENT

UN ENSEMBLE PARFAIT DISCONTINU DE POINTS SINGULIERS.

Introduction.

Les immortels travaux de Weierstrass sur la théorie des fonctions (1) avaient ouvert la voie aux recherches si fécondes et si intéressantes de M. G. Cantor sur la théorie des ensembles. En effet, la notion du *domaine d'existence* d'une fonction analytique s'associait naturellement à la notion de *point singulier* de cette fonction, c'est-à-dire de point *exclu* de ce domaine d'existence. Il était indispensable de classer tout d'abord ces ensembles de points avant même d'étudier l'allure de la fonction au voisinage de l'un d'eux. Cette classification est fournie d'une manière aussi satisfaisante que possible par la théorie des ensembles.

(1) *Zur Functionenlehre Monatsberichte,* 1880.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

La plus simple de toutes ces singularités est le point essentiel isolé de Weierstrass. Au voisinage d'un tel point, la fonction est complètement indéterminée, c'est-à-dire s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée. On sait même qu'elle prend une infinité de fois toute valeur donnée sauf exception pour deux valeurs au plus (1). Ces résultats ont été complétés par les travaux de MM. Poincaré, Hadamard, Borel et Boutroux (2).

Ces résultats entraînent une conséquence immédiate relative aux points limites de points singuliers isolés. Quelque compliquées que soient les singularités voisines du point étudié, qu'il appartienne même à une coupure ou à un ensemble parfait, pourvu qu'il existe dans son voisinage une infinité de points isolés tendant vers lui, les résultats précédents subsistent.

Deux cas ne rentrent pas dans celui-là. Le premier est celui où le point appartient à une coupure. Dans ce cas toutes les circonstances possibles peuvent se présenter, depuis l'indétermination complète jusqu'à la continuité de la fonction et de toutes ses dérivées (d'un côté de la coupure). Le seul cas qui reste en suspens est donc celui d'un ensemble parfait *discontinu* de points singuliers.

Tout ce que l'on peut affirmer dans ce cas c'est que, dans un cercle entourant le point étudié, il est impossible que la fonction soit continue et ait une dérivée. Dire cela, c'est dire que la fonction n'est pas holomorphe dans le cercle ou, ce qui revient au même, c'est dire qu'elle y admet un point singulier. Mais la question reste entière. Doit-on penser qu'ici encore toutes les circonstances peuvent se présenter comme dans le cas de la coupure, ou au contraire peut-on espérer qu'il existe un théorème aussi précis que celui de Weierstrass ou de M. Picard? L'indétermination est-elle complète ou incomplète? Peut-il y avoir, au contraire, continuité, la singularité ne se manifestant que sur la dérivée? Le seul fait qu'une telle question soit encore posée au début même de la théorie des fonctions indique assez combien la solution de ce problème doit présenter de difficultés.

(1) PICARD, *Annales de l'École Normale,* 1880.

(2) POINCARÉ, *Bulletin de la Société mathématique,* 1883. — HADAMARD, *Journal de Mathématiques,* 1892-1893. — BOREL, *Fonctions entières.* Gauthier-Villars, 1899. — BOUTROUX, Thèse, *Acta,* t. XXVIII.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Je suis parvenu dans cet ordre d'idées à un résultat qui, bien qu'incomplet encore, me paraît digne d'intérêt et susceptible d'applications : *Étant donnée une fonction uniforme qui dans une aire* Δ (*si petite qu'elle soit*) *admet un ensemble discontinu de singularités, la fonction est certainement discontinue en quelque point de cette aire.* Je n'ai pu, malgré tous mes efforts, démontrer que l'indétermination de la fonction est complète, quoique cette proposition paraisse bien vraisemblable.

La démonstration que j'ai donnée paraîtra bien compliquée au premier abord, mais il est facile de s'assurer que cette complication est dans la nature même de la question. La difficulté principale que l'on rencontre réside dans la distinction des ensembles continus et des ensembles parfaits discontinus. On se rendra compte en lisant la première Partie, consacrée à l'étude de ces ensembles, que leurs propriétés sont très voisines.

J'ajoute que, contrairement à ce qu'on pourrait penser, les fonctions affectées de telles singularités se présentent dans les questions les plus naturelles. Telles sont, par exemple, les fonctions fuchsiennes de la troisième famille, qui sont définies à la fois par des propriétés fonctionnelles très simples et par une équation différentielle algébrique du troisième ordre.

Mais un problème beaucoup plus simple encore où le théorème énoncé plus haut joue un rôle essentiel est un problème indiqué jadis par M. Painlevé concernant les équations différentielles du premier ordre.

Étant donnée une équation différentielle du premier ordre algébrique en y' et en y et analytique en x, M. Painlevé a élucidé le cas où l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à un nombre *déterminé* n de branches, en entendant par là que, sauf peut-être pour une infinité *dénombrable* de valeurs de la constante, une intégrale quelconque a n branches. Il a démontré que l'intégrale dépend alors algébriquement de la constante et se ramène à une équation de Riccati ou aux quadratures.

Il semble naturel de donner au problème une autre forme et d'étudier le cas où l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches *au plus*. Si on ne fait aucune hypothèse sur les coefficients de l'équa-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

tion, l'intégrale ne rentre pas nécessairement dans la catégorie précédente; même dans le cas de $n = 2$, elle pourra être une fonction transcendante (à une infinité de déterminations) *de la constante,* et, suivant que cette constante sera dans telle ou telle région du plan, la fonction $y(x)$ sera une fonction uniforme ou une fonction à deux branches.

Mais, si nous imposons aux coefficients la condition d'être *algébriques* en x, le deuxième problème rentre-t-il dans le premier? Autrement dit, la question qui se pose est la suivante : *Étant donnée une équation du premier ordre algébrique en y', y, étudier le cas où toute intégrale $y(x)$ est une fonction à n branches au plus.* Tel est le problème posé par M. Painlevé et que je suis parvenu à résoudre complètement, en faisant jouer à mon théorème un rôle fondamental.

Je signale encore quelques autres applications et certaines questions non encore résolues se rattachant directement au problème traité dans ce Mémoire.

Ces applications suffiront, je pense, à montrer l'utilité de ce théorème et à appeler l'attention des chercheurs sur l'intérêt qu'il y aurait à le compléter.

Je ne veux pas terminer ce travail sans adresser mes remerciements à tous mes maîtres de l'École Normale dont la sollicitude à mon égard ne s'est jamais ralentie et dont les encouragements m'ont été si précieux. D'ailleurs, dans ce milieu normalien tout ce qui vous entoure est un enseignement, et je suis heureux de pouvoir dire le bénéfice que j'ai retiré des quelques années que j'y ai passées.

CHAPITRE I.

LES ENSEMBLES PARFAITS PLANS.

1. La plupart des géomètres qui se sont occupés des ensembles parfaits se sont, en général, limités au cas des ensembles rectilignes. Un grand nombre de propriétés de ceux-ci pouvaient d'ailleurs s'étendre immédiatement au cas de plusieurs dimensions. Mais une étude particulière de ce cas révèle l'existence de certaines propriétés nouvelles que l'étude des ensembles rectilignes ne pouvait faire con-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

naître, parce qu'elles perdaient, pour ceux-ci, leur signification ou leur intérêt. Une étude approfondie des ensembles à deux dimensions, par exemple, est à désirer; elle serait certainement féconde en surprises et en applications, comme d'ailleurs tout ce qui touche aux ensembles. Il ne faut pas se dissimuler que les difficultés y seraient nombreuses, et l'extrême rigueur que nécessitent les raisonnements n'est pas une des moindres.

Les quelques pages qui vont suivre n'ont pas la prétention d'être même l'ébauche d'une telle étude. J'ai seulement dû préciser, dans leur énoncé ou leur démonstration, certaines propriétés qui m'étaient indispensables dans la suite. J'y ai joint la démonstration de quelques propositions nouvelles qui m'ont paru intéressantes.

J'appelle ensemble *fermé* un ensemble *qui contient* son dérivé, et ensemble *parfait* un ensemble *identique* à son dérivé. On peut donner de ces ensembles un grand nombre d'exemples. Mais il est important d'indiquer un procédé permettant de les construire *tous*.

Soient E un ensemble *fermé*, a un point extérieur à E. On peut entourer a d'un cercle ne contenant à son intérieur (1) aucun point de E. Le rayon de ce cercle a une limite supérieure ρ. Sur le cercle C de centre a et de rayon ρ il y a au moins un point de E, car, dans le cas contraire, tout point de C serait centre d'un cercle ne contenant aucun point de E et un raisonnement bien connu montrerait que la limite inférieure des rayons de ces cercles n'est pas nulle. Il y aurait donc un cercle de centre a et de rayon plus grand que ρ ne contenant aucun point de E.

Ceci posé, supposons que E soit *borné* (2). Je dis qu'on peut obtenir E en excluant du plan les points intérieurs à un au moins des cercles d'une suite dénombrable de cercles.

D'abord on peut trouver un cercle C de rayon R contenant à son intérieur tous les points de E. J'exclus les points extérieurs à C. A tout point restant qui n'appartient pas à E répond, on vient de le voir, un nombre r que l'on peut appeler la *distance de ce point à l'ensemble* E.

---

(1) Le mot *intérieur* est toujours pris dans son sens étroit.

(2) On peut toujours se ramener à ce cas pourvu que E ne comprenne pas tout le plan.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Considérons ceux de ces points pour lesquels on a $r \geq \frac{R}{2}$. Prenons-en un au hasard. Traçons le cercle qui lui correspond; prenons-en un autre sur ce cercle ou à son extérieur, traçons le cercle qui lui correspond et ainsi de suite. Nous tracerons ainsi un nombre fini de cercles car les distances de leurs centres sont toutes supérieures à $\frac{R}{2}$. Pour tous les points de C qui ne sont pas intérieurs à un au moins d'entre eux le nombre r est inférieur à $\frac{R}{2}$. Considérons ceux pour lesquels il est $\geq \frac{R}{4}$. Opérons de même pour ces points. En considérant ainsi successivement ceux des points restants pour lesquels le nombre r est supérieur à $\frac{R}{2^3}, \frac{R}{2^4} \cdots$ nous obtenons à chaque fois un nombre fini de cercles et par suite une infinité dénombrable de cercles. Tout point intérieur à C n'appartenant pas à E est intérieur à un au moins d'entre eux, car si le nombre r qui lui correspond est supérieur à $\frac{R}{2^n}$ il ne peut être extérieur aux cercles qui se trouvent avoir été tracés après la $n^{\text{ième}}$ opération. D'ailleurs, un point de E ne peut être intérieur à aucun de ces cercles. Donc l'ensemble des points restant se confond avec E.

Inversement, si l'on exclut d'un cercle C les points intérieurs à un des cercles d'une infinité dénombrable de cercles, l'ensemble restant contient son dérivé, car si un point est exclu il en est de même d'un certain entourage de ce point.

2. Cette démonstration appelle plusieurs remarques. D'abord nous pouvons répéter l'observation faite par M. Borel dans le cas des ensembles rectilignes sur l'étendue de la restriction que l'on apporte à la notion d'ensemble en se bornant aux ensembles fermés. En second lieu, il y a un rapprochement intéressant à faire du théorème précédent et de celui qui a été démontré par MM. Volterra et Poincaré (1) sur les fonctions analytiques. *Dans le cas des fonctions uniformes* ce

(1) POINCARÉ, *Rendiconti di Palermo,* t. II. — VOLTERRA, *Atti dei Lincei. Rendiconti,* t. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

théorème nous apprend qu'on peut tracer une infinité dénombrable de cercles contenant à leur intérieur les points réguliers de la fonction et à leur extérieur ou sur leur contour les points singuliers. Mais il ne faut pas conclure à l'identité des deux résultats précédents, car un ensemble fermé quelconque ne peut pas toujours constituer l'ensemble singulier d'une fonction uniforme. Il suffit, pour s'en persuader, de considérer l'ensemble des points situés sur trois cercles concentriques. On peut penser qu'en considérant *plusieurs* fonctions analytiques on arrivera à démontrer notre théorème; cela est probable, mais il faudrait alors en considérer une infinité dénombrable et, d'autre part, supposer connu le théorème analogue relatif aux ensembles rectilignes. Il est évidemment plus simple de procéder directement.

3. Je m'attacherai surtout à la distinction entre les ensembles parfaits *continus* et *discontinus*. Un ensemble fermé étant égal à un ensemble parfait augmenté d'un ensemble dénombrable (1), il est bien naturel de se limiter aux ensembles parfaits. D'ailleurs, si l'on raisonnait sur les ensembles fermés, on n'exclurait pas le cas des ensembles dénombrables et il pourrait en résulter une gêne dans les démonstrations.

M. Cantor appelle *continu* un ensemble parfait bien enchaîné (*zusammenhängend*), c'est-à-dire tel qu'étant donnés deux points de l'ensemble et un nombre ε, on peut trouver une succession de points de l'ensemble, contenant ces deux points, tels que la distance de chacun au précédent et au suivant soit inférieure à ε, et cela quel que soit ε. Si, pour deux points au moins de l'ensemble, cette propriété n'a pas lieu, l'ensemble est *mal enchaîné*. Un ensemble parfait mal enchaîné est dit *discontinu*. Nous dirons qu'un ensemble parfait est *partout discontinu* quand la propriété précédente n'a lieu pour aucun couple de deux points.

Un continu est dit *superficiel* quand il contient des points non frontières, c'est-à-dire des points dont un certain entourage appartient à l'ensemble; il est *linéaire* quand tous ses points sont frontières. Ce n'est pas ici le lieu d'étudier les rapports entre les notions vulgaires

(1) BENDIXSON, *Acta mathematica*, t. II.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

de *ligne* et d'*aire* et les notions d'ensembles continus linéaires ou superficiels. Les travaux de M. Cantor ont montré que, si le continu et le discontinu peuvent, par la notion de puissance, se ramener « à une commune mesure », leur distinction permet d'élucider la notion ordinaire de continu et que ce n'est là « ni une idée indécomposable, ni une intuition *a priori* ». Je m'autoriserai de ces travaux pour appeler *ligne cantorienne* ou même *ligne* un ensemble continu linéaire.

Je démontrerai d'abord un théorème qui joue dans la suite un rôle important et qui a été démontré par M. Painlevé dans son Cours de l'Ecole Normale en 1902. Ce théorème étant inédit, je crois devoir le démontrer ici en le complétant sur certains points.

Considérons un ensemble de points E_α dépendant d'un paramètre α que nous supposerons réel et qui tendra vers α_0. Je dirai qu'un point a appartient à l'ensemble limite de E_α si, quelque petits que soient les deux nombres r et ε, sous la condition $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, le cercle de centre a et de rayon r renferme des points appartenant à certains des E_α. L'ensemble des points a s'il en existe est l'ensemble limite E. Je dis que *si les ensembles* E_α *sont continus et si chacun d'eux contient tous ceux qui correspondent aux valeurs ultérieures de* α, *l'ensemble limite* E *est continu ou se réduit à un point.*

Snpposons que E comprenne au moins deux points a et b. L'ensemble E étant fermé, il suffira de montrer qu'il est bien enchaîné. Or, s'il était mal enchaîné, on pourrait trouver un nombre ε tel qu'en traçant tous les cercles de rayon ε ayant pour centres les différents points de E, on ne puisse trouver un ensemble continu de points joignant a et b et restant à l'intérieur de ces cercles. On ne pourra donc pas non plus trouver un continu dont tous les points soient intérieurs à l'un au moins de ces cercles, et joignant deux points a_1, b_1 distants l'un de a l'autre de b de moins de ε. Or, pourvu que α soit suffisamment voisin de α_0, l'ensemble E_α contiendra deux tels points (E_α contient même a et b). Et il y aurait donc des points de E extérieurs à tous ces cercles ou sur leur contour, ce qui est absurde. Le théorème est donc démontré.

La forme même sous laquelle j'ai présenté la démonstration montre qu'il est inutile de supposer que tous les ensembles E_α contiennent les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

points a et b. Pour qu'elle subsiste néanmoins il est nécessaire qu'il existe au moins un point a qui soit limite pour *tous* les E_α; j'entends par là que pour *toutes* les valeurs de α suffisamment voisines de α_0 les E_α ont des points aussi voisins qu'on veut de a. Alors E, s'il ne se réduit pas à a, contient au moins un autre point b et il n'est pas nécessaire pour le raisonnement que b soit limite de *tous* les E_α; il suffit qu'il existe *des* valeurs de α tendant vers α_0 telles que les E_α correspondants aient des points tendant vers b.

Mais, s'il n'existe aucun point a limite de *tous* les E_α, le théorème peut être en défaut. Par exemple, si E_α est un cercle de rayon α ayant pour centre le point *zéro* si α est commensurable, le point *un* si α est incommensurable, l'ensemble E se compose des deux points 0, 1 quand α tend vers zéro.

J'aurai besoin, dans la suite, du théorème complété comme je viens de le faire. Quant au théorème énoncé en premier lieu, il permet d'abréger une démonstration due à M. Phragmèn (1) du théorème suivant : *Si* P *est la frontière d'un continuum* A, *et s'il existe des points* extérieurs *à* A, *une partie de* P *est continue*. Il est facile au moyen du théorème précédent de compléter cet énoncé et de mettre à l'abri de toute critique certains points de rigueur de la démonstration de M. Phragmèn. Voici le résultat auquel on parvient : Soit un continuum A ou plutôt appelons A le dérivé d'un continuum donné. L'ensemble des points frontières de A est constitué par une infinité *dénombrable* de *lignes*, et si L est une de ces lignes, on peut trouver deux points a, b dont un seul appartenant à A qu'il est impossible de joindre sans rencontrer L. Autrement dit, L est une ligne fermée. En particulier, si A est *borné*, l'ensemble des points extérieurs à A forme plusieurs continua dont l'un, B, comprend le point à l'infini ; la frontière de ce continuum B, qui est une portion de la frontière de A et que nous appellerons *frontière extérieure* de A, est une ligne cantorienne fermée.

4. Étudions maintenant les ensembles partout discontinus. Un point d'un tel ensemble peut être entouré d'un contour fermé et ne passant

(1) *Acta*, t. VII.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

par aucun point de l'ensemble intérieur à un cercle aussi petit qu'on veut ayant le point donné pour centre. Je démontrerai le théorème plus général suivant : Soit a un point appartenant à une portion *continue* P d'un ensemble fermé E. Les points qui sont à une distance de P inférieure ou égale à μ forment un continuum C dont la frontière est une ligne L. Considérons les points de E extérieurs à C et leurs points limites (ce qui peut ajouter certains points de L). Soit F l'ensemble obtenu. A chaque couple formé par un point de P et un point de F répond un nombre ε tel qu'on ne puisse former une chaîne de points de E contenant les points considérés et à chaînons plus petits que ε. Si l'on considère un point de P et tous les points de F la limite inférieure des nombres ε obtenus n'est pas zéro, car si elle était zéro on trouverait, suivant un raisonnement bien connu, un point tel que, pour tous les points de F suffisamment voisins de lui, ce nombre serait aussi petit qu'on voudrait. Or ce point, limite de points de F, appartient à F puisque F est fermé; donc il lui correspond une certaine valeur de ε, soit η et pour tous les points qui sont à une distance de lui moindre que η le nombre ε est au moins égal à η et, par suite, n'a pas zéro pour limite inférieure. Pour chaque point de P nous obtenons donc une limite inférieure différente de zéro. On voit de même que, si l'on considère tous les points de P, la limite inférieure de toutes les limites correspondantes est un nombre différent de zéro que j'appellerai ε. Traçons alors de tous les points de E comme centres des cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$. Ces cercles forment plusieurs continua dont l'un renferme tous les points de P à son intérieur. Ce continuum est d'ailleurs tout entier à l'intérieur de L. Sa frontière extérieure est donc une ligne fermée entourant P (sans contenir aucun point de E). J'ai donc établi qu'*on peut trouver une ligne fermée comprenant à son intérieur tous les points de* P, *ne passant par aucun point de* E *et dont tout point est à une distance de* P *inférieure à une quantité donnée quelconque* μ.

Dans cet énoncé, le mot *ligne* est entendu dans son sens le plus général. Mais tout point de cette ligne est à une distance ρ de l'ensemble E et pour tous les points de la ligne la limite inférieure des nombres ρ est différente de zéro d'après le même raisonnement. On

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

peut donc considérer au lieu d'une ligne une *zone* fermée jouissant des mêmes propriétés que la ligne ci-dessus. Tout ensemble continu entourant P et situé dans la zone jouit encore des mêmes propriétés. On peut donc toujours supposer que l'on prend dans l'énoncé précédent une ligne analytique ayant en chaque point une tangente et même une courbure continues. Cela a une certaine importance si l'on veut faire des intégrations sur la ligne (1), ou simplement si l'on veut se déplacer sur elle dans un certain sens, expression qui n'a pas toujours de signification pour une ligne cantorienne quelconque.

5. Je terminerai cette étude préliminaire par la démonstration de deux théorèmes qui ne me serviront d'ailleurs pas. J'ai cherché pendant longtemps sans y parvenir à utiliser le premier dans la démonstration du théorème qui fait l'objet du Chapitre suivant, et je tiens à le signaler parce que je le crois de nature à simplifier notablement cette démonstration. Voici ce théorème :

THÉORÈME. — *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles discontinus ne peut contenir une portion continue.*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles donnés, S leur somme. Supposons qu'elle contienne un continu σ. Il y a dans σ un point au moins extérieur à E_1 et par suite ce point peut être entouré d'un cercle contenant des points de σ, mais aucun des points de E_1. L'ensemble des points de σ qu'il contient est d'ailleurs continu. Dans ce cercle on peut en trouver de même un second sans point de E_2 et contenant une portion continue de σ. En continuant ainsi nous obtenons une suite dénombrable de cercles qui ont visiblement au moins un point limite a. Ce point appartient à σ, car tous les cercles contiennent des points de σ et σ est parfait. D'autre part il ne peut appartenir à aucun ensemble E_n, car il est intérieur à tous les cercles, en particulier au $n^{ième}$ cercle qui ne contient pas de point de E_n. Il y a donc contradiction.

D'ailleurs S n'est pas forcément fermé; son dérivé peut être continu.

---

(1) Observons, ce qui restreint beaucoup la portée de cette remarque, que la démonstration ne nous apprend rien sur la longueur de cette ligne. Elle peut ne pas tendre vers zéro avec μ.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Considérons par exemple une fonction uniforme ayant une coupure ne renfermant aucun arc de cercle. Tous les points réguliers de la fonction pourront être enfermés dans une infinité dénombrable de cercles dont aucun ne contiendra de ligne singulière. Sur chaque cercle se trouve un ensemble de points singuliers. La somme de tous ces ensembles ne comprendra aucune ligne et pourtant son dérivé en contiendra une.

On démontre de même qu'une infinité dénombrable de continus linéaires ne saurait contenir un continu superficiel.

6. Je terminerai ce Chapitre en démontrant une propriété plus curieuse qu'importante des ensembles discontinus. C'est la propriété suivante :

THÉORÈME. — *Étant donné un ensemble partout discontinu, on peut trouver une ligne contenant tous les points de l'ensemble.*

Soit E l'ensemble donné supposé borné. Traçons de tous les points de E comme centres des cercles de rayon ε. Les points intérieurs à ces cercles formeront un nombre fini de continua C_1, C_2, ..., C_p. Considérons la frontière extérieure de chacun d'eux et parmi ces p lignes fermées excluons celles qui sont entièrement intérieures à une des autres. Joignons les lignes restantes Λ par des lignes arbitraires M dont chacune est limitée à deux Λ, et qui ne coupent aucune des autres Λ ni aucune des M. Soit a un point extérieur à E. Si ε est assez petit, a sera extérieur aux C_i. Si nous supposons qu'aucune des M ne passe par a, ce point définit un continuum, savoir l'ensemble des points qu'on peut joindre à a sans rencontrer ni les M ni les Λ. Le continuum obtenu en joignant à celui-là les points *intérieurs* (1) aux lignes Λ admet une frontière qui est une ligne fermée comprenant tous les M et des portions de tous les Λ.

Donnons à ε une valeur plus petite, nous aurons un autre continuum. Quand ε tend vers zéro, ce continuum tendra vers un ensemble continu limite, car tous les points de E sont intérieurs à ce continuum. La fron-

(1) Au sens de M. Jordan.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

tière de ce continu limite est une ligne A. Je dis qu'elle contient tous les points de E.

En effet, si α est un point de E ou bien, pour une valeur assez petite de ε, il sera à une distance aussi petite que l'on voudra d'une ligne A et alors il appartiendra à A ; ou bien, quel que soit ε, il y aura toujours un continuum C_i enveloppant le point α et dont tous les points ne tendront pas vers α. Comme la limite de C_i est continue et comprend *exclusivement* des points de E, c'est là une conséquence absurde. Le théorème est donc démontré.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

1. Étant donnée une fonction analytique *uniforme*, l'ensemble de ses points singuliers E, qui est un ensemble fermé, peut affecter l'une des trois formes suivantes :

1° Il est dénombrable; il contient alors des points isolés;

2° Il contient un ensemble parfait, mais aucun ensemble continu;

3° Il contient des ensembles continus, lignes ou aires.

Si l'on veut étudier la façon dont se comporte la fonction au voisinage d'un point singulier donné, on sera conduit à faire jouer le rôle important à celles des singularités qui sont voisines du point donné. Si l'on entoure ce point d'un cercle, ou bien le rayon de ce cercle pourra être pris assez petit pour que les points singuliers qui lui sont intérieurs forment un ensemble dénombrable, ou bien quelque petit que soit ce rayon cet ensemble ne sera jamais dénombrable; dans ce dernier cas, ou bien le rayon pourra être pris assez petit pour que cet ensemble soit *partout* discontinu, ou bien il contiendra un ensemble continu quelque petit que soit le rayon du cercle. Un point singulier z_0 donné sera, suivant que l'on est dans tel ou tel de ces trois cas, dit *appartenir* à un ensemble dénombrable, discontinu ou continu (¹) de points singuliers.

(¹) Dans ce dernier cas il n'existe pas nécessairement de ligne singulière pas-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Dans le premier cas, le théorème de M. Picard, qu'on généralise aisément en suivant la voie indiquée par M. Borel, donne des renseignements d'une grande précision sur l'allure de la fonction. Dans le dernier, des exemples très simples permettent de montrer que les circonstances les plus variées peuvent se présenter : la fonction, ainsi que toutes ses dérivées, ou seulement un certain nombre d'entre elles, peuvent être continues ou simplement déterminées quand z tend d'une façon quelconque vers un point appartenant à une ligne singulière; la fonction peut au contraire être plus ou moins complètement indéterminée dans les mêmes conditions (1). De plus, si l'on se donne à l'avance la forme des coupures, on peut former des exemples de tous ces cas, quelle que soit cette forme. Si l'on veut, l'allure de la fonction ne dépend pas de la forme des coupures (2).

2. Le cas intermédiaire, celui d'un point z_0 appartenant à un ensemble discontinu, était resté jusqu'à présent très mal connu. Si ce point est limite de points isolés, on peut affirmer que le théorème de M. Picard s'applique : au voisinage du point la fonction prend une infinité de fois toute valeur donnée sauf exception pour deux valeurs au plus. Mais si, à l'intérieur d'un cercle c de centre z_0, l'ensemble singulier est parfait, ce théorème n'est pas toujours vrai. M. Painlevé subdivise ce cas en trois. En entourant chacun des points singuliers d'un contour ne passant par aucun d'eux et en appelant λ la limite de la somme des longueurs de ces contours quand leurs diamètres tendent vers zéro, cette limite pourra être (pour un choix convenable de ces

---

sant par z_0; d'après la définition, ce point peut être simplement *limite* de lignes singulières. C'est ce qui arrive pour la fonction $\sum \frac{\varphi(nz)}{n^2}$ pour $z = 0$ en posant $\varphi(z) = \sum \frac{e^{-p-q}}{p(z-1)-q_i}$; q et p étant des entiers tels que $\frac{q}{p} < 1$.

(1) Des exemples nombreux ont été donnés de tous ces cas. On trouvera des détails à ce sujet dans une thèse soutenue à l'Université John Hopkins par M. J. Eiesland (Baltimore, 1898).

(2) Autrement dit, le *domaine d'indétermination* peut être quelconque. Pour la définition de cette expression, *voir* PAINLEVÉ, *Comptes rendus,* t. CXXXI, p. 489.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

contours) nulle, finie ou infinie. Dans le premier cas z_0 sera dit *appartenir à un ensemble ponctuel;* dans le second *à un ensemble semi-linéaire;* dans le troisième *à un ensemble semi-superficiel,* et M. Painlevé a démontré dans le premier cas que la fonction s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée au voisinage du point singulier considéré, et dans le second qu'elle ne peut pas être continue dans une aire, si petite qu'elle soit, contenant le point donné. Mais le troisième cas a jusqu'à présent échappé à toutes les tentatives.

Dans ce cas en effet les méthodes basées sur l'intégrale de Cauchy qui avaient réussi dans les deux premiers ne permettent plus de conclure. On est alors obligé d'étudier, avec les seules ressources de la théorie des ensembles et en se basant uniquement sur le prolongement analytique, la relation établie entre les deux points z et w par la fonction $w = f(z)$ et en particulier on est conduit à considérer la fonction inverse $z = \psi(w)$ qui est une fonction analytique à une infinité de branches. Or, on sait quelles précautions minutieuses exige tout raisonnement sur ces fonctions. Un raisonnement sans rigueur montre immédiatement que dans le cas général la fonction se comporte comme dans le cas d'un ensemble ponctuel (1). Mais, si l'on cherche à rendre rigoureuses ces considérations, on tombe sur des difficultés qui jusqu'à présent n'ont pu être surmontées.

On verra dans la suite de quelle nature sont ces difficultés; elles se retrouvent en partie dans la démonstration du théorème suivant qui fait le principal objet de ce travail :

THÉORÈME A. — *Étant donnée une fonction uniforme qui dans une aire* Δ *admet un point singulier faisant partie d'un ensemble discontinu de singularités, la fonction est certainement discontinue en quelque point de cette aire.*

Autrement dit, tout point z_0 faisant partie d'un ensemble discontinu de points singuliers est un point transcendant *essentiel* ou un point *limite de points essentiels* (2).

---

(1) Ce raisonnement se trouve indiqué en note dans les *Leçons de Stockholm,* p. 438.

(2) M. Painlevé appelle *point transcendant ordinaire* un point pour lequel

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

3. *Démonstration du théorème* A. — *Théorèmes préliminaires.* — J'aborde donc la démonstration de ce théorème. Soit une fonction $f(z)$ qui admet un point singulier z_0 faisant partie d'un ensemble discontinu de singularités. Je suppose que cette fonction soit continue dans une aire D contenant le point z_0 à son intérieur et je veux démontrer que cela est absurde.

La fonction $f(z)$ peut admettre en dehors de D des singularités de nature quelconque, points ou lignes, mais je vais démontrer qu'*on peut toujours lui substituer une fonction qui soit continue* dans tout le plan *et qui admette pour* toutes *singularités un ensemble discontinu.*

Je puis d'abord toujours supposer que la valeur de la fonction $f(z)$ au point z_0 est finie. Il suffirait dans le cas contraire de remplacer la fonction $f(z)$ par $\frac{1}{f(z)}$. Cela posé, je remplace l'aire D par une aire Δ qui lui soit entièrement intérieure et remplissant les trois conditions suivantes :

1° Son contour c ne passe par aucun point singulier ;

2° Δ contient à son intérieur un ensemble discontinu de points singuliers et parmi eux le point z_0 et ne contient aucun autre point singulier ;

3° La fonction $f(z)$ (qui est finie au point z_0) sera *finie* dans Δ et par suite *bornée* puisqu'elle est continue.

Il est évidemment possible de faire choix d'une telle aire Δ. Déformons alors le contour c d'une façon continue sans jamais rencontrer de point singulier. Soit γ une position de ce contour. Dans l'aire comprise entre c et γ la fonction $f(x)$ est holomorphe et, par suite, elle

---

le domaine d'indétermination est réduit à un point et point *essentiel* un point pour lequel cette condition n'est pas remplie. La définition convient aux fonctions multiformes. Pour les fonctions uniformes les seuls points transcendants qui puissent être ordinaires appartiennent à des coupures ou à des ensembles parfaits discontinus, quoique ce dernier cas ne puisse vraisemblablement pas se présenter. Les points essentiels se divisent eux-mêmes en points *essentiels proprement dits* et points *semi-essentiels,* ce dernier cas étant celui où la fonction tend vers une limite si le chemin que suit la variable ne tourne pas indéfiniment autour du point singulier : ainsi $x = 0$ pour la fonction $y = x \log x$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

est donnée par la formule

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f(z)\,dz}{z-x}-\frac{1}{2i\pi}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=g(x)+\mathrm{F}(x).$$

La fonction $g(x)$ est holomorphe et par suite continue à l'intérieur de γ. La fonction $\mathrm{F}(x)$ est holomorphe dans tout le plan sauf à l'intérieur de c où elle admet les mêmes points singuliers que $f(x)$. Elle est *continue* à l'intérieur de c puisqu'elle est la différence entre deux fonctions continues à l'intérieur de c. Elle est donc continue dans tout le plan (nulle à l'infini). Elle remplit donc bien les conditions que nous nous étions imposées.

Considérons donc la fonction $w=\mathrm{F}(z)$. En un point z_0 extérieur à l'ensemble E des points singuliers et qui n'annule pas la dérivée $\mathrm{F}'(z)$, la fonction F prend une valeur w_0 et l'on peut trouver une aire entourant ce point w_0 et suffisamment petite pour que, w étant un point de cette aire, $w-w_0$ soit développable en série procédant suivant les puissances de $z-z_0$. Autrement dit, la branche de la fonction inverse $z=\varphi(w)$ qui au point w_0 prend la valeur z_0 est holomorphe en ce point. Prolongeons analytiquement cette branche de toutes les façons possibles dans le plan w; nous définirons ainsi toute la fonction $z=\varphi(w)$ qui est en général une fonction à une infinité de branches. Je remarquerai d'abord que le domaine d'existence de cette fonction est *borné*. En effet, la fonction $w=\mathrm{F}(z)$ est bornée; donc, quel que soit le point z, le point w correspondant est intérieur à un certain cercle de rayon R ayant pour centre l'origine. Il sera donc impossible qu'en effectuant le prolongement analytique de la fonction z nous puissions sortir de ce cercle.

4. Je démontrerai au sujet de la fonction $z(w)$ le théorème suivant qui joue dans la suite un rôle capital :

THÉORÈME B. — *La fonction $z(w)$ ne peut présenter aucun point d'indétermination.*

Autrement dit, ses seuls points singuliers sont, outre les points algébriques, des points *transcendants ordinaires* (1).

(1) Les points critiques algébriques s'obtiendront en éliminant z entre les deux équations $\mathrm{F}(z)-w=0$ et $\mathrm{F}'(z)=0$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Prolongeons une branche z de la fonction φ le long d'un chemin continu quelconque λ, jusqu'en un point a, singulier pour la branche que nous suivons. Entourons ce point a d'un cercle c de rayon très petit et prolongeons la branche z dans ce cercle de toutes les façons possibles à partir de l'arc $w_0 a$ de λ intérieur à c. Sur l'arc $w_0 a$ et dans le cercle c, la fonction z prend un ensemble E de valeurs. Je dis que le dérivé E′ de E est continu. La chose peut être considérée comme évidente. Pour la démontrer en toute rigueur, nous remarquerons que E′ contient son dérivé (1). Il est de même très facile de voir que E′ contient E, car tout point de E obtenu pour une valeur w_1 de la variable, est limite des points de E obtenus pour les valeurs voisines, donc tout point de E appartient à E′. Je dis que E′ est bien enchaîné. Il suffit de montrer que E l'est. Donnons-nous deux points z_1, z_2 de E obtenus entre autres pour les valeurs w_1, w_2 de w. Sur l'arc $\overline{w_1 w_2}$, extrémités comprises, la fonction z est continue; elle est donc uniformément continue. On pourra donc marquer sur l'arc $\overline{w_1 w_2}$ une succession de points w_i tels que l'oscillation de la fonction z quand on passe de chacun au suivant soit inférieure à ε. Par suite, l'ensemble E′ est bien enchaîné et, comme il est parfait, il est continu.

Supposons maintenant que l'origine de l'arc λ se rapproche indéfiniment de a et que le rayon de c tende vers o. Le continu E′ obtenu diminue sans cesse. Dans ces conditions, l'ensemble limite de E′ est continu. Si donc il ne se réduit pas à un point, il est nécessaire qu'il contienne un ensemble continu de points non singuliers de la fonction $w(z)$. Or, en chacun de ces points, la valeur de la fonction w ne pourrait être que a. La fonction $F(z)$, constante sur une ligne continue, serait donc constante dans tout le plan d'après un théorème de M. Painlevé (2); l'ensemble limite doit donc se réduire à un point : le *domaine d'indétermination* est un point.

Cette démonstration appelle plusieurs remarques.

Remarque I. — Le chemin λ que nous avons suivi peut être supposé de longueur infinie sans aucune difficulté pour la démonstration.

---

(1) Tout ensemble dérivé est fermé.

(2) PAINLEVÉ, Thèse, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1888. La démonstration de M. Painlevé s'applique à une ligne cantorienne.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

La seule condition qu'on lui impose est de tendre vers l'unique point a, c'est-à-dire d'être, à partir d'un certain point, *entièrement intérieur* à un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra entourant a. Cette remarque est indispensable, sans quoi le point a pourrait être point *semi-essentiel* de la fonction $z(w)$ (1).

Remarque II. — Nous n'avons nullement eu besoin de supposer que la fonction $F(z)$ était continue en ses points singuliers. Le théorème précédent subsiste donc quelle que soit la manière dont se comporte F au voisinage de ses points singuliers.

5. Je vais maintenant démontrer un théorème plus complet que le théorème B et qui, comme lui, sera indépendant de toute hypothèse sur la façon dont se comporte $F(z)$ en ses points singuliers.

Quand w tend vers un point a, singulier ou non, z tend vers une valeur limite b. Quand on fait varier le chemin ou la branche de fonction que l'on suit, cette limite b varie. D'une manière générale, considérons un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra entourant le point a du plan des w, et considérons tous les points du plan z qui font prendre à $F(z)$ des valeurs situées dans ce cercle. L'ensemble de ces points z et de leurs points limites est fermé. Quand le rayon du cercle tend vers zéro, cet ensemble diminue sans cesse et tend vers un ensemble limite. Cet ensemble limite est *fermé*. Je dis qu'il n'est pas continu. En effet, dans ce cas il comprendrait un ensemble continu de points réguliers de $F(z)$ donnant à $F(z)$ la valeur a, ce qui est impossible. Cet ensemble est donc la somme d'un ensemble discontinu et d'un ensemble dénombrable. On voit que, si l'on se donne un nombre ε et si l'on trace tous les cercles de rayon ε ayant pour centres les points de cet ensemble limite, on pourra trouver un nombre ρ tel que l'ensemble des points z qui font prendre à $F(z)$ des valeurs w telles que

$$|w-a|<\rho$$

soit entièrement intérieur à ces cercles.

---

(1) *Voir* la note, p. 15.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

En définitive nous pourrons, à tout point a du plan w, attacher un nombre ρ tel que, si w tend vers a d'une façon quelconque, z tend vers une limite b et, dès que w est à une distance de a inférieure à ρ, z est à une distance de b inférieure à ε et cela *quel que soit b,* c'est-à-dire en somme quelle que soit la branche suivie.

Ceci posé, le théorème que j'ai en vue est le suivant :

THÉORÈME C. — *Pour l'ensemble de tous les points a du domaine d'existence de* $\varphi(w)$ *la limite inférieure de tous les nombres* ρ *répondant à un même nombre* ε *est différente de zéro.*

En effet, suivant un mode de raisonnement bien classique, on verrait que, si l'on supposait cette limite inférieure nulle, on trouverait un point a qui ferait encore partie, soit comme point intérieur, soit comme point frontière, du domaine d'existence de $\varphi(w)$, et tel que dans tout cercle ayant ce point pour centre la limite inférieure des valeurs de ρ serait nulle. Or, en ce point a le rayon ρ répondant à la valeur $\frac{\varepsilon}{2}$ a une valeur bien déterminée que j'appelle ρ_0 et il est bien certain que pour tous les points intérieurs au cercle de centre a et de rayon $\frac{\rho_0}{2}$ le nombre ρ répondant à la valeur ε a au moins pour valeur $\frac{\rho_0}{2}$. La limite inférieure de ces nombres serait donc au moins $\frac{\rho_0}{2}$.

Si l'on veut, ce théorème établit que la fonction $\varphi(w)$ tend *uniformément* vers une limite en chacun de ses points singuliers.

6. *Exposé de la méthode.* — Voici maintenant en quelques mots la méthode toute naturelle que l'on peut suivre pour démontrer le théorème A. Nous avons déjà vu que le domaine d'existence de la fonction $\varphi(w)$ est borné. Ce domaine est un continuum; il admet donc une frontière formée de lignes continues. Soit L une de ces lignes. Il est bien certain que toute branche z de φ qui peut être poursuivie régulièrement jusqu'en un point a de cette ligne ne peut être prolongée au delà, et tend par suite vers une valeur b qui est l'affixe d'un point de l'ensemble singulier de $F(z)$. Il semble naturel d'admettre que la fonction z a une coupure aboutissant en a. Par

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

suite, il semble aisé de prolonger analytiquement la fonction z le long d'une ligne λ, variable et tendant vers un arc de la frontière L. A cet ensemble de points λ répondra dans le plan z un ensemble continu et l'on en déduira simplement que l'ensemble limite est continu, et comme il ne peut contenir aucun ensemble continu de points réguliers, sans quoi $F(z)$ serait constante, il doit nécessairement se réduire à un point singulier b de $F(z)$. En ce point b la fonction F ne saurait par suite être continue.

Effectivement c'est bien ainsi que nous allons nous y prendre, mais il importe dès l'abord de signaler, ce que la démonstration fera ressortir davantage, l'insuffisance de ce raisonnement. D'abord, étant donné un point a de L, rien ne prouve qu'il existe un chemin régulier pour une branche (1) permettant de la prolonger jusqu'au point a et tendant vers ce seul point a. Par exemple, si l'on considère une fonction uniforme ayant pour coupures les droites $\left(y = \pm \frac{1}{n},\ 0 \leq x \leq 1\right)$ (n entier positif), le segment 0-1 de l'axe des x est une ligne singulière et il n'existe aucun chemin régulier tendant vers un point de ce segment distinct des extrémités.

Une difficulté beaucoup plus grave tient à ce fait qu'un point singulier pour une branche ne l'est pas nécessairement pour les autres. C'est là, au fond, que réside la difficulté essentielle. Si, en suivant une branche, on tombe sur un point singulier et qu'on veuille l'éviter pour pouvoir poursuivre analytiquement la fonction, les singularités changent : à la place d'un point isolé, on trouvera par exemple une coupure ou, au contraire, un point régulier et l'on conçoit sans peine la difficulté qu'il y a à raisonner dans ces conditions.

7. *Définition des points d'arrêt.* — Puisque nous ne savons pas si nous pourrons par un chemin régulier parvenir jusqu'en un point de la frontière L, nous substituerons à ce point un autre point singulier qui aura aussi la propriété d'appartenir à une coupure de la fonction z

(1) Je dirai couramment qu'un chemin est régulier pour une branche si l'on peut prolonger cette branche tout le long du chemin sans être arrêté par un point singulier.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

et que, cette fois, on soit assuré d'atteindre par un prolongement régulier.

Partons d'un point w_0 avec une valeur z_0 de la fonction z, et supposons que cette branche soit holomorphe au point w_0. Prolongeons cette branche à partir de ces conditions initiales, le long d'un chemin quelconque C, issu de w_0, et s'éloignant à l'infini, une droite par exemple. Ce prolongement sera possible jusqu'en un point w_1, mais pas au delà. Alors deux cas pourront se présenter : ou bien, quelque petit que l'on trace un cercle de centre w_1, on pourra trouver un chemin intérieur à ce cercle, joignant deux points de C, l'un situé sur l'arc $w_0 w_1$ et l'autre au delà, et sur lequel on pourra effectuer le prolongement analytique régulier de la branche z_0 ; nous dirons alors que le point w_1 est un point singulier *ordinaire*. Ou bien au contraire, quelque petit que soit le rayon d'un cercle de centre w_1, le choix d'un tel chemin sera impossible ; nous dirons que w_1 est un *point d'arrêt* de la fonction et nous n'irons pas plus loin.

Dans le premier cas, au contraire, après avoir évité le point w_1, par un chemin arbitraire très voisin de w_1 (1), et être ainsi parvenus sur C au delà de w_1, nous continuerons à prolonger analytiquement la branche choisie de z sur C jusqu'au point singulier le plus voisin w_2. Nous nous arrêterons en w_2 si ce point est un point d'arrêt ; nous continuerons notre route si c'est un point ordinaire.

Je dis qu'en continuant ainsi nous arriverons finalement à un point d'arrêt. Supposons en effet que nous trouvions toujours des points ordinaires. Comme nous ne pouvons certainement pas prolonger analytiquement z jusqu'à l'infini, les affixes de ces points ordinaires auront un point limite w situé sur L et le raisonnement met en évidence une ligne analytique tendant vers w et tout le long de laquelle on pourra prolonger z. Le point w se trouvera alors être pour cette ligne un point d'arrêt ou un point ordinaire. Dans le premier cas nous nous arrêterons. Dans le second nous parviendrons par prolongement analytique régulier au delà de w sur C. Donc, ou bien nous aurons finalement un point d'arrêt et une ligne régulière y aboutissant, ou bien

(1) Ce chemin peut d'ailleurs toujours être supposé analytique et pourvu d'une tangente.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

nous dépasserons *tout* point limite de points ordinaires. La première hypothèse doit donc nécessairement finir par se présenter.

8. *Démonstration de l'existence d'une coupure.* — Nous avons donc établi l'existence d'une ligne C le long de laquelle le prolongement de la branche choisie est possible depuis le point w_0 jusqu'en un point w_1 qui est un *point d'arrêt* pour cette branche. Si je démontre que l'existence d'un tel point w_1 entraîne l'existence d'une coupure, il sera aisé d'achever la démonstration. Mais c'est justement dans cette première partie que se trouve le point le plus délicat et on le comprendra sans peine si l'on remarque que pour une fonction multiforme à une infinité de branches la définition même du mot *coupure* est assez délicate à préciser. On verra avec quelle minutie nous serons obligés de raisonner pour mettre en évidence une ligne qui réponde à l'idée que l'on se fait d'une *coupure*.

Traçons, de w_1 comme centre, un cercle de rayon assez petit pour que la branche z prolongée dans ce cercle de toutes les façons possibles, à partir de l'arc c de C intérieur à ce cercle, ne puisse certainement pas nous faire parvenir aux points de c situés au delà de w_1 ou du moins nous y fasse parvenir avec des valeurs non prolongeables au delà. (En d'autres termes, nous n'excluons pas le cas où c serait lui-même coupure.) Un tel cercle existe évidemment d'après la définition du point d'arrêt : j'appellerai w_0 et a les points où il coupe la courbe C.

Donnons-nous alors d'une façon absolument définitive mais complètement arbitraire une famille continue de courbes γ dépendant d'un paramètre α, passant toutes par les points w_0, a, intérieures au cercle précédent, coïncidant avec c pour la valeur o du paramètre et avec une courbe fixe Γ pour la valeur α_0 du paramètre. Les coordonnées d'un point de chacune de ces courbes seront des fonctions continues d'un paramètre t et du paramètre α; chacune des courbes γ répond à une valeur du paramètre α. Pour fixer les idées, quand c est une droite, on prendra pour courbes γ les cercles d'un faisceau. Ce qui importe, c'est que ce choix une fois fait ne sera plus modifié dans la suite.

Donnons-nous alors un nombre ε; d'après le théorème C, il lui cor-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

respond un nombre 2ρ tel que la condition $|w - w_0| < 2\rho$ entraîne, quel que soit w_0, $|z - z_0| < \varepsilon$, z_0 désignant tous les points pour lesquels $F(z) = w_0$ (1). Quand ε, à la fin du raisonnement, tendra vers o il en sera de même de ρ. Mais pour l'instant il nous suffit de pouvoir assigner la valeur de ρ.

Nous allons alors prolonger z le long des courbes γ. Comme on ne pourra certainement pas parvenir au point a, chacune de ces courbes mettra un point singulier en évidence. Nous tâcherons de choisir parmi ces points un ensemble continu de points qui seront, en quelque sorte, singuliers *pour une même branche*. D'une façon précise nous mettrons en évidence une ligne continue *régulière* pour une branche z et dont tout point soit à une distance inférieure à ρ d'un ensemble continu de points singuliers. De plus, pour que cette ligne ne tende pas vers un point unique quand ρ tendra vers o, nous ferons en sorte qu'elle joigne toujours un point de C à un point de Γ.

Traçons le cercle c_1 de centre w_1 et de rayon ρ. Étudions, au début du mouvement de la courbe γ, la branche z de φ prolongée sur γ. Nous ferons deux parts dans cette étude : la part qui concerne les points w extérieurs à c_1 et celle qui concerne les points w intérieurs à ρ.

Disons d'une manière générale que nous nous réservons le droit de *déformer* chaque courbe γ, mais cette déformation devra toujours être faite de telle manière que la nouvelle courbe γ' parte encore de w_0 et arrive en a, et qu'on puisse y prolonger z du point w_0 jusqu'en un point w, *qui devra appartenir à l'ancienne courbe* γ.

La branche z est régulière de w_0 à p_1, *extrémités comprises*. On peut donc entourer ce segment d'une aire dans laquelle z soit holomorphe. Donc, au début du mouvement des γ, la portion de ces lignes extérieure à c_1, portion que j'appellerai γ_e, est une ligne régulière pour la branche z. Alors, ou bien nous ne rencontrerons aucune difficulté jusques et y compris la dernière courbe γ que rencontre encore c_1, ou, au contraire, l'holomorphie de z cessera avant d'arriver à cette position de γ. Étudions cette dernière circonstance et précisons-la.

(1) Cette manière de nous exprimer convient à l'hypothèse faite que $F(z)$ est partout continue. Elle serait incorrecte si l'on ne faisait pas cette hypothèse.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Il arrivera que, quand γ tendra vers une position limite γ_1, la branche z qui était toujours prolongeable le long de γ, jusqu'au cercle c_0 tout au moins, ne sera plus prolongeable le long de γ_1 que sur l'arc $w_0 b$ et pas au delà; deux cas peuvent se présenter suivant que le point b est ou non point d'arrêt de z pour la ligne γ_1. Dans le premier cas, on ne pourra pas, par prolongement analytique, atteindre tous les points de γ_1 situés au delà de b, sans sortir d'un cercle ω de centre b et de rayon assez petit. Mais les courbes γ qui tendent vers γ_1 et le long duquel, nous le savons, le prolongement est possible jusqu'au cercle c_1, nous fournissent des *arcs* de courbe réguliers pour la branche z et tendant vers un certain arc de γ_1. Les points z correspondants forment un continu linéaire dont l'ensemble limite ne peut contenir aucun point régulier, car pour un tel point $F(z)$ prendrait une valeur, affixe d'un point de γ_1 situé dans le cercle ω et par suite le point b ne serait pas un point d'arrêt de z sur la courbe γ_1. Donc cet ensemble limite se réduit au seul point β, valeur limite de z quand w tend vers b sur γ_1 (limite que nous savons exister) et par suite en ce point β, $F(z)$ ne serait pas continue.

Si, au contraire, b n'est pas point d'arrêt, on pourra déformer γ_1 aussi peu qu'on voudra d'ailleurs, de façon à éviter le point b et à revenir sur γ_1 avec une valeur holomorphe de z (1): c'est bien dans ces conditions qu'on a le droit de faire des déformations de lignes γ : le début et la fin de la ligne ne sont pas altérés.

Donc nous pouvons toujours parvenir à la ligne γ extrême que rencontre c_1 ou du moins nous parviendrons à une ligne γ' commençant en w_0 et finissant sur c_1 au même point que la ligne précitée; de plus le prolongement de z sera possible de w_0 jusqu'au cercle c_1.

A vrai dire, il y a encore un cas que nous devons examiner : J'ai supposé que le point singulier b n'était pas sur le cercle c_1. Supposons qu'il y soit. S'il n'est pas point d'arrêt, en diminuant aussi peu qu'on voudra le rayon du cercle c_1 on pourra tourner encore le point b et les conclusions subsistent. Si b est point d'arrêt, on tracera de ce point comme centre un cercle de rayon suffisamment petit, assez petit en

(1) Et la déformation peut même être faite de telle manière qu'on parvienne sur γ_1 avec la même valeur z que l'on obtient en faisant tendre les γ vers γ_1.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

particulier, ce qui est visiblement toujours possible, pour que le point où ce cercle coupe γ' soit un point d'une courbe primitive γ. On fera alors dans le raisonnement jouer au continuum formé de ce cercle et du cercle c_1 le même rôle que dans le raisonnement primitif au cercle c_1 lui-même.

Occupons-nous maintenant du mouvement de la portion γ_i de γ allant depuis le point de rencontre avec c_1 jusqu'au point a.

Quand γ est assez voisin de C on peut être assuré que sur la courbe γ il y aura *dans* c_1 un point d'arrêt. En effet, évitons les points *ordinaires* que nous pourrons rencontrer sur les courbes γ, et cela d'une façon absolument arbitraire, sans sortir toutefois de c_1. Si alors nous pouvons, quelque voisin que soit γ de C, sortir du cercle c_1 sans rencontrer de point d'arrêt, nous mettrons en évidence un arc de courbe tendant vers C (1) sur lequel une branche z admet un prolongement régulier et l'arc qui lui correspond dans le plan des z ne peut avoir aucun point régulier comme point limite, car sans cela w_1 ne serait pas point d'arrêt de z sur C. L'ensemble limite de ces arcs du plan des z est donc réduit à *un* point singulier pour lequel F ne serait pas continue.

Dans la suite nous ne répéterons pas ce raisonnement. Quand sur une ligne nous aurons un point d'arrêt pour une branche nous conclurons que sur les lignes voisines il y a aussi des points d'arrêt tendant vers le premier.

Mais, quand la ligne γ s'éloignera suffisamment de C, elle pourra ne plus rencontrer de point d'arrêt *dans* c_1 tout au moins. En effet, un point limite de points d'arrêt peut ne pas être point d'arrêt lui-même. Par exemple, pour une fonction uniforme, une extrémité de coupure n'est pas, au sens où nous l'entendons, un point d'arrêt (2). Dans ce cas, si nous continuions à nous déplacer sur γ, nous finirions certainement, en tournant les points ordinaires, par tomber sur un point d'arrêt, dussions-nous aller jusqu'au point a. Sur chaque ligne γ, nous

(1) En supposant que les chemins au moyen desquels on contourne les points ordinaires tendent vers o quand γ tend vers c.

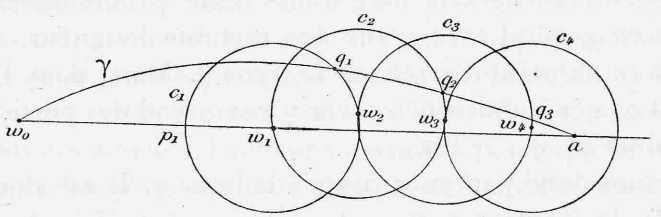
(2) Au moins si le chemin que l'on veut suivre n'est pas confondu avec la coupure.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

mettrions donc en évidence un point singulier. Mais si l'on procède ainsi il semble très malaisé de conclure. Voici donc comment nous nous y prendrons :

Soit γ ce premier chemin qui nous permet de parvenir sans rencontrer de point d'arrêt jusqu'au cercle c_1 au point q_1. Déplaçons-nous sur le contour du cercle c_1, dans le sens de rotation des lignes γ autour de a. Si nous rencontrons des points ordinaires, évitons-les ; nous arriverons ainsi certainement à un point d'arrêt pour la ligne c_1, car sans cela nous pourrions parvenir jusque sur C. Soit w_2 ce point d'arrêt. Traçons un cercle c_2 de centre w_2 et de rayon ρ. Ce cercle c_2 va jouer

Fig. 1.



le même rôle que c_1. Pour cela, si le point q_1 est extérieur à ce cercle c_2, nous déformerons la ligne $q_1 w_2$ dans le sens contraire au sens précédemment défini, sens que j'appellerai *direct*. Nous déformons donc $q_1 w_2$ dans le sens inverse jusqu'à l'appliquer sur le prolongement $q_1 a$ de γ. Cette déformation se fait d'une manière analogue à tout à l'heure : en dehors du cercle c_2 on ne tient pas compte des points ordinaires qu'on évite au moyen d'un crochet (1). Dans c_2, tant que le chemin variable est suffisamment voisin de $q_1 w_2$, il rencontre un point d'arrêt dans le cercle c_2. Quand il s'écartera suffisamment de $q_1 w_2$ il faudra aller jusqu'au bord du cercle c_2 en un point q_2 ; on suivra alors le contour de ce cercle c_2, en marchant dans le sens direct.

Dans le cas de la figure, on est assuré de rencontrer sur ce cercle un point d'arrêt w_3, car le cercle c_2 coupe C ; mais plus généralement,

(1) On peut aussi procéder un peu différemment : laisser fixe la portion de $q_1 w_2$ extérieure à c_2 et déformer seulement la portion $q' w_2$ intérieure à c_2.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

si l'on ne rencontrait pas de point d'arrêt avant d'arriver au point de rencontre des cercles c_1 et c_2, on abandonnerait le cercle c_2 pour se déplacer toujours dans le même sens sur le cercle c_1 et ainsi de suite : sur ce cercle nous rencontrerons à nouveau un point d'arrêt w_3 ; on tracera le cercle c_3 de rayon ρ et de centre w_3 et l'on déformera dans le sens inverse l'arc $q_2 w_3$, toujours d'après le même procédé. Au cours de ces opérations on parviendra nécessairement à un cercle c_n renfermant le point a, car tous ces cercles sont de rayon ρ. A partir de ce moment, la déformation continue de l'arc $q_{n-1} w_n$ ne pourra plus nous faire sortir de ce cercle c_n ou, du moins, on arrivera certainement avant à faire occuper à cet arc dans sa déformation la position γ. De sorte que, finalement, nous nous trouverons avoir effectué le prolongement de la branche z le long d'une ligne γ' commençant en w_0, coïncidant en général avec γ sur une certaine longueur, et arrivant finalement en un point d'arrêt sur la ligne γ. Mais, dans l'intervalle, γ' et γ sont en général distinctes, car γ' comprend des portions passant par les points $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$.

Nous serons donc parvenus jusqu'à la ligne γ. Il est alors relativement facile de montrer comment nous pourrons de même parvenir jusqu'à la ligne Γ que nous avons assignée à l'avance.

Il y a plusieurs hypothèses à faire : si, comme nous venons de le supposer, il y avait avant la ligne γ extrême qui rencontre c_1 une ligne qui n'ait aucun point d'arrêt dans c_1, nous avons vu quelle modification on apporte à la suite du chemin et cette modification nous permet d'arriver en fin de compte en un point d'arrêt, situé sur la ligne primitive. Dans ce cas nous recommencerons en faisant jouer le rôle de C et de w_1 respectivement à la ligne γ' que nous venons de construire et au point d'arrêt w_n que nous venons de mettre en évidence sur elle (1) ; j'appellerai c_n le cercle de centre w_n et de rayon ρ.

Si au contraire nous avons pu, sans cesser de rencontrer des points d'arrêt *dans* c_1, parvenir à la ligne extrême γ qui rencontre c_1, ou bien cette ligne elle-même aura un point d'arrêt dans c_1 et par suite sur le contour même de c_1, ou bien on lui appliquera le raisonnement précé-

(1) w_n n'est plus tout à fait le même que dans le raisonnement précédent; c'est le dernier point d'arrêt que je mettrai en évidence sur γ même.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

dent et on lui substituera une ligne γ' sur laquelle on raisonnera ensuite. Dans le premier cas, et j'y ramènerai aussi celui dont j'ai dit un mot précédemment où la portion de γ extérieure à c_1 (1) rencontrait un point d'arrêt *sur* c_1 même, dans ces deux cas, dis-je, je considérerai le point d'arrêt w_2 mis ainsi en évidence sur c_1; je tracerai le cercle c_2 de centre w_2 et de rayon ρ et l'ensemble des deux cercles c_1 et c_2 sera considéré dans la suite du raisonnement comme formant un seul continuum dont le contour extérieur jouera le même rôle que la périphérie de c_1 dans le raisonnement ci-dessus exposé. Alors ou bien on parviendra à l'extrême ligne γ rencontrant $(c_1 + c_2)$ et l'on pourra continuer ainsi jusqu'à la ligne Γ, ou bien une ligne γ cessera de rencontrer un point d'arrêt dans l'aire $(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$; on la poursuivra jusqu'au contour de $(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$ en un point q_1 et ainsi de suite. Dans les opérations suivantes on pourra avoir encore l'occasion de faire jouer à une succession de cercles le rôle que jouaient les cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ du raisonnement type. Mais, d'après la disposition de tous ces cercles, il est incontestable que le point capital du raisonnement, savoir que l'un des cercles (ou l'une des files de cercles) finit par contenir a, demeurera toujours exact.

Alors il n'est pas douteux qu'on parviendra finalement à une courbe Γ' ayant même origine w_0 et même extrémité a que Γ et le long de laquelle la branche z sera prolongeable à partir du point w_0 jusqu'en un point situé *sur la courbe* Γ elle-même et qui sera point d'arrêt.

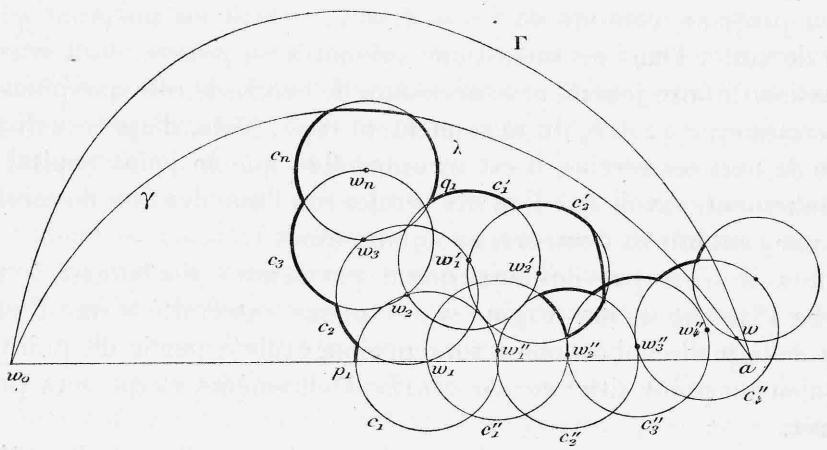
Nous allons maintenant tâcher de construire une ligne λ allant de C à Γ, rencontrant toutes les courbes γ' précédemment envisagées, et dont tout point soit à une distance inférieure à 2ρ, par exemple, d'un point singulier (et même d'un point d'arrêt). A vrai dire il n'est pas certain qu'une telle ligne existe. Essayons de la former en prolongeant z le long de portions des cercles c_i à partir du point p_1 sur le cercle c_1. Si l'on est dans le cas où les lignes γ rencontrant c_1 ont des points d'arrêt dans c_1 on ira jusqu'à la rencontre avec le cercle c_2 et ainsi de suite : on se déplacera sur c_2 puis sur c_3. Si la première file de cercles arrive à la courbe Γ, la ligne ainsi formée d'arcs de cercles

(1) Plus exactement *antérieure* à c_1.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

jouit bien de la propriété voulue : chacun de ces points est à une distance inférieure à 2ρ d'un point d'arrêt de la branche qu'on poursuit. Mais supposons que dans le $n^{\text{ième}}$ cercle c_n on ait une courbe γ (ou plutôt γ') sans point d'arrêt *dans* c_n. Alors on prendra pour λ d'abord des arcs de cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jusqu'à la première ligne γ' qui permette de sortir de c_n, puis un arc de cette ligne γ', puis des arcs de cercles $c_n, c_{n-1}, \ldots$ parcourus dans le sens inverse jusqu'au cercle c'_1 ayant pour centre le premier point d'arrêt que l'on rencontre ainsi; puis des arcs de $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$, parcourus dans le sens direct jusqu'à ce que, en déformant la ligne c'_1, w'_1 de façon à remonter vers γ, on arrive

Fig. 2.



à la première ligne γ_1 qui ne rencontre plus de point d'arrêt dans c'_n. On suivra alors cette ligne γ_1 jusqu'au second point de rencontre avec c'_n, puis on décrira dans le sens inverse les arcs c'_n, $c'_{n'-1}$, ... jusqu'à rencontrer un point d'arrêt. Il pourra même arriver que l'on parvienne ainsi jusqu'à c'_1 et ensuite qu'on soit obligé de décrire, toujours dans le même sens inverse, une portion du contour de la première file de cercles. Mais alors on sera assuré de rencontrer un point d'arrêt et l'on ira pour former λ jusqu'au cercle c''_1 ayant pour centre le point d'arrêt w''_1 mis en évidence; on se déplacera sur c''_1 et ainsi de suite.

Il résulte alors de ce qui précède que cette ligne λ ne renfermera

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

aucun point singulier de la branche z qu'on y poursuit et que par suite on pourra y prolonger z jusqu'à la courbe Γ.

Mais cette ligne λ jouit-elle de la propriété que dans un cercle de rayon 2ρ il y ait un point singulier de la branche z quel que soit le centre de ce cercle sur λ. *A priori*, cela semble exact, puisque tous les points de λ sont sur des cercles c_n. Prenons par exemple un point w de λ sur la première file de cercles, mais dans la deuxième partie du déplacement, quand on redescend la file c_n, c_{n-1}, ... Supposons que ce point soit sur c_{n-1}. Si alors le point z se déplace d'une façon quelconque *dans les deux cercles* c_n, c_{n-1}, il est bien évident que ce déplacement pourra être choisi de telle sorte que l'on rencontre un point d'arrêt. On n'aurait par exemple qu'à décrire λ en sens inverse jusqu'à c_{n-1}, puis à suivre une des courbes γ dans c_{n-1}. Mais, si l'on s'astreint à rester dans un cercle de centre w et de rayon 2ρ, on ne pourra pas toujours se déplacer dans *tout* le cercle c_n; et alors il n'est plus évident, il n'est même plus exact en général que les points d'arrêt des courbes γ qu'on avait précédemment rencontrés dans c_{n-1} restent singuliers si on les aborde d'un autre côté. Il peut se faire qu'en se déplaçant régulièrement à partir du premier arc de c_{n-1} *tous les points* du cercle soient singuliers, et qu'en se déplaçant dans le même cercle à partir du second arc, la branche z soit holomorphe dans tout le cercle. Ce sont là des singularités inhérentes à la notion de fonction analytique et que l'on ne peut pas écarter *a priori*.

Mais ce que nous pourrons affirmer, c'est que *dans les portions montantes* de λ, j'entends par là quand on décrira les arcs de cercle c_n dans le sens direct, ou encore dans l'ordre des indices croissants, on sera toujours à une distance inférieure à 2ρ d'un point d'arrêt. Il en sera de même pour les portions de λ formées d'arcs des courbes γ ainsi que les portions des *premiers* cercles c_n qu'on décrit en sens inverse, c'est-à-dire celles qui suivent immédiatement, sur λ, les arcs de courbe γ.

Désignons par λ_ε la courbe λ et par λ'_ε, λ''_ε l'ensemble des portions montantes et des portions descendantes de λ, en joignant à λ'_ε les arcs de λ que nous venons de signaler et qui sont certainement à une distance inférieure à 2ρ d'un point d'arrêt.

A λ_ε correspond dans le plan z une ligne μ_ε formée elle aussi de portions μ'_ε, μ''_ε correspondant respectivement à λ'_ε et à λ''_ε. Supposons

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

que ρ, et par suite ε, tendent vers zéro ; λ_ε tend vers une ligne continue l non réduite à un point. En effet, d'abord on est dans le cas où la limite est un continu, car le point w_1 est certainement point limite, et, d'autre part, il y a des points limites sur Γ ; l'ensemble limite est formé de lignes joignant w_1 à Γ ; de même μ_ε tend vers une limite m car l'ensemble limite comprend le point $z = z_1$, vers lequel tend z quand p_1 tend vers w_1. Si m était réduit à un point le théorème serait démontré. Mais la ligne m pouvant comprendre *a priori* des portions régulières, on ne peut pas en conclure immédiatement que m est réduit à un point. Désignons par l' et l'' les ensembles limites de λ'_ε et λ''_ε respectivement. Si je montre que l' comprend des portions continues, cela suffira évidemment pour qu'on puisse répéter le raisonnement déjà fait.

Sur un arc quelconque de l, l' et l'' sont formés de portions qui alternent évidemment. Si donc nous supposons que, sur cette portion, l' est constitué uniquement par des points, il en résultera que l'' comprend *tout* l'arc de l, sauf un ensemble au plus discontinu de points. Mais les λ''_ε redescendent toujours la succession des courbes γ. Il en est donc de même des ensembles limites. D'autre part, les λ'_ε ont des points sur *chacune* des courbes γ. Donc leur ensemble limite doit avoir aussi des points sur chacune des courbes γ. Il y a évidemment contradiction entre ces deux faits. Donc, sur tout arc de l, il y a un ensemble continu de points limites de λ''_ε.

Pour être tout à fait précis, il convient d'ajouter que pour chaque valeur de ε on peut choisir une des portions continues de λ'_ε de façon que la limite des portions choisies soit continue quand ε tend vers zéro. Donnons en effet à ε une infinité dénombrable de valeurs tendant vers zéro, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ par exemple. Pour chaque ε il y a un nombre fini de portions continues dans λ'_ε. L'ensemble de toutes ces portions est donc dénombrable. On peut les combiner entre elles d'une infinité dénombrable de manières. Si chacune de ces combinaisons donnait seulement un point limite, l'ensemble limite serait dénombrable (1). Donc une des combinaisons donne un *continu* limite. Et alors le raisonnement

(1) Tout point de l'ensemble limite est limite d'une des combinaisons.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

s'achève sans aucune difficulté. A chacune des portions répond dans le plan z un continu, dont l'ensemble limite est formé uniquement de points singuliers. Cet ensemble est donc réduit à un point. Pour ce point, la fonction F doit être discontinue.

Le théorème A est donc démontré.

9. *Les fonctions multiformes.* — Ce théorème ne nous renseigne pas d'une façon définitive sur la façon dont la fonction se comporte au voisinage d'un point singulier donné. Il ne permet même pas d'affirmer que la fonction est discontinue en *tous* ses points singuliers. Avant d'indiquer ce qui reste encore à démontrer, et la manière dont on pourra s'y prendre pour une telle démonstration, je crois utile de faire une courte digression sur les fonctions analytiques.

L'ensemble des points singuliers d'une fonction uniforme ou à un nombre fini de branches est *fermé*. Quand la fonction a une infinité de branches il n'en est plus de même. De plus le dérivé de l'ensemble singulier peut comprendre tout le plan. Ce qui est d'apparence plus paradoxale encore c'est que, *a priori* du moins, une fonction multiforme peut admettre pour points singuliers tous les points d'une aire et être définie dans cette aire. A vrai dire je ne connais aucun exemple de ce dernier genre de singularités et l'on peut espérer qu'il ne se présente jamais. Mais on ne doit pas l'écarter *a priori*.

D'une manière tout analogue, on voit que l'existence d'un ensemble continu de points singuliers, pour une fonction qui a une infinité de branches, n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une coupure, du moins suivant que l'on adopte telle ou telle définition du mot *coupure*.

De ce qui précède, il semble résulter que la définition de ce mot doit s'entendre de la façon suivante : Je dirai qu'une ligne L est coupure d'une fonction analytique s'il existe une ligne λ tendant vers L le long de laquelle le prolongement analytique d'une branche au moins de la fonction sera toujours possible et si à toute position de λ correspond un nombre ε tendant vers zéro quand λ tend vers L, tel que tout cercle de rayon ε ayant son centre sur λ renferme un point singulier de la branche que l'on considère supposée prolongée dans ce cercle sans en sortir à partir du centre.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

On voit alors sans peine que le théorème A renferme en particulier la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction analytique dont le domaine d'existence est borné admet nécessairement des coupures.*

Il n'est pas même nécessaire que le domaine d'existence soit borné. Il suffit que la fonction admette des points d'arrêt pour une ligne. Appelons *point-coupure* d'une fonction, un point a tel que, si une branche f admet le point a pour point singulier, quelque petit que soit un cercle de centre a, le prolongement de la branche f dans ce cercle ne permette pas d'atteindre tous les points du cercle. Alors il y a un *continu superficiel* de points qu'on ne peut pas atteindre dans chacun de ces cercles. Si l'on prend une ligne l passant par a, sur laquelle on puisse prolonger f jusqu'au point a, et qui se continue par une ligne située dans l'aire non atteinte, le point a sera point d'arrêt pour cette ligne.

Donc :

THÉORÈME. — *Toute fonction qui admet un point-coupure admet une coupure dans tout cercle ayant ce point pour centre.*

La réciproque est-elle vraie? Je me borne à poser cette question en remarquant cependant que la présence d'une coupure pour une fonction, en adoptant pour ce mot la définition précédente, entraîne l'existence d'un ensemble de points singuliers ayant pour dérivé la ligne coupure L, mais il n'est même pas certain, quoique cela soit vraisemblable, que les points de L soient singuliers. Une question du même genre est la suivante : La présence d'un ensemble continu de points singuliers entraîne-t-elle l'existence d'une coupure? Cette question paraît liée intimement au théorème de MM. Volterra et Poincaré déjà cité.

10. Je n'insiste pas sur les questions que soulève l'étude de ces singularités et je reviens aux fonctions uniformes qui ont un ensemble discontinu de points singuliers. Nous avons montré en somme, dans ce cas, que la fonction inverse a une coupure le long de laquelle,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

dirai-je d'une façon incorrecte mais facile à saisir d'après ce qui précède, elle prend une valeur constante. Dans le cas des fonctions uniformes, au moins dans un grand nombre de cas, on peut affirmer qu'une fonction qui prend la même valeur le long d'un arc de coupure se réduit à une constante. La question est beaucoup plus délicate à étudier si la fonction a une infinité de branches. Dans la troisième partie j'en aborderai un cas particulier. Mais, en général, la fonction, au voisinage de la coupure, peut se permuter avec d'autres branches qui, elles, ne tendent pas vers la valeur constante donnée, et c'est là ce qui constitue la difficulté de l'étude de ce cas.

Si l'on démontrait ce théorème d'une façon tout à fait générale, on en déduirait qu'il est impossible que la fonction inverse d'une fonction uniforme sans coupures soit elle-même pourvue de coupures. On montrerait alors sans peine que le domaine d'indétermination en tout point singulier appartenant à un ensemble discontinu comprend tout le plan, et même, en nous bornant alors au cas d'une fonction absolument dépourvue de coupures, que l'ensemble des *valeurs exceptionnelles* (1) ne comprend aucun continu, linéaire ou superficiel. Dans cette vaste question, nous ne connaissons pour l'instant que deux faits : d'une part, impossibilité de la continuité complète d'après le théorème A; d'autre part, possibilité d'un nombre *fini quelconque* de valeurs exceptionnelles d'après les travaux de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes.

11. Je reviens maintenant au théorème B démontré plus haut et qui nous a été si utile. La démonstration de ce théorème, telle que je l'ai présentée, suppose que la fonction $w = F(z)$ est uniforme. Mais je veux remarquer qu'elle subsiste entièrement si le nombre des branches de w est fini (2). D'autre part, le théorème A subsiste lui

(1) J'appelle ainsi les valeurs que la fonction ne prend pas quand la variable décrit tout le plan.

(2) Au contraire, si le nombre des branches de $w(z)$ est infini, on ne peut pas affirmer qu'en un point de l'ensemble limite w *prend* la valeur a (*voir* p. 17) mais simplement que ce point est limite de points z_1 tels que l'équation $z(w) = z_1$ a une infinité de racines tendant vers a.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

aussi comme on le voit aisément, si l'on suppose que w a un nombre fini de branches. Donc la fonction inverse d'une fonction à un nombre fini de branches n'admet, en outre des points algébriques, que des points transcendants ordinaires. Est-il possible dès lors que la fonction inverse d'une fonction à un nombre fini de branches soit une fonction à un nombre fini de branches? Les seules singularités non algébriques de chacune de deux fonctions seront des points transcendants ordinaires. D'après le théorème A, ils ne pourront appartenir à un ensemble discontinu. D'où le théorème suivant :

THÉORÈME B'. — *Si une fonction et sa fonction inverse ont toutes deux un nombre limité de branches, les seules singularités non algébriques des deux fonctions sont des coupures* (1).

On en déduit encore que si une fonction $f(z)$ a un nombre fini de branches et des singularités non continues, la fonction inverse ne peut pas avoir un nombre borné de branches. Il ne faudrait pas en conclure qu'elle a une infinité de branches, mais seulement que, quel que soit n, l'équation $f(z) - A = 0$ a *pour une valeur convenable* de A un nombre de racines supérieur à n.

12. Ceci nous amène, pour terminer, à dire un mot des fonctions dont le nombre des branches varie avec la région du plan où l'on se trouve. Supposons que la fonction $y(x)$ ait un nombre *borné* de branches au plus égal à n. Il y a évidemment un point x où ce nombre est égal à n, et en déplaçant un peu, au besoin, ce point x, on peut supposer qu'il n'est singulier pour aucune des n branches $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Toute fonction symétrique de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est uniforme en x et admet tous les points singuliers *non algébriques* des différentes branches y. S'il existe alors un point x' où le nombre des branches est $n - p$ seulement, il n'existera aucun chemin allant de x à x' et régulier pour la fonction symétrique considérée. Donc cette fonction aura une coupure fermée entourant x'. Cette coupure sera aussi une coupure de la fonction $y(x)$ (2). Ce sera une ligne singulière pour p

(1) Ou des points limites de coupures.

(2) Ce mot a un sens précis puisque y est à n branches.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

des branches. Les autres branches seront, en général, régulières sur la même ligne.

Cependant il pourrait arriver que la coupure n'existe pas et se réduise au point x' lui-même. En tout point du plan la fonction aurait n branches, sauf en x' où elle en aurait moins de n. Je citerai l'exemple de la fonction $y(x)$ définie par $ye^y = x$ qui a une infinité de branches sauf pour les points $x = 0$ et $x = \infty$. Cependant cette fonction n'a pas de coupures.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

1. Je voudrais maintenant montrer par des exemples que le théorème A se présente d'une façon naturelle et nécessaire dans bien des questions, même élémentaires, de la théorie des fonctions et qu'il est susceptible d'applications intéressantes.

L'étude générale des fonctions analytiques comprend des problèmes des deux types suivants : 1° Trouver les propriétés d'une fonction ayant des singularités données (étudier la croissance, les développements, les zéros, etc.); 2° Trouver les singularités de fonctions répondant à une définition donnée (par exemple de fonctions vérifiant une équation différentielle ou fonctionnelle, ou admettant un développement donné). On comprend que, dans l'un et l'autre cas, il soit très utile de connaître les propriétés caractéristiques de grandes classes de fonctions. Or, notre théorème A établit justement une telle propriété pour les fonctions uniformes pourvues de coupures; on saura désormais que ce sont les seules qui peuvent rester continues en leurs points singuliers. On pourra donc trancher certaines questions qui restaient douteuses ou compléter certains énoncés; je n'en citerai comme exemple que le théorème B′.

On peut objecter qu'il est bien superflu de s'attacher à l'étude de certaines fonctions à singularités compliquées, car on n'a pas souvent l'occasion d'en rencontrer. L'exemple des fonctions fuchsiennes dont toute une classe a justement un ensemble parfait de points singuliers,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

montre qu'une équation fonctionnelle des plus simples introduit de telles fonctions en Analyse (1). Les fonctions définies par des équations différentielles même très simples peuvent rentrer dans le même type. D'ailleurs, toutes les fois qu'on veut définir des classes de fonctions par un procédé analytique on est forcé de n'exclure *a priori* aucune hypothèse, si invraisemblable qu'elle puisse être. La théorie analytique des équations différentielles a justifié d'une manière éclatante certaines études modernes de la théorie des fonctions où il pouvait sembler à certains qu'on introduisait à plaisir les complications.

2. Le théorème A intervient justement dans la démonstration d'un certain nombre de propositions de la théorie des équations différentielles. Je citerai par exemple le théorème suivant de M. Painlevé :

Étant donnée une équation différentielle du second ordre algébrique en y'', y', y *et* x, *toute intégrale* y *uniforme* (*ou à n branches*) *dans une aire* A, *admet dans cette aire des points d'indétermination. Elle n'y admet d'ailleurs pas de coupure* (2).

J'ajoute d'ailleurs que la démonstration de ce théorème peut se faire sans le secours du théorème A. Au contraire, il se présente d'une façon nécessaire dans la solution de la question qui fait le principal objet de ce Chapitre et qui est une des premières que l'on est amené à se poser dans la théorie analytique des équations du premier ordre. Le théorème A permet de la résoudre assez simplement alors que tous les efforts qui ont été faits pour se passer de ce théorème sont restés vains.

3. *Les équations du premier ordre.* — Avant d'aborder cette application je crois indispensable de préciser certains résultats de la théorie des équations du premier ordre dont les énoncés m'ont été communiqués par M. Painlevé, mais dont les démonstrations sont inédites.

---

(1) Elles vérifient aussi une équation très simple du troisième ordre.

(2) PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 443.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Considérons une équation du premier ordre $F(y', y, x) = 0$ algébrique en y', y et x (1) et considérons l'intégrale unique y définie par des conditions initiales y'_0, y_0, x_0, x_0 étant distinct des points ξ, points critiques fixes de l'intégrale qui peuvent, on le sait, se déterminer algébriquement antérieurement à toute discussion et qui sont en nombre fini. Cette intégrale dépend de x et des conditions initiales x_0, y_0, y'_0. Mais, comme on a $F(y'_0, y_0, x_0) = 0$, on peut dire que l'intégrale est une fonction de x, x_0 et y_0. Ceci posé, on connaît le théorème fondamental suivant :

L'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ *est une fonction* ALGÉBROÏDE *de* x *et de* y_0 *pour* $x = x_0$ *et cela quel que soit* y_0.

Plus généralement joignons par un chemin l ne passant par aucun point ξ deux points x, x_0 arbitraires distincts eux-mêmes des points ξ. Si l'on poursuit analytiquement sur l (2) l'intégrale y déterminée par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0, on arrive en x avec une valeur coïncidant avec une branche d'une certaine fonction $y = \chi(y_0)$ algébroïde en y_0. Ces théorèmes sont classiques, mais dans leur application il faut procéder avec une extrême prudence. Par exemple, il faudrait bien se garder d'en conclure que l'intégrale considérée comme fonction de la constante est une fonction analytique qui n'admet que des points singuliers algébriques ou encore, dans le cas où un nombre fini de branches de l'intégrale se permutent autour des points critiques mobiles, que l'intégrale dépend algébriquement de la constante.

Il y a, en effet, une importante distinction à faire entre les deux fonctions suivantes. D'une part, laissant x_0 et y_0 fixes, faisons déplacer x d'une façon quelconque dans le plan sans tourner autour des points ξ ; la branche d'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ se permutera avec un certain nombre d'autres branches d'intégrale $\varphi_1(x, x_0, y_0)$, $\varphi_2(x, x_0, y_0)$, ...

---

(1) Pour le raisonnement il suffit que F soit analytique en x, pourvu que les points critiques fixes ξ de l'intégrale soient en nombre fini.

(2) Il s'agit ici d'un prolongement analytique plus général que celui de Weierstrass. Sur l on pourra rencontrer un point critique *algébrique* de y. Pour ce point x, la branche d'intégrale prend la valeur y. Au delà de x, nous adopterons une quelconque des branches qui, en x, prend la même valeur y.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

D'autre part, laissons au contraire x et x_0 fixes et prolongeons dans tout son domaine d'existence par le procédé de Weierstrass la fonction analytique de y_0 : $\varphi(x, x_0, y_0) = \overline{\varphi}(y_0)$, obtenue. Il est bien évident, et cela d'après le théorème de tout à l'heure, que toutes les branches $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, appartiennent à la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$; *mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie :* il peut arriver que la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ ait au point y_0 des valeurs y_1 intégrant bien l'équation différentielle. mais dont aucune détermination ne se réduira à y_0 pour $x = x_0$ quand le point x se déplacera dans le plan d'une façon quelconque sans tourner autour des points ξ.

Avant d'étudier les circonstances dans lesquelles ce fait singulier se produit, je voudrais reproduire les exemples bien simples qu'en a donnés M. Painlevé.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad y' = \frac{y}{x(y+1)},$$

dont l'intégrale générale est

$$(2) \qquad ye^y = \frac{x}{x_0} y_0 e^{y_0}.$$

Les points ξ sont $x = 0$ et $x = \infty$ et il y a un point critique mobile

$$x = -\frac{x_0}{y_0} e^{-(1+y_0)},$$

autour duquel se permutent une infinité de branches de l'intégrale y. Ces branches épuisent toutes les branches de la fonction $y(y_0)$. Cette fonction a deux points critiques non algébriques mais logarithmiques qui sont $y_0 = 0$ et $y_0 = \infty$.

Considérons maintenant le rapport des périodes $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ d'une différentielle elliptique de première espèce comme fonction du module X et posons $x = \frac{\omega_2}{\omega_1}(X)$. Si nous remplaçons dans (1) et (2) x par cette fonction, nous voyons que l'intégrale $y(X)$ définie par les conditions initiales X_0, y_0 aura ou non un point critique mobile suivant que le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

coefficient de i de la quantité complexe $-\frac{\omega_2}{\omega_1}(X_0)\frac{1}{y_0 e^{1+y_0}}$ sera positif ou négatif; si donc y_0 est dans une région D du plan, l'intégrale aura ses points critiques fixes. Dans le reste du plan *deux* branches se permutent autour du point critique mobile. Cependant la fonction $y(y_0)$ a *une infinité* de déterminations : une ou deux d'entre elles seulement sont des intégrales qui, par permutation autour du point mobile, prennent en X_0 la valeur y_0.

Au contraire, remplaçons x par la fonction modulaire $x = \varphi(X)$. L'*intégrale générale* de la nouvelle équation sera *uniforme* si y_0 est dans une région du plan, et à deux branches dans le reste du plan. Et cependant, l'intégrale est une fonction de la constante à une infinité de branches.

Pour examiner dans quelles conditions cette circonstance peut se présenter, considérons une branche $y = \varphi(x, \overline{x_0}, \overline{y_0})$ d'intégrale définie par les conditions initiales $\overline{x_0}$, $\overline{y_0}$, $\overline{y'_0}$. Laissons $\overline{x}$ et $\overline{x_0}$ fixes et faisons déplacer le point y_0. Pour $y_0 = \overline{y_0}$ il y a une branche de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ qui coïncide avec φ. Prolongeons analytiquement cette branche : alors, ou bien, quel que soit le chemin que nous suivrons, il y aura toujours coïncidence entre $\overline{\varphi}(y_0)$ et $\varphi_i(\overline{x}, \overline{x_0}, y_0)$ ou bien il existera un point Y_0 tel que la coïncidence ait lieu jusqu'en ce point, mais plus au delà.

Considérons les points critiques mobiles de l'intégrale

$$y = \varphi(x, \overline{x_0}, y_0).$$

Les affixes de ces points dépendent analytiquement de y_0. Supposons que toutes les branches de cette fonction analytique $a(y_0)$ restent pour $y_0 = Y_0$ bien déterminées et distinctes des points ξ. Ces points tendront vers des points limites qui seront les points autour desquels se permutent les différentes branches d'intégrale définies par les conditions initiales $\overline{x_0}$, Y_0. Or, pour $y_0 = Y_0$ et dans le voisinage de Y_0, ces différentes branches coïncident avec des branches d'une certaine fonction $f(y_0)$, algébroïde pour $y_0 = Y_0$. La branche φ_i étant justement une de ces branches, on voit que la fonction $\varphi(y_0)$ coïncide

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

avec $f(y_0)$ quelque voisin que soit y_0 de Y_0 et, comme la coïncidence entre φ_i et f subsiste pour y_0 et Y_0, φ_i ne cesse pas de coïncider avec $\overline{\varphi}$ en Y_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Comment est intervenue, dans la démonstration, l'hypothèse que les points critiques mobiles a tendent vers des limites déterminées différentes des points ξ? C'est que, en effet, l'on est alors assuré que les branches qui se permutent autour des points mobiles pour $y_0 = Y_0$ sont toutes les limites des branches qui se permutaient autour des points critiques mobiles pour y_0 assez voisin de Y_0. Sans cela, on ne pourrait affirmer que la coïncidence entre $\varphi_i(x, \overline{x_0}, y_0)$ et $f(y_0)$ a encore lieu en Y_0, car $\varphi_i(x, \overline{x_0}, Y_0)$ pourrait ne pas provenir d'une permutation autour des points critiques mobiles à partir de $\varphi(x, \overline{x_0}, Y_0)$.

On voit donc que la coïncidence entre les branches de l'intégrale φ et la fonction $\overline{\varphi}$ *peut* cesser en Y_0 si le point Y_0 est tel que l'un ou plusieurs des points critiques mobiles tendent vers un point ξ ou deviennent indéterminés.

Il n'en résulte pas que, nécessairement, la coïncidence cesse dès qu'il existe de tels points Y_0. Parmi ces points Y_0 il peut s'en trouver certains tels que, y_0 tendant vers l'un d'eux sur un chemin L, la coïncidence cesse en effet. Distinguons alors deux cas :

1° Ces points Y_1 ne forment pas de ligne. Alors, partant de $\overline{y_0}$ avec une branche quelconque de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ on pourra revenir au même point y_0 avec toutes les branches de la fonction $\overline{\varphi}$ sans jamais rencontrer de tel point, car, si un chemin rencontre un point Y_1, on pourra le déformer aussi peu qu'on voudra de façon à ne plus rencontrer de point Y_1 et, d'autre part, à ne pas changer de branche. Comme on ne rencontre plus de point Y_1, la coïncidence ne cesse pas d'avoir lieu entre les branches de l'intégrale $y = \varphi(\overline{x}, \overline{x_0}, y_0)$ et de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$. On pourra donc affirmer, dans ce cas, que les branches de l'intégrale épuisent *toutes* les branches de la fonction.

2° Les points Y_1 forment des lignes. Cela exige, en particulier, que les points Y_0 forment eux-mêmes des lignes. Dans ce cas, pour revenir au point $\overline{y_0}$ après en être parti, avec *toutes* les valeurs de $\overline{\varphi}(\overline{y_0})$ il *pourra* être nécessaire de décrire des chemins rencontrant des

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

points Y_1. Alors il pourra se faire que certaines branches de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ soient des intégrales dont aucune branche ne prend au point $\overline{x_0}$ la valeur $\overline{y_0}$.

En définitive, la circonstance exceptionnelle signalée ne se présente *jamais* quand les points Y_0 ne forment pas de ligne ; elle *peut* se présenter, sans avoir nécessairement lieu, quand les points Y_0 forment des lignes.

En se reportant à l'exemple étudié plus haut, on voit que dans le premier cas les points Y_0 sont les points zéro et ∞. Quand y_0 tend vers zéro, le point critique mobile tend vers $\xi = \infty$. Quand y_0 tend vers l'infini, ce même point est indéterminé. Dans les deux exemples suivants, les points Y_0 forment des lignes.

Les points Y_0 ne sont pas forcément des points algébriques de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$, mais ils ne peuvent pas être *transcendants essentiels*, puisque les points $\overline{x_0}$ et $\overline{x}$ sont distincts des points ξ et l'on sait que dans ces conditions toutes les intégrales restent déterminées.

4. Je vais maintenant me borner au cas où l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée est une fonction à n branches au plus, permutables autour des points critiques fixes ou mobiles, et je me propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME C. — *Quand l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre est une fonction à n branches au plus, elle admet autour des points critiques mobiles un nombre m de branches* ($m \leq n$) *qui est* le même *quelle que soit l'intégrale considérée, sauf exception pour un nombre fini de valeurs de la constante.* De plus, *l'intégrale générale est une fonction algébrique de la constante.*

Je m'appuierai sur une autre proposition inédite de M. Painlevé, qui est la suivante :

Si l'intégrale générale $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ *d'une équation algébrique du premier ordre admet un nombre fini de branches, les points critiques mobiles de l'intégrale ne peuvent être indéterminés pour aucune valeur de la constante* y_0.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Considérons les points Y_0 pour lesquels les points critiques mobiles tendent vers des points ξ ou sont indéterminés. Il faut démontrer que la seconde hypothèse ne peut se présenter.

Supposons que le point y_0 tende vers Y_0 d'une façon quelconque. Il arrive alors que deux branches

$$y = \varphi_1(x, \overline{x_0}, y_0) \qquad \text{et} \qquad y = \varphi_2(x, \overline{x_0}, y_0),$$

permutables entre elles, en général, autour des points critiques mobiles, cessent de se permuter si y_0 prend la valeur Y_0. Posons

$$z_1(x) = \varphi_1(x, \overline{x_0}, Y_0) \qquad \text{et} \qquad z_2(x) = \varphi_2(x, \overline{x_0}, Y_0).$$

Les deux fonctions $z_1(x)$ et $z_2(x)$ ne se permuteront plus autour des points critiques mobiles, ni d'ailleurs, en général, autour des points critiques fixes : ce sont deux fonctions analytiques distinctes.

Quand y_0 est voisin de Y_0 sans se confondre avec Y_0, il existe un point du plan des x, soit $a(y_0)$, tel que, x tournant autour de a, on passe de $\varphi_1(x)$ à $\varphi_2(x)$ et toute la question est de savoir ce que devient ce point a quand y_0 tend vers Y_0.

Supposons que a devienne indéterminé. Comme la fonction $a(y_0)$ est analytique, le domaine d'indétermination pour $y_0 = Y_0$ est continu, et, s'il ne se réduit pas à un point, il comprend des points en dehors des points ξ; soit $x = \alpha$ un de ces points-limites. Il existe *des* valeurs de y_0 assez voisines de Y_0 pour que la différence $a - \alpha$ soit aussi petite qu'on veut.

Or, ce point α étant distinct des points ξ, l'intégrale $y = \varphi(x, \alpha, y_0)$ admet un nombre fini de branches toutes *algébroïdes* par rapport à y_0, pourvu que y_0 soit suffisamment voisin de Y_0. Pour chacune des branches, on pourra donc décrire un cercle de centre Y_0 à l'intérieur duquel la branche considérée est algébroïde, et, comme le nombre des branches est fini, on pourra, en définitive, affirmer qu'il existe un nombre ρ tel que sous la condition $|y_0 - Y_0| < \rho$ *toutes* les branches de l'intégrale $\varphi(x, \alpha, y_0)$ sont algébroïdes. De même, toutes les branches de l'intégrale $\varphi(x, x_0, y_0)$ sont algébroïdes par rapport à x_0 et y_0 dans deux cercles l'un de centre α et de rayon r, l'autre de centre Y_0 et de rayon ρ.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

Donnons en particulier à y_0 une valeur $\overline{y_0}$ prise dans le cercle $|y_0 - Y_0| < \frac{\rho}{2}$, et telle que l'on ait $|a(\overline{y_0}) - \alpha| < \frac{r}{2}$. Parmi les branches de l'intégrale $\varphi(x, a, \overline{y_0})$ se trouvent justement les deux branches φ_1 et φ_2 qui se permutent autour de a. D'autre part, les n branches de l'intégrale $\varphi(x, x_0, y_0)$ sont algébroïdes pour $|x_0 - a| < \frac{r}{2}$ et $|y_0 - \overline{y_0}| < \frac{\rho}{2}$ et, en particulier, pour $x_0 = \alpha$, $y_0 = Y_0$. Donc les deux branches φ_1, φ_2 sont deux branches d'une même fonction algébroïde pour $x_0 = \alpha$, $y_0 = Y_0$. Les deux branches $z_1(x)$, $z_2(x)$ se permutent donc autour de α, et le point Y_0 est un point ordinaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, tous les points critiques mobiles ou, si l'on veut, toutes les branches de la fonction analytique $a(y_0)$ sont bien déterminées quel que soit Y_0. Donc, si l'on considère $y = \varphi(\overline{x}, \overline{x_0}, \overline{y_0})$ comme une fonction analytique de y_0, les seuls points transcendants possibles de cette fonction sont les points Y_0 tels que l'une des branches au moins de $a(y_0)$ tende vers un point ξ quand y_0 tend vers Y_0.

Avant d'aborder la démonstration du théorème C, je ferai encore une remarque. Étant donnée une équation algébrique du premier ordre dont l'intégrale a un nombre fini de valeurs, pour une intégrale *déterminée* $y = \varphi(x, \overline{x_0}, \overline{y_0})$, ce nombre est le même en tout point x_0 du plan. Nous avons vu, en effet, dans le Chapitre précédent, qu'une fonction qui admet un nombre *borné* et variable de branches, admet certainement des coupures en dehors des points algébriques. Or, nous savons ici que les singularités de l'intégrale en dehors des points algébriques sont en nombre fini. Le résultat annoncé s'en déduit.

Abordons maintenant la démonstration du théorème C. Soit n le nombre maximum des branches de l'intégrale générale

$$y = \varphi(x, x_0, y_0).$$

D'après ce qui précède, nous pouvons donner au point x_0 une position fixe, et tout revient à étudier le nombre des branches de la fonction de x, $\varphi(x, \overline{x_0}, \overline{y_0})$, suivant les différentes valeurs de y_0. Il faut mon-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

trer que le nombre des branches de l'intégrale qui se permutent autour des points critiques mobiles ne dépend pas de y_0.

Supposons d'abord que les points Y_0, pour lesquels on a $a(Y_0) = \xi$, ne forment pas de lignes. Nous sommes alors certains que, pour avoir le nombre des branches de l'intégrale permutables autour des points critiques mobiles, on n'a qu'à considérer *toutes* les branches de la fonction analytique $\overline{\varphi}(y_0) = \varphi(\overline{x}, \overline{x_0}, y_0)$. C'est une fonction à un nombre limité de branches et dont les seuls points singuliers sont des points critiques algébriques et des points Y_0 qui sont transcendants ordinaires. Or, une fonction ne peut avoir de points transcendants ordinaires quand elle n'a pas de coupure et qu'elle a un nombre borné de branches. Donc, certainement, le nombre de ses branches ne dépend pas de y_0, et, de plus, ses seuls points singuliers sont algébriques. L'intégrale considérée comme fonction de la constante n'a que des singularités algébriques.

On pourrait encore dire : la fonction inverse $y_0(y)$ est la fonction $y_0 = \varphi(\overline{x_0}, \overline{x}, y)$. Elle n'a, elle aussi, qu'un nombre fini de branches, parce que les branches de cette fonction de y sont toutes des déterminations de l'intégrale définie par les conditions initiales $\overline{x}, \overline{y}$. La fonction $\overline{\varphi}$ et son inverse ayant un nombre fini de branches, elles ne peuvent avoir que des singularités algébriques (car elles n'ont pas de coupures). De plus, non seulement la fonction $\overline{\varphi}$ n'a que des singularités algébriques, mais c'est une fonction algébrique de la constante.

Quand les points Y_0 forment des lignes, le raisonnement précédent ne s'applique plus. Je vais montrer que ce cas ne peut pas se présenter et que, par suite, les conclusions ci-dessus sont toujours vraies.

Soit L une ligne de points Y_0. Considérons l'affixe a d'un point critique mobile comme une fonction analytique de y_0. Quand y_0 tendra vers un point de L, une branche de cette fonction au moins tendra vers un des points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; considérons la fonction suivante

$$(a - \xi_1)(a - \xi_2)\ldots(a - \xi_p) = P(a) = \Phi(y_0).$$

C'est une fonction analytique de y_0 qui peut admettre les points de L comme points *transcendants*. Cette fonction peut avoir une infinité de branches (car une fonction qui admet un nombre fini de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

branches peut très bien avoir une infinité de points critiques algébriques (1). Mais les seules singularités possibles de cette fonction Φ sont d'abord des points critiques algébriques et ensuite des points Y_0 qui peuvent être de nature *transcendante*, mais en chacun desquels la fonction prend la valeur zéro.

Prenons alors une branche déterminée de cette fonction qui tende vers zéro quand y_0 tend vers un point Y_0 de L. Considérons le domaine Δ des points y_0 dont la distance à L est inférieure à ε, et prolongeons analytiquement la branche choisie de toutes les manières possibles dans cette bande. Elle se permutera avec certaines autres branches de Φ. On peut toujours supposer que le segment de L sur lequel on a construit le domaine Δ, d'une part, et ε d'autre part, ont été choisis assez petits pour que ce prolongement ne permette pas de franchir la coupure L; en d'autres termes, on aura, par un tel choix de Δ et de ε, exclu celles des branches de Φ qui pourraient ne pas admettre L comme coupure. Alors toutes les branches permutables dans Δ avec la branche qui a été choisie au début tendront vers zéro quand le point y_0 tendra vers un point arbitraire de L d'une façon quelconque.

Je dis encore que toutes ces branches tendent *uniformément* vers zéro dans les mêmes conditions. J'entends par là qu'on peut choisir ε assez petit pour que le module de $\Phi(y_0)$ reste inférieur à un nombre η donné d'avance quelle que soit la façon dont on prolonge dans Δ la branche primitive. Supposer le contraire reviendrait à admettre que, quelque petite que soit la distance $y_0 Y_0$ (Y_0 étant un certain point de L), on aurait *des* points y_0 faisant prendre à $\Phi(y_0)$ une valeur supérieure en module à η. Il y aurait par suite une branche de fonction Φ qui, lorsque le point y_0 tendrait vers un point de L suivant un certain chemin, ne pourrait pas tendre vers zéro. Or les branches de Φ n'admettent aucun point d'indétermination. Donc en un point de L, ladite branche prendrait une valeur différente de zéro. Elle ne pourrait, par suite, être de celles qui se permutent avec la

(1) Par exemple, la fonction à deux branches définie par l'équation

$$y^2 - 2y = e^x.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

branche primitive, car on pourrait la prolonger au delà de L. Donc cette hypothèse est à rejeter.

Il suffit maintenant de reprendre la démonstration bien connue donnée par M. Painlevé dans sa Thèse pour voir que la fonction Φ doit, dans ces conditions, être identiquement nulle. Il est nécessaire de préciser et de compléter cette démonstration pour l'appliquer au cas actuel : Ayant déterminé ε de façon que $\Phi(y_0)$ soit limité en module dans Δ, nous pourrons toujours prendre sur L un arc AB assez petit pour que les conditions suivantes soient remplies : soient y' et y'' les extrémités de cet arc; posons

$$y_1 - y' = (y_0 - y')\, e^{i\alpha_1},$$
$$y_2 - y'' = (y_0 - y'')\, e^{i\alpha_2},$$

et ensuite

$$\Phi_1(y_0) = \Phi(y_1), \qquad \Phi_2(y_0) = \Phi(y_2).$$

Considérons la fonction

$$F(y_0) = \Phi(y_0)\,\Phi_1(y_0)\,\Phi_2(y_0).$$

Cette fonction est définie dans un triangle curviligne T formé par AB et les deux lignes obtenues en faisant tourner L d'un angle α_1 autour de y' et d'un angle α_2 autour de y''. Nous pourrons toujours prendre y', y'', α_1 et α_2 tels que ce triangle soit intérieur au domaine Δ dans lequel nous savons que $|\Phi(y_0)| < \eta$.

Nous définirons dans cette aire la fonction F en prolongeant de toutes les façons possibles trois branches de la fonction Φ en ayant bien soin de prendre pour valeurs initiales : pour $\Phi(y_0)$ notre branche initiale et pour $\Phi(y_1)$ et $\Phi(y_2)$ deux branches obtenues à partir de la précédente aux points y_1 et y_2, sans sortir de Δ.

Alors nous pourrons affirmer que la fonction F est une fonction analytique multiforme *bornée* dont toutes les branches sont *nulles* sur le contour de T et plus généralement en tous les points singuliers non algébriques.

Quand y_0 décrit ce domaine, le point $F(y_0)$ décrit dans son plan un domaine continu borné qui admet donc pour frontière une ligne. Or ces points frontières ne peuvent provenir ni d'un point régulier, ni d'un

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

point algébrique de F, et, comme en tous ses points non algébriques F est nulle, on voit que $F(y_0)$ est identiquement nulle. Donc une au moins des fonctions $\Phi(y_0)$, $\Phi_1(y_0)$, $\Phi_2(y_0)$ et par suite toutes les trois sont nulles. Le théorème est donc démontré.

Je remarque que la dernière partie de la démonstration précédente permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si une fonction analytique n'a, en dehors des singularités algébriques, que des points transcendants ordinaires en chacun desquels elle prend la même valeur, ces points transcendants ne peuvent former une ligne* (1).

5. *Autres applications.* — Je signalerai pour terminer deux autres applications du théorème A.

La première est relative aux fonctions uniformes et *continues* dans une aire. Considérons une telle fonction que nous supposerons analytique en tous les points de cette aire Δ sauf pour un certain ensemble de points ne comprenant pas d'aire, mais supposons que si l'on tend vers un de ces points sur un chemin quelconque la fonction tend toujours vers la même valeur variable avec le point considéré.

Les points singuliers de la fonction dans Δ ne peuvent former un ensemble dénombrable et, d'après les travaux de M. Painlevé, la fonction ne peut non plus avoir dans cette aire de ligne singulière *isolée*. Mais les théorèmes de M. Painlevé n'excluent pas le cas d'une coupure dont tous les points seraient limites de points singuliers ou de coupures. D'autre part d'après le théorème A nous pouvons affirmer qu'il ne peut y avoir aucun ensemble discontinu de points singuliers. Donc les seules singularités possibles sont des *lignes* dont chacune doit être limite de lignes. Si l'on veut, la fonction ne peut avoir qu'un ensemble parfait de lignes singulières dans Δ. A vrai dire les recherches de M. Painlevé ne portent pas sur les lignes définies d'une façon générale mais seulement sur les lignes ayant un arc. Mais il est bien vraisemblable que le résultat demeure exact dans le cas général. Quant

(1) Par exemple la fonction inverse d'une fonction uniforme qui a un nombre *fini* de points essentiels ne présente aucun ensemble continu de points singuliers.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

à l'existence d'un ensemble parfait de lignes singulières elle n'est pas incompatible avec la continuité de la fonction et l'on peut en former facilement des exemples. Mais je crois que ce cas pourrait aussi être exclu en supposant que la fonction continue dans Δ est holomorphe sur le contour de Δ, ce qui reviendrait à dire que la fonction est analytique au sens de Weierstrass dans toute l'aire, sauf sur un ensemble non superficiel.

6. En second lieu je rappelle que, d'après le théorème de MM. Poincaré et Volterra, toute équation $f(z) = a$ où f est analytique a une infinité dénombrable de racines, *au moins si a est un point non singulier de la fonction inverse*. Mais, comme le signale M. Borel (1), il n'en est peut-être plus de même si a est singulier. Supposons que f soit uniforme, je dis que, si l'ensemble des zéros de $f(z) - a$ n'est pas dénombrable, la fonction f a des coupures. En effet, soit E cet ensemble non dénombrable de zéros. L'ensemble $E + E'$ est fermé et non dénombrable. C'est donc la somme d'un ensemble parfait F et d'un ensemble dénombrable. Si E et E′ n'avaient aucun point commun, E ne contiendrait aucun point de F; E serait dénombrable, ce qui est impossible. Donc E contient au moins un point de son dérivé et le même raisonnement montre qu'il en contient un ensemble non dénombrable.

Donc la fonction $f(z) - a$ a une infinité non dénombrable de points singuliers. Mais, comme en chacun de ces points elle doit être nulle, chacun d'eux doit appartenir à une coupure d'après le théorème A.

Si les coupures sont isolées elles sont en infinité dénombrable (2), l'une d'elles au moins doit donc contenir une infinité non dénombrable de zéros de $f(z) - a$. Ceci nous amène à nous poser cette question : *Une fonction uniforme peut-elle être nulle en un ensemble non dénombrable de points d'une coupure isolée?* Question intéressante mais qui paraît bien difficile à aborder.

---

(1) *Leçons sur la théorie des fonctions,* p. 56.

(2) Car chacune peut être entourée d'une aire ne contenant aucune coupure. Or, dans un plan, des aires sans points communs sont toujours en infinité dénombrable (*voir* les Mémoires de M. G. CANTOR, *Acta,* t. II).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

J'arrête ici ces indications et les applications du théorème A. Une étude plus approfondie des ensembles discontinus de singularités et de la façon dont se comporte la fonction dans leur voisinage en élargira sans doute le champ. Qu'il me suffise d'avoir montré la nécessité et l'intérêt d'une telle étude.

Vu et approuvé :

Paris, le 28 novembre 1904,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 28 novembre 1904,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

MÉCANIQUE : Déformation des milieux continus; équations de l'élasticité.

Vu et approuvé :

Paris, le 28 novembre 1904,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 28 novembre 1904,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

36121 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 44 1 -4