

HF uf. 166.

19067. 2

46 (v)

N° D'ORDRE:

1254

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. PIERRE FATOU

ASTRONOME ADJOINT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.



1^{re} THÈSE. — SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET SÉRIES DE TAYLOR.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 ^{Pierrier} décembre 1906, devant la Commission d'examen.

MM. APPELL, *Président.*
PAINLEVÉ, } *Examinateurs.*
BOREL, }

STOCKHOLM
CENTRALTRYCKERIET

1906



UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	P. APPELL	Professeur Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	{ L. TROOST. CH. WOLF	
	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	»
	BOUSSINESQ	Physique mathém. et calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathém. et mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie, évolution des êtres organisés.
	KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
PROFESSEURS	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Ens ^m P. C. N.).
	P. JANET	Physique.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	TANNERY	Calcul différentiel et intégral.
	RAFFY	Application de l'analyse à la géométrie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	N.	Chimie biologique.
	N.	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	PUISEUX	Mécanique et astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	LEDUC	Physique.
	HADAMARD	Calcul différentiel et calcul intégral.
PROFESSEURS ADJOINTS	MATRUCHOT	Botanique.
	MICHEL	Minéralogie.
	DAGUILLON	Botanique.
	BOUVEAULT	Chimie organique.
	BOREL	Théorie des fonctions.
SECRETÉAIRE	A. GUILLET.	

SÉRIES TRIGONOMETRIQUES ET SÉRIES DE TAYLOR

A MESSIEURS

É. BOREL ET H. LEBESGUE.

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET SÉRIES DE TAYLOR

PAR

P. FATOU

à PARIS.

Introduction.

Le présent travail a pour objet l'étude de certaines questions d'ordre général concernant les séries trigonométriques et les séries de TAYLOR; il a été entrepris, en grande partie, dans le but de montrer le parti que l'on peut tirer dans ces questions des notions nouvelles de mesure des ensembles et d'intégrale définie généralisée.

Le problème de la mesure des ensembles a été abordé pour la première fois par M. G. CANTOR; ses définitions ont été précisées et complétées par M. JORDAN dans son cours d'analyse; mais c'est M. E. BOREL¹ qui a donné pour la première fois à cette notion de mesure une portée assez générale pour la rendre vraiment utile au point de vue des applications. M. BOREL a posé le problème sous une forme qui équivaut à celle-ci:²

Attacher à tout ensemble borné ponctuel (supposé à une dimension) un nombre positif ou nul qu'on appellera sa mesure et qui satisfasse aux conditions suivantes:

¹ E. BOREL. *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

² LEBESGUE. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

1°) Deux ensembles égaux ont même mesure.

2°) L'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures des ensembles composants.

3°) La mesure de l'ensemble de tous les points du segment $(0, 1)$ est 1. Le problème ainsi posé est susceptible d'une solution unique, sinon pour tous les ensembles que l'on peut concevoir comme existant, du moins pour tous ceux que l'on a pu effectivement nommer. La mesure, au sens de M. BOREL, est d'ailleurs la même que la mesure au sens de M. CANTOR, dans le cas d'un ensemble fermé; mais si l'on considère un ensemble dénombrable et dense, par exemple l'ensemble des points à abscisse rationnelle compris entre zéro et 1, la définition de M. BOREL conduira à lui attribuer comme mesure, le nombre zéro, tandis que d'après M. CANTOR sa mesure serait 1.

Dans sa thèse (intégrale, longueur, aire), parue dans les *Annali di Matematica* (1902), M. H. LEBESGUE a repris et complété le problème de la mesure d'après M. BOREL et en a fait une application des plus importantes à la définition de l'intégrale; la notion d'intégrale, d'après M. LEBESGUE, s'applique à toutes les fonctions discontinues que l'on peut nommer (par exemple à toutes les fonctions représentables analytiquement), au moins quand ces fonctions sont bornées; elle coïncide d'ailleurs avec l'intégrale au sens de RIEMANN, quand celle-ci est applicable, et jouit de toutes les propriétés essentielles de l'intégrale de RIEMANN.

Il semble que l'introduction de ces notions de mesure et d'intégrale généralisée, qui constitue un progrès important dans l'étude des ensembles ponctuels et des fonctions de variables réelles, peut également servir à résoudre des problèmes qui se posent dans des branches anciennement cultivées de l'analyse.

Déjà M. LEBESGUE, dans un mémoire paru dans les *Annales de l'École normale supérieure*, avait appliqué sa notion d'intégrale à l'étude des séries trigonométriques, et démontré entre autres choses, que si une série trigonométrique est convergente et représente une fonction bornée les coefficients de cette série sont donnés par les formules d'EULER-FOURIER où les intégrales sont prises au sens généralisé du mot. Or il existe effectivement des fonctions bornées, non intégrables au sens de RIEMANN, qui sont représentables par une série trigonométrique convergente en tout point:

ce résultat permet donc de mettre plus d'unité et de généralité dans la théorie de la série de FOURIER.

Dans ce travail je démontre un résultat analogue relatif à l'intégrale de POISSON: si une fonction harmonique régulière à l'intérieur d'un cercle y reste bornée, elle peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale de POISSON, l'intégrale étant prise au sens de M. LEBESGUE.

J'ai déduit de là une propriété générale concernant la façon dont se comporte une branche de fonction analytique uniforme au voisinage d'une coupure isolée; *si la fonction est bornée au voisinage de cette coupure (ou devient bornée par une transformation homographique), en tous les points de la coupure, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, la fonction prend une valeur déterminée, quand on s'approche de l'un de ces points suivant un chemin non tangent à la coupure.* Il y a donc dans tout intervalle, des points en infinité non dénombrable, sur la coupure, pour lesquels la fonction prend une valeur déterminée, en excluant, au besoin, les chemins tangents à celle-ci. Or on sait que, dans d'autres cas, des circonstances tout autres peuvent se présenter: la fonction modulaire, par exemple, est indéterminée en tous les points d'abscisse irrationnelle de l'axe des quantités réelles, même lorsqu'on s'approche de ces points normalement à la coupure; la propriété énoncée n'est donc pas une banalité.

C'est encore l'étude de l'intégrale de POISSON généralisée, qui m'a permis de démontrer l'existence de *fonctions analytiques uniformes possédant, sur une coupure, une infinité non dénombrable de zéros qui peut être dense dans tout intervalle.*

Les mêmes méthodes m'ont permis, dans un cas il est vrai très particulier, d'aborder l'étude des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients. On peut chercher, dans ce cas, des critères de convergence, ou supposant que la convergence ait lieu, chercher des propriétés des fonctions ainsi définies; ces problèmes qui paraissent difficiles, ont été peu étudiés. Le principal résultat que j'aie obtenue dans cet ordre d'idées est le suivant: *Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence de la série $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est de mesure nulle.* Il en résulte que si l'on a plusieurs séries de cette espèce, en nombre fini ou en infinité dénombrable, il y a dans tout intervalle, des points où elles convergent toutes simultanément.

Si, renonçant à la convergence au sens ordinaire du mot, on cherche dans quel cas une série est sommable par les procédés de la moyenne arithmétique, comme l'a fait M. FÉJER,¹ on peut énoncer des conditions de sommabilité plus générales: Si par exemple on a

$$|a_n| < \frac{C}{n^{\frac{1}{2} + \alpha}}, \quad |b_n| < \frac{C}{n^{\frac{1}{2} + \alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

on trouve que la série est au plus »doublement indéterminée», sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, et représente une fonction absolument intégrable dans l'ensemble des points où elle est définie.

J'espère aussi avoir montré que l'intérêt qui s'attache aux travaux de RIEMANN sur les conditions de représentation d'une fonction par une série trigonométrique, est loin d'être épuisé; j'ai pu facilement, déduire de l'un des théorèmes généraux de RIEMANN, ce fait qu'une série de TAYLOR dont les coefficients tendent vers zéro et dont le rayon de convergence est égal à un, est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence, ce qui n'avait été démontré que dans des cas particuliers.

J'ai divisé ce travail en deux parties, dans la première j'étudie l'intégrale de POISSON lorsque la fonction donnée sur le contour est discontinue; dans la deuxième partie j'applique les résultats de cette étude à quelques questions concernant les séries trigonométriques et la façon dont se comportent les séries de TAYLOR sur leur cercle de convergence et je fais connaître quelques propriétés des séries entières à coefficients entiers.

Enfin dans une note additionnelle je donne une démonstration simplifiée du théorème de CANTOR sur l'impossibilité de la convergence en tout point d'une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro et quelques remarques générales sur la convergence de ces séries.

Qu'il me soit permis de remercier ici les personnes qui ont bien voulu m'encourager à entreprendre ce travail: MM. PAINLEVÉ et BOREL et tout particulièrement mon ami H. LEBESGUE qui n'a cessé de s'intéresser à mes recherches et dont les conseils m'ont été fort utiles.

¹ L. FÉJER (*Sur les fonctions bornées et intégrables*, Comptes Rendus, 10 décembre 1900) et *Mathematische Annalen* (tome 57, 1904).

L'intégrale de Poisson.

1. On sait que la solution du problème de DIRICHLET dans le cas du cercle est donnée par l'intégrale

$$(1) \quad F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-u) + r^2} f(u) du$$

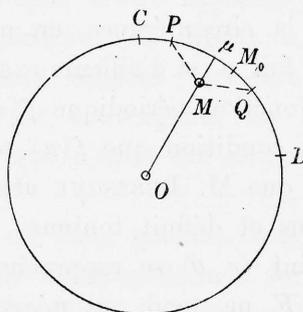
qui définit une fonction harmonique régulière à l'intérieur du cercle de rayon 1, et prenant sur la circonférence, en un point d'argument u_0 la valeur $f(u_0)$.¹ Ce dernier fait n'est d'ailleurs exact, en général, que moyennant la continuité de la fonction périodique $f(u)$, mais il importe de remarquer que, sous la seule condition que $f(u)$ soit une fonction *sommable* en valeur absolue, au sens que M. LEBESGUE attribue à ce mot, l'intégrale précédente conserve un sens et définit toujours une fonction harmonique; mais alors, lorsque le point (r, θ) se rapproche d'un point $(1, u_0)$ de la circonférence, la fonction F ne tend pas nécessairement vers une valeur déterminée. C'est l'étude des différentes particularités qui peuvent se présenter, quand $f(u)$ présente des discontinuités ou devient infini qui fait l'objet du présent chapitre.

Faisons d'abord une remarque générale: la façon dont se comporte au voisinage du point $(1, u_0)$ de la circonférence la fonction $F(r, \theta)$, ne dépend que des valeurs de la fonction $f(u)$ dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, comprenant le point u_0 à son intérieur. En effet, partagons l'intégrale (1) en deux parties, l'une relative à l'intervalle (a, b) comprenant le point u_0 , l'autre relative à l'arc complémentaire S de la circonférence; la deuxième intégrale partielle tend vers zéro quand le point $M(r, \theta)$ tend vers le point $(1, u_0)$, car le dénominateur: $1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2$, qui représente le carré de la distance d'un point de l'arc S au point M finit par devenir supérieur à un nombre positif fixe et comme par hypothèse

¹ V. p. ex.: PICARD, *Traité d'analyse*, tome I.

$\int_s |f(u)| du$ a une valeur finie, il en résulte que notre intégrale tend vers zéro comme $1 - r^2$, de telle sorte que les valeurs de $f(u)$ à l'extérieur de (a, b) n'ont aucune influence sur les valeurs limites de la fonction harmonique.

2. Supposons maintenant qu'au point $u = u_0$, la fonction $f(u)$ devienne infinie en restant positive, de telle sorte qu'elle soit continue pour $u = u_0$, à condition de lui attribuer en ce point la valeur $+\infty$. Il est facile de montrer dans ce cas que $F(r, \theta)$ tend vers $+\infty$ quand le point $M(r, \theta)$ vient à se confondre avec le point $M_0(1, u_0)$. En effet la fonction $f(u)$ sera positive dans un intervalle fini CD entourant le point M_0 .



Il suffit d'étudier la partie de l'intégrale de Poisson relative à l'arc CD . Du point M comme centre avec $(1 - r)\sqrt{2}$ comme rayon décrivons un arc de cercle qui coupe CD en deux points P et Q . On voit aisément que l'on a :

$$\text{arc } PQ = 2(1 - r) \text{ [à une quantité près de l'ordre de } (1 - r)^2 \text{]}$$

et

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} > \frac{1 - r^2}{2(1 - r)^2} > \frac{1}{2(1 - r)}, \text{ pour tous les points de } PQ$$

de sorte que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{PQ} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} f(u) du > \frac{M}{2\pi},$$

si la fonction $f(u)$ est constamment plus grande que M dans le champ

d'intégration. Choisissons alors un nombre positif δ tel que dans l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, on ait: $f(u) > M$, et prenons:

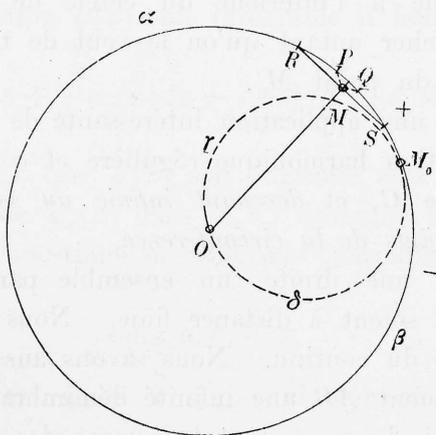
$$1 - r < \frac{\delta}{2},$$

$$|\theta - u| < \frac{\delta}{2}.$$

Dans ces conditions, tous les points de PQ étant intérieurs à l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, l'intégrale précédente sera plus grande que $\frac{M}{2\pi}$ et il en sera de même à fortiori si on étend l'intégrale à tous les points de l'arc CD .

Il en résulte que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} f(u) du$ devient plus grande que toute quantité donnée quand le point M tend par un chemin quelconque vers le point M_0 .

Examinons ensuite le cas où $f(u)$ devient infinie, en changeant brusquement de signe lorsque u traverse la valeur u_0 .



Il est bien facile de prévoir que dans ce cas la fonction harmonique est indéterminée au voisinage du point M_0 et peut s'approcher autant qu'on le veut de tout nombre réel. Pour nous en assurer menons la corde RS perpendiculaire à OM et supposons que le point M_0 soit extérieur

à RS , ce qui aura lieu si M est extérieur au cercle décrit sur OM_0 comme diamètre. Pour tous les points extérieurs à RS , on aura

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} < 1$$

et la partie correspondante de l'intégrale de POISSON restera moindre que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(u)| du$ et sera donc bornée. Si les points R, P, Q, S se trouvent du côté de M_0 où la fonction $f(u)$ prend des valeurs infinies positives les intégrales:

$$\int_{QP} \text{ et } \int_{SK}$$

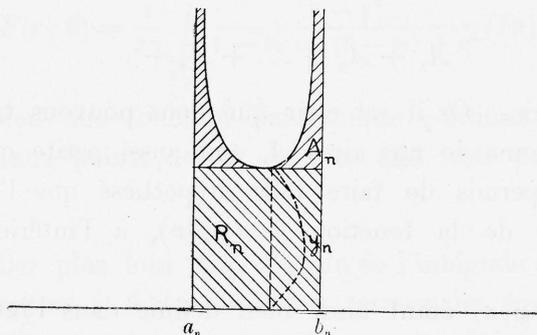
prennent d'après ce qui précède des valeurs infiniment grandes positives quand M tend vers M_0 , et il en est de même de l'intégrale de POISSON étendue à toute la circonférence.

Ainsi quand M tend vers M_0 en restant compris dans l'angle $\gamma M_0 \alpha$ des deux circonférences, $F(r, \theta)$ tend vers $+\infty$; au contraire si M tendant vers M_0 reste dans l'angle $\delta M_0 \beta$, $F(r, \theta)$ tend vers $-\infty$. D'autre part $F(r, \theta)$ étant continue à l'intérieur du cercle de rayon 1, il est clair qu'elle pourra s'approcher autant qu'on le veut de toute valeur donnée à l'avance au voisinage du point M_0 .

Nous donnerons une application intéressante de ces considérations en construisant une fonction harmonique régulière et constamment positive à l'intérieur d'un cercle C , et devenant infinie au voisinage d'une infinité non dénombrable de points de la circonférence.

Considérons, sur une droite, un ensemble parfait, de mesure nulle dont tous les points soient à distance finie. Nous savons qu'un tel ensemble a la puissance du continu. Nous savons aussi qu'il peut s'obtenir en enlevant d'un segment AB une infinité dénombrable d'intervalles, sans point commun deux à deux, et dont la somme des longueurs est égale à la longueur de AB . On les appelle ordinairement d'après M. BAIER les intervalles *contigus* à l'ensemble considéré E . Ceci rappelé, je dis qu'il est possible de déterminer une fonction continue, positive, devenant infinie en tous les points de l'ensemble E et qui soit intégrable dans l'intervalle AB .

Soit $(a_n b_n)$ un intervalle contigu à E . Je définis dans cet intervalle une fonction continue positive, devenant infinie aux deux extrémités (a_n, b_n) et intégrable entre ces limites. Soit $\varphi_n(x)$ cette fonction que nous représenterons par une courbe.



Nous poserons:

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) \quad \text{dans } (a_n b_n)$$

et

$$\varphi(x) = +\infty \quad \text{pour tous les points de } E.$$

Pour que la fonction $\varphi(x)$ soit intégrable il faut que la série

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x) dx + \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x) dx + \dots + \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x) dx + \dots$$

soit convergente. Pour que $\varphi(x)$ soit continue aux points de E , il faut que le minimum y_n de $\varphi_n(x)$ dans $(a_n b_n)$ devienne infini avec n . Il est aisé de voir que ces conditions ne sont pas contradictoires.

En effet, posons:

$$\text{long. } a_n b_n = s_n$$

l'intégrale $\int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x) dx$ est égale à $s_n y_n$ (qui représente l'aire du rectangle R_n), augmenté de l'aire A_n du domaine compris entre la courbe: $y = \varphi_n(x)$, les deux asymptotes verticales et la tangente au point le plus bas.

Or il est possible de choisir les nombres $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ augmentant indéfiniment avec n et tels que la série:

$$s_1 y_1 + \dots + s_n y_n + \dots$$

soit convergente, car la série $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$ étant convergente on peut trouver une série à termes positifs également convergente dont les termes deviennent infiniment grands par rapport à ceux de la première.¹ Ayant ainsi déterminé l'ordonnée du point le plus bas de chacune de nos courbes: $y = \varphi_n(x)$, nous devons les construire de telle sorte que la somme des aires

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

ait une valeur finie. Or il est clair que nous pouvons tracer nos courbes de façon que chacune de nos aires A_n soit aussi petite que nous voulons.² Il est d'ailleurs permis de faire telle hypothèse que l'on voudra sur la nature analytique de la fonction $y = \varphi_n(x)$, à l'intérieur de l'intervalle (a_n, b_n) .

La fonction $\varphi(x)$ étant ainsi bien définie dans l'intervalle AB , sera intégrable dans AB ; en outre elle sera continue: cela est évident pour les points qui n'appartiennent pas à E . Soit x' un point de E , $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, des points tendant vers x' . Si x_n appartient à E , on a:

$$\varphi(x_n) = \varphi(x') = +\infty.$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ appartiennent à des intervalles contigus à E , il faut, ou bien qu'ils appartiennent à des intervalles de rang de plus en plus élevés et alors $\varphi(x_n)$ tend vers l' ∞ , en vertu de la façon dont nous avons choisi les minima des fonctions $\varphi_n(x)$. Si au contraire les x_n restent dans des intervalles de rang fini, il faut qu'ils tendent vers l'extrémité de l'un de ces intervalles, et $\varphi(x_n)$ devient encore infini.

Ainsi la fonction $\varphi(x)$, qui est intégrable ne cesse pas d'être continue aux points de E , où elle prend la valeur $+\infty$.

¹ Voir par exemple: BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

² Si l'on choisit, par exemple, des axes tels que les deux asymptotes soient les droites: $x = \pm 1$, l'origine étant le point le plus bas de la courbe, en posant:

$$y = \frac{\varepsilon x^2}{+ \sqrt{1 - x^2}}$$

on a une courbe telle que l'aire comprise entre elle, ses deux asymptotes et l'axe des x est égale à $\frac{\pi}{2}\varepsilon$ et peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant convenablement ε .

Soit donc E un ensemble parfait de mesure nulle de points de la circonférence du cercle C de rayon 1; nous construisons comme il vient d'être expliqué une fonction continue, périodique, devenant infinie aux points de E et sommable, et nous envisageons l'intégrale de Poisson:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} f(u) du$$

qui représente bien une fonction harmonique continue sur C , et prenant la valeur $+\infty$ aux points de E ; de plus elle reste positive à l'intérieur de C .

3. Pour aller plus loin dans l'étude de l'intégrale de Poisson prenons la dérivée par rapport à θ des différents termes des égalités:

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} f(u) du \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction harmonique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} F(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2) 2r \sin(u - \theta)}{[1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2]^2} f(u) du \\ &= \sum_{n=1}^{n=\infty} nr^n (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que si en un point u_0 , la fonction $f(u)$ admet une dérivée finie $f'(u_0)$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ tend vers $f'(u_0)$ quand le point (r, θ) se rapproche indéfiniment du point $(1, u_0)$, suivant le rayon qui y aboutit. Nous donnons donc à θ une valeur constante (on peut prendre $\theta = 0$) et nous cherchons si l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2) 2r \sin u}{[1 - 2r \cos u + r^2]^2} f(u) du$$

¹ La dérivation sous le signe \int pour $r < 1$ se justifie très aisément.

tend vers une limite quand r tend vers 1. En faisant $f(u) = u$ (dans $(-\pi, +\pi)$) la fonction $F(r, \theta)$ est connue et l'on trouve ainsi que l'intégrale précédente a pour valeur:

$$\frac{2r}{1+r}$$

et tend vers 1 en même temps que r . On conclut de là qu'on peut sans restreindre la généralité, supposer:

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Posant pour abrégier l'écriture

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2} = H$$

nous écrivons l'intégrale précédente sous la forme:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{2r \sin u}{1-2r\cos u+r^2} f(u) du.$$

Or si dans l'expression $\frac{2r \sin u}{1-2r\cos u+r^2}$ on pose $r=1$, elle devient $\frac{1}{\operatorname{tang} \frac{u}{2}}$,

et l'intégrale se réduit à:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{f(u)}{\operatorname{tang} \frac{u}{2}} du$$

qui tend vers zéro avec $1-r$, car $f(u)$ ayant une dérivée nulle pour $u=0$, $\frac{f(u)}{u}$ ou $\frac{f(u)}{\operatorname{tang} \frac{u}{2}}$ tend vers zéro avec u , de sorte que la fonction qui

multiplie H dans l'intégrale ci-dessus étant continue pour $u=0$, on se trouve dans le cas classique de l'intégrale de POISSON.

Tout revient donc à démontrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \left\{ \frac{2r \sin u}{1-2r\cos u+r^2} - \frac{\sin u}{1-\cos u} \right\} f(u) du$$

a aussi une limite nulle, ce qui se voit aisément en la mettant sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{(1-r)^2}{1-2r \cos u + r^2} \frac{f(u)}{\operatorname{tang} \frac{u}{2}} du$$

car le second facteur qui figure sous le signe \int étant toujours compris entre 0 et 1 l'intégrale précédente est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \left| \frac{f(u)}{\operatorname{tang} \frac{u}{2}} \right| du$$

qui tend vers zéro d'après un raisonnement que nous venons de faire.

Il est à remarquer que le résultat établi subsiste lorsqu'on suppose seulement que:

$$\lim_{a=0} \frac{f(0+a) - f(0-a)}{2a}$$

existe et est finie; c'est ce qu'on voit facilement en réunissant, dans les intégrales qui précèdent, les éléments qui correspondent à des valeurs égales et de signe contraire de u . On voit aussi sans peine qu'il n'y a rien de changé si cette limite est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Supposons maintenant que la fonction dérivée $f'(u)$ existe dans tout un intervalle et soit continue en un point u_0 de cet intervalle. Nous allons montrer que, dans ces conditions, la fonction harmonique $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ prend la valeur $f'(u_0)$ au point u_0 , quel que soit le chemin par lequel on parvient à ce point.

En effet la fonction $f'(u)$ étant finie et continue en u_0 est bornée dans un intervalle fini $s = [A, B]$ enfermant ce point; soit S l'arc complémentaire de s : l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(1-r^2)2r \sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r \cos(u-\theta)]^2} f(u) du$$

a pour limite zéro, comme le montre un raisonnement déjà employé, et l'on a d'autre part

$$\frac{1}{2\pi} \int_s \frac{(1-r^2)2r \sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r \cos(u-\theta)]^2} f(u) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(u-\theta)} f(u) \right]_A^B + \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(u-\theta)} f'(u) du$$

l'intégration par parties étant justifiée par ce fait que dans s la fonction $f'(u)$ est bornée et admet son intégrale indéfinie comme fonction primitive. La partie tout intégrée s'évanouit à la limite et l'autre tend vers $f'(u_0)$ lorsque le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$.

En résumé, étant donnée une fonction $f'(u)$ égale à la dérivée d'une fonction continue $f(u)$ de période 2π ,¹ il est possible de déterminer une fonction harmonique régulière à l'intérieur d'un cercle et satisfaisant aux conditions suivantes:

1° en tout point d'argument u_0 de la circonférence, tel que $f'(u_0)$ ait une valeur déterminée, finie ou infinie, la fonction harmonique prend la valeur $f'(u_0)$ quand on s'approche de ce point suivant le rayon;

2° en tout point u_0 pour lequel $f'(u)$ est finie et continue la fonction harmonique prend la valeur $f'(u_0)$, quel que soit le chemin suivi.

Remarquons d'ailleurs que $f'(u)$ n'étant pas nécessairement bornée peut n'être pas intégrable, de sorte que la solution de problème de DIRICHLET (étendu) que nous venons d'obtenir, ne peut pas toujours se mettre sous la forme d'une intégrale de POISSON.

Les résultats qui précèdent vont nous permettre d'étudier l'intégrale de POISSON lorsque la fonction $f(u)$ est une fonction périodique, bornée et sommable; en effet, d'après un théorème de M. LEBESGUE, pour un ensemble de valeurs de u dont le complémentaire est de mesure nulle, $f(u)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie $F(u)$ (on peut supposer $F(u)$ périodique, en retranchant de $f(u)$ la constante $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) du$). On peut alors employer l'intégration par parties et écrire

¹ On peut évidemment supposer que $f(u)$ présente des infinis ou des discontinuités isolées pourvu qu'elle soit absolument intégrable.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u) du = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial H_1}{\partial u} F(u) du = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} F(u) du;^1$$

on voit alors que pour tous les points u_0 où $f(u)$ est la dérivée de $F(u)$, l'intégrale de POISSON tend vers $f(u_0)$, quand r tend vers 1, θ restant égal à u_0 (c. a. d. lorsqu'on chemine suivant un rayon).

Réciproquement d'ailleurs, si la fonction harmonique $F(r, \theta)$, régulière à l'intérieur du cercle de rayon 1, y reste plus petite en module qu'un nombre fixe, et si l'on a:

$$\lim_{r=1} F(r, \theta) = f(\theta) \text{ [sauf peut être pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de } \theta \text{]}$$

la fonction F est celle qui est donnée par l'intégrale de POISSON.

En effet: soit $r < R < 1$. Nous avons

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(R, u) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(u - \theta)} du.$$

Laisant r et θ fixes, faisons tendre R vers l'unité; la fonction sous le signe \int reste inférieure en valeur absolue à un nombre positif fixe, et tend vers $\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - u)} f(u)$, [sauf pour un ensemble de mesure nulle].

Nous sommes donc en droit d'appliquer le théorème de M. LEBESGUE sur l'interversion des signes \lim et \int ,² et nous pouvons écrire:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u) du.$$

Ainsi, le problème de DIRICHLET dans le cas du cercle (avec le sens élargi que nous lui attribuons) n'a qu'une solution, si l'on assujettit la fonction harmonique inconnue à être bornée à l'intérieur du cercle. Des considérations analogues vont nous permettre de donner, en passant, une démonstration simple d'une identité importante, se rattachant à la multiplication des séries de FOURIER.

¹ Nous appelons H_1 ce que devient H quand on y remplace u par $(u - \theta)$: H_1 est donc fonction de r, θ, u .

² *Leçons sur l'intégration et les fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars 1904), page 114.

Nous avons:

$$F(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (r < 1)$$

les a_n et b_n étant les coefficients de la série de FOURIER de $f(\theta)$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $F(r, \theta)$ et intégrons de $-\pi$ à $+\pi$; il est permis d'intégrer terme à terme, car la série du second membre est uniformément convergente si $r < 1$; on a ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta &= a_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) d\theta \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty} &\left[a_n r^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \cos n\theta d\theta + b_n r^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \sin n\theta d\theta \right]. \end{aligned}$$

Or on a évidemment:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \cos n\theta d\theta = a_n r^n,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \sin n\theta d\theta = b_n r^n,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) d\theta = 2a_0.$$

La formule précédente devient donc:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n}.$$

Faisons tendre r vers 1; d'après ce qui a été dit plus haut, le premier membre tend vers:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

Il en résulte que la série de puissances de r , à coefficients positifs, qui figure au second membre, reste convergente pour $r = 1$, car dans le cas contraire elle deviendrait infinie pour r tendant vers 1; l'application du second théorème d'ABEL sur les séries de puissances nous donne alors:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

égalité qui remonte à PARSEVAL et sur laquelle M. HURWITZ est revenu dans un article récent des *Mathematische Annalen*;¹ elle est démontrée ici sous la seule condition que $f(\theta)$ soit une fonction bornée, sommable au sens de M. LEBESGUE. Essayons d'étendre ce résultat au cas où la fonction $f(u)$ est une fonction non bornée dont le carré est intégrable; ayant choisi des nombres $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ croissant de 0 à $+\infty$, nous regardons $f(u)$ comme la limite des fonctions $f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u), \dots$ égales à zéro dans l'ensemble mesurable $E_n[|f(u)| > l_n]$ et à $f(u)$ pour les autres valeurs de u ; nous considérons également les intégrales de POISSON $F_1(r, \theta) \dots F_n(r, \theta) \dots$ correspondant à $f_1(u), f_2(u), \dots$. Quand l_n tend vers l'infini, $\int_{-\pi}^{+\pi} f_n(u) du$ tend vers $\int_{-\pi}^{+\pi} f(u) du$, et $\int_{-\pi}^{+\pi} f_n^2(u) du$ tend en croissant vers $\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du$; de même, pour des valeurs fixes de r et θ , $F_n(r, \theta)$ tend vers $F(r, \theta)$ et comme on a toujours

$$|F_n(r, \theta)| < \frac{2}{\pi} \frac{1+r}{1-r} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(u)| du$$

on peut écrire, d'après un théorème connu sur l'intégration:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} F_n^2(r, \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta.$$

Mais $f_n(u)$ étant une fonction bornée, nous avons d'après ce qui précède:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F_n^2(r, \theta) < \int_{-\pi}^{+\pi} f_n^2(u) du < \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du$$

d'où, en vertu de l'égalité (1)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta < \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du$$

c'est à dire:

$$2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n} < \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du$$

¹ *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Functionen* (*Mathematische Annalen*, tome 57, 1903). — Voir aussi STEKLOFF (*Comptes Rendus*, 10 nov. 1902). — PARSEVAL, sav. étr. (tome I, 1806).

on en conclut que la série en r du premier membre, devant rester bornée, converge encore pour $r = 1$, et l'on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du \geq 2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

En réalité l'égalité a bien lieu, mais ce point est un peu plus délicat à démontrer. Nous y reviendrons ultérieurement.

Dans tous les cas, pour toute fonction bornée ou non bornée, dont le carré est intégrable, la série formée par les carrés des coefficients de sa série de FOURIER est convergente.¹

4. Considérons maintenant la fonction harmonique obtenue en dérivant deux fois l'intégrale de POISSON par rapport à l'argument

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u) du.$$

Je vais démontrer que si pour une valeur u_0 de u , la fonction $f(u)$ admet une dérivée seconde généralisée, c'est à dire si:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) + f(u_0 - \Delta u) - 2f(u_0)}{\Delta u^2} = \varphi(u_0)$$

on a également:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial^2 F(r, u_0)}{\partial \theta^2} = \varphi(u_0).$$

On verra sans peine qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer

$$u_0 = f(u_0) = \varphi(u_0) = 0.$$

L'intégrale précédente, en posant: $\theta = 0$, se met alors aisément sous la forme:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} \frac{2r(1-r^2)}{\Delta^2} [2r \sin^2 u + 2r - (1+r^2) \cos u] [f(u) + f(-u)] du,$$

$$\Delta = 1 + r^2 - 2r \cos u,$$

¹ Il peut être utile de remarquer que si la série $\sum a_n^2 + b_n^2$ est convergente, les séries $\sum \frac{a_n}{n^a}$, $\sum \frac{b_n}{n^a}$ sont absolument convergentes pour $a > \frac{1}{2}$.

et l'on a

$$\lim_{u=0} \frac{f(u) + f(-u)}{u^2} = 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

Il s'agit de prouver que cette intégrale tend vers zéro avec $1-r$. Nous poserons encore pour abrégier l'écriture:

$$f(u) + f(-u) = g(u),$$

$$\frac{1-r^2}{\Delta} = H.$$

Nous décomposons I en plusieurs termes. Soit d'abord

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi H \frac{4r^2 \sin^2 u}{\Delta^2} g(u) du.$$

Pour $r=1$, le second facteur sous le signe \int devient:

$$\frac{4 \sin^2 u}{4(1 - \cos u)^2} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}}$$

et comme $\frac{g(u)}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}}$ tend vers zéro avec u , c'est à dire est continue pour

$u=0$, on en conclut que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi H \frac{g(u)}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}} du$$

tend vers zéro avec $1-r$.

On a d'ailleurs:

$$\frac{4r^2 \sin^2 u}{\Delta^2} - \frac{\sin^2 u}{(1 - \cos u)^2} = \frac{(1-r)^2}{\Delta} \frac{(1+r)^2}{\Delta} - 4r \cos u \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}},$$

$$\frac{(1-r)^2}{\Delta} < 1, \quad \frac{(1+r)^2}{\Delta} - 4r \cos u = \frac{\Delta + 2r(1 - \cos u)}{\Delta} < 2$$

de sorte que le terme complémentaire de I_1 est plus petit en valeur absolue que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} H \left| \frac{2g(u)}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}} \right| du$$

qui a pour limite zéro d'après un raisonnement plusieurs fois employé. On a donc

$$\lim_{r=1} I_1 = 0.$$

Considérons maintenant le terme

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} H \left[\frac{4r^2 - 2r(1+r^2)\cos u}{\Delta^2} \right] g(u) du$$

pour $r = 1$, le facteur entre parenthèses devient:

$$\frac{1}{1 - \cos u} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{u}{2}}$$

et nous voyons comme plus haut que l'intégrale

$$\int_0^{\pi} H \frac{g(u)}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}} du$$

tend vers zéro.

Il ne reste donc plus à considérer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} H \left[\frac{4r^2 - 2r(1+r^2)\cos u}{\Delta^2} - \frac{1}{1 - \cos u} \right] g(u) du$$

qui se met aisément sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} H \frac{(1-r)^2}{\Delta^2(1-\cos u)} [\Delta + 2r \sin^2 u] g(u) du$$

et que nous décomposons encore en deux parties correspondant aux deux termes de la parenthèse. Nous aurons d'abord à considérer l'intégrale:

$$\int_0^{\pi} H \frac{(1-r)^2}{\Delta} \frac{g(u)}{1-\cos u} du$$

dont on voit de suite que sa limite est nulle. Puis:

$$\int_0^{\pi} H \left[\frac{2r(1-r)^2 \sin^2 u}{\Delta^2} \right] \frac{g(u)}{1-\cos u} du.$$

Or le second facteur reste borné quand r tend vers 1, car on a

$$\frac{(1-r)^2 \sin^2 u}{\Delta^2} = \left[\frac{(1-r) \sin u}{\Delta} \right]^2 = \left[\frac{(1-r) \sin u}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{u}{2}} \right]^2.$$

La quantité élevée au carré est donc plus petit que

$$\frac{\sin u}{1-r}, \quad \text{d'une part}$$

et que

$$\frac{(1-r)}{2r \operatorname{tang} \frac{u}{2}}, \quad \text{d'autre part,}$$

et reste bornée.

On en déduit que l'intégrale précédente est comparable à

$$\int_0^{\pi} H \frac{|g(u)|}{u^2} du$$

et a par suite pour limite zéro, et notre proposition se trouve complètement démontrée.¹

Nous pouvons aussi démontrer que si dans un certain intervalle (A, B) la dérivée seconde généralisée $\varphi(u)$ de $f(u)$ est bornée, et continue en un

¹ On peut l'exprimer de cette façon: si $f(u)$ est la dérivée seconde généralisée d'une fonction périodique et continue: $g(u)$, on a:

$$f(u) = \lim_{r=1} [-A_1 r - 4A_2 r^2 - \dots - n^2 A_n r^n - \dots]$$

$A_0 + A_1 + A_2 + \dots$ étant la série de FOURIER de $g(u)$.

point u_0 de cet intervalle, la fonction harmonique $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ prend au point $(1, u_0)$, suivant tous les chemins qui y aboutissent, une valeur limite égale à $\varphi(u_0)$. Pour cela il suffit de remarquer comme nous l'avons fait plus haut, que la fonction $\varphi(u)$ est sommable dans l'intervalle AB , et qu'en outre

$$\int_a^u \int_a^v \varphi(w) dw dv$$

est égal à $f(u)$, à un terme linéaire près, comme le démontre M. LEBESGUE dans son mémoire sur les séries trigonométriques.¹

On pourra alors appliquer à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{\partial^2 H_1}{\partial u^2} f(u) du$$

deux intégrations par parties ce qui nous ramènera à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} H_1 \varphi(u) du$$

à laquelle s'applique le raisonnement classique de M. SCHWARZ. Si l'on remarque que les parties tout intégrées s'évanouissent à la limite et qu'il en est de même de

$$\int_{C(AB)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u) du \quad (\text{étendue à l'arc complémentaire de } AB)$$

on obtient le résultat annoncé.

Nous aurons l'occasion, tout à l'heure, de tirer plusieurs conséquences intéressantes des propositions des paragraphes 3 et 4.

¹ Annales de l'École normale, t. 20, p. 491. M. LEBESGUE remarque que $\varphi(u)$ étant bornée, il en est de même du rapport

$$\frac{f(u+a) + f(u-a) - 2f(u)}{a^2}$$

à cause d'une extension, qu'il donne, du théorème des accroissements finis à la dérivée seconde généralisée. Partant de la relation

$$\varphi(u) = \lim \frac{f(u+a) + f(u-a) - 2f(u)}{a^2}$$

il intègre deux fois de suite les deux membres, en intervertissant, comme il est permis, les signes \lim et \int . On a ainsi le résultat énoncé dans le texte.

Mais faisons voir encore que les résultats obtenus sur les valeurs limites de la fonction $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ subsistent lorsqu'on considère, au lieu de chemins normaux à la circonférence, des chemins faisant des angles finis avec celle-ci. Reprenons donc l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2)2r \sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r \cos(u-\theta)]^2} f(u) du = \frac{\partial}{\partial \theta} F(r, \theta)$$

et supposant toujours $f(0) = f'(0) = 0$, faisons tendre θ et $1-r$ vers zéro, en supposant que le rapport $\frac{\theta}{1-r}$ reste borné et inférieur à K .

D'après ce qui a été dit plus haut, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-u)+r^2} \frac{\sin u}{1-\cos u} f(u) du$$

tend vers zéro quand $1-r$ et θ tendent vers zéro.

Il suffira donc de considérer:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 \left[\frac{2r \sin(u-\theta)}{1+r^2-2r \cos(u-\theta)} - \frac{\sin u}{1-\cos u} \right] f(u) du.$$

La quantité entre parenthèse s'écrit;

$$\begin{aligned} & \frac{2r \sin(u-\theta) + 2r \sin \theta - (1+r^2) \sin u}{(1-\cos u)[1+r^2-2r \cos(u-\theta)]} \\ = & \frac{2r[\sin(u-\theta) + \sin \theta - \sin u]}{(1-\cos u)[1+r^2-2r \cos(u-\theta)]} - \frac{(1-r)^2}{1+r^2-2r \cos(u-\theta)} \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{u}{2}}. \end{aligned}$$

Le second terme du second membre donnera lieu à une intégrale tendant vers zéro avec $1-r$, d'après un raisonnement connu.

Le premier terme s'écrit:

$$\frac{2r \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{u-\theta}{2}}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{u-\theta}{2}} \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} < \frac{Kr(1-r) \sin \frac{u-\theta}{2}}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{u-\theta}{2}} \frac{1}{\sin \frac{u}{2}}$$

(en valeur absolue)

il est donc plus petit en valeur absolue, d'une part que:

$$\frac{K \sin \frac{u - \theta}{2}}{1 - r} \frac{1}{\sin \frac{u}{2}}$$

et d'autre part que:

$$\frac{K(1 - r)}{4 \sin \frac{u - \theta}{2}} \frac{1}{\sin \frac{u}{2}};$$

donc, dans tous les cas, il est inférieur à $\frac{K}{\sin \frac{u}{2}}$. On en conclut que l'inté-

grale qu'il faut démontrer tendre vers zéro est comparable à celle-ci:

$$\frac{K}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \left| \frac{f(u)}{\sin \frac{u}{2}} \right| du$$

dont l'évanouissement à la limite résulte du raisonnement classique de M. SCHWARZ.

Il importe d'ailleurs de remarquer que ce qui précède suppose l'existence de la dérivée de $f(u)$ et non pas seulement de la dérivée généralisée

$$\left[\lim \frac{f(u + \Delta u) - f(u - \Delta u)}{2\Delta u} \right].$$

5. On pourrait étudier d'une façon analogue la façon dont se comportent au voisinage de la circonférence les dérivées du premier et du second ordre de $F(r, \theta)$ par rapport à la variable r ; mais ce qui sera plus intéressant pour nous, ce sera l'étude de la fonction harmonique conjuguée de F , et représentant la partie imaginaire de la série de TAYLOR dont F serait la partie réelle; cette fonction $\Phi(r, \theta)$ est définie, à une constante additive près, qui reste arbitraire, par la relation:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2r \sin(u - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(u - \theta)} f(u) du.$$

Supposant d'abord $f(u)$ finie, continue et périodique nous allons rechercher à quelle condition $\Phi(r, \theta)$ tend vers une limite quand r tend vers l'unité, θ restant fixe, et quelle est cette limite.

Posons:

$$f(\theta + t) - f(\theta - t) = \varphi(t),$$

$$t = u - \theta,$$

$$1 + r^2 - 2r \cos t = \Delta$$

nous aurons à étudier ce que devient l'intégrale:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} \frac{2r \sin t}{\Delta} \varphi(t) dt$$

quand $1 - r$ tend vers zéro. Nous posons: $\varepsilon = \arcsin(1 - r)$, et nous divisons le champ d'intégration en deux parties $(0, \varepsilon)$ et $(\varepsilon, +\pi)$.

L'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{2r \sin t}{\Delta} \varphi(t) dt$$

est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{1 - r} \times \max. \text{ de } |\varphi(t)| \text{ dans l'intervalle } (0, \varepsilon)$$

et tend vers zéro avec ε , et même uniformément quel que soit θ , à cause de la continuité de f .

Nous avons ensuite

$$(I) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{2r \sin t}{\Delta} \varphi(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{tang} \frac{t}{2}} dt$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{(1 - r)^2}{\Delta} \frac{\sin t}{1 - \cos t} \varphi(t) dt = I_1 + I_2.$$

La deuxième intégrale tend vers zéro avec ε ou $1 - r$, et même uniformément; on a en effet

$$\Delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2},$$

$$\frac{(1 - r)^2}{\Delta} \frac{\sin t}{1 - \cos t} < \frac{(1 - r)^2 \cos \frac{t}{2}}{4r \sin^3 \frac{t}{2}} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

d'où:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{(1 - r)^2}{\Delta} \frac{\sin t}{1 - \cos t} dt < \frac{1}{2\pi r} \left[\left(\frac{1 - r}{2 \sin \frac{t}{2}} \right)^2 \right]_{\varepsilon}^{\eta} < \frac{1}{2\pi r}$$

Si nous prenons $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, nous pourrions donc décomposer l'intégrale I_2 en deux parties correspondant aux intervalles $(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}})$ et $(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, +\pi)$.

La première partie sera plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2\pi r}$, multiplié par le maximum de $|\varphi(t)|$ dans l'intervalle $(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}})$ et tendra uniformément vers zéro avec ε .

La seconde partie sera plus petite que:

$$\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{1 - r}{2 \sin \frac{\eta}{2}} \right)^2 \cdot M$$

M désignant le module maximum de $\varphi(t)$ dans $(0, \pi)$; le facteur élevé au carré ayant une limite nulle, cette deuxième partie tend aussi vers zéro uniformément. *Donc pour que $\Phi(r, \theta)$ ait une limite pour $r = 1$, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$(2) \quad \int_{\varepsilon}^{+\pi} [f(\theta + t) - f(\theta - t)] \cotang \frac{t}{2} dt$$

ait une limite quand ε tend vers zéro par valeurs positives et pour que $\Phi(r, \theta)$ tend uniformément vers la limite quand r tend vers l'unité il faut et il suffit que l'intégrale (2) tende uniformément vers la limite.

Si cette condition est remplie, la fonction harmonique $\Phi(r, \theta)$ prendra

sur le cercle de rayon 1, une suite de valeurs continues et bien déterminées représentées au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près, par la limite de l'expression (2) quand ε tend vers zéro; ce sera encore, si l'on veut, la valeur principale (au sens de CAUCHY) de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta + t) \cotang \frac{t}{2} dt.$$

On voit en particulier que si $f(u)$ est à nombres dérivés bornés ou encore satisfait à la condition:

$$(3) \quad |f(u + \delta) - f(u)| < k |\delta|^a$$

k et a étant des constantes positives, la fonction $\Phi(r, \theta)$ sera uniformément continue à l'intérieur du cercle et sur le cercle.

Je dis de plus que $f(u)$ satisfaisant à la condition (3); la fonction conjuguée:

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(u)] \cotang \frac{t-u}{2} dt$$

satisfera à une condition analogue.

Donnons à u l'accroissement Δu , nous aurons:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi(u + \Delta u) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(u + \Delta u)] \cotang \frac{t-u-\Delta u}{2} dt, \\ \varphi(u + \Delta u) - \varphi(u) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{f(t) - f(u + \Delta u)}{\tang \frac{t-u-\Delta u}{2}} - \frac{f(t) - f(u)}{\tang \frac{t-u}{2}} \right] dt. \end{aligned}$$

La fonction sous le signe \int peut s'écrire

$$(5) \quad \frac{f(t) - f(u + \Delta u)}{\sin \frac{t-u}{2} \sin \frac{t-u-\Delta u}{2}} \sin \frac{\Delta u}{2} + \frac{f(u) - f(u + \Delta u)}{\tang \frac{t-u}{2}}$$

¹ La fonction sous le signe \int est dans le cas actuel absolument intégrable; il est donc inutile de parler ici de valeur principale.

(ce qui est compatible avec la condition 6, pour Δu suffisamment petit) on obtient:

$$|\varphi(u + \Delta u) - \varphi(u)| < (C' + C'') |\Delta u|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Une condition de la forme (3) s'appelle généralement condition de LIPSCHITZ; nous pouvons donc dire que *si la partie réelle d'une série de Taylor est continue sur son cercle de convergence et satisfait à une condition de Lipschitz, la partie imaginaire est également continue et satisfait à une condition de même forme.*¹

Nous avons supposé dans ce qui précède la fonction $f(u)$ finie et continue de 0 à 2π ; on voit sans peine que nos conclusions subsistent si la fonction $f(u)$, supposée intégrable, n'est continue que dans un certain intervalle.

Les raisonnements précédents montrent aussi que si $f(u)$ est une fonction bornée et sommable, à laquelle correspond la fonction harmonique $F(r, \theta)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction harmonique conjuguée $\Phi(r, \theta)$ reste bornée à l'intérieur du cercle de convergence est que l'intégrale

$$\int_{\varepsilon^2}^{\pi} [f(\theta + t) - f(\theta - t)] \cotang \frac{t}{2} dt$$

reste bornée quels que soient ε et θ . La fonction f ne peut pas dans ce cas, avoir des discontinuités de première espèce, car si f présente une telle discontinuité au point θ , $\Phi(r, \theta)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand r tend vers 1.

En résumé, nous avons pu, grâce, surtout à l'extension si importante de la notion d'intégrale due à M. LEBESGUE, faire l'étude de l'intégrale de POISSON dans des cas bien plus étendus que ceux qui avaient été examinés jusqu'ici.

Des différents résultats acquis dans ce chapitre, nous retiendrons particulièrement le suivant: *l'intégrale de Poisson, correspondant à une fonction périodique, bornée et sommable, représente une fonction harmonique qui, en tous les points de la circonférence, (sauf peut-être aux points d'un ensemble*

¹ La série est alors uniformément convergente sur son cercle de convergence, comme il résulte de l'étude des séries de FOURIER.

de mesure nulle) prend une valeur bien déterminée lorsqu'on tend vers l'un de ces points en suivant un chemin non tangent à la circonférence.

Le fait serait d'ailleurs évident si la fonction $f(u)$ était intégrable au sens de RIEMANN, car ses points de discontinuité formeraient alors un ensemble de mesure nulle; mais nous verrons combien il est nécessaire de se placer au point de vue tout à fait général que nous avons adopté.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude de la série de Taylor sur son cercle de convergence.

1. Considérons une série de TAYLOR dont nous supposons dans tout ce qui suit le rayon de convergence égal à l'unité; soit

$$(1) \quad \varphi(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + \dots$$

Si nous posons:

$$c_n = a_n - ib_n,$$

$$\zeta = re^{i\theta}$$

elle se mettra sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\zeta) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta), \\ P(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n, \\ Q(r, \theta) = -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n. \end{array} \right.$$

Les coefficients a_n et b_n sont donnés par les formules: ¹

¹ Voir au sujet de ces formules: HARNACK, *Fundamentalsätze der Functionentheorie* Math. Annalen, tome 21.

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta, \\ b_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Q(r, \theta) d\theta, \\ a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{+\pi} Q(r, \theta) \sin n\theta d\theta \\ b_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{+\pi} -Q(r, \theta) \cos n\theta d\theta \end{array} \right.$$

dans lesquelles on donne à r une valeur plus petite que 1. Si, lorsque r tend vers 1, $P(r, \theta)$ et $Q(r, \theta)$ tendent uniformément vers $f(\theta)$ et $g(\theta)$ (fonctions continues de θ), autrement dit si la série de TAYLOR $f(\frac{z}{r})$ est uniformément continue à l'intérieur de son cercle de convergence et sur le cercle, on peut écrire, en faisant tendre r vers l'unité dans les formules (3):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta, \\ b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} -g(\theta) d\theta, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} -g(\theta) \cos n\theta d\theta \end{array} \right.$$

ce qui revient à dire que $P(r, \theta)$, $Q(r, \theta)$ sont exprimables à l'aide de la formule de POISSON:

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-\theta) + r^2} f(u) du, \\ Q(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-\theta) + r^2} g(u) du \end{array} \right.$$

et l'on voit aussi que, dans ce cas, l'étude de la convergence de la série de TAYLOR sur son cercle de convergence est ramenée à l'étude de séries de FOURIER correspondant aux fonctions $f(u)$ et $g(u)$.

Mais nous allons voir que les formules (4) et (4') sont applicables dans des cas beaucoup plus étendus que celui dont nous venons de parler.¹

Supposons simplement que $\varphi(\zeta)$ soit bornée à l'intérieur de son cercle de convergence, mais ne faisons à priori aucune hypothèse sur l'existence de valeurs limites de $\varphi(\zeta)$ pour les points du cercle. Nous allons voir que les formules (4) et (4') sont encore applicables.

Il est un peu plus commode de supposer $c_0 = 0$, nous aurons alors

$$\varphi(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n + \dots$$

Considérons également la série de TAYLOR:

$$(5) \quad \phi(\zeta) = \frac{c_1\zeta}{1} + \frac{c_2\zeta^2}{2} + \dots + \frac{c_n\zeta^n}{n} + \dots = \int_0^\zeta \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta.$$

Elle représente une fonction de ζ qui reste bornée à l'intérieur du cercle de convergence; qui en outre, est uniformément continue à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle, comme il résulte de l'inégalité:

$$(6) \quad |\phi(\zeta') - \phi(\zeta'')| = \left| \int_{\zeta'}^{\zeta''} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right| < |\zeta' - \zeta''| \cdot M,$$

M désignant le module maximum de $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$.

Si donc on pose

$$\phi(\zeta) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$$

on pourra exprimer U et V par les formules:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-\theta) + r^2} h(u) du,$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-\theta) + r^2} k(u) du,$$

¹ Comptes Rendus, février 1905.

$h(u)$ et $k(u)$ étant des fonctions continues de u . Mais, en appliquant l'inégalité (6) aux points du cercle de convergence, on voit immédiatement que $h(u)$ et $k(u)$ sont des fonctions de u à nombres dérivés bornés. Elles admettent donc une dérivée pour un ensemble de valeurs de u , dont le complémentaire est de mesure nulle.

Mais nous avons les relations:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta},$$

$$Q(r, \theta) = -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

Il résulte donc du chapitre précédent que pour toutes les valeurs u_0 de u pour lesquelles les fonctions $h(u)$ et $k(u)$ ont des dérivées, les fonctions harmoniques P et Q prennent des valeurs bien déterminées quand le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$ suivant un chemin non tangent à la circonférence. On pourra, en outre, appliquer les formules (4'), dans lesquelles $f(u)$ et $g(u)$ désignent non plus des fonctions continues, mais des fonctions bornées et sommables qui représentent, en général, la valeur limite de $P(r, \theta)$, $Q(r, \theta)$ pour $r = 1$. On peut si l'on veut, pour définir ces fonctions avec précision, admettre qu'elles représentent toujours la plus grande limite, ou la plus petite limite des fonctions P et Q pour r tendant vers l'unité. Nous ferons en général cette hypothèse.

D'ailleurs ces deux fonctions f et g ne sont pas indépendantes et nous savons qu'elles doivent satisfaire à cette condition que les intégrales:

$$\int_{\varepsilon^2}^{+\pi} \{f(\theta + t) - f(\theta - t)\} \cotg \frac{t}{2} dt \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon^2}^{\pi} \{g(\theta + t) - g(\theta - t)\} \cotg \frac{t}{2} dt$$

restent bornées quel que soient ε et θ .

Nous voyons aussi que les coefficients a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et même que la série

$$\sum_0^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_0^{\infty} |c_n|^2$$

est convergente. Si donc, pour une série de TAYLOR, de rayon de convergence égal à un, cette condition n'est pas remplie, on peut affirmer

qu'elle n'est pas bornée, c'est-à-dire qu'elle prend des valeurs infiniment grandes, au voisinage de certains points de son cercle de convergence.

En tout point régulier du cercle de convergence, les fonctions $f(u)$ et $g(u)$ ayant des dérivées, leurs séries de FOURIER sont convergentes; il en résulte que $\varphi(\zeta)$ est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence.

Aux points u_0 pour lesquels $|f(u) - f(u_0)|$, $|g(u) - g(u_0)|$ sont les dérivées de leur intégrale indéfinie, c'est-à-dire *presque partout*, la série est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, ainsi qu'il résulte d'une proposition de M. LEBESGUE (C. R. de l'Académie des Sciences, 22 mai 1905).

2. Nous allons donner immédiatement une application de ces généralités en montrant qu'elles permettent d'ajouter un complément intéressant à la célèbre proposition d'EISENSTEIN, concernant le développement en série des fonctions algébriques.¹ HERMITE, dans son cours de la Faculté des Sciences, a donné à cette proposition la forme suivante: Si une série de TAYLOR à coefficients rationnels, représente une branche de fonction algébrique, on peut toujours ramener cette série à avoir ses coefficients entiers (sauf le premier), en multipliant la variable par un entier convenable.

Considérons une série de TAYLOR à coefficients entiers; je dis qu'elle ne peut représenter une fonction algébrique que si son rayon de convergence est plus petit que l'unité, à moins qu'elle ne soit égale à une fraction rationnelle dont tous les pôles sont des racines de l'unité.

Supposons en effet que:

$$y = f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots,$$

où c_0, c_1, c_2, \dots sont des entiers et où $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 1$, satisfasse à une équation algébrique irréductible:

$$F(y, \zeta) = 0;$$

F sera nécessairement à coefficients entiers. Soit $P(\zeta)$ le coefficient de la plus haute puissance de y dans F ; la fonction algébrique $u = y.P(\zeta)$ n'aura pas de pôle à distance finie; donc en multipliant le polynôme à coefficients entiers $P(\zeta)$ par la série à coefficients entiers $f(\zeta)$, on obtient

¹ Comptes Rendus, février 1904.

une série de TAYLOR $\varphi(\zeta)$, de rayon de convergence égal à un et qui doit rester bornée à l'intérieur de son cercle de convergence; il faut pour cela que les coefficients de $\varphi(\zeta)$ tendent vers zéro quand leur rang augmente indéfiniment et comme ces coefficients sont des entiers, cela ne peut se produire que s'ils sont constamment nuls à partir d'un certain rang, et $\varphi(\zeta)$ se réduisant à un polynôme, on voit que $f(\zeta)$ est égale à une fraction rationnelle.

Proposons nous maintenant de déterminer toutes les fractions rationnelles

$$\frac{A(\zeta)}{B(\zeta)}$$

développables en série entière en ζ , à coefficients entiers, de rayon de convergence égal à un. — A et B sont supposés à coefficients entiers, on suppose en outre qu'ils n'ont pas de diviseur commun. On peut alors déterminer deux polynômes à coefficients entiers A_1 et B_1 tels que l'on ait

$$AA_1 + BB_1 = N$$

N étant un entier différent de zéro. Si $\frac{A}{B}$ se développe en série entière à coefficients entiers, il en sera de même de:

$$A_1 \frac{A}{B} + B_1 = \frac{N}{B} = \frac{\nu}{\alpha + \beta\zeta + \dots + \lambda\zeta^q}.$$

Nous supposons les entiers $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \nu)$ premiers dans leur ensemble. Soit donc:

$$(7) \quad \frac{\nu}{\alpha + \beta\zeta + \dots + \lambda\zeta^q} = a_0 + a_1\zeta + \dots$$

par suite:

$$\nu = a_0\alpha$$

et soit p un diviseur premier de α . On peut supposer que les entiers $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ ne sont pas tous divisibles par p , sinon on aurait une égalité de même forme en divisant par p les deux membres de (7). Soit a_n le premier coefficient non divisible par p . On peut écrire:

$$\begin{aligned} \nu &= (\alpha + \beta\zeta + \dots + \lambda\zeta^q)(a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{n-1}\zeta^{n-1}) \\ &\quad + (\alpha + \beta\zeta + \dots + \lambda\zeta^q)(a_n\zeta^n + \dots). \end{aligned}$$

On en déduit que la série

$$(\alpha + \beta z + \dots + \lambda z^q)(a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots)$$

une fois ordonnée aura tous ses coefficients divisibles par p :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha a_n \equiv 0 \\ \alpha a_{n+1} + \beta a_n \equiv 0 \\ \alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n \equiv 0 \\ \dots \end{array} \right\} \pmod{p}$$

et comme par hypothèse on a:

$$\alpha \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

on déduit de là de proche en proche,

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{p}, \quad \dots$$

Les coefficients $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \nu)$ ne seraient donc pas premiers dans leur ensemble. Il faut donc que l'on ait $p = 1$, et par suite α doit être égal à l'unité. Autrement dit $B(z)$ est égal à un facteur constant près à:

$$1 + \beta z + \gamma z^2 + \dots + \lambda z^q$$

où $\beta, \gamma, \dots, \lambda$ sont des entiers. Le produit des modules des zéros de ce polynôme est égal à $\pm \frac{1}{\lambda}$; mais comme d'autre part les pôles de $\frac{A(z)}{B(z)}$ doivent avoir des affixes supérieures ou égales en module à l'unité, puisque le rayon de convergence doit être égal à l'unité, il faut que l'on ait:

$$\lambda = \pm 1$$

et que toutes les racines de $B(z)$ aient pour module 1. Mais, d'après un théorème de KRONECKER, un nombre entier algébrique qui a pour module 1, ainsi que tous les nombres conjugués, est une racine de l'unité. Donc $B(z)$ est un polynôme de division du cercle ou un produit de plusieurs polynômes de cette espèce et la fraction $\frac{A(z)}{B(z)}$ pourra par suite se ramener à la forme

$$(8) \quad \frac{P(z)}{(1 - z^k)^h}$$

Ainsi, les seules fractions rationnelles développables en série entière à coefficients entiers, avec un rayon de convergence égal à 1, sont les fractions rationnelles de la forme (8).

Considérons maintenant une série de TAYLOR dont les coefficients n'ont qu'un nombre limité de valeurs, par exemple 0 et 1, on a alors

$$f(z) = z^\alpha + z^\beta + \dots + z^\lambda + \dots$$

$\alpha, \beta, \lambda, \dots$ étant des entiers croissants. Appelons point singulier isolé d'ordre fini d'une fonction analytique, un point singulier isolé z_0 au voisinage duquel on a :

$$|\varphi(z)| < \left| \frac{k}{(z - z_0)^\alpha} \right|$$

α et k étant des constantes. Cela étant, je dis que la série de TAYLOR $f(z)$ a nécessairement sur son cercle de convergence d'autres points singuliers que des points singuliers isolés d'ordre fini. En effet, s'il n'en était pas ainsi, en multipliant $f(z)$ par un polynôme ayant pour zéros les points singuliers en question avec des ordres de multiplicité convenables, on aurait une nouvelle série de TAYLOR qui devrait rester bornée à l'intérieur du cercle de rayon 1, et dont les coefficients devraient donc tendre vers zéro. Or ces coefficients n'ayant aussi qu'un nombre limité de valeurs, cela est impossible s'ils ne sont pas constamment nuls à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si $f(z)$ n'est pas égale à une fraction rationnelle.

On voit en particulier que $f(z)$ ne peut pas être algébroïde dans un cercle de rayon plus grand que 1.¹

Nous avons, dans ce qui précède, quelques exemples des liaisons qui existent entre la nature arithmétique des coefficients d'une série de TAYLOR et la nature analytique de la fonction qu'elle représente.

Donnons maintenant quelques extensions de la proposition énoncée au début de ce chapitre. Soit D un domaine limité par un contour simple C et dont on puisse faire la représentation conforme sur le cercle (ce qui aura lieu par exemple si C est formé d'arcs réguliers de courbes analytiques) et $f(z)$ une fonction analytique régulière et bornée dans D . En

¹ Relativement aux séries entières à coefficients entiers, je rappelle que M. BOREL a obtenu un résultat très intéressant (v. p. exemple, ses leçons sur les fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars, 1903).

tous les points de C , sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, $f(z)$ prend une valeur déterminée suivant les chemins non tangents à C et l'on pourra par suite appliquer la formule de CAUCHY:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(u)}{u-z} du.$$

Enfin on peut étendre encore la proposition au moyen d'une transformations homographique effectuée sur $f(z)$. S'il existe un nombre A tel que $f(z) - A$ reste supérieure en module à un nombre positif fixe, la fonction $\frac{1}{f(z) - A}$ sera régulière et bornée à l'intérieur de D , de telle sorte qu'on pourra lui appliquer la proposition précédente; par suite $f(z)$ aura aussi, en général, une valeur déterminée, finie ou infinie, aux points du contour mais il n'est pas certain que la même propriété s'applique à la partie réelle et à la partie imaginaire de $f(z)$ considérées séparément; il faudrait démontrer pour que cela fût vrai, que $f(z)$ ne peut prendre une valeur infinie qu'en un ensemble de mesure nulle de points de contour, et bien que cela paraisse très vraisemblable, nous n'avons pas réussi à en donner une démonstration générale.

Comme applications considérons la série $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$, les points a_1, a_2, \dots, a_n étant des points du segment $0 - 1$ de l'axe réel, partout denses, et la série $\sum |A_n|$ étant convergente. C'est un cas particulier des séries étudiées par M. BOREL dans sa thèse,¹ en vue de l'extension de la notion de prolongement analytique. La série que nous considérons définit une fonction analytique qui admet le segment $0 - 1$ comme ligne singulière essentielle.

Supposons les A_n positifs et donnons à z une valeur, $x + iy$, y étant positif. Si l'on pose $z - a_n = \rho_n e^{i\omega_n}$, la partie imaginaire de $\varphi(z)$ est égale à

$$+ i \sum - \frac{A_n}{\rho_n} \sin \omega_n$$

et comme on a $0 < \omega_n < \pi$, le coefficient de i est négatif; donc lorsqu'on reste, par exemple, dans le demi-plan supérieur $\varphi(z)$ reste bornée *projective-*

¹ E. BOREL, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, première partie (Annales de l'Ecole normale, 1895) et *Leçons sur la théorie des fonctions*.

ment. On en conclut que tous les points du segment $0 - 1$, sauf ceux d'un ensemble de mesure nulle, sont des points où $\varphi(\zeta)$ prend, au sens déjà souvent expliqué, une valeur déterminée, ce qui concorde avec les résultats de M. BOREL.

Au contraire, la première des fonctions uniformes affectées de coupure qui se soit présentée en analyse, la fonction modulaire, présente une indétermination beaucoup plus complète au voisinage de cette coupure, ainsi qu'il résulte des recherches de RIEMANN et DEDEKIND.¹

3. *Etude de l'intégrale de Poisson lorsque la fonction $f(u)$ qui figure sous le signe \int est une fonction non bornée, intégrable en valeur absolue.*²

Cette étude peut se faire comme lorsque $f(u)$ est une fonction bornée. Car $f(u)$ étant, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, égale à la dérivée de son intégrale indéfinie, on pourra raisonner exactement de la même manière que lorsque $f(u)$ est bornée, et l'on arrivera aux mêmes conclusions que dans le premier chapitre. Toutefois nous préférons rattacher ce cas à celui où $f(u)$ est bornée, la méthode indirecte que nous emploierons conduisant à quelques résultats nouveaux; nous supposerons que non seulement $f(u)$ est intégrable entre $-\pi$ et $+\pi$ mais qu'il en est de même de son carré. Posons donc

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} f(u) du$$

et supposons d'abord que $f(u)$ soit une fonction positive, dont le carré est intégrable.

On a vu dans le premier chapitre que si l'on écrit:

$$P(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin \theta) r^n$$

¹ On pourra lire à ce sujet une lettre d'HERMITE à STIELTJES (17 décembre 1886). — (Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES, Paris, Gauthier-Villars 1905, page 196.)

² Nous n'avons pas placé cette étude dans la première partie, parce que nous avons dû nous servir du théorème établi dans le § 1 de la seconde partie.

la série

$$2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

est convergente. Soit $Q(r, \theta)$ la fonction harmonique conjuguée de $P(r, \theta)$

$$Q(r, \theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

et soit:

$$\varphi(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta), \quad (z = re^{i\theta}).$$

On a:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Q^2(r, \theta) d\theta = 2b_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n},$$

d'où:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n}$$

et comme la série du second membre converge encore pour $r = 1$, on voit que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

reste bornée quand r tend vers 1. Il en résulte qu'on ne peut avoir

$$\lim_{r \rightarrow 1} |\varphi(re^{i\theta})| = +\infty$$

que pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ , sinon on démontrerait par un raisonnement analogue à celui qu'emploie M. LEBESGUE,¹ que l'intégrale qui précède devrait croître indéfiniment.

Mais d'autre part, $P(r, \theta)$ étant constamment positive, la fonction analytique $\frac{1}{\varphi(z) + 1} = \frac{1}{P + iQ + 1}$ est bornée dans C ; on en déduit comme

¹ *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, page 114.

on vient de le voir que, $\varphi(\beta)$ a, en général,¹ une valeur limite déterminée suivant les rayons et comme cette valeur est en général finie, on voit bien que $P(r, \theta)$, $Q(r, \theta)$ ont, sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ une valeur limite bien déterminée pour $r = 1$.²

Posons

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f_1(\theta)$$

dans l'ensemble des valeurs de θ où cette limite existe.

Je dis que l'on a en général:

$$f_1(\theta) = f(\theta).$$

Pour le démontrer établissons d'abord le lemme suivant:

Si des fonctions positives, bornées sommables: $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... tendent vers une fonction bornée ou non $f(x)$ et si

$$\int_a^b f_n(x) dx$$

reste, quel que soit n , inférieur à un nombre fixe, la fonction $f(x)$ est intégrable, et l'on a:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \liminf \int_a^b f_n(x) dx.$$

La fonction $f(x)$ est mesurable. Soit E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a:

$$f(x) \leq L.$$

Considérons la fonction:

$$\varphi_n(x) = f_n(x) \text{ pour l'ensemble des valeurs de } x \text{ telles que: } f_n(x) \leq L,$$

$$\varphi_n(x) = f(x) \text{ pour l'ensemble des valeurs de } x \text{ telles que: } f_n(x) > L.$$

Pour les points de E les fonctions $\varphi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble et tendent vers $f(x)$, on aura donc

$$\lim_E \int \varphi_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

¹ Pour abrégé, nous dirons souvent: «en général», au lieu de «sauf exception pour un ensemble de mesure nulle de points ou de valeurs de la variable.»

² Il résulte de ce raisonnement que si une fonction harmonique est régulière et bornée à l'intérieur d'un cercle, elle pourra être mise sous la forme d'une intégrale de POISSON.

Mais comme on a toujours dans E $\varphi_n \leq f_n$, on en déduit:

$$\int f(x) dx \leq \liminf \int_E f_n(x) dx \leq \liminf \int_a^b f_n(x) dx < k.$$

Donnons à L des valeurs positives de plus en plus grandes; nous voyons que l'intégrale $\int_E f(x) dx$ tend vers une limite finie, qui sera égale à $\int_a^b f(x) dx$, et l'on a bien:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \liminf \int_a^b f_n(x) dx.$$

Si pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de x , $f_n(x)$ n'a pas de limite ou a une limite infinie, il n'y a rien à changer à ce qui précède.

On peut se rendre compte sur des exemples, que l'on peut avoir

$$\int_a^b f(x) dx < \liminf \int_a^b f_n(x) dx.$$

Je dois cette remarque à M. LEBESGUE.

Ceci dit, revenons à l'intégrale de POISSON

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u) du$$

et considérons la fonction positive $f(u)$ comme limite de la fonction bornée sommable $f_n(u)$, égale à $f(u)$ dans l'ensemble $E_n[f(u) \leq l_n]$ et égale à zéro dans l'ensemble complémentaire. On aura:

$$P_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n(u) du < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u) du = P(r, \theta).$$

Mais $f_n(u)$ étant bornée, on aura sauf pour un ensemble F_n de mesure nulle:

$$\lim_{r=1} P_n(r, \theta) = f_n(\theta)$$

d'où:

$$\liminf_{r=1} P(r, \theta) \geq f_n(\theta).$$

Mais on a $f_n(\theta) = f(\theta)$ pour tous les points de l'ensemble E_n . Or l'en-

semble des points communs à tous les ensembles $U(E_n)$ a une mesure nulle; il en est de même de l'ensemble $(F_1 + F_2 + \dots + F_n + \dots)$. On aura donc:

$$\liminf_{r=1} P(r, \theta) \geq f(\theta)$$

sauf dans un ensemble de mesure nulle; et par suite

$$(9) \quad f_1(\theta) \geq f(\theta)$$

dans l'ensemble des points où $P(r, \theta)$ a, pour $r = 1$, une limite: $f_1(\theta)$.

Mais d'après le lemme que nous venons de démontrer: on a

$$\liminf_{r=1} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta \geq \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta$$

et comme on a toujours:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta = 2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta$$

on en conclut:

$$(10) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta \leq \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta$$

et par suite, en vertu de l'inégalité (9):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (f_1 - f) d\theta = 0$$

la fonction intégrée étant constamment positive ou nulle (dans l'ensemble complémentaire d'un ensemble de mesure nulle), on conclut de là facilement

$$f_1(\theta) = f(\theta) \quad (\text{en général}).$$

Car chacun des ensembles $E\left(\frac{1}{n+1} \leq f_1 - f < \frac{1}{n}\right)$ aura une mesure nulle et il en sera de même de la somme de tous ces ensembles.

En résumé, si $f(u)$ est une fonction non bornée, positive, dont le carré est sommable, et si l'on considère l'intégrale de Poisson:

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Hf(u) du$$

on a en général: $\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$.

Du cas de $f(u) > 0$, on passe facilement au cas de $f(u) < 0$, et aussi au cas de $f(u)$ bornée supérieurement ou inférieurement.

Si maintenant $f(u)$ n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement on peut la regarder successivement comme limite des fonctions bornées supérieurement, puis comme limite de fonctions bornées inférieurement et définies toujours de la façon suivante: ayant choisi des nombres $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ échelonnés de 0 à $+\infty$, on posera:

1° $f_n(u) = f(u)$ dans l'ensemble $E_n[f(u) \leq l_n]$ et $f_n(u) = 0$, partout ailleurs;

$$P_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n(u) du < P(r, \theta)$$

2° $f_n^1(u) = f(u)$ dans l'ensemble $E_n^1[f(u) \geq -l_n]$, et $f_n^1(u) = 0$ partout ailleurs;

$$P_n^1(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n^1(u) du \geq P(r, \theta).$$

On aura alors les inégalités:

$$\liminf_{r=1} P(r, \theta) \geq \limsup_{r=1} P_n(r, \theta),$$

$$\limsup_{r=1} P(r, \theta) \leq \liminf_{r=1} P_n^1(r, \theta).$$

En appliquant des raisonnements déjà employés, on en déduira facilement:

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$$

sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.¹

Ceci va nous permettre de compléter ce que nous avons dit au sujet de la formule de PARSEVAL, dans le cas où l'on considère une fonction non bornée dont le carré est sommable. Nous avons démontré que l'on a:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du \geq 2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Mais d'autre part puisque l'on a, en général,

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$$

¹ Indiquons encore brièvement une déduction facile de la méthode employée dans le texte: toute fonction harmonique régulière et limitée inférieurement dans C est la somme d'une intégrale de Poisson et d'une fonction harmonique qui reste positive dans C et qui prend la valeur zéro sur C , sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.

on en déduit en appliquant le lemme établi plus haut:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta \geq \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du,$$

c'est-à-dire:

$$2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du.$$

On a donc, dans tous le cas, quand $f(u)$ est une fonction dont le carré est sommable:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du = 2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

a_n, b_n étant les constantes d'EULER-FOURIER attachées à $f(u)$. Soient maintenant deux fonctions périodiques dont le carré soit sommable: $f(u)$ et $g(u)$. On voit aisément que $(f(u) + g(u))^2$ est aussi sommable, et qu'il en est de même de $(f(u) - g(u))^2$. Appliquant l'égalité précédente à $f + g$ et $f - g$, comme le fait M. HURWITZ dans le mémoire déjà cité, on obtient par soustraction:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u)g(u) du = 2a_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

les c_n, d_n étant les coefficients de la série de FOURIER de $g(u)$.¹

4. Les méthodes précédentes conduisent également à un résultat intéressant relatif à la convergence des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients et dont voici l'énoncé: *Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence de la série:*

$$\sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est de mesure nulle.

Il y aura donc des points de convergence dans tout intervalle. Considérons en effet la fonction harmonique:

$$F(r, \theta) = a_0 + (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta)r + \dots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n + \dots$$

¹ Voici une conséquence de la formule de PARSEVAL: soient a_n, b_n les constantes de FOURIER de $f(u)$; si la série $\sum n(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente, $f(u)$ est développable en série de FOURIER sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de u ; pratiquement cette proposition ne paraît pas bien utile.

Il est clair que la série $\sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$, est convergente puisque ses termes sont à partir d'un certain rang inférieurs à $\frac{1}{n^2}$. Il résulte alors de l'égalité de PARSEVAL que l'intégrale:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta$$

reste bornée, quel que soit le nombre $r < 1$. Il en sera de même de:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |P(r, \theta)| d\theta.$$

Intégrons terme à terme la série qui représente $P(r, \theta)$ (il est un peu plus commode de supposer $a_0 = 0$, pour que l'intégration n'introduise pas de terme a périodique). Nous obtenons ainsi:

$$U(r, \theta) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin n\theta - \frac{b_n}{n} \cos n\theta \right) r^n$$

et comme $\frac{a_n}{n}$ et $\frac{b_n}{n}$ sont plus petits à partir d'un certain rang que $\frac{1}{n^2}$, la série du second membre est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de θ , et pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et 1. Elle est donc continue à l'intérieur du cercle de rayon un et sur le cercle, et l'on peut mettre U sous la forme

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} g(u) du,$$

$g(u)$ étant une fonction continue périodique.

Je dis en outre que $g(u)$ est à variation bornée entre $-\pi$ et $+\pi$. En effet soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ des valeurs croissantes de l'argument; la somme:

$$|g(\theta_1) - g(\theta_2)| + |g(\theta_2) - g(\theta_3)| + \dots + |g(\theta_{p-1}) - g(\theta_p)|$$

différentielle aussi peu que l'on veut, en prenant r suffisamment voisin de 1, de la suivante:

$$\begin{aligned} & |U(r, \theta_1) - U(r, \theta_2)| + |U(r, \theta_2) - U(r, \theta_3)| + \dots \\ & + |U(r, \theta_{p-1}) - U(r, \theta_p)| \end{aligned}$$

laquelle est inférieure à: $\int_{\theta_1}^{\theta_2} |P(r, \theta)| d\theta$, puisque pour $r < 1$, la fonction $U(r, \theta)$ admet comme dérivée par rapport à θ , la fonction continue $P(r, \theta)$. Or nous savons que $\int_{-\pi}^{+\pi} |P(r, \theta)| d\theta$ reste bornée quand r tend vers 1; la fonction $g(u)$ est donc à variation totale bornée, donc, en vertu d'un théorème dû à M. LEBESGUE,¹ elle admet une dérivée finie pour un ensemble de valeurs de u dont le complémentaire est de mesure nulle. Or, si en un point u_0 la fonction continue $g(u)$ admet une dérivée $g'(u_0)$, nous savons que la fonction harmonique:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta)$$

tend vers une valeur bien déterminée quand le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$ suivant un chemin non tangent à la circonférence.

Pour en déduire la convergence de la série en ce point, il suffit d'avoir recours à la proposition suivante, qui est un cas particulier d'une proposition plus générale due à M. PRINGSHEIM:²

»Si la série

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots$$

est convergente pour $x < 1$, et si en outre nc_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il faut et il suffit pour que la série soit convergente pour $x = 1$, que la valeur de la série tende vers une limite finie quand x tend vers 1, par valeurs réelles plus petites que 1.»

Autrement dit le second théorème d'ABEL a ici une réciproque.

Voici comme on peut démontrer ce résultat. Si à partir d'un certain rang ν , on a

$$n |c_n| < \varepsilon,$$

le reste de la série correspondant au terme de rang ν sera plus petit en module que:

$$\frac{\varepsilon_\nu x^{\nu+1}}{\nu(1-x)} < \frac{\varepsilon_\nu}{\nu(1-x)}.$$

¹ *Leçons sur l'intégration et les fonctions primitives* (page 128).

² *Über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreise* (Münchner Berichte, 38).

Donnons à x la valeur $1 - \frac{1}{\nu}$. Les termes qui viennent après le $\nu^{\text{ième}}$ auront une somme inférieure à ε_ν , et la somme de ceux qui précèdent:

$$c_0 + c_1 \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \dots + c_\nu \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

peut se mettre sous la forme

$$(c_0 + c_1 + \dots + c_\nu) - \left(c_1 \frac{\delta_1}{\nu} + \frac{2c_2 \delta_2}{\nu} + \dots + \frac{\nu c_\nu \delta_\nu}{\nu}\right)$$

$\delta_1, \delta_2, \dots$ désignant des nombres compris entre zéro et un. Le terme écrit dans la seconde parenthèse peut s'écrire:

$$\delta \frac{|c_1| + 2|c_2| + \dots + \nu|c_\nu|}{\nu}$$

δ étant un nombre dont le module est plus petit que un. Or le produit νc_ν tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, il en est de même de sa valeur moyenne, de sorte que, pour que $\varphi\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$ ait une limite, il est nécessaire que

$$c_0 + c_1 + \dots + c_\nu$$

ait la même limite, ce qui établit la proposition.¹

Soit donc θ une valeur de l'argument pour laquelle $g(\theta)$ admet une dérivée $g'(\theta)$. Nous aurons:

$$\lim_{r=1} [(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta)r + \dots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n + \dots] = g'(\theta)$$

donc en vertu du théorème de M. PRINGSHEIM, la série

$$(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \dots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \dots$$

est convergente.

C. Q. F. D.

Faisons quelques remarques au sujet de ce critère de convergence. D'abord il est clair que la convergence d'une série trigonométrique, en tout point, ne saurait résulter d'une condition de la forme:

$$\lim \varphi(n) a_n = 0, \quad \lim \varphi(n) b_n = 0$$

¹ Nous avons pour plus de commodité donné à x une suite dénombrable de valeurs de la forme $1 - \frac{1}{\nu}$; il est facile de voir que cette restriction est insignifiante.

si la fonction positive $\varphi(n)$ est telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente, ce qui a lieu pour $\varphi(n) = n$. Il est d'ailleurs possible de former des séries trigonométriques pour lesquelles na_n et nb_n tendent vers zéro et qui ont une infinité dénombrable de points de divergence; tout au plus pourrait-on, peut-être, dans notre énoncé, remplacer les mots: ensemble de mesure nulle, par ensemble dénombrable.

En outre la convergence des séries trigonométriques semble dépendre beaucoup moins de la rapidité de la décroissance des coefficients, que de la régularité avec laquelle ils tendent vers zéro; je ne pense donc que l'on puisse donner de critères de convergence de même nature que celui que nous venons de donner et qui soit beaucoup plus compréhensif. Ce critère s'applique d'ailleurs à toutes les séries trigonométriques obtenues en intégrant terme à terme une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro. Voici une conséquence de cette remarque; nous savons que les coefficients d'une série de FOURIER tendent toujours vers zéro; en outre, M. LEBESGUE, dans son mémoire déjà cité, a montré, en généralisant un théorème de DU BOIS-REYMOND,¹ qu'une telle série est intégrable terme à terme c'est-à-dire que si

$$a_0 + (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \dots + (a_n \sin n\theta + b_n \sin n\theta) + \dots$$

est la série de FOURIER correspondant à $f(\theta)$, on a

$$\int_{\alpha}^{\theta} f(\theta) d\theta = a_0(\theta - \alpha) + \sum \frac{1}{n} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta - a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha).$$

Mais puisque la série $\sum \frac{1}{n} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ a des points de convergence dans tout intervalle, on peut supposer que $\theta = \alpha$ soit un tel point et écrire simplement:

$$\int_{\alpha}^{\theta} f(\theta) d\theta = a_0\theta + C + \sum \frac{1}{n} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta);$$

par suite la série $\sum \frac{1}{n} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ est toujours convergente, et

¹ Voir aussi l'article déjà cité de M. A. HURWITZ.

c'est à une constante près, la série de FOURIER de la fonction continue, périodique, à variation bornée:

$$\varphi(\theta) = \int_a^{\theta} [f(\theta) - a_0] d\theta \quad \left(a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta \right).$$

Elle est donc uniformément convergente.

Nous pouvons donc simplifier un peu le résultat précité de M. LEBESGUE: il est inutile en effet quand on intègre terme à terme une série de FOURIER, de retrancher une constante de l'intégrale indéfinie de chaque terme, pour assurer la convergence de la série obtenue.

Faisons encore remarquer que si l'on part d'une série trigonométrique pour laquelle $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ est convergente (et alors en l'intégrant une fois on obtient une série trigonométrique uniformément convergente entre 0 et 2π) on peut affirmer que la fonction harmonique associée à la série proposée:

$$P(r, \theta) = \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

se comporte, au point de vue de l'indétermination sur le cercle de convergence, comme les fonctions bornées. C'est ce qui résulte de la démonstration précédente. On peut même ajouter que, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, la série

$$\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, ainsi que le prouve l'extension qu'a donné M. FEJER lui-même de son théorème, aux fonctions dérivées.¹

Par exemple si l'on a:

$$a_n^2 + b_n^2 < \frac{1}{n \log n \cdot \log_2 n \dots (\log_k n)^{1+\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

on se trouve en présence d'une série trigonométrique qui est sommable par ce procédé.

¹ Il résulte en effet des recherches de M. FEJER, que la fonction dérivée d'une fonction continue $f(u)$ dans l'ensemble des points où elle existe, est représentable par la série dérivée de la série de FOURIER de $f(u)$, sommée par une double application de la moyenne arithmétique.

Nous avons vu que si $\lim na_n = 0$, $\lim nb_n = 0$, la série:

$$(I) \quad f(\theta) = a_0 + (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \dots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \dots$$

est convergente pour toutes les valeurs de θ pour lesquelles la fonction:

$$(II) \quad g(\theta) = a_0 \theta + \sum \frac{a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta}{n}$$

admet une dérivée $g'(\theta)$, et a précisément pour somme $g'(\theta)$.

Nous pouvons démontrer que réciproquement, si la série (I) est convergente elle est égale à la dérivée de la série (II).

Pour cela il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie RIEMANN¹ pour démontrer ses deux premières propositions générales sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique.

On a d'abord, en vertu du théorème 2 de RIEMANN:

$$\lim_{a=0} \frac{g(\theta + a) + g(\theta - a) - 2g(\theta)}{a} = 0.$$

Il suffit donc de démontrer que si la série (I) converge et a pour somme $f(\theta)$, on a:

$$\lim_{a=0} \frac{g(\theta + a) - g(\theta - a)}{2a} = f(\theta).$$

Or, si l'on pose:

$$A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

on trouve:

$$\frac{g(\theta + a) - g(\theta - a)}{2a} = A_0 + A_1 \left(\frac{\sin a}{a} \right) + \dots + A_n \left(\frac{\sin na}{na} \right) + \dots$$

Soit s le plus grand entier inférieur à $\frac{\pi}{a}$. Considérons la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin na}{na} \right).$$

On aura

$$n |A_n| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, pour $n > p$.

¹ *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (§ 8, théorèmes I et 2).

Si donc s est supérieur à p , on aura

$$\left| \sum_{s+1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{s+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{s\alpha} < \frac{\varepsilon}{\pi - \alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{si } \alpha < 1).$$

Considérons ensuite les deux sommes:

$$A_0 + \sum_1^p A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{p+1}^{s+1} A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right).$$

p restant fixe, la première a pour limite quand α tend vers zéro:

$$A_0 + A_1 + \dots + A_p.$$

Quant à la seconde, on en a facilement une limite supérieure en appliquant le lemme d'ABEL; en effet $n\alpha$ restant compris entre 0 et π , $\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}$ va en décroissant quand n augmente et reste positif et inférieur à 1; la série

$$A_0 + A_1 + \dots + A_n + \dots$$

étant supposée convergente, on peut supposer que p ait été choisi assez grand pour que:

$$A_{p+1} + A_{p+2} + \dots + A_{p+q}$$

soit plus petit en module que ε , quel que soit l'entier q . Cette seconde partie sera alors inférieure à ε . On aura donc:

$$\lim \frac{g(\theta + a) - g(\theta - a)}{2a} = f(\theta),$$

$$\lim \frac{g(\theta + a) + g(\theta - a) - 2g(\theta)}{a} = 0$$

d'où l'on conclut:

$$\lim \frac{g(\theta \pm a) - g(\theta)}{\pm a} = f(\theta).$$

Le théorème est démontré:

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

où na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ soit convergente pour une valeur dé-

term.née de θ , est que la fonction $g(\theta)$ obtenue en intégrant terme à terme la série proposée ait une dérivée $g'(\theta)$, qui est alors égale à la somme de la série donnée.

En particulier, si $\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ est convergente en tous les points d'un intervalle, elle y représente une fonction dérivée c'est-à-dire une fonction qui ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires.

5. En combinant, comme nous l'avons fait plus haut, les résultats connus concernant l'intégrale de POISSON, avec le théorème de M. PRINGSHEIM, on peut aussi retrouver certains résultats classiques concernant la série de FOURIER. En effet, si on considère l'intégrale de POISSON relative à une fonction continue $f(\theta)$ et supposée mise sous la forme

$$P(r, \theta) = \sum_0^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

on sait que $P(r, \theta)$ tend uniformément vers $f(\theta)$ quand r tend vers un; si donc on a :

$$\lim na_n = 0, \quad \lim nb_n = 0$$

on en déduira la convergence uniforme vers $f(\theta)$, de la série de FOURIER $\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. Si en particulier $f(\theta)$ admet une dérivée bornée $f'(\theta)$, on peut appliquer l'intégration par parties dans les formules :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

ce qui donne :

$$na_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad nb_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(\theta) \cos n\theta d\theta;$$

or ces dernières intégrales tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.¹

Nous voyons en outre que la fonction harmonique conjuguée

$$Q(r, \theta) = \sum (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

¹ LEBESGUE, *Mémoire sur les séries trigonométriques*, page 471, ou ce mémoire page 351.

tendra aussi uniformément vers une limite quand r tendra vers 1, d'après ce qu'on a vu dans le premier chapitre. Par suite la série

$$\sum (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

sera, dans les mêmes conditions, uniformément convergente.

Il n'y a rien à changer si $f(\theta)$ est à nombres dérivées bornés.¹

6. Nous allons maintenant montrer comment l'on peut rattacher le second théorème d'ABEL sur les séries entières au théorème de RIEMANN sur les séries trigonométriques (théorème 1, § 8 du mémoire de RIEMANN). Considérons la série trigonométrique $\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$, où a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et qu'on suppose convergente pour une certaine valeur de θ , et égale à $f(\theta)$. Si l'on pose avec RIEMANN:

$$F(\theta) = \sum_1^{\infty} -\frac{A_n}{n^2} \quad (\text{on suppose } a_0 = 0 \text{ pour simplifier})$$

on a:

$$\lim_{a=0} \frac{F(\theta + a) + F(\theta - a) - 2F(\theta)}{a^2} = f(\theta).$$

Si $U(r, \theta)$ désigne la fonction harmonique associée à $F(\theta)$:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} F(u) du,$$

et $P(r, \theta)$ la fonction harmonique associée à la série proposée, on a:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial^2 U(r, \theta)}{\partial \theta^2}.$$

¹ Au sujet de la convergence uniforme des séries de FOURIER, on trouvera des propositions intéressantes dans le livre récemment paru de M. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

De ces diverses égalités, on déduit, en vertu d'une étude qui a été faite dans la première partie:

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta),$$

ce qui est précisément le théorème d'ABEL.

Mais nous pouvons aller plus loin: supposons que la série proposée soit convergente en tous les points d'un intervalle I; on a alors $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ d'après un théorème de CANTOR. En outre la série aura des points de continuité formant un ensemble dense dans I, d'après le théorème de M. BAIRE, soit θ_0 un tel point. Il résulte alors de ce que nous avons établi dans la première partie, que l'on aura:

$$\lim P(r, \theta) = f(\theta_0)$$

quand le point (r, θ) se rapproche indéfiniment du point $(1, \theta_0)$ suivant un chemin quelconque tangent ou non à la circonférence.

Ainsi, si une série de Taylor (ou la partie réelle d'une série de Taylor) est convergente en tous les points d'un arc S du cercle de convergence il existe dans tout intervalle de S, des points où la série prend une valeur bien déterminée suivant tous les chemins qui y aboutissent.

7. Ceci nous amène à parler des conditions de convergence d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence. Nous avons obtenu à ce sujet une proposition qui paraît devoir être utile et dont voici l'énoncé:

Si la série de Taylor

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

a un rayon de convergence égal à l'unité et si c_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la série est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence. Ce théorème se déduit facilement d'un théorème de RIEMANN (§ 9, théorème III, du mémoire cité), et dont voici l'énoncé (en conservant les notations du paragraphe précédent):

«La condition nécessaire et suffisante pour que la série:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

soit convergente pour une valeur θ de l'argument est que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_b^c F(t) \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin \frac{(\theta-t)}{2}} \rho(t) dt$$

tende vers une limite finie quand n augmente indéfiniment, en désignant par b et c deux nombres quelconques comprenant la valeur θ , et $\rho(t)$ une fonction indéterminée de t assujettie aux conditions suivantes: $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ ont la valeur zéro pour $t=b$, $t=c$ et sont continues entre ces limites; $\rho''(t)$ n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima; en outre pour $t=\theta$, on a $\rho(t)=1$, $\rho'(t)=0$, $\rho''(t)=0$ et $\rho'''(t)$, $\rho^{IV}(t)$ sont finies et continues.»¹

Il en résulte, comme le fait remarquer RIEMANN que la convergence de la série en un point θ , ne dépend que des propriétés de la fonction $F(t)$ dans un intervalle (b, c) aussi petit qu'on le veut entourant ce point.

Supposons en particulier que dans (b, c) , $F(t)$ admette des dérivées bornées et continues d'ordre aussi élevé que nous voudrions. Nous pourrions alors transformer l'intégrale précédente au moyen d'intégrations par parties. En posant:

$$M = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin \frac{(\theta-t)}{2}}$$

et tenant compte des conditions imposées à $\rho(t)$, nous aurons ainsi:

$$\begin{aligned} \int_b^c F(t) \rho(t) \frac{d^2 M}{dt^2} dt &= - \int_b^c \frac{dM}{dt} \frac{d}{dt} (F\rho) dt \\ &= - \int_b^c \frac{dM}{dt} (F\rho' + \rho F') dt = \int_b^c (F\rho'' + 2\rho' F' + \rho F'') M dt. \end{aligned}$$

¹ Nous reproduisons ici l'énoncé de RIEMANN; parmi les conditions énoncées par lui relativement à la fonction $\rho(t)$, il y en a qui sont superflues.

Or la fonction de t : $F\rho'' + 2\rho'F' + \rho F''$, est une fonction, intégrable et bornée qui pour $t = \theta$ prend la valeur $F''(\theta)$, et admet une dérivée finie. Il résulte alors des études classiques sur l'intégrale de DIRICHLET, que l'intégrale considérée tend vers une limite finie: $F''(\theta)$, quand n augmente indéfiniment et que ΣA_n est convergente au point considéré.

Cela étant, si dans

$$(I) \quad \varphi(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n + \dots \quad (\text{on suppose encore } c_0 = 0)$$

on pose $\zeta = e^{i\theta}$, on obtient, en séparant le réel de l'imaginaire, deux séries trigonométriques, et les fonctions de RIEMANN $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ correspondantes, s'obtiennent en posant $\zeta = e^{i\theta}$, dans la série:

$$(II) \quad \psi(\zeta) = -\frac{c_1\zeta}{1^2} - \frac{c_2\zeta^2}{2^2} - \dots - \frac{c_n\zeta^n}{n^2} - \dots$$

qui est absolument convergente sur son cercle de convergence.

Or les fonctions (I) et (II) ont les mêmes singularités, comme il résulte, par exemple, de l'expression de $\psi(\zeta)$ au moyen de $\varphi(\zeta)$ à l'aide de quadratures. Si donc en un point d'argument θ du cercle de convergence, la fonction (I) est régulière, il en sera de même de la fonction (II) et par suite $F(t)$, $F_1(t)$ seront analytiques, dans un intervalle fini (b, c) comprenant le point θ ; elles y auront donc des dérivées bornées d'ordre aussi élevé qu'on le voudra. Par suite, d'après ce qu'on vient de voir, la série

$$c_0 + c_1 e^{i\theta} + \dots + c_n e^{ni\theta} + \dots$$

sera convergente.

Si l'on suppose maintenant, non plus que les coefficients tendent vers zéro, mais qu'ils restent finis, il résulte du raisonnement de RIEMANN que la différence entre $A_0 + A_1 + \dots + A_n$ et l'intégrale considérée par lui reste bornée quand n croît indéfiniment; *il en résulte qu'en tout point régulier du cercle de convergence, la série doit osciller entre des limites finies.*

Ces théorèmes permettent dans un grand nombre de cas de mettre en évidence certains points singuliers d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence; on peut d'ailleurs en augmenter le champ d'application en utilisant le principe de multiplication des singularités de M. HADAMARD: si en multipliant les coefficients de la série donnée par ceux d'une série connue admettant par exemple le point $z = 1$ comme point singulier unique,

on obtient une nouvelle série dont les coefficients tendent vers zéro, sans former une série absolument convergente, tous les points de divergence que l'on pourra mettre en évidence sur le cercle de convergence, seront des points singuliers pour la série proposée.

Exemples. I. Considérons la série suivante, étudiée par M. HADAMARD dans sa thèse: ¹

$$\sum_1^{\infty} \sin(\log n) z^n.$$

Je dis que le point $z = 1$ est un point singulier. Il suffit de remarquer que si l'on donne à n les valeurs entières comprises entre:

$$e^{2k\pi + \alpha} \quad \text{et} \quad e^{2k\pi - \alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

on obtient, dans la série $\sum_1^{\infty} \sin(\log n)$, une suite de termes consécutifs supérieurs à $\sin \alpha$, et dont le nombre croît indéfiniment avec k ; il en résulte que la somme de cette série n'oscille pas entre des limites finies, et par suite le point $z = 1$ est singulier (c'est d'ailleurs le seul point singulier, comme il résulte de l'expression de la fonction au moyen d'une intégrale définie).

II. Considérons la série: $\sum \mu(n) z^n$, où $\mu(n)$ désigne la fonction arithmétique égale à zéro, quand n contient des diviseurs carrés, et dans les autres cas à $(-1)^h$, h étant le nombre des facteurs premiers de n . Je dis que le point $z = 1$ est singulier. En effet $\mu(1) + \mu(2) + \dots + \mu(n)$ n'oscille pas entre des limites finies, car s'il en était ainsi la série de DIRICHLET:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

serait uniformément convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle serait supérieure à un nombre positif quelconque, on en déduirait que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéro imaginaire; or elle en a une infinité.

Il est inutile de multiplier ces exemples: tant qu'il ne s'agit que de démontrer la divergence *en un point*, c'est à dire la divergence d'une série

¹ *Essai sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 4^e série, tome 8, p. 163).

purement numérique, il n'y a aucune règle générale à donner. Ce qui est plus intéressant c'est de donner des exemples de séries trigonométriques, dont les coefficients tendent vers zéro et qui aient des points de divergence dans tout intervalle: on aura, en même temps, une série de TAYLOR admettant son cercle de convergence comme coupure. Nous parlerons un peu de cette question à la fin de ce mémoire.

8. Pour terminer cette deuxième partie, nous allons montrer que *l'on peut trouver des fonctions analytiques uniformes ayant pour singularité unique une coupure fermée, par exemple un cercle et possédant une infinité non dénombrable de zéros sur la coupure.*¹ En effet construisons comme il a été expliqué dans la première partie une fonction harmonique restant positive dans C , régulière dans ce cercle, et prenant la valeur $+\infty$ aux points d'un ensemble parfait de mesure nulle E , de la circonférence. On peut supposer que dans tout intervalle intérieur à l'un des intervalles contigus à E la fonction $f(u)$ (page 344) admette une dérivée bornée, sans être analytique. Dans ces conditions la fonction harmonique $Q(r, \theta)$ conjuguée de la fonction harmonique considérée $P(r, \theta)$, prendra des valeurs bien déterminées sur le cercle, sauf aux points de E . La fonction analytique $\varphi(z) = P + iQ$, est donc régulière dans C , n'y devient jamais nulle, puisque P reste positif, et prend une valeur infinie aux points de E . Si donc on considère la fonction $\frac{1}{\varphi(z)}$ elle sera holomorphe à l'intérieur du cercle qu'elle admettra comme coupure, prendra sur le cercle une suite de valeurs bien déterminées et continues et en particulier la valeur zéro en tous les points de l'ensemble non dénombrable E .

Il serait d'ailleurs facile d'obtenir une fonction prenant la valeur zéro en tous les points d'un ensemble non dénombrable et partout dense sur une coupure; il suffira d'appliquer à l'exemple précédent le principe de condensation des singularités; considérons une infinité dénombrable d'ensembles analogues à E : $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, de telle sorte que l'ensemble $E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots$ soit partout dense et construisons les fonctions harmoniques positives $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ correspondantes; choisissons

¹ On trouvera d'intéressantes remarques au sujet de cette question dans la thèse de M^r ZORETTI: *Sur les fonctions analytiques uniformes etc.*, (Journal de mathématiques, 1900).

ensuite les constantes positives c_0, c_1, c_2, \dots de telle sorte que la série $c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_n P_n + \dots$ soit convergente pour le centre du cercle; elle représentera alors une fonction harmonique régulière dans C et devenant infinie en tous les points de l'ensemble $(E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots)$. En raisonnant comme plus haut, on obtiendra une fonction uniforme définie dans C et prenant la valeur zéro en tous les points de l'ensemble considéré.

La forme de la coupure ne joue ici aucun rôle essentiel. Les intégrales définies étudiées par HERMITE et STIELTJES, par exemple la suivante:

$$\int_0^{\infty} \frac{u + \beta}{\varphi(u)} du$$

permettraient d'obtenir des fonctions jouissant des mêmes propriétés, la coupure étant cette fois une demi-droite, ou un segment de droite.

Mais l'ensemble des zéros que l'on obtient ainsi est toujours de mesure nulle et il est aisé de voir que la méthode que nous avons employée ne permet pas d'aller plus loin; à vrai dire il est probable qu'une fonction uniforme ne peut prendre la valeur zéro qu'en un ensemble de mesure nulle de points d'une coupure isolée, mais il paraît bien difficile de donner de ce fait une démonstration générale. On pourrait même se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir une fonction analytique définie par exemple par une série de TAYLOR à rayon de convergence fini, et non continuable, qui prenne la valeur zéro en tous les points du cercle de convergence *suivant les rayons* qui y aboutissent. Nous pouvons seulement affirmer que si une telle fonction existe elle n'est pas bornée à l'intérieur du cercle et même qu'elle peut s'approcher autant que l'on veut de toute valeur donnée à l'avance.

D'une façon un peu plus précise supposons que la série de TAYLOR $f(\beta)$ converge à l'intérieur du cercle C de rayon un, et y reste bornée; je dis que si $f(\beta)$ n'est pas identiquement nulle, l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $f(re^{i\theta})$ ne tend pas vers zéro, r tendant vers un, est de mesure *non nulle* dans tout intervalle. En effet, si l'on avait

$$\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = 0, \quad \text{pour } \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \alpha$$

à un ensemble de mesure nulle près, en choisissant un entier n tel que $n\alpha > 2\pi$, on en déduirait que la fonction

$$F(z) = f(z)f(ze^{ia})f(ze^{2ia}) \dots f(ze^{nia})$$

prendrait la valeur zéro en tous les points de la circonférence, suivant les rayons, sauf peut être aux points d'un ensemble de mesure nulle. $F(z)$ étant bornée à l'intérieur de C , il s'ensuit que $F(z)$ et par suite $f(z)$ doivent être identiquement nulles.

Il existe donc dans tout intervalle, sur la circonférence, des points où $f(z)$ prend, suivant les chemins non tangents, une valeur déterminée, *différente de zéro ou d'une constante donnée A* , ou même de p constantes données arbitrairement, comme on le voit, en considérant le produit:

$$\Phi(z) = [f(z) - A_1][f(z) - A_2] \dots [f(z) - A_p].$$

La même propriété a lieu pour une fonction qui devient bornée par une transformation homographique.

Signalons également la proposition suivante, qui découle aisément de ce qui a été dit au § 6:

Si la série $\Sigma(a_n + ib_n)e^{ni\varphi}$ est convergente et a pour somme zéro dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, tous les coefficients a_n et b_n sont nuls.

Note.

Nous allons donner maintenant quelques indications sur le rôle que peut jouer la question de l'approximation des nombres incommensurables dans l'étude de certaines particularités que peuvent présenter les séries trigonométriques.

Soit x un nombre incommensurable, $q_1 q_2 \dots q_n \dots$ une suite d'entiers positifs croissants et considérons les valeurs approchées par excès et par défaut de x à $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_n}$ près. Je dis que si l'on a constamment $q_{n+1} \geq 2q_n$ les valeurs par excès ne croissent pas et les valeurs par défaut ne décroissent pas. En effet le segment $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + 1}{q_n}\right)$ a pour longueur $\frac{1}{q_n} \geq \frac{2}{q_{n+1}}$; il en résulte qu'il renferme en général au moins deux points

dont les abscisses sont de la forme $\frac{h}{q_{n+1}}$. Si donc $\frac{p_n}{q_n}$ est la valeur approchée de x à $\frac{1}{q_n}$ près par défaut, on aura :

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < x < \frac{p_{n+1} + 1}{q_{n+1}} < \frac{p_n + 1}{q_n}.$$

(Dans le cas où $q_{n+1} = 2q_n$, l'une des deux inégalités extrêmes pourrait devenir une égalité.)

Supposons maintenant que l'on ait :

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > k > 2$$

je dis que l'on pourra trouver dans tout intervalle des nombres x en infinité non dénombrable, tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de n :

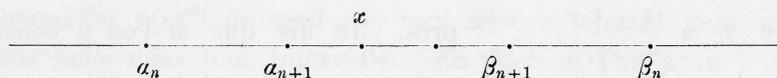
$$(q_n x) > f.$$

f désignant un nombre positif fixe et $(q_n x)$ la valeur absolue de la différence entre $q_n x$ et l'entier le plus voisin.

En effet, pour i suffisamment grand l'intervalle $\left(\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_i + 1}{q_i}\right)$ sera compris à l'intérieur d'un intervalle donné AB , en choisissant p_i convenablement. Considérons maintenant l'intervalle $\left(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \frac{p_{i+1} + 1}{q_{i+1}}\right)$ compris à l'intérieur de l'intervalle de rang i .

S'il y a plusieurs intervalles de rang $i + 1$ entre lesquels nous avons le choix, nous prendrons celui qui comprend le milieu de l'intervalle de rang i .

En continuant ainsi nous obtiendrons un nombre x défini par la suite de ses valeurs approchées à $\frac{1}{q_i} \frac{1}{q_{i+1}} \dots \frac{1}{q_n} \dots$ près par défaut et par excès et que nous appelons $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \dots; \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n, \dots$



Or d'après la façon dont les α et β ont été choisis, l'un et l'autre des intervalles $\alpha_n \alpha_{n+1}, \beta_n \beta_{n+1}$ sont plus grands que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{q_n}.$$

On aura par suite, puisque x est compris entre α_{n+1} et β_{n+1} :

$$(q_n x) > \frac{k-2}{2k} = f,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si maintenant le rapport $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ augmente indéfiniment avec n on verra aisément qu'il existe dans tout intervalle des nombres x tels que $(q_n x)$ tende vers telle limite que l'on voudra (comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$).

Nous déduisons de là une démonstration simple du théorème de CANTOR d'après lequel une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro a des points de divergence dans tout intervalle. On voit aisément qu'il suffit de considérer une série de sinus:

$$\sum c_n \sin(n\pi x).$$

S'il existe en effet une infinité de valeurs de n : $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ pour lesquelles $|c_n|$ reste supérieur à un nombre positif a , on peut supposer, en négligeant au besoin certains des q_i , que l'on ait constamment

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} > k > 2$$

et comme on peut alors choisir n , dans tout intervalle, de telle façon que $\sin(q_i \pi x)$ reste supérieur en module à $\sin(\pi f)$ ($0 < f < \frac{1}{2}$), les termes correspondants de la série ne tendent pas vers zéro et celle-ci est divergente.

On obtient aussi très aisément les propositions suivantes que nous nous contentons d'énoncer.

Considérons la série $\sum A_n \sin(a_n x)$ dans laquelle $\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 2$: si la série $\sum A_n$ n'est pas absolument convergente, cette série aura des points de divergence dans tout intervalle.

Si rapidement croissantes que soient les constantes $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|, \dots$ on pourra toujours trouver des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ croissant assez vite pour que la série $\sum A_n \frac{\sin}{\cos}(a_n x)$ ait des points de convergence dans tout intervalle.

On voit qu'il est facile de former des séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers zéro et qui ont une infinité non dénombrable

et dense de points de divergence; d'ailleurs on ne détruira pas cette propriété en ajoutant à une telle série, une autre série partout convergente par exemple $\sum a_n \sin nx$, où les a_n sont positifs, décroissants et tendent vers zéro — on déduira de là différentes séries de TAYLOR ayant leur cercle de convergence comme coupure.

Indiquons maintenant le rôle que jouent dans l'étude de la convergence des séries trigonométriques les points de convergence absolue. Soit x_0 un point de convergence absolue de la série

$$f(x) = \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On aura:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = -4 \sum A_n^0 \sin^2 \frac{nh}{2}$$

en posant

$$A_n^0 = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0.$$

La série du second membre est donc absolument et uniformément convergente puisque la série $\sum |A_n^0|$ est convergente; elle représente donc une fonction continue de h . On en déduit que si la série est convergente, ou continue au point $(x_0 + h)$, elle est convergente ou continue au point $(x_0 - h)$, c'est à dire que les points de continuité, de convergence, de divergence, de convergence absolue sont deux à deux symétriques par rapport aux points de convergence absolue.

Si la série a deux points de convergence absolue dont la différence des arguments est incommensurable à π , on en déduira l'existence de tels points dans tout intervalle.

Voici dans le même ordre d'idées une question qui me paraît intéressante et dont je n'ai pu trouver de solution: considérons une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro; nous avons vu qu'elle peut avoir des points de divergence dans tout intervalle, mais l'ensemble des points pour lesquels nous pouvons démontrer la divergence, quand elle a lieu, est toujours de mesure nulle. Peut-on alors donner un exemple de série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro, et qui soit divergente pour toutes les valeurs de l'argument ou seulement pour un ensemble de mesure non nulle de valeurs de l'argument? Il semble que cela puisse avoir lieu par exemple pour des séries présentant un grand nombre de lacunes, mais nous n'en avons aucune preuve rigoureuse.

Nous allons encore, en terminant ces généralités sur la convergence des séries trigonométriques démontrer une proposition qui paraît avoir été jusqu'ici admise sans démonstration rigoureuse: *si la série*

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

est absolument convergente en tous les points d'un intervalle, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

En effet s'il en est ainsi la série proposée sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x ; en faisant $x = 0$ on obtient la série $\sum a_n$ qui doit être, d'après l'hypothèse, absolument convergente. Reste à démontrer que si la série $\sum b_n \sin nx$ est absolument convergente pour toutes les valeurs de x , la série $\sum |b_n|$ est convergente.

Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} |b_n| \cdot |\sin nx|$$

qui a en chaque point une valeur finie; cette fonction, limite de fonctions continues, étant d'après le théorème de M. BAIRE ponctuellement discontinue, sera bornée dans certains intervalles tels que (α, β) . Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série qui définit $\varphi(x)$. On a:

$$S_n(x) < \varphi(x),$$

$$0 < \int_{\alpha}^{\beta} S_n(x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx \quad (\text{quantité finie}).$$

Or, on vérifie aisément que l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\sin nx| dx$$

a une valeur qui tend vers $2(\beta - \alpha)$ pour n infiniment grand, qui reste donc supérieure à un nombre positif fixe.

Il résulte alors de la dernière inégalité que nous avons écrite que $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$ doit rester bornée quand n croît indéfiniment, c'est à dire que la série $\sum b_n$ est absolument convergente.

Nous concluons de là que si les séries $\sum a_n, \sum b_n$ ne sont pas toutes les deux absolument convergentes, il y a dans tout intervalle des valeurs de x pour lesquelles la série $\sum |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$ est divergente.

Comme application, faisons voir que si l'on a une série trigonométrique:

$$A_0 + A_1 + \dots + A_n + \dots \quad (A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

telle que $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ pour n infini, la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ étant divergente, on pourra toujours en changeant le signe de certains des A_n , obtenir une nouvelle série qui ait des points de divergence dans tout intervalle.

Soient en effet $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots$ une infinité dénombrable et partout dense d'arguments compris entre 0 et 2π et telle qu'il y en ait une infinité qui soient égaux à l'un quelconque d'entre eux. D'après ce qui précède je puis toujours supposer ces arguments tels que pour $x = x_1, x_2, \dots$ la série $\sum |A_n|$ soit divergente. On peut alors déterminer une suite d'entiers croissants n_1, n_2, n_3, \dots tels que l'on ait:

$$|A_0| + |A_1(x_1)| + |A_2(x_1)| + \dots + |A_{n_1}(x_1)| > P,$$

$$|A_{n_1+1}(x_2)| + \dots + |A_{n_2}(x_2)| > P$$

.....

P désignant un nombre positif quelconque; pour

$$n_{p-1} + 1 \leq n \leq n_p$$

donnons à $\varepsilon_n = \pm 1$, le signe de $A_n(x_p)$. Dans ces conditions, la série:

$$\varepsilon_0 A_0 + \varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n A_n + \dots$$

sera divergente pour $x = x_1, x = x_2, \dots$. Il en résulte (page 389) que la série de TAYLOR:

$$\sum (a_n - ib_n) \varepsilon_n \delta^n$$

aura son cercle de convergence pour coupure.

Ainsi on peut toujours en multipliant par -1 certains coefficients d'une série de TAYLOR obtenir une nouvelle série qui admette son cercle de convergence comme coupure, au moins lorsque les coefficients satisfont aux conditions énoncées au haut de cette page; il est infiniment probable que cela a lieu dans tous les cas.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Solutions périodiques des équations du mouvement des systèmes.

Vu et approuvé:

Paris, le 4 juillet 1905.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer:

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.
