PROFESSOR MITTAG-LEFFLER
DJURSHOLM-STOCKHOLM.

Djursholm le 30 Décembre 1905.

Cher Monsieur,

Soyez le bienvenu dans les Acta. Je vous publierai avec le plus grand plaisir. Tâchez pourtant d'écrire de manière qu'on puisse vous suivre sans prendre recours à d'autres travaux publiés d'autre part.

Agréez, je vous en prie, l'expression de mes sentiments de haute estime.

Mittag-Leffler

(Mémoire non envoyé
R.M.)

PROFESSOR MITTAG-LEFFLER
DJURSHOLM-STOCKHOLM.

Djursholm le 12 Février 1907.

Très honoré Monsieur,

J'accepte avec plaisir un mémoire de vous concernant les fractions continus, mais je préfererais si vous voulez exposer d'une manière développée ensemble avec vos nouveaux recherches les idées fondamentales dans votre mémoire couronné.

Quant à la représentation proportionnelle en Suède je tacherai de vous obtenir un article par quelque plume tres compétente.

Agréez, je vous en prie, l'expression de mes sentiments de haute estime de votre talent mathématique si remarquable.

Mittag-Leffler

PROFESSOR MITTAG-LEFFLER
DJURSHOLM-STOCKHOLM.

Djursholm le 30 Octobre 1907.

Monsieur et cher collègue,

Je viens d'envoyer votre manuscrit à l'imprimerie et vous recevrez bientôt des épreuves.
J'attends moi-même avec intérêt ces épreuves pour prendre connaissance de votre travail que je n'ai pas eu l'occasion de lire en manuscrit.

Je saisis cette occasion pour fixer votre attention sur un mal - entendu qui se trouve dans votre thèse. Vous dites pag. 68: "Que la représentation par fractions continues introduit des coupures et renseigne par cela même sur les singularités des fonctions étudiées, ce que ne fait pas le mode de représentation le plus général connu jusqu'ici, je veux dire le développement en séries de polynômes de M.Mittag-Leffler." - Mais c'est juste le contraire qui a lieu. Vous avez vu mes 5 notes dans les Acta mathematica. La représentation arithmétique qui est donnée dans la première note soit par exemple

$$FA(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{|\underline{\lambda_1} \cdots |\underline{\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$$

(où A désigne ce que j'appelle l'étoile principale ou l'étoile qui est limitée en chaque direction par le premier point singulier qu'on rencontre en allant sur une demi-droite du centre a vers l'infini)
ne dit rien il est vrai sur les singularités. M.Borel regarde cela comme un avantage et veut trouver, avec tort d'après mon opinion, dans cette circonstance une méthode d'élargir le champ (ou la définition) des fonctions analytiques. Dans les notes suivantes je donne au contraire de plusieures manières différentes des expressions qui nous fixent sur les

PROFESSOR MITTAG-LEFFLER
DJURSHOLM-STOCKHOLM.

singularités. Une telle expression est par exemple :

$$FA(x) = \lim_{\beta=1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\beta^{\mu}}{\lfloor \mu} \left[\left(\frac{x-a}{H}\right)^{\mu} F^{(\mu)}(a) + c_1^{(\mu)} \left(\frac{x-a}{H}\right)^{\mu-1} F^{(\mu-1)}(a) + \cdots + c_{\mu-1}^{(\mu)} \frac{x-a}{H} F^{(1)}(a) \right]$$

où

$$H = -\log(1-\beta)$$

et $c_1^{(\mu)} \cdots c_{\mu-1}^{(\mu)}$ sont définies par l'égalité

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+\mu-1) = \lambda^{\mu} + c_1^{(\mu)} \lambda^{\mu-1} + \cdots + c_{\mu-1}^{(\mu)} \lambda$$

Vous trouvez plusieurs de ces expressions dans ma troisième note. La convergence a lieu en chaque direction jusqu'au premier point singulier mais n'a jamais lieu quand on passe en dehors de ce point. Cette expression donne donc le renseignement le plus complet sur les singularités.

Une autre expression dans un autre genre (voir ma ~~troisième~~ cinquième note) est la suivante

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où

$$F(\omega x) = F(0) + \frac{F'(0)}{\lfloor \alpha \cdot 1} x + \cdots + \frac{F^{(\nu)}(0)}{\lfloor \alpha\nu} x^{\nu} + \cdots \quad ; \quad \lfloor \alpha\nu = \Gamma(\alpha\nu+1)$$

L'intégrale converge dans chaque direction jusqu'au premier point singulier mais ne converge jamais en dehors.

Je me suis toujours de différentes manières efforcé de trouver de telles expressions parce que j'ai regardé comme essentiel l'étude des singularités.

Si l'on laisse tomber ce point de vue il est bien facile de former des expressions valable dans toute l'étoile principale. Une telle expression d'une simplicité extrême est par exemple:

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\lfloor \alpha\nu} x^{\nu}$$

Cette expression a pourtant le désavantage de pouvoir à un certain choix des constantes $F^{(\nu)}(0)$ converger en dehors de A et ne dit donc rien sur les singularités.

Pour être fixé sur les singularités il faut dans le cas général des ex -

PROFESSOR MITTAG-LEFFLER
DJURSHOLM-STOCKHOLM.

pressions limites doubles. Cela résulte d'une étude fort intéressante qui a été faite par M. Borel et qui se trouve dans mes Acta.

Veuillez agréer, je vous en prie, l'expression de ma haute considération de votre talent mathématique si remarquable.

Mittag-Leffler