ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE POPULAIRE

A L'USAGE

DES PERSONNES DE DIVERSES PROFESSIONS

QUI, PAR GOUT OU PAR BESOIN, VEULENT APPRENDRE FACILEMENT ET EN PEU DE TEMPS LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE CETTE MÈRE DE TOUTES LES SCIENCES; OUTRE LES DÉMONSTRATIONS NOUVELLES QUE CONTIENT CE LIVRE, TELLES QUE CELLE DU CARRÉ DE L'HYPOTÉNUSE, ON S'EST EFFORCÉ D'Y METTRE LES ANCIENNES A LA PORTÉE DE TOUTES LES INTELLIGENCES.

L'ouvrage est précédé d'un Vocabulaire qui contient l'étymologie et l'explication des Mots techniques usités dans les Traités élémentaires de Géométrie.

PAR A. TEYSSÈDRE,

AUTEUR DE PLUSIEURS OUVRAGES SCIENTIFIQUES.

PARIS,

CHEZ CORNALE, IMPRIMEUR-ÉDITEUR,

RUE DU PETIT-CARREAU, 32.

1844.

PRÉFACE.

Les mathématiques sont la première de toutes les sciences ; basées sur des principes vrais, invariables, les temps, les révolutions physiques ou politiques, les caprices des hommes, sont impuissans pour leur faire subir la moindre altération, le plus léger changement ; cette science, en un mot, la seule véritablement digne de ce nom, est comme une émanation de la sublime intelligence qui a bien voulu en révéler les secrets à ses créatures.

Parmi les diverses branches dont se composent les mathématiques, celle du calcul simple est la plus répandue, par la raison qu'elle est la plus usuelle ; et, toutefois, il est peu de gens qui la possèdent à fond : les bons arithméticiens ne sont pas très communs.

Les géomètres sont bien plus rares encore, et, cependant la science qui contient des méthodes infaillibles pour se rendre un compte exact de l'étendue des surfaces, du volume des corps, qui fournit les moyens d'apprécier le poids des masses les plus énormes, même celui des sphères qui circulent dans les espaces célestes, qui enseigne à mesurer les distances inaccessibles.... la géométrie n'est-elle pas la plus attrayante de toutes les connaissances humaines ?

Considérée sous le rapport des arts que nécessitent les besoins et la jouissance de la vie, la science de l'étendue renferme implicitement les théories du plus grand nombre; pour être maçon, charpentier, serrurier, tailleur de pierre, mécanicien, arpenteur, menuisier, tourneur... il faut posséder par instinct, par pratique ou par théorie, au moins les principes de la géométrie élémentaire. C'est ce qu'on a si bien compris dans ces derniers temps, que de tous côtés on voit surgir des écoles de *géométrie appliquée aux arts*; mais dans la plupart de ces écoles, on n'enseigne que les procédés de la science, sans les accompagner de démonstrations; de là vient que les jeunes gens qui sortent de ces écoles ne sont et ne peuvent être toute leur vie que des routiniers, incapables de faire un pas au delà des limites du peu de connaissances qu'ils ont acquises pour ainsi dire machinalement; si malheureusement il leur arrive de perdre le souvenir d'un procédé qu'ils ont appris et accepté en aveugles, il leur est impossible de le retrouver par la force du raisonnement, il faut qu'ils aient recours aux livres dans lesquels sont exposées sans discussion les diverses manières d'opérer.

Dans une autre classe de traités de géométrie, on pèche par un excès contraire; les développemens et les preuves des théories y sont poussés jusqu'aux scrupules les plus minutieux, rien n'est accepté sans examen, pas même les vérités les plus évidentes, et, par exemple, on y prouve que le contour d'une figure qui en enveloppe une autre surpasse le contour de celle-ci. Ces ouvrages, au reste, sont très savans, très bien faits, mais ils ne conviennent qu'aux personnes qui ont le loisir et les moyens de se livrer à de longues et profondes études.

Les élémens que l'on offre ici au public sont destinés à tenir le milieu entre ces traités de l'ordre le plus élevé et les modestes petits livres où l'on se contente d'exposer purement et simplement certaines méthodes, certaines opérations pour arriver à tel ou tel résultat.

Nos élémens de *géométrie populaire* ont été rédigés avec toute la simplicité possible, dans l'intention de les rendre conformes au titre qu'on leur a donné. On n'y trouvera donc point de ces démonstrations savantes, minutieuses, renforcées de calculs longs et fatigants ; dans nos raisonnemens, nous nous sommes fait aussi *populaire*, aussi *vulgaire* que possible ; il nous arrive souvent de conclure la vérité d'une proposition d'après la simple inspection d'une figure : de ce nombre est le théorème que *la somme des trois angles d'un triangle équivaut à celle de deux angles droits* ; il en est semblablement de la démonstration du carré de l'hypoténuse, il ne faut que regarder attentivement la figure pendant quelques minutes pour être intimement convaincu des propriétés de ce théorème fondamental de la géométrie; dans la démonstration de la solidité de la pyramide, on a préféré la méthode de Sanderson comme beaucoup plus simple que celle qui se déduit de la trisection du prisme triangulaire.

Enfin, nous démontrons à l'aide de cartes à jouer, de cartons taillés convenablement, que des parallélogrammes, des triangles de même base et de même hauteur, sont équivalens ; que des prismes, des pyramides, des cônes qui ont même hauteur et des bases équivalentes, sont égaux en solidité......... Nous faisons un fréquent usage de la méthode des infiniment petits!.... Quel est le mathématicien qui peut s'en dispenser quelque savant qu'il soit?

On fera bien de consulter le petit vocabulaire qui commence à la page VIII. Le lecteur trouvera à la fin du volume un errata dans lequel on a signalé quelques fautes qui sont passées inaperçues dans le cours de l'impression.

VOCABULAIRE

CONTENANT L'ÉTYMOLOGIE, LA DÉFINITION ET L'EXPLICATION DES MOTS TECHNIQUES USITÉS DANS LES TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE (1).

ACUTANGLE, lat. *acutus*, pointu, venant de *acus*, aiguille, et *angulus*, angle. Se dit d'un triangle ou d'un polyèdre dont tous les angles sont aigus.

ADJACENT, lat. *adjacens*, de *ad*, auprès, *jacens*, couché : placé tout près. Une ligne est adjacente à deux angles lorsqu'elle forme à ses extrémités un des côtés de ces angles : le côté AB (fig. 7) est adjacent aux angles A et B.

AIGU, lat. *acutus*, pointu, venant du grec *akis*, pointe ; un angle linéaire ou plan est aigu quand il est moindre qu'un droit.

AIRE, lat. *area*, plancher ou terrain uni sur lequel on bat le blé ; ce mot est synonyme de *surface*.

ANGLE, du latin *angulus*, dérivé du grec *angkulos*, crochu, courbé ; c'est l'espace compris entre deux plans qui se rencontrent : BAC (fig. 2) est un angle.

APOTHÈME, gr. *apo*, loin, *tithêmi*, amener. On appelle de ce nom la perpendiculaire abaissée du centre d'un polygone régulier sur l'un de ses côtés : telle est *og* (fig. 81).

ARC, lat. *arcus*, d'*arceré*, écarter, repousser.

Ce mot, primitivement, était le nom d'une arme de jet ; par imitation, on a donné ce nom à une section quelconque de la circonférence du cercle.

ARÊTE, lat. *arista*, barbe ou pointe de l'épi du blé ; on donne quelquefois ce nom aux côtés d'un polyèdre.

AXE, gr. *axôn*, essieu. En mathématiques, c'est la ligne imaginaire sur laquelle un corps tel qu'une pyramide, un cylindre, un cône, une sphère est censé tourner ; l'axe passe toujours par le centre du solide ; ses extrémités s'appellent *pôles*... ; l'axe du cercle est la perpendiculaire à son plan qui passe par son centre.

AXIOME, gr. *axiôma*, dignité, autorité, d'*axios*, digne, estimable ; axiome est une proposition digne d'être reçue sans examen, sans démonstration.

---

(1) Les étymologies de la plupart des mots techniques dont les mathémaciens font usage sont grecques, mais il est plusieurs de ces étymologies qui manquent de précision ; ainsi *trapèze* vient de *tetrapeza*, table à quatre pieds ; cette étymologie conviendrait tout aussi bien à une table rectangulaire dont la figure cependant ne serait point celle d'un trapèze.

Base, gr. *basis*, de *bainô*, je marche, je suis appuyé sur... On donne ce nom au côté d'un polygone sur lequel il est censé se tenir debout, ou à la face d'un cylindre, d'un cône sur laquelle il est assis.

Calotte, lat. *calantica*, coiffure sans rebords; partie de la surface de la sphère bornée par un cercle.

Capable, lat. *capax*, qui a la même signification; venant de *capere*, prendre, contenir; faire un angle capable d'un arc donné, c'est-à-dire tracer un angle dont l'ouverture puisse comprendre cet arc.

Capacité, lat. *capacitas*, venant de *capere*, prendre, contenir la *capacité* est donc la faculté de pouvoir recevoir, contenir telle ou telle chose....

Centre, gr. *kentron*, un point, dérivé de *kenteô*, je pique; point imaginaire qui marque le milieu d'un cercle, d'un polygone, d'un polyèdre, d'une sphère.

Cercle, lat. *circulus*, diminutif de *circus*, pris du grec *kirkos*, tour, contour, cercle; figure limitée par une ligne courbe fermée dont tous les points sont également éloignés d'un autre point qu'on appelle le *centre* (fig. 1).

Chacun a chacun, se dit des côtés de deux polygones qui sont semblablement placés dans l'une et dans l'autre figure; on dit, dans le même sens, que les faces de deux polyèdres sont semblables, égales chacune à chacune.

Circonférence, lat. *circum*, autour, *ferens*, qui porte, de *ferre*, porter; ligne qui enferme un cercle.... Ce mot est synonyme de *périmètre*, *contour*....

Circonscrit, lat. *circum*, autour, *scriptus*, écrit, tracé, de *scribere*, écrire; se dit d'un polygone qui entoure un cercle, ou d'un polyèdre qui enveloppe une sphère....

Colonne, gr. *kolôn*, os de la jambe; se dit de l'ensemble d'un certain nombre de lettres, de chiffres, de prismes.... placés régulièrement les uns au-dessus des autres.

Commensurables, lat. *cum*, avec, *mensura*, mesure; qui ont ou qui peuvent avoir une commune mesure.

Concave, du dialecte grec éolique, *chavos*, vide. Ce mot, dans notre langue, est synonyme de *creux*.

Cône, gr. *kônos*, pyramide dont la base est un cercle et qui se termine en pointe: un éteignoir représente un *cône*.

Conoïde, gr. *kônos*, cône, *eidos*, forme; solide qui ressemble plus ou moins à un cône.

Contact, lat. *contactus*, signifiant la même chose, de *cum*, avec, *tactus*, attouchement, venant de *tangere*, toucher; le point où deux cylindres, deux sphères se touchent.

Convexe, lat. *convexus*, venant de *convehere*, réunir, amonceler; il signifie le contraire de *concave*: la surface d'une calotte sphérique est convexe; par extension, on donne ce nom à la surface latérale d'un cylindre, d'un cône, d'une pyramide.

Corde, lat. *chorda*, venant du grec *chordé*, intestin; et de là corde de boyaux; et puis d'instrument de musique; en géométrie, c'est le nom de la droite qui joint les extrémités d'un arc.

Corollaire, lat. *corollarium*, conséquence que l'on tire d'une proposition qui vient d'être démontrée.

Corps, lat. *corpus*, ayant la même signification, est souvent synonyme de solide, de volume.

Côté, lat. *costa*, côte ; nom de chacune des lignes qui forment le contour d'une figure ; côté, pris dans un sens absolu, est le nom de la ligne qui mesure les deux dimensions d'un carré ou les trois dimensions d'un cube ; dans les polyèdres, ce mot est synonyme d'*arête*.

Couper, gr. *kôptein*, deuxième aoriste de *kôpein*, signifiant la même chose.

Courbe, lat. *curvus*, venant du grec éolique *kurpos*, qui a la même signification ; *ligne courbe* qui ne peut s'appliquer en tous sens sur un plan ; c'est le contraire de la droite.

Creux, lat. *scrobs*, fosse.

Cube, gr. *kubos*, un dé à jouer, *polyèdre* composé de six carrés égaux ; en arithmétique, le *cube* d'un nombre, c'est le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même : 8 est le cube de $2 = 2 \times 2 \times 2$

Cycloïde, gr. *kuklos*, cercle, *eidos*, forme, figure qui approche plus ou moins de celle du cercle.

Cylindre, gr. *kulindô*, je roule ; volume décrit par un rectangle qui tourne sur un de ses côtés ; la figure 110 représente un cylindre.

Décaèdre, gr. *deka*, dix, *hedra*, base, face ; polyèdre de dix faces

Décagone, gr. *deka*, dix, *gônia*, angle : polygone de dix côtés.

Diagonale, gr. *dia*, par, à travers, et *gônia*, angle ; ligne qui dans un polygone ou dans un polyèdre joint les sommets des angles opposés non adjacents ; BC (fig. 35) est une diagonale.

Diamètre, gr. *dia*, à travers, *metron*, mesure ; ligne qui, tirée dans un cercle et passant par le centre, se termine à la circonférence ; le diamètre de la sphère passe par son centre et se termine à sa surface.

Dièdre, gr. *dis*, deux, *hédra*, base ; angle dièdre, qui est formé par deux plans qui se rencontrent ou qui se coupent.

Dodécaèdre, gr. *dodeka*, douze, *hedra*, base ; polyèdre à douze faces.

Dodécagone, gr. *dodeka*, douze, *gônia*, angle ; polygone de douze angles et de douze côtés.

Droit, Droite, lat. *directus*, signifiant la même chose ; angle *droit* dont les côtés (fig. 3) BC, DC sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

Pyramide, cylindre, cône droits, solides dont l'axe est perpendiculaire sur le milieu de leur base : la figure 5 représente un cône droit.

Ellipse, gr. *elleipsis*, défaut : du verbe *leipô*, je manque ; cercle plus ou moins allongé. Ce mot est synonyme d'*ovale* ; l'ellipse a deux centres (foyers) et deux diamètres.

Ennéagone, gr. *ennéa*, neuf, *gônia*, angle ; polygone de neuf côtés.

Equateur, *æquator*, qui coupe en deux moitiés, fait d'*æquare* ; cercle de la sphère dont le plan passe par son centre et dont l'axe et les pôles sont les mêmes que ceux de la sphère.

Equiangle, lat. *æquus*, égal, *angulus*, angle ; polygone dont tous les angles sont égaux.

Equidistant, lat. *æquè*, également, *distans*, éloigné de : qui est à égale distance de deux objets.

Equilatéral, *æquus*, égal, *latus*, côté ; polygone dont tous les côtés sont égaux.

Equivalent, lat. *æquè*, également, *valens*, valant ; qui vaut autant : deux figures sont équivalentes quand elles sont égales en surface ; un cercle, par exemple, peut être équivalent à un triangle ; deux polyèdres sont équivalents lorsqu'ils ont des solidités égales ; il se peut donc qu'un cube soit équivalent à un cône, à une sphère.

Espace, lat. *spatium*, fait du grec éolique *spadion*, mesure déterminée ; étendue comprise entre des lignes ou des plans.

Etymologie, gr. *étumos*, vrai, *logos*, mot ; vrai sens d'un mot.

Flèche, de l'allemand *flitz*, qui a la même signification ; partie du rayon du cercle comprise entre l'arc et la corde que ce rayon coupe en deux parties égales : gG (fig. 81) est une flèche.

Fuseau, lat. *fusus*, broche sur laquelle on roule le fil qu'on forme avec la quenouille ; partie de la surface de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles qui se coupent sur un diamètre commun : ABCD (fig. 125) est un fuseau.

Géométrie, gr. *gê*, terre, *metron*, mesure.

Heptaèdre, gr. *hepta*, sept, *hedra*, base, face ; polyèdre de sept faces.

Heptagone, gr. *hepta*, sept, *gônia*, angle ; polygone de sept angles et de sept côtés.

Hexaèdre, gr. *ex*, six, *hedra*, face ; polyèdre de six faces.

Hexagone, gr. *ex*, six, *gônia*, angle ; polygone de six angles.

Homologue, gr. *homos*, semblable, *logos*, appellation ; se dit des côtés de deux figures semblables, lesquels sont opposés à des angles égaux dans l'une et l'autre figure.

Hypoténuse, gr. *hupo*, sous, *teinô*, je tends ; nom que l'on donne au côté du triangle rectangle qui est opposé à l'angle droit : AC (fig. 14) est une hypoténuse.

Hypothèse, gr. *hupo*, sous, *thèsis*, position. Ce mot équivaut à celui de *supposition*.

Icosaèdre, gr. *eikosi*, vingt, *hedra*, siége, base ; polyèdre de vingt faces.

Incommensurables, lat. *in*, negatif, *cum*, avec, *mensura*, mesure ; qui n'ont point de mesure commune.

Inscrit, lat. *in*, dans, *scriptus*, écrit, de *scribere*, écrire ; se dit d'une figure qui est formée dans l'intérieur d'une autre et qui la touche en certains points.

Intercepter, lat. *inter*, entre, *capere*, prendre ; se dit de deux lignes ou de deux plans qui comprennent entre eux d'autres lignes, d'autres plans : ainsi l'on dit que deux parallèles qui coupent une circonférence *interceptent* entre elles des arcs égaux, n° 76.

Intersection, lat. *inter*, entre, *sectio*, du verbe *secare*, couper ; se dit de lignes ou de plans qui se coupent réciproquement.

Inverse, lat. *inversus*, participe passé de *invertere*, retourner, renverser en sens contraire ; se dit de deux figures ou de deux polyèdres égaux qui sont placés en sens contraire : deux triangles égaux sont l'inverse l'un de l'autre lorsqu'ils sont opposés par leurs bases et que leurs côtés homologues ont des directions en sens contraire.

Isopérimètre, gr. *isos*, égal, *peri*, autour, *métron*, mesure ; figures dont les contours sont équivalents.

Isocèle, gr. *isos*, égal, *skélos*, jambe ; se dit des triangles dont deux des trois côtés sont égaux.

Lemme, gr. *lemma*, de *lêbô*, je prends ; exposition préliminaire d'une vérité pour arriver à la démonstration d'un théorème ou à la solution d'un problème.

Ligne, gr. *linon*, lin; fil de lin. Voir page 2.

Losange, gr. *loxos*, oblique, et du lat. *angulus*, angle; parallélogramme équilatéral dont deux angles sont aigus et les deux autres obtus (fig. 32).

Mathématiques, gr. *mathema*, venant de *manthanô*, j'apprends; la science par excellence.

Obtus, lat. *obtusus*, émoussé, participe passé de *obtundere*, retrancher; se dit d'un angle plus grand qu'un droit : tel est BCE (fig. 5).

Obtusangle, triangle qui a un angle obtus.

Octaèdre, gr. *oktô*, huit, *hedra*, base; polyèdre qui a huit faces.

Octogone, gr. *oktô*, huit, *gônia*, angle; polygone de huit angles et de huit côtés.

Parallèle, gr. *parallêlos*, de *para*, le long de, *allêlos*, l'un l'autre, également distans l'un de l'autre : deux lignes, deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne peuvent jamais se rencontrer, quoique prolongés à l'infini : les lignes AB, CD... (fig. 21) sont parallèles.

Parallélépipède, gr. *parallêlos*, parallèle, *épi*, autour, *pédion*, plaine, pied; volume ou solide à six faces qui sont égales et parallèles deux à deux (fig. 97),

Parallélogramme, gr. *parallêlos*, parallèle, *gramma*, ligne; figure de quatre côtés dont ceux qui sont opposés sont égaux et parallèles (fig. 34).

Pentaèdre, gr. *pente*, cinq, *hedra*, base : polyèdre qui a cinq faces.

Pentagone, gr. *pente*, cinq, *gônia*, angle; polygone de cinq angles et de cinq côtés.

Pentédécagone, gr. *pente*, cinq, *deka*, dix, *gônia*, angle; polygone de quinze côtés.

Périmètre, gr. *peri*, autour, *metron*, mesure. Ce mot est synonyme de circonférence, de contour.

Perpendiculaire, lat. *perpendicularis*, de *per*, à travers, *pendens*, qui pend; une ligne est perpendiculaire sur une ligne ou sur un plan lorsqu'elle ne penche d'aucun côté et qu'elle forme des angles droits sur cette ligne ou sur ce plan; on dit aussi qu'un plan est perpendiculaire à une ligne ou à un autre plan.

Plan, lat. *planus*, plat, uni, venant de *planities*, une plaine. Le plan est une surface sur laquelle appliquant une ligne droite en tout sens, cette ligne se confond avec le plan.

Point, lat. *ponctum*. Mathématiquement parlant, le point n'a ni largeur, ni longueur, ni épaisseur.

Pôle, gr. *polein*, tourner; extrémités de l'axe d'un cercle, d'une sphère sur lesquelles cet axe est censé tourner en même temps que le cercle ou la sphère.

Polyèdre, gr. *polus*, plusieurs, *hedra*, base, face; angle ou solide, composé de plusieurs plans.

Polygone, gr. *polus*, plusieurs, *gônia* angle; figure à plusieurs angles et à plusieurs côtés.

Prisme, gr. *prisma*, de *prirô*, je scie, je coupe : volume formé de deux polygones égaux et parallèles, et de parallélogrammes rectangles ou obliques; ABCD,. (fig. 96) est un prisme.

Problème, gr. *proballein*, mettre en avant, proposer : ce mot est synonyme de question, demande.

Proportionnel, lat. *proportio*, mot-à-mot, partie pour partie; des lignes, des surfaces,... sont proportionnelles quand il y a le même rapport entre la première et la seconde qu'entre celle-ci et la quatrième : c'est-à-dire que si la première est le tiers de la seconde, la troisième est le tiers de la quatrième.

Puissance, lat. *potentia*, signifiant la même chose ; c'est le produit d'une quantité multipliée un certain nombre de fois par elle-même, soit A une certaine quantité, sa seconde puissance sera $A^2 = A \times A$, sa troisième puissance sera $A^3 = A \times A \times A \ldots$

Pyramide, gr. *puramis*, mot égyptien qui signifie le *caveau du mort* ; c'est par imitation que les géomètres grecs appelèrent de ce nom les polyèdres qui ont pour base un polygone, et dont les autres faces sont des triangles dont les plans passent par un même point : AFBC (fig. 94) est une pyramide.

Quadrilatère, lat. *quatuor*, quatre, *latus*, *lateris*, côté ; polygone de quatre côtés.

Rayon, du lat. *radius*, venant du grec *rhabdos*, petit bâton : généralement les *rais* d'une roue de voiture ; et à cause de la ressemblance, toute ligne tirée dans le cercle entre le centre et un point quelconque de la circonférence.

Rectangle, lat. *rectus*, droit, *angulus*, angle ; parallélogramme dont les quatre angles sont droits.

Triangle rectangle, celui qui a un angle droit.

Scalène, gr. *skalenos*, boiteux : c'est le nom adjectif des triangles dont les trois côtés sont inégaux.

Scholie, gr. *scholion*, note, de *scholê*, loisir ; remarque sur une ou plusieurs démonstrations qui précèdent.

Sécante, lat. *secans*, coupant, coupante, de *secare*, couper : ligne ou plan qui coupe d'autres lignes ou d'autres plans.

Secteur, lat. *sector*, coupeur, de *secare*, couper. Le secteur circulaire est une figure limitée par deux rayons et par l'arc compris entre ces rayons ; le secteur sphérique est une sorte de cône dont le sommet est au centre de la sphère, et qui a pour base une calotte.

Segment, lat. *segmentum*, fait de *secare*, couper. Le segment circulaire est la partie de la surface du cercle compris entre une corde et l'arc qu'elle soutend : le segment sphérique est la portion du solide de la sphère comprise entre les plans de deux cercles parallèles.

Solide, grec *holos*, seul. Tout ce qui a les trois dimensions et qui ne renferme pas de vide, ce mot est synonyme de *volume*.

Somme, lat. *somma*, réunion de plusieurs choses de même espèce de *sumere*, prendre.

Sommet, lat. *summitus*, le haut d'une montagne ; par extension on dit le sommet d'un angle, d'un triangle, d'une pyramide, d'un cône, pour indiquer le point le plus élevé d'un triangle. . . d'une pyramide au-dessus de la base. . .

Sphère, gr. *sphaira*, boule, volume décrit par la demi-circonférence d'un cercle qui fait une révolution autour de son diamètre. La sphère est donc un solide dont tous les points de la surface sont à une égale distance du centre.

Sphéroïde, grec *sphaira*, sphère, et *eidos*, forme ; solide dont la forme approche de celle de la sphère.

Surface, lat. *super*, sur, *facies*, face : tout ce qui a largeur et longueur ; il y a plusieurs sortes de surfaces ; 1° la surface plane sur laquelle on peut appliquer une ligne droite en tout sens ; 2° la surface courbe dont le profil est une ligne courbe; 3° la surface polyédrale, formée d'un certain nombre de plans qui se rencontrent; cette surface prend aussi le nom de *convexe*, lequel convient aussi à la surface courbe.

Symétrique, grec *sun*, avec, *métron*, mesure, se dit de deux objets égaux ou semblables qui sont placés en sens contraire des deux côtés d'un autre objet; deux polyèdres ou deux triangles égaux qui sont formés l'un au-dessus de l'autre, au-dessous d'un plan, sont symétriques lorsque leurs bases se trouvent sur ce même plan.

Tangente, lat. *tangens*, qui touche, de *tangere*, toucher, ligne ou plan qui ne touchent la circonférence d'un cercle ou la surface de la sphère... qu'en un point.

Théorème, gr. *theôros*, contemplateur; vérité qu'il faut démontrer; ce mot est synonyme de *proposition*.

Tetraèdre gr. *tetra*, quatre, *hédra*, base: polyèdre à quatre faces, c'est le plus simple de tous.

Trapèze, gr. *tetra*, quatre, *peza*, pied, *tetra peza*, table à quatre pieds; polygone de quatre côtés dont deux sont parallèles.

Triangle, gr. *treis*, trois, et du lat. *angulus*, un angle; polygone de trois angles et de trois côtés; il y en a de plusieurs espèces: le triangle *rectangle* qui a un angle *droit*, et les triangles acutangle d'équiangle, équilatéral; voir ces mots.

Trièdre, gr. *treis*, trois, *hédra*, base, plan: angle formé par trois plans.

Tronqué, lat. *truncus*, partie d'un arbre dont on a retranché les branches. Pyramide ou cône dont on a retranché la pointe.

Volume, lat. *volumen*, de *volvere*, rouler, et par extension la grosseur d'un corps; ce mot est synonyme de solide.

Zône, gr. *zônê*, ceinture; c'est la partie de la surface de la sphère comprise entre deux cercles parallèles.

FIN DU VOCABULAIRE.

EXPLICATION

DE QUELQUES SIGNES ABRÉVIATIFS.

Pour tenir lieu de certaines expressions qui reviennent souvent dans les raisonnements, les mathématiciens sont convenus de faire usage des signes que voici :

$+$ tient lieu du mot *plus*, ou qui doit être *ajouté* avec : $5 + 3$ signifie 5 plus 3 ou 8; $A + B$ indique que la valeur *ligne, angle*... que représente B doit être ajoutée avec celle que représente A ; $+$ est le signe de l'addition.

$-$ qui signifie moins est le signe de la soustraction : les expressions $13 - 5$, $D - C$ indiquent que 5 doit être retranché de 13, et que la valeur représentée par D doit être diminuée de celle que représente C.

$\times$ est le signe de la multiplication, il tient lieu des mots *multiplié par* : soit 4×7, lisez 4 multiplié par 7 : l'expression $C \times D$ indique que la quantité que représente C doit être multipliée par celle dont D tient la place.

$\frac{o}{o}$ est le signe de la division, et signifie *divisé par*, c'est-à-dire que, pour indiquer qu'un nombre ou une quantité quelconque doit être divisée par une autre, on écrit la première au-dessus de celle-ci, et on les sépare par un trait horizontal; ainsi, l'expression $\frac{17}{3}$ tient lieu des mots 17 *divisé* par 3 ; $\frac{A}{B}$ indique que la valeur dont A tient la place doit être divisée par celle que représente B.

$=$ signifie *égale*, ou est *égal* à ; $7 = 7$, lisez 7 *égale* 7; $A = B$ signifie que la valeur de A est égale à celle de B.

Le signe $<$ signifie *plus grand* ou *plus petit*, suivant sa position, relativement à deux quantités que l'on compare; son ouverture est toujours tournée vers celle que l'on considère comme la plus grande, ainsi :

$A > B$ indique que la valeur de A est supérieure ou *plus grande* que celle de B ; tout au contraire l'expression $A < B$ signifie que la valeur de A est *inférieure* à celle de B.

Si l'un des facteurs de la multiplication était complexe, on le mettrait entre deux parenthèses, alors il serait considéré comme une seule quantité; si l'on avait $B + C$ à multiplier par B, on écrirait $(B + C) \times B$; on agirait de la même manière si les deux facteurs étaient complexes; ainsi, devant multiplier $A + B - C$ par $D + F$, on écrirait $(A + B - C) \times (D + F)$. Un nombre mis au-devant d'une quantité sert de multiplicateur à cette quantité; ainsi pour indiquer qu'une ligne AB doit être prise 3 fois, on écrit 3 AB ; et semblablement pour désigner les deux tiers de l'angle A, on écrit $\frac{2}{3}$ A, ce qui est la même chose que $\frac{2\,A}{3}$.

Le carré d'une ligne AB se désigne par $\overline{AB}^2$; son cube par $\overline{AB}^3$; le signe $\sqrt{}$ signifie qu'il faut extraire la racine de la quantité qui est au-dessous de sa branche horizontale, $\sqrt{25}$ est la racine carrée de $25 = 5$, $\sqrt{A}$ est la racine carrée de la quantité représentée par A : $\sqrt[3]{125}$ est la racine cubique de $125 = 5$.

(Voir l'Arithmétique et le Vocabulaire, page VIII.)

NOTA. Les nombres qui sont en tête des paragraphes sont les numéros d'ordre; les nombres compris entre parenthèses qui se trouvent dans l'intérieur des lignes indiquent les numéros d'ordre que l'on peut consulter au besoin.

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

PREMIÈRE PARTIE.

DES LIGNES ET DE LEURS RAPPORTS.

1. La science dont on donne ici les élémens est, dit-on, d'invention égyptienne; le Nil, inondant ce pays tous les ans, change, détruit les limites des propriétés que l'on est obligé de rétablir par des *mesurages* après la retraite des eaux.

Quoi qu'il en soit, il est bien certain que les applications des théories de la géométrie ne se bornèrent point, même chez les peuples les plus anciens, aux seules pratiques de *l'arpentage* : les maçons, les charpentiers, les tailleurs de pierre, furent, sans s'en douter, des géomètres qu'on pourrait dire inspirés; mais les opérations de l'arpentage, se faisant en grand, à ciel découvert, ceux qui les exécutèrent les premiers passèrent, aux yeux d'un vulgaire ignorant et superstitieux, pour des hommes extraordinaires. Les *mesureurs de champs* eurent donc l'honneur insigne d'imposer le nom de leur profession à la mère de toutes les sciences, LA GÉOMÉTRIE.

2. Cette science a pour objet la mesure de *l'espace* que les corps occupent ou qu'ils *peuvent occuper :* car il

est possible de concevoir un espace limité, indépendamment de l'existence d'aucun corps; un dé à jouer, par exemple, occupe un certain espace dont on peut se faire une idée, tout en se figurant que le dé n'existe pas.

3. L'espace qu'un corps peut occuper a les trois *dimensions*, qui sont :

La *longueur*, la *largeur*, la *profondeur* ou *l'épaisseur*.

Il peut se rencontrer des corps tels qu'un dé à jouer, dont les trois dimensions soient égales entre elles ; mais, dans le cas contraire, on appelle *longueur* la plus grande, *largeur* la moyenne ; et la plus courte *épaisseur* ou *profondeur*. Il peut arriver, cependant, que celle-ci surpasse les deux autres; tel serait le cas d'un petit lac très profond dont on voudrait calculer la capacité.

4. Tous les corps ou les espaces qu'ils peuvent occuper ont, nécessairement, les trois dimensions.

5. Les limites des espaces qu'occupent les corps s'appellent *surfaces*.

6. Les surfaces n'ont que deux dimensions, *longueur* et *largeur*.

Il y a des surfaces diverses à l'infini.

C'est en considérant les surfaces des corps que l'on se fait une idée de leurs *formes*.

7. Parmi les surfaces, on distingue celle qui est dite *plane* ; toutes les autres sont plus ou moins *courbes*.

8. Les limites des surfaces s'appellent *lignes*, et les extrémités des lignes s'appellent *points*.

Les lignes n'ont qu'une seule dimension, la *longueur*.

Le point, mathématiquement parlant, n'a ni longueur, ni largeur, ni épaisseur ; et, néanmoins, il est facile de s'en faire une idée exacte, tout immatériel qu'il est.

9. Parmi les lignes, on distingue la ligne *droite* et la ligne *courbe*.

La ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre ; un fil bien tendu représente grossièrement une ligne droite.

10. Le *plan* est une surface sur laquelle on peut appliquer une ligne droite en tous sens, de façon que tous les points de cette ligne se confondent avec le plan. Une feuille de papier bien tendue, et que l'on se figurerait sans épaisseur, donnerait une idée exacte de ce qu'il faut entendre par un *plan mathématique*.

Les propriétés d'un plan sont indépendantes de sa grandeur et de sa figure, c'est-à-dire, qu'un plan peut être rond, carré, triangulaire...

11. Parmi les lignes *courbes*, on distingue la *circonférence* du cercle ABCD (fig. 1). On la définit : une ligne dont tous les points, A,B,C,D, situés sur un même plan, sont également éloignés d'un autre point O, qu'on appelle le *centre*.

Les lignes AO, BO, CO, DO, toutes égales entre elles, et qui mesurent la distance des points A, B, C... au centre, s'appellent *rayons* du cercle ; une partie quelconque de la circonférence se nomme *arc*.

Les géomètres conçoivent la génération de la circonférence de tout cercle par le mouvement d'une ligne DO, dont l'extrémité D tracerait la courbe, tandis que cette ligne génératrice tournerait sur O l'autre point extrême.

Dans la pratique, on trace habituellement les circonférences des cercles au moyen de compas ; dans ce cas, la longueur du rayon générateur est déterminée par l'écartement des pointes de l'instrument.

12. Deux lignes droites qui se rencontrent forment ce qu'on appelle un *angle*. BAC (fig. 2) est un angle.

Les lignes BA, CA, s'appellent *côtés* de l'angle ; le point A, où les deux côtés se rencontrent, est le *sommet* de l'angle.

On distingue ordinairement un angle par trois lettres que l'on écrit, une au sommet et les deux autres vers les extrémités de ses côtés, et l'on prononce la seconde celle qui occupe le sommet. Ainsi, pour énoncer l'angle de la figure 2, on dirait l'angle BAC ou l'angle CAB; mais, si l'angle est isolé et qu'il ne soit pas à craindre qu'on le confonde avec un autre, on le désigne par la lettre qui est auprès du sommet; tel est l'angle *bac* qu'on pourrait indiquer en disant simplement l'angle *a*.

13. La grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, mais bien de leur écartement; l'angle DAF, par exemple, est plus grand que l'angle BAC, quoique ses côtés DA, FA, soient plus courts que BA et CA, côtés de l'angle BAC.

14. Deux angles sont égaux lorsque, étant placés l'un sur l'autre, leurs côtés se confondent entièrement; cela se comprend sans démonstration.

15. Quand une ligne DC (fig. 3) en rencontre une autre AB, de telle sorte qu'elle ne penche pas plus vers l'extrémité A de cette dernière, que vers l'extrémité B; cette ligne DC est dite *perpendiculaire* sur AB, et les angles ACD, BCD qu'elle forme avec elle sont appelés *droits*.

Ces deux angles sont évidemment égaux entre eux; on comprend encore sans difficulté, que tous les angles droits ont la même ouverture, attendu que leurs côtés sont réciproquement *perpendiculaires* l'un sur l'autre.

Un angle plus petit qu'un droit, est dit *aigu* (pointu), tel est BCF, moindre que le droit BCD.

Tout angle plus grand qu'un droit, est appelé *obtus* (émoussé); BCE, plus grand que le droit BCD, est de ce genre.

16. La somme de tous les angles ACE, ECD, DCF, FCB (fig. 3) que l'on peut former autour d'un point C pris pour sommet commun et du même côté d'une droite AB, équivaut toujours à celle de deux angles droits, quel que soit le nombre de ces angles ; la seule inspection de la figure suffit pour rendre cette vérité évidente.

17. Il est encore évident, que toute droite, qui, comme EC, en rencontre une autre AB, en un point quelconque, C, et n'importe dans quelle inclinaison, forme avec celle-ci deux angles ECA, ECB, dont la somme équivaut à celle de deux angles droits.

18. Th. Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Sol. Deux lignes qui, comme AB, CD (fig. 4) se coupent en un point quelconque, F, forment autour de ce point quatre angles qui sont opposés par le sommet deux à deux ; c'est-à-dire qne AFC égale BFD, et que AFD est égal à CFB ; l'inspection de la figure suffirait pour en être persuadé ; toutefois, pour s'en convaincre, on fera ce raisonnement :

Les angles

AFC + BFC = deux droits (16).

Les angles BFD + BFC = deux droits.

Donc

AFC + BFC = BFD + BFC.

Retranchant de part et d'autre l'angle commun BFC, il restera AFC = BFD.

On prouverait de la même manière, que l'angle AFD est égal à l'angle BFC.

19. Il suit de la démonstration qui précède, qu'une perpendiculaire qui, comme CV (fig. 5), forme avec AB deux augles droits AVC, BVC au-dessus de celle-ci, en forme deux autres au-dessous, si on la prolonge jusqu'en D : car ces deux nouveaux angles sont opposés par le sommet aux deux premiers, de sorte que l'on a

BVC = AVD...

D'où l'on conclut, que si CD est perpendiculaire sur AB, celle-ci est aussi perpendiculaire sur CD, puisqu'elle fait avec elle deux angles droits BVC, BVD...

20. On conclut encore de la seule inspection de la figure, que la somme de tous les angles AVE, EVC, CVG... HVD, qui ont tous leur sommet en un même point V, n'est ni moindre, ni plus grande que celle de quatre angles droits.

Les Triangles.

21. Pour limiter une surface de tous côtés, il faut au moins trois lignes, et la figure qui en résulte s'appelle *triangle*; la figure ABC (fig. 6) représente un triangle. Cette figure, on le voit, a trois angles, et trois côtés qui sont les lignes AB, BC, AC.

22. L'ensemble de deux côtés d'un triangle, pris à volonté, surpasse la longueur du troisième côté; puisque la ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre (9), il est incontestable que la somme des côtés AC, BC du triangle ABC, supasse la longueur du côté AB, lequel mesure la distance qu'il y a du point A au point B.

Il n'est pas moins évident que la somme des côtés AC, BC du triangle ABC (fig. 6), surpasse celle des côtés AD, BD du triangle ABD: car les deux triangles ayant le côté commun AB, le contour de ABD compris dans ABC est moindre que celui de ce dernier triangle.

23. Th. Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Sol. Supposons les deux triangles ABC, *abc* (fig. 7), et qu'il soit accordé que le côté AC égale *ac*, et le côté BC, le côté *bc*, et que les angles C, *c* que comprennent ces côtés, sont égaux.

Si l'on porte le triangle *abc* sur le triangle ABC, de manière que le point *c* tombe sur le point C, et que le côté *ca* se confonde avec CA et le côté *cb* avec CB, il est évident que le point *a* tombera sur le point A, et le point *b* sur le point B, d'où il résultera nécessairement que le côté *ab* se confondra avec le côté AB, de sorte donc que les deux triangles se recouvriront exactement, preuve évidente de leur égalité.

Pour rendre la démonstration moins laborieuse, on taillera deux cartons sur un même patron; en les plaçant l'un sur l'autre, on fera comprendre, à la minute, que les deux triangles doivent être égaux.

24. Th. Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux (ou compris entre deux angles égaux, chacun à chacun).

Sol. Supposons (fig. 7), que le côté *ab* du triangle *abc*, est égal au côté AB du triangle ABC, et que l'angle *a* égale l'angle A et l'angle *b* l'angle B.

Si l'on porte le côté *ab* sur AB de façon que le point *a* tombe sur le point A, et le point *b* sur le point B, il est évident que l'angle *a* étant égal à l'angle A, le côté *ac* prendra la direction du côté AC et se confondra avec lui. Par la même raison, le côté *bc* se confondra avec le côté BC. Le point *c* étant commun aux deux côtés *ac* et *bc* devra se trouver sur C, point sur lequel se rencontrent les directions de AC et de BC.

Un des deux cartons sera tronqué, du côté de l'angle *c*; ayant placé le triangle que représentera ce carton, sur celui que représentera le triangle ABC, on n'aura qu'à appuyer une règle contre les bords des cartons, pour les faire coïncider exactement, alors il deviendra évident, à la simple vue, que les deux triangles doivent être égaux.

Des lignes perpendiculaires et des obliques.

25. Th. Si d'un point quelconque d'une ligne C D perpendiculaire sur A B (fig. 8), on tire deux lignes D E, D F, de manière qu'elles s'écartent également du pied C de la perpendiculaire; de sorte que C F soit éga le à C E, les deux lignes D E, D F seront égales entre elles.

La démonstration de cette proposition est très facile : en effet, les triangles D C E, D C F sont égaux, car D C étant perpendiculaire sur E F, les angles D C E, D C F sont droits et, par conséquent, égaux entre eux. Ces triangles ont un côté commun, D C; en outre, les côtés C E, C F sont égaux par construction, donc les deux triangles ont un angle égal (l'angle droit), compris entre côtés égaux, chacun à chacun, donc ils sont égaux (23). Donc, le côté D E égale le côté D F ; donc, les lignes qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales entre elles.

26. Toute ligne qui, comme D A, s'écarte plus du pied C de la perpendiculaire qu'une autre ligne D E, est plus longue que celle-ci.

Pour le prouver, prolongeons la perpendiculaire au-dessous de A B d'une quantité C H, égale à C D ; tirons ensuite les lignes H A, H E, nous aurons :

H A + D A plus grands que H E + E D (22).

Pour démontrer maintenant que D A est plus grand que D E, il suffit de faire remarquer que les triangles H C E, D C E sont égaux entre eux, car le côté H C égale D C par construction ; E C est commun, et les angles E C D, E C H étant égaux comme droits, il s'ensuit que ces deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun (23).

On prouverait de la même manière que les triangles

HCA, DCA sont aussi égaux entre eux, ayant un côté commun AC; HC égalant DC, et les angles HCA, DCA étant droits.

D'où il suit que $HE = ED$ et que $HA = AD$; or nous avions

$HA + DA > HE + ED$, expression qui peut se réduire à celle-ci :

$2AD$ (ou $HA + AD$) $> 2ED$ (ou $HE + ED$); prenant la moitié des deux valeurs, il vient

$AD > ED$.

27. Des démonstrations qui précèdent, il suit :

1° Que la perpendiculaire DC mesure la plus courte distance qu'il y a du point D à la ligne AB;

2° Que tout point, pris sur DC, est également distant des points E, F; car si d'un point quelconque, P, pris sur DC, on tire PE, PF, il sera facile de prouver que $PE = PF$;

3° Qu'un point quelconque, G, pris à droite ou à gauche de la perpendiculaire, est inégalement éloigné des points E, F, car, ayant tiré EG et GF, on a

$PF + PG > GF$,

or $PF = PE$, on peut donc mettre PE à la place de PF, alors on aura $PE + PG$ ou $EG > GF$;

4° Que d'un point, pris hors d'une droite prolongée suffisamment, on ne peut mener sur cette droite que deux lignes égales, attendu que, dans le cas où l'on en menerait trois, il y en aurait une qui s'écarterait plus du pied de la perpendiculaire que les deux autres.

PROBLÈMES.

I.

28. Partager une droite, AB (fig. 9), en deux parties égales.

Des points A et B comme centres et avec la même ouverture de compas, prise arbitrairement, tracez successivement deux petits arcs de cercle qui se coupent en C et F, et par les points d'intersection C,F de ces arcs tirez CF, cette ligne coupera AB au point D, en deux parties égales.

Car les points C,F, étant chacun également éloignés des extrémités A, B (27), ils doivent se trouver dans la perpendiculaire qui passe par le milieu de AB; mais par deux points donnés, il ne peut passer qu'une droite.

II.

29. D'un point D (fig. 10), pris sur une ligne AB, élever une perpendiculaire sur cette ligne.

Prenez à droite et à gauche du point D, deux quantités égales DA et DB; après quoi, avec une même ouverture de compas et des points A et B pris successivement comme centres, décrivez deux petits arcs qui se coupent en C; et par le point d'intersection de ces arcs et le point D, tirez CD; ce sera la perpendiculaire demandée : en effet, AC et BC sont des obliques égales qui s'écartent également du pied D de la perpendiculaire, attendu que, par construction, $DA = DB$.

Le même procédé est employé pour former un angle droit BDC, en un point donné D, sur une ligne donnée AB (même fig.)

III.

30. D'un point C pris hors d'une droite AB (fig. 11) abaisser une perpendiculaire sur cette droite.

Sol. Du point C comme centre, et avec une ouverture de compas plus grande que la distance du point C à la ligne AB décrivez un arc de cercle AGB; puis des points A, B par lesquels l'arc de cercle coupera la ligne AB, et avec une ouverture de compas arbitraire décrivez, deux petits arcs qui se coupent en F; et par le point d'intersection de ces arcs et le point C, tirez CF; cette ligne coupera AB au point D, et CD sera la perpendiculaire cherchée.

Ce problème est en résumé le même que celui du n° 29, car il est facile de démontrer que les triangles CAD, CBD sont égaux, etc.

IV.

31. Au point A de la ligne donnée AC (fig. 12) faire un angle égal à un angle donné *bac*.

Sol. Sur les côtés *ab*, *ac* de l'angle donné *bac* prenez avec une même ouverture de compas deux quantités égales *ab*, *ac*; et tirez *bc*; portez *ac* sur la ligne donnée AC; de A en C, et du point A comme centre, et avec la même ouverture de compas, décrivez un petit arc vers B.

Prenez ensuite avec l'instrument la quantité *cb*, et avec la même ouverture de compas et du point C comme centre, décrivez vers B un petit arc qui coupe celui que vous aurez tracé auparavant; et par le point A et le point d'intersection de ces arcs tirez AB; tirez ensuite BC.

Il est évident que les deux triangles ABC, *abc* sont égaux puisque leurs côtés le sont chacun à chacun.... donc l'angle BAC égale l'angle donné *bac*.

32. Des démonstrations et des problèmes qui précèdent on conclut :

1° Que d'un même point pris hors d'une ligne droite on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire, cette ligne étant le plus court chemin qu'il y a d'un point donné hors d'une ligne pour aller de ce point à celle-ci; cette définition rappelle celle que l'on donne communément de la ligne droite (9);

2° Que deux lignes CA, DB perpendiculaires sur une troisième A B (fig. 13) ne sauraient jamais se rencontrer; s'il en était autrement, il s'ensuivrait que du point de leur rencontre on pourrait abaisser deux perpendiculaires sur A B, ce qui est démontré comme impossible.

33. Th. Deux triangles rectangles sont égaux lorsque leurs hypoténuses sont égales, et que deux des côtés qui comprennent l'angle droit sont égaux entre eux; ou bien encore, quand les hypoténuses étant égales, les deux triangles ont encore un angle égal outre l'angle droit.

Sol. Soit les deux triangles A B C, *a b c* (fig. 14) rectangles en B et en *b*; admettons 1° que deux des côtés B C, *b c* qui comprennent l'angle droit sont égaux, si l'on place les deux triangles l'un contre l'autre, et sur une même ligne A B *b a*, *b c* se confondra avec B C, et il reste évident que les hypoténuses A C, *a c* étant égales entre elles, on peut les considérer comme des obliques égales qui s'écartent également de la perpendiculaire B C ou *b c*, de sorte donc que le côté A B est égal au côté *a b*; 2° les deux triangles seraient encore égaux si les angles A, *a*, ou C, *c* étaient égaux, car posant *a c* sur A C, les angles C, *c* étant égaux, *c b* prendrait la direction de C B; or les angles *b*, B étant égaux comme droits, si *c b* n'égalait pas C B, il s'en suivrait que, de deux points différens d'une même perpendiculaire, on pourrait tirer deux obliques égales (27).

34. Th. Dans tout triangle qui a deux côtés égaux, les angles opposés à ces côtés sont aussi égaux, et réciproquement, à des angles égaux, dans un même triangle, sont opposés des côtés égaux.

Sol. Soit le triangle A B C (fig. 15) dont les côtés A C, B C sont égaux entre eux, l'angle A est aussi égal à l'angle B. Du sommet de l'angle C abaissez la perpendiculaire C D sur A B, alors les côtés égaux A C, B C pourront être considérés comme des obliques égales (25), s'écartant également du pied D de la perpendiculaire; BD égale donc AD; il suit de là que les triangles ADC, BDC sont égaux, puisqu'ils ont chacun un angle droit en D compris entre les côtés égaux AD, BD et le côté commun CD, donc les angles AB sont égaux...

35. Th. Les angles d'un triangle, dont les côtés sont égaux, sont aussi égaux entre eux; la solution de ce problème est la même que celle du précédent.

Soit le triangle ABC (fig. 16) dont les trois côtés sont égaux, si du sommet de l'angle C on abaisse la perpendiculaire CD, on aura les deux triangles ADC, BDC égaux entre eux, ayant chacun un angle droit en D; BD égale AD à cause que les côtés égaux AC, BC du triangle ABC peuvent être considérés comme des obliques égales, etc.; donc l'angle A opposé au côté BC est égal à l'angle B opposé au côté AC égal à BC.... On prouverait de la même manière que les angles A, B sont égaux en abaissant une perpendiculaire du sommet de l'angle B sur le côté AC...

36. Th. Dans tout triangle dont les côtés sont inégaux, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement le plus grand angle est opposé au plus grand côté.

Sol. Soit le triangle AFB (fig. 15) dont AF, opposé à l'angle B, est plus long que BF opposé à l'angle A, plus petit que l'angle B.

Faites en B un angle ABC (31) égal à l'angle CAD, le côté BC du triangle ABC égalera AC (34); ces dispositions faites, on aura :

$$BC + CF > BF.$$

Mais BC égalant CA, on pourra mettre cette dernière ligne à sa place, et il viendra :

$$AC + CF \text{ (ou } AF) > BF.$$

37. Th. La somme des angles d'un triangle quelconque équivaut à celle de deux angles droits.

Sol. Il a été démontré (32) que deux perpendiculaires A C, B D sur une même droite A B ne peuvent jamais se rencontrer; soit donc la ligne indéfinie AB (fig. 17) sur laquelle on a élevé les deux perpendiculaires A C, B D; les angles A, B étant droits, la ligne AB est aussi perpendiculaires sur BD; et si d'un point quelconque C pris sur la ligne AC on abaisse sur B D une perpendiculaire C D, l'angle B D C sera droit et la ligne AC sera égale à B D : car s'il en était autrement la ligne C D s'éloignerait ou se rapprocherait de A B; ce qui est contraire à la supposition que ces deux lignes sont perpendiculaires sur une troisième qui est B D...

Tirons maintenant la diagonale B C, la figure de quatre côtés A B C D se trouvera partagée en deux triangles rectangles A B C, B C D égaux entre eux : car outre l'hypoténuse B C qui leur est commune, ils ont encore les côtés A C et B D égaux aussi entre eux, donc ces deux triangles sont égaux (33); la seule inspection de la figure suffirait volontiers pour rendre cette vérité évidente.

Les angles A, B, C, D de la figure de quatre côtés valent, pris ensemble, quatre angles droits, cela se comprend sans démonstration.

Or, la somme des angles des deux triangles A B C, B C D est exactement la même que celle des quatre angles A, B, C, D, du quadrilatère; donc la somme des angles de chacun des deux triangles équivaut à la moitié de cette somme ou à celle de deux angles droits.

Si le triangle, tel que A B C (fig. 18), n'était pas rectangle on démontrerait avec la même facilité, que la somme de ses trois angles A, B, C, équivaut à celle de deux angles droits; pour cela, du sommet C de l'un de ses angles on abaisserait sur AB la perpendiculaire CD (30);

par suite de cette opération, le triangle A B C se trouverait partagé en deux autres A D C, B D C, rectangles tous les deux en D, à cause du côté commun C D perpendiculaire sur A B.

Mais il vient d'être prouvé ci-dessus, que la somme des angles d'un triangle rectangle égale celle de deux angles droits ; donc la somme des angles des deux triangles rectangles A D C, B D C vaut quatre angles droits, mais la somme des angles de ces deux triangles, se compose de ceux du triangle A B C, plus des deux droits A D C, B D C formés de chaque côté du pied D de la perpendiculaire CD; si donc, de la somme des angles des triangles ADC, BDC, laquelle égale quatre angles droits, on retranche celle de ces deux derniers angles A D C, B D C, il restera deux angles droits pour la somme des trois angles A, B, C du triangle ABC.

38. Des démonstrations qui précèdent, il suit :

1° Que deux angles d'un triangle étant donnés, on connaîtra le troisième en retranchant leur somme de celle de deux angles droits.

2° Que si deux angles d'un triangle sont égaux chacun à chacun à deux des angles d'un autre triangle, le troisième angle du premier triangle sera égal au troisième angle de l'autre, et les deux triangles seront équiangles entre eux.

3° Que dans un triangle il ne peut y avoir qu'un seul angle droit, car, s'il y en avait deux, le troisième serait nul et le triangle serait impossible.

Il est encore évident qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus.

4° Que la somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle vaut exactement un angle droit.

5° Que chacun des angles d'un triangle équilatéral, vaut le *tiers* de deux angles droits ou bien les *deux tiers* d'un droit.

6° Que si d'un triangle quelconque ABC (fig. 18), on prolonge indéfiniment, vers F, le côté AB, l'angle extérieur CBF sera équivalent à la somme des deux intérieurs opposés, A, C : car, ajoutant de part et d'autre l'angle ABC, les deux sommes sont égales à deux angles droits.

DES LIGNES PARALLÈLES.

39. Deux droites qui, tirées dans un même plan, ne peuvent jamais se rencontrer quoique prolongées à l'infini, sont dites *parallèles* entre elles.

Il a été démontré (32) que deux perpendiculaires AC, BD sur une même droite AB (fig. 13), ne peuvent point se rencontrer; elles sont donc parallèles.

40. Th. Lorsque deux droites parallèles entre elles AB, CD (fig. 19), sont coupées par une troisième HI, les angles BFI, ELF tournés dans le même sens et formés du même côté de HI sont égaux entre eux.

Sol. Du point F, par où HI coupe AB une des parallèles, abaissez sur CD la perpendiculaire FE et prolongez-la jusqu'en G; vous aurez ainsi formé le triangle ELF rectangle en E, dont les angles E, L, F valent, pris ensemble, deux angles droits (37).

Les parallèles DE, BF pouvant être considérées, sans inconvénient, comme perpendiculaires sur GE, il s'ensuit que l'angle BFG est droit.

Or les angles F, L du triangle EFL valent, pris ensemble, un angle droit (38).

On peut donc établir les égalités que voici :

GFI + BFI = 1 angle droit.

EFL + FLE = 1 angle droit.

D'où il suit :

GFI + BFI = EFL + FLE, mais GFI = EFL

comme lui étant opposé par le sommet, retranchant ces deux valeurs de l'égalité ci-dessus, il restera :

BFI = FLE

41. Les angles que la *secante* HI forme avec les parallèles AB, CD (fig. 19) ont reçu des noms particuliers qu'il est bon de retenir.

Les angles tels que BFI, FLE situés du même côté de la secante HI et dont l'ouverture est tournée dans le même sens, se nomment *angles correspondans*

Les angles CLF, AFI sont aussi des angles correspondans.

AFL, CLH sont aussi des angles correspondans.

Il en est de même des angles HLE, LFB.

Ainsi que de AFL, CLH.

Tous les angles qui s'ouvrent entre les deux parallèles s'appellent du nom général d'*angles internes*.

Et tous ceux qui ont leurs ouvertures en dehors des parallèles sont nommés *angles externes*.

On distingue encore ces mêmes angles par leur position relativement à la *sécante*.

Ceux qui sont d'un même côté par rapport à cette droite sont des *angles internes* ou des *angles externes du même côté*.

Les angles CLH, AFI, sont *externes* du même côté.

Et les angles BFL, FLE sont *internes* du même côté.

Les angles qui sont dans une situation opposée, tant par rapport à la sécante que par rapport aux deux droites parallèles, sont dits *angles alternes*.

Il y a des angles *alternes-internes*, tels que AFL, et FLE ou BFL, FLC.

Et des angles *alternes-externes*, comme HLE, AFI, ou bien CLH, BFI.

42. Th.

1° Les angles correspondants sont égaux;

2° Les angles alternes-internes sont égaux ;

3° Les angles alternes-externes sont égaux ;

4° Les angles internes, du même côté réunis, équivalent à deux angles droits.

5° Les angles externes, du même côté ajoutés ensemble, valent deux angles droits.

SOL. 1° Il a été démontré (40), que les angles BFI, FLE (fig. 19), lesquels sont *correspondans*, sont égaux. Il serait également facile de démontrer que les correspondans AFI, CLF sont aussi égaux entre eux.

En effet :

CLF + FLE = 2 droits (16);

AFI + BFI = 2 droits;

donc on a

CLF + FLE = AFI + BFI; retranchant les deux valeurs égales FLE, BFI, il restera CLF = AFI.

On s'y prendrait de la même manière pour démontrer que les angles correspondans AFL, CLH sont égaux ; car AFL et BFI sont égaux comme opposés par le sommet ; mais il vient d'être prouvé que BFI = FLE et FLE = CLH, comme lui étant opposé par le sommet ; on a donc ces égalités :

AFL = BFI = FLE = CLH.

On démontrerait encore avec la même facilité que les angles correspondans BFL, DLH sont égaux, car on a

BFI + BFL = 2 droits,

FLE + ELH = 2 droits;

donc,

BFI + BFL = FLE + ELH,

retranchant les deux valeurs égales BFI, FLE, il reste

BFL = ELH.

2° L'égalité des angles *alternes-internes* se déduit aisément des démonstrations qui précèdent, soit, par exemple, les *alternes-internes* AFL et FLE.

FLE = BFI; cela vient d'être prouvé.

Mais AFL = BFI, comme son opposé par le sommet; donc AFL = FLE.

Les deux autres *alternes-internes* BFL, CLF sont égaux, car on a

BFL + AFL = 2 droits,
CLF + FLE = 2 droits;

donc, on a

BFL + AFL = CLF + FLE.

Mais il vient d'être prouvé que AFL = FLE; retranchant ces deux valeurs de l'égalité ci-dessus, il restera

BFL = CLF.

3° L'égalité des angles *alternes-externes* BFI, CLH, est déjà démontrée; car BFI = FLE, comme correspondant, et CLH = FLE comme lui étant opposé par le sommet.

Quant aux deux autres *alternes-externes* AFI, HLE, on en démontre l'égalité en faisant observer que

AFI + BFI = 2 droits;
ELH + CLH = 2 droits;
D'où il vient :
AFI + BFI = ELH + CLH.

Or BFI et CLH sont égaux comme *alternes-externes*, retranchant ces deux valeurs, il restera AFI = ELH.

4° Les angles *internes du même côté* AFL, CLF valent deux angles droits car CLH + CLF = 2 droits; mais AFL et CLH sont égaux comme correspondans; mettant donc AFL à la place de CLH on a AFL + CLH = 2 droits.

5° Les angles *externes du même côté*, pris ensemble, valent deux angles droits; soit les externes du même côté AFI et CLH, la somme des angles AFI et AFL par exemple est égale à celle de deux droits (16); or AFL et CLH sont égaux comme correspondans; substituant donc CLH à AFL on a

AFI + CLH = 2 droits.

On démontrerait de la même manière que la somme des angles BFI, DLH externes du même côté est égale à celle de deux droits, car BGI et DLF sont égaux comme correspondans.....

Observation. La démonstration des propriétés des lignes parallèles qui sont coupées par une troisième ligne n'est point difficile, mais elle est longue et même ennuyeuse, il s'offre un moyen de la simplifier, qui est celui-ci :

Supposez (fig. 20) une ligne CD coupée par la droite HI, il a été démontré (9) que les angles DLI, CLH sont égaux comme opposés par le sommet, et que DLH et CLI sont aussi égaux par la même raison...

Supposez en outre qu'une ligne imaginaire AB se trouvait d'abord sur CD, et qu'elle s'en est éloignée d'une certaine quantité, sans cesser de lui être parallèle; il est évident que la position de AB relativement à la direction de HI n'aura point changé; or, quand AB se confondait avec CD, l'angle BFI se confondait avec DLF; donc BFI = DLF comme son correspondant; BFI égale aussi CLH, puisque ce dernier angle égale DLF comme lui étant opposé par le sommet...

En supposant tantôt que AB se confond avec CD; tantôt que ces deux lignes, quoique séparées, n'en forment qu'une ayant une certaine largeur, il suffira de quelques minutes pour faire comprendre, sans le moindre effort, les diverses propriétés des parallèles; il ne restera plus qu'à retenir les noms des angles qu'elles forment avec la sécante.

43. Th. Lorsque l'une quelconque des propriétés de

deux droites AB, CD (fig. 19), coupées par une troisième HI, a lieu, ces deux droites sont parallèles.

Sol. Admettons : 1° Que la sécante HI forme avec AB et CD deux angles intérieurs BFL, ELF dont la somme est égale à celle de deux droits ; du point F, sommet de l'angle BFL, abaissons sur CD la perpendiculaire FE, nous aurons le triangle FLE rectangle en E, d'où il suit que les angles aigus FLE, EFL valent un angle droit (37).

Or par hypothèse on a :

BFL + ELF = 2 droits.

Retranchant de cette quantité EFL qui est une partie de BFL plus l'angle ELF, il restera BFE dont la valeur sera égale à la moitié de deux angles droits, BFE étant un angle droit; il s'en suit que les lignes BF, DE sont perpendiculaires à une troisième EF ; qu'elles ne peuvent jamais se rencontrer (32) et que par conséquent elles sont parallèles.

2° Si l'on accorde par exemple que les angles BFI, ELF sont égaux comme correspondans, on en tirera la preuve que les droites AB, CD sont parallèles, car :

Du sommet F de l'angle BFI ayant abaissé sur CD la perpendiculaire FE, on a le triangle EFL rectangle en E dont les angles aigus F, L comme il vient d'être dit, valent un angle droit; par hypothèse BFI égale ELF donc BFI + EFL valent pris ensemble un angle droit. Mais on a aussi BFI + BFL = 2 droits (16); retranchant de cette somme BFI et EFL partie de BFL, il reste BFE angle égal à un droit; donc BF et DE sont perpendiculaires à une même droite FE, donc elles sont parallèles.

On raisonnerait de la même manière pour les angles *alternes-internes*, *externes du même côté*, etc. etc.

44. Th. Deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

Sol. AB, CD (fig. 21) sont, par hypothèse, parallèles à PQ. Pour démontrer qu'elles sont parallèles entre elles, d'un point quelconque G pris sur AB, abaissez sur PQ la perpendiculaire GI, laquelle coupera CD, en H; puisqu'il est accordé que AB et PQ sont parallèles, les angles internes AGI, PIG formés du même côté que la sécante GI, valent, ajoutés ensemble, deux angles droits (42); mais, par construction, GI est perpendiculaire sur PQ, donc l'angle PIG est droit; or, CD et PQ étant parallèles (par hypothèse), les angles internes PIG, CHI formés du même côté de la sécante GI, valent deux angles droits; donc CHI est un angle droit; donc CD est perpendiculaire sur GI; donc AB, CD, PQ perpendiculaires sur une même droite GI sont parallèles (32).

45. Th. Les angles ABC, *abc* (fig. 22), qui ont leurs côtés parallèles, sont égaux, n'importe dans quel sens leur ouverture soit tournée.

Sol. Par supposition, les côtés *ab*, AB étant parallèles, si l'on prolonge *ca* jusqu'en D, on pourra considérer AB comme une sécante qui coupe les parallèles CA, *C*D, de sorte que les angles BAC, BD*C* seront égaux comme correspondans (42); puis considérant *C*D comme une sécante qui coupe les parallèles *ab*, AB, il s'en suivra que les angles *bac*, BD*C* seront égaux comme correspondans (42); or, BAC et *bac* étant égaux à un troisième et même angle BD*C*, sont égaux entre eux.

Il serait facile de démontrer que deux angles *bac*, BAC (fig. 23) qui ont leurs côtés parallèles et leurs ouvertures tournées en sens contraires sont égaux; car, prolongeant BA jusqu'en *d*, les angles BAC, A*da* seraient égaux comme correspondans, B*d* étant une sécante qui rencontrerait les parallèles *ba*, AC; mais par hypothèse *ca* est parallèle à AB; considérant *ba* comme une sécante qui rencontre ces deux parallèles, les angles *bac*, BAC seraient égaux comme alternes-internes (42).

46. Th. Les parties de deux droites AC, BD (fig. 24) parallèles entre elles, comprises entre deux autres parallèles BA, DC, sont égales entre elles; et réciproquement AC égale BD.

Sol. Tirez AD, vous aurez les deux triangles BDA, DAC égaux entre eux : car par hypothèse BA, DC, étant parallèles, AD pourra être considérée comme une sécante, et les angles BAD, ADC (42) seront égaux comme alternes-internes. Considérant en outre que AC et BD sont deux parallèles coupées par la sécante AD, on aura les angles ADC, BDA égaux entre eux comme alternes-internes.

Les deux triangles BDA, DAC ont un côté commun AD adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (24); donc les côtés AC, BD opposés aux angles égaux ADC, BAD sont égaux (34).

47. Problème. Par un point donné C (fig. 25) mener une parallèle à une ligne donnée AB.

Sol. Il y a plusieurs manières de résoudre ce problème, la plus simple et la plus directe est celle-ci :

Du point C abaissez sur AB la perpendiculaire CA; puis d'un autre point quelconque, D, pris au-dessus de AB, abaissez sur celle-ci la perpendiculaire DB; après quoi prenez sur les deux perpendiculaires, à partir de AB, les quantités AC, BD égales, et tirez CD, ce sera la parallèle demandée : car tous ses points seront également distans de AB.

48. Th. Si l'on mène une droite EF parallèle au côté AB d'un triangle ABC (fig. 26), les deux autres côtés AC, BC de ce triangle seront coupés en parties

proportionnelles, c'est-à-dire que si CE est la moitié de CA, CF sera la moitié de CB.

Sol. Du sommet C de l'angle ACB abaissez sur AB la perpendiculaire CD (30), puis du point E par où la parallèle EF coupe AC abaissez EG perpendiculaire sur AB, vous aurez les deux triangles AGE, EVC qui seront égaux entre eux:

En effet, ils sont rectangles en G et en V, et les angles GAE, VEC sont égaux comme correspondans, à cause des parallèles AB, EF et de la sécante AC (42); il est encore évident que les angles AEG, ECV, sont aussi égaux entre eux comme correspondans, à cause des parallèles EG, CD perpendiculaires l'une et l'autre sur AB et de la sécante AC; or, par hypothèse AE = EC, donc les deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, donc ils sont égaux (24); d'où il résulte que EG = CV; mais EG = VD comme parallèles comprises entre parallèles (46); donc CV = VD.

Prouvons maintenant que BF est la moitié de BC; du point F, abaissons sur AB la perpendiculaire FI, cette ligne sera parallèle avec CD, on aura FI = VD; or, VD = CV, donc FI = CV; il est superflu de démontrer que les triangles BIF, FVC sont équiangles, qu'ils sont rectangles en I et en V et que les angles BIF, FCV sont égaux comme correspondans; donc ces deux triangles ayant deux côtés égaux FI, CV adjacens à deux angles égaux chacun à chacun sont égaux; donc BF = FC; donc le côté BC du triangle ABC est coupé en deux parties égales par la parallèle EF.

On démontrerait avec la même facilité que si les parallèles DH, EI coupaient le côté AC du triangle ABK (fig. 27), en trois parties égales, elles couperaient en même temps en trois parties égales le côté CK du même triangle; pour cela, des points C, D, E, on abaisserait les perpendiculaires CG, DF, EB, sur les parallèles DH, EI... et l'on ferait voir aisément que les triangles ABE, EFD... sont égaux entre eux : car ils sont équiangles, et les côtés AE, ED, DC sont égaux par supposition... Il est évident que SI, PH,... parallèles comprises entre parallèles également distantes sont égales entre elles; de là on tirerait la preuve que les triangles SKI, PIH... sont égaux et que CH, HI... sont des parties égales de CK.

Si les deux lignes AC, BD (fig. 28), ne se rencontraient pas, on les prolongerait jusqu'en O, et alors la démonstration deviendrait la même que celle du n° 48, puisque la figure ABO serait un triangle.

Remarque. Pour que la démonstration de cette vérité: que deux des côtés d'un triangle sont coupés en parties proportionnelles par des parallèles au troisième côté de ce triangle, ne souffre aucune objection, il faut supposer que ces parallèles sont également éloignées les unes des autres et que leur nombre est infini.

Si, par exemple, tout en convenant que CE (fig. 27) est les deux tiers de CA, on soutenait que CI n'est pas les deux tiers de CK, on supposerait que le côté CA est divisé en un très grand nombre de parties égales, soit douze cent mille, et que par ces points de division on a mené autant de parallèles à AK; par cette construction CK se trouverait divisé aussi en douze cent mille parties égales; il est évident que la huit cent millième parallèle se confondrait avec EI ou que du moins elle ne s'en écarterait au point I que d'une quantité très petite; et cette différence serait nulle si, au lieu de 1,200,000 parallèles on en supposait un nombre infini.

SECONDE PARTIE.

DES FIGURES.

49. Toute surface limitée de tous côtés par des lignes droites ou courbes s'appelle *figure*, d'où il suit qu'il y a des figures *rectilignes* et des figures *curvilignes*.

Les figures rectilignes prennent le nom général de *polygones*.

Parmi les polygones on distingue le *triangle*, c'est le plus simple de tous; on le connaît déjà.

Les polygones de quatre côtés s'appellent *quadrilatères*.

De cinq, pentagones.

De six, hexagones.

De sept, heptagones.

De huit, octogones.

De neuf, nonégones.

De dix, décagones.

De douze, dodécagones.

De quinze, pentedécagones.

Parmi les quadrilatères on distingue les *parallélogrammes* qui sont :

1° *Carré* (fig. 29), qui a ses côtés égaux et ses angles droits.

2° Le *rectangle* ou *carré long* (fig. 30), qui a ses quatre angles droits et ses côtés opposés égaux et parallèles.

3° Le *parallélogramme* ou *rhombe* (fig. 31), qui a ses côtés opposés parallèles et deux de ses angles aigus et les deux autres obtus.

4° Le *losange* (fig. 32), dont les quatre côtés sont égaux et parallèles, deux de ses angles sont aigus et les deux autres obtus.

5° Enfin le *trapèze* (fig. 33), qui a ses angles inégaux et deux de ses côtés parallèles.

(*Voir le vocabulaire qui est en tête du livre*).

Un polygone est dit *régulier* lorsque tous ses côtés sont égaux entre eux ainsi que ses angles; de ce nombre est le carré (fig. 29); en général les polygones réguliers sont, de toutes les figures rectilignes, les seules que l'on peut partager exactement en un certain nombre de triangles tous égaux entre eux.

Parmi les angles d'un même polygone, il peut y en avoir de *saillans* et de *rentrans;* dans le polygone ABCF (fig. 34), les angles ABC, BCF... qui ont leur ouverture tournée vers l'intérieur de la figure, sont dits *saillans;* EDF au contraire est dit *rentrant*, parce qu'il a son sommet tourné vers l'intérieur du polygone.

50. Th. Un parallélogramme quelconque peut être partagé en deux triangles égaux.

Sol. Soit le parallélogramme ABCD (fig. 35); ayant tiré la diagonale CB, on a les deux triangles ABC, BCD égaux entre eux.

Car par hypothèse AB et CD sont parallèles, donc les angles ABC, BCD sont égaux comme alternes-internes (42), la diagonale BC pouvant être considérée comme une sécante.

AC et BD étant aussi égaux et parallèles comme côtés opposés d'un même parallélogramme, il s'ensuit que par rapport à la sécante CB les angles ACB, CBD sont égaux comme alternes internes.

Les deux triangles ont donc un côté égal ou commun, CB adjacent à deux angles égaux (24), chacun à chacun; donc ils sont égaux.

Pour les parallélogrammes rectangles, ce théorème a été suffisamment démontré dans le nº 37.

51. Th. Les deux diagonales AC, BD d'un parallélogramme (fig. 36), se coupent réciproquement en deux parties égales.

Sol. Les triangles AOB, DOC sont égaux, car par hypothèse AB = DC et les angles AOB, DOC sont égaux comme opposés par le sommet (18), et les angles BAO, DCO sont égaux comme alternes-internes (42), les angles ABO, COD sont aussi égaux par la même raison, à cause des parallèles AD, BC et de la sécante BD; donc, les deux triangles sont égaux; donc, le côté BO opposé à l'angle BAO est égal au côté DO opposé à l'angle DCO; donc BO est la moitié de BD tout comme CO est la moitié de CA.

52. Th. Si du sommet A d'un angle quelconque d'un polygone ABC... (fig. 37), on tire aux sommets des angles opposés les diagonales AC, AD, AG, on partagera le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés, moins deux, c'est-à-dire que le polygone de cinq côtés sera partagé en trois triangles; celui de six, en quatre; celui de huit, en six, etc.

Sol. Cette proposition n'a pas besoin d'être démontrée, la seule inspection de la figure suffit pour la rendre évidente.

53. Th. La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux droits que le polygone a de côtés, moins deux.

Sol. Soit le polygone de six côtés ABC... (fig. 37). Cette figure se divise en quatre triangles qui valent chacun deux angles droits, et la somme des angles de tous ces triangles vaut donc quatre fois deux angles droits ou huit angles droits; mais la somme des angles de tous ces triangles est la même que celle des angles du polygone, donc les angles de ce dernier valent deux angles droits multipliés par $6-2=8$.

Lorsque le polygone est régulier, chacun de ses angles est égal à la somme totale divisée par le nombre de ses côtés; la somme des angles de l'exagone équiangle étant exprimée par 8, chacun des angles vaudra $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$ d'angle droit $= 1\frac{1}{3}$ angle droit.

54. Th. Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et semblablement disposés, ou bien lorsque étant placés convenablement l'un sur l'autre ils se recouvrent parfaitement.

Cette proposition est évidente sans qu'il soit besoin de la démontrer.

DES POLYGONES SEMBLABLES.

55. Deux ou plusieurs objets sont dits *semblables*, lorsque leurs dimensions sont proportionnelles; c'est-à-dire que, si la longueur d'un objet A est exprimée par 5, sa largeur par 4, sa hauteur ou épaisseur par 3; un autre objet lui sera semblable, si ses trois dimensions sont dans le même rapport que les nombres 5, 4, 3; tel serait un objet dont la longueur serait exprimée par 15, sa longueur par 12 et son épaisseur par 9, car les nombres 15, 12, 9, sont entre eux dans le même rapport que 5, 4, 3,

puisque chacun d'eux est le triple de chacun de ces derniers.

Et en général deux choses, surfaces ou volumes, sont semblables lorsque étant supposées ou placées l'une dans l'intérieur de l'autre, il peut se faire qu'il règne le même écartement entre les divers points de leurs contours ou de leurs surfaces.

On comprend sans démonstration que les polygones ABCD, *abcd* (fig. 38) sont semblables ; on comprend avec la même facilité que deux boules parfaites sont semblables quoique étant de grosseurs inégales.

56. Th. La ligne DC (fig. 39) qui divise en deux parties égales l'angle BDA d'un triangle quelconque divise le côté AB opposé à cet angle en deux segmens AC, BC qui sont respectivement proportionnels aux côtés adjacens AD, BD, c'est-à-dire que si AC est par exemple les quatre cinquièmes de AD, BC est aussi les quatre cinquièmes de BD.

Sol. Par le point A menez AF parallèle à CD (47) et prolongez BD jusqu'à ce qu'elle rencontre AF, vous aurez le triangle BAF dont les côtés BA, BF seront coupés en parties proportionnelles par CD parallèle à AF (48), de sorte qu'on aura cette proportion :

BC : CA :: BD : DF; mais le triangle ADF est isocèle, car les angles DFA, FAD sont égaux.

En effet, BDC, DFA sont égaux comme correspondans à cause des parallèles DC, FA et de la sécante BF; DA étant considérée comme une sécante relativement aux parallèles DC, FA, les angles FAD, ADC sont égaux comme alternes-internes. Or, les angles BDC, CDA sont égaux comme étant chacun par hypothèse la moitié de l'angle BDA : on a donc cette suite d'égalités;

DFA = BDC; FAD = CDA; CDA = BDC donc

DFA = BDC; donc DA = DF. Substituant dans la proportion ci-dessus DA à DF on a

BC : CA :: BD : DA

Problème.

57. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données que nous désignerons par les lettres P, Q, R (fig. 40), ou le quatrième terme de cette proportion.

P : Q :: R : x.

Sol. Formez avec deux droites indéfinies AC, BC un angle quelconque; prenez ensuite sur la première de C en A une distance CA égale à la ligne P, et de C en D une distance égale à la ligne Q; portez ensuite sur la seconde ligne de C en B la droite R, et tirez AB; puis, par le point D déjà déterminé, menez DE parallèle à AB, vous aurez le triangle ACB dont les côtés AC, BC seront coupés en parties proportionnelles par DE parallèle à AB (48), de sorte qu'on aura CA (ou P): CD (ou Q) :: CB (ou R) : CE; CE sera donc la quatrième proportionnelle demandée.

La solution de ce problème est d'une grande facilité, et l'on comprend qu'au moyen de cette méthode on pourrait trouver directement et sans calcul le quatrième terme d'une proportion numérique, si l'on avait à sa disposition un grand compas dont les deux branches seraient divisées en un certain nombre de parties égales, en millimètres par exemple; il faudrait en outre se munir d'une règle mobile pour tenir lieu de la ligne AB et d'une autre règle plus courte pour tenir lieu de la ligne DE; une fois la règle AB étant fixée et le point D déterminé, on placerait par un moyen facile à trouver DE parallèlement à AB et les divisions de la branche CB du compas comprises entre les points C, E donneraient le quatrième terme de la proportion.

58. Th. Deux triangles ABC, *dce* (fig. 41) qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, ont leurs côtés homologues proportionnels et ils sont semblables.

Sol. Puisque par hypothèse l'angle *c* est égal à l'angle C, si l'on porte le triangle *dce* sur le triangle ACB, le côté *cd* prendra la direction de CA ; et *ce* la direction de CB ; on prendra donc sur CA, CD = *cd*; et sur CB, CE = *ce* de sorte que le triangle DCE sera parfaitement égal au triangle *dce*.

Or, il est dit dans l'énoncé du théorème, que les deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, donc l'angle CDE = CAB; donc DE est parallèle à AB (43) donc on a :

CD : CA :: CE : CB.

Pour compléter la démonstration, supposez que le triangle *dce* a été transporté en FEB de façon que l'angle *e*, se trouve sur l'angle B, son égal, et que *ed* égale B Fet *ec* BE; EF sera parallèle à CA et l'on aura encore

BF : BA :: BE : BC.

Si l'on transportait encore le triangle *dce* en ADF de façon que l'angle *d* coïncidât avec l'angle A..... DF serait parallèle à CB et l'on aurait :

AF : AB :: AD : AC.

D'où il suit que les côtés homologues des triangles équiangles sont proportionnels et que par conséquent ils sont semblables (57).

La démonstration qu'on vient de lire n'est pas aussi savante que celle du même théorème qu'on trouve dans les traités élémentaires de géométrie les plus renommés, mais elle est irréprochable, et d'ailleurs elle a l'avantage de n'être point accompagnée d'une kyrielle fatigante de proportions qui la rendent inutilement fort obscure.

59. Il suit de la proposition qui précède que deux triangles sont semblables quand ils ont deux angles égaux chacun à chacun, car le troisième angle de l'un est nécessairement égal au troisième angle de l'autre (38).

Et généralement deux triangles sont semblables toutes les fois que leurs côtés son parallèles chacun à chacun, ou bien encore lorsqu'ils sont réciproquement perpendiculaires.

60. Dans le premier cas les deux angles des deux triangles sont situés comme ceux de la figure 41, c'est-à-dire que les côtés de l'angle *c d e* sont parallèles à ceux de l'angle C A B et tournés dans le même sens, il en est de même des angles *ced*, ÇB A. Il a eté démontré (45) que ces angles sont égaux; il est aussi démontré, dans le même numéro, que deux angles sont égaux quoique leurs ouvertures soient tournées en sens inverse, pourvu que leurs côtés soient parallèles; on conçoit qu'il en est semblablement des triangles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun.

61. Th. Deux triangles sont semblables lorsqu'ils sont dans une situation telle que leurs côtés homologues sont réciproquement perpendiculaires.

Sol. Soit les deux triangles ABC, *ab c* (fig. 42); admettons que *a b*, le plus grand côté de *a b c*, est perpendiculaire sur A B, le plus grand côté de A B C, et que *a c* est perpendiculaire sur A C, et *b c* sur B C.

Pour démontrer que l'angle *b a c* est égal à l'angle BA C, prolongez *c a* jusqu'en G, et par le point A menez A D parallèle à G *a*; il est évident que A B sera une sécante relativement aux parallèles A D, G *a c*, d'où il suit que les angles D A B, *ca* B sont égaux comme correspondans (42); mais les deux triangles *a b c*, A B C sont placés de façon que ba est perpendiculaire sur AB; donc l'angle baB est droit; caG par construction étant perpendiculaire sur AC; AD parallèle à caG est aussi perpendiculaire sur AC; de sorte que l'angle DAC est droit; on a donc $DAC = baB$. Retranchant de part et d'autre les deux angles égaux DAB, caB, il reste $bac = BAC$.

Pour démontrer que l'angle b est égal à l'angle B, prolongez bc jusqu'en B, lequel côté bc est censé perpendiculaire sur BC; cela fait, par le point B élevez BH perpendiculaire sur AB; BH et ba perpendiculaires sur une même ligne sont parallèles (93), et si l'on considère bB comme sécante, les angles abB, bBH seront égaux comme alternes-internes (42); or, par construction, les angles ABH, bBC sont droits, et ils ont de commun l'angle aBb, lequel retranché de part et d'autre, il reste ABC égale abc.

62. Th. Deux triangles sont semblables quand ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Sol. Soit (fig. 41) les triangles ABC, dce dont les angles C et c sont égaux; et que l'on ait AC : BC : : dc : ec. Prenez sur AC une quantité DC égale à dc, et par le point D menez DE parallèle à AB, les triangles ABC, DEC seront équiangles et par conséquent semblables (58), de sorte qu'on aura :

$$AC : BC :: DC : EC.$$

Mais, par construction $DC = dc$, donc $EC = ec$; donc les deux triangles DCE, dce sont égaux comme ayant un angle $C = c$ compris entre côtés égaux chacun à chacun (23).

63. Th. Des lignes qui, comme CD, CE... menées en quelque nombre que ce soit, du sommet C d'un triangle sur sa base AB (fig. 43), partagent cette base et sa parallèle ab en parties proportionnelles, de sorte que l'on a :

AD : DE : : *ad* : *de*, et DE : *de* : : EB : *eb*....

Sol. *ad*, par hypothèse, étant parallèle à AD, les triangles ADC, *adC* sont équiangles et semblables (48), donc on a :

DC : *dC* : : AD : *ad*; et dans le triangle DCE on a aussi :

DC : *dC* : : DE : *de* ; le premier rapport de ces deux propositions étant le même, il s'ensuit que :

AD : *ad* : : DE : *de*, on trouverait semblablement que DC : *d*C : : EB : *eb*, etc.

De sorte que, si AB était divisé en parties égales, AD, DE, EB, les parties *ad*, *de*, *eb*.. de sa parallèle, seraient aussi égales entre elles.

64. Remarque. De la démonstration qui précède on tire le moyen de diviser une droite quelconque de la même manière qu'une autre droite donnée.

Soit AB (fig. 43) la droite donnée, et *ab* celle qu'il faut diviser de la même manière; tirez à une distance quelconque de AB (47) une droite indéfinie qui lui soit parallèle, et prenez sur cette droite une quantité égale à *ab*, et par les points extrêmes A,*a*, B,*b*, de ces lignes tirez les indéfinies A *a*, B *b* de manière qu'elles aillent se couper en C, et par ce dernier point et les divisions de AB, tirez CD, CE...; et *ab*, aux points *d*,*e*... se trouvera divisée de la même manière que AB.

Cette méthode, très ingénieuse et très simple, est néanmoins peu usitée dans la pratique; on l'emploie avec avantage pour la division des *échelles :* il en sera parlé dans le *complément*.

65. Th. Si du sommet de l'angle droit C (fig. 44) d'un triangle rectangle ABC on abaisse la perpendiculaire CD sur le côté opposé, ou l'hypoténuse AB, il en résulte :

1° Que cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres ADC, BDC, qui lui sont semblables, et qui, par conséquent, sont semblables entre eux;

2° Que chacun des côtés AC, BC de l'angle droit est moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière;

3° Que la perpendiculaire CD est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse.

Sol. 1° Le triangle ABC et le triangle ADC ont l'angle commun A; de plus, l'angle droit ACB égale l'angle droit ADC; CD étant perpendiculaire sur AB. Ces deux triangles, ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont équiangles (38) et par conséquent semblables.

On démontre avec la même facilité que les triangles ABC, BDC sont aussi semblables, car ils ont l'angle B commun et ils sont rectangles l'un et l'autre : leurs côtés homologues sont donc proportionnels.

Donc les trois triangles sont équiangles et semblables entre eux; on pourra donc établir les proportions :

AD petit côté du petit triangle : AC petit côté de ABC : : AC hypoténuse du petit triangle : AB l'hypoténuse du grand, ou

$$AD : AC :: AC : AB.$$

Pareillement :

BD moyen côté du moyen triangle : BC moyen côté du grand : : BC hypoténuse du moyen triangle : AB hypoténuse du grand, ou

$$BD : BC :: BC : AB.$$

Voilà donc pour la solution de la seconde partie du théorème.

Comparant les triangles ADC, BDC l'un avec l'autre, on a :

AD petit côté du petit triangle est à DC petit côté de

BDC : : DC moyen côté de ADC : BD moyen côté de BDC, ou simplement

$$AD : DC :: DC : BD.$$

Telle est la solution de la troisième partie de la proposition ci-dessus.

Reprenant les proportions qui précèdent, on en tire la conclusion que, si l'on représente par des nombres les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle, on trouve que le carré du nombre qui représente l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui représentent les côtés de l'angle droit, car on a :

$$AD : AC :: AC : AB,$$
$$BD : BC :: BC : AB.$$

Faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient :

$$\overline{AC}^2 = AD \times AB,$$
$$\overline{BC}^2 = BD \times AB;$$

d'où l'on tire cette égalité :

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AD \times AB + BD \times AB,$$

ou bien :

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \parallel (AD + BD) \times AB;$$

mais AD + BD sont la même chose que AB. Substituant donc cette dernière quantité à AD + BD, on a :

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AB \times AB \text{ ou } \overline{AB}^2.$$

Lors donc que l'on connaît les deux côtés d'un triangle rectangle qui comprennent l'angle droit, on trouve facilement son hypoténuse en tirant la racine carrée de la somme des carrés de ces côtés.

Supposons donc que $AC = 6$ et $BC = 8$, on aura $36 + 64 = 100$ pour la somme des carrés; donc

$\overline{AB}^2 = 100$, et $AB =$ la racine carrée de 100, laquelle est 10.

On peut, avec la même facilité, trouver l'un des côtés de l'angle droit quand on connaît l'autre et l'hypoténuse, car, retranchant le carré de ce côté connu, de celui de l'hypoténuse, le reste exprimera le carré du côté cherché. Si par exemple on avait :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 \text{ (fig. 44).}$$

Pour avoir la longueur de BC on retrancherait le carré de AC de celui de l'hypoténuse AB, et la racine carrée du reste exprimerait la longueur de BC; supposons que l'on ait hypoténuse $AB = 13$, côté $AC = 5$; carrant tout, il viendra : $\overline{AB}^2 = 169$; $\overline{AC}^2 = 25$; retranchant 25 de 169 il reste 144, dont la racine carrée est 12 : ce dernier nombre exprime la longueur de BC.

66. Th. Deux polygones sont semblables quand ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés.

Sol. Ce théorème se comprend sans démonstration, lorsqu'on sait que deux triangles sont semblables quand ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels (58). Or, tout polygone pouvant être partagé en un certain nombre de triangles, (52) si deux polygones en contiennent un même nombre et que tous ces triangles soient semblables chacun à chacun, les deux polygones le seront aussi, car il est évident que deux choses sont semblables quand les diverses parties qui les composent sont semblables.

Au reste, l'inspection de la figure 45 suffit pour faire voir que le polygone A*bcdf* est semblable au polygone ABCDF; si par hypothèse ou par construction les côtés BC,*bc*, CD,*cd*, DF,*df*... appartenant aux deux polygones sont parallèles, et si l'on a A*b* : AB : : A*c* : AC : : A*d* : AD.....

67. **Problème.** Faire un polygone semblable à un autre sur une ligne donnée quelconque.

Sol. Commençons par le cas le plus simple, et supposons qu'il est demandé de faire sur une ligne donnée

A ———————— B

un triangle semblable à un autre triangle quelconque, dont les trois angles A, B, C sont connus.

Faites suivant le procédé du n° 31, au point A, de la ligne AB, un angle égal à l'angle A, et tirez une ligne indéfinie dont la direction sera déterminée par l'ouverture de l'angle.

Faites en B, l'autre extrémité de la ligne AB, la même opération pour l'angle B du triangle donné..... prolongez le côté de l'angle dont vous aurez déterminé la direction jusqu'à sa rencontre avec celui qui forme un des côtés de l'angle A, vous aurez un triangle qui sera équiangle avec le triangle donné ABC, puisque ces deux triangles auront deux angles égaux, chacun à chacun (38).

Pour ce qui est de la manière de construire sur une ligne donnée

b ———————— *c*

un autre polygone semblable au polygone ABCDF, (fig. 45). Faites, comme il vient d'être enseigné ci-dessus, en *b* et en *c*, deux angles égaux aux angles B, C du polygone donné. Vous aurez un triangle A*bc* semblable au triangle ABC.

Faites de la même manière et sur A*c*, un autre triangle semblable au triangle ACB.

Faites-en autant sur A*d*, et ainsi de suite..... vous aurez un polygone *Abcdf*, lequel sera semblable à

A B C D F, puisque ces deux polygones seront composés d'un même nombre de triangles placés dans le même arrangement.

68. Th. Les contours des polygones semblables sont entre eux, comme les côtés homologues de ces polygones.

Sol. Cette vérité est évidente... toutefois en voici une démonstration facile :

Soit les deux polygones semblables A B C D F, A*bcdf* (fig. 45). Si l'on admet ou s'il est prouvé que le côté A*b* est les deux tiers de A B, *bc* les deux tiers de B C, *cd* les deux tiers de C D, *df* les deux tiers de D F, il en faut conclure que A *bcdf* est les deux tiers du contour A B C D F.

Du Cercle.

69. Le cercle dont on a dit un mot (11) est tout à la fois une ligne et une figure. Dans le premier cas le cercle est une ligne courbe la plus régulière de toutes, qu'on appelle du nom spécial de *circonférence.* Considéré comme figure, le cercle est une surface qui a longueur et largeur.

Toute ligne droite C A, C E, C D... (fig. 46) menée du centre à la circonférence s'appelle *rayon* ; toute ligne qui comme A B passe par le centre C, n'importe dans quelle direction, s'appelle *diamètre.*

Il est évident, d'après la définition du cercle qui a été donnée (11), que tous les *rayons* sont égaux entre eux ; il est aussi évident que tous les diamètres, étant chacun le double d'un rayon, sont égaux entre eux.

On appelle *arc* une portion de la circonférence comprise entre deux rayons ou deux points déterminés : E D est un arc ainsi que F H G.

La *corde* ou *sous-tendante* d'un arc est la droite qui joint ses extrémites : F G est une corde.

On appelle *segment* •une portion de la surface d'un cercle, comprise entre un arc et sa corde : la figure FHG est un segment.

Le *secteur* d'un cercle est une sorte de triangle limité par deux rayons, et par l'arc que ces rayons comprennent entre eux : la figure DCE est un secteur.

Une ligne est dite *inscrite* dans un cercle, quand ses extrémités se terminent à la circonférence; telle est AB (fig. 47); à proprement parler, c'est une corde.

En général, un *ngle* est inscrit dans un cercle, toutes les fois qu'il a son sommet à la circonférence et que ses côtés sont l'un et l'autre dirigés dans l'intérieur de la figure : ABC est dans cette position.

Un *triangle* est inscrit dans un cercle, lorsque les sommets de ces trois angles sont à la circonférence; ABC est un triangle inscrit.

On appelle *sécante* une ligne qui, comme AB (fig. 48), coupe la circonférence en deux points; elle diffère de la corde en ce que ses extrémités sont hors du cercle.

La *tangente* est toute ligne qui, comme CD, ne touche la circonférence qu'en un point M.

En général, on dit qu'un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque le sommet de tous ses angles sont à la circonférence; et, dans ce cas, on dit aussi que le cercle est *circonscrit* au polygone.

Un polygone est *circonscrit* à un cercle, lorsque tous ses côtés touchent sa circonférence, mais en un point seulement; dans le même cas, on dit aussi que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

70. Th. Tout diamètre AB (fig. 49) divise le cercle en deux parties égales.

Sol. Si l'on pliait la figure de manière que le pli se fît sur la ligne A B, et que tous les points de l'arc AEB ne tombassent pas sur ceux de l'arc AFB, il s'ensuivrait que tous les points de la circonférence ne seraient pas également éloignés du centre, ce qui serait contraire à la définition du cercle.

71. Th. La plus longue ligne qu'on peut tirer dans l'intérieur d'un cercle est celle qui passe par le centre et qu'on appelle le *diamètre*; d'où il suit que le diamètre est la plus longue de toutes les cordes.

Sol. Soit (fig. 49) A B le diamètre, AD une corde quelconque; si aux extrémités A, D de cette corde on mène les rayons C A, CD, on aura le triangle ACD, d'où l'on tirera $AC + CD > AD$, mais A C et C D étant rayons d'un même cercle, égalent, pris ensemble, le diamètre A B; donc on a : $AB > AD$.

72. Th. Dans un même cercle, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales, et réciproquement; des cordes égales sous-tendent des arcs égaux, pourvu que ces arcs soient moindres ou plus grands que la demi-circonférence.

Sol. Soit (fig. 50) les deux cercles égaux AHB, EGF; en les plaçant l'un sur l'autre de manière que le point E tombe sur le point A et le point F sur le point B, il est évident que la demi-circonférence EGF se confondra avec la demi-circonférence AHB.

Or, si l'on accorde que les arcs AD, EG sont égaux, le point G se confondra avec le point D, et il est évident que les triangles ADC, EGO seront égaux comme se recouvrant exactement... Donc les cordes EG, AD, qui sous-tendent des arcs égaux sont égales entre elles.

Il serait superflu de démontrer que des cordes égales sous-tendent des arcs égaux; ce serait répéter les raisonnemens qui précèdent.

73. Th. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc est sous-tendu par une plus grande corde, et réciproquement une plus grande corde sous-tend un plus grand arc.

Sol. Soit (fig. 50) l'arc AH plus grand que AD, tirant les rayons CA, CD, CH, et les cordes AD, AH, on a les deux triangles ADC, AHC, lesquels ont le côté commun AC; et CD et CH sont égaux comme rayons d'un même cercle ; mais il est évident que l'angle ACH est plus grand que l'angle ACD, donc AH opposé au plus grand angle est plus grand que AD (36).

74. Th. Le rayon qui est perpendiculaire à une corde divise, étant prolongé, cette corde et l'arc qu'elle sous-tend en deux parties égales.

Sol. Soit (fig. 51) le cercle AHB dans lequel on a tiré la corde AB, et sur laquelle, du centre C du cercle, on a abaissé la perpendiculaire CD que l'on a prolongée jusqu'en G. Tirant les rayons CA, CB, on pourra les considérer comme des obliques égales qui s'écartent également de la perpendiculaire CD; donc AD = BD (25), puisque, par hypothèse, CD est perpendiculaire sur AB, les angles ADG, BDG sont droits; d'où il suit que les deux triangles ADG, BDG sont égaux ; car ils ont un côté commun DG; de plus AD = BD; ces deux triangles ont un angle égal (l'angle droit en D) compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (23); donc AG = BG; mais ces lignes étant des cordes égales, les arcs qu'elles sous-tendent sont égaux (72), donc l'arc AG égale l'arc BG; donc la perpendiculaire CD passe, étant prolongée, par le milieu de l'arc AGB.

Observation. Puisque deux points suffisent pour déterminer la direction d'une droite, il s'ensuit :

1° Que toute ligne qui partant du centre d'un cercle passe par le milieu d'une corde, doit aussi passer par le milieu de l'arc sous-tendu par celle-ci;

2° Qu'une ligne qui passe par le milieu d'un arc et de sa corde doit aussi, si on la prolonge, passer par le centre du cercle dont cet arc fait partie...

75. Th. La tangente d'un cercle ne peut avoir de commun avec sa circonférence qu'un seul point.

Sol. Afin de le démontrer, supposons une ligne B D (fig. 52) qui touche la circonférence en A, et dont la direction soit perpendiculaire à celle du rayon C A, ce rayon sera aussi perpendiculaire sur BD, et il mesurera la plus courte distance qu'il y a du centre C à cette dernière ligne (27), de sorte que, toute oblique comme CE étant plus longue, le point E sera nécessairement hors du cercle; donc la tangente BD ne peut avoir qu'un point de commun avec la circonférence.

76. Th. Deux parallèles qui comme DE, AB (fig. 53) coupent la circonférence d'un cercle, interceptent entre elles deux arcs égaux.

Sol. Il peut se présenter trois cas : 1° que les deux parallèles comme A B et D E sont sécantes, alors abaissez du centre C du cercle la perpendiculaire C G sur la corde N Q; cette perpendiculaire coupera NQ, ainsi que l'arc qu'elle sous-tend en deux parties égales (74).

Considérant M P partie de A B comme une corde parallèle à N Q, il est évident que la perpendiculaire C H coupera aussi cette corde ainsi que l'arc M N H Q P qu'elle sous-tend en deux parties égales; on aura donc : arc M N H = arc H Q P; mais on a aussi arc N H = arc H Q; retranchant N H de M N H et H Q de H Q P, il restera M N = Q P.

2° Si DE l'une des deux parallèles (fig. 54) est tangente et l'autre A B sécante, menez au point de contact

H, le rayon CH, il sera perpendiculaire sur DE (75) ainsi que sur sa parallèle ; il divisera donc la corde MP ainsi que l'arc MHP qu'elle sous-tend en deux parties égales.

3° Si les deux parallèlles DE, IL sont l'une et l'autre tangentes au cercle, la démonstration se réduit à tirer aux points de contact les rayons CH, CK ; ces deux rayons étant perpendiculaires aux deux parallèles et partant d'un même point C, formeront une ligne droite qui sera le diamètre HK, lequel coupera la circonférence en deux parties égales, de sorte que l'arc HAK égalera HMK.

77. Th. Dans le même cercle ou dans des cercles décrits d'un même rayon, des angles égaux ACB, FCD interceptent sur la circonférence des arcs égaux AB, FD (fig. 55) ; et *réciproquement*, si les arcs compris entre les côtés de ces deux angles sont égaux, les deux angles le seront aussi.

Dans le premier cas, plaçant l'angle ACB sur son égal FCD, le point A tombera sur le point F, et le point B sur le point D, car les côtés de ces angles sont égaux comme étant rayons d'un même cercle ; mais alors il est évident que les angles AB, FD se confondront aussi ; dans le cas contraire, il s'en suivrait que certains points de ces arcs seraient plus ou moins éloignés du centre C du cercle.

Si les arcs AB, DF sont égaux, en les plaçant l'un sur l'autre, ils se confondront, et le point A tombrra sur le point F, et le point B sur le point D ; tirant de ces points des rayons au centre C du cercle, on aura un angle égal aux angles donnés ACB ou FCD.

La vérité de cette proposition est si évidente qu'il est à peu de chose près inutile d'en donner une démonstration.

78. Th. Dans des cercles décrits d'un même rayon

(fig. 56), si des angles A C B, D C E, qui ont leur sommet au centre C du cercle, ont des ouvertures qui soient entre elles comme les nombre 5, 3, les arcs compris entre les côtés de ces angles seront aussi dans le même rapport.

SOL. Si l'on admet que l'angle A C B contient cinq angles égaux A C *d*, *d* C *e*... D'après la proposition, chacun de ces angles pourra être compris trois fois entre les côtés de l'angle DCE et les arcs qui de part et d'autre seront déterminés pas les côtés de ces angles partiels seront nécessairement égaux entre eux (77); donc l'arc A B est à l'arc D E comme 5 est à 3.

Si l'on objectait que ces deux angles n'ont point de commune mesure, on ferait observer qu'ils peuvent être divisés l'un et l'autre en d'autres angles égaux entre eux, en nombre infini, ce qui est incontestable; ainsi donc, plaçant D C E sur A C B, le côté D C sur A C, il est évident que C E se confondra avec un des côtés des angles partiels que l'on suppose être en nombre infini, ou que du moins il en sera à une distance inappréciable.

REMARQUE. Afin de corroborer la démonstration qui précède ou de la rendre plus sensible, il faut supposer que les arcs A *d*, *d e*, *ef*... et D *m*, *m n* sont sous-tendus par leurs cordes, comme le sont A *d* et D *m*; d'où résulteraient des triangles égaux A C *d*, D C *m*, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux (les rayons d'un même cercle); or, il a été démontré (72) que dans un même cercle les cordes égales sous-tendent des arcs égaux, et réciproquement, pourvu que ces arcs soient plus grands ou plus petits que la demi-circonférence.

OBSERVATION. Donc la mesure la plus convenable d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés.

Or, comme autour d'un point on ne peut former que quatre angles droits (20), on en conclut que la mesure de tous les angles pris ensemble qui ont leur sommet au centre d'un cercle, n'est ni plus grande ni plus petite que la circonférence entière de ce cercle.

Ainsi celui de ces angles dont les côtés comprendraient le quart de la circonférence, serait un angle droit.

Comme la grandeur des angles ne dépend point de la longueur de leurs côtés (13), tout cercle est propre à mesurer leur ouverture. Cela sera démontré un peu plus loin.

79. Th. Lorsqu'un angle a son sommet sur un point quelconque de la circonférence, son ouverture a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, prolongés s'il est nécessaire.

Sol. Il peut se présenter quatre cas différens :

1° Que l'un des côtés BH de l'angle EBH (fig. 57) passe par le centre O du cercle ; si par le centre O on mène FG (57) parallèle à EB, on formera l'angle FOH et BOG. Ces angles sont égaux comme opposés par le sommet (18); et à cause des parallèles EB, FG et de la sécante BH, les angles EBH, BOG sont égaux comme alternes-internes (42); et les angles EBH, FOH sont aussi égaux comme correspondans. Donc on a :

$$FOH = BOG, \quad EBH = BOG.$$

Mais l'arc BG, mesure de BOG, égale l'arc EF, car ces deux arcs sont compris entre deux cordes parallèles (76) ; et comme FOH = BOG, il s'ensuit que l'arc HEF compris entre les côtés de l'angle EBH est le double de celui qui mesurerait l'ouverture de cet angle si celui-ci avait son sommet au centre du cercle.

2° Soit l'angle EBI entre les côtés duquel est compris le centre O du cercle. Cet angle se compose des angles

EBH, HBI, lesquels ont le côté commun BH, et qui passe par le centre du cercle ; or, d'après la démonstration contenue dans le paragraphe qui précède, les deux angles ont pour mesure la moitié des arcs EH, HI, compris entre leurs côtés : donc EBI, qui est la somme de ces deux angles, doit avoir aussi pour mesure la moitié de la somme des arcs EH, HI, ou la moitié de l'arc EHI.

3° Pour démontrer que l'angle DBE, dont les côtés sont l'un et l'autre à une certaine distance du centre, qu'il a pour mesure la moitié de l'arc DE, on considère l'angle DEB comme faisant partie de l'angle DBH, dont un des côtés BH passe par le centre; or, DBH a pour mesure la moitié de l'arc DEH; si donc l'angle DBE est par exemple le tiers de l'angle DBH, il aura pour mesure la moitié de l'arc DE compris entre ses côtés, lequel doit être le tiers de l'arc DEH.

4° L'angle formé par une tangente et une corde a aussi pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés : l'angle ABH est droit, attendu que le diamètre HB est perpendiculaire sur la tangente AB (75); donc ABH a pour mesure le quart de la circonférence ou la moitié de la demi-circonférence HEDB..., laquelle est comprise entre ses côtés; et si par exemple on ajoute à l'angle ABH l'angle HBI, on aura l'angle total ABI, lequel a pour mesure arc $\frac{HEB}{2} + \frac{HI}{2} = \frac{HEB + HI}{2}$, ou la moitié de l'arc total BDEHI.

80. Observation. Il résulte des démonstrations qui précèdent, que tous les angles qui, comme EDF, EPF, EQF (fig. 58), ont leurs sommets à la circonférence et dont les côtés comprennent un même arc ECF..., sont égaux entre eux.

Il suit encore des mêmes démonstrations, que tout angle qui comme ACB a son sommet C à la circonférence, et dont les côtés passent par les extrémités du diamètre AB est droit, puisqu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence.

81. Th. L'angle ACB (fig. 59), qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc AB, plus la moitié de l'arc EF compris entre ses côtés prolongés.

Sol. Par le point F, où le côté prolongé AC rencontre la circonférence, menez FD parallèle à EB (47), vous aurez les angles AFD, ACB égaux entre eux comme correspondans, à cause des parallèles BE, DF, et de la sécante AF (42).

Or AFD ayant son sommet à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc ABD (79) ou bien la moitié de l'arc DB + la moitié de l'arc AB; mais les arcs EF, DB sont égaux comme compris entre deux cordes parallèles; donc ACB = AFD a pour mesure la moitié de l'arc AB + la moitié de l'arc EF...

82. Th. L'angle ACB (fig. 60), dont le sommet C est en dehors de la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc AB compris entre ses côtés, diminué de l'arc DF, dont la convexité est tournée vers son sommet.

Sol. Par le point F menez FE parallèle à CA (47), vous aurez les angles BFE, ACB égaux entre eux comme correspondans, à cause des parallèles CA, FE, et de la sécante CB (42); or, l'angle BFE, dont le sommet est à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc EB; donc ACB a aussi pour mesure la moitié de l'arc EB; ou bien la moitié de l'arc AB, diminué de l'arc AE; mais les arcs AE, DF sont égaux comme étant compris entre cordes parallèles (76); donc l'angle ACB a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés diminué de l'arc DF.

83. **Problème.** Mener à l'extrémité C d'une droite AC (fig. 58) une perpendiculaire CB.

Sol. D'un point quelconque O, pris hors de la droite AC et avec une ouverture de compas égale à CO, décrivez un grand arc de cercle ACB, et par le point A où cet arc coupera la ligne AC et le centre O, tirez la ligne indéfinie AO ; cette ligne sera un diamètre qui rencontrera en B l'arc que vous aurez tracé ; tirez BC, l'angle ACB sera droit comme ayant son sommet à la circonférence et ses côtés appuyés sur les extrémités A, B du diamètre (80) ; donc BC sera perpendiculaire sur AC et au point C.

84. **Problème.** D'un point E (fig. 61) pris hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle.

Sol. Joignez le point E et le centre D du cercle donné ; et du milieu de DE comme centre, décrivez la circonférence GDFE ; elle coupera le cercle aux points B, C ; par ces points d'intersection et le centre D, tirez les cordes BD, CD ; les angles DCE, BDE seront droits comme ayant leurs sommets à la circonférence du cercle GDFE, et leurs côtés appuyés sur les extrémités du diamètre DE ; donc BD, rayon du cercle BAC est perpendiculaire sur BE ; il en est de même du rayon DC relativement à CE ; donc BE et CE perpendiculaires à ces rayons sont tangentes au cercle ABC (75).

85. **Problème.** Par trois points A, B, D (fig. 62) faire passer une circonférence de cercle.

Sol. Joignez les trois points donnés par les lignes AB, BD ; et considérant ces lignes comme des cordes du cercle, que l'on pourrait dire *futur*, élevez sur le milieu de chacune les perpendiculaires indéfinies CE, CF (28), le point C où elles se couperont sera le centre du cercle demandé.

En effet, il a été démontré (n° 74), que toute perpendiculaire qui coupe une des cordes d'un cercle par le milieu passe nécessairement par son centre, d'où il suit que les perpendiculaires CE, CF n'étant point parallèles, doivent se couper en un point quelconque C; duquel pris pour centre et avec un rayon égal à CB, si l'on décrit une circonférence, elle passera par les points A, B, D: car les lignes CB, CD sont égales entre elles comme s'écartant également de la perpendiculaire CF; CB, CA sont dans le même cas relativement à la perpendiculaire CE; on a donc CD = CB = CA, donc ces trois lignes sont des rayons d'un même cercle.

De tous les polygones à côtés inégaux, ou dont les angles sont inégaux, le triangle est le seul, qu'il soit régulier ou non, que l'on puisse toujours inscrire dans un cercle; ou ce qui revient au même, il est toujours possible de faire passer une circonférence de cercle par le sommet des trois angles d'un triangle; mais il suffit de l'inspection de la figure 67, par exemple, pour comprendre qu'une circonférence de cercle qui passerait par les points A, D laisserait en dedans les points B, C.

De la démonstration du problème ci-dessus, on déduit la manière de trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné: à cet effet, prenez sur la circonférence de ce cercle ou de cet arc trois points à volonté, joignez-les par des cordes, puis élevez sur le milieu de ces cordes des perpendiculaires indéfinies, le point où celles-ci se couperont sera le centre demandé.

Soit par exemple l'arc ABD (fig. 62), ayant pris arbitrairement trois points A, B, D, on les joindra par les droites BA, BD, sur le milieu desquelles on élèvera les perpendiculaires CE, CF.

86. Problème. Partager un arc ou un angle donné en deux parties égales.

Sol. Soit l'arc donné AFD (fig. 63), on joindra ses extrémités A, D par la droite AD, ce sera la corde de l'arc, sur le milieu de laquelle on élèvera une perpendiculaire indéfinie CB (28), cette ligne coupera, en F, l'arc en deux parties égales (74).

Si c'est l'angle ACD qu'on veut partager en deux angles égaux, du sommet C de l'angle donné et avec une ouverture de compas prise à volonté, on décrira l'arc indéfini AFD; on tirera la corde AD, sur le milieu de laquelle on élèvera la perpendiculaire CB; il est évident que les angles ACB, DCB seront égaux entre eux, car les arcs AF, DF qui mesurent ces angles, sont égaux comme moitiés de l'arc total AFD, lequel mesure l'angle ACD.

87. Problème. Inscrire un cercle EGF dans un triangle donné ACD (fig. 64), de façon que les trois côtés du triangle soient autant de tangentes à la circonférence de ce cercle.

Sol. Partagez deux des angles du triangle en deux parties égales (86), les angles A et C par exemple, les lignes AO, CO qui résulteront de ces divisions et qui se rencontreront en O détermineront en ce point le centre du cercle demandé.

De ce point O abaissez sur les côtés CA, CD du triangle les perpendiculaires OE, OF; ces lignes seront égales, car les triangles CEO, CFO sont égaux: ils sont l'un et l'autre rectangles en E et en F; de plus les angles ECO, FCO sont égaux comme moitiés de l'angle ACD, donc les deux triangles sont équiangles; ils ont enfin un côté commun CO, lequel est adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc les deux triangles sont égaux (24); donc OE = OF; on démontrerait de la même manière que les triangles DFO, DGO sont égaux et que $OG = OF$, d'où il suit que les trois points E, F, G sont également distans du point O ; donc on pourra faire passer une circonférence de cercle par ces points, laquelle ne fera que toucher les côtés du triangle circonscrit, attendu que les rayons OE, OF, OG sont perpendiculaires sur ces côtés et que par conséquent ils mesurent la plus courte distance qu'il y a du point O à chacun de ces côtés.

88. OBSERVATION. Tout polygone qui a tous ses angles et tous ses côtés égaux peut être inscrit ou circonscrit au cercle. La figure 80 en offre un exemple ; on y voit un hexagone A B C D inscrit dans un cercle; la figure 81 offre un exemple du contraire, c'est-à-dire un hexagone régulier circonscrit à un cercle.

TROISIÈME PARTIE.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES RELATIVEMENT A LEURS SURFACES.

89. Les contours ou les *périmètres* des figures se composent de lignes droites ou courbes, mais leur commune mesure est presque toujours une ligne droite, d'une longueur déterminée.

90. Une *surface* est ce qui a longueur et largeur, *aire* et *surface* sont des mots à peu près synonymes.

Pour évaluer une surface quelconque, on la rapporte toujours à une surface plane que l'on prend pour terme de comparaison, laquelle est le plus ordinairement un carré; ainsi l'on dit que la superficie d'une table a, par exemple, 89 décimètres carrés, pour faire entendre qu'il serait possible de placer sur cette table, 89 carrés d'un décimètre de long sur autant de large.

On peut dire aussi que telle sphère ou boule a tant de décimètres carrés de surface, 108, par exemple, pour faire comprendre que si l'on se proposait de la couvrir d'une certaine étoffe, il en faudrait une pièce dans laquelle il serait possible, au besoin, de tailler 108 carrés égaux d'un décimètre de côté.

Ne confondez pas les expressions telles que celles-ci: 8 *mètres carrés* et 8 *mètres en carré*; 8 mètres carrés sont 8 carrés ayant chacune 1 mètre de côté; et par 8 mètres en carré on doit entendre une surface de 8 mètres de long sur autant de large, et qui égale 64 carrés chacun d'un mètre de côté.

91. Deux figures sont *égales*, lorsque, étant placées l'une sur l'autre, elles se recouvrent exactement; il va sans dire que deux figures égales sont toujours *semblables*: mais deux figures semblables peuvent être fort inégales, et par exemple des carrés, des cercles sont toujours semblables et toutefois les uns peuvent être plus grands que les autres.

92. Des figures sont dites *équivalentes*, lorsque, quoique dissemblables, leurs surfaces sont égales: par exemple un cercle peut être équivalent à un triangle, c'est-à-dire avoir une surface égale à la sienne...

93. La *base* d'un parallélogramme est le côté sur lequel il est censé reposer; AB (fig. 76) est la base du parallélogramme ACDB.

94. La *hauteur* d'un parallélogramme est la perpendiculaire abaissée sur la base d'un point quelconque du côté opposé à cette base: CE (fig. 76) mesure la hauteur du parallélogramme ACDB.

95. La *hauteur* d'un triangle est mesurée par la perpendiculaire abaissée de l'un de ses angles sur le côté opposé à cet angle, lequel est alors la *base* du triangle: CD (fig. 44) mesure la hauteur du triangle ABC, dont le côté AB est la base. On appelle *sommet* du triangle, le sommet de l'angle opposé à sa base; si la perpendiculaire tombait en dehors du triangle il faudrait prolonger sa base afin de déterminer exactement sa hauteur; si l'on prenait CD pour base du triangle ACD (fig. 70), il faudrait la prolonger de manière que la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle A, rencontrât cette base en F.

96. La hauteur d'un trapèze est la perpendiculaire

comprise entre ses deux côtés parallèles : DE mesure la hauteur du trapèze ABCD (fig. 70).

97. Deux triangles ont des hauteurs égales lorsque les perpendiculaires qui les mesurent sont égales, c'est-à-dire que si leurs bases se trouvent sur une même ligne, une parallèle à cette ligne, qui passe par le sommet de l'un des deux triangles, passe par le sommet de l'autre.

98. Th. Deux parallélogrammes ABCD, *abcd* (fig. 65) qui ont des bases et des hauteurs égales sont équivalens.

Sol. Supposez qu'ils sont l'un et l'autre partagés en tranches infiniment étroites par des lignes FE, *fe*.... parallèles à leurs bases CD, *cd*; puisque ces bases sont égales entre elles, les parallèles FE, *fe*.... égales à ces bases seront aussi égales entre elles; or, si le nombre de ces parallèles est infini, les deux parallélogrammes seront partagés en tranches qui ne différeront les unes des autres que d'une quantité inappréciable. En effet, si les deux parallélogrammes partiels ABFE, *abfe* ont leurs côtés AB, *ab*.... égaux entre eux et que leurs hauteurs ou leurs largeurs soient infiniment petites, ces deux parallélogrammes seront égaux en surface : car alors les côtés BE, *be*..., différeront d'une quantité infiniment petite, de sorte donc que les deux figures étant posées l'une sur l'autre se recouvriraient exactement à très peu de chose près.

Et d'ailleurs pour que le parallélogramme *abfe* fût exactement égal à ABFE, il suffirait de porter le côté *ab* de gauche à droite d'une quantité suffisante pour que les deux figures étant superposées, les côtés BE, *be*, AF, *af* se confondissent....

Mais on rendra la démonstration pour ainsi dire palpable, en s'y prenant comme il suit :

On se procurera un jeu de cartes, et l'ayant couché sur le côté, on lui fera prendre une forme telle que, vu par dessus, il offrira la figure d'un parallélogramme, ce qui est très aisé à concevoir ; on comprend également qu'en déplaçant les cartes un peu plus ou un peu moins, de droite à gauche ou de gauche à droite, on pourrait leur faire prendre des figures de parallélogrammes différents à l'infini, et qui néanmoins seraient tous équivalents en surface.

99. REMARQUE. On démontrerait de la même manière que la surface du carré A B C D est égale à celle du parallélogramme *a b c d*, lequel a même base et même hauteur que lui. (fig. 66.)

100. TH. La surface d'un triangle quelconque est la moitié de celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.

SOL. Soit le triangle A B D, (fig. 67); si, par les sommets des angles A, D, on mène A C égale et parallèle à B D, et D C égale aussi et parallèle à B A, il en résultera le parallélogramme A B C D; or, il a été démontré (50) que les triangles A B D, A C D sont égaux; il est évident que les bases A B, C D de ces triangles sont égales comme côtés opposés d'un même parallélogramme; il est aussi évident que les hauteurs de ces triangles sont égales comme étant comprises l'une et l'autre entre les parallèles AB, CD (46); donc tous les triangles qui ont des bases et des hauteurs égales sont équivalents en surface.

101. TH. L'aire ou la surface d'un rectangle A B C D (fig. 68) est exprimée par le produit de sa base A B par sa hauteur A C.

SOL. Il a été dit (90) qu'on évalue les surfaces en les rapportant à celle d'un carré pris arbitrairement pour terme de comparaison. Soit donc le carré X (fig. 68) que l'on a choisi pour servir à mesurer la surface du rectangle A B C D; la méthode la plus directe et la plus simple qui se présente pour effectuer l'opération, consiste à porter le carré X sur la base AB du rectangle, de A en *e*, de *e* en *f*... de *g* en B; supposons qu'il y soit contenu exactement quatre fois.

Cela fait, on portera le même carré le long de la hauteur AC du rectangle, et s'il y est contenu trois fois, sans reste, on en conclura que le carré X peut être contenu 3 fois 4, ou 12 fois dans le rectangle ABCD; la seule inspection de la figure suffit pour que l'on soit convaincu de la vérité de cette démonstration.

102. Si les lignes qui mesurent la base et la hauteur du rectangle sont égales entre elles, il s'ensuit que la figure de ce rectangle est un carré; dans ce cas il suffirait de chercher combien de fois le carré X serait contenu sur la base AB, et, multipliant ce nombre de fois par lui-même, on aurait la surface du rectangle.

Quand on y aura un peu réfléchi, on concevra qu'il suffit de comparer le côté du carré X avec la base et la hauteur du rectangle, puis de multiplier les deux nombres trouvés l'un par l'autre; supposons que le côté du carré X est contenu onze fois sur la base du rectangle, et huit fois sur la ligne qui mesure sa hauteur, on multipliera 11 par 8, et le produit 88 exprimera la surface du rectangle comparée à celle du carré X.

103. Il pourrait se faire que le côté du carré ne fût pas contenu un nombre exact de fois sur la base et la hauteur du rectangle; dans ce cas on aurait deux nombres accompagnés de fractions, et cependant on n'en multiplierait pas moins ces deux quantités l'une par l'autre (voir le discours préliminaire), ce qui reviendrait toujours à multiplier le nombre d'unités linéaires contenu dans la base, par le nombre de ces mêmes unités contenu dans la hauteur.

104. Th. L'aire ou la surface d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Sol. Il a été démontré (98) que deux parallélogrammes qui ont des bases et des hauteurs égales sont équivalents, d'où il suit qu'un parallélogramme quelconque est égal, en surface, à un rectangle de même base et de même hauteur que lui; or, il vient d'être prouvé (101) que la surface de tout rectangle est exprimée par le produit de la longueur de sa base par celle de sa hauteur; donc pour calculer la surface du parallélogramme ABCD (fig. 76), on multiplierait la longueur de la base AB par celle de la hauteur CE, ces deux longueurs étant exprimées par des unités linéaires convenues.

105. Remarque. Des parallélogrammes qui ont des hauteurs égales sont entre eux comme leurs bases; et s'ils ont des bases égales ils sont entre eux comme leurs hauteurs : supposons deux parallélogrammes A et B, dont les bases sont représentées par 7, et que la hauteur de A soit représentée par 8 et celle de B par 10; la surface de A sera représentée par $7 \times 8 = 56$, et celle de B par $7 \times 10 = 70$; or, 56 et 70 sont bien entre eux comme les nombres 8 et 10....

106. Th. L'aire d'un triangle quelconque est exprimée par le produit de sa base par la moitié de sa hauteur, ou, ce qui revient au même, elle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Sol. Soit le triangle CAE, (fig. 69); il est évident, comme cela a été démontré (100), que ce triangle est la moitié du parallélogramme ABCE; or, pour calculer la surface de ce dernier, il faudrait multiplier sa base CE par la perpendiculaire AD qui mesure sa hauteur (104); d'où il suit que le triangle CAE qui a même base CE et même hauteur AD que le parallélogramme, doit avoir pour surface la longueur de AB multipliée par la moitié de AD.

107. Remarque. Deux triangles de même hauteur

sont entre eux comme leurs bases, et si leurs bases sont égales ils sont entre eux comme leurs hauteurs.

108. Th. L'aire du trapèze ABCD (fig. 70) est égale à sa hauteur DE multipliée par la moitié de AB, plus la moitié de CD; ou bien elle égale la somme de AB + CD multipliée par la moitié de DE.

Sol. Pour le prouver, tirez AD, le trapèze se trouvera partagé en deux triangles ABD, ACD; le premier aura pour mesure sa base AB, multipliée par la moitié de sa hauteur DE (106).

Considérant CD comme la base du triangle ACD, et la perpendiculaire AF abaissée sur cette base prolongée, on aura pour la surface du triangle, base CD multipliée par la moitié de AF; mais AB et CD étant parallèles, les perpendiculaires DE, AF (46) comprises entre ces parallèles, sont égales entre elles, d'où l'on tire ces expressions :

Surface de $ABD = AB \times \frac{DE}{2}$; surface de $ACD = CD \times \frac{AF}{2}$; or, DE égalant AF et substituant cette valeur à AF, on a pour la somme des surfaces des deux triangles :

$$\text{Surface } ABD + \text{surface } ACD = (AB + CD) \times \frac{DE}{2}$$

109. Th. Le carré ABIK dont les quatre côtés sont égaux à l'hypoténuse AB du triangle ABC, rectangle en C, est équivalent, en surface, aux carrés AFEC, BHGC, faits sur les côtés AC, BC qui comprennent l'angle droit (fig. 71).

Sol. La figure 71 ne sert ici que pour faire voir comment ces trois carrés peuvent être disposés de la manière la plus convenable; mais, afin de rendre la démonstration moins fatigante, nous allons faire successivement usage des deux figures suivantes.

Soit (fig. 72) un carré EGFH : tirez les diagonales EF, GH, vous aurez quatre triangles EGO, GOF, EOH, HOF, isocèles et rectangles et tous égaux entre eux, ce qui n'a pas besoin de démonstration, l'inspection de la figure suffit pour en convaincre.

Cela fait, par les sommets E, G, F, H, menez des parallèles aux diagonales EF, GH, vous formerez ainsi un nouveau carré ABCD dont les quatre côtés seront égaux aux diagonales EF, GH.

Or, si l'on considère EGF comme un seul triangle, rectangle en G, EF sera son hypoténuse, laquelle égale chacun des côtés du carré ABCD, lequel carré peut être considéré comme ayant été fait sur EF.

Faisons observer maintenant que le carré ABCD contient huit triangles rectangles égaux entre eux, tels que EGC, EGO.... HFB : car, par exemple, EGC, EGO sont chacun la moitié du carré ECGO.... mais le carré EGFH contient quatre de ces triangles, et les côtés de ce carré sont égaux à EG, un des côtés qui comprennent l'angle droit G du triangle rectangle EFG.

Or, puisque ce triangle est isocèle, on peut considérer le carré EGFH comme formé aussi sur FG; donc les carrés faits sur EG, FG valent deux fois le carré EGFH ou huit triangles égaux à EGO, par exemple; mais le carré ABCD fait sur EF, hypoténuse du triangle rectangle EGF, contient aussi huit de ces triangles : donc le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle est égal à la somme des carrés faits sur les deux côtés qui comprennent l'angle droit.

Lorsqu'on a tracé la figure 72 avec précision, il suffit presque de la montrer aux élèves pour les convaincre de la vérité du théorème.

110. La démonstration qui précède est satisfaisante, irréprochable, pourvu que le triangle rectangle soit iso-

cèle, mais, dans le cas contraire, on pourrait soutenir que la proposition est fausse, ou que le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle n'est pas égal à la somme des carrés faits sur les côtés de l'angle droit.

Pour répondre à toutes les objections, prenons le triangle ABC (fig. 73) dont les côtés qui comprennent l'angle droit sont inégaux ; sur AC, le plus long de ces côtés, formons le carré ACLH ; et sur l'hypoténuse AB, le carré ABDE ; puis, du sommet C de l'angle droit du triangle ABC, abaissons sur l'hypoténuse AB la perpendiculaire CF, et prolongeons cette ligne jusqu'en G.

Le carré ABDE se trouvera partagé en deux rectangles AFDG, FBGE ; cela fait, prolongeons le côté LH du carré ACLH jusqu'en D.

Maintenant que la construction est terminée, il nous sera facile de démontrer que le carré ACLH est équivalent en surface au rectangle AFDG :

En effet, ces deux figures ont de commun le quadrilatère AFHK ; et les triangles ACF, DKG sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles ; ils sont donc équiangles (59), de plus, les côtés AC, DK, AF, DG sont égaux comme étant des parallèles comprises entre des parallèles (46) ; les triangles CLK, AHD sont aussi équiangles, ils ont de plus les côtés CL, AH égaux comme côtés d'un même carré ACLH donc ils sont égaux.

D'où il suit qu'en ajoutant au quadrilatère AFHK les triangles ACF, CLK faisant tous les deux partie du carré ACLH, on aura l'équivalent de la surface du rectangle AFDG ; et réciproquement, en ajoutant au quadrilatère AFHK les triangles ACF, CLK, on aurait l'équivalent du carré ACLH.

On démontrerait de la même manière que le carré fait sur le côté BC est équivalent au rectangle FBGE.

Cette grande vérité que le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés faits sur les côtés de l'angle droit, a été démontrée d'une autre manière n° 65.

111. Remarque. Les deux rectangles AFDG, FBGE ayant même hauteur FG, sont entre eux comme leurs bases (103) DG, GE, ou AF, FB; or, les rectangles sont égaux aux carrés faits sur les côtés AC, BC de l'angle droit; donc ces carrés sont entre eux comme les segmens adjacens de l'hypoténuse déterminés par la perpendiculaire CF, c'est-à-dire qu'on a $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: AF : BF$ (voir n° 65.)

112. Remarque. Si d'un point C (fig. 74) de la demi-circonférence d'un cercle ACB, on abaisse la perpendiculaire CD sur le diamètre AB et qu'on tire les cordes AC, BC, ce triangle ABC sera rectangle en C (80), et la perpendiculaire CD sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD, BD du diamètre (65).

113. Remarque deuxième. De là résulte un moyen bien simple de trouver sans calcul une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Soient les deux lignes données AD, BD (fig. 74): mettez l'une au bout de l'autre, et du point O milieu de AB leur somme, pris pour centre et avec une ouverture de compas égale à BO ou AO, décrivez une demi-circonférence ACB, après quoi par le point D où les deux lignes données se joignent, élevez une perpendiculaire sur AB (29), le point C par lequel cette perpendiculaire coupera l'arc du cercle déterminera la longueur de la moyenne proportionnelle cherchée; on aura donc AD : CD :: CD : BD.

Il a été suffisamment démontré n° 65 que la corde AC est moyenne proportionnelle entre le segment AD de l'hypoténuse qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière;

il en est de même de la corde BC, laquelle est moyenne proportionnelle entre BD et BA; on ne doit ici considérer que le triangle rectangle ABC, abstraction faite de la demi-circonférence qui l'entoure.

114. Th. Les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, ou comme les carrés des nombres qui expriment les longueurs de ces côtés.

Sol. Cette vérité n'a pas besoin d'être démontrée lorsqu'il s'agit de polygones qui sont des carrés parfaits tels que ABCD, *abcd* (fig. 75), car, pour avoir la surface de ABCD, il faut multiplier la base AB par la hauteur AC; mais AC = AB; l'opération revient donc à multiplier AB par lui-même, on a pour résultat $\overline{AB}^2$ ou le carré de AB; il en est semblablement du carré *abcd* dont la surface est exprimée par ab^2 ou le carré de *ab*.

115. Si les carrés ABCD, *abcd* étaient chacun partagés en quatre autres petits carrés AFG... *afg*... aussi égaux entre eux, chacun de ces carrés étant le quart des deux grands, on aurait AFG... : *afg* :: 4AFG (ou ABCD): 4 *afg* (ou *abcd*.)

116. Th. Les surfaces de deux parallélogrammes semblables rectangles ou non, sont entre elles comme les carrés des côtés homologues de ces parallélogrammes.

Soient les deux parallélogrammes rectangles

```
C                      D
000000000000
0                      0          c                     d
0                      0          00000000000
0                      0          0                     0
0                      0          0                     0
000000000000          0                     0
A                      B          0                     0
                                  00000000000
                                  a                     b
```

ABCD, *abcd* (figures ci-dessus) dont les hauteurs AC, *ac* sont aux bases AB, *ab* comme 6 est à 11; divisons AC et *ac* en 6 parties égales, et par ces divisions tirons autant de parallèles aux bases AB, *ab*; divisons ensuite les bases AB, *ab* en 11 parties égales, et par ces divisions menons des parallèles à AC et à *ac*; les deux parallélogrammes se trouveront partagés comme le rectangle ABCD de la figure 68, c'est-à-dire que chacun d'eux contiendra 6 fois 11 ou 66 petits carrés tous égaux entre eux (dans les parallélogrammes ci-dessus, ces petits carrés sont représentés par les caractères O, *o*.)

D'après ce qui vient d'être dit, tous les carrés O sont semblables aux carrés *o*; on a donc : surface de ABCD est à la surface de *abcd* comme 66. O sont à 66. *o* ou comme O est à *o*.

Or, si l'on faisait un carré sur la base AB et un autre sur la base *ab*, les longueurs de ces bases étant divisées l'une et l'autre en 11 parties égales, les carrés qu'on aurait faits sur elles pourraient contenir, le premier 11 fois 11 = 121. O; et le second 11 fois 11 = 121. *o*; on aurait donc en définitive :

Surface ABCD : surface *abcd* :: 66. O : 66. *o*; mais 66. O: 66. *o* :: 121. O : 121. *o*.

Cela est évident.

117. Si l'on objectait que la solution ne peut avoir lieu qu'autant que la base et la hauteur des rectangles semblables sont représentées par des nombres entiers, il serait facile de démontrer que la vérité de la proposition est toujours parfaitement vraie

Supposons par exemple deux rectangles semblables, A et B, dont les hauteurs sont à leurs bases comme 3 est à $5\frac{1}{7}$; réduisant tout en *septièmes* de part et d'autre, on a le rapport 21 : 36; et ce rapport est le même que celui qui existe entre 3 et $5\frac{1}{7}$, cela est évident.

117 *bis* (1). Supposons le cas où les bases et les hauteurs des rectangles n'ont point de commune mesure : tel serait par exemple le rectangle qui aurait pour sa base la diagonale d'un carré et pour hauteur le côté de ce même carré.

Il sera démontré dans le complément que ces deux lignes n'ont point de commune mesure : de sorte qu'en divisant l'une et l'autre en un certain nombre de parties égales, les rectangles dont ces parties formeraient les bases et les hauteurs ne seraient jamais des carrés parfaits ; on aurait toujours de petits rectangles ; mais en poussant la division à l'infini, ces petits rectangles ne différeraient de carrés parfaits que d'une quantité inappréciable ; admettons par exemple que la hauteur AC d'un parallélogramme ABCD quelconque est à sa base AB comme 2 est à $4+\frac{1}{7}$; il est évident que si l'on partage l'une et l'autre de ces deux dimensions en un certain nombre de parties égales, 10 par exemple, on aura pour la hauteur 20 parties et pour la base 40 de ces parties plus le $\frac{1}{7}$ de l'une des 10 nouvelles parties, c'est-à-dire 1 partie $\frac{3}{10}$; en tout 41 parties $\frac{3}{10}$ de ces parties ; considérons la difficulté, si toutefois cela en est une, sous un autre point de vue, et supposons qu'après avoir partagé les quatre divisions entières de la base chacune en 10 parties $= 40$, on ait voulu distribuer le $\frac{1}{7}$ qui restait sur ces 40 nouvelles divisions, on aura pris le $\frac{1}{40}$ de $\frac{1}{7} = \frac{1}{280}$, d'où il suit que par l'effet de

(1) On pourra se dispenser de lire ce paragraphe, qui d'ailleurs n'est ici que pour faire voir, au moyen de nombres et par approximation, que tout rectangle dont la base et la hauteur sont incommensurables, peut être partagé en carrés égaux...

cette opération on a eu, en multipliant la hauteur AC = 20, par 40, 800 petits rectangles égaux entre eux et dont la base excède la hauteur de $\frac{1}{280}$; que si on avait opéré par 100 au lieu d'opérer par 10, on aurait eu de petits rectangles dont la base n'aurait excédé la hauteur que de $\frac{1}{2800}$; opérant par 1000, cette différence devient $\frac{1}{28000}$; par 10,000, 100,000.... on a successivement $\frac{1}{280000}$ $\frac{1}{2800000}$, $\frac{1}{28000000}$.... et ainsi de suite.... Comme on le voit, cette différence diminue rapidement, et l'on conçoit qu'elle devient tout-à-fait nulle si l'on pousse les divisions des côtés (la base et la hauteur) du rectangle à l'infini.

118. Observation. Deux parallélogrammes semblables peuvent être assimilés à deux rectangles semblables, de même base et de même hauteur qu'eux (102) ; il s'ensuit que leurs surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.

119. Observation deuxième. Deux triangles semblables peuvent être considérés comme étant la moitié de deux parallélogrammes semblables (100), leurs aires sont donc aussi entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.

120. Problême. Faire un carré *cd*...., (fig. 76) qui soit équivalent à un parallélogramme donné ACDF.

Sol. Par le procédé décrit dans le n° 113, cherchez entre la hauteur CE du parallélogramme et sa base AF une moyenne proportionnelle *cd*, cette dernière ligne sera le côté du carré demandé : car on aura

$$CE : cd :: cd : AF.$$

faisant le produit des extrêmes et des moyens,

$$CE \times AF = \overline{cd}^2,$$

mais la surface du parallélogramme est exprimée par le produit de sa hauteur CE par sa base AF (102), or $\overline{cd}^2$ est égal à ce produit, donc le carré fait sur cd est équivalent au parallélogramme donné.

121. Faire un carré qui soit équivalent à un triangle donné CAF (fig. 69.)

Sol. Cherchez, toujours par le procédé du n° 113, une moyenne proportionnelle entre la base C F du triangle et la moitié de sa hauteur A D, le carré fait sur cette moyenne proportionnelle que nous appellerons $a\,b$, sera équivalent au triangle, car on aura cette proportion :

$$\frac{AD}{2} : ab :: ab : CF,$$

d'où il vient

$$\frac{AD}{2} \times CF = \overline{ab}^2.$$

Or, l'aire d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur (106).

122. Faire un triangle qui soit équivalent à un polygone donné.

Sol. Soit FBCDG (fig. 77) le polygone donné, tirez la diagonale CF, puis par le sommet de l'angle B du polygone menez une parallèle indéfinie à cette diagonale, elle rencontrera en A le côté prolongé GF du polygone, vous aurez le quadrilatère ABCF; tirez encore la diagonale AC, il en résultera deux triangles FCA, FCB, ce dernier fait partie du polygone donné BCD....

Considérant que ces deux triangles ont pour base commune la diagonale CF, et qu'ils ont en outre leurs sommets A, B sur AB parallèle à CF (97), ces triangles ont même base et même hauteur, donc ils sont équivalents (100). Donc on peut mettre FCA à la place de FCB;

mais FCB faisait tout entier partie du polygone donné FBCD.... on l'en a retranché par la diagonale CF, après quoi il restait le quadrilatère FCDG; ajoutant FCA à ce quadrilatère, on aura le nouveau quadrilatère ACDG équivalent au polygone FBCD...

Si par les points C, G on tire la diagonale CG, on détachera du polygone le triangle CDG; menant ensuite DE parallèle à CG, on aura les deux triangles CGD, CGE.... la suite de la démonstration est la même que celle de la précédente.

Définitivement on aura le triangle ACE équivalent au pentagone FBCDG.

Remarque. Quel que soit le nombre des côtés d'un polygone donné, on le réduit facilement en un triangle, en retranchant successivement un triangle qui en fgit partie, et procédant comme il vient d'être pratiqué.

Il va sans dire qu'on peut réduire au moyen de ce procédé un polygone quelconque, qui ait 1, 2.... côtés de moins, et qui lui soit toujours équivalent.

123. Construire un rectangle qui soit équivalent à un carré donné (X) (fig. 78), et dont la base et la hauteur ajoutées soient égales à une ligne donnée AB.

Sol. Du milieu de AB comme diamètre décrivez une demi-circonférence AEB, et par un point E ou F pris à une distance de AB égale au côté du carré (X) menez à AB la parallèle FE; et du point E par où cette parallèle coupera la demi-circonférence abaissez sur AB la perpendiculaire ED, cette ligne sera moyenne proportionnelle entre les segments AD, DB du diamètre (112), de sorte qu'on aura :

AD : ED : : ED : DB, et faisant le produit des moyens et des extrêmes :

$$\overline{ED}^2 = AD \times DB.$$

D'où il suit que le rectangle qui a pour base AD et pour hauteur DB dont la somme égale la ligne donnée AB, équivaut au carré fait sur ED égal au côté du carré donné (X).

124. Problème. Faire un carré qui soit équivalent à deux carrés donnés.

Sol. Ayant formé un angle droit, soit en élevant une perpendiculaire sur une autre ligne, soit en décrivant une demi-circonférence (83), (fig. 58), portez sur les côtés de cet angle prolongés suffisamment, et à partir du sommet, le côté de chacun des carrés donnés, et joignez leurs extrémités par une droite, vous aurez ainsi formé un triangle rectangle, dont cette droite sera l'hypoténuse, et le carré fait sur cette ligne sera équivalent à la somme des deux carrés donnés (109).

125. Problème. Faire un polygone d'un nombre de côtés quelconque, qui soit équivalent et semblable à la somme de deux autres polygones donnés, et semblables entre eux.

Sol. Prenez deux des côtés homologues des deux polygones donnés, portez-les sur les côtés d'un angle droit, et opérant comme dans le numéro précédent, l'hypoténuse du triangle rectangle que vous avez formé sera le côté homologue du polygone demandé ; opérez pour le reste comme il est enseigné (67).

Des polygones réguliers et du cercle.

126. On a dit (49) qu'un polygone est dit *régulier* lorsque tous ses côtés sont égaux entre eux, ainsi que ses angles ; le plus simple de ces sortes de polygones est le triangle équilatéral ; vient ensuite le carré, etc.

127. Th. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont des figures semblables.

Sol. Soient par exemple les deux hexagones A B C D E F (fig. 79) et A B C D E... (fig. 80), il a été démontré (53) que la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux droits que le polygone a de côtés, moins deux; la somme des angles de ces hexagones est la même dans l'une et l'autre figure : elle vaut huit angles droits; chacun des angles des deux hexagones est égale au sixième de cette somme, qui est $\frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$ angle droit; ces deux polygones sont donc équiangles; de plus leurs côtés homologues sont proportionnels, car ces côtés sont de part et d'autre égaux entre eux; par conséquent on a les proportions, à partir du point A de l'une et l'autre figure : A C (fig. 79) : A B (fig. 80) : : C D : B C : : D B : D L; les deux polygones ayant leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels sont semblables : car on pourrait les placer l'un dans l'autre comme le sont les hexagones A B C D... a b c d... (fig. 81) de manière que tous les côtés fussent réciproquement parallèles (55).

128. Th. Le côté de l'hexagone A C D B... (fig. 79) est égal au rayon du cercle circonscrit.

Sol. Du centre O du cercle circonscrit, tirons les rayons O A, O C aux angles A, C du polygone, nous formerons le triangle A O C, lequel est équilatéral, car l'angle A O C ayant son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc A C ou le sixième de la circonférence ; les six côtés de l'hexagone régulier inscrit peuvent être considérés comme des cordes égales; or, la somme de tous les angles que l'on peut former autour du point O égale exactement celle de quatre droits (20), donc AOC est le $\frac{1}{6}$ de quatre droits, ou les $\frac{2}{6}$ de deux angles droits, qui sont la somme des trois angles d'un triangle (37); si l'on retranche $\frac{2}{6}$ de cette somme ou de $\frac{6}{6}$ il restera $\frac{4}{6}$ pour la valeur des deux autres angles A, C du triangle ou $\frac{2}{6}$ pour chacun, car ces angles sont égaux comme opposés à des côtés égaux AO, CO rayons d'un même cercle; le triangle AOC est donc équiangle, et par conséquent il est équilatéral; donc AC = CO; donc le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.

Il suit de la démonstration qui précède que pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle, il suffit de porter à la suite de lui-même le rayon de ce cercle sur la circonférence; on trouvera toujours qu'il y va six fois exactement; de là suit cette croyance vulgaire que le diamètre de tout cercle (ou deux rayons) est le tiers de la circonférence.

129. Quant au triangle équilatéral inscrit ADE, et que l'on forme en joignant trois des angles de l'hexagone non consécutifs, comme la figure (79) le fait voir clairement, quelle est la longueur de l'un de ses côtés, de AD par exemple, comparée à celle du rayon du cercle circonscrit? ayant tiré le diamètre AB, on a le triangle ADB rectangle en D, parce que les côtés de cet angle D qui a son sommet à la circonférence, s'appuient sur le diamètre (80); AB est donc une hypoténuse, et l'on a :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \text{ (109).}$$

Mais AB vaut deux fois le rayon BO; BD comme côté de l'hexagone inscrit est aussi égal à BO, c'est donc comme si l'on avait.

$$\overline{AD}^2 = (2\,BO \text{ élevés au carré}) - \overline{BO}^2.$$

Or, le carré de $2BO = 4\overline{BO}^2$, il vient donc $AD = 4\overline{BO}^2 - \overline{BO}^2 = 3\overline{BO}^2$

Représentant par 1 la longueur du rayon BO, on a pour résultat définitif.

$AD = \sqrt{3}$; donc le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon comme la racine carrée de 3 est à 1.

130. **Problème.** Inscrire un carré dans un cercle.

Sol. Ayant tiré un diamètre, n'importe dans quel sens, coupez-le en deux parties égales (28), au moyen d'une perpendiculaire, laquelle passera par le centre ; ces deux lignes réciproquement perpendiculaires, ou ces deux diamètres détermineront quatre points également distants sur la circonférence ; joignez ces points par des cordes, et vous aurez un carré dont les quatre angles auront leur sommet à la circonférence ; soit ce carré inscrit EGFH (fig. 72) dont les quatre angles E, G, F, H sont à la circonférence d'un cercle ; pour connaître le rapport qui existe entre le rayon du cercle circonscrit et les côtés de ce carré, considérez le diamètre EF comme hypoténuse du triangle EGF rectangle en G, lequel triangle est isocèle ; EG, GF étant égaux comme côtés d'un même carré ; d'où il suit qu'on a

$$\overline{EF}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 = 2\overline{EG}^2.$$

Supposant que le rayon du cercle soit 1, EF le diamètre sera 2, et son carré sera 4 ; on aura donc $4 = 2\overline{EG}^2$, ou bien $\overline{EG}^2 = 2$; $EG = \sqrt{2}$; or, le rayon est représenté par 1, donc EG côté du carré inscrit est au rayon du cercle comme la racine carrée de 2 est à l'unité.

131. **Problème.** Un polygone régulier *abcd*.. (fig. 81)

inscrit dans un cercle étant donné, circonscrire au même cercle un polygone semblable.

Sol. Par le point G, milieu de l'arc bc, menez une tangente à cet arc, ce qui revient à élever une perpendiculaire à l'extrémité du rayon OG (83) ; cette tangente BC sera parallèle à bc; ces deux lignes sont l'une et l'autre perpendiculaires au rayon OG, lequel aboutissant au milieu de l'arc bGc est perpendiculaire sur le milieu de la corde bc qui soustend cet arc (74).

Prolongez les rayons Ob, Oc jusqu'aux points B, C de la tangente, vous aurez les deux triangles semblables Obc, OBC ; ils ont l'angle O commun, et les angles b, B, c, C, sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles; on a donc Ob : OB :: Oc : OC : : bc : BC; on démontrerait de la même manière que les triangles Odc, ODC sont aussi semblables.... D'où il suit que le polygone circonscrit est semblable au polygone inscrit ; d'où il suit encore que les côtés et les angles du polygone ABCD.. sont égaux entre eux, puisqu'il en est ainsi dans le polygone inscrit $abcde$...

Si le polygone donné ABCD.... (fig. 81) est circonscrit, il sera très facile d'en inscrire un semblable dans le même cercle : après avoir tiré du centre O du cercle aux angles A, B, C, D..... du polygone circonscrit, les lignes OA, OC, OD.... on n'aura qu'à joindre par des cordes ab, bc, cd.... les points a, b, c, d.... par lesquels les lignes OA, OC, OD.... couperont la circonférence du cercle inscrit ; on formera ainsi le polygone inscrit $abcd$....

132. Th. L'aire ou la surface d'un polygone régulier est égale à son périmètre (son contour), multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

Sol. Soit le polygone régulier ABCDE..., (fig. 81), composé de six triangles tous égaux à BOC ; ce dernier a pour mesure sa base BC multipliée par la moitié de OG sa hauteur (106) ; OG est le rayon du cercle inscrit au polygone; or, BC est un des côtés du polygone régulier ; il est de plus évident, sans démonstration, que son périmètre égale 6 BC : car BC = CD = DE = EF... donc la surface du polygone est exprimée par la somme des côtés AB, BC, CD... qui forment son contour, multipliée par la moitié du rayon du cercle inscrit; si le polygone était isolé, ou qu'il fût inscrit dans le cercle, tel que *abcde*.. (fig. 81), et qu'on voulût en calculer la surface sans avoir égard au cercle circonscrit, on ferait le produit de la somme de ses côtés par la moitié de O*g* perpendiculaire abaissée du centre O sur le côté *bc* : en effet, le triangle *b*O*c* a pour mesure sa base *bc* multipliée par la moitié de O*g* ; mais il est évident que les triangles *b*O*c*, *c*O*d*, *d*O*e*.... sont égaux entre eux ; donc ils ont tous pour mesure le côté du polygone qui leur sert de base, multiplié par la moitié de O*g*.

133. Th. Les contours des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme leurs côtés, ou comme les rayons des cercles inscrits ou circonscrits, et les surfaces de ces mêmes polygones sont aussi entre elles comme les carrés de leurs côtés, ou même comme les carrés des rayons des cercles qui leur sont inscrits ou circonscrits.

Sol. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont nécessairement des figures semblables, qui sont composées de triangles semblables ; or, il a été démontré (68) que les contours des figures semblables sont entre eux comme leurs côtés homologues ; il a été démontré également que les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues (114); il serait donc oiseux, superflu, de prouver que des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, et qui sont composés d'un certain nombre de triangles semblables, que leurs périmètres sont entre eux comme les côtés homologues de ces triangles composants; et leurs surfaces comme les carrés des côtés homologues de ces triangles.

Soient deux polygones réguliers A et B d'un même nombre de côtés, et que le premier soit composé de triangles tels que ABC, et le second d'un même nombre de triangles *abc* semblables à ABC (fig. 82), on aura AB : *ab* : : AC : *ac*, et aussi surface de ABC est à celle de *abc*, comme $\overline{AB}^2$ est à $\overline{ab}^2$ (119)

Si donc le polygone A contient le triangle ABC 9 fois et le polygone B un même nombre de fois le triangle *abc*, on pourra dire que sous tous les rapports poly. A : poly. B : : ABC : *abc*.

134. Th. Les cercles sont, absolument parlant, des polygones réguliers parfaitement semblables entre eux.

Sol. Cette proposition est incontestable : car on peut se représenter la circonférence de tout cercle comme un polygone régulier composé d'un nombre infini de côtés égaux entre eux; cette supposition n'a rien d'absurde. Soient deux cercles A et B; que le premier ait un décimètre de diamètre et le second un centimètre, si l'on divise leurs circonférences en cent millions de parties, et que l'on tire des cordes qui joignent ces divisions, on aura deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, dont les périmètres différeront de bien peu des circonférences des deux cercles; et si ces circonférences étaient divisées en un nombre infini de parties, elles ne différeraient en rien des contours des polygones qui leur seraient inscrits ou circonscrits.

D'où il suit que les cercles jouissent des mêmes propriétés que les polygones réguliers et semblables entre eux.

Ainsi donc leurs circonférences (ou périmètres) sont entre elles comme leurs rayons, leurs diamètres ; et leurs surfaces comme les carrés de leurs rayons, de leurs diamètres et même de leurs circonférences.

135. Th. La surface du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, ou à la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.

Sol. Le cercle étant, comme on l'a fait observer (134), un polygone régulier d'une infinité de côtés, sa surface doit être égale à son périmètre (circonférence) par la moitié du rayon (132); le cercle, en effet, peut être considéré comme composé d'une infinité de triangles égaux, qui ont tous leurs bases à la circonférence et dont les hauteurs sont égales à son rayon.

136. Remarque. Il suit de ce qui précède que la surface du secteur DCE (69) (fig. 46) est égale au produit de l'arc DE, multiplié par la moitié du rayon du cercle AHB... dont il fait partie.

Supposons que l'arc DE soit le sixième de la circonférence entière, la surface du secteur sera aussi le sixième de celle du cercle AHB... il n'est pas absurbe de se représenter le secteur comme une partie aliquote du cercle.

137. Remarque deuxième. Pour avoir la surface d'un segment (69) ABF (fig. 82), il faut d'abord calculer celle du secteur AFBC, puis retrancher du total celle du triangle ABC, le reste exprimera la surface du segment ABF.

138. Th. Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre.

Sol. La méthode par laquelle on obtient le résultat le plus satisfaisant, consiste à calculer les périmètres de deux polygones semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle; et en subdivisant et multipliant indéfiniment les côtés de ces polygones on obtient ainsi deux séries de nombres qui se rapprochent sans cesse, c'est-à-dire que celle qui exprime le périmètre du polygone inscrit augmente, tandis que celle qui représente le contour du polygone circonscrit diminue.

Il est en effet facile de comprendre que le périmètre du polygone inscrit *abcde*.. (fig. 81) est moindre que la circonférence du cercle : et, par exemple, il est évident que l'arc *b*G*c* est plus grand que la corde *bc;* il n'est pas moins évident que le côté BC du polygone circonscrit est plus grand que l'arc *b*G*c*; si vous en doutez, considérez GC et CH, la somme de ces deux moitiés de deux côtés du polygone circonscrit est plus grande que le·développement de l'arc G*c*H.

Si l'on multipliait les côtés des deux polygones *abcd*.., ABCD..., on comprend aisément que ces deux polygones se rapprocheraient de la circonférence du cercle.

Voici une idée du procédé que l'on peut employer pour atteindre le but d'une manière satisfaisante.

139. Soit l'hexagone inscrit ABCD.... (fig. 80); il a été prouvé (128) que son contour égale six fois le rayon du cercle circonscrit ABCD.... d'où il suit que le rayon de tout cercle est, à une certaine différence près, le sixième de la circonférence; DL est dans ce cas; mais l'on comprend que l'arc DKL, étant développé, est plus grand que DL, corde qui le soustend; si du centre O du cercle circonscrit on abaisse la perpendiculaire O*m* sur la corde DL, cette perpendiculaire coupera DL et l'arc DKL en deux arcs égaux DK, KL (74), les cordes qui

soustendent ces deux arcs peuvent être considérées comme faisant partie d'un polygone régulier de 12 côtés dont le périmètre se rapproche beaucoup plus de la circonférence du cercle circonscrit que celui de l'hexagone ABCD... (138)

140. Cherchons maintenant quel est le rapport DK du nouveau polygone au rayon du cercle circonscrit : le triangle D K m est rectangle en m ; D K est son hypoténuse ; Dm un de ses côtés est la moitié de D L qui égale le rayon ; si nous connaissions la longueur du côté m K, nous aurions facilement celle de l'hypoténuse, en exprimant en nombres cette égalité.

$$\overline{Dm}^2 + \overline{mK}^2 = \overline{DK}^2.$$

Or, pour avoir la longueur de m K, il faut calculer les longueurs des côtés du triangle O mL, rectangle en m dont on connaît l'hypoténuse O L qui est un rayon du cercle, et le côté mL qui est la moitié de ce rayon ; retranchant le carré de m L, du carré de O L, on aura le carré de O m.

Représentons O L par 10 . m L le sera par 5 ; représentons enfin O m, par x, nous aurons :

$$\overline{OL}^2 \text{ (ou 100)} = \overline{mL}^2 \text{ (ou 25)} + \overline{x}^2.$$

Donc $\overline{x}^2 = 100 - 25 = 75$; $x = \sqrt{75}$; la racine carrée de 75 est 8,66.

Si l'on retranche cette quantité qui représente O m, du rayon O K, lequel est représenté par 10, on aura $10 - 8,66 = 1,34$ pour la valeur de m K, dont le carré est 1,7956, lequel ajouté à 25, carré de Dm, on aura 26,7956 pour le carré de l'hypoténuse DK ; faisant l'extraction de la racine, il vient 5,176 pour exprimer la longueur de DK, côté du dodécagone, comparée à celle du rayon.

141. Si l'on s'en tenait à l'hexagone, le rapport approché de la circonférence au rayon, celui-ci valant 10, serait comme 60 est à ce dernier nombre 10; tandis que si l'on fait usage du polygone inscrit de 12 côtés, on trouve que la circonférence est au rayon comme $5{,}176 \times 12 = 62{,}112$ est à 10; par conséquent le diamètre étant 20, il est à la circonférence comme ce dernier nombre 20 est à 62,112, c'est-à-dire, après avoir divisé les deux termes chacun par 20, comme 1 : 3,1056. Opérant de la même manière pour le côté DK, en abaissant sur son milieu le rayon OF, on le partagerait ainsi que l'arc DK en deux parties égales; on calculerait la longueur de la corde qui soustendrait l'arc DF moitié de DFK, comme on a calculé celle de DK qui soustend la moitié de l'arc DKL; le résultat donnerait le contour du polygone inscrit de 24 côtés; opérant toujours de la même manière, on obtiendrait successivement celui des polygones de 48, 96, 192..... côtés.

142. Archimède s'arrêta aux polygones de 96 côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit, et il trouva que le diamètre étant 1, la circonférence est moindre que $3\frac{10}{70}$ et plus grande que $3\frac{10}{71}$; d'où il conclut le fameux rapport $1 : 3\frac{1}{7}$; ou, multipliant les deux termes par 7, :: 7 : 22. Les modernes ont poussé l'exactitude beaucoup plus loin : on a calculé des périmètres de polygones de 12 mille, 30 mille côtés et plus.

143. Remarque. On trouvera dans le *complément* l'exposé de méthodes, au moyen desquelles on calcule le rapport du diamètre à la circonférence jusqu'au degré de précision que l'on peut désirer; toutefois il est bon de

faire observer que le rapport du diamètre à la circonférence n'est jamais exact, lors même qu'on pousserait le calcul à l'infini, ce qui prouve que la *quadrature du cercle* est une chimère.

144. Outre le rapport d'Archimède 7 : 22, on fait encore usage de celui d'*Adrien Metius* plus rapproché, et plus exact : ses deux termes sont 113 : 355, c'est-à-dire que si le diamètre contient 113 parties, la circonférence aura 355 de ces mêmes parties ; remarquez que les chiffres qui composent ce rapport sont les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5 répétés chacun deux fois, dans leur ordre naturel ; ce qui fait que le rapport est facile à retenir de mémoire.

145. Problème. Connaissant le diamètre d'un cercle, calculer sa circonférence.

Sol. Soit exprimé par 4 le diamètre donné, si l'on adopte le rapport 7 : 22, on formera cette proportion :

$$7 : 22 :: 4 : x.$$

Faisant le produit des moyens, et divisant le résultat 88 par l'extrême 7, il vient pour la valeur de x, 12,571.

Si l'on fait usage du rapport 113 : 355, on a la proportion :

$$113 : 355 :: 4 : x.$$

Multipliant 355 par 4, et divisant le produit 1420 par 113, il vient pour la valeur de x, 12,566, résultat plus exact que le précédent, car il vient d'être dit (142) que le rapport 7 : 22 donne une circonférence un peu trop forte.

146. Problème. Si la circonférence est représentée par 18, on établira cette proportion.

$$22 : 7 :: 18 : x.$$

Multipliant 18 par 7, et divisant le produit 126 par 22, le quotient 5,727 exprimera la longueur du diamètre demandé.

QUATRIÈME PARTIE.

DES PLANS, DE LEURS RAPPORTS AVEC DES LIGNES DROITES ET DES ANGLES QU'ILS PEUVENT FORMER ENTRE EUX.

147. Observation. Une droite que l'on applique sur un plan n'importe dans quel sens se confond avec lui (10), si donc cette droite a deux points communs avec le plan, elle ne peut plus s'en séparer.

148. Une droite est perpendiculaire à un plan lorsque, de quelque côté qu'on la considère, elle ne penche nullement vers aucun quelconque des points du contour du plan : telle est la position d'un fil-à-plomb que l'on suspend au-dessus d'un bassin rempli d'eau, la surface du liquide représentant un plan.

149. Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne peuvent jamais se rencontrer, supposé qu'ils soient étendus à l'infini dans tous les sens; d'où il suit que si l'on tire une droite dans l'un des deux plans, cette ligne sera parallèle à l'autre plan; et réciproquement ce dernier plan sera parallèle à la ligne.

150. La ligne par laquelle un plan est censé en couper un autre, est nécessairement une droite; représentez-vous deux plans figurés par deux carreaux de vitre infiniment minces, et parfaitement droits en tous sens; il est évident que si l'un de ces carreaux coupe l'autre, la ligne d'interjection de ces plans sera droite, sans quoi

l'un des carreaux ou tous les deux présenteraient des surfaces courbes ou angulaires.

151. Th. Trois points suffisent pour déterminer la position d'un plan.

Sol. Soient (fig. 83) les trois points A, B, C, joignons ces points par les lignes AB, AC, BC, et supposons que la ligne AB est contenue dans un plan donné; si l'on fait tourner le plan autour de AB comme sur une charnière, lorsqu'il sera arrivé sur le point C sa position sera déterminée; car les lignes CA, CB ayant deux points communs avec le plan se confondront avec lui (147).

Il suit de là que l'angle que forment deux droites AC, BC suffit pour déterminer la position d'un plan: car cet angle détermine celle de trois points, celui du sommet C, et les deux autres A, B pris à volonté sur ses côtés.

Une ligne courbe suffit encore pour déterminer la position d'un plan; il est, en effet, toujours possible de prendre sur cette courbe trois points qui ne soient pas en ligne droite.

152. Th. Si une ligne droite GO (fig. 84.) est perpendiculaire à deux autres CD, HF tirées dans le plan AB, et qui se coupent au point O, où elle rencontre le plan, elle sera perpendiculaire à ce plan, ainsi qu'à toutes les droites tirées dans AB qui passeront par son pied.

Sol. Prenons sur CD, HF, à partir du pied de la perpendiculaire, des longueurs égales OC, OF, OD, OH; et du point G tirons les obliques GC, GH, GD, GF, nous aurons les triangles GOC, GOH, GOD, GOF tous égaux entre eux: ils ont de commun le côté GO; OC, OH, OD.... sont des côtés égaux par construction; de plus ils sont tous rectangles en O; ils ont donc un angle égal, compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (23); donc leurs hypoténuses GC, GH.... sont des obliques égales qui s'écartent également de la perpendiculaire GO; donc cette dernière est perpendiculaire sur le plan AB.

Que si l'on objectait que cela n'est vrai qu'autant que le système, composé de la perpendiculaire GO et des obliques GD, GF, GH.... est dans la position qu'on lui a faite; à cela on répondrait que les points C, F, D, H, qui font partie du plan AB, déterminent la base du système, et que ces points ne pouvant jamais quitter le plan, il s'ensuit que les données du *théorème* ne changeront point quelle que soit la position des points C, F, D, H relativement aux quatre côtés du plan AB.

De là il suit que GO est perpendiculaire sur toute droite qui, comme EO passe par son pied; cette ligne étant tout entière dans le plan, si l'on suppose que tout le système fasse un mouvement de rotation autour de la perpendiculaire GO, de telle sorte que OF aille se confondre avec OE, n'est-il pas évident que l'angle EOG sera droit, et que par conséquent GO sera perpendiculaire sur EO?

153. Th. Les obliques CD, CF, CH (fig. 85) qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire CO, sont égales entre elles, et CG qui s'en écarte davantage est la plus longue.

Sol. Les numéros 25, 26 contiennent implicitement la solution de ce *théorème*; en effet, si du pied O de la perpendiculaire et avec un rayon OD on décrit une circonférence DFH...... et qu'ensuite on joigne les points D, F, H..., pris à volonté sur la circonférence, avec le sommet C de la perpendiculaire, on aura les triangles égaux COD, COF, COH; car ils sont tous rectangles en O; ils ont le côté CO commun, en outre les côtés DO, FO, HO.... sont égaux comme rayons d'un même cercle; donc ces triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; donc ils sont égaux (23) ; donc les obliques ou les hypoténuses sont égales comme s'écartant de la même quantité du pied O de la perpendiculaire.

Quant à l'oblique C G qui s'écarte le plus de la perpendiculaire, elle est plus longue que C H, ce qui a été clairement démontré n° 26 : ces deux lignes étant dans le plan du triangle C O G.

154. **Problème.** D'un point donné C hors d'un plan A B (fig. 85) abaisser une perpendiculaire sur ce plan.

Sol. De ce point donné comme centre, et avec un rayon plus grand que la ligne qui mesure la plus courte distance du point C au plan, décrivez la circonférence D F H ; après quoi, par le procédé du n° 85, cherchez le centre de cette circonférence ; joignez le point O que vous aurez trouvé avec le point C ; C O sera la perpendiculaire demandée.

155. **Problème.** D'un point O (fig. 84) pris sur un plan, élever une perpendiculaire sur ce plan.

Sol. Par ce point O, tirez les lignes indéfinies C D, H F qui se coupent en O, et, par le procédé du n° 29, élevez en O la perpendiculaire G O ; de sorte qu'elle soit perpendiculaire en même temps sur C D, H F.... Elle le sera aussi sur le plan A B (152).

DES ANGLES PLANS.

156. Deux ou plusieurs plans qui se coupent ou se rencontrent forment des angles dits *plans*, par la raison que les côtés de ces angles sont réellement des plans ; le plan A F C D qui coupe en C A le plan A C B F, (fig. 86) forme avec celui-ci un angle *plan*..... les

feuillets d'un livre que l'on ouvre peuvent donner une idée, grossière il est vrai, de ce que l'on doit entendre par un angle plan ; dans cette supposition chacun des feuillets est censé représenter un *plan.*

157. Th. Une droite DE (fig. 86) tirée dans un plan AD, et qui est parallèle à une autre ligne AC, tirée dans un autre plan parallèle à AB, ne saurait jamais rencontrer ce dernier.

Sol. Car pour que DE, étant parallèle à AC, et se trouvant dans le même plan que celle-ci, pût rencontrer le plan AB, il faudrait qu'elle rencontrât sa parallèle CA, seule ligne qui soit commune aux deux plans ; or cela est impossible (39).

158. Th. Deux angles plans sont égaux, lorsque étant placés l'un dans l'autre ils coïncident parfaitement ; ou bien quand, sans changer d'ouverture, les plans qui les forment se confondent réciproquement quelle que soit la figure de ces plans.

Sol. Soient les deux angles dièdres formés par les plans AD, AB, *ad*, *ab* (fig. 86), si après avoir porté *ca* sur CA, les plans qui forment les deux angles se confondent réciproquement ; ou ce qui revient au même si les angles BDC, *bdc* ou GHI, *ghi* sont égaux, les deux angles dièdres sont aussi égaux entre eux : car l'ouverture de ces angles est mesurée par celle des angles linéaires GHI....

159. Th. Un plan HP (fig. 87) est perpendiculaire à un autre plan AB, quand il ne penche ni d'un côté ni de l'autre ; ou bien, lorsqu'une droite EF tirée dans le plan HP, est perpendiculaire à IK ; cette dernière étant aussi perpendiculaire à la ligne d'intersection HG des deux plans ; d'où il suit que les angles EFI, EFK sont droits : donc le plan HP est perpendiculaire sur le plan AB.

160. Toute ligne, qui comme CD tirée dans le plan HP est parallèle à EF est aussi perpendiculaire sur le plan AB.

Sol. CD étant parallèle à EF est perpendiculaire sur la ligne d'intersection HG des deux plans ; mais HP est perpendiculaire sur le plan AB, donc CD ne penche ni vers H ni vers G, ni vers I ni vers K, étant contenue dans le plan HP, perpendiculaire sur le plan AB.

161. Th. La ligne HG (fig. 88) étant perpendiculaire sur le plan AB, tout plan qui passe par HG est aussi perpendiculaire sur AB.

Sol. La vérité de cette proposition se comprend aisément sans démonstration : soit le plan IEFD qui passe par HG ; si par le point G, pied de la perpendiculaire, on tire sur AB, JK perpendiculaire sur ID, ligne d'intersection de IEFD avec le plan AB, les angles HGJ, HGK seront droits : donc le plan IEFD dans lequel se trouve la perpendiculaire HG ne penche d'aucun côté du plan AB ; donc il est perpendiculaire à ce plan.

On démontrerait par un semblable raisonnement que le plan JC qui passe par HG est aussi perpendiculaire sur AB.

162. Th. Deux plans AB, *a b* (fig. 89) qui sont perpendiculaires à une droite C*c*, ne peuvent se rencontrer.

Sol. Puisque les deux plans sont perpendiculaires à la ligne C*c*, cette ligne fait des angles droits avec toutes celles qui sont menées par son pied dans l'un et l'autre plan (152).

Mais on veut que les deux plans se touchent en un point quelconque O ; tirez O*c* et OC, ces lignes, par hypothèse, sont perpendiculaires sur C*c* : d'où il suit que si elles se rencontraient en O, on pourrait de ce point abaisser deux perpendiculaires sur une même ligne, ce qui est impossible (32).

163. Th. Lorsque deux plans parallèles *ab*, AB (fig. 90) sont coupés par un troisième DE, les lignes d'interjection EF, CD sont parallèles entre elles.

Sol. Ces lignes se trouvant dans les plans *ab*, AB, qui par hypothèse sont parallèles entre eux, et de plus dans le plan DE, elles ne sauraient jamais se rencontrer : car s'il en était autrement, les plans *ab*, AB dans lesquels sont tirées ces lignes se toucheraient aussi à leur point de rencontre, ce qui est démontré impossible.

164. Remarque. Les parallèles CE, DF comprises entre deux plans parallèles *ab*, AB sont égales entre elles.

Sol. Puisque ces lignes sont parallèles entre elles, elles se trouvent dans un même plan DFCE ; mais EF, CD étant aussi parallèles entre elles, il s'ensuit que la figure DFCE est un parallélogramme ; donc CE = DF.

165. Remarque deuxième. Il suit encore de ce qui précède, que des perpendiculaires qui sont comprises entre deux plans parallèles sont égales entre elles : car faisant passer un plan par ces perpendiculaires prises deux à deux, on aurait autant de parallélogrammes reçtangles, dont les côtés opposés et parallèles entre eux seraient perpendiculaires à l'un et à l'autre plan.

166. Th. Deux lignes OI, GH (fig. 91) qui rencontrent trois plans parallèles AB, CD, EF sont coupées par ces plans en parties proportionnelles.

Sol. Joignez les points G, I par la droite GI ; tirez encore HI entre les points I, H, par lesquels les droites données rencontrent le plan EF ; joignez aussi les points K, L, P, où les trois droites OI, GH, GI sont coupées par le plan CD ; joignez enfin GO.

Considérant ensuite la figure HGI comme un plan triangulaire qui coupe les plans EF, CD, il s'ensuit que les lignes d'intersection HI, KL sont parallèles (163), il en est pareillement de GO, LP, lignes d'intersection du plan triangulaire OIG avec les plans AB, CD ; on a donc les deux triangles OIG, IGH, dont les côtés sont coupés en parties proportionnelles par KL, LP, parallèles à leurs bases HI, GO ; d'où l'on conclut ces proportions :

GK : KH :: GL : LI ; et,

OP : PI :: GL : LI.

Donc, à cause du rapport commun GL : LI, dans les deux proportions, on a GK : KH : : OP : PI.

167. TH. L'angle compris entre deux plans AFG, ADI peut être mesuré par l'angle linéaire GAI (fig. 92), dont les côtés sont perpendiculaires à la ligne d'intersection CA des deux plans.

SOL. Si au point C on élevait sur CA les perpendiculaires CD, CF, et si ces perpendiculaires se trouvaient dans les plans AD, AF, les angles GAI, FCD seraient égaux, comme ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun, et comme perpendiculaires à CA et tirés dans un même plan, et de plus leurs ouvertures étant tournées dans le même sens.

168. REMARQUE. Il est inutile de démontrer, que si l'angle *dièdre* que forment les deux plans augmente ou diminue l'angle GAI augmente ou diminue dans le même rapport : en effet, si, tournant autour de CA, le côté ID du plan ACD..r. venait se confondre avec HE, côté du plan ACE... l'angle GAI deviendrait GAH....

169. OBSERVATIONS. Les angles formés par deux plans ne diffèrent des angles linéaires qu'en ce que leurs côtés ont une certaine largeur : ainsi, lorsqu'un plan est perpendiculaire sur un autre, il forme avec lui deux angles droits ; et réciproquement, si un plan B, forme avec un autre plan C, deux angles droits, il est perpendiculaire sur ce dernier ; deux plans qui se coupent forment des angles opposés par le sommet qui sont égaux entre eux ; un plan qui en

rencontre un autre, n'importe dans quelle direction, forme avec lui deux angles dont la somme équivaut à celle de deux angles droits ; enfin, lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, il en résulte des angles *correspondants*, *alternes-internes*, etc., etc., qui ont les mêmes propriétés que ceux que forme une sécante avec deux parallèles.

LES ANGLES SOLIDES.

170. On appelle *angles solides* des espaces compris entre plusieurs plans qui passent tous par un certain point, le toit pointu d'une tour, qui est à plusieurs faces, représente assez bien un angle solide. Comme le mot *solide* implique l'idée de quelque chose de plein, de massif, il serait plus exact d'appeler ces sortes d'angles, angles *polyèdres* (angles à plusieurs faces), ces angles n'étant pas toujours pleins.

Il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide.

171. Th. La somme de deux quelconques des trois angles plans, qui forment un angle polyèdre, est toujours plus grande que le troisième, celui-ci, bien entendu, étant plus grand que les deux autres.

Sol. Soit (fig. 93) l'angle polyèdre A B C F, formé par les angles plans A F B, A F C, B F C, et dont F occupe le sommet ; admettons que A F B est le plus grand des trois, la somme des angles A F C, B F C sera dans tous les cas plus grande que A F B.

Dans le plan de A F B, faites B F D = B F C ; tirez arbitrairement la ligne A D B, et ayant pris F C = F D, tirez A C et B C, les deux triangles B F D, B F C sont égaux ; d'abord le côté B F est commun, et C F = D F par construction; les angles BFD, BFC sont aussi égaux par construction; les deux triangles ayant un angle égal compris entre côtés égaux sont égaux (23), donc $BD = BC$.

Mais on a $AB <$ que $AC + BC$ (22), retranchant de part et d'autre les côtés égaux BD, BC, il restera $AD > AC$; les deux côtés AF, FD du triangle ADF sont égaux chacun à chacun aux côtés AF, CF du triangle AFC; mais le troisième AD est plus petit que AC, donc l'angle AFD est plus petit que l'angle AFC; ajoutant $BFD = BFC$, on a $AFD + BFD$ ou $AFB < AFC + BFC$.

172. Remarque. La démonstration du théorème ci-dessus ne laisse rien à désirer, mais elle exige beaucoup d'attention pour ne pas perdre le fil des raisonnements qui conduisent à la solution.

On peut passer outre dans une première lecture.

Voici un moyen simple d'atteindre le même but non avec le même degré d'exactitude, s'entend, mais toutefois avec assez de précision pour convaincre de la vérité de la proposition.

Si l'on joint les points A, B, C, pris à volonté sur les côtés AF, CF, BF des trois angles plans, on aura le triangle ABC, dont les côtés $AC + BC$ sont plus grands que AB (22).

Pour plus de simplicité transportons les angles AFC, CFB, AFB sur un même plan, et faisons DFC (fig. 99) égal AFC; et que CFB et BFA soient les mêmes que ceux de la figure 93, supposons enfin que les côtés DF, CF, BF, AF de ces trois angles sont égaux, ce qui ne changera rien à l'état de la question; ayant tiré DC, CB, BA on aura trois triangles qui, en pliant la figure, si le côté AF allait se confondre avec DF formeraient un angle solide; et dans ce cas, DC, CB, BA deviendraient les côtés d'un même triangle, de sorte qu'on aurait

$$DC + BC > AB.$$

Après avoir mené des parallèles *dc*, *bc*, *ab* à ces droites, on aurait encore

$$dc + bc > ab.$$

Cette expression serait constante quoiqu'on multipliât les parallèles *dc*, *cb*... jusqu'au point F, sommet des trois angles, où elles égaleraient zéro.

Cette démonstration, moins rigoureuse que la précédente, est vraie au fond, et l'on peut s'en contenter dans une première lecture.

173. Th. La somme des angles plans qui forment un angle solide est toujours moindre que celle de quatre droits.

Sol. Soit le polygone AFBED (fig. 94); d'un point quelconque O, menons à ses angles OA, OC, OB...; la somme de tous les angles formés autour du point O, vaut quatre droits.

Par un point C pris au-dessus du polygone, et par ses côtés AD, DE, EB... menons des plans ACD, DCE, ECB... nous formerons l'angle polyèdre C.

Prouvons maintenant que l'un des angles plans qui forment l'angle polyèdre DCE, par exemple, est plus petit que DOE, un de ceux qui sont formés autour du point O, et avec lequel il a de commun le côté DE du polygone.

Il est bon de faire observer que la solution qui suit n'est possible qu'autant que les côtés de l'angle DCE sont plus longs que DO, EO, côtés de l'angle DEO; il pourrait se faire que cela ne fût pas, mais ce serait presque un cas particulier.

Supposons donc que DC est plus grand que DO, et traçons les triangles DCE et DOE (fig. 100), que nous supposons être dans le même cas que ceux désignés par les mêmes lettres dans la figure 94; par le sommet O de l'angle DOE, menons de, parallèle à DE, les triangles Cde, CDE seront semblables (58), de sorte que les angles Cde, CDE seront égaux; il en sera pareillement des angles Ced, CED; la somme des angles de l'un et l'autre triangle dCe, DOE égale deux droits.

Mais les angles afO, faO sont moindres que les angles Ced, Cde, lesquels égalent CED, CDE; donc pour que les trois angles du triangle fOa vaillent deux droits, il faut que l'angle O soit plus grand que l'angle C.

174. Démonstration applicable à tous les cas.

L'angle solide C (fig. 94) étant coupé par un plan quelconque ACBE... prenez à volonté, dans l'intérieur du polygone ABD... un point O, et de ce point menez aux angles du polygone OA, OD, OE....

La somme des angles des triangles ACD, ECD équivaut à la somme des angles des triangles AOD, DOE; mais considérant le point D comme le sommet d'un angle trièdre formé par les trois angles plans ADC, EDC, EDA, ce dernier, qui est le troisième angle plan, qui forme l'angle trièdre dont le sommet est en D, contient les angles ADO, ODE; mais il est prouvé (171) que la somme de deux des trois angles plans, qui forment angle solide, est plus grande que le troisième; donc la somme des angles ADC, EDC est plus grande que celle de ADO + EDO, qui composent le troisième angle plan EDA; considérant le point A comme le sommet d'un autre angle trièdre, formé par les angles plans DAC, FAC, on démontrerait de la même manière que les angles DAO + FAO < FAC + DAC... opérant ainsi jusqu'à ce que l'on ait fait tout le tour du polygone, on en conclura que la somme des angles formés à la base des triangles qui ont leur sommet en C est plus grande que celle des angles des triangles qui ont leur sommet en O, et pour bases, comme les précédens, les côtés du polygone AFBE...; or, si les triangles qui ont leur sommet en C sont au nombre de 5, ils vaudront pris ensemble 10 angles droits; les triangles aussi au nombre de 5 qui ont leur sommet au point O, valent encore 10 droits; mais la somme des angles qui sont formés à la base de ces derniers triangles est moindre que la somme des angles des triangles qui ont leur sommet en C; d'où il suit que, pour établir l'égalité, il est nécessaire que la somme des angles qui ont leur sommet en O soit supérieure à celle des angles qui ont le leur en C; mais la somme des angles formés autour du point O égale quatre droits, donc la somme des angles plans qui forment l'angle polyèdre C est moindre que quatre angles droits.

CINQUIÈME PARTIE.

LES POLYÈDRES.

Définitions et explications. 1° Tout espace fermé de tous côtés par des plans ou des surfaces planes s'appelle *polyèdre*; il va sans dire que les contours de ces plans doivent être des lignes droites; car on conçoit qu'il serait absolument impossible de fermer un espace de tous côtés avec des plans circulaires, de faire une boîte, par exemple, dont toutes les faces seraient des cartons taillés en rond.

2° Le plus simple des polyèdres est le *tétraèdre*, formé de quatre plans triangulaires; on comprend qu'on ne peut fermer un espace de tous côtés avec moins de quatre plans; en effet, les trois angles plans qui forment un angle *trièdre* laissent une ouverture du côté de la base de l'angle qui, pour être fermée, exige au moins l'application d'un quatrième plan.

Le tétraèdre est aux autres polyèdres ce que le triangle est aux polygones.

3° On appelle *polyèdres réguliers*, ceux qui sont formés de polygones réguliers égaux, et dont tous les angles polyèdres sont aussi égaux entre eux.

4° Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme*, il est formé d'un certain nombre de parallélogrammes ABFG, AEGK, EDKI.... (fig. 96) et de deux polygones égaux ABCDE, GFHIK, dont les plans sont parallèles entre eux ; ces polygones sont réguliers ou irréguliers, c'est indifférent.

Les polygones ABC... GFH... s'appellent les *bases* du prisme; les parallélogrammes ABFG... forment sa surface *latérale* ou *convexe*.

Le plus simple de tous les prismes est celui dont les bases sont des triangles; AFBEH (fig. 97) qui a pour bases les triangles ABD, FEH est dans ce cas.

La *hauteur* d'un prisme est mesurée par la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de sa base supérieure sur le plan de la base inférieure.

Un prisme est *droit*, quand les plans de tous les parallélogrammes qui forment sa surface latérale sont perpendiculaires sur les plans de ses bases.

Dans tout autre cas le prisme est *oblique*.

On distingue les prismes par le nombre des côtés des polygones dont les plans forment leurs bases; ainsi, un prisme est *triangulaire*, *quadrangulaire*.... suivant que ses bases sont des triangles, des quadrilatères.

5° Le prisme, qui a pour base un parallélogramme, s'appelle *parallélépipède*; toutes les faces de ce prisme sont des parallélogrammes; et ces parallélogrammes sont toujours au nombre de six ; CHFD (fig. 97) est un parallélépipède.

Le parallélépipède est *rectangle*, lorsque toutes ses faces sont des rectangles ; parmi les parallélépipèdes rectangles, on distingue le *cube*, formé de six carrés égaux ; un *dé à jouer* présente la forme d'un cube.

6° La *pyramide* est un polyèdre, formé par un plan polygonal AFBED (fig. 94) et par des plans triangulaires ACD, DCE, ECB... qui passent tous par le point C.

Le polygone ACB... s'appelle la *base* de la pyramide, le point C en est le *sommet*, et l'ensemble des plans triangulaires ACD, DCE... forme la surface *convexe* ou *latérale* de la pyramide.

La *hauteur* de la pyramide est la perpendiculaire abaissée de son sommet sur le plan de la base, étendu s'il est nécessaire.

La pyramide est triangulaire... pentagonale... suivant que le plan de sa base a la figure d'un triangle... d'un pentagone....

Une pyramide est *régulière*, lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et que les plans qui forment sa surface convexe sont des triangles égaux entre eux; ou bien quand la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base passe par le centre de cette base.

7° La diagonale d'un polyèdre est toute droite qui joint les sommets de deux angles solides non adjacens.

175. Th. Deux polyèdres sont semblables, lorsque tous les plans polygonals qui forment leurs faces sont semblables et semblablement disposés.

Sol. Soient les deux pyramides triangulaires ABCD, $abcd$ (fig. 95); puisque les faces homologues sont semblables, on a :

Base ABD : base abd : : ADB : adb : : ACD : acd; prenons sur AD une quantité $\mathrm{D}a = da$, sur BD, $\mathrm{D}b = db$; sur DC, $\mathrm{D}c = dc$; le plan ou base abc sera parallèle à ABC, et la pyramide $abc\mathrm{D}$, égale à $abcd$, sera parfaitement semblable à ABCD : car toutes les faces de ces pyramides sont des triangles semblables chacun à chacun.

176. Th. Deux prismes sont égaux, lorsque les polygones qui leur servent de bases sont égaux, et que les perpendiculaires comprises entre ces bases, lesquelles mesurent les hauteurs des prismes, sont aussi égales entre elles.

Sol. Quand les prismes sont droits comme ceux de la figure 96, et que l'on a base FHK = base *fh..k*, le théorème est évident sans démonstration ; car les deux prismes étant droits, on a rectangle GAEK = *gaek*; BAGF = *bagf*...

Pourvu que les bases et les hauteurs des deux prismes soient égales, et que toutes leurs arêtes soient parallèles, ou penchent exactement du même côté, les deux prismes quoique obliques seront équivalens; car, si deux prismes droits devenaient obliques, les rectangles qui forment leurs surfaces convexes se déformeraient de la même manière, et produiraient des parallélogrammes obliques ou rectangles qui seraient toujours égaux chacun à chacun.

177. Th. Dans tout parallélépipède, les plans opposés sont égaux et parallèles.

Sol. Un parallélépipède est un prisme dont toutes les faces sont des parallélogrammes, et ceux de ces parallélogrammes qui sont opposés sont égaux et parallèles: tel est le parallélépipède ABDFE... (fig. 97), on voit que ses faces sont au nombre de six ; or, d'après la définition du prisme, les bases parallèles ABCD, FHEG sont égales entre elles. Pour démontrer que la face BCGE = ADFH, on n'a qu'à faire observer que AD, FH sont égaux comme côtés opposés d'un même parallélogramme; FH et GE, côtés opposés du parallélogramme GHE.... sont aussi égaux ; mais GE, BC sont égaux comme côtés opposés du parallélogramme GBE.... on a donc AD=FH=GE=BC ; on démontrerait avec la même facilité que AF=CG= BE ; donc les deux parallélogrammes ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; de plus, ils sont parallèles, car les droites AC, BD, GF, HE qui sont comprises entre eux sont égales et parallèles.

178. Remarque. Un parallélépipède est déterminé quand on connaît les trois parallélogrammes qui forment un de ses angles trièdres; si, par exemple, on connaît les trois parallélogrammes AG, CD, AH qui forment l'angle trièdre A (fig. 97), on aura le parallélépipède, car, tirant GE, égal et parallèle à CB, puis BE parallèle à CG, on formera le parallélogramme égal et parallèle à AH; procédant de la même manière, on formerait le parallélogramme GH égal et parallèle à CD....

179. Th. Les diagonales menées par les sommets des angles opposés A,E; F,B d'un parallélépipède (fig. 97) se coupent mutuellement en deux parties égales.

Sol. Supposons un plan qui passe par les sommets de ces angles, nous aurons le parallélogramme ABFE, car AF = BE (177), AB, FE sont égales comme diagonales de deux parallélogrammes égaux et parallèles; or, il est démontré (51) que les diagonales de tout parallélogramme se coupent mutuellement en parties égales; donc les diagonales AE, FB se coupent mutuellement en deux parties égales dans le plan ABFE.

180. Th. Le plan ABFE (fig 97), qui passe par deux arêtes opposées, AF, BE, divise le parallélépipède en deux prismes triangulaires ABCFEG, ABDFEH égaux entre eux.

Sol. Le plan ABFE passant par les arêtes opposées, AF, BE, divise les parallélogrammes ABCD, FEGH en deux triangles égaux (50), donc les bases triangulaires ABD, FEH du prisme ADE.... sont égales aux bases ABC, FEG du prisme BGF; les faces latérales de ces deux prismes sont aussi égales entre elles chacune à chacune; le plan ou le parallélogramme coupant est commun, et il a été suffisamment prouvé que les parallélogrammes ADHF, CBEG sont égaux....

181. Th. Deux parallélépipèdes, qui ont même hauteur, et dont les bases sont des parallélogrammes égaux en surface, sont équivalents.

Sol. Soient les deux parallélépipèdes ABCDEFGH, *abcdefgh* (fig. 101) ; si l'on accorde que la base ABCD $= abcd$, et que EFGH $= efgh$, et de plus que ces bases sont comprises entre deux mêmes plans parallèles, ce qui fait nécessairement que les deux prismes ont même hauteur, on prouvera presque sans démonstration, que ces parallélépipèdes sont équivalens; pour cela on taillera un certain nombre de cartons tous égaux à la base ABCD, et les empilant les uns sur les autres, on en formera à volonté le parallélépipède droit ABCDEFGH ou le parallélépipède oblique *abcdefgh*. Si l'on objecte que les faces de ce dernier ne seront pas régulières à cause des ressauts produits par l'épaisseur des cartons, on répondra que cette irrégularité serait inappréciable, si les cartons étaient infiniment minces.

182. Th. Deux prismes qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalens, quelle que soit la figure de ces bases.

Sol. 1° Soient (fig. 96) les deux prismes ABGK, *abgk*, qui ont pour bases des pentagones égaux et des hauteurs égales, c'est-à-dire que les bases de ces prismes sont comprises entre deux plans parallèles; si ces deux prismes sont droits, ils sont non-seulement équivalens, mais parfaitement égaux; car, si on partageait l'un et l'autre en tranches de même épaisseur, et parallèles à leurs bases, on en trouverait un nombre égal dans l'un et l'autre.

Afin de rendre la démonstration palpable, taillez un certain nombre de cartons tous égaux à la base ABCDE, formez-en deux piles droites; si le nombre des cartons est le même dans l'une et l'autre, les hauteurs des deux piles seront égales.

2° Le théorème ne cessera pas d'être vrai quoique l'un des deux prismes ABDG... (fig. 98) soit droit, et l'autre *abdg*... de même base et de même hauteur que lui, soit oblique ; leurs bases et leurs hauteurs étant égales, on pourra les partager en un même nombre de tranches de même épaisseur, et toutes égales au pentagone ACDB....

D'ailleurs ayant taillé des cartons égaux au pentagone ACDBF, on en formera deux piles, une droite, l'autre oblique; si elles sont de même hauteur, elles contiendront autant de cartons l'une que l'autre.

183. Th. Tout parallélépipède oblique peut être converti en un parallélépipède rectangle équivalent, qui aura même hauteur, et une base équivalente à la sienne.

Sol. Si la base AB (fig. 102) du parallélépipède oblique est un rectangle, élevez à ses quatre angles les perpendiculaires *ab*, *fe*, *cd*, *gh*, toutes égales à la ligne qui mesure sa hauteur; faites ensuite passer un plan par *ebdh*, il sera parallèle à AB, puisque ces deux plans comprendront entre eux des lignes perpendiculaires égales.

Faites ensuite passer des plans par *fegh*, *abcd*, *abfe*, *ghcd*, il en résultera un parallélépipède rectangle ; car toutes ses faces consécutives seront réciproquement perpendiculaires, et ce parallélépipède ayant même hauteur et même base que le parallélépipède oblique sera son équivalent.

Dans le cas où la base du parallélépipède ne serait pas un rectangle, mais bien un parallélogramme oblique, tel que ABCD (fig. 103), on convertirait ce parallélogramme en un rectangle équivalent, en abaissant du point B sur AD la perpendiculaire BF, et du point C la perpendiculaire CE sur AD, prolongé jusqu'en E; le rectangle BFCE serait équivalent au parallélogramme ABCD, puisqu'il aurait même base et même hauteur que lui (98).

Cela fait, on opérerait comme il vient d'être enseigné ci-dessus, les conditions du problème étant maintenant les mêmes.

184. Problème. Convertir un prisme quelconque en un parallélépipède rectangle équivalent.

Sol. Si la base du prisme est un triangle quelconque, convertissez-le en un carré équivalent par le procédé du n° 121, élevez ensuite aux quatre angles de ce carré des perpendiculaires égales à la hauteur du prisme donné... (183)

Si la base du prisme est un polygone autre qu'un triangle, convertissez-le en triangle, procédant comme il est enseigné, n° 122; le reste de l'opération comme ci-dessus.

185. Th. Deux parallélépipèdes rectangles, qui ont même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.

Sol. Si l'on admet que les parallélépipèdes rectangles AB, LK (fig. 104), ont des bases égales au rectangle AFDE, ils sont nécessairement entre eux comme leurs hauteurs AC, LG : en effet, prenons une certaine mesure, soit un *centimètre*, et supposons que AC en contient 11, et GL, 8 ; partageant AC en 11 parties égales, et faisant passer par ces divisions autant de plans parallèles à la base AFDE, on aura 11 parallélépipèdes qui, ayant même base et même hauteur, seront égaux (181); or, la somme de ces parallélépipèdes sera évidemment équivalente au volume du parallélépipède AB.

Si l'on partage de la même manière la hauteur LG du parallélépipède LK en 8 parties égales, il en résultera 8 parallélépipèdes égaux à ceux que contient le parallélépipède AB ; les deux prismes seront donc entre eux : : 11 : 8 ou comme la hauteur AC est à la hauteur LG.

Si les hauteurs AC, LG n'ont pas de commune mesure, on les supposera divisées en une infinité de parties égales ; selon cette hypothèse, les deux parallélépipèdes seraient divisés en une infinité de parallélépipèdes égaux, voir le n° 117.

186. Remarque. Il est presque superflu de faire observer que deux parallélépipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

En effet, soient deux parallélepipèdes rectangles P, Q; que le premier ait pour base le rectangle AB (fig. 105), et le second le rectangle LD; si, après avoir partagé AB en 12 petits rectangles, on trouve que CD en contient 4, les deux parallélépipèdes qui auront pour bases AB, CD, et dont la hauteur sera mesurée par EF seront entre eux comme 12 est à 4.

On comprend qu'il serait possible de placer sur AB 12 parallélépipèdes, qui auraient tous pour hauteur EF, et pour base le carré *abcd*; CD pourrait servir de base à 4 de ces parallélépipèdes, etc....

MESURE DES VOLUMES.

187. Pour se faire une idée exacte des solides ou volumes, on choisit un volume quelconque pour servir de terme de comparaison, lequel est le plus souvent un *cube*, c'est-à-dire un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont égales à une certaine mesure de longueur, comme un *mètre*, un *décimètre*, un *centimètre*...

Nous avons vu (90) que, pour évaluer les surfaces ou l'étendue à deux dimensions, on les rapportait à un certain *carré* dont la longueur linéaire du côté était déterminée; les volumes ayant les trois dimensions, doivent être rapportés à une mesure qui les ait aussi; le cube ou le carré-carré a cette propriété; supposons que le côté d'un carré soit 2, sa surface sera exprimée par 4; le côté d'un cube étant aussi 2, son volume sera exprimé par $8 = 2 \times 2 \times 2$.

188. Th. La solidité d'un parallélépipède rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Sol. Supposons que la base du parallélépipède est le rectangle ABCD (fig. 106), et sa hauteur DG; soit (X) le cube qu'on a choisi pour terme de comparaison, dont les trois dimensions sont égales à ab; supposons que ab est contenu sur AB 4 fois et 3 fois sur AD; tirant par ces divisions des parallèles à DA et à BA, on partagera le rectangle ABCD en 12 petits carrés dont les côtés seront égaux à ab côté de la base du cube (X); d'où il suit qu'on pourrait placer sur le rectangle ABCD, 12 cubes égaux à (X).

Supposons enfin que le côté ab du cube est contenu 3 fois sur la hauteur DG du parallélépipède; il s'ensuit que le volume de ce solide égale 3 fois 12 ou 36 fois celui du cube (X), cela est évident : que l'on se représente une surface rectangulaire couverte exactement par 12 briques.... 3 assises pareilles de mêmes briques en contiendront 36.

189. Remarque. La solidité d'un parallélépipède est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Car, il a été prouvé qu'un parallélépipède quelconque est équivalent à un parallélépipède rectangle dont la base est équivalente à la sienne (183), et qui est de même hauteur que lui; or, il est démontré (188) que la solidité d'un parallélépipède rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur. Donc...

190. Remarque deuxième. Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélépipède.

Soit le prisme triangulaire ABCEF (fig. 107), qui a pour base le triangle BCD; ce triangle est évidemment la moitié du parallélogramme AB CD partagé en deux triangles égaux par la diagonale BC; si donc on formait sur le parallélogramme ABDC un parallélépipède qui eût une hauteur égale à celle du prisme BCF, ce parallélépipède serait en solidité le double de ce prisme; or, la solidité du parallélépipède est égale au produit de sa base par sa hauteur; donc celle du prisme égale au produit de sa base, moitié de celle du parallélépipède, par sa hauteur est la moitié du parallélépipède.

191. Remarque troisième. Un prisme quelconque peut être partagé en autant de prismes triangulaires de même hauteur, que l'on peut former de triangles dans le polygone qui lui sert de base; mais la solidité d'un prisme triangulaire est égale au produit de la base par sa hauteur; donc la somme de tous les prismes partiels qui ont même hauteur est égale au polygone qui leur sert de base, multiplié par la hauteur commune. Or, ce polygone est la base du prisme donné, donc la solidité de tout prisme est égale au polygone qui lui sert de base, multiplié par sa hauteur.

Observation. De ce qui précède, il suit que deux prismes qui ont des bases équivalentes sont entre eux comme leurs hauteurs; et réciproquement, si leurs hauteurs sont égales, ils sont entre eux comme leurs bases.

192. Th. Un plan *abcd* qui coupe une pyramide ABCDK (fig. 108) parallèlement à la base ABCD, coupe tous les côtés AK, BK.... de cette pyramide ainsi que sa hauteur en parties proportionnelles, et les polygones *abcd*, ABCD sont semblables.

Sol. Par hypothèse, les plans *abcd*, ABCD sont parallèles, leurs intersections *ab*, AB par un troisième plan ABK sont aussi parallèles (163); d'ailleurs, prenant isolément le triangle ABK; *ab*, parallèle à sa base AB, coupera ses deux côtés AK, BK en parties proportionnelles (48); il en est semblablement de *bc* par rapport à BC..... de sorte qu'on a AK : *a*K :: BK : *b*K :: CK : *c*K.... quant à la hauteur KO de la pyramide, tirant BO et *b o* dans les deux plans parallèles, on a le triangle BKO, lequel donne BK : *b*K :: OK : *o*K.... car BO et *b o* sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième qui est BKO.

Puisque *ab*, AB et BC, *bc* sont parallèles, l'angle ABC $=$ *abc*; l'angle BCD $=$ *bcd*.... ces angles ayant leurs côtés parallèles et leurs ouvertures tournées dans le même sens (45) ; donc les polygones ABCD, *abcd* ont leurs angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables.

193. Remarque. Soient deux pyramides ABCDK, EFGK qui ont leur sommet en un même point K, dont la hauteur est la même, c'est-à-dire que leurs bases se trouvent dans un même plan, si on coupe ces pyramides par un même plan parallèle à leurs bases, les sections *abcd*, *efg* seront entre elles comme les bases ABCD, EFG.

Car les polygones ABCD, *abcd*, étant semblables, leurs surfaces sont entre elles comme les carrés des côtés homologues AB, *ab*; mais AB : *ab* :: KA : K*a*, donc ABCD : *abcd* :: $\overline{\mathrm{KA}}^2 : \overline{\mathrm{K}a}^2$; par la même raison EFG : *efg* :: $\overline{\mathrm{KF}}^2 : \overline{\mathrm{K}f}^2$; or, par hypothèse, le plan qui passe par *abcd*, *efg* est parallèle aux bases des pyramides; on a aussi KA : K*a* :: KE : K*e*, donc ABCD : *abcd* :: EFG : *efg* ; donc les sections *abcd*, *efg* sont entre elles comme les bases ABCD, EFG.

194. Il suit des démonstrations qui précèdent, 1° que deux pyramides qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes ; que l'une d'elles soit droite et l'autre oblique, n'importe.

En effet, si les bases ABCD, EFG de deux pyramides ayant même hauteur sont équivalentes, on peut se figurer ces pyramides comme composées l'une et l'autre d'un même nombre de tranches, toutes d'une égale épaisseur; ces tranches prises dans l'une et l'autre pyramide à des distances égales du sommet commun K, seraient, comme il vient d'être démontré, équivalentes; d'où il suit que la somme des tranches d'une pyramide serait équivalente à celle des tranches de l'autre pyramide.

2° Que deux pyramides qui ont des bases équivalentes sont entre elles comme les hauteurs.

3° Que si leurs hauteurs sont égales, elles sont entre elles comme leurs bases.

Il est bon de faire observer qu'il faut supposer que la hauteur de ces tranches est toujours inférieure à telle épaisseur que l'on pourrait assigner.

195. Th. Le volume d'une pyramide est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

Sol. Soit le cube ABCDEFGH (fig. 109); construisons sur la base EFGH la pyramide EFGHK, de manière que ses quatre faces latérales EKF, GKH..... soient égales entre elles, et que sa hauteur KO soit la moitié de BF celle du cube.

Concevons que, sur la base supérieure ABCD du cube, on ait formé une pyramide tout-à-fait pareille, laquelle ayant son sommet en K, sa hauteur doit être aussi la moitié de BF, etc.

Après qu'on y aura un peu réfléchi, on comprendra qu'il est possible d'établir sur les six carrés qui forment le cube six pyramides égales, qui toutes auront leur sommet en K, et pour hauteur la moitié du cube, laquelle est égale à KO.

La somme des volumes de ces six pyramides est évidemment équivalente au volume du cube; or, ce volume est égal au produit de la base EFGH par la hauteur BF;

chacune de ces pyramides étant le sixième du cube, elle a pour mesure sa base, égale à E F G H, par le sixième de B F, ou par le tiers de K O, moitié de B F ; mais K O mesure sa hauteur, donc chacune de ces six pyramides a pour mesure le carré ou la face du cube, qui lui sert de base par le tiers de sa hauteur.

Observations. Si l'on éprouve quelque embarras pour bien saisir l'arrangement de la figure, on taillera dans une matière facile à couper du liége, par exemple, six pyramides ayant toutes pour bases des carrés égaux, et pour hauteur la moitié du côté de ces carrés ; réunissant toutes ces pyramides de façon que leurs sommets se trouvent en un même point K, leur ensemble formera un cube.

196. Remarque. Au premier abord, la démonstration qui précède semble ne convenir qu'à un cas particulier, celui où la pyramide a pour base un carré, et pour hauteur la moitié du côté de ce carré ; prouvons cependant que le théorème est toujours vrai, et que, quelle que soit la pyramide dont la hauteur et la surface de la base sont données, le volume de cette pyramide est invariablement égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur ; ou par le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Soit une pyramide B, dont la base est exprimée par 7, et sa hauteur par 2 ; je la compare à une pyramide C, qui aurait pour base un carré dont le côté serait 4, et la hauteur 2, cette pyramide serait le sixième d'un cube, et sa solidité égalerait 16 surface de la base par $\frac{2}{3}$ ou bien $\frac{32}{3}$; la base de la pyramide B étant 7, sa solidité sera $7 \times \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$; les solidités des deux pyramides sont donc entre elles $:: \frac{32}{3} : \frac{14}{3}$ ou $:: 32 : 14$; ou

: : 16 : 7 ; les hauteurs des deux pyramides étant égales, rien ne s'oppose à ce que l'on considère la base de la pyramide B comme les $\frac{7}{16}$ de la base de la pyramide C.

197. **Observations.** Concluons de ce qui précède :

1° Que toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

2° Que deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases ; et réciproquement si leurs bases sont égales, elles sont entre elles comme leurs hauteurs.

198. **Remarque.** Tout polyèdre peut être partagé en un certain nombre de pyramides ; on y parvient de plusieurs manières : 1° Si l'on place le sommet commun des pyramides partielles dans l'intérieur du polyèdre, on aura autant de pyramides que celui-ci aura de faces. 2° Si l'on fait passer les plans de division par le sommet et les arètes d'un même angle solide, on aura alors autant de pyramides partielles que le polyèdre aura de faces non compris les angles plans qui formeront l'angle solide.

199. **Remarque deuxième.** Pour évaluer le volume d'un polyèdre irrégulier quelconque, il faut le décomposer en pyramides, en procédant comme il est dit ci-dessus ; après quoi, calculant successivement les volumes de ces pyramides (195), la somme des résultats obtenus exprimera le volume du polyèdre donné.

200. **Th.** Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.

Sol. Supposons le cas de deux pyramides semblables ABCDK, *abcdk* (fig. 108), et concevons que la plus petite a été introduite dans la plus grande, de manière qu'elles ont l'une et l'autre leur sommet en K, et que toutes leurs faces homologues coïncident.

Il a été démontré que tous les côtés de la grande pyramide ABCDK, ainsi que KO, qui mesure sa hauteur sont coupés en parties proportionnelles par le plan qui passe par la base $abcd$ de la petite pyramide; de sorte que l'on a cette longue suite de proportions : $KB : Kb :: KC :: Kc$, ou bien encore, à cause des triangles semblables, $KB : BC :: Kb : bc$.

Considérant la hauteur KO de la grande pyramide, coupée en o par le plan $abcd$; après avoir tiré BO et bo, on a $KO : Ko :: KB : Kb$; mais $KB : Kb :: AB : ab$, et par conséquent $\frac{1}{3}\ KO : \frac{1}{3}\ Ko :: AB : ab$.

Les bases ABCD, $abcd$ des pyramides étant des polygones semblables, elles sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues (114); on a donc :

$$ABCD : abcd :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2;$$

Or, pour avoir la solidité des deux pyramides, il faut multiplier la base ABCD de la première par $\frac{1}{3}$ KO, et $abcd$ celle de la seconde par $\frac{1}{3}$ Ko; multipliant donc les deux proportions terme à terme, il vient

$$ABCD \times \frac{1}{3}\ KO : abcd \times \frac{1}{3}\ Ko :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3.$$

Donc deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs côtés homologues.

201. Th. Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes, ou de leurs côtés homologues.

Sol. Deux polyèdres semblables A, B peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune; or, les pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des côtés homologues (100), donc chaque pyramide du premier polyèdre sera à celle qui lui correspond dans le second, comme le cube de l'un de ses côtés est au cube du côté homologue de l'autre pyramide....

Prenant donc une arête homologue dans chaque pyramide, et faisant le cube de toutes ces arêtes, on aura une suite de rapports égaux qui seront les mêmes que ceux des pyramides; d'où il suit que la somme des pyramides composant le polyèdre A, est à celle des pyramides qui forment le polygèdre B, comme le cube d'une arête quelconque du premier est au cube de l'arête homologue du second.

202. Pour ce qui est des surfaces des polyèdres, elles se mesurent et se calculent comme celles des triangles, des rectangles; ces surfaces, en effet, ne sont pas autre chose que des figures planes, circonscrites par des lignes droites.

Ainsi, la surface d'un prisme est égale à la somme des surfaces des parallélogrammes qui forment sa surface convexe, plus les surfaces des polygones qui lui servent de bases.

La surface de la pyramide est égale à la somme des triangles qui sont formés autour de sa base, plus la surface de cette base.

SIXIÈME PARTIE.

DES CORPS RONDS.

203. On appelle *corps ronds*, des volumes qui sont censés produits par la révolution d'un rectangle, d'un triangle, la demi-circonférence d'un cercle....

Il a plusieurs sortes de *corps ronds*, mais il ne sera question dans ces élémens que du *cylindre droit*, du *cône droit* et de la *sphère*.

LE CYLINDRE.

204. Le *cylindre* (fig. 110) est censé engendré par un rectangle P Q H L, qui tourne, à la manière d'une porte sur ses gonds, autour d'un de ses côtés P Q resté fixe; pendant ce moment, le côté P L décrit le cercle E G F, et H Q qui lui est opposé décrit en même temps le cercle A B C D; H Q et P L étant égaux comme côtés opposés d'un même rectangle, il s'ensuit que les cercles E G F, A B C D sont égaux.

Quant au troisième côté mobile L H, il trace la surface convexe ou latérale du cylindre; on conçoit que tous les points de cette ligne décrivent autant de cercles, tous égaux et parallèles à A B C D et E G F, ces derniers cercles s'appellent les *bases du cylindre*; la ligne immobile

PQ, qui passe par le milieu de ces bases, est l'*axe* du *cylindre.*

Toute section faite par un plan qui coupe le cylindre perpendiculairement à son axe, est un cercle égal à ceux qui forment ses bases.

Toute section faite par un plan qui passe par l'axe est un rectangle double du rectangle générateur PQLH.

205. Th. La surface convexe d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de sa base par sa hauteur.

Sol. Représentez-vous la surface convexe du cylindre comme formée de parallélogrammes rectangles infiniment étroits.

Ou bien encore concevez le cylindre comme inscrit dans un prisme droit ayant même hauteur que lui, et dont la surface convexe est formée de rectangles infiniment étroits, et tous égaux entre eux; le polygone qui servirait de base à ce prisme différerait d'une quantité infiniment petite de la circonférence du cercle qui sert de base au cylindre; or, pour avoir la surface convexe d'un prisme droit, il faut multiplier la somme des bases des rectangles qui la forment par la hauteur du prisme, laquelle est égale à celle de tous ces rectangles; mais la somme des bases de tous ces rectangles est égale au contour du polygone qui sert de base au prisme; puisqu'il est convenu que ce polygone diffère de si peu que l'on voudra du cercle qui sert de base au cylindre, il s'ensuit:

Que la surface convexe d'un cylindre est égale au produit de la circonférence du cercle qui lui sert de base par sa hauteur.

Connaissant le diamètre du cylindre et sa hauteur, on calculera la circonférence de sa base comme il est enseigné, n° 145, et l'on multipliera le résultat par le nombre qui exprime la hauteur du cylindre....

Soit 9 le diamètre du cylindre donné, 5 sa hauteur, on aura $7 : 22 :: 9 : x$.

Multipliant les moyens l'un par l'autre, et divisant le produit 198 par l'extrême 7, il vient 28,285 pour la circonférence de la base ; ce nombre multiplié par la hauteur 5, donne 141,425, nombre qui exprime la solidité du cylindre.

Remarque. Puisque la surface convexe du cylindre égale la circonférence de sa base par sa hauteur, on comprend que cette surface est équivalente à celle d'un rectangle ayant pour base cette circonférence développée, et pour hauteur celle du cylindre.

206. Th. La solidité d'un cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Sol. Il vient d'être démontré (205), qu'un cylindre peut être assimilé à un prisme de même base et de même hauteur que lui ; or, la solidité d'un prisme est exprimée par le produit de sa base par sa hauteur ; donc la solidité du cylindre est aussi égale au produit de la surface qui lui sert de base par sa hauteur.

Soit 9 le diamètre du cylindre donné, 5 sa hauteur; la circonférence du cercle qui lui sert de base est 198 (205), dont la moitié 99 multipliée par $4 \frac{1}{2}$ ou 4, 5 le rayon (135) produit 445,5 pour la surface du cercle, et ce dernier produit multiplié par 5, la hauteur du cylindre donne 2227,5 pour sa solidité.

Le cylindre pouvant être assimilé à un prisme, il s'ensuit : 1° que des cylindres de bases et de hauteurs égales sont égaux ; 2° que des cylindres à bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs, et *vice-versa* des cylindres de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Quand on a calculé la surface convexe d'un cylindre, on a sa surface totale en y ajoutant celle des cercles qui forment ses bases parallèles (135).

LE CÔNE.

207. Le cône est produit par la révolution d'un triangle rectangle F O B (fig. 111), qui est censé tourner sur un de ses côtés F O, tandis que l'autre côté O B de l'angle droit trace un plan circulaire A C B D ; pendant ce mouvement l'hypoténuse F B décrit la *surface convexe* du cône.

Le plan circulaire A C B D s'appelle la *base du cône*, le point F en est le *sommet* ; la perpendiculaire F O qui tombe sur le centre O de la base est l'*axe du cône* ; cette ligne mesure aussi sa *hauteur* ; F B est le *côté* ou l'*apothème* du cône.

Toute section *a c b d* faite par un plan perpendiculairement à l'axe est un cercle dont le plan est parallèle à la base A C B D.

Si du cône F A C B D on retranche le petit cône F *a c b d*, le volume compris entre les cercles parallèles *a c b d*, A C B D, qui reste, s'appelle *cône tronqué* ou *tronc de cône*.

On peut supposer qu'il est décrit par la révolution du trapèze *o* O *b* B rectangle en *o* et en O, et tournant autour de *o*O ; les côtés parallèles *o b*, O B décrivent les cercles *a c b d*, A C B D, et *b* B le quatrième côté du trapèze décrit la surface convexe du tronc.

La ligne immobile *o* O est l'*axe* ou la *hauteur* du tronc ; les plans circulaires *a c b d*, A C B D en sont les bases, et *b* B le *côté*.

208. Th. La surface du cône est égale à la circonférence de sa base multipliée par la moitié de son côté.

Sol. Le cône est à la pyramide de même hauteur que lui et qui a une base équivalente à la sienne comme le cercle est au polygone régulier circonscrit, ou enfin comme le cylindre est au prisme régulier de même hauteur qui l'enveloppe.

Supposons donc un cône ABCF (fig. 112), dont on a divisé la circonférence ABC... de la base en un très grand nombre de parties égales, ab, bc, cd, de.... du sommet F, et par ces points de division si l'on tire les droites Fa, Fb, Fc, Fd.... on aura les figures aFb, bFc, cFd.... lesquelles différeront de bien peu des triangles qui auraient leur sommet en F, leurs côtés égaux à Fa, Fb.... et pour bases les très petits arcs ab, bc.... lesquels seront presque égaux à leurs cordes.

C'est-à-dire que dans ce cas le cône se trouverait converti en une pyramide régulière de même base et de même hauteur que lui.

Or, chacun des petits triangles aFb... a pour mesure sa base ab par la moitié de sa hauteur (106), mais il est évident que cette hauteur est égale au côté du cône ; il est encore évident que la somme des bases de tous les petits triangles est égale à la circonférence ABC... de la base du cône ; donc la somme des surfaces de tous les petits triangles s'obtient en multipliant la circonférence ABC.... par la moitié du côté du cône ; donc la surface convexe d'un cône est égale au produit de la circonférence de sa base par la moitié de sa hauteur.

209. Th. La surface convexe d'un tronc de cône ABCD (fig. 113) est égale à la demi-somme des circonférences de ses deux bases AB, CD.

Sol. Par B, un des points de la circonférence de la base inférieure et perpendiculairement à BF, menez la ligne BI, égale à la circonférence AB.... supposée, développée; par le point D, et toujours perpendiculairement à BF, menez DG égale à la circonférence CD... tirez GI, vous aurez le trapèze BDGI dont les bases parallèles seront BI et DG, et qui sera équivalent en surface au tronc ABCD; pour calculer cette surface, tirez BG, vous aurez les deux triangles BGI, BGD qui, pris ensemble, valent le trapèze.

La surface du premier est égale à sa base BI par la moitié de GH; ou, ce qui revient au même, elle est égale à GH par la moitié de BI.

Par construction, BD étant perpendiculaire sur DG, l'aire du triangle BGD sera égale à sa hauteur BD multipliée par la moitié de DG sa base; enfin, on aura : surface du trapèze BDGI $= GH \times \frac{1}{2} BI + BD \times \frac{1}{2} DG$; mais BD et GH, perpendiculaires sur BI par construction, sont parallèles; de plus, elles sont comprises entre les bases parallèles DG, BI du trapèze, donc elles sont égales (46), on peut donc les substituer l'une à l'autre, et pour lors l'expression ci-dessus deviendra :

surface du trapèze $=$ BD ou $DG \times (\frac{1}{2} BI + \frac{1}{2} DG$;

or, $\frac{1}{2} BI + \frac{1}{2} DG$, c'est la même chose que $\frac{BI + DG}{2}$.

Donc la surface convexe du tronc est égale à la demi-somme des circonférences de ses bases parallèles par BD son côté.

210. Remarque. Si l'on joint le sommet F du cône avec le point I, on aura le triangle BFI, dont la surface est égale à BI sa base par $\frac{1}{2}$ BF sa hauteur; BF, par construction, étant perpendiculaire sur BI; BF est le en côté du cône, et BI en est la base développée; donc la surface convexe du cône et celle du triangle BFI sont équivalentes.

Il suit de cette remarque que, non seulement la surface du trapèze BDGI est équivalente à celle du tronc, mais encore, que tout trapèze, tel que B dg I est équivalent en surface à tout tronc de cône compris entre deux cercles parallèles AB, cd.

211. Th. Le volume ou la solidité d'un cône est égale au produit de la surface de sa base par le $\frac{1}{3}$ de sa hauteur.

Sol. Il est prouvé (208) qu'un cône peut être assimilé à une pyramide de même base et de même hauteur que lui; or, il est démontré (195) que la solidité de la pyramide est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, donc il en est pareillement de la solidité du cône, qu'il soit droit ou oblique; dans ce dernier cas, il doit être assimilé à une pyramide oblique.

212. Problème. Calculer la solidité d'un tronc de cône droit à bases parallèles.

Sol. Soit ABCD le tronc de cône droit (fig. 113); prolongez les côtés AC, BD jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; vous aurez le cône entier AFB, dont la solidité est égale à la surface du cercle AB qui lui sert de base par $\frac{1}{3}$ FO sa hauteur.

Calculez de la même manière la solidité du petit cône CFD en multipliant sa base CD par $\frac{1}{3}$ Fo sa hauteur, et retranchez le produit obtenu de la quantité qui exprime la solidité du cône total AFB, le reste exprimera celle du tronc ABCD.

LA SPHÈRE.

213. 1° La sphère est un solide terminé de tous côtés par une surface courbe dont la courbure est uniforme.

On peut se représenter la sphère comme engendrée par la révolution d'un demi-cercle B C A, (fig. 114) tournant autour de son diamètre A B, on comprend que tous les points de la surface produite dans ce mouvement par l'arc B C A seront également éloignés du centre O.

2° Le *rayon de la sphère* est le même que celui du demi-cercle générateur : il mesure la distance qu'il y a du centre du volume à un point quelconque de sa surface.

Le *diamètre* est une ligne qui passe par le centre du volume, et se termine de part et d'autre à sa surface.

Le diamètre prend quelquefois le nom d'*axe* (d'essieu); alors il représente une ligne qui passe par le centre de la sphère, et sur laquelle celle-ci est censée tourner.

3° Parmi les cercles que l'on peut tracer sur la surface de la sphère, on distingue les *grands* et les *petits*.

Les *grands* cercles sont ceux dont les plans partagent la sphère en deux parties égales, et dont le centre est au même point que celui de la sphère : tel est le cercle C F D G qui, comme la sphère A C B D, a son centre en O.

Les *petits* cercles de la sphère sont tous ceux qui n'ont pas leur centre au même point que celui de la sphère, et dont les plans partagent celle-ci en deux parties inégales.

4° L'*axe* d'un cercle grand ou petit est la ligne imaginaire qui passe par son centre, et qui est perpendiculaire à son plan : A B (fig. 114), qui passe par le centre O du cercle C F D G, perpendiculairement à son plan, est l'axe de ce cercle.

Les *pôles d'un cercle* sont les extrémités de son axe.

5° On appelle *fuseau*, la partie de la surface de la sphère comprise entre deux demi-circonférences de grands cercles qui ont un diamètre commun. C B D F (fig. 114) est un fuseau : cet espace est compris entre les deux demi-circonférences C B D, C F D, lesquelles ont pour diamètre commun la ligne C O D.

6° On appelle *coin* ou *onglet* sphérique, la partie du volume de la sphère comprise entre les plans de deux demi-grands cercles qui ont un diamètre commun.

La partie solide de la sphère BCAD comprise entre les plans des deux demi-cercles CBD, CFD, qui ont le diamètre commun COD est un coin ; une tranche de melon représente assez bien un *coin sphérique*.

7° On appelle *zone* de la sphère, la partie de la surface comprise entre les circonférences de deux cercles grands ou petits dont les plans sont parallèles ; la *hauteur* d'une zone est la distance comprise entre les plans des deux cercles qui la déterminent.

8° La *calotte sphérique* est la partie de la surface de la sphère qui en est détachée par la circonférence d'un seul cercle.

9° Le *segment sphérique* est la portion du solide de la sphère comprise entre les plans de deux cercles qui lui servent de bases ; si l'un des plans devient tangent à la surface de la sphère, le segment est égal à la solidité de la calotte, qui a même surface sphérique que lui.

10° Le *secteur sphérique* est une espèce de cône, qui a son sommet au centre de la sphère, et dont la base est une calotte de celle-ci.

On peut concevoir un secteur sphérique comme engendré par un secteur circulaire, tournant autour d'un rayon de la sphère ; dans ce cas, l'arc qui mesurerait la largeur de la calotte serait le double de celui du secteur circulaire générateur.

214. Th. La section de la sphère par un plan à une distance quelconque du centre est toujours un cercle.

Sol. Soit la section AHGE (fig. 114) ; du point O centre de la sphère, abaissez sur ce plan la perpendiculaire OK ; et par tous les points A, H, G, E, et le centre O, menez les lignes OA, OH, OG, OE, ces lignes seront égales comme rayons d'une même sphère; de plus, étant obliques à la perpendiculaire OK, elles s'en écarteront d'une même quantité; donc la courbe AHGE est un cercle; puisque tous ses points sont également éloignés du point K.

215. Remarque. 1° Si la section passe par le centre de la sphère, elle aura pour rayon celui de la sphère; d'où il suit que tous les grands cercles sont égaux entre eux.

2° Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales; car, ayant l'un et l'autre leurs centres au même point que celui de la sphère, leur intersection commune est un diamètre.

216. Th. Dans tout triangle sphérique un côté quelconque est plus petit que les deux autres.

Sol. Soit un triangle ABD (fig. 115) formé sur la surface de la sphère par trois arcs de grands cercles AD, AB, BD, et que pour cela on appelle *triangle sphérique*; soit, en C, le centre de la sphère dont ce triangle est censé faire partie; si par le centre C et les arcs AD, AB, BD, on fait passer trois plans, il en résultera l'angle trièdre C formé par les trois angles plans ACB, BCD, ACD; or, il a été démontré (171) que la somme de deux angles plans, qui forment un angle polyèdre est plus grande que le troisième; donc la somme des arcs AB, BD, qui mesurent les ouvertures des angles ACB, BCD (78), est plus grande que l'arc AD, qui mesure l'angle ACD, etc.

217. Th. Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, pris sur la surface de la sphère, est mesuré par l'arc de grand cercle qui passe par les deux points.

Sol. Si l'on objectait que, pour aller sur la surface de la sphère du point A au point B, le chemin le plus court n'est pas l'arc AD, mais que c'est par B point en dehors de AD que passe le chemin le plus court.

Pour toute réponse, par les points A,B, B,D, on ferait passer deux arcs de grand cercle, et l'on continuerait la démonstration comme dans le théorême précédent.

218. Remarque. Si l'on soutenait que le plus court chemin entre A et D (fig. 116) est mesuré par un arc de petit cercle ACD de la sphère; par les mêmes points, on ferait passer un arc de grand cercle ABD; il est évident, sans démonstration, que l'arc ABD est plus court que l'arc ACD; cela provient de ce que les rayons des grands cercles sont égaux à celui de la sphère; les rayons des petits cercles sont au contraire toujours plus courts que ceux des grands cercles; or, plus le diamètre d'un cercle est grand, plus l'arc de sa circonférence, qui mesure un certain angle, approche de la ligne droite.

219. Problème. D'un point donné sur la surface d'une sphère, tracer une circonférence de cercle d'un rayon donné.

Sol. Soit (fig. 117) C le point donné, AD le rayon que doit avoir la circonférence; d'un point quelconque O, et avec un rayon OC égal à celui de la sphère, tracez une circonférence ABFH... et portez sur cette circonférence, du point A au point B, la corde AB double du rayon donné AD; du centre O abaissez une perpendiculaire sur AB (30), ce rayon coupera AB et l'arc ACB en deux parties égales (74).

Ensuite, faites en bois, métal, un arc de cercle CB d'un rayon égal à CO; et du point donné C comme centre, et avec l'arc CB servant de rayon, décrivez avec la pointe fixée vers B une circonférence entière; elle satisfera aux conditions du problème, car tous les points de la circonférence ADB seront également distans du point donné C....

S'il était demandé de décrire sur une sphère la circonférence d'un grand cercle, en prenant pour centre un point H, on procéderait de la même manière : en effet, connaissant le diamètre GF de la sphère, de son milieu O, pris pour centre, on décrirait une demi-circonférence FHG, que l'on partagerait par la moitié ; l'arc HG donnerait la longueur et la courbure de l'arc qu'il conviendrait d'employer pour décrire la circonférence demandée.

220. Problème. Un cercle étant donné sur la surface de la sphère, trouver le point de cette surface qui est également éloigné de tous ceux de la circonférence de ce cercle ; ou, ce qui revient au même, trouver un des *pôles* de ce cercle.

Sol. Soit ABDC le cercle donné (fig. 118) ; divisez par un procédé quelconque sa circonférence en quatre parties égales ; après quoi, au moyen d'une bandelette flexible, joignez les points AD et BC ; le point O où ces arcs se couperont sera le pôle demandé.

221. Th. La surface de la sphère est égale au produit de son diamètre par la circonférence d'un de ses grands cercles.

Sol. Afin d'arriver plus sûrement à la démonstration définitive, que la surface d'une sphère ACDBEF (fig. 119) peut être considérée comme engendrée par la révolution d'un polygone ACDB d'une infinité de côtés (1), tournant autour du diamètre AB du cercle circonscrit ; faisons observer que, pendant ce mouvement, les côtés AC, CD, DB... de ce polygone décriront des cônes tronqués, excepté les côtés extrêmes ACBE, qui décriront des cônes entiers.

Des angles du polygone baissons sur le diamètre AE,

(1) Pour ne pas embrouiller la figure, on n'a ici inscrit au cercle que l'octogone.

ou l'axe de rotation, les perpendiculaires CGK, DHF, BOL; il est évident que le triangle rectangle ACG, tournant sur le côté AG, décrira le cône qui aura son sommet en A, et pour base un cercle dont le diamètre sera CK et la hauteur AG (207).

Le côté CD décrira un cône tronqué, dont DF et CK seront les diamètres de ses bases parallèles ; il en sera de même du côté DB = CD, et symétriquement placé.....

Il ne reste plus qu'à trouver une règle générale pour calculer les surfaces convexes de ces divers cônes entiers ou tronqués.

Et d'abord, la surface du cône ACGK est égale à circonférence CK $\times$ $\frac{1}{2}$ AC son côté (208).

Le cône tronqué CDKF a pour mesure $\frac{\text{(circonférence CK + circonf. DF)}}{2} \times$ CD son côté (209).

La difficulté consiste maintenant à trouver une méthode qui dispense de calculer une à une les longueurs des diamètres CK, DF, BL....

222. Remarque. 1° La surface d'un cône est égale à son côté, multiplié par la circonférence d'un cercle dont le diamètre est la moitié de celui de sa base ; et que le plan de ce cercle coupe son côté par la moitié.

Soit ABC (fig. 120), un triangle isocèle qui, tournant autour de la perpendiculaire CO, abaissée sur sa base AB, décrit un cône droit ; par le milieu D du côté CA, menons DF parallèle à AB ; nous aurons (48) :

$$CA :: AB :: CD : DF;$$

Mais, par construction, CA est le double de CD; donc AB est le double de DF.

Or, les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres (134); donc la circonférence DF est égale à la moitié de la circonférence AB ; donc :

Circonférence AB $\times$ CF moitié du côté du cône $=$ circonférence DF $\times$ CB.

Mais, circonférence AB $\times$ CF représente la valeur de la surface du cône, etc. (208).

2° Que la surface d'un tronc de cône est égale au produit de son côté par la circonférence du cercle, qui est moyenne entre celles de ses bases parallèles avant d'aller plus loin.

Soit le trapèze ABCD (fig. 121) ; par le milieu des côtés CA, DB, tirez EF, cette ligne sera parallèle aux côtés AB, CD, lesquels par construction sont parallèles entre eux ; prolongez CD jusqu'en c et en f, et par les points E, F, faites passer fb, ca perpendiculaires sur AB ; vous aurez les triangles aFB, cFD égaux entre eux ; d'abord, par construction, FD $=$ FB ; puis ils sont rectangles en c et en a, et les angles aFB, cFD sont égaux comme opposés par le sommet ; donc le troisième angle B égale le troisième angle D, donc les deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun sont égaux ; donc Dc $=$ aB ; il serait inutile de prouver que Ab égale aussi fC.

Retranchant donc de AB les lignes bA et aB, et ajoutant ces quantités à CD, on aura les lignes ba, fd, dont la somme sera égale à celle de AB $+$ CD ; or, la surface du cône tronqué est égale au produit de son côté par la demi-somme des circonférences (209), dont AB, CD seraient les diamètres ; ou, ce qui est la même chose, cette surface serait égale au côté du tronc par la circonférence, dont le diamètre serait moyen entre AB et CD ; et bien, ce diamètre moyen est la ligne EF : car, si vous y faites attention, vous resterez convaincu qu'elle est égale à la demi-somme de AB $+$ CD ; donc la surface d'un tronc de cône est égale à son côté par la circonférence qui est moyenne entre ses bases. De ce qui précède, il suit que la surface du cône tronqué C D K F (fig. 119) est égale à la circonférence de mn, diamètre moyen entre CK, D F par son côté C D.

223. Ces préliminaires étant bien compris, démontrons directement que la surface de la sphère se calcule en multipliant la somme des côtés du polygone circonscrit par le rayon du cercle inscrit, lequel cercle est censé le générateur de la sphère.

Sol. Sur le diamètre P Q (fig. 122) formons le demi-polygone A B L K.... et supposons qu'il tourne autour de P Q comme sur un axe; il vient d'être dit (221) que ce polygone décrira des troncs de cônes... le côté A B, par exemple. décrirait un cône tronqué dont les bases parallèles auraient pour rayons les perpendiculaires A F, B H sur l'axe de rotation P Q; or, il vient d'être démontré (224) que la surface de ce tronc doit égaler à A B, multiplié par circonférence C G, rayon moyen entre A F et B H, c'est-à-dire qu'on a surface du tronc, dont A B est le côté = circonférence C G $\times$ A B.

Menez A D parallèle A F H; puis tirez C O rayon du cercle inscrit; vous aurez les deux triangles A B D, O C G rectangles en D et en G; C G étant perpendiculaire sur P Q; de plus, ces triangles sont semblables, car ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (61); le rayon O C tombant sur le milieu C de la corde A B est perpendiculaire à cette corde (74); A B parallèle à P Q est perpendiculaire à C G; enfin, O G perpendiculaire à BH est nécessairement perpendiculaire à B D; ces deux triangles étant semblables on en déduit les proportions A B : A D ou F H : : O C : C G : : circonférence O C : circonférence C G; donc l'extrême A B $\times$ circonférence C G, l'autre extrême = A D ou F H $\times$ circonférence O C.

On démontrerait de la même manière que la surface du tronc B L = H O $\times$ circonférence O C; on démontrerait également que la surface du cône engendré par le triangle rectangle A F P, tournant sur P F, est égale à circonférence O R ou O C, le rayon du cercle inscrit par P F; pour cela on ferait observer que les triangles O R F, A P F sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; ces triangles donnent donc les proportions,

O R : R F : : A P : P F; or, la surface du cône dont A P est le côté $=$ A P $\times$ circonférence R F (222) $=$ P F $\times$ circonférence O R, rayon du cercle.

Répétant le même calcul pour chacun des côtés du demi-polygone circonscrit, on trouverait que la somme des surfaces des cônes ou troncs de cônes formés par la révolution de ce demi-polygone autour du diamètre P Q est égale au produit de ce diamètre par la circonférence du cercle inscrit.

Donc, si l'on admet que le périmètre du polygone circonscrit diffère de celui du cercle inscrit, d'aussi peu que l'on voudra, il s'ensuit que la surface de la sphère est égale au produit de son diamètre, multiplié par la circonférence d'un grand cercle.

225. Exemple de calcul. Soit 12 le diamètre d'une sphère; on aura la circonférence d'un de ses grands cercles au moyen de cette proportion.

$$7 : 22 :: 12 : x \ (145); \ x = \frac{22 \times 12}{7} = \frac{264}{7} = 37{,}71;$$

multipliant cette dernière quantité par 12 le diamètre, il vient 452,52; nombre qui exprime la surface totale de la sphère qui a été donnée.

226. Remarque. Puisque la surface d'une sphère est égale au produit d'un grand cercle par son diamètre, cette surface est équivalente à celle de quatre grands cercles de la même sphère.

En effet, la surface d'un cercle est égale à la circonférence, multipliée par la moitié du rayon (135) ou le quart du diamètre; or, la surface de la sphère s'obtient en multipliant la circonférence d'un grand cercle par le diamètre ou 4 demi-rayons; donc la surface de la sphère est égale à la somme de celles de quatre de ses grands cercles.

227. TH. La surface d'une sphère est équivalente à la surface convexe d'un cylindre dont la hauteur et le diamètre de la base sont égaux au diamètre de la sphère.

SOL. La surface convexe du cylindre est égale à la circonférence de sa base par sa hauteur(205); or, si le diamètre de cette base est égal à celui de la sphère, sa circonférence sera un grand cercle de celle-ci; mais la hauteur du cylindre égale le diamètre de la sphère; donc sa surface convexe est équivalente à celle de la sphère.

228. REMARQUE. La surface du cylindre étant équivalente à celle de la sphère, elle est égale à quatre fois celle de ses grands cercles; et, si à sa surface convexe on ajoute celles de ses deux bases, on aura pour la surface totale du cylindre six grands cercles de la sphère; de sorte que la surface de la sphère est à celle du cylindre : : 4 : 6, ou comme 2 : 3.

La figure 123 représente un cylindre circonscrit à une sphère S, on voit que le volume de cette sphère ne remplit pas à beaucoup près toute la capacité du cylindre; donc elle lui est inférieure en volume, ce qui va être démontré incessamment.

229. TH. La surface d'une zone sphérique est égale à la partie du diamètre de la sphère comprise entre les plans des cercles qui lui servent de bases.

SOL. Il a été prouvé (223), que la surface du tronc de cône décrite par le côté B L du polygone générateur était égale au produit de la partie HO du diamètre QP comprise entre les rayons BH, LO des cercles qui servent qui revient au même, elle équivaut à celle de quatre de ses grands cercles; ou bien elle est égale à la surface d'un grand cercle par $\frac{4}{3}$ du rayon, ou par $\frac{2}{3}$ du diamètre ; mais le grand cercle de la sphère équivaut à la base du cylindre, dont la solidité est égale à cette base par $\frac{3}{3}$ du diamètre ; donc la solidité de la sphère est les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre.

FIN.

NOTE

SUR LE THÉORÈME DU NUMÉRO 37, PAGE 14.

Admettons que les lignes ED, GB (fig. 126) sont perpendiculaires sur BD, elles ne peuvent donc jamais se rencontrer; mais les angles D, B étant droits, DB perpendiculaire sur BG mesure la plus courte distance qu'il y a du point D à la ligne BG, cette perpendiculaire mesure en même temps la distance invariable qui règne entre les perpendiculaires GB, ED sur BD; il en est semblablement des perpendiculaires af, bg, ch, abaissées de points pris à des distances égales sur DE; pour faire comprendre que les angles a, b, c, d sont droits, on supposerait que la figure est pliée suivant la ligne FI, également distante de AG et de CE; les angles D, B étant droits, D tomberait sur B et pareillement les points a, b, c se confondraient avec f, g, h, car s'il en était autrement, il s'en suivrait que DE est une oblique qui peut rencontrer BG; donc les angles D, a, b, c sont droits, puisque aDB se confond avec fBD, ainsi que baf avec gfa; donc les quatre angles du quadrilatère ABCD sont droits.

TABLE

PAR ORDRE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

TROISIÈME PARTIE.

QUATRIÈME PARTIE.

CINQUIÈME PARTIE.

SIXIÈME PARTIE.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Pages 21, ligne 14, *étant*, lisez *est donc*.
— 22 — 8, *que*, lisez *de*.
— 22 — 20, *soit tournée*, ajoutez *pourvu que l'un ne soit pas aigu et l'autre obtus*.
— 24 — 24, BIF, lisez BFI.
— 26 — 14, *nonégones*, lisez *ennéagones*.
— 30 — 12, (*fig*. 39), lisez (*fig*. 40).
— 31 — 1, BDC, lisez FAD.
— 32 — 28, (57), lisez (55).
— 35 — 8, *proposition*, lisez *proportion*.
— 47 — 19, *l'angle*, lisez *les angles*.
— 47 — BOG, $EBH = BOG$, lisez $BOG = EBH$.
— 51 — 21, *en dedans*, lisez *en dehors*.
— 52 — 29, *équiangles*, lisez *égaux*.
— 70 — 23, *vous avez*, lisez *vous aurez*.
— 76 — $ABC : abc$, ajoutez $:: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.
— 104 — 6, *hauteur* DG, lisez FG.
— 110 — 28, (100), lisez (200).
— 117 — 28, *en*, effacez ce mot.

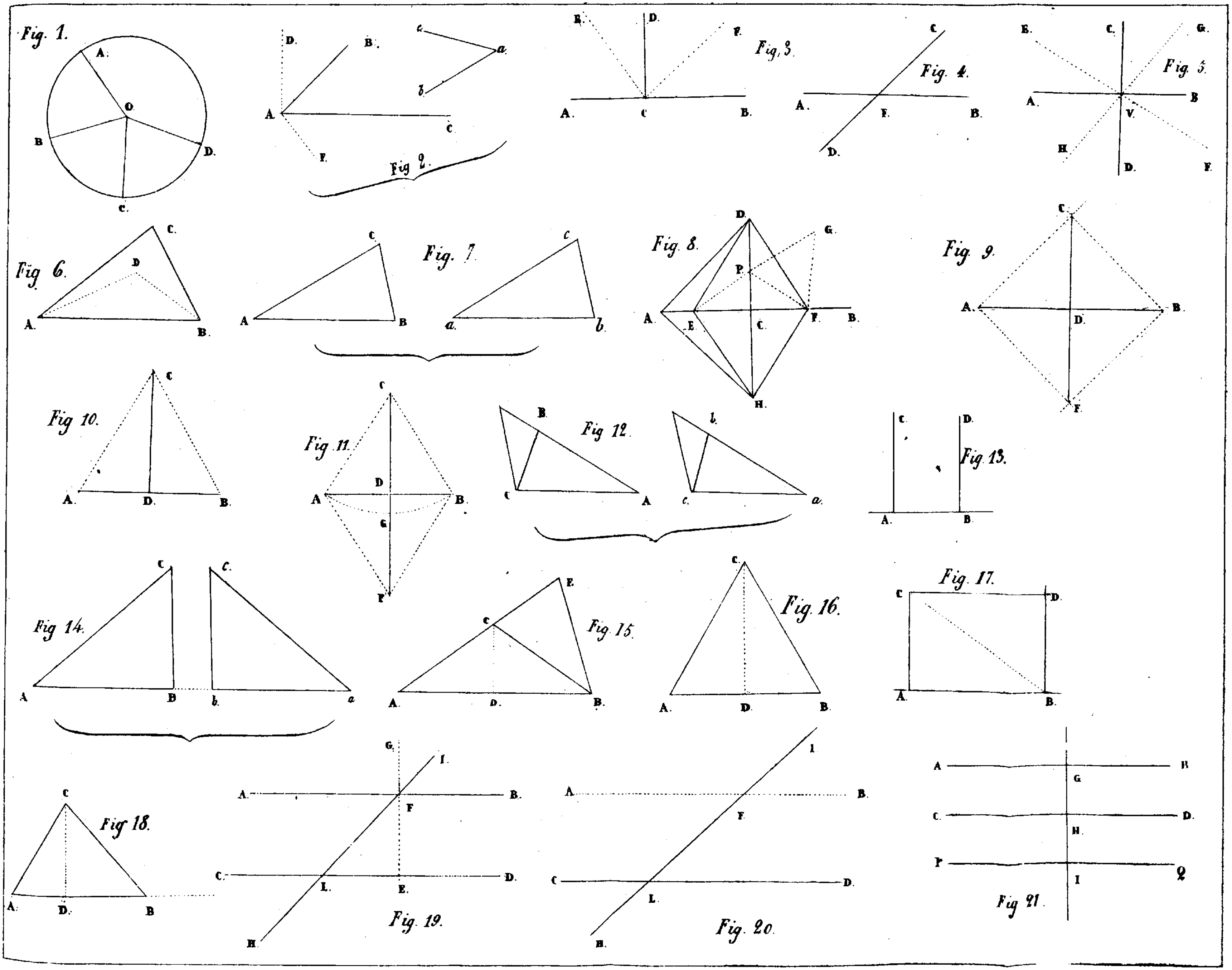
Fig. 1.
Fig 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig 10.
Fig 11.
Fig 12.
Fig 13.
Fig 14.
Fig 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig 21.

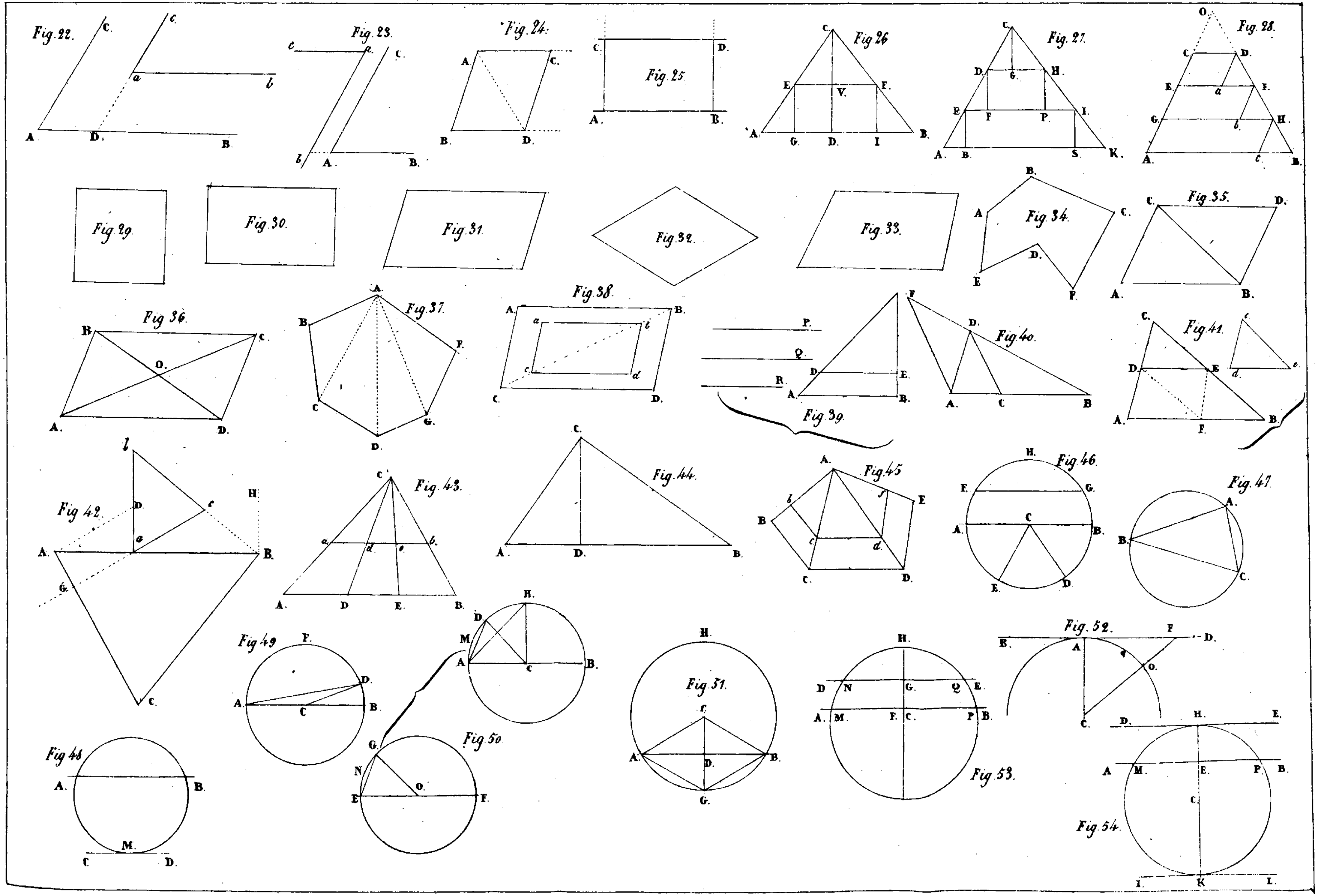
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25
Fig 26
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.

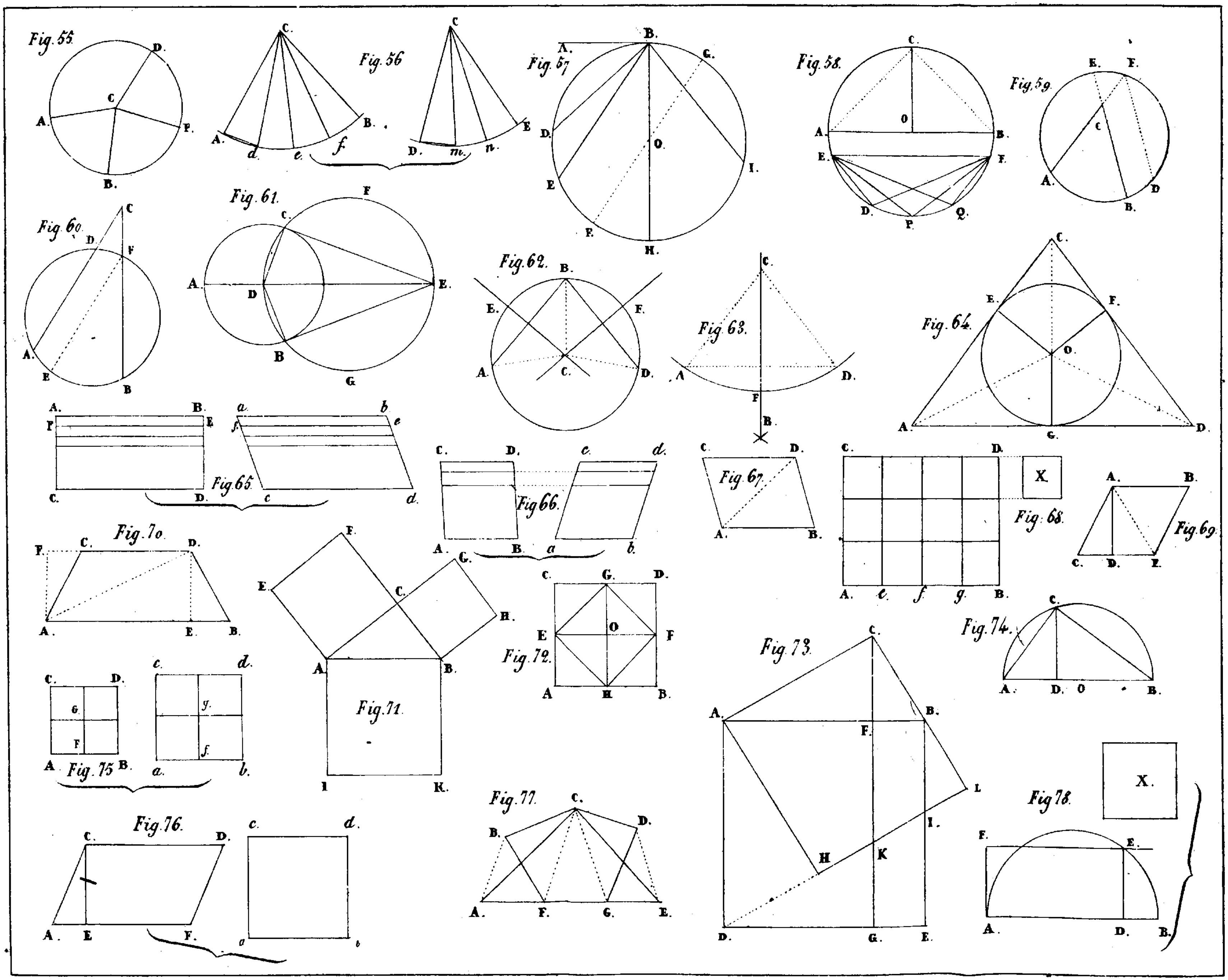
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78

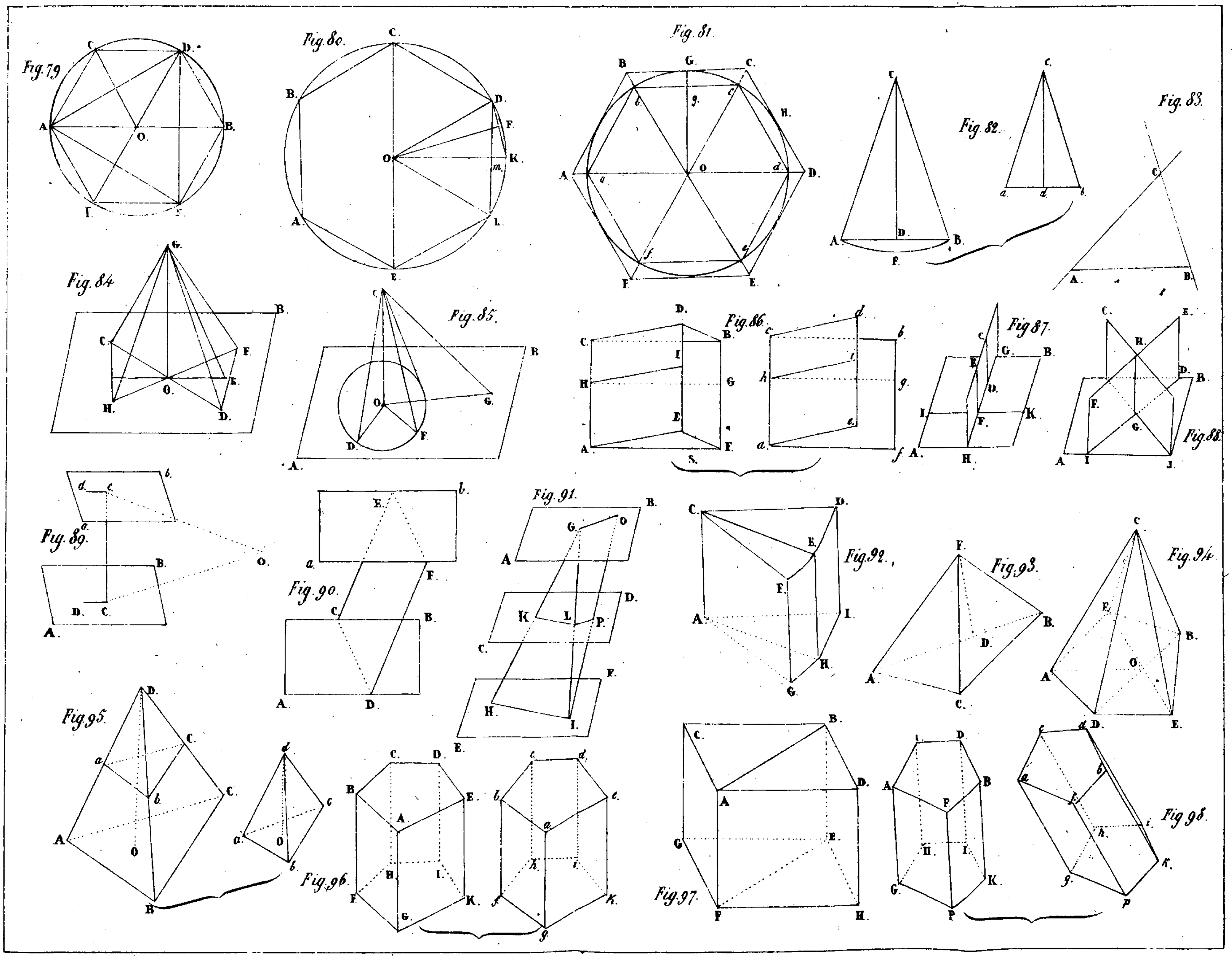
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96
Fig. 97
Fig. 98

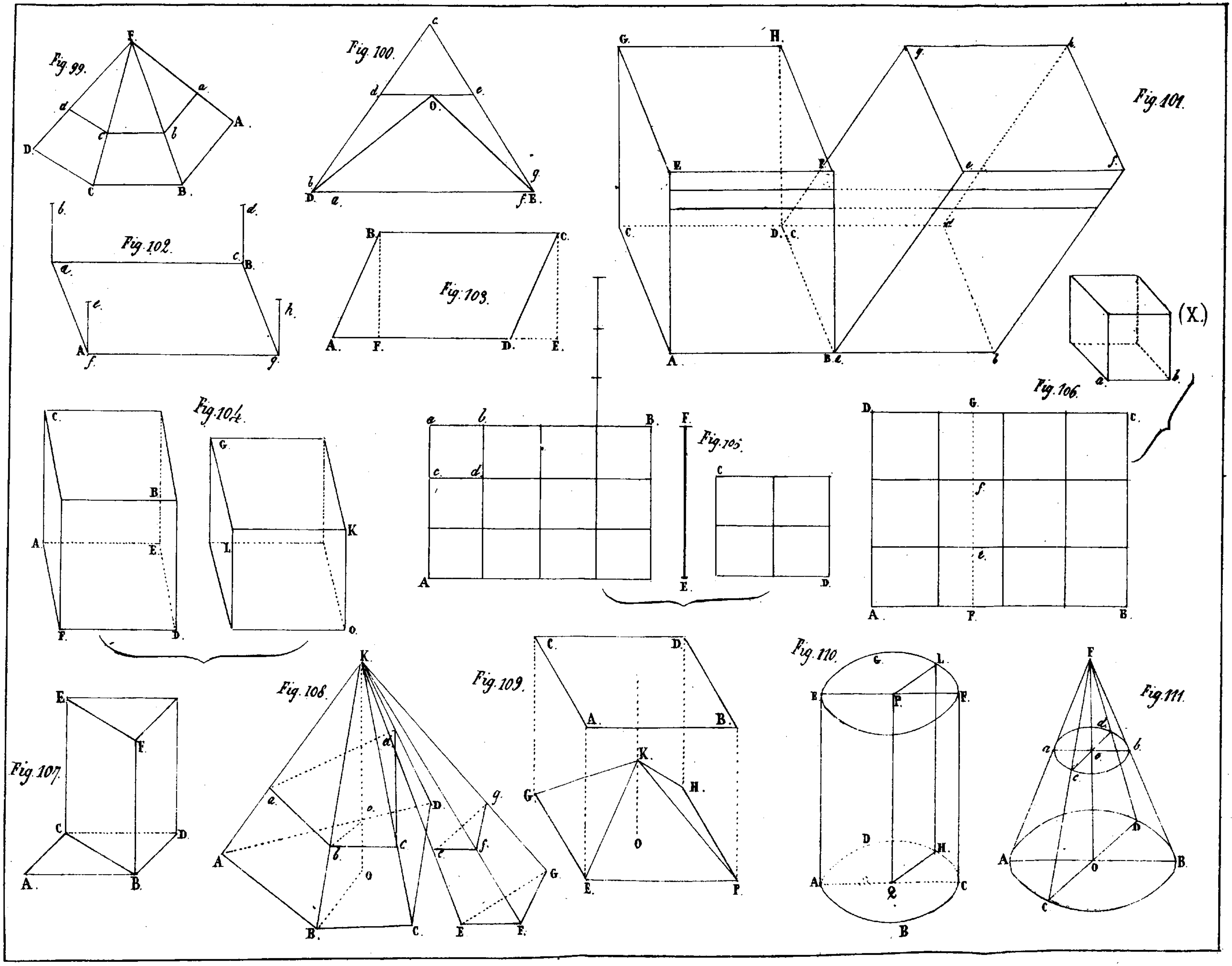
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
(X.)
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.

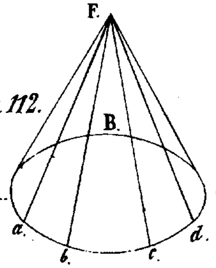

Fig. 112.

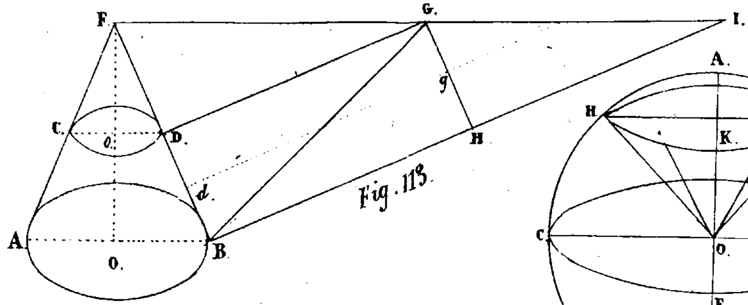

Fig. 113.

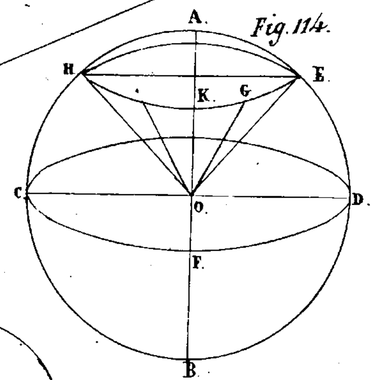

Fig. 114.

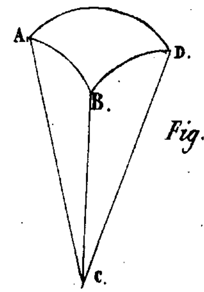

Fig. 115.

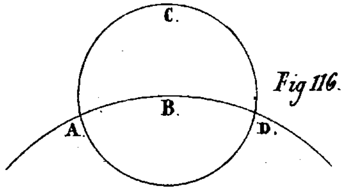

Fig 116.

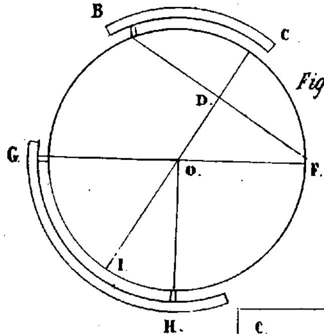

Fig 117.

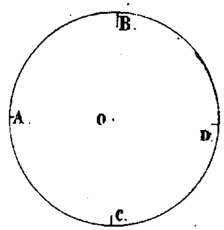

Fig. 118.

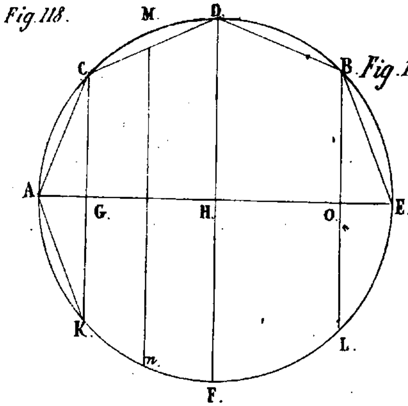

Fig. 119.

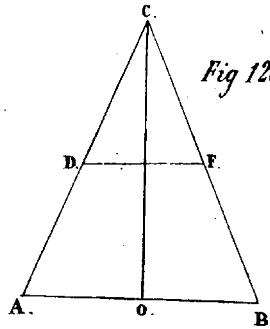

Fig 120.

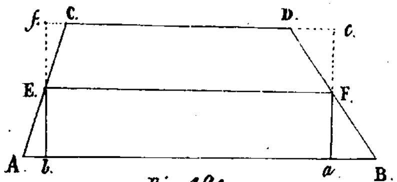

Fig. 121.

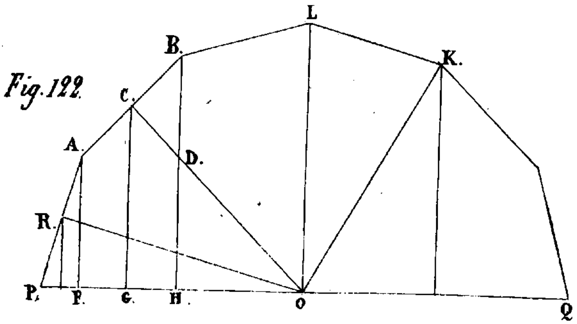

Fig. 122.

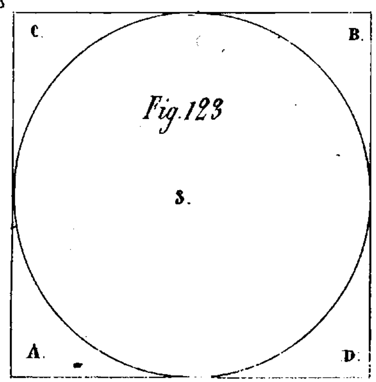

Fig. 123.

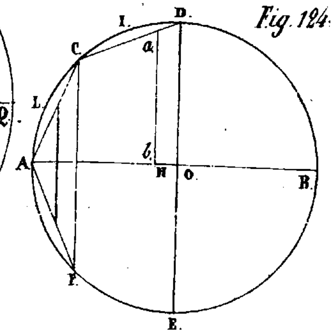

Fig. 124.

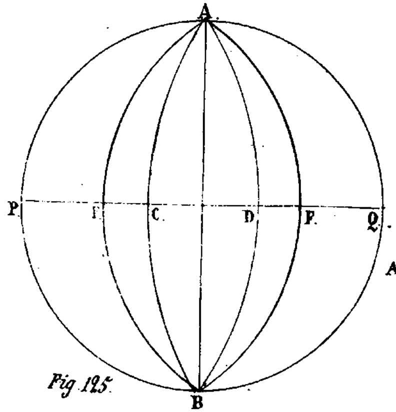

Fig. 125.

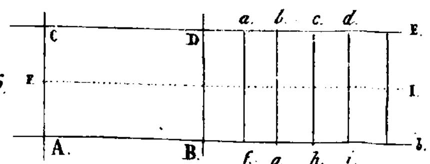

Fig. 126.