COURS
DE
MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BEZOUT;

TROISIÈME PARTIE,

CONTENANT L'ALGÈBRE ET L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE,

AVEC DES NOTES EXPLICATIVES

PAR A.-A.-L. REYNAUD.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Impr.-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1812.

PRÉFACE.

Les connaissances que nous avons exposées dans les deux volumes précédens, servent de base à toutes les parties des Mathématiques; et la méthode que nous avons suivie pour les présenter, peut servir à passer à des vérités plus composées. Mais en réfléchissant sur cette méthode, on a pu remarquer que le nombre des propositions qu'on est obligé de se rappeler pour l'intelligence d'une proposition nouvelle, s'accroît à mesure que celle-ci s'éloigne de l'origine de la chaîne qui les lie les unes aux autres.

Cette manière de procéder à la démonstration ou à la recherche des vérités mathématiques, est sans doute lumineuse; mais elle devient de plus en plus pénible à mesure que ces vérités s'éloignent davantage des connaissances primitives : elle a d'ailleurs l'inconvenient d'exiger, de la part de l'esprit, de nouvelles ressources, de nouveaux expédiens, à mesure qu'on passe à de nouveaux objets.

Cependant, quelque différens que soient les objets des recherches mathématiques, les raisonnemens et les opérations qu'ils exigent, ont des parties communes qu'on peut ramener à des règles générales, à l'aide desquelles on peut soulager l'esprit d'une grande partie des efforts que chaque nouvelle question semblerait exiger. La méthode qu'on appelle *Analyse*, est celle qui enseigne à trouver ces règles; et l'instrument qu'elle emploie pour y parvenir, s'appelle l'*Algèbre*.

L'Algèbre, ou l'art de représenter par des signes généraux toutes les idées qu'on peut se former relativement aux quantités, est, à proprement parler, une langue en laquelle nous traduisons d'abord certaines idées connues; puis par des règles constantes, nous combinons ces idées à l'aide des caractères de cette langue; et enfin interprétant les résultats de ces combinaisons, nous en concluons des vérités que toute autre manière de procéder aurait rendues d'un accès très-difficile, et auxquels même il serait souvent impossible d'atteindre par une autre voie.

Les avantages principaux qu'on peut retirer de cette science, sont donc de faciliter l'intelligence et la découverte des vérités mathématiques, et de se procurer des moyens faciles et des règles générales pour résoudre toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Les méthodes de l'Algèbre ne nous étaient point nécessaires dans les volumes précédens, où les objets étaient simples; mais la synthèse que nous y avons employée, ne peut nous procurer les mêmes ressources pour traiter ceux qui nous restent à parcourir. D'ailleurs une des choses qu'on doit avoir en vue dans l'étude des Mathématiques, c'est moins d'accumuler un grand nombre de propositions, que d'acquérir l'esprit de recherche et d'invention qui seul peut faire mettre à profit les connaissances que l'on a recueillies; or, la manière de procéder en Algèbre tend directement à ce but.

L'objet principal que nous nous proposons, en donnant l'Algèbre dans ce volume-ci, est de nous mettre en état de traiter, dans le suivant, la Mécanique, d'une manière commode et utile. Mais pour tirer de l'Algèbre les avantages qu'elle peut procurer, il faut s'être rendu familier l'usage des différentes opérations qu'elle enseigne, et s'être accoutumé à interpréter les phrases de cette langue; c'est pour cette raison que nous avons renfermé dans ce même volume plusieurs applications de l'Algèbre à l'Arithmétique et à la Géométrie. Nous nous étions proposés d'y faire entrer encore une autre branche de l'Analyse, celle qui regarde les quantités considérées comme variables, ou du moins, d'en donner ce qui nous serait nécessaire pour quelques applications importantes à la Mécanique; mais une espèce de nécessité de conserver à cette troisième Partie le même caractère d'impression qu'aux deux premières, ne nous permet pas d'exécuter ce projet pour le moment, sans passer de justes bornes.

Les différentes méthodes qu'on a suivies jusqu'ici, pour exposer les principes de l'Algèbre, se réduisent à deux principales. La première consiste à donner les règles des quatre opérations fondamentales, et celles qui conduisent à la résolution des équations du premier degré, par une voie qu'on peut regarder comme synthétique. La seconde, qui est purement analytique, conduit à trouver ces règles, en proposant des questions dont la résolution exige certaines opérations et certains raisonnemens que, par un examen postérieur, on trouve revenir les mêmes dans toutes les questions, et que par conséquent on érige en règles générales. Cette dernière méthode semblerait d'abord préférable à la première, en ce qu'elle paraît devoir flatter l'amour-propre des commençans, et irriter leur curiosité. Mais si l'on fait réflexion qu'alors l'attention est nécessairement partagée entre trois objets, savoir, l'état de la question, les raisonnemens pour l'exprimer algébriquement, et les opérations qu'il faut faire à l'aide des signes dont la signification échappe d'autant plus aisément qu'on est encore moins exercé à représenter ses idées d'une manière abstraite, il me semble qu'on doutera que cette méthode soit la meilleure, dans les commencemens, pour le plus grand nombre de lecteurs. Ne produirait-elle pas, au contraire, un effet tout opposé à celui que quelques-uns lui attribuent? Les raisonnemens qu'elle exige, quoique simples dans les commencemens, où, sans doute, on ne traite que des questions faciles, ces raisonnemens, dis-je, devant être tirés du fonds même de celui qui opère, ne l'humilieront-ils pas, lorsqu'ils ne se présenteront pas à lui? La méthode d'invention suppose toujours une certaine finesse : c'est celle qu'ont dû suivre les inventeurs, et par conséquent celle des hommes de génie; or, ceux-ci ne sont certainement pas le plus grand nombre.

Ce sont ces considérations qui nous ont déterminé à suivre l'autre marche pour l'exposition des règles fondamentales; mais comme un des objets que nous nous proposons, est de faire acquérir au lecteur cette méthode d'invention, nous n'avons suivi la première qu'autant qu'il nous a paru nécessaire de le faire, pour que le défaut d'habitude des signes algébriques ne fût plus un obstacle à l'intelligence de ce que nous aurions à présenter.

Nous ne dirons rien de la manière dont les choses sont traitées; ce n'est plus à nous à la juger. Mais nous croyons pouvoir nous arrêter un moment sur quelques-unes des matières que nous avons considérées; elles sont de deux sortes : les unes élémentaires; les autres, au moins pour la plus grande partie, supposent qu'on s'est rendu les premières très-familières. Pour les unes et pour les autres, nous avons fait ensorte de ne rien omettre de ce qui peut être utile. Nous avons distingué celles de la seconde sorte, par de petits caractères : quelques notes répandues dans l'ouvrage, et qui appartiennent à la partie élémentaire, sont, à la vérité, du même caractère, mais elles sont distinguées par une étoile. Parmi les objets compris sous le petit caractère, nous avons renfermé, entre autres choses, 1°. le Précis d'une méthode, qu'on trouvera avec plus d'étendue dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1764, et qui a pour objet l'élimination des inconnues dans les équations. C'est une partie de l'Algèbre, sur laquelle il y a encore bien des choses à faire (*), et qui importe d'autant plus à la perfection de cette science, que la résolution générale des équations en dépend absolument. 2°. Une méthode pour la résolution des équations. Nous ne dirons rien des tentatives qui ont été faites sur cette matière depuis la naissance de l'analyse. Nous remarquerons seulement que, jusqu'à nos jours, on n'a pas passé le quatrième degré; on n'a pas même eu une méthode uniforme pour les degrés qu'on sait résoudre. On trouve, à la vérité, dans l'Analyse démontrée du P. Reyneau, un procédé que l'on y donne comme général, et qui est dû à M. Tschirnaüs, qui le publia dans les actes de Leipsik; mais indépendamment des calculs rebutans et superflus auxquels ils donnent lieu, il ne réussit, pour le quatrième degré, que par une modification de la règle; et quelques réflexions sur la forme que doivent nécessairement avoir les racines des équations des degrés supérieurs, font bientôt voir qu'il ne peut servir au-delà du quatrième degré. Les bornes que les matières plus nécessaires à notre objet m'ont forcé de donner à l'exposition de la méthode que je propose, m'ont empêché d'entrer dans quelques détails sur son application au cinquième degré et aux degrés supérieurs. Je m'étais même proposé de ne rien publier sur ce sujet, que lorsque, libre d'autres occupations, j'aurais pu y donner la perfection dont je le croyais susceptible;

(*) Depuis la première Edition de cet Ouvrage, cette partie de l'Algèbre ne nous paraît plus laisser les mêmes choses à desirer. Voyez l'ouvrage qui a pour titre : *Théorie générale des Equations*, que nous avons publié en 1779.

mais M. Euler ayant publié dans le tome IX des *Nouv. Comment. de Pétersbourg*, qui vient de paraître, une méthode sur la même matière, je donne ici les choses telles que je les ai trouvées d'abord, c'est-à-dire, sur la fin de 1761. Au reste, si on desire de plus grands détails, on consultera les Mémoires de l'Académie, qui offrent, entre autres choses, une méthode pour les équations dont le degré est marqué par un nombre composé, laquelle simplifie le travail dans ces cas : nous aurions pu l'employer ici pour le quatrième degré ; mais dans le dessein où nous étions de faire voir ce que l'on pouvoit présumer de l'application de notre méthode aux degrés supérieurs, nous avons préféré d'observer l'uniformité.

Sous le même caractère d'impression sont encore compris beaucoup d'autres objets que nous avons cru devoir traiter, pour ne pas obliger de recourir ailleurs.

Dans la seconde Section, nous nous sommes attachés à faire voir la manière d'appliquer l'Algèbre, d'en traduire les résultats, de les exprimer par lignes. Nous avons tâché de faire bien entendre comment l'Algèbre comprend, dans une même équation, tous les différens cas d'une question ; ce que signifient les différentes racines, positives, négatives, réelles ou imaginaires.

La connaissance des principales propriétés des sections coniques nous a paru devoir entrer dans notre plan, quelques-unes de ces courbes se rencontrant assez souvent dans l'Architecture Navale. Enfin, leur usage pour la construction des équations nous y a encore déterminé. Nous avons fait ensorte de présenter ces objets, et plusieurs autres qu'on trouvera dans le cours de l'Ouvrage, de manière qu'ils devinssent le germe de connaissances plus étendues pour ceux qui desireront les acquérir.

DE L'ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION,

Dans laquelle on donne les principes du calcul des Quantités Algébriques.

1. Le but de la science qu'on appelle *Algèbre*, est de donner les moyens de ramener à des règles générales la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités. Ces règles, pour être générales, ne doivent pas dépendre des valeurs particulières des quantités que l'on considère, mais bien de la nature de chaque question; et doivent être toujours les mêmes pour toutes les questions d'une même espèce. Il suit de là que l'Algèbre ne doit point se borner à employer, pour représenter les quantités, les mêmes caractères ou les mêmes signes que l'Arithmétique. En effet, lorsque, par les règles de celle-ci, on est parvenu à un résultat, rien ne retrace plus à l'esprit la route qui y a conduit. Qu'une ou plusieurs opérations arithmétiques m'aient donné 12 pour résultat, je ne vois rien dans 12 qui m'indique si ce nombre est venu de la multiplication de 3 par 4, ou de 2 par 6, ou de l'addition de 5 avec 7, ou de 2 avec 10, ou, en général, de toute autre combinaison d'opérations. L'Arithmétique donne des règles pour trouver certains résultats; mais ces résultats ne peuvent pas fournir des règles. L'Algèbre doit remplir ces deux objets; et pour y parvenir, elle représente les quantités par des signes généraux (ce sont les lettres de l'alphabet), qui, n'ayant aucune relation plus particulière avec un nombre qu'avec tout

autre, ne représentent que ce qu'on veut, ou ce que l'on convient de leur faire représenter. Ces signes, toujours présens aux yeux dans toute la suite d'un calcul, conservent, pour ainsi dire, l'empreinte des opérations par lesquelles ils passent; ou du moins ils offrent dans les résultats de ces opérations, des traces de la route qu'on doit tenir pour arriver au même but par les moyens les plus simples. Nous ne nous attachons point ici à développer davantage cette légère idée que nous donnons de l'Algèbre; la suite de cet Ouvrage y est destinée.

Non-seulement on représente, en Algèbre, les quantités par des signes généraux, on y représente aussi leur manière d'être les unes à l'égard des autres, et les différentes opérations qu'on a dessein de faire sur elles : en un mot, tout est représentation; et lorsqu'on dit qu'on fait une opération, c'est une nouvelle forme qu'on donne à une quantité. A mesure que nous avancerons, nous ferons connaître ces différentes manières de représenter ce qui a rapport aux quantités.

Des opérations fondamentales sur les Quantités considérées généralement.

2. On fait en Algèbre, sur les quantités représentées par des lettres, des opérations analogues à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres; c'est-à-dire, qu'on les ajoute, on les soustrait, on les multiplie, on les divise, etc.; mais ces opérations diffèrent de celles de l'Arithmétique, en ce que leurs résultats ne sont souvent que des indications d'opérations arithmétiques.

De l'Addition et de la Soustraction.

3. L'addition des quantités semblables n'a besoin d'aucune règle; il est évident que pour ajouter une quantité représentée par a, avec la même quantité a, il faut écrire $2a$. Pour ajouter $2a$ avec $3a$, il faut écrire $5a$, et ainsi de suite.

Quant aux quantités dissemblables, et qu'on représente toujours par des lettres différentes, on ne fait qu'indiquer cette addition; et cela s'indique par le moyen de ce signe $+$, qui se prononce *plus*. Ainsi, si l'on veut ajouter une quantité représentée par a, avec une autre représentée par b, on ne peut faire autre chose qu'écrire $a+b$; ensorte qu'on ne connaît véritablement le résultat que quand on connaît les valeurs particulières des quantités représentées par a et par b; si a vaut 5, et si b vaut 12, $a+b$ vaudra 17.

Pareillement, pour ajouter $5a+3b$, avec $9a+2c$ *et* $9b+3d$, on écrira $5a+3b+9a+2c+9b+3d$; et rassemblant les quantités semblables, on aura $14a+12b+2c+3d$.

4. Il y a les mêmes choses à dire sur la soustraction que sur l'addition. Si les quantités sont semblables, on n'a besoin d'aucune règle : il est évident que si de $5a$ on veut retrancher $2a$, il reste $3a$.

Mais si les quantités sont dissemblables, on ne peut qu'indiquer la soustraction; cela s'indique à l'aide de ce signe —, qu'on prononce en disant *moins*. Ainsi si l'on a b à retrancher de a, on écrira $a-b$. Pour retrancher $3b$ de $5a$, on écrira $5a-3b$. Pour retrancher $5a+4b$, de $9a+6b$, on écrira............ $9a+6b-5a-4b$, et faisant déduction des quantités semblables (ce qu'on appelle faire la *réduction*), on a pour reste $4a+2b$. Enfin pour retrancher $5a+3b+4c$ de $6a+4b+4d$, on écrira $6a+4b+4d-5a-3b-4c$, et en réduisant, on aura $a+b+4d-4c$.

5. Un nombre qui précède une lettre, s'appelle le *coefficient* de cette lettre; ainsi dans $3b$, 3 est le coefficient de b. Lorsqu'une lettre doit avoir 1 pour coefficient, on ne met point ce coefficient : ainsi lorsque de $3a$ on retranche $2a$, il reste $1a$, on écrit seulement a. Il faut donc bien se garder de croire que le coefficient d'une lettre, lorsqu'il ne paraît point, soit zéro; il est alors l'unité ou 1.

6. Il importe peu dans quel ordre on écrive les quantités qu'on ajoute ou qu'on retranche; si l'on a a à ajouter avec b, on peut indifféremment écrire $a+b$ ou $b+a$; et pour retrancher b de a, on peut écrire également $a-b$ ou $-b+a$. Mais comme on prononce plus aisément les lettres, dans l'ordre

alphabétique que dans tout autre, nous suivrons cet ordre autnat que nous le pourrons.

7. Remarquons encore que lorsqu'une quantité n'a point de signe, elle est censée avoir le signe $+$; a est la même chose que $+a$. On est dans l'usage de supprimer le signe dans la quantité qu'on écrit la première, lorsque cette quantité doit avoir le signe $+$; mais si elle devait avoir le signe $-$, il ne faudrait pas l'omettre.

8. Lorsqu'après une opération on procède à la réduction, il peut arriver que l'on ait une quantité à retrancher d'une autre plus petite : alors on retranche la plus petite de la plus grande, et on donne au reste le signe de la plus grande. Par exemple, si après avoir ajouté $2a+3b$, avec $5a-7b$, on veut réduire le résultat $2a+3b+5a-7b$, on écrira $7a-4b$, en retranchant $3b$ de $7b$, et donnant au reste $4b$, le signe qu'avait $7b$. En effet le signe $-$ de $7b$ dans la quantité $5a-7b$, indique que $7b$ doit être retranché; mais si l'on vient à augmenter $5a-7b$ de la quantité $2a+3b$, il est visible que les $3b$ qu'on ajoute, diminuent d'autant la soustraction qu'on avait à faire; il ne doit donc plus y avoir que $4b$ à retrancher; il faut donc qu'il y ait $-4b$ dans le résultat. De là nous conclurons cette règle générale. *L'addition des quantités algébriques se fait en écrivant leurs parties, à la suite les unes des autres, avec leurs signes tels qu'ils sont : on réduit ensuite les quantités semblables à une seule, en rassemblant d'une part, toutes celles qui ont le signe $+$; et d'une autre part, toutes celles qui ont le signe $-$; enfin on retranche le plus petit résultat du plus grand, et on donne au reste, le signe qu'avait le plus grand.*

Exemple. On veut ajouter les quatre quantités :

$$\begin{array}{c} 5a+3b-4c \\ 2a-5b+6c+2d \\ a-4b-2c+3e \\ 7a+4b-3c-6e \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Somme...}\left\{\begin{array}{l} 5a+3b-4c+2a-5b+6c+2d+a-4b \\ -2c+3e+7a+4b-3c-6e. \end{array}\right.$$

Faisant la réduction, j'ai pour les a, $15a$; pour les b, j'ai

$+7b$ d'une part, et $-9b$ de l'autre, et par conséquent $-2b$ pour reste; pour les c, j'ai $-9c$ d'une part, et $+6c$ de l'autre, et par conséquent $-3c$ pour reste; réduisant les autres de même, on trouve enfin $15a-2b-3c+2d-3e$.

9. Les quantités séparées par les signes $+$ et $-$, s'appellent les *termes* des quantités dont elles font parties.

10. Une quantité est appelée *monome, binome, trinome*, etc., selon qu'elle est composée de 1, ou de 2, ou de 3, etc. termes, et une quantité composée de plusieurs termes, dont on ne définit pas le nombre, s'appelle en général un *Polynome.*

11. A l'égard de la soustraction des quantités algébriques, voici la règle générale : *Changez les signes des termes de la quantité que vous devez soustraire, c'est-à-dire, changez $+$ en $-$, et $-$ en $+$; ajoutez ensuite cette quantité, ainsi changée, avec celle dont on doit soustraire, et réduisez.*

Exemple. De $6a-3b+4c$, on veut retrancher la quantité $5a-5b+6c$. A la suite de $6a-3b+4c$, j'écris $-5a+5b-6c$, qui est la seconde quantité, dans laquelle on a changé les signes; et j'ai $6a-3b+4c-5a+5b-6c$, et en réduisant, $a+2b-2c$ pour reste. Pour rendre raison de cette règle, prenons un exemple plus simple. Supposons que de a on veuille retrancher b, il est évident qu'on doit écrire $a-b$; mais si de a on voulait retrancher $b-c$, je dis qu'il faut écrire $a-b+c$; en effet, il est clair qu'ici ce n'est pas b tout entier qu'il s'agit de retrancher, mais seulement b diminué de c; si donc on retranche d'abord b tout entier en écrivant $a-b$, il faut ensuite, pour compenser, ajouter ce qu'on a ôté de trop; il faut donc ajouter c; il faut donc écrire $a-b+c$, c'est-à-dire, qu'il faut changer les signes de tous les termes de la quantité qu'on doit soustraire.

Dans les nombres, cette attention n'est pas nécessaire, parce que si l'on avait $8-3$, par exemple, à retrancher de 12, on commencerait par diminuer 8 de 3, ce qui donnerait 5 qu'on retrancherait de 12, et on aurait 7 pour reste; mais on voit aussi qu'on pourrait retrancher d'abord 8 de 12, et au reste 4, ajouter 3, ce qui donnerait également 7; or, c'est ce dernier parti qu'on prend et qu'il faut prendre nécessairement en

Algèbre, parce qu'on ne peut faire la réduction préliminaire comme sur les nombres.

12. Les quantités précédées du signe +, se nomment quantités *positives;* et celles qui sont précédées du signe —, se nomment quantités *négatives.* Nous entrerons, par la suite, dans quelque détail sur la nature et les usages de ces quantités, considérées séparément l'une de l'autre.

De la Multiplication.

13. La multiplication algébrique exige quelques considérations qui lui sont particulières, et qui n'ont pas lieu dans la multiplication arithmétique. Indépendamment des quantités, il y a encore les signes à considérer. Au reste, à ne considérer que les valeurs numériques des quantités représentées par les lettres, on doit se former de la multiplication algébrique, la même idée que de la multiplication arithmétique (*Arith.* 40.); ainsi, multiplier a par b, c'est prendre la quantité représentée par a, autant de fois qu'il y a d'unités dans la quantité représentée par b.

14. Mais comme l'objet est ici de faire ou de représenter la multiplication indépendamment des valeurs numériques des quantités, il faut convenir des signes par lesquels nous indiquerons cette multiplication. On fait souvent usage de ce signe $\times$, qui signifie *multiplié par;* ensorte que $a \times b$ signifie a multiplié par b, ou que l'on doit multiplier a par b. On fait aussi usage du point, que l'on interpose entre les deux quantités qu'on doit multiplier; ensorte que $a.b$ et $a \times b$ signifient la même chose. Enfin on indique encore la multiplication (du moins entre les quantités monomes), en ne mettant aucun signe entre le multiplicande et le multiplicateur, ainsi $a \times b$, $a.b$, ab sont trois expressions dont chacune désigne qu'on doit multiplier a par b. Cette dernière est la plus usitée.

15. Pour multiplier ab par c, on écrira donc abc. Pour multiplier ab par cd, on écrira $abcd$, et ainsi de suite : il importe peu d'ailleurs dans quel ordre ces lettres soient écrites,

parce que (*Arith.* 44) le produit est toujours le même dans quelque ordre qu'on multiplie.

16. Lors donc qu'à l'avenir nous rencontrerons une quantité comme ab, ou abc, ou $abcd$, etc., dans laquelle plusieurs lettres se trouveront écrites de suite sans aucun signe, nous en conclurons que cette quantité représente le produit de la multiplication successive de chacune des lettres qui la composent.

17. Nous avons nommé (*Arith.* 42) facteur d'un produit, tout nombre qui, par la multiplication, a concouru à former ce produit; ainsi dans ab, a et b sont les facteurs; dans abc, les facteurs sont a, b, c, et ainsi de suite.

18. Il suit de la règle que nous venons de donner (15), que *le produit de la multiplication de plusieurs quantités algébriques monomes, doit renfermer toutes les lettres qui se trouvent tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.* Cela posé, si les quantités qu'on doit multiplier étaient composées de la même lettre, cette lettre se trouverait donc écrite dans le produit autant de fois qu'elle l'est dans tous les facteurs ensemble, quel que soit le nombre des quantités qu'on ait à multiplier : ainsi a multiplié par a donnerait aa; aa multiplié par aaa, donnerait $aaaaa$; aa multiplié par aaa et multiplié encore par a donnerait $aaaaaa$.

19. Dans ce cas, on est convenu de n'écrire cette lettre qu'une seule fois, mais de marquer, par un chiffre qu'on appelle *Exposant*, et qu'on place sur la droite et un peu au-dessus de la lettre, combien de fois cette lettre est facteur, ou combien de fois elle doit être écrite. Au lieu de aa, on écrira donc a^2; au lieu de aaa, on écrira a^3; au lieu de $aaaaa$, on écrira a^5, et ainsi des autres. Souvenons-nous donc à l'avenir, que *l'exposant d'une lettre, marque combien de fois cette lettre est facteur dans un produit.* Dans a^3b^2c il y a trois facteurs de valeur différente, savoir a, b, c : mais de ces lettres, la première est facteur trois fois; la seconde, deux fois; et la troisième une fois : en effet a^3b^2c équivaut à $aaabbc$,

Il faut donc bien se garder de confondre l'exposant avec le coefficient ; de confondre, par exemple, a^2 avec $2a$, a^3 avec $3a$: dans $2a$, le coefficient 2 marque que a est ajouté avec a, c'est-à-dire, que $2a$ équivaut à $a + a$; mais dans a^2, l'exposant 2 marque que la lettre a devrait être écrite deux fois de suite sans aucun signe ; qu'elle est multipliée par elle-même, ou enfin qu'elle est facteur deux fois ; c'est-à-dire, que a^2 équivaut à $a \times a$; ensorte que si a vaut 5, par exemple, $2a$ vaut 10 ; mais a^2 vaut 25.

20. On voit donc que *pour multiplier deux quantités monomes qui auraient des lettres communes, on peut abréger l'opération, en ajoutant tout de suite les exposans des lettres semblables du multiplicande et du multiplicateur*. Ainsi pour multiplier a^5 par a^3, j'écris a^8, c'est-à-dire, que j'écris la lettre a en lui donnant pour exposant les deux exposans 5 et 3 réunis. De même pour multiplier a^3b^2c par a^4b^3cd, j'écris $a^7b^5c^2d$, en écrivant d'abord toutes les lettres différentes $abcd$, et donnant ensuite à la première pour exposant 7 qui est la somme des exposans 3 et 4 ; à la seconde, 5 qui est la somme des deux exposans 2 et 3 ; et à la troisième, 2 qui est la somme des deux exposans 1 et 1 ; car quoique l'exposant de c ne soit pas marqué, on doit néanmoins sous-entendre qu'il est 1, puisque c est facteur une fois ; donc *toute lettre dont l'exposant n'est point écrit, est censée avoir* 1 *pour exposant ; et réciproquement toutes les fois qu'une lettre devra avoir* 1 *pour exposant, on peut se dispenser d'écrire cet exposant*. Telle est la règle pour les lettres dans les quantités monomes.

21. Quand les quantités monomes sont précédées d'un chiffre, c'est-à-dire d'un coefficient, il faut commencer la multiplication par ce coefficient, et cette multiplication se fait suivant les règles de l'arithmétique ; ainsi pour multiplier $5a$ par $3b$, je multiplie d'abord 5 par 3, puis a par b, et je trouve $15ab$ pour produit. Pareillement, si j'ai $12a^3b^2$ à multiplier par $9a^4b^3$, j'aurai $108a^7b^5$.

Nous avons dit, en Arithmétique, qu'une quantité était élevée à la première, seconde, troisième, etc. puissance, ou au premier, second, troisième, etc. degré, selon qu'elle était facteur 1, 2, 3, etc., fois; donc une lettre qui a pour exposant 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. est censée élevée à la première ou à la seconde, ou à la troisième, etc. puissance; ainsi a^2 est la seconde puissance ou le quarré de a; a^3 est le cube ou la troisième puissance de a, ainsi de suite.

22. Ces principes posés, venons à la multiplication des quantités complexes. Il faut, pour cette multiplication, suivre le même procédé qu'on suit en Arithmétique pour les nombres qui ont plusieurs chiffres, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier successivement chacun des termes du multiplicande, par chacun des termes du multiplicateur, et cela en observant les règles que nous venons de donner pour les monomes. On n'est point assujetti, comme en Arithmétique, à opérer en allant de droite à gauche plutôt que de gauche à droite; cela est indifférent; nous prendrons même ce dernier parti qui est le plus en usage.

Ier Exemple. On propose de multiplier $a+b$
par................ c

Produit......... $ac+bc$.

1°. Je multiplie a par c, ce qui (15) me donne ac. Je multiplie b par c, ce qui me donne bc; j'ajoute ce second produit au premier en les unissant par le signe $+$, et j'ai $ac+bc$ pour produit total. S'il y avait un second terme au multiplicateur, je multiplierais actuellement par ce second terme, et j'ajouterais ce second produit au premier.

IIe Exemple. Si j'avais........ $a+b$
à multiplier par $c+d$

Produit..... $ac+bc+ad+bd$.

Après avoir multiplié a et b par c, ce qui donne $ac+bc$, je multiplierais aussi a et b par d, ce qui me donnerait $ad+bd$, qui, joint au premier produit, donne $ac+bc+ad+bd$. En effet, multiplier $a+b$ par $c+d$, c'est prendre non-seulement a, mais encore b, autant de fois qu'il y a d'unités dans la totalité de $c+d$, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans c, plus autant de fois qu'il y a d'unités dans d.

III^e^ Exemple. On propose de multiplier $a-b$

par................. c

Produit.......... $ac-bc$.

Après avoir multiplié a par c, ce qui donne ac, je multiplie b par c, ce qui donne bc; mais au lieu d'ajouter ce dernier produit au premier, je l'en retranche, parce qu'ici ce n'est point la somme des deux quantités a et b qu'il s'agit de multiplier, mais seulement leur différence, puisque $a-b$ signifie qu'on doit retrancher b de a; or si l'on multiplie a tout entier, ainsi qu'on le fait par la première opération, il est visible qu'on y multiplie de trop la quantité b dont a devait être diminué; il faut donc ôter de ce produit la quantité b multiplié par c, c'est-à-dire ôter bc.

Dans les nombres cette attention n'est pas nécessaire, parce qu'avant de faire la multiplication, on ferait la soustraction qui est indiquée ici dans le multiplicande. Si l'on avait, par exemple, $8-3$ à multiplier par 4, on réduirait tout de suite le multiplicande $8-3$ à 5 que l'on multiplierait ensuite par 4. Mais on voit aussi qu'on viendrait également au même résultat en multipliant d'abord 8 par 4, ce qui donnerait 32, puis 3 par 4, ce qui donnerait 12; et retranchant ce dernier produit du premier, on aurait 20 comme par la première voie; or cette seconde manière, qu'il serait peut-être ridicule d'employer pour les nombres, devient indispensable pour les quantités littérales, puisque dans celles-ci la soustraction préliminaire ne peut avoir lieu.

IV^e^ Exemple. On propose de multiplier $a-b$

par.............. $c-d$

Produit....... $ac-bc-ad+bd$

On multipliera d'abord $a-b$ par c, ce qui donnera $ac-bc$; on multipliera ensuite $a-b$ par d, ce qui donnera $ad-bd$; enfin on retranchera ce second produit $ad-bd$ du premier, et (11) on aura $ac - bc - ad + bd$ pour produit total. En effet, puisque le multiplicateur est moindre que c, de la quantité d, il marque qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'autant de fois qu'il y a d'unités dans c diminué de d; or comme on ne peut faire cette diminution avant la multiplication, on peut prendre d'abord $a - b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans c, c'est-à-dire, multiplier $a - b$ par c, puis en retrancher $a - b$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans d, c'est-à-dire, en retrancher le produit de $a - b$ par d.

23. Si l'on fait attention aux signes des termes qui composent le produit total $ac - bc - ad + bd$, et qu'on les compare avec les signes des termes du multiplicande et du multiplicateur qui les ont donnés, on observera, 1° que le terme a qui est censé avoir le signe $+$, étant multiplié par le terme c qui est censé aussi avoir le signe $+$, a donné pour produit ac qui est censé avoir le signe $+$; 2° que le terme b qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme c qui est censé avoir le signe $+$, a donné pour produit bc avec le signe $-$; 3° que le terme a qui a le signe $+$, multiplié par le terme d qui a le signe $-$, a donné pour produit ad avec le signe $-$; 4° enfin que le terme b qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme d qui a aussi le signe $-$, a donné pour produit le terme bd qui a le signe $+$.

Donc à l'avenir nous pourrons reconnaître facilement dans les multiplications partielles, si les produits particuliers doivent être ajoutés ou retranchés; il suffira pour cela d'observer les deux règles suivantes que nous fournissent les observations que nous venons de faire.

24. *Si les deux termes que l'on doit multiplier l'un par l'autre, ont tous deux le même signe, c'est-à-dire ou tous deux* $+$ *ou tous deux* $-$, *leur produit aura toujours le signe* $+$. *Si, au contraire, ils ont différens signes, c'est-à-dire l'un* $+$ *et l'autre* $-$, *ou l'un* $-$ *et l'autre* $+$, *leur produit aura toujours le signe.* $-$ A l'aide de ces règles et de celles que nous avons données (15, 20, 21 et 22), on est en état de faire toute multiplication algébrique. Mais pour procéder avec méthode,

on observera d'abord la règle des signes, puis celles des lettres et des exposans.

Terminons par un exemple où toutes ces règles soient appliquées.

Ve Ex. On propose de multiplier $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

Par............. $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{lrrrrr}
& 5a^7 & -2a^6b & +4a^5b^2 & & \\
& & -20a^6b & +8a^5b^2 & -16a^4b^3 & \\
& & & +10a^4b^3 & -4a^3b^4 & +8a^2b^5 \\
\hline
\text{Produit} & 5a^7 & -22a^6b & +12a^5b^2 & -6a^4b^3 & -4a^3b^4+8a^2b^5
\end{array}$$

Je multiplie successivement les trois termes............ $5a^4$, $-2a^3b$, $+4a^2b^2$, par le premier terme a^3 du multiplicateur. Les deux termes $5a^4$ et a^3 ayant le même signe, le produit doit (24) avoir le signe $+$; mais (7) j'omets ce signe, parce qu'il appartient au premier terme du produit. Je multiplie ensuite le coefficient 5 de a^4, par le coefficient 1 de a^3 (21), ce qui me donne 5; enfin multipliant a^4 par a^3 selon la règle donnée (20), c'est-à-dire ajoutant les deux exposans 4 et 3, j'ai a^7, et par conséquent $5a^7$ pour produit. Je passe au terme $-2a^3b$; et, pour le multiplier par a^3, je vois que les signes de ces deux quantités étant différens, le produit doit avoir le signe $-$; je multiplie ensuite le coefficient 2 de a^3b par le coefficient 1 de a^3, et enfin a^3b par a^3, et j'ai $-2a^6b$ pour produit. Par un procédé semblable, le terme $+4a^2b^2$ multiplié par a^3 donnera $+4a^5b^2$. Après avoir multiplié tous les termes du multiplicande par a^3, il faut les multiplier par le second terme $-4a^2b$ du multiplicateur. Le terme $5a^4$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent donnera $-20a^6b$, le terme $-2a^3b$ multiplié par $-4a^2b$ de même signe, donnera $+8a^5b^2$; et le terme $+4a^2b^2$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-16a^4b^3$. Enfin on passera à la multiplication par le terme $+2b^3$, et en suivant les mêmes règles, on trouvera........ $+10a^4b^3$, $-4a^3b^4+8a^2b^5$ pour les trois produits partiels. Faisant attention que parmi tous les différens produits partiels qu'on

Exemples de la Multiplication.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline +a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ \hline a^6+3a^5b+3a^4b^2+a^3b^3 \\ \quad -3a^5b-9a^4b^2-9a^3b^3-3a^2b^4 \\ \qquad +3a^4b^2+9a^3b^3+9a^2b^4+3ab^5 \\ \qquad\qquad -a^3b^3-3a^2b^4-3ab^5-b^6 \\ \hline a^6 \quad -3a^4b^2 \quad +3a^2b^4 \quad -b^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5a^3-4a^2b+5ab^2-3b^3 \\ 4a^2-5ab+2b^2 \\ \hline 20a^5-16a^4b+20a^3b^2-12a^2b^3 \\ \quad -25a^4b+20a^3b^2-25a^2b^3+15ab^4 \\ \qquad +10a^3b^2-8a^2b^3+10ab^4-6b^5 \\ \hline 20a^5-41a^4b+50a^3b^2-45a^2b^3+25ab^4-6b^5 \end{array}$$

Exemples de Division.

$$\begin{array}{r|l} a^3-b^3 & a-b \\ \cline{2-2} -a^3+a^2b & a^2+ab+b^2 \\ \hline +a^2b-b^3 & \\ -a^2b+ab^2 & \\ \hline +ab^2-b^2 & \\ -ab^2+b^3 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8a^4-2a^3b-13a^2b^2-3ab^3 & 4a^2+5ab+b^2 \\ \cline{2-2} -8a^4-10a^3b-2a^2b^2 & 2a^2-3ab \\ \hline -12a^3b-15a^2b^2-3ab^3 & \\ +12a^3b+15a^2b^2+3ab^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a^4+2aabb+b^4-c^4 & aa+bb+cc \\ \cline{2-2} -a^4-aabb-aacc & aa+bb-cc \\ \hline +aabb-aacc+b^4-c^4 & \\ -aabb-b^4-bbcc & \\ \hline -aacc-bbcc-c^4 & \\ +aacc+bbcc+c^4 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a^6-b^6 & a^3+b^3 \\ \cline{2-2} -a^6-a^3b^3 & a^3-b^3 \\ \hline -a^3b^3-b^6 & \\ +a^3b^3+b^6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 20a^5-41a^4b+50a^3b^2-45a^2b^3+25ab^4-6b^5 & 5a^3-4a^2b+5ab^2-3b^3 \\ \cline{2-2} -20a^5+16a^4b-20a^3b^2+12a^2b^3 & 4a^2-5ab+2b^2 \\ \hline -25a^4b+30a^3b^2-33a^2b^3+25ab^4-6b^5 & \\ +25a^4b-20a^3b^2+25a^2b^3-15ab^4 & \\ \hline +10a^3b^2-8a^2b^3+10ab^4-6b^5 & \\ -10a^3b^2+8a^2b^3-10ab^4+6b^5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

vient de trouver, il y a des termes semblables, c'est-à-dire composés des mêmes lettres avec les mêmes exposans, on fera la réduction en réunissant ceux qui ont le même signe et déduisant ceux qui ont des signes contraires, ce qui donnera enfin $5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ pour produit total.

25. Comme il importe de se familiariser avec la pratique de cette règle, nous joignons ici, pour exercer les commençans, une table qui renferme plusieurs exemples. Nous ajouterons en même temps quelques remarques sur quelques-uns de ces exemples.

Dans le premier, on a multiplié $a+b$ qui représente généralement la somme de deux quantités, par $a-b$ qui représente généralement leur différence, et l'on trouve pour produit a^2-b^2 qui est la différence du quarré de la première au quarré de la seconde, ou la différence des quarrés de ces deux quantités. On peut donc dire généralement que *la somme de deux quantités, multipliée par leur différence, donne toujours, pour produit, la différence des quarrés de ces mêmes quantités.* Que l'on prenne deux nombres quelconques, 5 et 3, par exemple; leur somme est 8 et leur différence 2, lesquelles multipliées l'une par l'autre, donnent 16, qui est en effet la différence du quarré de 5 au quarré de 3, c'est-à-dire de 25 à 9. Et réciproquement, *la différence des quarrés de deux quantités peut toujours être considérée comme formée par la multiplication de la somme de ces deux quantités par leur différence.* Ainsi la quantité b^2-c^2, qui est la différence du quarré de b au quarré de c, vient de la multiplication de $b+c$ par $b-c$. Ces deux propositions nous seront utiles par la suite. On peut déjà remarquer, en passant, un des usages de l'Algèbre pour découvrir des vérités générales.

Le second exemple fait voir, d'une manière générale et simple, ce que nous avons dit en arithmétique sur la composition du quarré, savoir, que *le quarré de la somme* $a+b$ *de deux quantités, est composé du quarré* a^2 *de la première, du double* $2ab$ *de la première multipliée par la seconde, et du quarré* b^2 *de la seconde.*

Le troisième exemple confirme ce que nous avons dit aussi en Arithmétique sur la formation du cube. On y voit...... $a^2+2ab+b^2$, quarré de $a+b$, qui, après avoir été multiplié par $a+b$, donne $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, dont le premier terme est le cube de a, le second qui est le même que $3a^2\times b$, est le triple du quarré de a, multiplié par b : on voit de même que $3ab^2$ est le triple de a multiplié par le quarré de b ; et enfin b^3 est le cube de b.

26. Pour indiquer la multiplication entre deux quantités complexes, on est dans l'usage de renfermer chacune de ces deux quantités entre deux crochets, et d'interposer entre elles l'un des signes de multiplication dont nous avons parlé plus haut (14); quelquefois même on n'interpose aucun signe; ainsi pour marquer que la totalité de la quantité $a^2+3ab+b^2$ doit être multipliée par la totalité de $2a+3b$, on écrit..... $(a^2+3ab+b^2)\times(2a+3b)$ ou $(a^2+3ab+b^2).(2a+3b)$ ou simplement $(a^2+3ab+b^2)(2a+3b)$.

27. Il y a beaucoup de cas où il est plus avantageux d'indiquer la multiplication que de l'exécuter. On ne peut donner de règles générales sur ce sujet, parce que cela dépend des circonstances qui donnent lieu à ces opérations : nous verrons par la suite plusieurs de ces cas. C'est principalement par l'usage qu'on apprend à les distinguer. On peut cependant dire assez généralement, qu'il convient de se contenter d'indiquer les multiplications, lorsque celles-ci doivent être suivies de la division ; parce que cette dernière opération s'exécutant souvent, ainsi qu'on va le voir, par la seule suppression des facteurs communs au dividende et au diviseur, on distingue plus facilement ces facteurs communs, lorsqu'on n'a fait qu'indiquer la multiplication.

De la Division.

28. La manière de faire cette opération en Algèbre, dépend beaucoup des signes que nous sommes convenus d'employer pour la multiplication. L'objet en est d'ailleurs le même qu'en Arithmétique.

29. Lorsque la quantité qu'on proposera à diviser n'aura aucune lettre commune avec le diviseur, alors il n'est pas possible d'exécuter l'opération; on ne peut que l'indiquer, et cela se fait en écrivant le diviseur au-dessous du dividende, en forme de fraction, et séparant l'un de l'autre par un trait; ainsi pour marquer qu'on doit diviser a par b, on écrit $\frac{a}{b}$, et l'on prononce a divisé par b; pour marquer qu'on doit diviser $aa+bb$ par $c+d$, on écrit $\frac{aa+bb}{c+d}$.

30. Lorsque le dividende et le diviseur sont monomes, si toutes les lettres qui se trouvent dans le diviseur, se trouvent aussi dans le dividende, la division peut être faite exactement, et on l'exécutera en suivant cette règle... *Supprimez dans le dividende, toutes les lettres qui lui sont communes avec le diviseur; les lettres qui resteront composeront le quotient.* Ainsi pour diviser ab par a, je supprime a dans le dividende ab, et j'ai b pour quotient. Pour diviser abc par ab, je supprime ab dans le dividende, et j'ai c pour quotient. En effet, puisque (15) les lettres écrites sans aucun signe interposé, sont les facteurs de la quantité dans laquelle elles entrent, les lettres du diviseur, qui sont communes au dividende, sont donc facteurs de ce dividende; or nous avons vu (*Arith.* 69) que lorsqu'on divise un produit par un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur; donc le quotient doit être composé des lettres du dividende, qui ne sont point communes entre celui-ci et le diviseur.

31. Il suit de là que lorsqu'il y aura des exposans, la règle qu'on doit suivre est de *retrancher l'exposant de chaque lettre du diviseur, de l'exposant de pareille lettre du dividende*; ainsi pour diviser a^3 par a^2, je retranche 2 de 3, il me reste 1, et par conséquent j'ai a^1 ou a pour quotient. De même, ayant à diviser $a^4b^3c^2$ par a^2bc, j'aurai a^2b^2c. En effet $\frac{a^3}{a^2}$ est la même chose que $\frac{aaa}{aa}$ qui, selon la règle donnée (30), se réduit à a, en ôtant les lettres communes au dividende et au divi-

seur. En général, puisque le quotient ne doit avoir que les lettres qui ne sont point communes au dividende et au diviseur, l'exposant de chaque lettre du quotient ne doit donc être que la différence entre les exposans de cette lettre dans le dividende et dans le diviseur.

32. Donc si une lettre a le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, elle aura zéro pour exposant dans le quotient; ainsi a^3 divisé par a^3 donnera a^0; a^3bc^2 divisé par a^3bc^2, donne $a^1b^0c^0$ ou ab^0c^0. Dans ce cas, on peut se dispenser d'écrire les lettres qui ont o pour exposant; car chacune d'elles n'est autre chose que l'unité. En effet, lorsqu'on divise a^3 par a^3, on cherche combien de fois a^3 contient a^3, or il le contient évidemment 1 fois; le quotient doit donc être 1 : d'un autre côté a^3 divisé par a^3 donne pour quotient a^0; donc a^0 vaut 1. En général, *toute quantité qui a zéro pour exposant, vaut* 1.

33. Si quelques lettres du diviseur ne sont pas communes au dividende, ou si quelques-uns des exposans du diviseur sont plus grands que ceux de pareilles lettres du dividende, alors la division ne peut être faite exactement : on ne peut que l'indiquer comme il a été dit ci-dessus (29). Mais on peut simplifier le quotient ou la quantité fractionnaire qui le représente alors. La règle qu'il faut suivre pour cela est de supprimer dans le dividende et dans le diviseur, les lettres qui leur sont communes; ensorte que s'il y a des exposans, on efface la lettre qui a le plus petit exposant, et l'on diminue de pareille quantité le plus grand exposant de la même lettre. Par exemple, si l'on propose de diviser a^5bc^3 par $a^2b^3c^4$, on écrira $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$ que l'on réduira en cette manière; on effacera a^2 dans le diviseur, et l'on écrira seulement a^3 dans le dividende; on effacera b dans le dividende, et l'on écrira seulement b^2 dans le diviseur; enfin on effacera c^3 dans le dividende, et l'on écrira seulement c dans le diviseur; ensorte qu'on aura $\frac{a^3}{b^2c}$.

On trouvera de même, que $\frac{a^2b^5c^3}{a^3bc^2d}$ se réduit à $\frac{b^4c}{ad}$.

Si

Si, par ces opérations, il ne restait plus aucune lettre dans le dividende, il faudrait écrire l'unité; ainsi $\frac{a^2}{a^3}$ se réduira à $\frac{1}{a}$.

La raison de ces règles est facile à saisir après tout ce qui a été dit ci-dessus; car supprimer, ainsi qu'on le prescrit, le même nombre de lettres dans le dividende et dans le diviseur, c'est diviser, par une même quantité, chacun des deux termes de la fraction qui exprime le quotient : or cette opération (*Arith.* 89) n'en change point la valeur et simplifie la fraction.

34. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coefficient que peuvent avoir le dividende, ou le diviseur, ou tous les deux. La règle qu'on doit suivre à leur égard est de les diviser comme en Arithmétique, et si la division ne peut pas être faite exactement, on les laisse sous la forme de fraction, que l'on réduit à sa plus simple expression (*Arith.* 92), lorsque cela est possible. Par exemple, ayant à diviser $8a^3b$ par $4a^2b$, je divise 8 par 4, et j'ai pour quotient 2; divisant ensuite a^3b par a^2b, j'ai pour quotient a, et par conséquent $2a$ pour quotient total. Ayant à diviser $8a^3b^2$ par $6ab$, j'écris $\frac{8a^3b^2}{6a\,b}$ que je réduis à $\frac{4a^2b}{3}$;

35. La règle que nous venons de donner (33) est générale, soit que le dividende et le diviseur soit monomes, soit qu'ils soient complexes ou polynomes, pourvu que dans ce dernier cas les lettres communes au dividende et au diviseur soient en même temps communes à tous les termes séparés par les signes $+$ et $-$. C'est ainsi qu'ayant $a^5+4a^4b-5a^2b^3$ à diviser par a^3-5a^2b, on réduira le quotient $\frac{a^5+4a^4b-5a^2b^3}{a^3-5a^2b}$ à la quantité $\frac{a^3+4a^2b-5b^3}{a-5b}$ en supprimant a^2 qui est facteur commun de tous les termes du dividende et du diviseur.

36. Si le dividende et le diviseur sont complexes, on ne peut donner de règles générales pour connaître, par l'inspection seule, si la division peut ou ne peut pas être faite exactement. Il faut, pour s'en assurer et trouver en même temps le quotient, faire l'opération que nous allons enseigner. 1°. Disposer, sur une même ligne, le dividende et le diviseur, et *ordonner* leurs

termes par rapport à une même lettre commune à l'un et à l'autre ; c'est-à-dire, écrire, par ordre de grandeur, les termes où cette lettre a des exposans consécutivement plus petits. 2°. Cette disposition faite, on sépare le dividende du diviseur par un trait, et on procède à la division en prenant seulement le premier terme du dividende que l'on divise, suivant les règles données ci-dessus (30, 31 et 34), par le premier terme du diviseur, et l'on écrit le quotient sous le diviseur. 3°. On multiplie successivement tous les termes du diviseur par le quotient qu'on vient de trouver, et on porte les produits sous le dividende, en observant de changer leur signe. 4°. On souligne le tout, et après avoir fait la réduction des termes semblables, on écrit le reste au-dessous pour commencer une seconde division de la même manière, en prenant pour premier terme celui des termes restans qui a le plus fort exposant.

Sur quoi il faut remarquer qu'ici, comme dans la multiplication, on doit avoir égard aux signes du terme du dividende et du terme du diviseur qne l'on emploie : la règle est la même que pour la multiplication, c'est-à-dire, que *si le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient aura le signe* $+$; *si, au contraire, ils ont différens signes, le quotient aura le signe* $-$. Cette règle, pour les signes, est fondée sur ce que (*Arith.* 74) le quotient multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende. Il faut donc que le quotient ait des signes tels, qu'en le multipliant par le diviseur, on reproduise le dividende avec les mêmes signes; or cette condition entraîne nécessairement la règle que nous venons de donner. Pour procéder avec ordre, on commencera par les signes, puis on divisera le coefficient, enfin les lettres.

Exemple. On propose de diviser $aa-bb$ par $b+a$.

J'ordonne le dividende et le diviseur par rapport à l'une ou à l'autre des deux lettres a et b, par rapport à a, par exemple; et je les écris comme on le voit ici :

$$\begin{array}{l r|l l}
\text{Divid.} \ldots\ldots\ldots & aa - bb & a + b & \text{Diviseur.} \\
 & - aa - ab & a - b & \text{Quotient.} \\
\hline
\text{Reste} \ldots\ldots\ldots & - ab - bb & & \\
 & + ab + bb & & \\
\text{Reste} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & &
\end{array}$$

Le signe du premier terme aa du dividende, étant le même que celui de a premier terme du diviseur, je dois mettre $+$ au quotient; mais comme c'est le premier terme, je puis omettre le signe $+$. Je divise aa par a, j'ai pour quotient a que j'écris sous le diviseur. Je multiplie successivement les deux termes a et b du diviseur, par le premier terme a du quotient, et j'écris les produits aa et ab sous le dividende, avec le signe $-$, contraire à celui qu'a donné la multiplication, parce que ces produits doivent être retranchés du dividende. Je fais la réduction en effaçant les deux termes aa et $-aa$ qui se détruisent; il me reste $-ab$ qui, avec la partie restante $-bb$ du dividende, compose ce qui me reste à diviser. Je continue la division en prenant $-ab$ pour premier terme de mon nouveau dividende. Divisant $-ab$ par a, j'écris $-$ au quotient, parce que les signes du dividende et du diviseur sont différens. Quant aux lettres, je trouve b pour quotient, et je l'écris à la suite du premier quotient. Je multiplie les deux termes a et b du diviseur par le terme $-b$ du quotient; les deux produits sont $-ab$ et $-bb$; je change leurs signes et j'écris $+ab$, $+bb$ sous les parties restantes du dividende. Je fais la réduction en effaçant les parties semblables et de signe contraire : comme il ne reste rien, j'en conclus que le quotient est $a-b$.

On aurait pu également ordonner le dividende et le diviseur par rapport à la lettre b, et alors on aurait eu $-bb+aa$ à diviser par $b+a$, ce qui, en opérant de la même manière, aurait donné $-b+a$ pour quotient, quantité qui est la même que $a-b$. Avant que de passer à l'exemple qui suit, il est à propos que les commençans s'exercent sur les exemples de la table ci-jointe.

37. Si après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, il se trouvait plusieurs termes dans lesquels cette lettre eût le même exposant, on disposerait ceux-ci dans une même colonne verticale, comme on le voit dans l'exemple suivant; et dans cette disposition on observerait d'ordonner tous les termes de chaque colonne par rapport à une même lettre.

Exemple. On propose de diviser...................... $19a^2b^2+13a^3b-20a^4-10a^3c-6a^2bc+2ab^2c-5ab^3$, par $-3ab-5a^2+bb$. J'ordonne le dividende et le diviseur par rapport à la lettre a, ce qui me donne.................... $-20a^4-13a^3b-10a^3c+19a^2b^2-6a^2bc+2ab^2c-5ab^3$ à diviser par $-5a^2-3ab+bb$; mais comme il y a deux termes affectés de a^3; deux termes affectés de a^2, et deux termes affectés de a, je les dispose comme on le voit ici, en ordonnant à chaque colonne, par rapport à la lettre b.

$$
\begin{array}{l l|l l}
\text{Div.}\left\{\begin{array}{r}-20a^4+13a^3b+19a^2b^2-5ab^3\\ -10a^3c-\ \ 6a^2bc+2ab^2c\end{array}\right. & & -5a^2-3ab+bb & \text{Div.}\\
\cline{3-3}
\quad +20a^4+12a^3b-\ \ 4a^2b^2 & & 4a^2-5ab+2ac & \text{Quot.}\\
\cline{1-1}
\text{Reste...}\left\{\begin{array}{r}+25a^3b+15a^2b^2-5ab^3\\ -10a^3c-\ \ 6a^2bc+2ab^2c\end{array}\right. & & &\\
\qquad\qquad -25a^3b-15a^2b^2+5ab^3 & & &\\
\cline{1-1}
\text{Reste...}\quad -10a^3c-\ \ 6a^2bc+2ab^2c & & &\\
\qquad\qquad +10a^3c+\ \ 6a^2bc-2ab^2c & & &\\
\cline{1-1}
\text{Reste}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ 0 & & &
\end{array}
$$

Je procède ensuite à l'opération, en divisant $-20a^4$ premier terme du dividende, par $-5a^2$ premier terme du diviseur. Cette opération faite suivant les règles ci-dessus, me donne pour quotient $+4a^2$ ou simplement $4a^2$, parce que c'est le premier terme; je l'écris au quotient.

Je multiplie les trois termes du diviseur successivement par $4a^2$, et changeant les signes à mesure que je trouve ces produits, je les écris sous le dividende, ce qui me donne........... $20a^4+12a^3b-4a^2b^2$ dont je fais la réduction avec les termes du dividende, et j'ai pour reste et pour nouveau dividende $+25a^3b-10a^3c+15a^2b^2-6a^2bc-5ab^2+2ab^3c$. Je continue la division en prenant $+25a^3b$ pour dividende, et je trouve pour quotient $-5ab$; j'écris ce quotient; je multiplie, par cette même quantité, les trois termes du diviseur; et changeant les signes à mesure que je les trouve, j'écris les produits sous mon nouveau dividende; j'ai $-25a^3b-15a^2b^2+5ab^3$, dont faisant la réduction avec les termes de ce même nouveau dividende, j'ai pour reste et pour troisième dividende........... $-10a^3c-6a^2bc+2ab^2c$. Je passe à une troisième division en prenant $-10a^3c$ pour dividende : je trouve $+2ac$ pour quotient; je fais la multiplication, le changement de signes et la réduction, comme ci-devant, et il ne me reste plus rien; ainsi le quotient est $4a^2-5ab+2ac$.

38. Il arrive souvent qu'une quantité résultante de plusieurs opérations différentes, peut être mise sous la forme d'un produit ou résultat de multiplication; lorsque cela arrive, il est très-souvent utile de lui donner cette forme, en indiquant la multiplication entre ses facteurs. Quoique la méthode générale pour découvrir ces facteurs dépende de connaissances que nous ne donnerons que par la suite, néanmoins nous observerons que lorsqu'on s'est un peu familiarisé avec la multiplication et la division, on les apperçoit, dans beaucoup de cas, avec facilité. Par exemple, si on avait à ajouter.... $5ab-3bc+a^2$, avec $3ab+3bc-2a^2$, on aurait $8ab-a^2$, qui, à cause de la lettre a qui est facteur commun des deux termes $8ab$ et a^2, peut être considéré comme étant venu de la multiplication de $8b-a$ par a, et peut être représenté par..... $(8b-a)\times a$. Il est très-utile de s'exercer à ces sortes de décompositions.

De la manière de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales.

39. La méthode pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales, est analogue à celle que nous avons donnée pour les nombres (*Arith.* 95). Il faut, après avoir ordonné les deux quantités par rapport à une même lettre, diviser celle où cette lettre a le plus grand

exposant, par la seconde, et continuer la division jusqu'à ce que cet exposant y soit devenu moindre que dans la seconde, ou tout au plus égal. On divise ensuite la seconde par le reste de cette division, et avec les mêmes conditions. On divise, après cela, le premier reste par le second, et l'on continue de diviser le reste précédent par le nouveau, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une division exacte : alors le dernier diviseur qu'on aura employé est le plus grand commun diviseur cherché. La demonstration est fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons donnée en Arithmétique, *page* 92.

Avant de mettre cette règle en pratique, nous ferons une observation qui peut en faciliter l'usage; cette observation est qu'on ne change rien au plus grand commun diviseur des deux quantités, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise l'une des deux par une quantité qui n'est point diviseur de l'autre et qui n'a aucun commun diviseur avec cette autre. Par exemple, ab et ac ont pour commun diviseur a; si je multiplie ab par d, il deviendra abd, qui n'a, avec ac, d'autre commun diviseur que a, c'est-à-dire le même qui était entre ab et ac.

Il n'en serait pas de même si je multipliais ab par un nombre qui fût diviseur de ac, ou qui eût un facteur commun avec ac; par exemple, si je multipliais ab par c, il deviendrait abc, dont le diviseur commun avec ac est ac lui-même. Pareillement, si je multipliais ab par cd qui a un facteur commun avec ac, j'aurais $abcd$, dont le diviseur commun avec ac est ac.

40. Concluons de là, 1° que si en cherchant le plus grand commun diviseur de deux quantités, on s'apperçoit dans le cours des divisions que l'on fera successivement, que le dividende ou le diviseur ait un facteur ou un diviseur qui ne soit point facteur de l'autre, on pourra supprimer ce facteur;

2°. Qu'on pourra multiplier l'une des deux quantités par tel nombre qu'on voudra, pourvu que ce nombre ne soit point diviseur de l'autre quantité, et n'ait aucun facteur commun avec elle.

Appliquons maintenant la règle et les remarques que nous venons de faire.

Supposons qu'on demande le plus grand commun diviseur de......... $aa - 3ab + 2bb$ et $aa - ab - 2bb$. Je divise la première par la seconde, j'ai 1 pour quotient, et $-2ab+4bb$ pour reste. Je vais donc diviser $aa-ab-2bb$ par le reste $-2ab+4bb$; mais comme celui-ci a pour facteur $2b$ qui n'est point facteur du nouveau dividende, je supprime ce facteur $2b$, et je me contente de chercher le commun diviseur de $aa - ab - 2bb$ et $-a+2b$, c'est-à-dire de diviser $aa - ab - 2bb$ par $-a+2b$; la division se fait exactement. J'en conclus que $-a+2b$ est le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées.

Proposons-nous pour second exemple, de trouver le plus grand commun diviseur des deux quantités $5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3$ et $7a^2 - 23ab + 6b^2$. Il faudrait donc diviser la première de ces deux quantités par la seconde; mais comme 5 ne peut être divisé exactement par 7, je multiplierai la première par 7, qui n'étant point facteur de tous les termes de la seconde, ne peut rien changer au commun diviseur. J'aurai donc................ $35a^3-126a^2b+77ab^2-42b^3$ à diviser par $7a^2-23ab+6b^2$. En faisant la division, j'aurai $5a$ pour quotient, et pour reste $-11a^2b+47ab^2-42b^3$. Comme l'exposant de a dans celui-ci est encore égal à celui de a dans le diviseur, je puis continuer la division; mais j'observe qu'il faudra encore, par la même raison que ci-dessus, multiplier par 7; d'ailleurs je remarque que je puis ôter b dans tous les termes de $-11a^2b+47ab^2-42b^3$, parce qu'il n'est point facteur commun de tous les termes du diviseur $7a^2-23ab+6b^2$; j'aurai donc, d'après ces observations, $-77a^2+329ab-294b^2$, à diviser par $7a^2-23ab+6b^2$; faisant la division, j'ai -11 pour quotient, et $76ab-228b^2$ pour reste. Je vais donc diviser $7a^2-23ab+6b^2$ qui m'a servi de diviseur jusqu'ici, par le reste $76ab-228b^2$, ou plutôt par $76a-228b$. Pour que la division pût se faire, il faudrait multiplier la première de ces deux quantités par 76; mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si 76 n'est pas facteur de toute la quantité $76a-228b$, ou s'il n'a pas quelqu'un de ses facteurs qui en soit facteur commun. Or je remarque que 76 est 3 fois dans 228; et comme il n'est pas facteur de $7a^2-23ab+6b^2$, je supprime dans le diviseur $76a-228b$, le facteur 76, et j'ai $7a^2-23ab+6b^2$ à diviser par $a-3b$ seulement; la division faite, il ne reste rien; d'où je conclus que le commun diviseur des deux quantités proposées, est $a-3b$.

Des Fractions littérales.

41. Les fractions littérales se calculent suivant les mêmes règles que les fractions numériques, mais en appliquant en même temps les règles que nous avons données ci-dessus concernant l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Comme cette application est facile, nous la ferons très-sommairement.

42. La fraction $\frac{a}{b}$ peut être transformée, sans changer de valeur, en $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{aa}{ab}$, ou $\frac{aa+ab}{ab+bb}$, et ainsi de suite. En effet, ces dernières ne sont autre chose que la première dont on a multiplié les deux termes, par c dans le premier cas, par a dans le second, et par $a+b$ dans le troisième, ce qui (*Arith.* 88) n'en change pas la valeur.

43. La fraction $\frac{aac}{abc}$ est la même chose que $\frac{a}{b}$; la fraction

$\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ est la même que $\frac{2a+bc}{4a+3c}$. Cela est évident (*Arith.* 89), en divisant les deux termes de la première, par ac, et les deux termes de la seconde, par $3a^2$. Au reste cette réduction des fractions à leur plus simple expression, est comprise dans ce qui a été dit (33).

44. La règle générale et la plus sûre pour réduire une fraction quelconque à ses moindres termes, est de diviser les deux termes par leur plus grand commun diviseur que l'on trouve par ce qui a été dit (39 et 40).

45. Pour réduire à une seule fraction une quantité composée d'un entier et d'une fraction, il faut, comme en Arithmétique, multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne. Par exemple, $a+\frac{bd}{c}$, peut être changé en $\frac{ac+bd}{c}$. De même, $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ se réduit à $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, en multipliant l'entier a par le dénominateur $b-d$.

Lorsqu'à la suite de ces opérations il se trouve des termes semblables, il ne faut pas oublier de les réduire; ainsi dans le dernier exemple, la quantité $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ a été changée en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, qui se réduit à $\frac{-ad+cd}{b-d}$ ou $\frac{cd-ad}{b-d}$; en effaçant les deux termes ab et $-ab$ qui se détruisent.

46. Pour tirer les entiers qu'une fraction littérale peut renfermer, cela se réduit, comme en Arithmétique, à diviser le numérateur par le dénominateur, autant qu'il est possible, et en suivant les règles données ci-dessus pour la division; ainsi la quantité $\frac{3ab+ac+cd}{a}$, peut être réduite à $3b+c+\frac{cd}{a}$; pareillement la quantité $\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$, se réduit à $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$ en faisant la division par $a+2b$.

47. Pour réduire plusieurs fractions littérales au même dénominateur, la règle est la même qu'en Arithmétique : ainsi pour réduire à un même dénominateur les trois fractions

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, je multiplie les deux termes a et b de la première, par df qui est le produit des dénominateurs des deux autres fractions, et j'ai $\frac{adf}{bdf}$. Je multiplie de même les deux termes c et d de la seconde, par bf produit des deux autres dénominateurs, et j'ai $\frac{bcf}{bdf}$; enfin je multiplie les deux termes e et f de la dernière, par bd produit des dénominateurs des deux autres, et j'ai $\frac{bde}{bdf}$, ensorte que les trois fractions, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$.

On se conduirait de la même manière si les numérateurs ou dénominateurs, ou tous les deux étaient complexes, mais en observant les règles de la multiplication des quantités complexes. C'est ainsi qu'on trouvera que les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ et $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ et $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, en multipliant les deux termes de la première par $a-b$, et les deux termes de la seconde $a+b$.

48. Quand les dénominateurs ont un diviseur ou facteur commun, on peut réduire les fractions à un même dénominateur plus simplement que par la règle générale : par exemple, si j'avais les deux fractions $\frac{a}{bc}, \frac{d}{bf}$; je vois que les deux dénominateurs seraient les mêmes si f était facteur du premier, et c facteur du second; je multiplie donc les deux termes de la première fraction par f, et les deux termes de la seconde par c; ce qui me donne $\frac{af}{bcf}$ et $\frac{cd}{bcf}$ plus simples que $\frac{abf}{bbcf}$ et $\frac{bcd}{bbcf}$ que j'aurais eues en suivant la règle générale. Si j'avais les trois fractions $\frac{a}{bc}, \frac{d}{bf}, \frac{e}{cg}$; je vois que si fg était facteur du déno-

minateur de la première, cg de celui de la seconde, et bf de celui de la troisième, les trois fractions auraient le même dénominateur ; je multiplie donc les deux termes de la première par fg; les deux termes de la seconde, par cg; et les deux termes de la troisième, par bf, et j'ai $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bcf}{bcfg}$.

On peut appliquer cela aux nombres, en les décomposant en leurs facteurs. Par exemple, $\frac{5}{12}$ et $\frac{3}{16}$ sont la même chose que $\frac{5}{4\times3}$ et $\frac{3}{4\times4}$; je multiplie donc les deux termes de la première par 4, et les deux termes de la seconde par 3, et j'ai $\frac{20}{48}$ et $\frac{9}{48}$.

49. A l'égard de l'addition et de la soustraction, lorsqu'on a réduit les fractions au même dénominateur, il ne s'agit plus que de faire l'addition ou la soustraction des numérateurs. Ainsi les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ et $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, ont donné ci-dessus $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ et $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$; si donc on veut ajouter, on aura $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ qui se réduit à $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Au contraire, si l'on veut retrancher la seconde de la première, on aura
$\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$ qui se réduit à...
$\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

50. Remarquons, en passant, que pour retrancher la seconde fraction, nous avons changé les signes du numérateur seulement : si l'on changeait les signes du numérateur et du dénominateur en même temps, on ne changerait point la fraction, et par conséquent, au lieu de la retrancher, on l'ajouterait; en effet $\frac{a}{b}$ est la même chose que $\frac{-a}{-b}$ selon la règle qui a été donnée (30).

51. Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, on écrira $\frac{ac}{bd}$, en multipliant numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, conformément aux règles de l'Arithmétique ; de même $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ donnera $\frac{1}{4}ab$.

Si l'on avait $\frac{a}{b}$ à multiplier par c, on pourrait considérer c comme étant $\frac{c}{1}$, ce qui ramène cette multiplication au cas précédent, et donne $\frac{ac}{b}$; mais on voit que cela se réduit à multiplier le numérateur par l'entier c ; nous prendrons donc pour règle dorénavant, celle-ci, *pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, il faut multiplier le numérateur par l'entier, et conserver le même dénominateur.*

Si le numérateur et le dénominateur étaient complexes, on leur appliquerait la règle de la multiplication des nombres complexes.

52. Pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, l'opération (*Arith.* 109) se réduit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, ce qui s'exécute par la règle précédente, et donne $\frac{ad}{bc}$. Et pour diviser $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{c+d}{a-b}$, cela se réduit à multiplier $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{a-b}{c+d}$, ce qui donne $\frac{(a+b)\,(a-b)}{(c+d)\,(c+d)}$ ou $\frac{(a+b)\,(a-b)}{(c+d)^2}$, ou en faisant la multiplication indiquée dans le numérateur $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

Enfin, si l'on avait $\frac{a}{b}$ à diviser par c, on pourrait considérer c comme étant $\frac{c}{1}$, ce qui ramènerait au cas précédent, et réduirait à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{1}{c}$, ce qui donne $\frac{a}{bc}$; d'où l'on voit que *pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur par l'entier, et conserver le numérateur.*

Des Équations.

53. Pour marquer que deux quantités sont égales, on les sépare l'une de l'autre par ce signe $=$, qui se prononce par le mot *égale*, ou par les mots *est égal à;* ainsi cette expression $a=b$ se prononcerait en disant a égale b, ou a est égal à b. L'assemblage de deux ou de plusieurs quantités séparées ainsi par le signe $=$, est ce qu'on appelle une *Equation*. La totalité des quantités qui sont à la gauche du signe $=$, forme ce qu'on appelle le *premier membre* de l'équation; et la totalité de celles qui sont à la droite de ce même signe, forme le *second membre*. Dans l'équation $4x-3=2x+7$, $4x-3$ forme le premier membre, et $2x+7$ forme le second. Les équations sont d'un très-grand usage pour la résolution des questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Toute question qui peut être résolue par l'Algèbre, renferme toujours dans son énoncé, soit explicitement, soit implicitement, un certain nombre de conditions qui sont autant de moyens de saisir les rapports des quantités inconnues, aux quantités connues dont celles-là dépendent. Ces rapports peuvent toujours, ainsi qu'on le verra par la suite, être exprimés par des équations dans lesquelles les quantités inconnues et les quantités connues se trouvent combinées les unes avec les autres, et cela d'une manière plus ou moins composée, selon que la question est plus ou moins difficile.

Ainsi pour résoudre, par l'Algèbre, les questions qu'on peut proposer sur les quantités, il faut trois choses: 1°. Saisir dans l'énoncé ou dans la nature de la question, les rapports qu'il y a entre les quantités connues et les quantités inconnues. C'est une faculté que l'esprit acquiert, comme beaucoup d'autres, par l'usage; mais il n'y a point de règles générales à donner là-dessus. 2°. Exprimer chacun de ces rapports par une équation. Cette condition peut être réduite à une seule règle, que nous exposerons par la suite; mais l'application en est plus ou moins facile selon la nature des questions, la capacité et l'exercice que peut avoir celui qui entreprend de les résoudre. 3°. Résoudre cette équation, ou ces équations, c'est-à-dire, en déduire la valeur des quantités inconnues. Ce dernier point est susceptible d'un nombre déterminé de règles : c'est par lui que nous allons commencer.

Comme les questions qu'on peut avoir à résoudre peuvent conduire à des équations plus ou moins composées, on a partagé celles-ci en plusieurs classes ou degrés que l'on distingue par l'exposant de la quantité ou des quantités inconnues qui s'y trouvent : nous ferons connaître ces équations à mesure que nous avancerons : celles dont nous allons nous occuper d'abord sont les *équations du premier degré*. On nomme ainsi les équations dans lesquelles les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entr'elles.

Des Équations du premier degré à une seule inconnue.

54. *Résoudre une équation, c'est la réduire à une autre, dans laquelle l'inconnue, ou la lettre qui la représente, se trouve seule dans un membre, et où il n'y ait plus que des quantités connues dans l'autre membre.*

Par exemple, si l'on proposait cette question : *Trouver un nombre dont le quadruple ajouté à 3, donne autant que son triple ajouté à* 12. En représentant ce nombre par x, son quadruple serait $4x$, lequel ajouté à 3 fait $4x+3$; d'un autre côté, le triple de ce même nombre x est $3x$, lequel ajouté à 12 fait $3x+12$; puis donc que $4x+3$ doit donner autant que $3x+12$, il faut que le nombre x soit tel que l'on ait $4x+3=3x+12$; c'est là l'équation qu'il s'agit de résoudre pour trouver le nombre demandé. Or il est évident que puisque les deux quantités séparées par le signe $=$ sont égales, elles le seront encore si l'on retranche de chacune $3x$, ce qui réduit l'équation à $x+3=12$; enfin ces deux-ci seront encore égales, si de chacune on retranche le même nombre 3, ce qui donne $x=9$, et résout la question ; car il est évident que x est connu, puisqu'il est égal à une quantité connue 9.

L'objet que nous nous proposons ici, est de donner des règles pour ramener l'équation, dans tous les cas, à avoir ainsi l'inconnue seule dans un membre, et n'avoir que des quantités connues dans l'autre membre. Pour une question aussi simple que celle que nous venons de prendre pour exemple, l'usage des équations serait sans doute superflu; mais toutes les questions ne sont pas de cette facilité, et il ne s'agit encore que de faire entendre comment la question est résolue, lorsque l'inconnue est seule dans un membre, et qu'il n'y a plus que des quantités dans l'autre.

Les règles pour résoudre les équations dont il s'agit ici, c'est-à-dire pour les réduire à avoir l'inconnue seule dans un membre, se réduisent à trois, qui sont relatives aux trois différentes manières dont l'inconnue peut se trouver mêlée ou engagée avec des quantités connues. Dorénavant nous représenterons les quantités inconnues par quelques-unes des dernières lettres x, y, z de l'alphabet, pour les distinguer des quantités connues que nous représenterons, ou par des nombres, ou par les premières lettres de l'alphabet.

55. L'inconnue peut se trouver mêlée avec des quantités connues en trois manières : 1° par addition ou soustraction, comme dans l'équation $x+3=5-x$; 2° par addition, soustraction et multiplication, comme dans l'équation..... $4x-6=2x+16$; 3° enfin par addition, soustraction, multiplication et division, comme dans l'équation $\frac{9}{5}x-4=\frac{2}{3}x+17$, ou par ces deux dernières opérations seulement, ou par la dernière seulement. Voici les règles qu'il faut suivre pour dégager l'inconnue dans ces différens cas.

56. *Pour faire passer un terme quelconque d'une équation, d'un membre de cette équation dans l'autre, il faut effacer ce terme et l'écrire dans l'autre membre avec le signe contraire à celui qu'il a dans le membre où il est.* Sur quoi il faut se rappeler qu'un terme qui n'a pas de signe, est censé avoir le signe $+$. Par exemple, dans l'équation $4x+3=3x+12$, si je veux faire passer le terme $+3$ dans le second membre, j'écris $4x=3x+12-3$, où l'on voit que le terme 3 n'est

plus dans le premier membre, mais qu'il est dans le second avec le signe $-$, contraire au signe $+$ qu'il avait dans le premier. Cette équation réduite, revient à $4x=3x+9$; si l'on veut maintenant faire passer le terme $3x$ dans le premier membre, on écrira $4x-3x=9$, qui, en réduisant, devient $x=9$.

Pareillement, si dans l'équation $5x-7=21-4x$, je veux faire passer le terme -7 dans le second membre, j'écrirai $5x=21-4x+7$, qui se réduit à $5x=28-4x$; si je veux ensuite faire passer $4x$, j'écrirai $5x+4x=28$, ou, en réduisant, $9x=28$. Nous verrons dans quelques momens comment s'achève la résolution de cette équation. La raison de cette règle est bien facile à saisir. Puisque les quantités qui composent le premier membre sont, ensemble, égales à la totalité de celles qui composent le second, il est évident qu'on ne trouble point cette égalité, si ayant ajouté ou ôté à l'un des membres un terme quelconque, on ajoute, ou l'on ôte à l'autre, ce même terme; or, lorsqu'on efface un terme qui a le signe $+$, c'est diminuer le membre où il se trouve; il faut donc diminuer l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire y écrire ce terme avec le signe $-$. Au contraire, lorsqu'on efface un terme qui a le signe $-$, il est évident qu'on augmente le membre où il se trouve, il faut donc augmenter l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire, écrire ce terme avec le signe $+$.

57. On voit donc que par cette règle on peut faire passer à la fois, dans un même membre, tous les termes affectés de l'inconnue, et toutes les quantités connues dans l'autre. On choisira d'abord dans quel membre on veut avoir les termes affectés de l'inconnue ; cela est indifférent : je suppose que ce soit dans le premier. On écrira de nouveau l'équation, en observant de conserver aux termes affectés de l'inconnue, et qui étaient dans le premier membre, les signes qu'ils avaient; on écrira, à la suite de ceux-là, les termes affectés de l'inconnue qui se trouvent dans l'autre membre, mais en observant de changer leur signe. A la suite de tous ces termes, on écrira le signe $=$, et l'on formera le second membre, en écrivant les quantités connues qui composaient d'abord le second membre,

en les écrivant, dis-je, avec les mêmes signes qu'elles avaient, et ensuite les quantités connues qui étaient dans le premier membre, mais en leur donnant des signes contraires à ceux qu'elles avaient. C'est ainsi que l'équation $7x-8=14-4x$ devient $7x+4x=14+8$, ou $11x=22$. Pareillement l'équation $ax+bc-cx=ac-bx$, devient $ax-cx+bx=ac-bc$.

58. Il peut arriver, par cette transposition, que ce qui reste des x, après la réduction, se trouve avoir le signe $-$; par exemple, si l'on avait $3x-8=4x-12$, en passant tous les x dans le premier membre, on aurait $3x-4x=-12+8$, qui se réduit à $-x=-4$; alors il n'y a qu'à changer les signes de l'un et de l'autre membre, ce qui, dans le cas présent, donne $+x=+4$, ou $x=4$. En effet, on était également maître de transposer les x dans le second membre, ce qui aurait donné $-8+12=4x-3x$, qui se réduit à $4=x$, qui est la même chose que $x=4$.

59. On peut souvent abréger la réduction de l'équation, lorsqu'elle est numérique, ou, lorsqu'étant littérale, elle renferme des quantités semblables. Si ces quantités ont le même signe dans différens membres, on efface l'une et on diminue l'autre de pareille quantité; au contraire, on les ajoute lorsqu'elles ont différens signes. Par exemple, dans l'équation $6b-4a+2x=5a+3x$, j'efface $2x$ dans le premier membre, et j'écris seulement x dans le second; j'efface $5a$ dans le second, et j'augmente $4a$ de $5a$, ce qui me donne tout de suite..... $6b-9a=x$. On voit donc que s'il se trouvait de part et d'autre des termes parfaitement égaux, et de même signe, on pourrait les supprimer tout de suite; c'est ainsi que l'équation....... $5a+2b=5a+x$, se réduit tout de suite à $2b=x$.

60. Lorsqu'on a passé dans un membre, tous les termes affectés de l'inconnue, et toutes les quantités connues dans l'autre membre, s'il n'y a point de fractions dans l'équation, il ne s'agit plus que d'exécuter la règle suivante pour avoir la valeur de l'inconnue. *Ecrivez l'inconnue seule dans un membre, et donnez pour diviseur au second membre, la quantité qui multipliait l'inconnue dans le premier.* Par exemple, dans l'équation

l'équation $7x-8=14-4x$ que nous avons traitée ci-dessus, nous avons eu, par la transposition et la réduction, $11x=22$; pour avoir x, je n'ai autre chose à faire qu'à écrire $x=\frac{22}{11}$, qui se réduit à $x=2$; c'est-à-dire, écrire x seul dans le premier membre, et faire servir son multiplicateur 11, de diviseur au second membre 22. En effet, lorsqu'au lieu de $11x$, j'écris seulement x, je n'écris que la onzième partie du premier membre; il faut donc, pour conserver l'égalité, n'écrire que la onzième partie du second membre, c'est-à-dire, diviser le second membre par 11.

Pareillement, si l'on proposait l'équation $12x-15=4x+25$; après avoir passé (56) tous les x d'un côté, et toutes les quantités connues de l'autre, on aura $12x-4x=25+15$, ou, en réduisant, $8x=40$; maintenant pour avoir x, j'écris $x=\frac{40}{8}$, qui se réduit à $x=5$. Car, lorsqu'au lieu de $8x$ j'écris x seulement, je n'écris que la huitième partie du premier membre; je dois donc, pour maintenir l'égalité, n'écrire que la huitième partie du second membre, c'est-à-dire, n'écrire que $\frac{40}{8}$.

Si les quantités connues qui multiplient x, au lieu d'être des nombres, étaient représentées par des lettres, la règle ne serait pas différente pour cela : ainsi, dans l'équation $ax=bc$, il n'y a autre chose à faire, pour avoir x, que d'écrire $x=\frac{bc}{a}$.

Si, après la transposition faite, il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue, la règle est encore la même; ainsi, dans l'équation $ax+bc-cx=ac-bx$, que nous avons eue ci-dessus, on a, après la transposition, $ax-cx+bx=ac-bc$; pour avoir x, il ne s'agit plus que d'écrire $x=\frac{ac-bc}{a-c+b}$, c'est-à-dire, écrire x seul dans un membre, et donner pour diviseur au second, la quantité qui multipliait x dans le premier, laquelle est ici $a-c+b$, puisque la quantité $ax-cx+bx$, est x multiplié par la totalité des trois quantités $a-c+b$.

61. On voit donc que, lorsqu'après la transposition, il y a plusieurs termes affectés de x, on doit, pour avoir la valeur

de x, diviser le second membre par la totalité des quantités qui affectent x dans le premier, en prenant ces quantités avec leurs signes tels qu'ils sont. Par exemple, dans l'équation $ax = bc - 2x$, on a, par la transposition, $ax + 2x = bc$; et en appliquant la règle actuelle ou la division, on aura $x = \frac{bc}{a+2}$. De même, l'équation $x - ab = bc - ax$, donne par la transposition $x + ax = bc + ab$, et par conséquent $x = \frac{bc+ab}{1+a}$; car il ne faut pas oublier ici (5) que le multiplicateur de x dans le premier terme, de $x + ax$ est 1; ensorte que dans $x + ax$, x est multiplié par $1 + a$; en effet, dans $x + ax$, x se trouve une fois de plus que dans ax.

62. S'il se trouvait quelque quantité qui fût facteur commun de tous les termes de l'équation, on pourrait simplifier, en divisant tous les termes par ce facteur commun : par exemple, dans l'équation $15bb = 27ab + 6bx$, je diviserais par $3b$, qui est facteur commun de tous les termes, et j'aurais $5b = 9a + 2x$, qui, par la transposition, devient $5b - 9a = 2x$, et enfin par la division, donne $\frac{5b-9a}{2} = x$ ou $x = \frac{5b-9a}{2}$.

63. Les règles que nous venons de donner ont toujours lieu, lors même que les différens termes de l'équation ont des dénominateurs, pourvu que ces dénominateurs ne contiennent pas l'inconnue; mais comme l'application de ces règles est plus facile pour les commençans, lorsqu'il n'y a pas de fractions dans l'équation, nous allons ajouter ici une règle pour faire disparaître les dénominateurs.

64. Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, *il faut multiplier chaque terme qui n'a pas de dénominateur, par le produit de tous les dénominateurs; et multiplier le numérateur de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres fractions seulement.* Par exemple, si j'avais l'équation $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, je multiplierais le numérateur $2x$

de la fraction $\frac{2x}{3}$, par 35, produit des dénominateurs 5 et 7, ce qui me donnerait $70x$. Je multiplierais le terme 4, qui n'a point de dénominateur, par 105, produit des trois dénominateurs 3, 5, 7, ce qui me donnerait 420. Je multiplierais le numérateur $4x$ de la fraction $\frac{4x}{5}$ par 21, produit des deux dénominateurs 3 et 7, et j'aurais $84x$. Je multiplierais 12, qui n'a pas de dénominateur, par le produit 105 des trois dénominateurs, et j'aurais 1260. Enfin je multiplierais le numérateur $5x$ de la fraction $\frac{5x}{7}$ par 15, produit des deux autres dénominateurs 3 et 5, ce qui me donne $75x$: ensorte que l'équation proposée est changée en celle-ci, $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, dans laquelle, pour avoir x, il ne s'agit plus que d'appliquer les deux règles précédentes. Par la première (56) on changera cette équation en $70x - 84x + 75x = 1260 - 420$; ou, en réduisant $61x = 840$, et par la seconde (60), $x = \frac{840}{61}$, qui, en faisant la division, se réduit à $x = 13\frac{47}{61}$.

La raison de cette règle est facile à appercevoir, si l'on se rappelle ce qui a été dit (*Arith.* 91) pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur. En effet, si dans l'équation proposée $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, on voulait réduire au même dénominateur, les trois fractions $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, il faudrait multiplier leurs numérateurs par les mêmes nombres par lesquels notre règle actuelle prescrit de les multiplier, et donner à ces nouveaux numérateurs, pour dénominateur commun, le produit de tous les dénominateurs; ensorte que l'équation proposée serait changée en cette autre

$$\frac{70x}{105} - 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105},$$

qui est la même dans le fonds, puisque (*Arith.* 88) les nouvelles fractions sont les mêmes que les premières. Maintenant, si nous voulons aussi réduire les entiers en fraction, il faut (*Arith.* 86) multiplier ces entiers par le dénominateur de la fraction qui les accompagne, c'est-à-dire, ici par 105 qui a été formé du produit de tous les dénominateurs qui se trouvent dans l'équation; alors on aura $\frac{70x-420}{105}=\frac{84x+1260-75x}{105}$; mais il est évident qu'on peut, sans troubler l'égalité, supprimer de part et d'autre le dénominateur commun, puisque si ces deux quantités sont égales étant divisées par un même nombre, elles doivent l'être aussi sans cette division; on a donc alors $70x+420=84x+1260-75x$, comme ci-dessus.

65. Si les différens termes qui composent l'équation, sont tous des quantités littérales, la règle ne sera pas, pour cela, différente. Il faut seulement observer les règles de la multiplication des quantités littérales: ainsi dans l'équation.... $\frac{ax}{b}+b=\frac{cx}{d}+\frac{ab}{c}$, je multiplie le numérateur ax par le produit cd des deux autres dénominateurs, ce qui donne $acdx$. Je multiplie le terme $+b$, par le produit bcd de tous les dénominateurs, et j'ai $+b^2cd$. Je multiplie cx par bc, et j'ai bc^2x; enfin je multiplie ab par bd, et j'ai ab^2d; ensorte que l'équation devient $acdx+b^2cd=bc^2x+ab^2d$, laquelle, par transposition, donne $acdx-bc^2x=ab^2d-b^2cd$, et (61) par division $x=\frac{ab^2d-b^2cd}{acd-bc^2}$.

66. Lorsque les dénominateurs sont complexes, on peut, pour soulager l'esprit, commencer par indiquer seulement les opérations, pour les exécuter ensuite; ce qui est plus facile en les voyant ainsi indiquées: par exemple, si j'avais...... $\frac{ax}{a-b}+4b=\frac{cx}{3a+b}$; j'écrirais

$$ax\times(3a+b)+4b\times(a-b)\times(3a+b)=cx\times(a-b)$$

alors faisant les opérations indiquées, j'aurais

$3a^2x+abx+12a^2b-8ab^2-4b^3=acx-bcx$; transposant,

$$3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b\,;$$

et enfin, (61) en divisant $x = \dfrac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Application des principes précédens à la résolution de quelques questions simples.

67. Quoique nous nous soyons proposé de ne traiter, avec quelque détail, des usages de l'Algèbre, que dans la seconde section, nous croyons néanmoins à propos de préparer à ces usages, en appliquant dès à présent les principes précédens, à quelques questions assez faciles. Cela nous donnera lieu, d'ailleurs, de faire quelques remarques utiles pour la suite. Les règles que nous venons de donner, sont suffisantes pour résoudre toute question du premier degré, lorsqu'une fois elle est exprimée par une équation. Pour mettre une question en équation, on peut faire usage de la règle suivante : *Représentez la quantité ou les quantités cherchées, chacune par une lettre; et ayant examiné avec attention l'état de la question, faites, à l'aide des signes algébriques, sur ces quantités et sur les quantités connues, les mêmes opérations et les mêmes raisonnemens que vous feriez, si, connaissant les valeurs des inconnues, vous vouliez les vérifier.* Cette règle est générale, et conduira toujours à trouver les équations que la question peut fournir. Mais il est bon d'en diriger l'application par quelques exemples. Question première : *Un père et un fils ont cent ans à eux deux; le père a 40 ans plus que le fils : on demande quel est l'âge de chacun?* Avec une attention médiocre, on voit que la question se réduit à celle-ci : Trouver deux quantités qui réunies fassent 100, et dont l'une surpasse l'autre de 40. Or il est facile de voir que dès que l'une de ces quantités sera connue, la seconde le sera aussi, puisque, si la plus grande, par exemple, était connue, il ne s'agirait que d'en ôter 40 pour avoir la plus petite. Je représente donc la plus grande par x. Maintenant, si connaissant la valeur de x, je voulais la vérifier, j'en retrancherais 40 pour

avoir le plus petit nombre ; je réunirais ensuite le plus grand et le plus petit, pour voir s'ils composent 100. Imitons donc ce procédé.

Le plus grand nombre est. x

Le plus petit sera donc . . . . $x-40$

Ces deux nombres réunis font. . . . . $2x-40$

Or, par les conditions de la question, ils doivent faire. 100

Donc. . . . . $2x-40=100$

Il ne s'agit plus pour avoir x, que d'appliquer les règles données (56 et 60). La première donne $2x=100+40$ ou $2x=140$, et la seconde $x=\frac{140}{2}=70$; ayant trouvé le plus grand nombre x, j'en retranche 40 pour avoir le plus petit; et j'ai 30 pour celui-ci. Ainsi les deux âges demandés sont 70 et 30.

En réfléchissant sur la manière dont nous nous sommes conduits pour résoudre cette question, on peut voir que les raisonnemens que nous avons employés, ne sont point dépendans des valeurs particulières des nombres 100 et 40 qui entrent dans cette question, et que si, au lieu de ces nombres, on en eût proposé d'autres, il eût fallu se conduire de même. Ainsi si l'on proposait la question de cette manière générale : *Deux nombres réunis font une somme connue et représentée par* a; *ces deux nombres diffèrent entre eux d'un nombre connu représenté par* b ; *comment trouverais-je ces deux nombres ?*

Ayant représenté le plus grand par. x

Le plus petit sera donc. $x-b$.

Ces deux nombres réunis font. . . . . $2x-b$.

Or selon la question, ils doivent composer le nombre a; il faut donc que $2x-b=a$. Transposant, on a $2x=a+b$; et divisant, $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

C'est-à-dire, que pour avoir le plus grand, il faut prendre la moitié de a, et y ajouter la moitié de b : ce qui m'apprend que, lorsque je connaîtrai la somme a de deux nombres inconnus, et leur différence b, j'aurai le plus grand de ces deux nombres inconnus, en prenant la moitié de la somme, et y ajoutant la moitié de la différence.

Puisque le plus petit des deux nombres est $x - b$, il sera donc $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b - b$, ou $\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$; donc pour avoir le plus petit, il faut ôter la moitié de b, de la moitié de a; c'est-à-dire, retrancher la moitié de la différence, de la moitié de la somme.

On voit par là, comment, en représentant d'une manière générale, c'est-à-dire, par des lettres, les quantités connues qui entrent dans ces questions, on parvient à trouver des règles générales pour la résolution de toutes les questions de même espéce. Cette règle que nous venons de trouver, est celle que nous avons donnée (*Géom.* 301).

Souvent des questions paraissent différentes au premier coup-d'œil, et cependant après un léger examen, on trouve qu'elles ne diffèrent que par l'énoncé. Par exemple, si l'on proposait cette question : *Partager un nombre connu et représenté par* a, *en deux parties, dont l'une soit moindre ou plus grande que l'autre, d'une quantité connue et représentée par* b. Il est facile de voir que cette question revient au même que la précédente.

Question seconde : *Partager le nombre* 720 *en trois parties, dont la plus grande surpasse la plus petite de* 80, *et dont la moyenne surpasse la plus petite de* 40. Si l'on me disait quelle est la plus petite partie; pour la vérifier, j'y ajouterais 40 d'une part, ce qui me donnerait la seconde, et 80 d'une autre part, ce qui me donnerait la plus grande; alors réunissant ces trois parties, il faudrait que leur somme formât 720. Nommons donc cette plus petite partie, x, et en procédant de la même manière, nous dirons :

La plus petite partie est....................	x
Donc la moyenne est......................	$x + 40$
Et la plus grande..........................	$x + 80$
Or, ces 3 parties réunies font...............	$3x + 120$;
D'ailleurs la question exige qu'elles fassent.....	720.
Il faut donc que................	$3x + 120 = 720$.

Appliquant les règles ci-dessus, on aura

$$3x = 720 - 120 \text{ ou } 3x = 600,$$

et par conséquent $x = 200$; donc la seconde partie est 240; et la plus grande, 280; ces trois parties réunies font en effet 720.

Il est encore évident, dans cet exemple, que quand les nombres proposés, au lieu d'être 720, 40 et 80, eussent été différens, la question aurait toujours pu se résoudre de la même manière; ainsi, pour résoudre toutes les questions dans lesquelles il s'agit de partager un nombre connu a en trois parties, telles que l'excès de la plus grande sur la plus petite soit un nombre connu et représenté par b, et que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit c; en raisonnant de même, on dira :

Représentons la plus petite par	x
La moyenne sera..............	$x+c$
Et la plus grande...............	$x+b$
Ces trois parts réunies sont.....	$3x+b+c$
Or elles doivent faire...........	a

Il faut donc que $3x+b+c=a$

Donc transposant,

$$3x=a-b-c, \text{ et divisant, } x=\frac{a-b-c}{3}.$$

C'est-à-dire, que pour avoir la plus petite, il faut retrancher du nombre qu'il s'agit de partager, les deux excès, et prendre le tiers du reste : alors les deux autres sont faciles à trouver. Ainsi, si l'on demande de partager 642 en trois parties, dont la moyenne surpasse la plus petite de 75, et dont la plus grande surpasse la plus petite de 87, j'ajouterais les deux différences 75 et 87, ce qui me donnerait 162; retranchant 162 de 642, il reste 480, dont le tiers 160 est la plus petite part. Les deux autres sont donc $160+75$ ou 235, et $160+87$ ou 247.

Au reste, les deux questions que nous venons de donner pour exemples, n'ont pas besoin du secours de l'Algèbre ; mais leur simplicité est propre à faire voir clairement la manière dont on doit faire usage du principe que nous avons donné pour mettre une question en équation.

Question troisième : *Partager un nombre connu, par exemple* 14250, *en trois parties qui soient entre elles comme les nombres* 3, 5 *et* 11 ; *c'est-à-dire, dont la première soit à la seconde* :: 3 : 5, *et dont la première soit à la troisième* :: 3 : 11. Si je connaissais l'une des parties, la première, par exemple, voici comment je la vérifierais. Je chercherais par une règle de trois (*Arith.* 194.) un nombre qui fût à cette 1re partie :: 5 : 3 ; ce serait la 2e partie. Je chercherais de même un autre nombre qui fût à cette 1re partie :: 11 : 3 ; ce serait la 3e partie ; réunissant ces trois parties, elles devraient former 14250. Imitons donc ce procédé.

Soit la première part.............................. x

Pour trouver la seconde, je calcule le quatrième terme de cette proportion 3 : 5 :: x ;

Ce quatrième terme, ou la seconde partie sera donc $\frac{5x}{3}$.

Pour trouver la troisième, je calcule le quatrième terme de cette proportion 3 : 11 :: x ;

Ce quatrième terme, ou la troisième partie, sera donc. $\frac{11x}{3}$.

Ces trois parts réunies font $x+\frac{5x}{3}+\frac{11x}{3}$, ou $x+\frac{16x}{3}$; mais la question exige qu'elles fassent 14250 ; il faut donc que

$$x+\frac{16x}{3}=14250.$$

Pour avoir la valeur de x, je fais (64) disparoître le dénominateur 3, et j'ai $3x+16x=42750$, ou $19x=42750$; donc (60) en divisant par 19, $x=\frac{42750}{19}=2250$. La seconde part qui est $\frac{5x}{3}$, sera donc $\frac{5\times 2250}{3}$, ou $\frac{11250}{3}$, ou

3750; et la troisième qui est $\frac{11x}{3}$, sera $\frac{11 \times 2250}{3}$, ou $\frac{24750}{3}$, ou 8250; ces trois parts réunies forment en effet 14250; d'ailleurs les trois nombres 2250, 3750, 8250, sont entre eux comme les trois nombres 3, 5 et 11, ce qu'il est facile de voir en divisant les trois premiers par le même nombre 750, ce qui (*Arith.* 170) ne change point leur rapport.

Si le nombre qu'on propose de partager, au lieu d'être 14250, était tout autre; s'il était en général représenté par a, et que les nombres proportionnels aux parties dans lesquelles on veut le partager, au lieu d'être 3, 5, 11, fussent en général trois nombres connus et représentés par les lettres m, n, p; il est visible qu'il ne faudrait qu'imiter ce que nous venons de faire.

Ainsi, la première part étant représentée par x; pour avoir la seconde, je calculerais le 4ᵉ terme de cette proportion $m : n :: x :$

Ce quatrième terme, ou la seconde part, serait donc.. $\frac{nx}{m}$.

Et pour avoir la troisième, je calculerais le 4ᵉ terme de cette proportion $m : p :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troisième part, serait donc.. $\frac{px}{m}$.

Les trois parts réunies feraient donc $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, ou

$x + \frac{nx+px}{m}$; or elles doivent faire a; il faut donc que

$$x + \frac{nx+px}{m} = a.$$

Chassant le dénominateur, on a $mx + nx + px = ma$, et par conséquent (61) en divisant, $x = \frac{ma}{m+n+p}$; ce qui nous donne lieu de faire remarquer l'utilité de l'Algèbre, pour découvrir des règles de calcul.

Si l'on voulait calculer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient $m+n+p : m :: a :$; il est visible (*Arith.* 179) que ce quatrième terme serait $\frac{am}{m+n+p}$; et puisque nous trouvons que x est exprimé par la même quantité, concluons-en que pour avoir x, il faut calculer le quatrième terme d'une proportion, dont le premier est la somme des parties proportionnelles; le second, la première de ces parties; et le troisième est le nombre même qu'il s'agit de partager; ce qui est précisément la règle que nous avons donnée (*Arith.* 197).

Question quatrième : *On a fait partir de Dreux, pour Brest, un courier qui fait 2 lieues par heure. Huit heures après son départ, on en fait partir un autre de Paris, pour Brest, et celui-ci fait 3 lieues par heure. On demande où il rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux.* Si l'on me disait combien le second courier doit faire de lieues pour attraper le premier, je vérifierais ce nombre en cette manière. Je chercherais combien le premier a dû faire de chemin pendant que le second a été en marche; et comme ils en doivent faire, en même temps, à proportion de leur vîtesse, c'est-à-dire, à proportion du nombre de lieues qu'ils font par heure, je trouverais combien le premier a dû faire, en calculant le quatrième terme de cette proportion...... $3 : 2 ::$ le nombre de lieues faites par le second est au nombre de lieues que le premier aura faites dans le même temps. Ayant trouvé ce quatrième terme, j'y ajouterais le nombre de lieues que le premier courier a dû faire pendant les 8 heures qu'il avait d'avance, et enfin les 17 lieues de Paris à Dreux, qu'il avait aussi d'avance, et le tout devrait former le nombre de lieues que le second a faites. Conduisons-nous donc de la même manière en représentant par x, le nombre de lieues que fera le second courier. Pour trouver le nombre de lieues que le premier fait pendant que le second fait x, je calcule le quatrième terme de cette proportion.. $3 : 2 :: x :$, ce 4^e terme est $\frac{2x}{3}$; or pendant 8 heures, ce même premier courier a dû faire 16 lieues, à raison de 2 lieues par heure; et puisqu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux, si l'on réunit ces trois quantités, on aura $\frac{2x}{3} + 16 + 17$, ou $\frac{2x}{3} + 33$, pour le chemin qu'aura dû faire le second courier, lorsqu'il attrapera le premier. Puis donc qu'on a supposé qu'alors il aurait fait x lieues, il faut que

$$\frac{2x}{3} + 33 = x. \quad \text{D'où} \quad x = 99.$$

C'est-à-dire que les deux couriers se rencontreront, lorsque le second courier aura fait 99 lieues, ou qu'ils se rencontreront à 99 lieues de Paris.

En effet, pendant que le second fera 99 lieues, le premier fera 66 lieues, puisqu'il fait deux lieues pendant que le second en fait trois; or il a 16 lieues d'avance, par les 8 heures dont son départ précède celui du second, et il a de plus 17 lieues d'avance comme partant de Dreux; il sera donc alors à 99 lieues de Paris, c'est-à-dire au même endroit que le second.

Avec un peu d'attention, on voit que quand on changerait les nombres qui entrent dans cette question, la manière de raisonner et d'opérer n'en serait pas, pour cela, différente. Représentons donc, en général, par a, la distance des deux lieux de départ, qui était 17 lieues dans la question précédente : représentons par b, le nombre d'heures dont le départ du premier courier précède celui du second; par c le nombre de lieues que le premier fait par heure, et par d le nombre de lieues que fait le second par heure. Si nous représentons toujours par x le nombre de lieues que le second courier doit faire pour rencontrer le premier, x sera encore composé de l'intervalle des deux lieux de départ, du chemin que le premier peut faire pendant le nombre b d'heures, et enfin du chemin que le premier fera pendant tout le temps que le second sera en marche. Pour déterminer ce dernier chemin, j'observe que les deux couriers marchant alors pendant le même temps, doivent faire du chemin à proportion de leurs vîtesses ;

ainsi x étant le chemin que le second est supposé faire, j'aurai celui que fait le premier pendant ce temps, en calculant le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci $d : c :: x :$, ce quatrième terme sera donc (*Arith.* 179) $\frac{cx}{d}$. Or, puisque ce premier courier est supposé faire le nombre c de lieues par heure, il a dû dans le nombre b d'heures, en faire b de fois autant, c'est-à-dire, 8 fois si b vaut huit, 30 fois si b vaut trente; en général, il en doit faire autant qu'il y a d'unités dans $c \times b$ ou bc; il en a donc fait une quantité exprimée par bc.

Réunissons donc maintenant le nombre de lieues $\frac{cx}{d}$ avec le nombre de lieues bc, et avec le nombre de lieues a, et le tout $\frac{cx}{d} + bc + a$, sera ce que le premier a dû faire; or on a supposé que x était ce qu'il a dû faire; donc

$$x = \frac{cx}{d} + bc + a.$$

Chassant le dénominateur, on a $dx = cx + bcd + ad$; transposant, $dx - cx = bcd + ad$; divisant enfin (61) on a $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, qui donne la solution de toutes les questions de cette espèce, au moins tant qu'on suppose que les deux couriers vont du même côté, et que le départ du courier qui va le moins vîte, précède celui du second.

Pour montrer l'usage de cette formule, reprenons l'exemple précédent, et rappelons-nous que dans ce cas, a représente 17 lieues; c'est-à-dire, $a = 17^{l}$, $b = 8^{h}$, $c = 2^{l}$, $d = 3^{l}$. Alors la valeur générale de x devient

$$x = \frac{8 \times 2 \times 3 + 17 \times 3}{3 - 2} = \frac{48 + 51}{1} = 99.$$

Tel est donc l'usage de ces solutions générales, qu'en y substituant à la place des lettres, les nombres qu'elles sont destinées à représenter, et faisant les opérations que la disposition et les signes de ces lettres indiquent, on trouve la résolution de toutes les questions particulières de même espèce.

Par exemple, si l'on proposait cette autre question : *L'aiguille des heures d'une montre répond à 17 minutes, et celle des minutes répond à 24 minutes, c'est-à-dire, qu'il est $3^h\ 24'$: on demande à quel nombre d'heures et de minutes ces deux aiguilles seront l'une sur l'autre.* Puisque l'aiguille des heures et celle des minutes marchent en même temps, la quantité b par laquelle nous avons représenté ce dont le départ d'un des couriers précède celui du second, est ici zéro. L'intervalle des deux lieux de départ est ici le chemin que l'aiguille des minutes a à faire pour venir de la vingt-quatrième division du cadran, à la dix-septième, c'est-à-dire, que $a=53$ divisions : or, pendant que l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions, celle des heures n'en parcourt que 5; on a donc $c=5$, $d=60$. Puisque $b=0$, je rejette de la formule le terme bcd, parce que zéro multiplié par tout ce qu'on voudra, fait toujours zéro. J'aurai donc, pour le cas présent, $x=\frac{ad}{d-c}$; et en substituant pour a, d, c, leurs valeurs, $x=57+\frac{9}{11}$; c'est-à-dire, qu'il faudra que l'aiguille des minutes parcoure encore 57 divisions et $\frac{9}{11}$; ainsi, puisqu'elle répondait à la vingt-quatrième division, elle répondra à 81 division et $\frac{9}{11}$; ou, puisque 60 divisions font un tour, les deux aiguilles seront l'une sur l'autre à $21'\ \frac{9}{11}$ de l'heure suivante, c'est-à-dire, à $4^h\ 21'\ \frac{9}{11}$.

L'avantage des solutions littérales sur les solutions numériques, ne consiste pas seulement en ce que, pour chaque question particulière, il ne s'agit plus que de substituer des nombres : souvent, par certaines préparations, on rend ces solutions susceptibles d'un énoncé simple et facile à retenir. Par exemple, la formule $x=\frac{ad+bcd}{d-c}$ que nous venons de trouver, est dans ce cas : la quantité d étant facteur commun des termes du numérateur, on peut écrire la valeur de x en cette manière, $x = \frac{(a+bc) \times d}{d-c}$; or, sous cette forme on peut reconnaître que la valeur de x est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient $d-c : d :: a+bc :$; mais de ces trois termes, le premier, $d-c$, marque la différence des vîtesses des deux couriers; le second, d, marque la vîtesse du second courier; et le troisième, $a+bc$, est composé de l'intervalle a des deux lieux de départ, et de la quantité bc ou $c \times b$ qui exprime combien le premier courier fait de lieues pendant le nombre d'heures qu'il a d'avance; ensorte que $a+bc$ marque toute l'avance que le premier a sur le second; la résolution de la question peut donc se réduire à cet énoncé : Multipliez le chemin que le premier fait par heure, par le nombre d'heures qu'il a d'avance, et l'ayant ajouté à l'intervalle des deux lieux de départ, faites cette règle de trois : la différence des vîtesses des deux couriers est à la vîtesse du second, comme la somme des deux nombres que vous venez d'ajouter est à un quatrième terme : ce sera le nombre de lieues que le second courier doit faire pour rencontrer le premier. Ainsi, dans le premier exemple ci-dessus, le premier courier ayant 8 heures d'avance, et faisant 2 lieues par heure, on a 16 lieues à ajouter à 17 lieues, intervalle des deux lieux de départ, ce qui donne 33. Je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $3-2 : 3 :: 33 :$, ou $1 : 3 :: 33 :$; ce quatrième terme est 99, comme ci-dessus.

Au reste, qu'il y ait des fractions ou qu'il n'y en ait point, c'est toujours la même règle. Par exemple, si le premier courier faisait 7 lieues en 4 heures; le second, 13 lieues en 5 heures : si le premier courier avait 15 heures d'avance, et qu'enfin l'intervalle des deux lieux de départ fût de 42 lieues, je dirais : puisque le premier courier fait 7 lieues en 4 heures, c'est $\frac{7}{4}$ de lieue par heure; pareillement, pour le second, c'est $\frac{13}{5}$ de lieue par heure; donc, pendant les 15 heures que le premier a d'avance, il doit, à raison de $\frac{7}{4}$ de lieue par heure, faire 15 fois $\frac{7}{4}$ de lieue ou $\frac{105}{4}$ de lieue; lesquels ajoutés à 42 lieues, font $42 + \frac{105}{4}$ ou $\frac{273}{4}$; je calcule donc le quatrième terme de cette proportion............. $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$; ce quatrième terme sera $\frac{3549}{17}$, ou $208\frac{1}{17}$. C'est le nombre de lieues que le second courier serait obligé de faire.

Réflexions sur les Quantités positives et les Quantités négatives.

68. Lorsqu'on a ainsi résolu, d'une manière générale, toutes les questions d'une même espèce, on peut souvent faire usage de ces formules générales pour la résolution d'autres questions, dont les conditions seraient tout opposées à celles qu'on a eu en vue de remplir : un simple changement de $+$ en $-$, ou de $-$ en $+$, dans les signes des quantités, suffit souvent. Mais avant de faire connaître ce nouvel usage des signes, il faut les considérer sous un nouvel aspect. Les lettres ne représentent que la valeur absolue des quantités. Les signes $+$ et $-$ n'ont représenté jusqu'ici que les opérations de l'addition et de la soustraction, mais ils peuvent aussi représenter, dans plusieurs cas, la manière d'être des quantités les unes à l'égard des autres. Une même quantité peut être considérée sous deux points de vue opposés, ou comme capable d'augmenter une quantité, ou comme capable de la diminuer. Tant qu'on ne représentera cette quantité que par une lettre ou par un nombre, rien ne désignera quel est celui de ces deux aspects sous lequel on la considère. Par exemple, dans l'état d'un homme qui aurait autant de biens que de dettes, le même nombre peut servir à exprimer la quantité numérique des unes et des autres; mais ce nombre, tel qu'il soit, ne ferait point connaître la différence des unes et des autres. Le moyen le plus naturel de faire sentir cette différence, c'est de les désigner par un signe qui indique l'effet qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre; or l'effet des dettes étant de retrancher sur les possessions, il est naturel de désigner celles-là en leur appliquant le signe $-$.

Pareillement, si l'on regarde une ligne droite (*fig.* 1) comme engendrée par le mouvement d'un point *A* mû perpendiculairement

lairement à la ligne BC, on voit que ce point pouvant aller ou de A vers D, ou de A vers E, si l'on représente par a le chemin AD ou AE qu'il a fait, on ne détermine pas encore absolument la direction de ce point. Le moyen de la fixer est d'indiquer, par quelque signe, si la quantité a doit être considérée à droite ou à gauche : or les signes $+$ et $-$ sont propres à cet effet; car si l'on estime le mouvement du point A à l'égard du point L connu et regardé comme terme fixe, lorsque le point A se meût vers D, ce qu'il décrit tend à augmenter LA; et lorsqu'il se meut vers E, ce qu'il décrit tend au contraire à diminuer LA; il est donc naturel de représenter AD par $+a$ ou simplement par a, et, au contraire, de représenter AE par $-a$. Ce serait tout le contraire, si au lieu de rapporter le mouvement du point A au point L, on l'avait rapporté au point O.

Les quantités négatives ont donc une existence aussi réelle que les positives, et elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles ont une acception toute contraire dans le calcul.

Les quantités positives et les quantités négatives peuvent se trouver et se trouvent souvent mêlées ensemble dans un calcul, non-seulement parce que certaines opérations ont conduit, comme nous l'avons vu jusqu'ici, à retrancher certaines quantités d'autres quantités, mais encore parce que l'on a besoin d'exprimer, dans le calcul, les différens aspects sous lesquels on considère les quantités.

69. Si donc après avoir résolu une question, il arrivait que la valeur de l'inconnue trouvée par les méthodes ci-dessus, fût négative; par exemple, si l'on arrivait à un résultat tel que celui-ci, $x=-3$, il faudrait en conclure que la quantité qu'on a désignée par x, n'a point les propriétés qu'on lui a supposées en faisant le calcul, mais des propriétés toutes contraires. Par exemple, si l'on proposait cette question : Trouver un nombre qui, étant ajouté à 15, donne 10; cette question est évidemment impossible ; si l'on représente le nombre cherché par x, on aura cette équation $x+15=10$,

et par conséquent, en vertu des règles ci-dessus, $x = 10 - 15$ ou $x = -5$.

Cette dernière conclusion me fait donc voir que x que j'avais considéré comme devant être ajouté à 15 pour former 10, en doit au contraire être retranché. Ainsi toute solution négative indique quelque fausse supposition dans l'énoncé de la question, mais en même temps elle en indique la correction, en ce qu'elle marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens tout contraire.

70. Concluons donc de là, que si après avoir résolu une question dans laquelle quelques-unes des quantités étaient prises dans un certain sens; si, dis-je, on veut résoudre cette même question, en prenant ces mêmes quantités dans un sens tout opposé, il suffira de changer les signes qu'ont actuellement ces quantités. Par exemple, dans la question quatrième, résolue généralement pour le cas où les deux couriers allaient vers un même côté, si je veux avoir la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer dans le cas où ils viennent au-devant l'un de l'autre, j'y satisferai, en changeant dans la valeur de x que nous avons trouvée $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le signe de c. En effet, puisque le premier courier vient au-devant du second, au lieu de s'en éloigner, il diminue le chemin que celui-ci doit faire; il le diminue à raison du chemin c qu'il fait par heure; il faut donc exprimer que c, au lieu d'ajouter, retranche; il faut donc, au lieu de $+c$, mettre $-c$. Ce changement donnera $x = \frac{ad - bcd}{c + d}$; car en changeant le signe de c, dans le terme $+bcd$ qui n'est autre chose que....... $+bd \times +c$, il faudrait écrire $+bd \times -c$, qui (24) revient à $-bcd$.

Confirmons tout cela par un exemple : supposons deux couriers venant en sens contraires, et partis de deux endroits éloignés de cent lieues. Le premier part sept heures avant le second, et fait deux lieues par heure; le second en fait trois par heure. En nommant x le chemin que fera le second jusqu'à la rencontre, je vois que x sera égal à la différence entre la distance totale et le chemin qu'aura fait le premier courier : or le chemin qu'aura fait celui-ci est composé du chemin qu'il peut faire pendant sept heures, et du chemin qu'il fera pendant que le second sera en marche : à l'égard de ce dernier chemin, on le déterminera en calculant le quatrième terme de cette proportion $3 : 2 :: x :$; ce quatrième sera $\frac{2x}{3}$; et puisque le chemin que fait le premier courier pendant les sept heures qu'il a d'avance, doit être de 14 lieues, à raison de 2 lieues par heure, il aura donc fait en tout $14 + \frac{2x}{3}$; donc il ne reste à faire pour le second courier, que la quantité $100 - 14 - \frac{2x}{3}$ ou $86 - \frac{2}{3}x$: puis donc qu'on a représenté par x ce qu'il avait à faire, il faut que

$$x = 86 - \tfrac{2}{3}x;\ \text{d'où}\ x = \tfrac{258}{5}.$$

Or si l'on substitue dans la formule $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$ que nous prétendons convenir à ce cas; si l'on substitue, dis-je, 100 pour a, 7 pour b, 3 pour d, et 2 pour c, on aura

$$x = \frac{100 \times 3 - 7 \times 2 \times 3}{3 + 2} = \frac{300 - 42}{5} = \frac{258}{5} = 51\,\frac{3}{5},$$

ce qui est absolument la même chose. A mesure que nous avancerons, nous aurons soin de fixer de plus en plus l'idée qu'on doit se faire des quantités négatives.

71. Comme il importe beaucoup d'acquérir la facilité de mettre les problèmes en équation, nous joignons ici les questions simples pour exercer les commençans, nous contentant d'en donner le résultat pour servir à confirmer leurs essais. Après avoir résolu ces questions en nombres, ainsi qu'elles sont proposées, on fera très-bien de s'exercer à les résoudre, en substituant des lettres aux nombres ; c'est en imitant ainsi les

solutions particulières, que l'on acquiert la facilité de généraliser et d'étendre ses idées.

Trouver un nombre qui étant successivement ajouté à 5 *et à* 12, *donne deux sommes qui soient l'une à l'autre, comme* 3 *est à* 4. Rép. 16.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers, et les $\frac{2}{5}$ *réunis, surpassent ce nombre de* 7. Rép. 30.

On emploie trois ouvriers dont le premier fait 5 *toises d'ouvrage par jour, le second* 7, *et le troisième* 8; *on demande en quel temps ces trois ouvriers, travaillant ensemble, feront* 100 *toises?* Rép. 5 jours.

On a loué un ouvrier paresseux, à raison de 24 *sous par chaque jour qu'il travaillerait, mais à condition de lui retenir, sur ce qui lui serait dû,* 6 *sous par chaque jour qu'il ne travaillerait pas. On lui fait son compte au bout de* 30 *jours, et il se trouve qu'il n'a rien à recevoir; on demande combien de jours il a travaillé?* Rép. 6 jours.

Un homme achète un cheval qu'il vend ensuite 100 *livres de plus qu'il ne l'a acheté. A ce marché il se trouve gagner* 10 *pour* 100 *du prix qu'il le vend; on demande combien il l'a acheté?* Rép. 900 liv.

On a payé une certaine somme en 15 *paiemens qui ont été en augmentant toujours de la même quantité; le premier paiement a été de* 7 *livres, le dernier de* 37 *livres; on demande de combien chaque paiement augmentait?* Rép. $2\frac{1}{7}$.

On a de l'eau de mer qui, sur 32 *livres, contient une livre de sel; on demande combien il faudrait y mêler d'eau douce pour que sur* 32 *livres du mélange, il n'y eût plus que* 2 *onces de sel?....* Rép. 224 livres.

Des Équations du premier degré, à plusieurs inconnues.

72. Soit qu'il y ait plusieurs inconnues, soit qu'il n'y en ait qu'une, la méthode qu'on doit suivre pour mettre en équation est toujours la même. Mais, en général, il faut former autant d'équations que peuvent en donner les condi-

tions de la question. Si ces conditions sont toutes distinctes et indépendantes les unes des autres, et si, en même temps, chacune peut être exprimée par une équation, la question ne peut avoir plus d'une solution lorsque toutes ces équations sont du premier degré, et qu'en même temps il y en a autant que d'inconnues. Mais si quelqu'une des conditions se trouve ou explicitement ou implicitement comprise dans quelqu'une des autres, ou si le nombre des conditions est moindre que le nombre des inconnues, alors on aura moins d'équations que d'inconnues, et la question peut avoir une infinité de solutions, à moins que quelque condition particulière, mais qui ne peut être exprimée par une équation, n'en limite le nombre. Nous éclaircirons tout cela par des exemples.

Nous supposerons d'abord deux équations et deux inconnues. Les règles que nous avons établies concernant les équations à une inconnue, ont également lieu pour les équations à plusieurs inconnues, mais il faut y ajouter la règle suivante pour les équations à deux inconnues.

73. *Prenez dans chaque équation la valeur d'une même inconnue, en opérant comme si tout le reste était connu : égalez ces deux valeurs, et vous aurez une équation qui ne renfermera plus que la seconde inconnue, que vous déterminerez par les règles précédentes. Cette seconde inconnue étant trouvée, substituez sa valeur dans l'une ou l'autre des deux valeurs que vous avez prises par la première opération, et vous aurez la seconde inconnue.* Par exemple, si j'avais les deux équations

$$2x+y=24,\ 5x+3y=65,$$

de la première, je tirerais, en transposant, $2x=24-y$, et en divisant, $x=\frac{24-y}{2}$. De la seconde, je tire, en transposant, $5x=65-3y$, et en divisant, $x=\frac{65-3y}{5}$.

J'égale les deux valeurs de x, en écrivant

$$\frac{24-y}{2}=\frac{65-3y}{5}.$$

Équation qui ne renferme plus que la seconde inconnue y. Pour avoir la valeur de y, je chasse (64) les dénominateurs 2 et 5, et j'ai

$$120-5y=130-6y: \text{ d'où } y=10.$$

Pour avoir x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 10 dans la première valeur de x trouvée ci-dessus (On pourrait également substituer dans la seconde.). Cette substitution me donne

$$x=\frac{24-10}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

74. Prenons pour second exemple les deux équations

$$\frac{4x}{5}=\frac{5y}{6}+2 \text{ et } \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=19.$$

Je commence par chasser les dénominateurs (64) dans chacune de ces équations, ce qui les change en ces deux autres,

$$24x-25y=60 \text{ et } 8x+9y=228.$$

De la première de ces deux-ci, je tire

$$24x=60+25y, \text{ et } x=\frac{60+25y}{24}.$$

De la seconde,

$$8x=228-9y, \text{ et } x=\frac{228-9y}{8}.$$

J'égale ces deux valeurs de x, en écrivant

$$\frac{60+25y}{24}=\frac{228-9y}{8},$$

équation qui ne renferme plus que y. Pour avoir la valeur de cette inconnue, je chasse les dénominateurs, et j'ai

$$480+200y=5472-216y; \text{ d'où } y=12.$$

Pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 12 dans l'une ou l'autre des deux valeurs de x, dans la première, par exemple, et je trouve

$$x=\frac{60+25\times 12}{24}=\frac{60+300}{24}=\frac{360}{24}=15.$$

75. Prenons pour troisième exemple les deux équations

$$\tfrac{2}{5}x=\tfrac{1}{4}x+\tfrac{3}{7}y-9, \text{ et } \tfrac{4}{5}x-\tfrac{2}{7}y=\tfrac{1}{2}y-6.$$

Je commence par faire disparaître les dénominateurs (64). J'ai

$$56x=35x+60y-1260, \text{ et } 56x-20y=35y-420.$$

De la première, je tire

$$21x=60y-1260, \text{ et } x=\frac{60y-1260}{21}.$$

La seconde me donne

$$56x=55y-420, \text{ et } x=\frac{55y-420}{56}.$$

Egalant ces deux valeurs de x, j'ai

$$\frac{60y-1260}{21}=\frac{55y-420}{56}: \text{ d'où } y=28.$$

Pour avoir la valeur de x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 28, dans l'équation $x=\frac{60y-1260}{21}$ trouvée ci-dessus, ce qui donne

$$x=\frac{60\times 28-1260}{21}=\frac{1680-1260}{21}=\frac{420}{21}=20.$$

76. Si les équations étaient littérales, on opérerait de la même manière. Ainsi, si l'on avait les deux équations

$$ax+by=c, \text{ et } dx+fy=e,$$

dans lesquelles a, b, c, d, e, f marquent des quantités connues, positives ou négatives; la première donnerait, par transposition, $ax=c-by$, et par division, $x=\frac{c-by}{a}$; la seconde donnerait de même, par transposition, $dx=e-fy$, et par division, $x=\frac{e-fy}{d}$. Egalant ces deux valeurs de x, on aurait

$$\frac{c-by}{a}=\frac{e-fy}{d};$$

chassant les fractions, on a $cd-bdy=ae-afy$;
transposant $afy-bdy=ae-cd$;
enfin divisant (61), on a $y=\frac{ae-cd}{af-bd}$.

Pour avoir la valeur de x, il faut substituer, au lieu de y, sa valeur $\frac{ae-cd}{af-bd}$, dans l'une des deux valeurs de x, dans $x=\frac{c-by}{a}$, par exemple.

Cette substitution donnera

$$x=\frac{1}{a}\left\{c-b\left(\frac{ae-cd}{af-bd}\right)\right\}=\frac{fc-be}{af-bd}.$$

77. Nous avons supposé jusqu'ici que les deux inconnues se trouvaient toutes deux dans chaque équation. Lorsque cela n'arrive point, le calcul ne diffère des précédens qu'en ce qu'il est plus simple. Par exemple, si l'on avait

$$5ax=3b \text{ et } cx+dy=e,$$

la première donnerait $x=\frac{3b}{5a}$; et la seconde, $x=\frac{e-dy}{c}$. Egalant ces deux valeurs, on aurait

$$\frac{3b}{5a}=\frac{e-dy}{c};\ \text{d'où } y=\frac{5ae-3bc}{5ad}.$$

Des Equations du premier degré, à trois, et à un plus grand nombre d'inconnues.

78. Ce que nous venons de dire étant une fois bien conçu, il est facile de voir comment on doit se conduire lorsque le nombre des inconnues et des équations est plus considérable. Nous supposerons toujours qu'on ait autant d'équations que

d'inconnues. Si l'on en a trois, *on prendra, dans chacune, la valeur d'une même inconnue, comme si tout le reste était connu. On égalera ensuite la première valeur à la seconde, et la première à la troisième; ou bien l'on égalera la première à la seconde, et la seconde à la troisième. On aura, par ce procédé, deux équations à deux inconnues seulement, et on les traitera par la règle précédente* (73).

Soient, par exemple, les trois équations :

$$3x+5y+7z=179,\ 8x+3y-2z=64,\ 5x-y+3z=75.$$

De la première, je tire

$$3x=179-5y-7z,\ x=\frac{179-5y-7z}{3};$$

De la seconde,

$$8x=64-3y+2z,\ \text{et}\ x=\frac{64-3y+2z}{8};$$

De la troisième,

$$5x=75+y-3z,\ \text{et}\ x=\frac{75+y-3z}{5}.$$

Egalant la première valeur de x à la seconde, et la première à la troisième, j'ai

$$\frac{179-5y-7z}{3}=\frac{64-3y+2z}{8}\ \text{et}\ \frac{179-5y-7z}{3}=\frac{75+y-3z}{5}.$$

Comme il n'y a plus que deux inconnues, je traite ces deux dernières équations suivant la règle donnée (73) pour les équations à deux inconnues. Je chasse donc les dénominateurs, ce qui me donne les deux équations suivantes :

$$1432-40y-56z=192-9y+6z,$$
$$\text{et}\ 895-25y-35z=225+3y-9z.$$

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur de y : la première me donne, en transposant et réduisant, ... $1240-62z=31y$, et en divisant, $y=\frac{1240-62z}{31}$. La seconde me donne, en transposant et réduisant, $670-26z=28y$, et en divisant, $y=\frac{670-26z}{28}$.

J'égale ces deux valeurs de y, et j'ai

$$\frac{1240-62z}{31}=\frac{670-26z}{28},\ \text{d'où } z=15.$$

Pour avoir y, je mets, au lieu de z, sa valeur 15, dans l'équation $y=\frac{1240-62z}{31}$, que nous venons de trouver ci-dessus, ce qui me donne

$$y=\frac{1240-62\times 15}{31}=\frac{1240-930}{31}=\frac{310}{31}=10.$$

Enfin, pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 10, et au lieu de z, sa valeur 15, dans l'une des trois valeurs de x trouvées ci-dessus; par exemple, dans la première qui devient par-là

$$x=\frac{179-5\times10-7\times15}{3}=\frac{179-50-105}{3}=\frac{179-155}{3}=\frac{24}{3}=8.$$

79. Si toutes les inconnues n'entrâient pas à la fois dans chaque équation, le calcul serait plus simple, mais se ferait toujours d'une manière analogue. Par exemple, si l'on avait les trois équations

$$5x+3y=65,\ 2y-z=11,\ 3x+4z=57.$$

La première donnerait $x=\frac{65-3y}{5}$, la seconde ne donnerait point de valeur de x; la troisième donnerait $x=\frac{57-4z}{3}$; il n'y aurait donc que ces deux valeurs de x à égaler, elles donnent

$$\frac{65-3y}{5}=\frac{57-4z}{3},$$

équation qui ne renferme plus d'x, et qui étant traitée avec la seconde équation $2y-z=11$, selon les règles des équations à deux inconnues, donnera les valeurs de y et de z. En achevant le calcul, on trouvera $z=9$, $y=10$, $x=7$.

80. On voit par là que s'il y avait un plus grand nombre d'équations, la règle générale serait : *Prenez, dans chaque équation, la valeur d'une même inconnue; égalez l'une de ces valeurs à chacune des autres, et vous aurez une équation et une inconnue de moins. Traitez ces nouvelles équations comme vous venez de faire pour les premières, et vous aurez encore une équation et une inconnue de moins. Continuez ainsi jusqu'à ce qu'enfin vous parveniez à n'avoir plus qu'une inconnue.*

81. Il ne sera peut-être pas inutile de placer ici, une règle générale pour déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. Lorsque le nombre des inconnues est un peu considérable, et que les équations renferment tous les termes qu'elles peuvent renfermer, on est conduit, par la première méthode, si elles sont littérales, à des valeurs plus composées qu'il ne convient; à la vérité, on peut les réduire, mais c'est un travail qui devient d'autant plus long que le nombre des inconnues est plus considérable. D'ailleurs nous réduirons, par la suite, l'art de chasser les inconnues dans les équations qui passent le premier degré, à celui de les chasser dans celles du premier degré. Les méthodes que l'on a eues jusqu'ici pour éliminer ou chasser les inconnues, dans les équations qui passent le premier degré, ont toutes (si l'on en excepte seulement celles qu'ont données MM. Euler et Cramer) l'inconvénient de conduire à des équations beaucoup plus composées qu'il ne faut. Ces dernières même ne sont point à l'abri de cet inconvénient, lorsqu'on a plus de deux inconnues. Il peut donc être utile de donner ici des moyens faciles pour avoir les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. C'est ce que nous allons faire après avoir exposé une seconde méthode qui peut avoir son utilité dans plusieurs rencontres. Soient les deux équations

$$3x+4y=81, \text{ et } 3x-4y=9.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, on aura $8y=72$, et par conséquent, $y=9$. Au contraire, si l'on ajoute la première équation à la seconde, on aura $6x=90$, et par conséquent, $x=15$. On voit donc que lorsque les deux équations sont telles, que le coefficient de l'une des inconnues est le même dans chacune, il est très-facile, par une simple addition ou une simple soustraction, de réduire les deux équations à n'avoir qu'une inconnue.

82. Mais ne peut-on pas ramener les équations à cet état ? On le peut toujours; il suffit pour cela de multiplier l'une des deux équations par un nombre convenable. Voici comment on doit s'y prendre pour trouver ce nombre. Soient les deux équations

$$4x+3y=65, \text{ et } 5x+8y=111.$$

Je représente par m le nombre dont il s'agit, et je multiplie l'une des deux équations, la seconde, par exemple, par m, ce qui me donne..... $5mx+8my=111m$. Je l'ajoute avec la première, et j'ai

$$4x+5mx+3y+8my=65+111m,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$(4+5m)\,x+(3+8m)\,y=65+111m.$$

Si je veux maintenant faire disparaître les x, je n'ai qu'à supposer que le nombre m est tel que $4+5m=0$, ce qui me donne $m=-\frac{4}{5}$. Cette supposition réduit l'équation à $(3+8m)\,y=65+111m$, qui donne $y=\frac{65+111m}{3+8m}$, équation qui, en mettant pour m sa valeur $-\frac{4}{5}$, donne $y=7$.

Si au contraire j'avais voulu faire disparaître les y, j'aurais supposé m tel que $3+8m=0$, c'est-à-dire, que j'aurais égalé à zéro le coefficient ou multiplicateur de y, ce qui m'aurait donné $m=-\frac{3}{8}$. Cette supposition réduit l'équation à

$$(4+5m)\,x=65+111m, \text{ qui donne } x=\frac{65+111m}{4+5m},$$

équation qui, en mettant pour m sa valeur actuelle $-\frac{3}{8}$, donne $x=11$.

83. Si l'on avait trois équations et trois inconnues, on multiplierait la seconde par un nombre m, et la troisième par un nombre n ; et les ajoutant, ainsi multipliées, à la première, on supposerait égal à zéro le coefficient de chacune de deux des trois inconnues x, y et z. On aurait, pour déterminer m et n, deux équations que l'on traiterait comme dans le cas précédent.

Par exemple, prenons les trois équations

$$3x+5y+7z=179,\ 8x+3y-2z=64,\ 5x-y+3z=75$$

que nous avons déjà traitées. En multipliant la seconde par m, la troisième par n, et les ajoutant à la première, on aura

$$3x+8mx+5nx+5y+3my-ny+7z-2mz+3nz=179+64m+75n$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$(3+8m+5n)\,x+(5+3m-n)\,y+(7-2m+3n)\,z=179+64m+75n.$$

Si c'est z que je veux avoir, je supposerai

$$(1)\ 3+8m+5n=0 \text{ et } 5+3m-n=0\,;$$

ce qui réduit l'équation à

$$(7-2m+3n)\,z=179+64m+75n,$$

qui donne $z=\frac{179+64m+75n}{7-2m+3n}$.

Mais les équations (1) donnent

$$m = -\frac{28}{23} \text{ et } n = \frac{31}{23};$$

substituant ces valeurs de m et de n, dans la valeur de z, on trouvera $z = 15$.

On voit par là comment on s'y serait pris si, au lieu de z, on avait voulu avoir y ou x; mais, lorsque l'une des inconnues est trouvée, il serait superflu de recommencer un calcul semblable pour chacune des autres, il faut substituer la valeur de cette inconnue dans les équations proposées, et employant une équation de moins, on détermine les autres valeurs, comme pour le cas où il y a une équation de moins.

84. En suivant cette méthode, ou la première, on peut trouver des formules générales qui représentent les valeurs des inconnues dans tous les cas imaginables. C'est ainsi qu'on trouvera que si l'on représente généralement deux équations du premier degré à deux inconnues par

$$ax + by + c = 0, \text{ et } a'x + b'y + c' = 0,$$

ce qu'on peut toujours faire en passant tous les termes dans un même membre, et représentant par une seule lettre la totalité des quantités connues qui multiplient chaque inconnue, et la totalité des termes entièrement connus, on trouvera, dis-je, que les valeurs de x et de y sont exprimées en cette manière :

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \; y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Pareillement, si l'on représente trois équations du premier degré à trois inconnues, par

$$ax + by + cz + d = 0, \; a'x + b'y + c'z + d' = 0, \; a''x + b''y + c''z + d'' = 0,$$

on trouvera que les valeurs de x, y et z sont exprimées en cette manière :

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' - a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

Pour 4 équations et 4 inconnues, on aurait quatre fractions dont le numérateur et le dénominateur auraient chacun 24 termes. Ils auraient 120 termes pour 5 inconnues; 720 pour 6, et ainsi de suite, selon le produit des nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. (1).

---

(1) Si l'on veut s'instruire plus à fond de la manière de déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré, on peut consulter l'ouvrage que nous avons publié en 1779, sous le titre : *Théorie générale des Equations algébriques*. Paris, *in-4°*. On y trouvera une

Application des règles précédentes à la résolution de quelques questions qui renferment plus d'une inconnue.

85. Question première : *Un homme a deux espèces de monnaie : sept pièces de la plus forte espèce, avec douze pièces de la seconde, font 288 livres ; et 12 pièces de la première espèce, avec sept de la seconde, font 358 liv. On demande combien vaut chaque espèce de monnaie ?* Si l'on savait combien vaut chaque espèce de pièce, en multipliant la valeur d'une pièce de la première espèce, par 7, et celle d'une pièce de la seconde espèce, par 12, et ajoutant les deux produits, on trouverait 288 livres ; pareillement, en multipliant la valeur d'une pièce de la première espèce, par 12, celle de la seconde par 7, et ajoutant les deux produits, on trouverait 358 livres ; cela étant, si je représente par x le nombre de livres ou la valeur d'une pièce de la première espèce, et y celle d'une pièce de la seconde espèce, je pourrai raisonner ainsi : Chaque pièce de la première espèce valant x, les sept pièces vaudront 7 fois x, ou $7x$; par la même raison, 12 pièces de la seconde espèce vaudront $12y$; il faut donc que

$$7x+12y=288.$$

Un raisonnement semblable à l'égard de la seconde condition, fera voir qu'il faut que

$$12x+7y=358.$$

Ces deux équations donnent $x=24$, $y=10$. Donc, la plus forte pièce était de 24 livres et la plus petite de 10 livres. En effet, 7 pièces de 24 livres font 168 livres, qui, avec 12 pièces de 10 livres ou 120 livres, font 288 livres. De plus, 12 pièces de 24 livres, qui font 288 livres, avec sept pièces de 10 livres qui font 70 livres, donnent 358 livres.

Question seconde : *On a mêlé ensemble une certaine quan-*

---

méthode très-générale et très-expéditive pour déterminer toutes à la fois ou séparément, les valeurs des inconnues dans les équations, soit numériques, soit littérales.

tité d'or et une certaine quantité d'argent. Tout le mélange fait un volume de 12 *pouces cubes , et pèse* 100 *onces : un pouce cube d'or pèse* 12 *onces* $\frac{2}{3}$, *et un pouce cube d'argent pèse* 6 *onces* $\frac{8}{9}$. *On demande quelle est la quantité d'or et quelle est la quantité d'argent qui ont été alliées?* Si l'on connaissait le nombre de pouces cubes de chaque espèce de matière, en ajoutant ces deux nombres, ils donneraient 12 pour leur somme. De plus, en prenant 12 onces $\frac{2}{3}$ autant de fois qu'il y a de pouces cubes d'or, c'est-à-dire, en multipliant 12 $\frac{2}{3}$ par le nombre des pouces cubes d'or, on aurait le poids de l'or qui entre dans le mélange, et en multipliant de même 6 onces $\frac{8}{9}$ par le nombre de pouces cubes d'argent, on aurait le poids de l'argent, et en ajoutant ces produits ils formeraient 100 onces. Raisonnons donc de la même manière en représentant par x le nombre des pouces cubes d'argent : il faut donc que

$$x+y=12.$$

D'un autre côté, chaque pouce cube d'or pesant 12 onces $\frac{2}{3}$ ou $\frac{38}{3}$ d'once, un nombre x de pouces d'or pesera $\frac{38}{3}\times x$ ou $\frac{38x}{3}$. Par la même raison chaque pouce cube d'argent pesant 6 onces $\frac{8}{9}$ ou $\frac{62}{9}$ d'once, un nombre y de pouces cubes, pesera $\frac{62}{9}y$; donc l'or et l'argent réunis pèseront $\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y$; or ils doivent peser 100 onces, donc

$$\frac{38}{8}x+\frac{62}{9}y=100.$$

Ces deux équations donnent $x=3$ et $y=9$, c'est-à-dire, qu'on a mêlé 3 pouces d'or avec 9 pouces d'argent. En effet, le tout fait 12 pouces cubes. D'ailleurs 3 pouces cubes pesant chacun 12 onces $\frac{2}{3}$ font 38 onces, et 9 pouces cubes pesant chacun 6 onces $\frac{8}{9}$ font 62 onces, lesquelles avec les 38 font 100 onces.

Si les deux matières qu'on a mêlées avaient des pesanteurs spécifiques (1) différentes, et si le volume, ainsi que le poids

(1) On appelle *pesanteur spécifique*, la pesanteur d'un corps dont le volume est connu. Quand on dit : un tel corps pèse 12 livres, on ne détermine que le poids de ce corps et non pas celui de l'espèce de matière dont il est composé; mais quand on dit, par exemple, 12 pouces cubes

total du mélange, étaient différens de ce qu'on vient de supposer, la méthode, pour trouver les quantités de chaque espèce de matière, n'en serait pas moins la même; ainsi pour renfermer dans une seule, toutes les solutions des questions de cette espèce, supposons généralement que le nombre total des pouces cubes des deux espèces de matière soit a; que le poids total du mélange, exprimé en onces, soit b; que le poids d'un pouce cube de la première matière soit c; et celui d'un pouce cube de la seconde, soit d, (c et d étant exprimés en onces). Alors si nous représentons par x le nombre de pouces cubes de la première matière, et par y le nombre de pouces cubes de la seconde, nous aurons pour première équation

$$x+y=a.$$

D'ailleurs chaque pouce de la première matière pesant c d'onces, dès qu'il y a x de pouces cubes, la quantité de la première matière pèsera $c\times x$ ou cx. Par la même raison, la quantité de la seconde matière pesera dy; ensorte que le total pèsera $cx+dy$; et comme il est supposé peser b, il faut que

$$cx+dy=b.$$

Ces deux équations donnent

$$x=\frac{b-ad}{c-d} \text{ et } y=\frac{ac-b}{c-d}.$$

Ces formules peuvent fournir une règle susceptible d'un énoncé assez simple, pour la résolution générale de toutes les questions de cette espèce. Pour trouver cette règle, il faut faire attention, 1° que b marque le poids total du mélange; 2° que a marquant le nombre total des parties du mélange, et d le poids d'une des parties de la seconde espèce, ad marque ce que pèserait le volume du mélange, s'il était composé seulement de la matière de la seconde espèce. En effet,

d'eau pèsent 7 onces 6 gros, alors on détermine la pesanteur de cette espèce d'eau; on met en état de déterminer combien pèse tout autre volume de cette même eau.

si tout le volume était d'argent, par exemple, on trouverait son poids total, en multipliant la pesanteur d d'un pouce cube d'argent, par le nombre total a des pouces cubes. Enfin le dénominateur $c-d$ est la différence des pesanteurs spécifiques de chaque espèce de matière. Si l'on analyse, de même, la valeur de y, on verra que ac est ce que peserait le volume du mélange, s'il était uniquement composé de la première matière. De là on pourra conclure cette règle.

Calculez ce que peserait le volume du mélange, s'il était composé seulement de la seconde matière; retranchez ce poids du poids total actuel du mélange, et divisez le reste par la différence des pesanteurs spécifiques des deux matières : le quotient sera le nombre des parties de la première qui entre dans le mixte. Pour avoir le nombre des parties de la seconde matière, calculez ce que peserait le volume du mélange, s'il était tout entier de la première matière; retranchez-en le poids total actuel du mélange, et divisez le reste par la même quantité que ci-dessus. Cette règle est précisément ce qu'on appelle en Arithmétique, *la règle d'alliage*, et qu'en Arithmétique nous avons renvoyée à cette troisième partie.

On peut, à cette même question, en ramener une infinité d'autres qui, au premier coup-d'œil, ne semblent pas de même espèce : par exemple celle-ci : *Faire* 522 *livres en* 42 *pièces, les unes de* 24 *livres, et les autres de* 6 *livres;* car avec un peu d'attention, on voit que cette question est la même que cette autre ; un mixte composé de 42 pouces cubes de matière, pèse 522 onces : des deux matières qui y entrent, l'une pèse 24 onces par pouce cube, et l'autre 6 onces. En suivant la règle précédente, on trouvera qu'il faut 15 pièces de 24 livres et 27 pièces de 6 livres.

La même règle servirait encore à résoudre cette autre question : *Un pied cube d'eau de mer pèse* 74 *livres, un pied cube d'eau de pluie pèse* 70 *livres; combien faudrait-il mêler ensemble d'eau de mer et d'eau de pluie pour faire de l'eau qui pesât* 73 *livres le pied cube ?*

On voit par là combien il peut être utile de s'accoutumer de bonne heure à représenter, d'une manière générale, les quantités connues qui entrent dans les questions, et à interpréter ou traduire les résultats algébriques des solutions des problèmes.

Question troisième : *On a trois lingots, dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent et du cuivre. L'alliage dans le premier est tel, que sur 16 onces, il y en a 7 d'or, 8 d'argent et 1 de cuivre. Dans le second, sur 16 onces, il y en a 5 d'or, 7 d'argent et 4 de cuivre. Dans le troisième, sur 16 onces, il y en a 2 d'or, 9 d'argent et 5 de cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces trois alliages, composer un quatrième lingot, tel, que sur 16 onces, il s'en trouve 4 onces et $\frac{15}{16}$ en or, $7\frac{10}{16}$ en argent, et $3\frac{7}{16}$ en cuivre.* Représentons par x le nombre d'onces qu'il faut prendre du premier lingot; par y, le nombre d'onces qu'il faut prendre du second, et enfin par z, le nombre d'onces qu'il faut prendre du troisième. Puisque 16 onces du premier contiennent 7 onces d'or, on trouvera ce que x d'onces de ce premier lingot peuvent contenir d'or, en calculant le quatrième terme de cette proportion $16 : 7 :: x :$; ce quatrième sera $\frac{7x}{16}$; par un raisonnement semblable, on trouvera qu'en prenant y onces du second lingot, on prend $\frac{5y}{16}$ en or, et sur le troisième $\frac{2z}{16}$. Ces trois quantités réunies font $\frac{7x+5y+2z}{16}$; or, on veut qu'elles fassent $4\frac{15}{16}$ ou $\frac{79}{16}$; donc

$$\frac{7x+5y+2z}{16}=\frac{79}{16}.$$

Pour satisfaire à la seconde condition, on remarquera, de même, qu'en prenant x d'onces sur le premier lingot, on prend nécessairement $\frac{8x}{16}$ d'onces en argent, sur le second $\frac{7y}{16}$, et enfin sur le troisième, on prend nécessairement $\frac{9z}{16}$; ces trois quantités réunies font $\frac{8x+7z+9z}{16}$, et comme on veut qu'elles fassent $7\frac{10}{16}$ ou $\frac{122}{16}$, on aura

$$\frac{8x+7y+9z}{16}=\frac{122}{16}.$$

En procédant de la même manière, on aura, pour satisfaire à la troisième condition, l'équation

$$\frac{x+4y+5z}{16}=\frac{55}{16}.$$

Comme le nombre 16 est diviseur commun des deux membres de chacune des trois équations qu'on vient de trouver, on peut le supprimer, et alors on aura les trois équations suivantes:

$$7x+5y+2z=79\,;\ 8x+7y+9z=122\,;\ x+4y+5z=55.$$

Tirant de chacune la valeur de x, on aura

$$x=\frac{79-5y-2z}{7},\ x=\frac{122-7y-9z}{8},\ x=55-4y-5z\,;$$

égalant la première valeur de x, à la seconde et à la troisième (78), on aura

$$\frac{79-5y-2z}{7}=\frac{122-7y-9z}{8}\ \text{et}\ \frac{79-5y-2z}{7}=55-4y-5z,$$

équations qui ne renferment plus que deux inconnues, et qu'il faut, par conséquent, traiter selon ce qui a été dit (73). Pour cet effet, je commence par faire disparaître les diviseurs, et j'ai

$$632-40y-16z=854-49y-63z,$$
$$\text{et}\ 79-5y-2z=385-28y-35z,$$

ou, en passant tous les y d'un côté et réduisant,

$$9y=222-47z,\ \text{et}\ 23y=306-33z\,;$$

ces équations donnent

$$y=\frac{222-47z}{9}\ \text{et}\ y=\frac{306-33z}{23}\,;$$

égalant ces deux valeurs de y, j'ai

$$\frac{222-47z}{9}=\frac{306-33z}{23};$$

chassant les diviseurs,

$$5106-1081z=2754-297z;$$

transposant, $5106-2754=1081z-297z$; réduisant, $2352=784z$; et enfin, en divisant,

$$z=\tfrac{2352}{784}=3.$$

Pour avoir la valeur de y, je substitue dans l'une des deux valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour y, j'y substitue, dis-je, au lieu de z, sa valeur 3, qu'on vient de trouver; par exemple, en substituant dans

$$y=\frac{222-47z}{9},\text{ j'ai } y=\frac{222-141}{9}=9.$$

Enfin pour avoir x, je substitue, au lieu de y et de z, leurs valeurs 9 et 3 dans l'une des trois valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour x; par exemple, dans la dernière, savoir, $x=55-4y-5z$, et cette valeur devient

$$x=55-36-15=55-51=4;$$

c'est-à-dire, puisqu'on trouve $x=4$, $y=9$ et $z=3$, qu'il faut prendre 4 onces du premier lingot, 9 du second, et 3 du troisième, et alors le nouveau lingot contiendra en or, 4 onces et $\frac{15}{16}$; en argent, 7 onces $\frac{10}{16}$; et en cuivre, 3 onces $\frac{7}{16}$.

En effet, puisque le premier lingot contient sur 16 onces, 7 onces d'or, 8 d'argent et une de cuivre, il est évident que si l'on prend 4 onces seulemeut de ce lingot, on aura $\frac{28}{16}$ d'once en or, $\frac{32}{16}$ en argent et $\frac{4}{16}$, en cuivre. Par une raison semblable, en prenant 9 onces du second lingot, on aura $\frac{45}{16}$ en or, $\frac{63}{16}$ en argent, et $\frac{36}{16}$ en cuivre; et en prenant 3 onces du troisième lingot, on aura $\frac{6}{16}$ en or, $\frac{27}{16}$ en argent, et $\frac{15}{16}$ en cuivre. Réunissant les trois quantités de chaque espèce de matière, provenantes des trois lingots, on aura $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$

pour les quantités d'or, d'argent et de cuivre qui entreront dans le quatrième lingot.

Des cas où les questions proposées restent indéterminées, quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, et des cas où les questions sont impossibles.

86. Il arrive quelquefois que quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, la question qui a conduit à ces équations reste néanmoins indéterminée, c'est-à-dire qu'elle est alors susceptible d'un nombre indéfini de solutions. Ce cas a lieu lorsque quelques-unes des conditions, quoique différentes en apparence, se trouvent être les mêmes dans le fond. Alors les équations qui expriment ces conditions sont ou des multiples les unes des autres, ou, en général, quelques-unes d'entr'elles sont composées d'une ou de plusieurs des autres, ajoutées ou soustraites, multipliées ou divisées par certains nombres. Par exemple, une question qui conduirait à ces trois équations

$$5x+3y+2z=17,\ 8x+2y+4z=20,\ 18x+8y+8z=54,$$

serait susceptible d'un nombre indéfini de solutions, quoiqu'il semble, d'après ce que nous avons vu plus haut, que x, y et z ne peuvent avoir chacun qu'une seule valeur. De ces trois équations, la dernière est composée de la seconde ajoutée avec le double de la première. Or il est évident que les deux premières étant une fois supposées avoir lieu, la troisième s'ensuit nécessairement; que, par conséquent, elle n'exprime aucune nouvelle condition : on est donc dans le même cas que si l'on avait seulement les deux premières équations : or nous verrons dans peu que, lorsqu'on n'a que deux équations pour trois inconnues, chaque inconnue est susceptible d'un nombre indéfini de valeurs.

87. Le calcul fait toujours connaître les cas dont il s'agit ici: voici comment. Il n'y a qu'à procéder à la recherche des inconnues, selon les règles données ci-dessus : alors si quelqu'une des équations est comprise dans les autres, on arrivera, dans

le cours du calcul, à une équation *identique*, c'est-à-dire à une équation dans laquelle les deux membres seront non-seulement égaux, mais encore composés de termes semblables et égaux : autant on trouvera d'équations identiques, autant il y aura d'équations inutiles parmi celles qui auront été proposées. Par exemple, si de chacune des deux équations

$$6x+8y=12 \text{ et } x+y\tfrac{4}{3}=2$$

je tire la valeur de x, j'aurai, en égalant ces valeurs,

$$\frac{12-8y}{6}=2-\tfrac{4}{3}y, \text{ ou } 36-24y=36-24y,$$

équation identique, et qui ne peut faire connaître la valeur de y, parce qu'après la transposition et la réduction, on est conduit à cette équation, $0=0$.

Pareillement, des trois équations ci-dessus on tire

$$x=\frac{17-3y-2z}{5},\ x=\frac{20-2y-4z}{8},\ x=\frac{54-8y-8z}{18};$$

égalant la première de ces valeurs, à la seconde et à la troisième, on aura $\frac{17-3y-2z}{5}=\frac{20-2y-4z}{8}$ et $\frac{17-3y-2z}{5}$ $=\frac{54-8y-8z}{18}$; chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et divisant, on aura

$$y=\frac{36+4z}{14} \text{ et } y=\frac{36+4z}{14},$$

valeurs qui, étant égalées, donnent l'équation identique

$$\frac{36+4z}{14}=\frac{36+4z}{14};$$

il n'y a donc, dans ce cas, que deux équations réellement distinctes.

Mais si l'on avait les trois équations suivantes :

$$5x+3y+2z=24,\ \tfrac{25}{2}x+\tfrac{15}{2}y+5z=60,\ 15x+9y+6z=72,$$

elles donneraient

$$x=\frac{24-3y-2z}{5};\ x=\frac{120-15y-10z}{25}\ x=\frac{72-9y-6z}{15}.$$

Egalant la première de ces valeurs à la seconde et à la troisième, on aurait

$$\frac{24-3y-2z}{5}=\frac{120-15y-10z}{25},\ \frac{24-3y-2z}{5}=\frac{72-9y-6z}{15},$$

et en chassant les dénominateurs,

$$600-75y-50z=600-75y-50z,$$
$$360-45y-30z=360-45y-30z,$$

équations identiques, et dont on ne peut tirer ni y ni z, parce qu'elles se réduisent chacune à $0=0$. Il n'y a donc ici, à proprement parler, qu'une seule équation.

Les questions qui conduisent à de pareils résultats, sont indéterminées, mais ne sont pas impossibles. Nous verrons, dans peu, comment on doit les traiter.

88. Dans les cas dont nous venons de parler, le numérateur et le dénominateur de chacune des valeurs des inconnues x, y, z, etc. que nous avons données (84) deviennent 0, ce qui doit être, ainsi qu'on peut le conclure facilement de ce que nous venons de dire. On peut donc, par le moyen de ces mêmes formules générales, reconnaître les cas où quelques-unes des équations seront comprises dans les autres.

89. Lorsqu'une question qui ne conduit qu'à des équations du premier degré est impossible, on s'en apperçoit à ce que la suite du calcul conduit à une absurdité; par exemple, conduit à dire $4=3$. Si l'on avait, par exemple, les deux équations....

$$5x+3y=30 \text{ et } 20x+12y=135.$$

Elles donneraient

$$\frac{30-3y}{5}=\frac{135-12y}{20},$$

qui conduit à $600=675$; ce qui est absurde; donc la question qui fournirait les deux équations proposées est impossible.

90. Les solutions négatives indiquent aussi une sorte d'impossibilité dans la question; mais cette impossibilité n'est pas absolue, elle est relative au sens dans lequel les quantités ont été prises; ensorte qu'il y a un sens dans lequel ces solutions sont naturelles ou admissibles. (*Voyez* ce qui a été dit (69).)

Des Problèmes indéterminés.

91. On appelle *Problème indéterminé* toute question à laquelle on peut satisfaire en plusieurs manières, sans pouvoir déterminer parmi toutes ces manières, quelle est celle qui donne lieu à la question. Ces sortes de problèmes ont toujours moins de conditions que d'inconnues, et envisagés généralement, ils sont susceptibles d'une infinité de solutions; mais il arrive souvent aussi que le nombre de ces solutions est limité par quelques conditions qui, ne pouvant pas être réduites en équations, ne permettent pas de déterminer d'une manière directe le nombre des solutions que la question peut avoir. Si l'on proposait cette question : *Trouver deux nombres qui, pris ensemble, fassent* 24; en nommant x l'un de ces nombres, et y l'autre, on aurait $x+y=24$, équation de laquelle on tire $x=24-y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par x et y on entend indifféremment des nombres entiers, ou des nombres fractionnaires, et des nombres positifs ou négatifs : il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour y tel nombre qu'on voudra, et de conclure la valeur de x de l'équation $x=24-y$, en y substituant pour y le nombre qu'on aura pris arbitrairement; ainsi si l'on suppose successivement

$$y=1,\ y=1\tfrac{1}{2},\ y=2,\ y=2\tfrac{2}{3}\ \text{etc., on aura}$$

$$x=23,\ x=22\tfrac{1}{2},\ x=22,\ x=21\tfrac{1}{3},\ \text{etc.}$$

Mais si l'on ne veut que des nombres entiers et positifs, alors le nombre des solutions est limité; car pour que x soit positif, il faut que y ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation ne peut avoir en tout que 25 solutions en y comprenant o : ensorte que supposant successivement

$$y=0,\, y=1,\, y=2,\, y=3, \text{ etc., on aura}$$
$$x=24,\, x=23,\, x=22,\, x=21, \text{ etc.}$$

92. Mais lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers et positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut satisfaire à cette condition : les questions suivantes sont propres à le faire connaître.

Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 livres et recevant en échange des pièces de 11 livres.* Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv. et par y celui des pièces de 11 liv.; en donnant x pièces de 17 liv., on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv., on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x-11y$; et puisqu'on veut payer 542 liv., on aura $17x-11y=542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire de l'inconnue qui a le moindre coefficient, et nous aurons

$$y=\frac{17x-542}{11}.$$

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation; mais comme la question exige que x et y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de y se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à

$$y=x-49+\frac{6x-3}{11};$$

il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier; on aura

$$6x-3=11u \text{ et } x=\frac{11u+3}{6}=u+\frac{5u+3}{6};$$

il faut donc que $\frac{5u+3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier, on aura

$$5u+3=6t \text{ et } u=\frac{6t-3}{5}=t+\frac{t-3}{5};$$

il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura

$$t=5s+3:$$

l'opération est terminée, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x et y : puisqu'on a trouvé $u=\frac{1}{5}(6t-3)$, en mettant pour t sa valeur $5s+3$, on aura

$$u=\frac{30s+18-3}{5}=6s+3:$$

et puisqu'on a trouvé $x=\frac{11u+3}{6}$,

en mettant pour u sa valeur, on aura

$$x=\frac{66s+33+3}{6}=11s+6;$$

enfin puisqu'on a trouvé

$$y=\tfrac{1}{11}(17x-542),$$

en substituant pour x sa valeur, on aura

$$y=\frac{187s+102-542}{11}=17s-40;$$

ainsi les valeurs correspondantes de x et de y sont

$$x=11s+6, \text{ et } y=17s-40.$$

Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra; mais la seconde ne permet pas de prendre s

plus petit que 3 : en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire plus grand que 2. On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x et de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini; ainsi posant successivement

$$s=3,\ s=4,\ s=5,\ s=6,\ s=7, \text{ etc.},$$

les valeurs correspondantes de x et de y seront

$$x=39 \text{ et } y=11\,;\ x=50 \text{ et } y=28\,;\ x=61 \text{ et } y=45, \text{ etc.},$$

dont chacune est telle, qu'en donnant le nombre de pièces de 17 liv. désigné par x, et recevant le nombre correspondant de pièces de 11 liv. désigné par y, on paiera 542 livres.

Question seconde. *Faire* 741 *liv. en* 41 *pièces de trois espèces; savoir, de* 24 *liv., de* 19 *liv., et de* 10 *livres.* Soient x, y et z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces; 1° puisqu'on veut en tout 41 pièces, on aura

$$x+y+z=41\,;$$

2° chaque pièce de la première espèce valant 24 liv., le nombre x des pièces vaudra x fois 24 liv. ou $24x$; par la même raison y pièces de la seconde espèce vaudront $19y$, et z pièces de la troisième espèce vaudront $10z$; ainsi les valeurs réunies des trois nombres de pièces différentes, monteront à $24x+19y+10z$; et comme elles doivent monter à 741 liv., on aura

$$24x+19y+10z=741.$$

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur d'une même inconnue, peu importe laquelle, de x, par exemple, et j'ai

$$x=41-y-z\,;\ \text{ et } x=\frac{741-19y-10z}{24}\,;$$

j'égale ces deux valeurs, et j'ai

$$41-y-z=\frac{741-19y-10z}{24},$$

ou chassant le dénominateur

$$984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z;$$

transposant et réduisant, on a

$$243 = 5y + 14z.$$

Je prends maintenant la valeur de y qui a le plus petit coefficient, et j'ai

$$y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5};$$

or y et z devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{3-4z}{5}$ soit un nombre entier : soit donc t ce nombre entier, on aura

$$3 - 4z = 5t; \text{ donc } z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4};$$

il faut donc que $\frac{3-t}{4}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre, on aura

$$3 - t = 4u, \text{ et } t = 3 - 4u.$$

Remontons maintenant aux valeurs de y, z et x. Puisqu'on vient de trouver $z = \frac{3-5t}{4}$, on aura, en mettant pour t sa valeur

$$z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3;$$

et puisqu'on a trouvé $y = \frac{243 - 14z}{5}$, en mettant pour z sa valeur, on aura

$$y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u.$$

Enfin, puisqu'on a trouvé $x = 41 - y - z$, on aura

$$x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13.$$

En sorte que les valeurs correspondantes de x, y et z sont

$$x=9u-13,\ y=57-14u,\ \text{et}\ z=5u-3,$$

dans lesquelles on peut mettre pour u tel nombre entier qu'on voudra, pourvu qu'il en résulte des nombres positifs pour x, y et z : or cette condition emporte ces trois autres : 1° que $9u$ soit plus grand que 13, ou que u soit plus grand que $\frac{13}{9}$ ou $1\frac{4}{9}$; 2° que 57 soit plus grand que $14u$, ou que u soit plus petit que $\frac{57}{14}$, c'est-à-dire plus petit que $4\frac{1}{14}$; 3° enfin, que $5u$ soit plus grand que 3, ou u plus grand que $\frac{3}{5}$, ce qui ne peut manquer d'arriver, dès qu'on observera la première condition ; ainsi le nombre des solutions est donc très-limité, et se réduit à trois que l'on trouve, en donnant à u pour valeurs les nombres 2, 3 et 4, qui sont les seuls que l'état de la question admette. On ne peut donc faire 741 liv. en 41 pièces des trois espèces proposées, qu'en prenant les nombres de pièces marquées ci-dessous, et qu'on trouve, en mettant pour u, les nombres 2, 3 et 4, successivement dans chacune des valeurs de x, y et z.

$$\begin{array}{llll} u=2, \text{ donne } & x=5, & y=29 & \text{et } z=7 \\ u=3, \text{ donne } & x=14, & y=15 & \text{et } z=12 \\ u=4, \text{ donne } & x=23, & y=1 & \text{et } z=17. \end{array}$$

Dans le cours des divisions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre le quotient plutôt au-dessous de sa véritable valeur qu'au-dessus. Il est même quelquefois plus expéditif de le prendre de cette dernière manière. Par exemple, si j'avais l'équation $19y=52x+139$, au lieu d'en conclure

$$y=2x+7+\frac{14x+6}{19},$$

en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ divisé par 19, en nombres entiers : je conclurais

$$y=3x+7+\frac{-5x+6}{19},$$

en prenant plutôt, $3x$ pour quotient, parce que ce quotient est plus approchant, et que l'excédant $5x$ dont je tiens compte en lui donnant le signe $-$, a un coefficient plus petit, ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul. Je fais ensuite

$\frac{-5x+6}{19}=u$; d'où $x=\frac{6-19u}{5}$; et $x=1-4u+\frac{1+u}{5}$.

Faisant $\frac{1+u}{5}=t$, j'ai enfin $u=5t-1$;

ce qui achève la solution plus promptement que si j'avais pris chaque quotient au-dessous de sa véritable valeur. Si on remonte, comme ci-dessus, aux valeurs de x et de y, on trouvera

$$x=5-19t,\ \text{et}\ y=21-52t,$$

qui, en donnant à t pour valeurs tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les solutions positives de l'équation.

Des Equations du second degré à une seule inconnue.

93. On appelle *Equations du second degré*, celles dans lesquelles la plus haute puissance de l'inconnue est cette même inconnue multipliée par elle-même, ou élevée à son quarré. Ainsi, l'équation $5x^2=125$, est une équation du second degré, parce que dans le terme $5x^2$, la quantité x est multipliée par elle-même.

94. Lorsque l'équation ne renferme d'autre puissance de l'inconnue que le quarré, elle est toujours facile à résoudre : il suffit de dégager le quarré de l'inconnue, de tout ce qui peut le multiplier, ou le diviser, ou des quantités qui peuvent se trouver jointes avec lui, par les signes $+$ ou $-$, ce qui se fait par les règles données (56, 60 et 64); après quoi il n'y a plus qu'à tirer la racine quarrée de chaque membre. Par exemple, de l'équation $5x^2=125$, je conclus, en divisant par 5, $x^2=\frac{125}{5}=25$, en tirant la racine quarrée de chaque membre, $x=5$: car il est évident que si deux quantités sont égales, leurs racines quarrées seront aussi égales, et il est également clair que x est la racine quarrée de x^2.

Pareillement si j'ai l'équation

$\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, je chasse les fractions, et j'ai

$25x^2 = 12x^2 + 105$; d'où $13x^2 = 105$, $x^2 = \frac{105}{13}$; donc $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$;

ce signe $\sqrt{\ }$, marque qu'on doit tirer la racine quarrée. Lorsqu'on doit tirer la racine quarrée d'une fraction, comme dans le cas présent, on fait descendre les jambes du signe $\sqrt{\ }$ (qu'on appelle *signe radical*) au-dessous de la barre qui sépare les deux termes de la fraction. Mais si l'on n'avait à représenter que la racine quarrée de l'un ou de l'autre des deux termes de la fraction, le radical serait tout entier au-dessus ou au-dessous de la barre de la division; ainsi pour marquer qu'on veut diviser par 3, la racine quarrée de 40, on écrirait $\frac{\sqrt{40}}{5}$.

Si la quantité dont on doit tirer la racine quarrée était complexe, on donnerait au radical une queue qui recouvrirait toute la quantité; par exemple, pour marquer la racine quarrée de $3ab + b^2$, on écrirait $\sqrt{3ab + b^2}$. Quelquefois aussi, sans donner une queue au radical, on renferme la quantité complexe entre deux crochets, qu'on fait précéder du signe $\sqrt{\ }$, en cette manière $\sqrt{\ }(3ab + b^2)$.

95. Nous avons vu (24) que lorsque le multiplicande et le multiplicateur avaient tous deux le même signe, le produit avait toujours le signe $+$. Cela étant, lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité qui a le signe $+$, on doit indifféremment donner à cette racine quarrée le signe $+$ ou le signe $-$; ainsi dans l'équation précédente $x^2 = 25$, on peut, lorsqu'on tire la racine quarrée, dire également qu'elle est $+5$, et qu'elle est -5, parce que chacun de ces nombres multiplié par lui-même, reproduit toujours $+25$; ensorte que la résolution de l'équation $x^2 = 25$ s'écrit ainsi $x = \pm 5$ (1), ce qui

(1) On pourrait demander ici pourquoi nous ne donnons pas le double signe $\pm$ au premier membre? La réponse est qu'on le peut, mais cela ne

se prononce en disant x *égale plus ou moins* 5, et qui équivaut à ces deux équations $x=+5$ et $x=-5$.

Pareillement pour la seconde équation ci-dessus, on écrirait $x=\pm\sqrt{\frac{105}{13}}$.

96. Lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité précédée du signe $-$, on couvre le tout du radical, que l'on fait aussi précéder du double signe $\pm$; ainsi si l'on avait $x^2=-4$, on écrirait $x=\pm\sqrt{-4}$; et quoiqu'on puisse tirer la racine quarrée de 4, qui est 2, il ne faudrait pas écrire $x=\pm 2$: il est essentiel ici de faire attention au signe $-$ de la quantité qui est sous le radical.

97. Lorsqu'une équation conduit ainsi à tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on peut conclure que le problème qui a conduit à cette équation est impossible : en effet, une quantité négative ne peut avoir de racine quarrée, ni exactement, ni par approximation; car il n'y a aucune quantité, soit positive, soit négative, qui, étant multipliée par elle-même, puisse produire une quantité négative : il est bien vrai que -4, par exemple, peut être considéré comme venant de $+2$ multiplié par -2; mais ces deux quantités ayant un signe différent ne sont point égales, et par conséquent leur produit n'est pas un quarré. Ainsi, lorsqu'on propose de tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on propose une chose absurde; donc tout problème qui se réduira à une pareille opération, sera un problème impossible. C'est à ce

---

mène à rien de nouveau. En effet, si l'on écrit $\pm x=\pm 5$, on en tire ces quatre équations

$$+x=+5,\ +x=-5,\ -x=+5,\ -x=-5.$$

La dernière, en changeant les signes, revient à la première. Il en est de même de la troisième relativement à la seconde.

Il faut se garder de considérer la valeur de x dans la première équation $x=5$, comme étant la même que dans la seconde $x=-5$, quoique ces deux valeurs soient exprimées par le même caractère ou la même lettre x. Cette lettre x est un signe par lequel on représente la quantité que l'on cherche; il peut désigner des quantités différentes comme le mot *écu* désigne des quantités différentes dans différens pays.

caractère

caractère qu'on distingue l'impossibilité des questions du second degré. Au reste, il ne faut pas pour cela regarder comme inutile la considération des racines quarrées des quantités négatives : il arrive assez souvent qu'une question, quoique possible, n'admet de solution que par le concours de pareilles quantités, dans lesquelles à la fin, ce qu'il y a d'absurde disparaît. On appelle ces sortes de quantités, *quantités imaginaires*. Ainsi $\sqrt{-a}$, et $a+\sqrt{-b}$ sont des quantités imaginaires.

98. Ce que nous venons de dire suffit pour la résolution des équations du second degré, lorsqu'il n'y a pas d'autres puissances de x que le quarré. Mais outre le quarré de l'inconnue, il peut encore y avoir (et cela arrive le plus souvent) la première puissance de l'inconnue multipliée ou divisée par quelque quantité connue, comme dans cette équation $x^2-4x=12$. Alors l'artifice qu'on doit employer pour résoudre l'équation, consiste à préparer le premier membre, de manière à en faire un quarré parfait : cette préparation suppose avant tout trois choses : 1°. qu'on ait passé dans un seul membre tous les termes affectés de x, et les quantités connues dans l'autre, cela s'exécute par ce qui a été dit (56) ; 2°. que le terme qui renferme x^2 soit positif, s'il avait le signe $-$, on changerait tous les signes de l'équation, ce qui ne troublerait point l'égalité ; 3°. que le terme qui renferme x^2 soit libre de tout multiplicateur ou de tout diviseur : s'il n'était point dans cet état, on l'y amènerait, en multipliant tous les autres termes de l'équation par ce diviseur, et en les divisant par le multiplicateur. Par exemple, si j'avais à résoudre l'équation

$$4x-\tfrac{3}{5}x^2=4-2x,$$

1°. je passerais tous les x dans le premier membre, en écrivant le terme x^2 le premier, et j'aurais

$$-\tfrac{3}{5}x^2+4x+2x=4, \text{ ou } -\tfrac{3}{5}x^2+6x=4;$$

2°. je changerais les signes pour rendre x^2 positif, et j'aurais

$$\tfrac{3}{5}x^2-6x=-4;$$

3°. je multiplierais par 5, ce qui me donnerait

$$3x^2 - 30x = -20;$$

enfin je diviserais par 3, et j'aurais

$$x^2 - 10x = -\tfrac{20}{3}.$$

Comme on peut toujours ramener à cet état toute équation du second degré, nous ne nous occuperons actuellement que d'une équation préparée de cette manière.

99. Cela posé, pour résoudre une équation du second degré, il faut suivre cette règle :

Prenez la moitié de la quantité connue qui multiplie x *dans le second terme : élevez cette moitié au quarré, et ajoutez ce quarré à chaque membre de l'équation, ce qui ne changera rien à l'égalité. Le premier membre sera alors un quarré parfait. Tirez la racine quarrée de chaque membre, et faites précéder celle du second membre, du double signe* $\pm$, *l'équation sera réduite au premier degré.* Quant à la manière de tirer la racine quarrée du premier membre, on tirera la racine quarrée du quarré de l'inconnue, et celle du quarré qu'on a ajouté : on joindra cette seconde à la première, par le signe qu'aura le second terme de l'équation. Par exemple, ayant l'équation

$$x^2 + 6x = 16,$$

je prends la moitié de la quantité connue 6, qui multiplie x dans le second terme : je quarre cette moitié, et j'ajoute à chaque membre le quarré 9, j'ai

$$x^2 + 6x + 9 = 25:$$

il ne s'agit plus que de tirer la racine quarrée, ce que je fais en prenant la racine quarrée de x^2 qui est x, puis celle de 9 qui est 3; et comme le second terme $6x$ de l'équation a le signe $+$, j'en conclus que $x+3$ est la racine quarrée du premier membre. Quant à celle du second, elle est 5 ou plutôt (95) ± 5; par conséquent $x+3 = \pm 5$. Pour avoir x il ne s'agit plus que de transposer, et l'on aura $x = \pm 5 - 3$; c'est-à-dire, que x a deux valeurs, savoir :

$$x = +5 - 3 = 2, \text{ et } x = -5 - 3 = -8.$$

Nous verrons ci-après ce que signifie cette seconde valeur. Pour entendre la raison de cette règle, il faut se rappeler ce que nous avons remarqué (25), savoir, que *le quarré d'une quantité composée de deux termes, contient toujours le quarré du premier terme, le double du premier terme multiplié par le second, et le quarré du second.* Cela posé, lorsqu'il s'agit d'ajouter à une quantité telle que $x^2 + 6x$, ce qu'il est nécessaire pour en faire un quarré parfait, il faut remarquer, 1°. que cette quantité contient déjà un quarré x^2, qu'on peut considérer comme le quarré du premier terme x d'un binome; 2°. qu'on peut toujours considérer le terme suivant $6x$, comme étant le double de x multiplié par une autre quantité; 3°. que cette autre quantité est nécessairement la moitié de 6 multiplicateur de x. Il ne manque donc plus que le quarré de cette seconde quantité, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du multiplicateur de x dans le second terme. On voit que ce raisonnement est général, quel que soit le multiplicateur de x. Quant à la règle que nous donnons en même temps pour extraire la racine quarrée du premier membre, elle est également une suite de la formation du quarré; puisque les deux quarrés extrêmes qui se trouvent dans le quarré d'un binome étant les quarrés des deux termes de la racine, il est évident qu'il ne s'agit que de tirer séparément les racines de ces deux quarrés pour avoir ces deux termes. Mais on doit donner au second terme de la racine, le même signe qu'a le second terme de l'équation, parce que de même que le calcul fait voir que le quarré de $a + b$ est $a^2 + 2ab + b^2$, de même il fait voir que le quarré de $a - b$ est $a^2 - 2ab + b^2$. Appliquons la règle du n° 99 à des exemples :

100. De quelque degré que doive être l'équation, il faut toujours, pour mettre la question en équation, faire usage de la règle que nous avons donnée (67).

Question première. *Trouver un nombre tel, que si à son quarré on ajoute* 8 *fois ce même nombre, le tout fasse* 33 ? Si je connaissais ce nombre, que j'appelle x, il est évident que j'en prendrais le quarré x^2 ; qu'à ce quarré j'ajouterais 8 fois ce nombre, c'est-à-dire $8x$, et que le tout x^2+8x formerait 33 ; il faut donc que

$$x^2+8x=33.$$

Pour résoudre cette équation, j'ajoute à chaque membre le nombre 16, qui est le quarré de la moitié du nombre 8 qui multiplie x dans le second terme, et j'ai

$$x^2+8x+16=49,$$

équation dont le premier membre est un quarré parfait. Je tire la racine quarrée de chaque membre, en observant la règle donnée (99) et j'ai

$$x+4=\pm 7;\ x=\pm 7-4,$$

qui donne ces deux valeurs de x,

$$x=+7-4=3 \quad \text{et} \quad x=-7-4=-11.$$

De ces deux valeurs, la première satisfait à la question, puisque 9, qui est le quarré de 3, étant ajouté à 8 fois 3 ou 24, fait 33. A l'égard de la seconde, comme elle est négative, elle indique qu'il y a une autre question dans laquelle prenant x dans un sens tout contraire, la solution serait 11 ; c'est-à-dire, que la seconde valeur de x doit satisfaire à cette autre question : *Trouver un nombre tel, que si de son quarré on retranche* 8 *fois ce même nombre, le reste soit* 33 : ce qui est en effet ; car le quarré de 11 est 121, et 8 fois 11 fait 88, lequel retranché de 121, il reste 33.

Pour confirmer ce que nous avons dit sur les quantités négatives (69), remarquons que cette seconde question mise en équation, donne $x^2-8x=33$, laquelle, étant résolue selon la règle, donne $x=\pm 7+4$; c'est-à-dire, ces deux valeurs, $x=11$ et $x=-3$, qui sont précisément le contraire de celles de la première question.

101. On voit par là qu'une équation du second degré à une seule inconnue, a toujours deux solutions. Car les deux valeurs 11 et -3 substituées, au lieu de x, dans l'équation $x^2 - 8x = 33$, la résolvent également, c'est-à-dire, réduisent également le premier membre à 33. On vient de le voir pour 11. A l'égard de -3, son quarré est $+9$; et 8 fois -3, font -24, qui, retranchés de $+9$, donnent $+9+24$, selon ce qui a été enseigné (11). Mais on voit en même temps que si toute équation du second degré a deux solutions, il n'en est pas toujours de même de la question qui a conduit à cette équation; car, dans le cas présent, la seconde valeur -3, ne résout que la question contraire. Au reste, il arrive souvent que les deux solutions de l'équation sont aussi, toutes deux, solutions de la question. Nous en verrons un exemple dans la troisième question.

Question seconde. *On devait partager 175 livres entre un certain nombre de personnes; mais il y en a deux d'absentes et qui, par cette raison, ne doivent pas avoir part. Cette circonstance augmente de 10 livres la part de chaque présent; on demande combien il devait d'abord y avoir de partageans?* Si je savais quel est ce nombre, je diviserais 175 par ce nombre, pour connaître combien chacun aurait eu, si toutes les personnes eussent été présentes. Je diviserais ensuite par ce même nombre diminué de 2, pour connaître combien chaque partageant aura réellement; enfin je verrais si, en ôtant 10 livres de ce second quotient, le reste est égal au premier. Imitons ces opérations, en représentant par x le nombre cherché. Si tous étaient présens, chacun aurait donc $\frac{175}{x}$; mais s'il manque deux personnes, chaque partageant aura $\frac{175}{x-2}$; puis donc que ce dernier nombre doit être plus grand de 10 que le premier, il faut que

$$\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}, \quad \text{d'où} \quad x^2 - 2x = 35.$$

équation à laquelle il ne s'agit plus que d'appliquer la règle donnée (100). Je prends donc la moitié -1 du multiplicateur -2 de x. Je quarre cette moitié, ce qui me donne $+1$, que j'ajoute à chaque membre, et j'ai

$$x^2 - 2x + 1 = 36;$$

tirant la racine quarrée, j'ai

$$x - 1 = \pm 6; \quad \text{d'où} \quad x = \pm 6 + 1,$$

qui donne $x = 7$ et $x = -5$.

La première est le nombre cherché; car 175 divisé par 7, donne 25; et 175 divisé par $7-2$ ou 5, donne 35, qui excède 25 de 10. Quant à la seconde, elle résout la question où l'on supposerait qu'il s'agit de partager 175 livres avec deux nouveaux survenus, et que cette circonstance diminue de dix livres la part que chacun aurait eue sans cela.

Question troisième. *Un homme achète un cheval, qu'il vend, au bout de quelque temps, pour 24 pistoles. A cette vente, il perd autant, pour cent pistoles, que le cheval lui avait coûté. On demande combien il l'avait acheté?* Si l'on me disait ce que le cheval a coûté, je vérifierais ce nombre en cette manière. Je le retrancherais de 100, et je ferais cette règle de trois : Si 100 se réduisent au nombre que vient de me donner la soustraction, à combien le nombre prétendu doit-il se réduire? Ayant trouvé ce quatrième terme, il devrait être égal à 24. Nommons donc x le nombre cherché, c'est-à-dire le nombre de pistoles que le cheval a coûtées. Alors puisque 100 sont supposés se réduire à $100 - x$, je trouverai à combien x doit être réduit, en faisant cette règle de trois, $100 : 100 - x :: x :$; le quatrième terme sera... $\frac{(100 - x)x}{100}$ (*Arith.* 179) ou $\frac{100x - xx}{100}$; puis donc qu'on suppose que le prix du cheval a été réduit à 24 pistoles, il faut que

$$\frac{100x - xx}{100} = 24.$$

Pour résoudre cette équation, je chasse le dénominateur, et j'ai

$$100x - xx = 2400, \quad \text{ou} \quad xx - 100x = -2400.$$

Je prends donc (99) la moitié de -100 qui est -50; je l'élève au quarré, ce qui me donne $+2500$ à ajouter à chaque membre. L'équation devient

$$xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100;$$

tirant la racine quarrée, j'ai

$$x - 50 = \pm 10, \quad x = 50 \pm 10, \quad \text{ou} \quad x = 60 \quad \text{et} \quad x = 40;$$

chacune de ces valeurs de x résout la question; ensorte que le prix du cheval peut également avoir été de 60 ou de 40 pistoles : l'énoncé de la question n'est pas suffisant pour déterminer lequel de ces deux prix a eu lieu. Si l'on veut vérifier ces deux solutions, on verra qu'en supposant que le cheval a été acheté 60 pistoles, puisqu'alors 100 se réduisent à 40, 60 se réduiront à 24. Et dans le second cas, on verra de même, que 100 se réduisant à 60, 40 se réduiront à 24.

102. Dans les questions précédentes, l'équation a eu deux solutions, l'une positive, l'autre négative. Dans la dernière, elle en a deux positives. Elle peut en avoir aussi deux négatives. Mais cela n'arrive que lorsque l'énoncé de la question est vicieux; car alors chacune de ces deux solutions négatives indique (69) que l'inconnue doit être prise dans un sens tout opposé à celui de l'énoncé. Par exemple, si l'on proposait cette question : *Trouver un nombre tel, que si à son quarré on ajoute neuf fois ce même nombre, et encore le nombre* 50, *le tout fasse* 30; cette question, mise en équation, donnerait

$$x^2 + 9x + 50 = 30,$$

qui, en suivant les règles données plus haut, deviendrait successivement

$$x^2 + 9x = -20, \quad x^2 + 9x + \tfrac{81}{4} = \tfrac{81}{4} - 20 = \tfrac{1}{4}.$$

tirant la racine quarrée

$$x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}, \text{ qui donne}$$

$$x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4, \quad \text{et} \quad x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5.$$

Ce qui indique que la question doit être changée en cette autre : Trouver un nombre tel, que si après avoir ajouté 50 à son quarré, on retranche du tout, 9 fois le nombre demandé, il reste 30.

103. L'Algèbre a donc cet avantage, que non-seulement elle résout les questions, mais elle fait encore distinguer si elles sont bien ou mal proposées; et si elles sont impossibles, elle le fait connaître aussi : nous en avons déjà donné le caractère (97). Si l'on en veut un exemple, il n'y a qu'à résoudre la question troisième, en y supposant vingt-six pistoles au lieu de vingt-quatre. L'équation sera

$$\frac{100x - xx}{100} = 26, \text{ ou } 100x - xx = 2600, \text{ ou } xx - 100x = -2600,$$

qui, selon la règle (99), devient

$$xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100,$$

tirant la racine quarrée

$$x - 50 = \pm\sqrt{-100}, \quad \text{et enfin} \quad x = 50 \pm \sqrt{-100};$$

or nous avons vu (97) que la racine quarrée d'une quantité négative est impossible.

Question quatrième. *Deux personnes se sont réunies dans un commerce : l'une a mis 30 louis qui ont resté 17 mois dans la société. La seconde n'a fourni ses fonds qu'au bout de 5 mois; c'est-à-dire, qu'ils n'ont été que 12 mois dans la société. Ces fonds que l'on ne connaît point, font, avec le gain qui lui revient, 26 louis. Le gain total a été de 18 louis et $\frac{3}{4}$; on demande ce que le second avait mis, et combien chacun a gagné?* La question se réduit à trouver la mise du second, car il est évident que le gain de chacun sera facile à trouver ensuite. Représentons cette mise, ou le nombre de louis de cette mise par x. Puisque les 30 louis du premier ont été 17 mois dans la société, ils doivent lui avoir produit autant que produiraient 17 fois 30 louis ou 510 louis pendant un mois. Pareillement, puisque la mise x du second a été 12 mois dans la société, elle doit lui avoir produit autant que 12 fois x de louis ou $12x$ produiraient pendant un mois; ainsi, on peut regarder la société comme n'ayant duré qu'un mois, mais en supposant que les mises aient été 510 et $12x$; cela étant, pour savoir ce que le second doit gagner, il faut (*Arith.* 97) calculer le quatrième terme de cette proportion

$$510 + 12x : 18\tfrac{3}{4} :: 12x :$$

Ce quatrième terme sera

$$\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}, \quad \text{qui revient à} \quad \frac{225x}{510 + 12x};$$

or il est dit dans là question que le gain du second et sa mise x font 26 louis ; donc

$$\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26. \quad \text{D'où} \quad x^2 + \frac{141x}{4} = 1105.$$

Prenant donc la moitié de $\frac{141}{4}$; élevant cette moitié au quarré, et l'ajoutant à chaque membre, on aura

$$x^2 + \tfrac{141}{4}x + \tfrac{19881}{64} = \tfrac{19881}{64} + 1105 = \tfrac{90601}{64}.$$

Tirant donc la racine quarrée, on aura

$$x + \tfrac{141}{8} = \pm\sqrt{\tfrac{90601}{64}} = \pm\tfrac{301}{8};$$

$$\text{donc} \quad x = -\tfrac{141}{8} \pm \tfrac{301}{8},$$

qui donne pour la seule valeur, qui satisfasse à la question,

$$x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20,$$

la mise du second était donc de 20 louis; par conséquent son gain était de 6, et celui du premier de $12\frac{3}{4}$.

104. A l'égard des équations littérales, la règle est absolument la même. Si l'on avait à résoudre l'équation

$$abx - axx = b^2c;$$

conformément à ce qui a été dit (98 et 99), je changerais cette équation en

$$ax^2 - abx = -b^2c, \text{ puis en } xx - bx = -\frac{b^2c}{a};$$

j'ajouterais à chaque membre le quarré de $-\frac{1}{2}b$, et j'aurais

$$xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a},$$

tirant la racine quarrée, j'ai

$$x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}}, \text{ et } x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}}.$$

105. Lorsque l'équation est littérale, elle peut se présenter sous une forme plus composée que nous ne l'avons vue jusqu'ici, mais on peut toujours la ramener à trois termes en cette manière. Soit l'équation

$$ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx.$$

Je passe dans un seul membre tous les termes affectés de x, en observant d'écrire de suite tous ceux qui ont les mêmes puissances de x, et j'ai

$$ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2.$$

Je remarque, à présent, que $ax^2 - bx^2$ n'est autre chose que $(a-b)\,x^2$; pareillement $bcx + acx$ est $(bc+ac)\,x$, ensorte que l'équation peut s'écrire ainsi

$$(a-b)\,x^2 + (bc+ac)\,x = a^2b - ab^2;$$

or les quantités a, b, c étant des quantités connues, on doit regarder $a-b$, $bc+ac$, et a^2b-ab^2 comme des quantités toutes connues : on peut donc, pour abréger, représenter chacune de ces quantités par une seule lettre, et supposer

$$a - b = m,\ bc + ac = n,\ a^2b - ab^2 = p,$$

et alors l'équation est réduite à

$$mx^2 + nx = p,$$

qui est dans le cas des précédentes, et qui étant résolue suivant les mêmes règles, deviendra successivement

$$x^2+\frac{n}{m}x=\frac{p}{m},\ x^2+\frac{n}{m}x+\frac{n^2}{4m^2}=\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m},$$

$$x+\frac{n}{2m}=\pm\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}},\ \text{enfin}\ldots(1)\ldots x=\frac{-n}{2m}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}.$$

106. Au reste, on ne fait ces sortes de transformations que lorsque le calcul qu'on aurait à faire sans elles, serait très-composé; car dans ce même exemple, après avoir mis l'équation proposée sous la forme

$$(a-b)\ x^2+(bc+ac)\ x=a^2b-ab^2,$$

on peut la traiter, sans trop de calcul, comme les précédentes, en divisant d'abord par $a-b$, ce qui donne

$$x^2+\frac{bc+ac}{a-b}\ x=ab\ ;$$

maintenant il faut ajouter de part et d'autre le quarré de la moitié de $\frac{bc+ac}{a-b}$, c'est-à-dire, le quarré de $\frac{bc+ac}{2a-2b}$; mais on peut se contenter de l'indiquer en cette manière $\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2$, ainsi on aura

$$x^2+\frac{bc+ac}{a-b}x+\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2=\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+ab;$$

tirant la racine quarrée, on aura

$$x+\frac{bc+ac}{2a-2b}=\pm\sqrt{\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+ab},\ \text{et enfin}$$

$$x=\frac{-bc-ac}{2a-2b}\pm\sqrt{\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+ab}.$$

107. Quoiqu'on puisse, lorsqu'on a conclu la valeur de x, laisser le radical dans l'état où il est, jusqu'à ce qu'on vienne

aux applications numériques ; néanmoins, il peut être souvent utile de lui donner une forme plus simple, en réduisant au même dénominateur les deux parties qui se trouvent sous ce radical. Sur quoi il faut observer qu'on peut souvent les réduire au même dénominateur d'une manière plus simple que par la règle générale donnée (47) ; et cela en se conformant aux observations que nous avons faites (48) ; prenons, pour exemple, $\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$: pour réduire à un même dénominateur les deux quantités $\frac{n^2}{4m^2}$ et $\frac{p}{m}$, j'observe que leurs dénominateurs actuels ont un facteur commun m, et que par conséquent, si je multipliais les deux termes de la fraction $\frac{p}{m}$, par $4m$, qui est le second facteur du premier dénominateur, alors elle aurait le même dénominateur que cette première fraction ; c'est pourquoi je change $\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$ en $\sqrt{\frac{n^2+4pm}{4m^2}}$; or comme le radical marque qu'il faut tirer la racine quarrée de la fraction, c'est-à-dire, (*Arith.* 142) du numérateur et du dénominateur ; je tire celle du dénominateur qui est un quarré, et j'ai $\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m}$; ainsi l'équation (1), devient...

$$x=\frac{-n}{2m}\pm\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m},\ \text{ou}\ x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4pm}}{2m}.$$

De l'Extraction de la racine quarrée des quantités littérales.

108. La résolution des équations du second degré conduit donc, comme nous venons de le voir, à extraire la racine quarrée des quantités, soit numériques, soit littérales. Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des premières en Arithmétique. Nous allons parler des dernières.

Lorsqu'il a été question de la multiplication des quantités monomes (18), nous avons dit que le produit renfermait toutes les lettres du multiplicande et toutes celles du multiplicateur : or, lorsqu'on élève une quantité au quarré, le multiplicande et le multiplicateur sont les mêmes ; donc, dans un quarré monome, chacune des lettres de la racine doit être deux fois facteur ; donc l'exposant de chacune des lettres d'un quarré monome doit être double de celui des mêmes lettres dans la racine ; donc *pour avoir la racine quarrée d'une quantité monome, il faut donner à chacune des lettres de cette quantité, un exposant moitié moindre ;* suivant cette règle, la racine quarrée de a^2 est a, celle de a^6 est a^3, celle de $a^2b^2c^2$ est abc, celle de $a^4b^6c^8$ est $a^2b^3c^4$.

109. S'il se trouvait un exposant impair, ce serait donc un signe que la quantité proposée n'est point un quarré parfait ; alors, en suivant la règle, il resterait un exposant fractionnaire qui désignerait qu'il reste à tirer la racine quarrée de la quantité qui aurait cet exposant. Ainsi la racine quarrée de $a^2b^3c^4$ est $ab^{\frac{3}{2}}c^2$ ou $abb^{\frac{1}{2}}c^2$: car on peut considérer $a^2b^3c^4$ comme $a^2b^2bc^4$.

L'exposant fractionnaire a donc ici le même usage que le signe $\sqrt{\ }$; ainsi $abb^{\frac{1}{2}}c^2$, ou (ce qui est la même chose) $abc^2b^{\frac{1}{2}}$ équivaut à $abc^2\sqrt{b}$. Donc réciproquement, si une quantité monome est affectée du signe $\sqrt{\ }$, on pourra supprimer ce radical, pourvu qu'on prenne la moitié de chacun des exposans.

110. Cette remarque sert à simplifier les quantités affectées du signe $\sqrt{\ }$, lorsque cela est possible. Par exemple, la quantité $\sqrt{a^2b^3c}$ étant la même chose que $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, se réduit à $abb^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, ou, en remettant le radical au lieu des exposans fractionnaires, à $ab\sqrt{bc}$. De même $\sqrt{a^5b^4c^3}$ se réduit à $a^2b^2c\sqrt{ac}$, en considérant $a^5b^4c^3$ comme $a^4b^4c^2ac$, et prenant la moitié des exposans 4, 4 et 2. On trouvera de même que $\sqrt{\frac{a^3}{f}}$ se réduit à $a\sqrt{\frac{a}{f}}$; ou bien, si l'on multiplie le numé-

rateur et le dénominateur par f, cette expression se réduit à $a\sqrt{\frac{af}{f^2}}$, ou enfin à $\frac{a}{f}\sqrt{af}$.

111. On voit donc que pour faire sortir hors du radical les facteurs qui sont des quarrés parfaits, il faut prendre la moitié des exposans de ces facteurs. Au contraire, pour faire entrer sous le radical un facteur qui serait au dehors, il faudra doubler l'exposant de ce facteur, c'est-à-dire, élever ce facteur au quarré. Ainsi $a\sqrt{b}$ peut être changé en $\sqrt{a^2b}$; $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ peut être changé en $\sqrt{\frac{a^2b}{a}}$, qui se réduit à $\sqrt{ab}$. De même $(a+b)\sqrt{c}$ peut être changé en $\sqrt{(a+b)^2c}$.

112. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coefficient. S'il y en avait un, et qu'il fût un quarré parfait, on en tirerait la racine quarrée selon les règles de l'Arithmétique; ainsi $\sqrt{9a^2b^3}$ devient $3ab\sqrt{b}$. De même, $\sqrt{1024\,a^2b^3c}$ devient $32ab\sqrt{bc}$.

113. Mais si le coefficient n'était point un quarré parfait, il faudrait voir s'il ne peut pas être décomposé en deux facteurs, dont l'un soit un quarré parfait dont on tirerait la racine, et on laisserait l'autre sous le radical; c'est ainsi que $\sqrt{48a^2b^3}$ se réduit à $4ab\sqrt{3b}$; parce que 48 étant égal à 16×3,

$$\sqrt{48a^2b^3}=\sqrt{16a^2b^2\times3b}=4ab\sqrt{3b}.$$

On trouvera de même que $\sqrt{512a^3b^2}$ se réduit à $16ab\sqrt{2a}$.

114. Si la quantité affectée du signe radical, est complexe et n'est point un quarré parfait, il faut examiner si elle ne peut pas être décomposée en deux facteurs, dont l'un serait un quarré parfait; alors on tirerait la racine de celui-ci, et on laisserait l'autre sous le radical. Lorsque le facteur

quarré, s'il y en a, est monome, il est toujours facile à appercevoir. Par exemple, dans la quantité

$$\sqrt{4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5},$$

je vois que b^2 est facteur de tous les termes, ensorte que cette quantité équivaut à cette autre

$$\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3) \times b^2};$$

je tire donc la racine quarrée de b^2, et j'ai

$$b\sqrt{4a^3 - 5a^2b + 6b^3}.$$

115. Mais lorsque ce facteur quarré doit être complexe, ou lorsque la quantité complexe qui est sous le radical est elle-même un quarré, il faut bien se garder, pour en avoir la racine, de tirer séparément la racine quarrée de chacun des termes qui la composent. Par exemple, si l'on avait $a^2 + b^2$; on se tromperait beaucoup si l'on prenait $a + b$ pour cette racine, puisque le quarré de $a + b$ n'est pas $a^2 + b^2$, mais $a^2 + 2ab + b^2$ (25). $a^2 + b^2$ n'a point de racine exacte en lettres. Voici la méthode qu'il faut suivre, lorsque la quantité complexe proposée est susceptible d'une racine exacte.

116. Soit donc la quantité $60ab + 36a^2 + 25b^2$. Pour en avoir la racine quarrée, j'ordonne les termes de cette quantité par rapport à l'une de ses lettres : par rapport à a, par exemple,

$$\begin{array}{r|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \quad \text{Racine.} \\
-36a^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{12a + 5b} \\
\hline
+60ab + 25b^2 & \\
-60ab - 25b^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Je prends la racine quarrée du premier terme $36a^2$, laquelle est $6a$ que j'écris à côté de la quantité proposée. Je quarre cette racine et j'écris le quarré $36a^2$ sous le premier terme, avec le signe —, pour le retrancher. La réduction faite, il reste $+60ab + 25b^2$. Sous la racine $6a$ j'écris son double $12a$ que j'emploie pour diviser le premier terme $60ab$ de la quantité restante $60ab + 25b^2$. Je trouve pour quotient $+5b$ que j'écris à la suite de la racine $6a$, et j'ai $6a+5b$ pour la racine cherchée; mais pour confirmer cette opération, j'écris aussi le quotient $5b$ que je viens de trouver, à côté de $12a$, et je multiplie le total $12a+5b$ par ce même quotient $5b$; je porte, à mesure, les produits sous la quantité $60ab + 25b^2$, en observant de changer les signes de ces produits; faisant ensuite la réduction, il ne reste rien; j'en conclus que la racine trouvée $6a+5b$ est la racine quarrée exacte de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Prenons pour second exemple la quantité

$$9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc.$$

J'ordonne cette quantité par rapport à la lettre a, et j'ai

$$\begin{array}{l|l}
\quad 4a^2-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2 & \underline{2a-3b+4c \quad \text{Rac.}} \\
\underline{-4a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & 4a-3b \\
1^{er}\ \text{Reste} -12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2 & 4a-6b+4c \\
\underline{\qquad +12ab \qquad\qquad -9b^2 \qquad\qquad\qquad} & \\
2^e\ \text{Reste} \qquad\qquad +16ac-24bc+16c^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -16ac-24bc+16c^2 & \\
\text{Dernier reste} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 &
\end{array}$$

Je tire la racine quarrée de $4a^2$: elle est $2a$, que j'écris à côté. Je quarre $2a$, et je l'écris avec le signe $-$, sous $4a^2$; faisant la réduction, il reste $-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2$. Au-dessous de la racine $2a$, j'écris son double $4a$, que j'emploie pour diviser le premier terme $-12ab$ du reste : je trouve pour quotient $-3b$, que j'écris à la suite du premier terme $2a$ de la racine: je l'écris aussi à côté du double $4a$, et je multiplie le tout $4a-3b$, par le même quotient $-3b$: écrivant les produits, après avoir changé leurs signes, sous le reste $-12ab + 16ac$, etc.; et faisant la réduction, j'ai pour le second reste, $+16ac - 24bc + 16c^2$. Je considère à présent les deux termes de la racine $2a-3b$, comme ne faisant qu'une seule quantité; je double cette quantité, et je l'écris au-dessous pour servir de diviseur au second reste; mais pour

faire

faire cette division, je me contente, selon ce qui a été dit (36), de diviser le premier terme $+16ac$, par le premier terme $+4a$ de mon diviseur; je trouve pour quotient $+4c$, que j'écris à la suite de la racine $2a-3b$, et à la suite du double $4a-6b$: je multiplie cette dernière somme $4a-6b+4c$, par le nouveau terme $+4c$ de la racine; et changeant, à mesure, les signes des produits, j'écris ces mêmes produits sous le second reste; faisant la soustraction, il ne reste rien. D'où je conclus que la racine quarrée est exacte.

Tout cela est fondé sur ce principe, que le quarré d'une quantité composée de deux parties, contient le quarré de la première, le double de la première multipliée par la seconde, et le quarré de la seconde; car il suit de là, que pour avoir la première partie, il faudra tirer la racine quarrée du premier quarré; que pour avoir la seconde, il faudra diviser le second terme par le double de la racine trouvée; et qu'enfin pour vérifier, il faudra multiplier le double de la première par la seconde, et la seconde par elle-même : or c'est ce que prescrit la méthode que nous venons d'exposer. Nous invitons les commençans à s'exercer encore sur les trois quantités suivantes;

$$16a^4+40a^3b+25a^2b^2;$$
$$36b^4-60ab^3+25a^2b^2-36b^2c^2+30abc^2+9c^4;$$
$$a^6-4a^3c^3+8a^3e^3+4c^6-16c^3e^3+16e^6,$$

dont ils trouveront que les racines quarrées sont

$$4a^2+5ab;\ 6b^2-5ab-3c^2;\ a^3-2c^3+4e^3.$$

Du calcul des quantités affectées du signe $\sqrt{\ }$.

117. On fait sur les quantités radicales dont nous venons de parler, les mêmes opérations que sur les autres quantités. Lorsque les deux quantités radicales ne sont pas semblables, on se contente, pour les ajouter ou les soustraire, de les unir par le signe $+$ ou le signe $-$. Ainsi $3a\sqrt{b}$ ajouté avec $4b\sqrt{c}$, donne $3a\sqrt{b}+4b\sqrt{c}$; de même $3a\sqrt{b}$ retranché de $4b\sqrt{c}$, donne $4b\sqrt{c}-3a\sqrt{b}$. Mais si les quantités radicales sont semblables et ne diffèrent que par le coefficient

numérique hors du radical, alors on ajoute ou l'on retranche les coefficiens, selon qu'il s'agit d'addition ou de soustraction. Par exemple, $4ab\sqrt{c}$, ajouté avec $5ab\sqrt{c}$, donne $9ab\sqrt{c}$.

Nous supposons ici qu'on a réduit les radicaux selon ce qui a été enseigné (111); car si l'on avait $4b\sqrt{a^3c}$ à ajouter avec $6a\sqrt{ab^2c}$; je commencerais par réduire le premier radical à $4ab\sqrt{ac}$, et le second à $6ab\sqrt{ac}$, lesquels ajoutés, donnent $10ab\sqrt{ac}$.

Pour multiplier deux quantités radicales, il faut multiplier comme s'il n'y avait point de radicaux, et affecter ensuite le produit du signe radical. Par exemple, pour multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{c}$, je multiplierais a par c, et donnant au produit ac, le signe $\sqrt{\ }$, j'aurais $\sqrt{ac}$. Pour multiplier $\sqrt{a^2+b^2}$ par $\sqrt{ac}$, j'aurai $\sqrt{a^3c+ab^2c}$. De même

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$; $\sqrt{a+b}\times\sqrt{a+b}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b$; $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)^2}=-a$ (1).

On voit donc que pour quarrer une quantité affectée du signe $\sqrt{\ }$, il n'y a autre chose à faire qu'à ôter ce signe; ainsi pour quarrer $\sqrt{a^2b+b^3}$, j'aurai a^2b+b^3.

---

(1) Il ne faut pas confondre $\sqrt{(-a)^2}$ avec $\sqrt{-aa}$; le premier est $\sqrt{-a\times-a}$, et le second est $\sqrt{-a\times+a}$. Nous ferons, à cette occasion, une remarque que nous croyons très-à-propos. Puisque $-a\times-a$ donne $+a^2$ dont (95) la racine est $\pm a$, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ devrait donc donner $\pm a$; cependant nous ne donnons ici que $-a$. La raison en est simple. Quand on demande quelle est la racine de $+a^2$, on a raison d'assigner également $+a$ et $-a$, parce que rien, dans cette question, ne détermine si l'on considère $+a^2$, comme venu de $+a\times+a$, ou de $-a\times-a$; mais quand on demande quelle est la valeur de $\sqrt{-a}+\sqrt{-a}$, quoique cette quantité, selon les règles, se réduise à $\sqrt{+a^2}$, on ne doit prendre que $-a$, parce que la question elle-même fixe ici par quelle opération est venu $+a^2$. C'est en faisant cette attention qu'on remarquera que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ doit donner $-\sqrt{ab}$, et non pas $\pm\sqrt{ab}$, parce que $\sqrt{-a}$ étant la même $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, et $\sqrt{-b}$, la même chose que $\sqrt{b}.\sqrt{-1}$; donc $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ sera $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, ou $\sqrt{ab}\times\sqrt{(-1)^2}$, qui revient à $-\sqrt{ab}$, puisque $\sqrt{(-1)^2}, =-1$.

118. Cette remarque peut servir à dégager une équation des signes $\sqrt{\ }$, qu'elle peut renfermer. Par exemple, si j'avais l'équation

$$x - 2a = b + \sqrt{ax},$$

je laisserais $\sqrt{ax}$ seul dans un membre, et j'aurais

$$x - 2a - b = \sqrt{ax};$$

quarrant chaque membre, j'aurais

$$x^2 - 4ax - 2bx + 4aa + 4ab + bb = ax, \quad \text{ou}$$
$$x^2 - 5ax - 2bx = -4aa - 4ab - bb.$$

119. Pour diviser une quantité radicale, par une autre quantité radicale, on divisera comme s'il n'y avait pas de signe $\sqrt{\ }$, et on donnera au quotient ou à la fraction le signe radical; ainsi, pour diviser $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, on divisera a par b, ce qui donnera $\frac{a}{b}$, auquel appliquant le radical, on aura $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Pour diviser $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{a}$, on divisera ab par a, ce qui donnera b, et on aura $\sqrt{b}$ pour quotient. Pour diviser $\sqrt{aa-xx}$ par $\sqrt{a+x}$, on divisera $aa-xx$ par $a+x$, ce qui donnera $a-x$, et on aura $\sqrt{a-x}$ pour le quotient demandé. De même $ab\sqrt{bc}$ divisé par $a\sqrt{b}$, donnera $b\sqrt{c}$, en divisant ab par a, et $\sqrt{bc}$ par $\sqrt{b}$.

120. Si le dividende ou le diviseur était rationnel, on séparerait l'un de l'autre par une barre assez longue pour faire connaître que l'un des deux n'est pas affecté du radical. Par exemple, pour diviser a par $\sqrt{b}$, on écrirait $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Pour diviser a par $\sqrt{a}$, on écrirait $\frac{a}{\sqrt{a}}$; mais lorsqu'il y a parité dans les lettres du dividende et du diviseur, il est souvent à propos de donner à la quantité rationnelle une forme de radical, parce qu'elle donne lieu à des simplifications; ainsi, dans le dernier exemple, je changerais a en $\sqrt{a^2}$, et alors

au lieu de $\frac{a}{\sqrt{a}}$, j'aurais $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$, et par conséquent $\sqrt{a}$. De même, si j'avais $\sqrt{aa-xx}$ à diviser par $a+x$, j'écrirais $\frac{\sqrt{aa-xx}}{a+x}$ ou $\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{(a+x)^2}}$ ou $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}$; et comme le numérateur et le dénominateur peuvent être divisés chacun par $a+x$, j'aurais enfin $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

De la formation des puissances des quantités monomes, de l'extraction de leurs racines, du calcul des radicaux et des exposans.

121. Nous avons déjà dit qu'on appelle *puissance* d'une quantité, le produit de cette quantité multipliée par elle-même plusieurs fois de suite. a^3 est la troisième puissance ou le cube de a; parce que a^3 résulte de $a \times a \times a$. La quantité qu'on a multipliée est autant de fois facteur dans la puissance, qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette même puissance : ainsi dans a^5, a est cinq fois facteur; dans $(a+b)^6$, $a+b$ est 6 fois facteur.

122. Puisque pour multiplier les quantités littérales monomes qui ont des exposans, il suffit (20) d'ajouter l'exposant de chaque lettre du multiplicande, avec l'exposant de la lettre semblable du multiplicateur, il s'ensuit donc que *pour élever à une puissance proposée une quantité monome, il suffira de multiplier l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque à quelle puissance on veut élever cette quantité.* Nous appellerons ce nombre *l'exposant de la puissance.* Ainsi, pour élever $a^2 b^3 c$ à la quatrième puissance, j'écrirai $a^8 b^{12} c^4$, en multipliant les exposans 2, 3 et 1 de a, b, c, par l'exposant 4 de la puissance à laquelle on veut élever $a^2 b^3 c$. En effet, pour élever $a^2 b^3 c$ à la quatrième puissance, il faudrait multiplier $a^2 b^3 c$ par $a^2 b^3 c$, puis le produit par $a^2 b^3 c$, et ce dernier produit par $a^2 b^3 c$; or, pour faire ces multiplications, il faut (20) ajouter les exposans,

puis donc qu'ils sont les mêmes dans chaque facteur, il faut ajouter chaque exposant à lui-même 4 fois, c'est-à-dire, le multiplier par 4. Le raisonnement est le même à quelqu'autre puissance qu'on veuille élever un monome, et quels que soient les exposans actuels des lettres de ce monome.

Lorsqu'on a à faire sur les exposans des quantités, des raisonnemens ou des opérations qui ne dépendent point de certaines valeurs particulières de ces exposans, mais qui sont également applicables à toutes sortes d'exposans, on représente ces exposans par des lettres. Ainsi, pour en faire l'application à la règle que nous venons de donner, si l'on veut élever la quantité quelconque $a^m b^n c^p$ à une puissance quelconque désignée par r, on écrira $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

123. Si la quantité qu'on veut élever à une puissance proposée, était une fraction, on éleverait à cette puissance, le numérateur et le dénominateur; ainsi $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ élevé à la cinquième puissance, devient $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$; pareillement $\frac{a^m b^n}{c^p d^t}$ élevé à la puissance r devient $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr}d^{tr}}$.

124. Si la quantité proposée avait un coefficient, on l'éleverait à la puissance proposée, en le multipliant par lui-même, selon les règles de l'Arithmétique; ainsi $4a^3b^2$ élevé à la cinquième puissance, donnerait $1024a^{15}b^{10}$. Quelquefois on se contente d'indiquer cette élévation, comme pour les lettres, ainsi on peut écrire $4^5a^{15}b^{10}$.

125. A l'égard des signes, si l'exposant de la puissance à laquelle il s'agit d'élever, est pair, le résultat aura toujours le signe $+$; mais s'il est impair, il aura le signe $+$ ou le signe $-$, selon que la quantité proposée aura elle-même le signe $+$ ou le signe $-$; c'est une suite immédiate de la règle donnée pour les signes (24).

126. Il suit de tout ce que nous venons de dire que, dans une puissance quelconque, l'exposant actuel de chaque lettre

contient l'exposant de sa racine, autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance que l'on considère ; par exemple, dans la quatrième puissance, l'exposant de chaque lettre est quadruple de ce qu'il était dans la quantité primitive qui en est la racine.

127. Donc pour revenir d'une puissance quelconque à sa racine, c'est-à-dire, *pour extraire une racine d'un degré proposé, d'une quantité monome quelconque ; il faut diviser l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.* On appelle ce nombre *l'exposant de la racine.* Ainsi, pour tirer la racine troisième ou cubique de $a^{12}b^6c^3$, je diviserais chacun des exposans par 3, et j'aurais a^4b^2c. Pareillement pour tirer la racine cinquième de $a^{20}b^{15}c^5$, je diviserais chacun des exposans par 5, et j'aurais a^4b^3c. En général pour tirer la racine du degré r de la quantité a^mb^n, j'écrirais $a^{\frac{m}{r}}b^{\frac{n}{r}}$.

128. Si la quantité proposée était une fraction, on tirerait séparément la racine du numérateur et celle du dénominateur.

129. S'il y avait des coefficiens, on en tirerait la racine quarrée ou cubique par les méthodes données en Arithmétique ; et par celle qu'on verra par la suite, lorsque cette racine est plus élevée.

130. Lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire, ne divise pas exactement chacun des exposans de la quantité proposée, c'est une preuve que cette quantité n'est point une puissance parfaite du degré dont il s'agit. Alors l'exposant est fractionnaire et marque une racine qui reste à extraire. Ainsi, si l'on demande la racine cubique de $a^9b^3c^4$, on aura $a^3bc^{\frac{4}{3}}$ ou $a^3bcc^{\frac{1}{3}}$ dans laquelle l'exposant $\frac{1}{3}$ désigne qu'il faut encore extraire la racine cubique de c.

131. On indique aussi les extractions de racines supérieures au second degré, en employant le signe $\sqrt{}$; mais on place dans l'ouverture de ce signe, le nombre qui marque le degré

de la racine dont il s'agit. Ainsi $\sqrt[3]{a}$, marque la racine cubique de a : $\sqrt[7]{a}$ marque la racine septième de a. Il faut donc regarder ces deux expressions $\sqrt[3]{a}$ et $a^{\frac{1}{3}}$ comme signifiant la même chose : il en est de même de $\sqrt[5]{a^4}$ et $a^{\frac{4}{5}}$.

132. Lorsque la quantité est complexe, il ne faut pas diviser chacun de ses exposans ; mais il faut considérer la totalité de ses parties comme ne faisant qu'une seule quantité dont l'exposant est naturellement 1, que l'on divise par l'exposant de la racine qu'il s'agit d'extraire, ce qui n'est, à proprement parler, qu'une indication de cette racine ; par exemple, au lieu de $\sqrt[4]{a^2+b^2}$ qui est la même chose que $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^1}$, on écrit $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$. Si la quantité totale qui est sous le radical, avait déjà un exposant, on diviserait de même cet exposant, par celui de la racine qu'on a dessein d'extraire. Ainsi, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$, on peut écrire $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

133. Les règles que nous avons données (117 et suiv.) pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des quantités radicales du second degré, s'appliquent également aux quantités radicales des degrés supérieurs, pourvu que les radicaux sur lesquels on a à opérer, soient de même degré entre eux. Ainsi

$$\sqrt[7]{a^5}\times\sqrt[7]{a^3}=\sqrt[7]{a^8}=\sqrt[7]{a^7a}=a\sqrt[7]{a}.$$

$$\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}=\sqrt[5]{a^5b^5}=ab.$$

$$a\times\sqrt[5]{\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[5]{\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{\frac{a^5b}{a}}=\sqrt[5]{a^4b}.$$

134. S'il s'agit d'élever un radical quelconque à une puissance dont l'exposant soit le même que celui du radical, il suffira d'ôter ce radical ; ainsi $(\sqrt[5]{a})^5=a$; ce qui est évident en général, si l'on fait attention que l'objet est alors de ramener la quantité à son premier état.

Pour élever une quantité radicale monome à une puissance quelconque, il faut élever chacun de ses facteurs à cette puissance, selon la règle donnée (122). Ainsi $\sqrt[7]{a^2b^3}$, élevé à la puissance quatrième, donne $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$ qui se réduit à $ab\sqrt[7]{ab^5}$; ce qu'on peut voir encore en cette autre manière : $\sqrt[7]{a^2b^3}$ étant la même chose (131) que $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, pour élever celui-ci à la quatrième puissance, je multiplie ses exposans par 4, ce qui me donne

$$a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{12}{7}} = aba^{\frac{1}{7}}b^{\frac{5}{7}} = ab\sqrt[7]{ab^5}.$$

135. Pour diviser $\sqrt[7]{a^5}$ par $\sqrt[7]{a^3}$, on divisera a^5 par a^3, et l'on donnera au quotient a^2 le signe $\sqrt[7]{\ }$, ce qui donne $\sqrt[7]{a^2}$; de même

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b^3}}{\sqrt[5]{a^2b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b^3}{a^2b}} = \sqrt[5]{a^2b^2};\ \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}};$$

car la racine cinquième de 1 est 1. En général toute puissance, ou toute racine de l'unité, est l'unité.

136. Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale, il faut multiplier l'exposant actuel du radical, par l'exposant de cette nouvelle racine; ainsi, pour extraire la racine troisième de $\sqrt[5]{a^4}$, on écrira $\sqrt[15]{a^4}$, en multipliant 5 par 3. En effet $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; or (127) pour extraire la racine de celui-ci, il faut diviser son exposant par 3, ce qui donne $a^{\frac{4}{15}}$, qui est la même chose que $\sqrt[15]{a^4}$.

137. Lorsque les quantités radicales proposées ne sont pas toutes du même degré, il faut, pour pratiquer sur elles les opérations de l'addition, soustraction, multiplication et divi-

sion, les ramener au même degré, ce qui est facile par cette règle. *S'il n'y a que deux radicaux, multipliez l'exposant de l'un, par l'exposant de l'autre; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir les deux radicaux: élevez en même temps la quantité qui est sous chaque radical, à la puissance marquée par l'exposant de l'autre radical.* Par exemple, pour réduire à un même radical les deux quantités $\sqrt[5]{a^3}$ et $\sqrt[7]{a^4}$, je multiplie 5 par 7, et j'ai 35 pour l'exposant du nouveau radical, qui sera $\sqrt[35]{}$; j'élève a^3 à la septième puissance, et a^4 à la cinquième, ce qui me donne a^{21} et a^{20}; ensorte que les quantités proposées sont changées en $\sqrt[35]{a^{21}}$ et $\sqrt[35]{a^{20}}$.

S'il y a plus de deux quantités radicales, *multipliez entre eux les exposans de tous les radicaux; le produit commun sera l'exposant que doivent avoir tous ces radicaux. Elevez, en même temps, la quantité qui est sous chaque radical, à une puissance d'un degré marqué par le produit des exposans de tous les radicaux autres que celui dont il s'agit.* Par exemple, si j'avais les trois radicaux $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, et $\sqrt[8]{a^7}$, je multiplierais les trois exposans 5, 7 et 8, ce qui me donnerait 280 pour l'exposant commun des nouveaux radicaux; j'éleverais a^3 à la puissance 7×8 ou 56; a^2 à la puissance 5×8 ou 40; et a^7 à la puissance 5×7 ou 35, ce qui me donnerait $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$. La raison de cette règle est facile à appercevoir, en observant sur le premier exemple, que lorsqu'on élève, selon la règle, a^3 à la septième puissance, on rend a 7 fois aussi souvent facteur qu'il l'était; mais en rendant l'exposant de son radical 7 fois aussi grand qu'il l'était, on rend a 7 fois moins souvent facteur; il y a donc compensation, et il n'y a que la forme de changée.

138. On peut conclure de ce raisonnement, que lorsque l'exposant de la quantité qui est sous le radical, et celui du radical même, ont un diviseur commun, on peut en simplifier l'expression, en divisant par ce diviseur commun l'un et

l'autre de ces deux exposans : par exemple, $\sqrt[12]{a^8}$ peut se réduire à $\sqrt[3]{a^2}$, en divisant 12 et 8 par 4. Pareillement $\sqrt[4]{a^2}$ peut se réduire à $\sqrt{a}$, $\sqrt[6]{a^3}$ se réduit à $\sqrt{a}$.

139. Concluons encore que lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres nombres, on peut faire cette extraction successivement en cette manière : supposons qu'on demande la racine sixième de a^{24}, je puis tirer d'abord la racine quarrée, puis la racine cubique, et j'aurai la racine sixième. En effet, $\sqrt[6]{a^{24}}$, se réduit (138) à $\sqrt[3]{a^{12}}$; puis à $\sqrt[1]{a^4}$ ou a^4, ce qui est la même chose que si l'on avait pris tout de suite la racine sixième de a^{24}, en divisant l'exposant 24 par 6, (127).

Au reste, comme les exposans fractionnaires tiennent lieu des radicaux, et que les premiers sont plus commodes à employer dans le calcul que les derniers, nous dirons encore un mot sur le calcul des exposans. Si j'avais $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[5]{a^4}$, je changerais cette opération en celle-ci : $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, qui (20) donne $a^{\frac{7}{5}}$ ou $aa^{\frac{2}{5}}$ qui se réduit à $a\sqrt[5]{a^2}$. Si j'avais $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[7]{a^4}$, j'écrirais $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$ ou $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, (ou en réduisant les deux fractions au même dénominateur), $a^{\frac{21+20}{35}}$ ou $a^{\frac{41}{35}}$ qui revient à $aa^{\frac{6}{35}}$, ou enfin à $a\sqrt[35]{a^6}$.

En général, $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ se change en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$ qui revient à $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ou (en réduisant au même dénominateur) à $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ou enfin (131) à $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$.

Il en est de même de la division ;

$$\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \frac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}} = a^{\frac{qn-mr}{qm}} b^{\frac{pq-ms}{qm}}$$

$$= \sqrt[qm]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}.$$

140. Dans ce dernier exemple, nous avons retranché l'exposant de chaque lettre du dénominateur, de l'exposant de la lettre correspondante dans le numérateur. La règle que nous avons donnée (31) pour la division, ne semble le permettre que lorsque l'exposant du dénominateur est plus petit que celui du numérateur ; mais cela se peut en général, en donnant à l'excédant le signe —, après la réduction faite ; ensorte qu'on peut, en général, mettre toute fraction algébrique sous la forme d'un entier. Par exemple, au lieu de $\frac{a^3}{b^2}$ on peut écrire a^3b^{-2}. En effet, suivant l'idée que nous avons donnée de la division, l'effet d'un diviseur est de détruire dans le dividende, tous les facteurs qui se trouvent dans le diviseur ; dans $\frac{a^5}{a^2}$, qui se réduit à a^3, ce diviseur a^2 détruit dans a^5 deux facteurs égaux à a. Pareillement dans la quantité $\frac{a^3}{b^2}$, l'effet de b^2 doit être de détruire dans a^3 deux facteurs égaux à b. Or, quoique ces facteurs n'y soient pas explicitement, on peut toujours se les représenter ; car on conçoit que a contient b un certain nombre de fois, soit entier, soit fractionnaire : soit m ce nombre de fois, alors a vaut donc m fois b, ou mb, la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ sera donc $\frac{m^3b^3}{b^2}$ qui se réduit à m^3b ; or, la quantité a^3b^{-2} devient, en pareil cas, $m^3b^3b^{-2}$, ou (20) m^3b^{3-2} ; c'est-à-dire, m^3b ; donc $\frac{a^3}{b^2}$ revient au même que a^3b^{-2} ; donc, en général, *on peut faire*

passer une quantité du dénominateur au numérateur, en l'écrivant dans celui-ci comme facteur, mais avec un exposant de signe contraire à celui qu'elle avait dans le dénominateur. Ainsi, au lieu de $\frac{1}{a^3}$, on peut écrire $1 \times a^{-3}$, ou simplement a^{-3}; au lieu de $\frac{1}{a^m}$, on peut écrire a^{-m}; au lieu de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$, on peut écrire $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Au lieu de $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$, on peut écrire $(a^3+b^3)\times(a^2+b^2)^{-1}$; et, eu égard à tout ce qui précède,

$$\frac{\sqrt[5]{(a^3+b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}} = \frac{(a^3+b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}} = (a^3+b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2+b^2)^{-\frac{3}{4}}.$$

141. Et réciproquement, *si une quantité est composée de parties qui aient des exposans négatifs, on pourra faire passer ces parties au dénominateur, en rendant leurs exposans positifs.* Ainsi, au lieu de $a^3 b^{-4}$, on pourra écrire $\frac{a^3}{b^4}$; au lieu de a^{m-3}, qui est la même chose que $a^m \times a^{-3}$, on pourra écrire $\frac{a^m}{a^3}$ et ainsi de suite.

De la formation des puissances des quantités complexes, et de l'extraction de leurs racines.

142. Suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, il ne s'agit, lorsqu'on veut élever une quantité complexe à une puissance composée, que de multiplier cette quantité par elle-même, autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance; mais, en se bornant à ce moyen, on tomberait souvent dans des calculs très-longs, pour parvenir à des résultats qu'on peut avoir à bien moins de frais, en réfléchissant un peu sur les propriétés des produits de quelques-unes de ces multiplications. Nous allons nous occuper des puissances des quantités binomes, parce que celles-ci conduisent à la formation des puissances des quantités plus

composées ; mais pour mieux faire sentir l'étendue de ce que nous avons à dire, nous reprendrons les choses d'un peu plus haut ; nous examinerons quelle est la nature des produits que l'on trouve en multipliant successivement plusieurs facteurs binomes qui auraient tous un terme commun : cette recherche, qui nous conduira directement à notre objet, nous fournira en même temps plusieurs propositions qui nous seront très-utiles par la suite.

143. Soient donc $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc., plusieurs quantités binomes qui ont toutes le terme x commun, et qu'on veut multiplier les unes par les autres. En effectuant les multiplications on trouvera

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc;$$

et ainsi de suite ; ce qui nous fournit les observations suivantes : 1°. Le premier terme de chaque produit est toujours le premier terme x de chaque binome, élevé à une puissance marquée par le nombre des binomes ; ensorte que si le nombre des binomes était m, le premier terme de chaque produit serait x^m. 2°. Les puissances de x vont ensuite en diminuant continuellement d'une unité jusqu'au dernier terme qui ne renferme plus d'x. 3°. Les multiplicateurs de chaque puissance de x (que nous nommerons, à l'avenir, multiplicateurs du terme où se trouvent ces puissances) sont, pour le second terme, la somme des seconds termes a, b, c, etc. des binomes ; pour le troisième terme, la somme des produits de ces quantités a, b, c, etc. multipliées deux à deux ; pour le quatrième, la somme des produits de ces quantités a, b, c, etc. multipliées trois à trois ; et ainsi de suite jusqu'au dernier qui est le produit de toutes ces quantités. Ces conséquences sont évidentes, quel que soit le nombre des quantités $x+a$, $x+b$, etc. qu'on a multipliées.

144. Si l'on suppose maintenant que toutes les quantités a, b, c, etc. soient égales, auquel cas tous les binomes qu'on a multipliés seront égaux, les produits trouvés ci-dessus seront

donc les puissances successives de l'un quelconque de ces binomes, de $x+a$, par exemple, si l'on suppose que les quantités b, c, d, etc. sont chacune égales à a. Si l'on met donc a dans ces produits, au lieu de chacune des lettres b, c, d, etc., on aura

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2;\ (x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3, \text{etc.}$$

Où l'on voit que si m est l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome, les puissances successives de x seront x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, etc. Mais on ne voit pas aussi facilement comment les coefficiens des différens termes de chaque puissance dérivent les uns des autres, ni quelle est leur dépendance de l'exposant m, car il en existe une, comme on va le voir.

145. Pour trouver la loi de ces coefficiens, il faut retourner à nos premiers produits, et remarquer que puisque le multiplicateur du second terme est la somme de toutes les quantités a, b, c, etc., il faudra, lorsque toutes ces quantités seront égales à a, qu'il soit composé de a, pris autant de fois qu'il y a de ces quantités; donc si leur nombre est m, ce multiplicateur sera m fois a, ou ma, c'est-à-dire que son coefficient m sera égal à l'exposant du premier terme de cette puissance. C'est ce que l'on voit aussi dans les puissances particulières que nous avons exposées ci-dessus. Voyons maintenant quels doivent être les multiplicateurs des autres termes. Il est évident que tous les produits ab, ac, ad, bc, bd, etc. deviennent chacun égal à a^2, dans la supposition présente; pareillement tous les produits abc, abd, etc. deviennent chacun égal à a^3 et ainsi de suite. Donc le multiplicateur du troisième terme de chacun de nos premiers produits se réduit alors à a^2 pris autant de fois que les lettres a, b, c, etc. peuvent donner de produits deux à deux. Pareillement celui du quatrième se réduit à a^3 pris autant de fois que les lettres a, b, c, etc. peuvent donner de produits trois à trois et ainsi de suite; donc, pour avoir le coefficient numérique des troisième, quatrième, etc. termes de la puissance m du binome $x+a$, la question se

réduit à déterminer combien un nombre m de lettres a, b, c, etc. peut donner de produits deux à deux, trois à trois, etc.

146. Or je remarque que si l'on a un nombre quelconque m de lettres, et qu'on les combine de toutes les manières imaginables deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., sans répéter une même lettre dans une même combinaison, je remarque, dis-je, 1°. que le nombre des combinaisons deux à deux, sera double du nombre des produits, réellement différens de deux lettres. En effet, deux lettres peuvent être combinées l'une avec l'autre de deux manières différentes; par exemple, a et b donnent ces deux combinaisons ab et ba; mais ces deux combinaisons ne font pas deux produits différens; 2°. que le nombre des combinaisons de plusieurs lettres trois à trois, sera sextuple du nombre des produits de trois lettres, réellement distincts : en effet, pour avoir les combinaisons de trois quantités a, b, c, il faut, après en avoir combiné deux, a et b, par exemple, ce qui donne ab et ba, combiner la troisième c avec chacune des deux premières combinaisons, c'est-à-dire lui donner toutes les dispositions possibles à l'égard des lettres a et b qui entrent dans ab et ba; or cela donne 6 combinaisons de trois lettres, comme il est évident par les dispositions suivantes, abc, acb, cab, bac, bca, cba; mais ces six combinaisons ne font chacune que le même produit. Un raisonnement semblable prouvera que quatre quantités sont susceptibles de 24 combinaisons, dont chacune cependant ne fait que le même produit; donc le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres quatre à quatre, est la 24e partie du nombre total de ces combinaisons. Pareillement, le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres 5 à 5, 6 à 6, 7 à 7, etc., est la 120e, 720e, la 5040e, etc. partie du nombre total de ces combinaisons, c'est-à-dire est, en général, exprimé par une fraction qui a pour numérateur le nombre total des combinaisons, et pour dénominateur le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à celui qui marque de combien de lettres chaque produit est composé.

147. Voyons donc quel est le nombre total des combinaisons que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, etc., prises deux à deux, trois à trois, etc. Il est évident, pour les *combinaisons deux à deux*, que puisqu'une même lettre ne doit pas être combinée avec elle-même, elle ne peut l'être qu'avec les $m-1$ autres, et par conséquent elle doit donner $m-1$ combinaisons; donc puisqu'il y a m de lettres en tout, elles donneraient m fois $(m-1)$, ou $m(m-1)$ combinaisons. Donc, suivant ce qui vient d'être dit (146), le nombre des produits de deux lettres, réellement différens, sera $\frac{1}{2}m(m-1)$.

A l'égard des *combinaisons trois à trois*, pour les avoir, il faut que chacune des combinaisons deux à deux, soit combinée avec chacune des lettres qu'elle ne renferme point, c'est-à-dire avec un nombre de lettres marqué par $m-2$; donc chacune de ces combinaisons donnera $(m-2)$ combinaisons de trois lettres; donc, puisqu'il y a $m(m-1)$ combinaisons de deux lettres; donc chacune doit donner $(m-2)$ combinaisons de trois lettres, il y aura, en tout, $m(m-1)(m-2)$ combinaisons de trois lettres; donc puisque (146) le nombre des produits réellement distincts, est la sixième partie de ce nombre total de combinaisons, il sera $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$.

Le même raisonnement prouvera que le nombre des produits distincts qu'on peut former en multipliant un nombre m de lettres 4 à 4, 5 à 5, etc., sera exprimé par $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, par $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, et ainsi de suite.

148. Concluons donc de là, et de ce qui a été dit (146), que les termes successifs du binome $(x+a)$ élevé à la puissance m, ou de $(x+a)^m$, sont :

$$x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^3x^{m-3} + \text{etc.}$$

C'est-à-dire, que le premier terme de la suite ou série qui exprime cette puissance, est le premier terme du binome,

élevé

élevé à la puissance m; qu'ensuite les exposans de x vont en diminuant d'une unité, et ceux de a en augmentant d'une unité, à partir du second terme où il commence à entrer. A l'égard des coefficiens m, $\frac{1}{2}m(m-1)$, etc., il faut remarquer que celui du second terme est égal à l'exposant du premier; que celui du troisième, est le coefficient m du précédent multiplié par $\frac{m-1}{2}$, c'est-à-dire par la moitié de l'exposant de x dans ce terme précédent. Pareillement, le coefficient du quatrième terme, est le coefficient du terme précédent, multiplié par $\frac{m-2}{3}$, c'est-à-dire par le tiers de l'exposant de x dans ce même terme précédent, et ainsi de suite. Toutes ces conséquences, que l'inspection seule fournit, nous conduisent à cette règle générale : *Le coefficient de l'un quelconque des termes se trouve en multipliant le coefficient du précédent par l'exposant de* x *dans ce même terme précédent, et divisant par le nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit.* Formons, d'après cette règle, la septième puissance de $x+a$ pour servir d'exemple. Nous aurons

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$$

En écrivant d'abord x^7; puis multipliant celui-ci par 7, diminuant l'exposant d'une unité et multipliant par a, ce qui donne $7ax^6$. Je multiplie celui-ci par $\frac{6}{2}$, je diminue l'exposant d'une unité, et j'augmente celui de a d'une unité, et j'ai $21a^2x^5$ pour le troisième terme. Je multiplie ce troisième par $\frac{5}{3}$, je diminue l'exposant de x d'une unité, ce qui me donne $35a^3x^4$ pour le quatrième terme : il est aisé d'achever.

Si au lieu de $x+a$ on avait $x-a$, alors les termes auraient alternativement les signes $+$ et $-$, à commencer du premier; car si dans a^4, par exemple, on substitue $-$ au lieu de $+a$, le signe ne changera point (125); mais il changerait si l'on substituait $-a$ dans une puissance impaire de a.

La même formule que nous venons de donner peut servir à élever à une puissance proposée, non-seulement un binome simple comme $x+a$, mais encore un binome composé, tel que x^2+a^2 ou x^2+a ou x^3+a^3, etc., et même à élever non-seulement à une puissance dont l'exposant serait un nombre entier positif, mais encore à une puissance dont l'exposant serait positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Mais ces usages exigent, pour plus de commodité, que nous lui donnions une autre forme.

149. Reprenons donc la formule

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\frac{(m-1)}{2}a^2x^{m-2}$$
$$+m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)a^3x^{m-3} + \text{etc.}$$

Suivant ce que nous avons dit (141), on peut, au lieu de x^{m-1}, écrire $\frac{x^m}{x}$; au lieu de x^{m-2}, écrire $\frac{x^m}{x^2}$, et ainsi de suite. Conformément à ce principe, nous pourrons donc changer notre formule en cette autre

$$(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{a^2x^m}{x^2} + \text{etc.}$$

$$(x+a)^m = x^m\left\{1 + m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{a^2}{x^2} + \text{etc.}\right\}$$

Si l'on fait attention maintenant que tous les termes ont pour facteur commun x^m, on pourra donner à la formule cette autre forme, dans laquelle x^m est censé multiplier tout ce qui est entre deux crochets. De là nous concluons la règle suivante pour former d'une manière commode la *suite* ou *série* des termes qui doivent composer la puissance m du binome $(x+a)$:

150. Ecrivez sur une première ligne, comme il suit, les quantités

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \text{etc.}$$

$$1 + m\frac{a}{x} + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\frac{a^2}{x^2} + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right) + \text{etc.}$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous et à une place plus avant sur la gauche, formez la suite inférieure par cette loi. Multipliez cette unité par le premier terme de la suite supérieure et par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le second terme de la série inférieure. Multipliez ce second terme par le second terme de la suite supérieure, et encore par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le troisième terme de la série inférieure, et ainsi de suite. Réunissez tous ces termes de la série inférieure, et multipliez la totalité par x^m, vous aurez la valeur de $(x+a)^m$.

151. Si au lieu de $x+a$ on avait x^2+a^2, ou x^3+a^3, ou, etc., au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, on multiplierait par $\frac{a^2}{x^2}$ dans le premier cas, par $\frac{a^3}{x^3}$ dans le second, et, en général, par le second terme du binome divisé par le premier : et on multiplierait la totalité, dans le premier cas, par x^2 élevé à la puissance m ; et dans le second cas, par x^3 élevé à la puissance m, c'est-à-dire, en général, par le premier terme du binome, élevé à la puissance proposée.

Enfin, si le second terme du binome, au lieu d'avoir le signe $+$, avait le signe $-$, au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, lorsqu'on a $x+a$, ou par $\frac{a^2}{x^2}$, lorsqu'on a x^2+a^2, on multiplierait successivement par $-\frac{a}{x}$, ou par $-\frac{a^2}{x^2}$, et ainsi de suite.

152. Si au lieu d'un binome on avait un trinome à élever à une puissance proposée; si l'on avait, par exemple, $a+b+c$ à élever à la troisième puissance, on ferait $b+c=m$, et l'on aurait $a+m$ à élever à la troisième puissance qui, selon les règles qu'on vient de donner, serait $a^3+3a^2m+3am^2+m^3$. Remettant maintenant au lieu de m sa valeur $b+c$, on aurait............ $a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$. Or les puissances $(b+c)$, $(b+c)^2$, $(b+c)^2$ étant toutes des puissances de binomes, se trouveront également par les règles précédentes; il ne s'agira plus que de les multiplier respectivement par

$3a^2$, $3a$ et 1. En achevant le calcul, on trouvera

$$a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

153. Mais en réfléchissant un peu sur la règle de l'élévation des binomes, on verra qu'on peut former la puissance d'un polynome quelconque, d'une manière plus commode, en observant la règle suivante.

Supposons qu'on veut élever le trinome $a+b+c$ à la troisième puissance. Faites $b+c=p$, et alors il s'agit d'élever $a+p$ à la puissance 3, ce qui donnera

$$a^3+3a^2\underset{1}{p}+3a\underset{2}{p^2}+\underset{3}{p^3}.$$

J'écris sous chaque terme de cette quantité l'exposant de p; je multiplie chaque terme par le nombre qui lui répond, et je change un p en b, ce qui donne

$$3a^2b+6ab\underset{\frac{1}{2}}{p}+3b\underset{\frac{2}{2}}{p^2}.$$

J'écris sous cette quantité la moitié de chaque exposant de p, et je multiplie chaque terme par le nombre correspondant, changeant encore un p en b, j'ai

$$3ab^2+3b^2\underset{\frac{1}{3}}{p}.$$

J'écris sous chaque terme de celle-ci le tiers de l'exposant de p; je multiplie comme ci-devant, et je change un p en b, j'ai.......................... b^3.

Enfin je réunis toutes ces quatre lignes en changeant p en c, et j'ai

$$a^3+3a^2c+3ac^2+c^3+3a^2b+6abc+3bc^2+3ab^2+3b^2c+b^3$$

de même que ci-dessus. Ainsi on multipliera chaque terme de la première ligne par l'exposant de p; chaque terme de la seconde par la moitié de l'exposant de p dans cette seconde; chaque terme de la troisième par le tiers de l'exposant de p dans cette troisième, et ainsi de suite, observant à chaque ligne, à commencer de la seconde, de changer p en b, et à la fin on changera tous les p restans en c. Cette règle s'applique de même aux quatrinomes, quintinomes, etc.

De l'extraction des Racines des quantités complexes.

154. Lorsqu'une fois on est en état de trouver tous les termes dont une puissance proposée d'un binome doit être composée, il est aisé d'en conclure la méthode d'extraire une racine d'un degré proposé, soit que la quantité dont il s'agit soit littérale, soit qu'elle soit numérique : ce que nous allons dire sur la racine cinquième suffira pour faire comprendre comment on doit se conduire dans les autres degrés. On a

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

De ces six termes les deux premiers suffisent pour établir la règle que nous cherchons. Le premier est la cinquième puissance du premier terme du binome, et le second est le quintuple de la quatrième puissance de ce même premier terme, multipliée par le second terme; donc pour avoir le premier terme de la racine, il faut, après avoir ordonné tous les termes de la puissance donnée, extraire la racine cinquième du premier terme de cette puissance; et pour avoir le second terme de la racine, il faut diviser le second terme de la quantité proposée, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine qu'on vient de trouver par la première opération. En effet, il est évident que la racine cinquième de a^5 est a, qui est le premier terme du binome, dont la quantité..... a^5+5a^4b+, etc. est la cinquième puissance; et il est également évident que $\frac{5a^4b}{5a^4}$ donne b qui est le second terme de ce binome. Mais comme il pourrait se faire que la quantité proposée ne fût pas une puissance parfaite du cinquième degré, après avoir ainsi trouvé le second terme de la racine, il faudra vérifier cette racine en l'élevant au cinquième degré et retranchant le résultat de la quantité proposée; voici un exemple. On demande la racine cinquième de

$$\begin{array}{l|l}
32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & \text{Racine} \\
-32a^5 & 2a+3b \\
\hline
\text{Reste}+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & 80a^4.
\end{array}$$

Je tire la racine cinquième de $32a^5$, elle est $2a$ que j'écris à la racine. J'élève $2a$ à la cinquième puissance, et j'écris le produit $32a^5$, avec un signe contraire, sous le premier terme $32a^5$ de la quantité proposée, ce qui le détruit. J'élève la racine $2a$ à la quatrième puissance, ce qui me donne $16a^4$ que je quintuple, et j'ai $80a^4$ que j'écris sous la racine $2a$; je m'en sers pour diviser le premier terme $240a^4b$ du reste : la division faite, j'ai pour quotient $3b$ que j'écris à la racine; ensorte que j'ai $2a+3b$ pour la racine cherchée; mais pour m'en assurer, j'élève $2a+3b$ à la cinquième puissance, je retrouve les mêmes termes que dans la quantité proposée; faisant la soustraction, il né reste rien; d'où je conclus que la racine est exactement $2a+3b$.

S'il devait y avoir encore un autre terme à la racine, alors il y aurait un reste après cette première opération : je regarderais $2a+3b$ comme une seule quantité, avec laquelle j'opérerais pour trouver le troisième terme, comme j'ai opéré avec $2a$ pour trouver le second.

155. A l'égard des quantités numériques, la règle est absolument la même, la seule chose qu'il faille éclaircir, est à quel caractère on reconnaîtra ce qui répond au premier terme a^5, et ce qui répond au terme $5a^4b$.

Pour se conduire dans cette recherche, il n'y a qu'à imaginer que dans le binome $a+b$, a marque les dixaines, et b les unités; alors il est évident que a^5 sera des centaines de mille, parce que la cinquième puissance de 10 est 100000; donc le premier terme a^5, ou la quantité dont il faudra tirer la racine 5^e, pour avoir le premier chiffre de la racine, ne peut faire partie des cinq derniers chiffres sur la droite; on séparera donc les cinq derniers chiffres, et supposé qu'il en reste cinq seulement ou moins de cinq sur la gauche, on en cherchera la racine cinquième, qui sera facile à trouver, ne pouvant avoir qu'un seul chiffre. Quand on aura trouvé le premier chiffre de la racine, et qu'on aura retranché sa cinquième puissance de la quantité qui a servi à trouver cette racine, on abaissera, à côté du reste, les cinq chiffres séparés : et pour avoir la partie qu'il faut diviser par $5a^4$, c'est-à-dire, par le quintuple de la quatrième puissance des dixaines trouvées, il faudra séparer quatre chiffres sur la droite, et ne diviser que la partie restante, à gauche : car $5a^4b$, qui est la partie qu'on doit diviser par $5a^4$, pour avoir b, ne peut faire partie des quatre derniers chiffres, puisqu'étant le produit de $5a^4$ par b, elle doit être au moins des dixaines de mille, puisque a^4 est des dixaines de mille. Ces éclaircissemens posés, le procédé est le même que pour l'extraction littérale; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de.....................

$$\begin{array}{l|l}
3802.04032 & \underline{\;52..\;} \text{ Racine.} \\
\underline{3125} & \\
\quad 6770.4032 & \\
\quad 3125 & \\
\underline{\;380204032\;} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Je sépare les cinq derniers chiffres 04032, et je cherche la racine cinquième de 3802 qui, ayant moins de cinq chiffres, ne peut donner qu'un chiffre pour cette racine; elle est 5 que j'écris à côté. J'élève 5 à la cinquième puissance, et j'écris le produit sous 3802 pour l'en retrancher, il reste 677, à côté duquel j'abaisse les cinq chiffres séparés d'abord; du total, je sépare quatre chiffres sur la droite, et je divise la partie restante 6770, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine trouvée 5, c'est-à-dire, par 5 fois 625, ou 3125. Je trouve pour quotient 2, que j'écris à côté du premier chiffre trouvé 5. Pour vérifier cette racine 52, je l'élève à la cinquième puissance, et je trouve le nombre même proposé, d'où je conclus que 52 est exactement la racine. S'il y avait un *reste*, et qu'on voulût approcher plus près de la racine, on mettrait 5 zéros, et on continuerait pour avoir le troisième chiffre, qui serait une décimale, comme on a fait pour avoir le second.

En général, pour tirer une racine de degré quelconque m, il faut séparer en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, dont la plus à gauche peut en avoir moins. Tirer la racine du degré m de cette dernière tranche, cette racine n'aura jamais qu'un seul chiffre : à côté du reste, descendre la tranche suivante, en séparer $m-1$ chiffres sur la droite, et diviser la partie restante, à gauche, par m fois la racine qu'on vient de trouver, élevée à la puissance $m-1$, et ainsi de suite. Cela est fondé sur ce que les deux premiers termes d'un binome $a+b$ élevé à la puissance quelconque m sont $a^m + ma^{m-1}b$, et sur ce que si a marque des dixaines et b des unités, a^m ne peut faire partie des m derniers chiffres, et $ma^{m-1}b$ ne peut faire partie des $m-1$ derniers.

De la manière d'approcher de la racine des puissances imparfaites des quantités littérales.

156. Lorsque la quantité complexe proposée n'est point une puissance parfaite du degré dont on demande la racine, alors il n'y a point de racine exacte à espérer : il faut se borner à en approcher aussi près que peut exiger la question pour laquelle cette extraction est nécessaire. On pourrait y parvenir en suivant la méthode que nous venons d'exposer pour les puissances parfaites : elle donnerait une suite de termes fractionnaires dont la valeur décroissant continuellement, permet de se borner à un nombre limité de termes et de négliger les autres : mais l'opération serait longue et pénible. On peut parvenir au même résultat par une voie beaucoup plus courte, en employant la règle que nous avons donnée ci-dessus (150) pour élever un binome à une puissance proposée. Pour cet effet, il faut se rappeler (132) que toute racine peut être représentée par une puissance fractionnaire. Ainsi, demander la racine quarrée de $a+b$, ou évaluer $\sqrt{a+b}$, c'est demander d'élever $a+b$ à la puissance $\frac{1}{2}$, puisque (132)... $(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{+b}$. Donc, suivant la règle donnée (150), j'écris la suite.

$$\tfrac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \text{etc.}$$

qui se réduit à $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, etc.

Et posant 1 pour premier terme de la seconde suite, je forme la suivante :

$$1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5},\ \text{etc.}$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier terme $\frac{1}{2}$ de la première suite, et par $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire, par le second terme du binome $a+b$, divisé par le premier, j'ai $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$ pour le second terme. Je forme de même le troisième, en multipliant ce second par le second terme $-\frac{1}{4}$ de la première suite, et par $\frac{b}{a}$, ce qui me donne $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ pour le troisième terme, et ainsi de suite. Enfin je multiplie la totalité de ces termes, par le premier terme du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, et j'ai

$$\sqrt{a+b}=a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}\right)$$

157. Nous verrons, par la suite, l'usage de ces sortes d'approximations. Pour le présent, nous nous contenterons de faire voir par un exemple, en nombres, comment on peut les employer pour approcher des racines des quantités numériques. Supposons qu'on veut avoir la racine quarrée de 101. Je partagerai 101 en deux parties dont l'une soit un quarré, le plus grand qu'il sera possible; par exemple, je le partage en ces deux parties 100 et 1; je prends la première pour a, et la seconde pour b, ensorte que je suppose $a=100$, et $b=1$; par conséquent

$$a^{\frac{1}{2}}=100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10\text{ ; et }\frac{b}{a}=\frac{1}{100}=0{,}01\text{ ;}$$

donc la série qui exprime $\sqrt{a+b}$, c'est-à-dire, ici $\sqrt{101}$, deviendra, en mettant pour $a^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{b}{a}$ leurs valeurs,

$$10\left(1+\frac{0{,}01}{2}-\frac{(0{,}01)^2}{8}+\frac{(0{,}01)^3}{16}-\frac{5(0{,}01)^4}{128}+\frac{35(0{,}01)^5}{1280}\text{etc.}\right)$$

Supposons qu'on veut avoir cette racine jusqu'à un dix-millième près seulement, alors il suffit de prendre les trois premiers termes; car le quatrième qui est $\frac{(0{,}01)^3}{16}$ revient à

$\frac{0,000001}{16}$, c'est-à-dire, à 0,0000000625; et quoiqu'il doive être multiplié par 10 qui doit multiplier tous les termes de la série, il ne produira que 0,000000625 qui est bien au-dessous d'un dix-millième. Les termes suivans sont, à plus forte raison, beaucoup au-dessous, puisqu'étant continuellement multipliés par 0,01 qui est une fraction, ils doivent diminuer continuellement; car en multipliant par une fraction, on ne prend (*Arith.* 120) qu'une partie du multiplicande. La valeur de $\sqrt{101}$ se réduit donc à $10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}\right)$, ou .... $10\,(1+0,005-0,0000125)$, ou $10\times 1,0049875$, ou 10,049875, c'est-à-dire, 10,0499 en se bornant aux dix-millièmes.

Cette méthode peut s'appliquer à toutes sortes de racines et à toutes sortes de quantités; nous en donnerons encore un exemple sur $\sqrt[5]{a^5-x^5}$. Je change donc cette quantité en $(a^5-x^5)^{\frac{1}{5}}$, et procédant comme ci-dessus, j'écris

$$\tfrac{1}{5},\ \frac{\frac{1}{5}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{5}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{5}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{5}-4}{5},\ \text{etc.}$$

$$\text{ou } \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{2}{5},\ -\tfrac{3}{5},\ -\tfrac{7}{10},\ -\tfrac{19}{25},\ \text{etc.}$$

Et posant 1 pour premier terme de la seconde suite, je forme la suivante :

$$1-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{a^5}-\frac{2}{25}\cdot\frac{x^{10}}{a^{10}}-\frac{6}{125}\cdot\frac{x^{15}}{a^{15}}-\frac{42}{1250}\cdot\frac{x^{20}}{a^{20}}-\frac{798}{31250}\cdot\frac{x^{25}}{a^{25}},\ \text{etc.}$$

En multipliant le premier terme 1 par le premier terme $\frac{1}{5}$, de la suite supérieure, et par $-\frac{x^5}{a^5}$, c'est-à-dire, par le second terme du binome, divisé par le premier, ce qui donne $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$ pour second terme de la série. Pour avoir le troisième, je multiplie celui-ci par le second terme $-\frac{2}{5}$, de la suite supérieure, et par $-\frac{x^5}{a^5}$, ce qui me donne $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$. En calculant de même les suivans jusqu'au sixième, et multipliant le tout par le premier terme a^5 du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire (122), par $a^{5\times\frac{1}{5}}$, ou par a, j'ai pour valeur approchée de $\sqrt[5]{a^5 - x^5}$, la quantité

$$a\left(1 - \frac{x^5}{5a^5} - \frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{42x^{20}}{1250a^{20}}, \text{ etc.}\right)$$

158. Observons à l'égard de ces séries et de toutes les autres qu'on peut former de la même manière, qu'on doit toujours prendre pour premier terme de la quantité proposée le plus grand terme; par exemple, dans $\sqrt{a+b}$, nous avons pris ci-dessus a pour premier terme; mais si b était plus grand que a, il aurait fallu prendre b pour premier terme. La raison en est que lorsque b est plus grand que a, la première série $a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}, \text{ etc.}\right)$ est trompeuse; car $\frac{b}{a}$ étant alors plus grand que l'unité, les termes suivans qui sont continuellement multipliés par $\frac{b}{a}$ vont toujours en augmentant; ensorte qu'on n'a aucune raison de s'arrêter après un certain nombre de termes. Mais si, dans ce même cas, on forme la série en prenant b pour premier terme, on aura........ $b^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}, \text{ etc.}\right)$ dans laquelle les termes vont en décroissant.

Les séries dont les termes vont en augmentant de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine, s'appellent *séries divergentes;* et au contraire on appelle *séries convergentes* celles dont les termes diminuent de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine.

159. Nous avons vu (140) que toute fraction algébrique pouvait être mise sous la forme d'un entier, en faisant passer

son dénominateur au numérateur avec un exposant négatif.

Cette observation nous fournit le moyen de réduire en série toute fraction dont le dénominateur serait complexe, ce qui sera utile par la suite. Par exemple, si j'avais $\frac{a^2}{a^2-x^2}$, au lieu de cette quantité, j'écrirais $a^2 \times (a^2-x^2)^{-1}$, et alors j'éleverais a^2-x^2 à la puissance -1 selon la règle donnée (150); c'est-à-dire, que je poserais d'abord la série

$$-1, \frac{-1-1}{2}, \frac{-1-2}{3}, \frac{-1-3}{4}, \text{ etc.}$$

$$\text{ou.....} \quad -1, -1, -1, -1.$$

Et je formerais la série suivante :

$$1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \text{ etc.}$$

En multipliant le premier terme 1 de cette seconde par le premier terme -1 de la série supérieure, et par $-\frac{x^2}{a^2}$, ce qui donnerait $+\frac{x^2}{a^2}$; multipliant celui-ci par le second terme -1 de la série supérieure, et par $\frac{x^2}{a^2}$; et ainsi de suite. Après quoi je multiplierais la totalité par le premier terme a^2 élevé à la puissance -1, c'est-à-dire (122), par $a^{2\times-1}$ ou a^{-2}, ce qui me donnerait $a^{-2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \text{ etc.}\right)$ pour valeur de $(a^2-x^2)^{-1}$; donc pour avoir $a^2(a^2-x^2)^{-1}$, il ne s'agit plus que de multiplier par a^2; or $a^{-2}\times a^2$ donnant a^{2-2} (20), ou a^0, qui se réduit à 1, on aura donc

$$a^2(a^2-x^2)^{-1}=1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \text{ etc.}$$

On s'y prendrait de même pour réduire en série $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^3}$; on considérerait cette quantité comme $a^2(a^2+x^2)^{-3}$.

160. Nous avons supposé que la même formule qui servait pour former les puissances parfaites d'un binome, pouvait aussi servir pour en former les puissances imparfaites. Comme les principes sur lesquels cette formule est fondée, supposent que l'exposant est un nombre entier positif, on pourrait douter qu'on pût l'appliquer légitimement au cas où cet exposant est fractionnaire positif ou négatif. Voici comment on peut se convaincre que la même formule peut servir dans tous ces cas. Si l'on considère la puissance $\frac{m}{n}$ de $(a+b)$, la fraction $\frac{m}{n}$ étant positive, on aura (150)

$$(1)\ldots (a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left[1+\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}\right]. \text{ Soit}$$

$$(2)\ldots\ p=\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}$$

Il viendra $(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}(1+p)$.

Elevant chaque membre à la puissance n, on aura

$$(a+b)^m=a^m(1+p)^n. \text{ Mais } (a+b)^m=a^m\left\{1+m\frac{b}{a}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}\right\}$$

Si donc $a^m(1+p)^n$ revient à $a^m\left(1+m\frac{b}{a}+\text{etc.}\right)$, ce sera une preuve, la dernière équation ayant lieu, que toutes celles dont elle est déduite ont lieu, et que par conséquent la formule (1) est exacte. Voyons donc si $a^m(1+p)^n$ revient à $(a+b)^m$. Or

$$(3)\ldots\ (1+p)^n=1+np+\frac{1}{2}n(n-1)p^2+\frac{1}{2.3}n(n-1)(n-2)p^3+\text{etc.}$$

Substituant la valeur de p dans le second membre de l'éqnation (3), et ne tenant compte que des puissances inférieures à la quatrième, on trouvera

$$p^2=\frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.};\ p^3=\frac{m^3}{n^3}\frac{b^3}{a^3},\ \text{etc.}$$

La formule (3) deviendra

$$(1+p)^n=1+m\frac{b}{a}+\frac{1}{2}m\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{2.3}m\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}m^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{b^2}{a^2}+\quad\frac{m^2}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$
$$+\quad\frac{m^3}{n^2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$

et l'on trouvera, toutes réductions faites,

$$(1+p)^n=1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc. D'où}$$

$$a^m(1+p)^n = a^m\left(1+m\frac{b}{a}+\text{etc.}\right) = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2 + \text{etc.}$$

Mais (150).. $a^m + ma^{m-1}b + \text{etc.} = (a+b)^m$. Donc $a^m(1+p)^n = (a+b)^m$.

La formule (1) est donc vraie. Donc, *la formule qui sert à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre entier positif, peut servir aussi à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre fractionnaire positif.*

Pour démontrer que *la même formule peut être employée lorsque l'exposant est négatif*, on remarquera qu'en représentant par T la totalité des termes que donnerait $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ en le développant suivant la même règle, on aura

$$(4)\ldots\ T = (a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left\{1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\frac{b^2}{a^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Mais

$$T = (a+b)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}}. \quad \text{D'où (5)}\ldots\ T \times (a+b)^{\frac{m}{n}} = 1.$$

Il suffit donc de vérifier l'exactitude de cette dernière égalité. Or on a démontré l'exactitude de la formule (1). Multipliant donc les équations (1) et (4), membre à membre, et se bornant aux deux premières puissances de $\frac{b}{a}$, on trouvera

$$\begin{aligned} T \times (a+b)^{\frac{m}{n}} = 1 &- \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\frac{b^2}{a^2} - \text{etc.} \\ &+ \frac{m}{n}\frac{b}{a} - \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on calcule les coefficiens des diverses puissances de $\frac{b}{a}$, on verra que tous ces coefficiens se réduisent identiquement à zéro. Ce qui démontre l'exactitude de la formule (5). *La formule du binome peut donc servir dans tous les cas.*

Des Equations à deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

161. Une équation à une seule inconnue est dite du troisième, du quatrième, du cinquième, etc. degré, lorsque la plus haut

puissance de l'inconnue est la troisième, la quatrième, la cinquième, etc.; mais outre cette puissance, une équation peut encore renfermer toutes les puissances inférieures; ainsi... $x^3=8$, $x^3+5x^2=4$, $x^3+6x^2-9x=7$, sont toutes des équations du troisième degré. Une équation à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues est dite passer le premier degré, non-seulement lorsque l'une de ces inconnues passe le premier degré, mais encore lorsque quelques-unes de ces mêmes inconnues sont multipliées entr'elles; et, en général, le degré s'estime par la plus forte somme que puissent faire les exposans dans un même terme : l'équation $x^3+y^3=a^2b$ est du troisième degré; l'équation $bx^2+x^2y+ay^2=ab^2$ est aussi du troisième degré, parce que les exposans de x et de y dans le terme x^2y font 3; dans les autres termes, les exposans sont moindres.

162. Pour résoudre les questions qui conduisent à des équations à plusieurs inconnues, et au-delà du premier degré; il faut, comme pour celles du premier degré, réduire ces équations à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnue.

Si l'on a deux équations et deux inconnues, et que, dans l'une de ces équations, l'une des inconnues ne passe pas le premier degré, *prenez la valeur de cette inconnue, comme si tout le reste était connu : substituez cette valeur dans l'autre équation, et vous aurez une nouvelle équation qui ne renfermera plus qu'une inconnue*. Par exemple, si l'on proposait cette question, *trouver deux nombres dont la somme soit* 12, *et dont le produit soit* 35. En représentant ces deux nombres, par x et y, j'aurais

$$x+y=12; \text{ et } xy=35.$$

De la première, je tire $x=12-y$; substituant dans la econde équation, cette valeur de x, j'aurai

$$(12-y)\,y=35 \text{ ou } 12y-yy=35,$$

équation du second degré, qui, étant résolue suivant les règles établies (89 et suiv.), donnera

$$y=6\pm 1, \text{ c'est-à-dire, } y=7 \text{ ou } y=5;$$

et puisque $x=12-y$, on aura $x=5$ ou $x=7$; c'est-à-dire, que les deux nombres cherchés sont 5 et 7 ou 7 et 5.

Pareillement, si j'avais les équations

$$x+3y=6 \text{ et } x^2+y^2=12.$$

De la première, je tirerais $x=6-3y$; substituant dans la seconde, j'aurais

$$(6-3y)^2+y^2=12. \text{ D'où } 10y^2-36y+24=0,$$

équation du second degré, qu'on peut résoudre.

Prenons, pour troisième exemple, les deux équations

$$xy+y^2=5 \text{ et } x^3+x^2y=y^2+7.$$

La première donne $x=\frac{5-y^2}{y}$; substituant dans la seconde, on a

$$\left(\frac{5-y^2}{y}\right)^3+\left(\frac{5-y^2}{y}\right)^2 y=y^2+7, \text{ ou}$$

$$\frac{(5-y^2)^3}{y^3}+\frac{(5-y^2)^2}{y^2}y=y^2+7.$$

Pour chasser les fractions, il suffit ici de multiplier le second terme par y et le second membre par y^3, ce qui donne

$$(5-y^2)^3+(5-y^2)^2y^2=y^5+7y^3.$$

Faisant les opérations indiquées, on a

$$125-75y^2+15y^4-y^6+25y^2-10y^4+y^6=y^5+7y^3;$$

passant tout dans le premier membre et réduisant, on a

$$y^5-5y^4+7y^3+50y^2-125=0,$$

équation qui ne renferme plus que y, mais qui est du cinquième degré.

163. A l'occasion de cet exemple nous ferons remarquer que lorsque quelques-uns des dénominateurs de l'équation ont quelques facteurs communs entre eux, on peut faire disparaître ces dénominateurs plus simplement que par la règle générale, en examinant par quelle quantité il faudrait multiplier ces dénominateurs

dénominateurs pour qu'ils devinssent égaux. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite (48) au sujet des fractions. Par exemple, si j'avais l'équation $\frac{cx}{ab}+\frac{dx}{ac}=e$, je la changerais en $\frac{c^2x+bdx}{abc}=e$, en multipliant les deux termes de la première fraction par c, et les deux termes de la deuxième par b; alors chassant le dénominateur, j'aurais $c^2x+bdx=abce$.

164. *Si dans l'une des équations, l'une des deux inconnues ne passe pas le second degré : prenez dans celle-ci la valeur du quarré de l'inconnue la moins élevée, et substituez-la dans l'autre, à la place du quarré de cette même inconnue et de ses puissances, et continuez de substituer jusqu'à ce que cette inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré. Alors tirez de cette dernière équation la valeur de cette même inconnue, et substituez-la dans la première.* Par exemple, si j'avais

$$(1)\ x^2+3y^2=6x \quad \text{et} \quad 2x^3-3y^2=8,$$

je prendrais, dans la première, la valeur de x^2; la substituant dans la seconde, j'aurais

$$2(6x-3y^2)x-3y^2=8,\ \text{ou}\ 12x^2-6xy^2-3y^2=8;$$

comme il y a encore x^2 dans celle-ci, j'y substitue de nouveau la même valeur de x^2 que ci-dessus, et j'ai

$$72x-36y^2-6xy^2-3y^2=8,$$

équation dans laquelle x n'est plus qu'au premier degré. J'en tire la valeur de x, je substitue cette valeur dans l'équation $x^2+3y^2=6x$: il vient

$$\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right)^2+3y^2=6\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right),\ \text{ou}$$

$$(39y^2+8)^2+3y^2(72-6y^2)^2=(234y^2+48)(72-6y^2),$$

équation dans laquelle il n'y a plus à faire que des multiplications et les réductions ordinaires.

165. Lorsque les équations sont de degrés plus élevés, on peut, en suivant une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer, arriver aussi à l'équation qui ne renferme plus qu'une inconnue; mais il est difficile d'éviter un inconvénient qui accompagne alors cette méthode : cet inconvénient est de faire monter l'équation à un degré plus élevé qu'elle ne doit être. Nous allons exposer un procédé qui n'est pas sujet à cette difficulté.

166. Toute équation à deux inconnues peut être toujours mise sous cette forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots + T = 0,$$

m marquant le degré auquel x est élevé. En effet, on peut toujours faire une totalité des différens termes composés de y et des quantités connues qui multiplient chaque puissance de x, et représenter cette totalité par une seule lettre; par exemple, dans l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

qui peut généralement représenter toutes les équations du second degré à deux inconnues [car il ne peut s'y trouver d'autres puissances de ces inconnues]; on peut rassembler les termes en cette manière :

$$ax^2 + (d + by)\, x + cy^2 + ey + f = 0,$$

et pour abréger, l'écrire ainsi :

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

sauf à remettre, au lieu de A, B, C, ce que ces lettres représentent, après qu'on aura fait de l'équation l'usage pour lequel on lui donne cette forme. Cela posé, soient donc

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots T = 0$$

$$\text{et } A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \ldots T' = 0$$

les deux équations proposées dont il s'agit de chasser ou éliminer x. Je les suppose d'abord du même degré; nous verrons ensuite ce qu'il faut faire quand elles sont de différens degrés. On multipliera la première par A', la seconde par A, et l'on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une équation du degré $m - 1$. On multipliera la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, et l'on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une seconde équation du degré $(m-1)$. On multipliera la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une troisième équation du degré $(m-1)$. On continuera de même jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $m - 1$. Cela posé, on aura m équations, chacune du degré $m - 1$. On considérera dans chacune les différentes puissances x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, etc. comme si elles étaient autant d'inconnues au premier degré. Par le moyen des $m - 1$ premières équations ou, en général, par le moyen d'un nombre $m - 1$ de ces équations, on déterminera

(84) les valeurs de ces inconnues que l'on substituera dans la dernière. Cette opération donnera une équation sans x, dans laquelle mettant pour A, B, C, A', B', C', etc., les quantités que ces lettres représentent, et qui peuvent d'ailleurs renfermer telles puissances de y qu'on voudra, on aura l'équation en y. Par exemple, si j'avais les deux équations

$$Ax^2 + Bx + C = 0\,,\ A'x^2 + B'x + C' = 0$$

qui peuvent représenter toutes les équations à deux inconnues, dans lesquelles l'une seulement des deux inconnues ne passe pas le second degré; en multipliant la première par A', la seconde par A, retranchant le second produit du premier et réduisant, j'aurais

$$(1)\ldots(A'B - AB')\,x + (A'C - AC') = 0.$$

Multipliant la première équation par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant le second produit du premier, et réduisant, j'aurais

$$(2)\ldots(A'C - AC')\,x + B'C - BC' = 0.$$

Prenant donc, dans l'équation (1), la valeur de x, et la substituant dans l'équation (2), j'aurai

$$(A'C - AC') \times \left(\frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}\right) + B'C - BC' = 0.\ \text{Ou}$$

$$-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0.$$

Si l'on avait les deux équations

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0\,,\ A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0.$$

Multipliant la première par A', la seconde par A, retranchant et réduisant, on aurait

$$(A'B - AB')\,x^2 + (A'C - AC')\,x + (A'D - AD') = 0.$$

Multipliant la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant et réduisant, on aurait

$$(A'C - AC')\,x^2 + (A'D - AD' + B'C - B'C)\,x + B'D - BD' = 0.$$

Enfin, multipliant la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, retranchant et réduisant, on aurait

$$(A'D - AD')\,x^2 + (B'D - BD')\,x + C'D - CD' = 0.$$

Il ne s'agit plus maintenant, en considérant x^2, x comme des inconnues au premier degré, que de déterminer leurs valeurs à l'aide de deux quelconques de ces trois équations du second degré et de substituer ces valeurs dans la troisième.

167. Si les deux équations proposées n'étaient pas au même degré pour x, alors on opérerait comme il suit. Soient m et n les deux exposans, et m

le plus grand. On multipliera l'équation du degré n par x^{m-n}, ce qui les mettra toutes deux au même degré. Alors on opérera, comme dans le cas précédent, en continuant les multiplications jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $n-1$, ce qui donnera n équations, chacune du degré $m-1$. On substituera dans chacune et dans toutes les puissances supérieures à x^n, la valeur de x^n tirée de l'équation du degré n, et on continuera de substituer, jusqu'à ce que la plus haute puissance restante soit x^{n-1}, ce qui sera toujours possible; alors on aura n équations, chacune du degré $n-1$. En employant $n-1$ de ces équations, on déterminera les valeurs de x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, etc., considérées comme autant d'inconnues au premier degré, et on les substituera dans la dernière.

Cette méthode est générale. Elle peut être simplifiée dans beaucoup de cas que nous ne nous arrêterons pas à détailler. Nous nous contenterons de remarquer que dans les multiplications successives par A′ et A, $A'x+B'$ et $Ax+B$, etc., on peut se dispenser de multiplier le premier, les deux premiers, etc., termes des deux équations proposées, et, en général, autant des premiers termes qu'il entre de termes dans le multiplicateur, parce que le produit qu'ils donneront, s'anéantira par la soustraction.

168. Si l'on détermine les valeurs des différentes puissances de x d'après la règle que nous avons donnée pour les équations du premier degré à plusieurs inconnues, l'équation finale en y ne montera jamais à un degré plus haut que mn, en supposant que le plus haut exposant de x, ainsi que celui de y, soit m dans l'une des équations et n dans l'autre. Mais si les exposans de x et de y sont inégaux dans chaque équation, ensorte que ceux de x dans la première et dans la seconde étant toujours m et n, ceux de y soient $m+p$ et $n+q$, l'équation finale en y ne passera jamais le degré $mn+mq+np$. (*Voy.*, pour la démonstration, les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, *ann.* 1764.) (*Voy.* aussi les *Mém. de l'Acad. de Berlin*, *ann.* 1748, et l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.

Des Equations à plus de deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

169. Lorsqu'on a plus de deux équations et plus de deux inconnues, trois, par exemple, on peut s'y prendre de la même manière, en éliminant d'abord une des inconnues par le moyen de la première et de la seconde équation, traitées selon la méthode précédente, et en éliminant encore la même inconnue par le moyen de la première et de la troisième ou de la seconde et de la troisième. On aura, par ce moyen, deux équations qui ne renfermeront plus que deux inconnues que l'on traitera selon la méthode précédente. Mais nous ne devons pas dissimuler que cette méthode qui conduit sûrement, lorsqu'on n'a que deux équations et deux inconnues, tombe néanmoins dans l'inconvénient de mener à des équations plus élevées qu'il ne faut, lorsque le nombre des équations proposées est plus grand que 2.

Le moyen d'éviter cet inconvénient est d'éliminer en combinant les équations, non pas deux à deux, mais trois à trois, lorsqu'il y en a trois; quatre à quatre, lorsqu'il y en a quatre, etc. Mais ce dernier procédé exige encore un choix particulier, dont le détail nous mènerait trop loin. On le trouvera dans les *Mém. de l'Acad. des Sciences pour l'année* 1764. On y trouvera aussi plusieurs recherches sur le degré où doit monter l'équation finale résultante de l'élimination de plusieurs inconnues. Au reste, quoique ces méthodes auxquelles nous renvoyons, abaissent considérablement le degré auquel conduiraient celles qu'on a eues jusqu'ici, et autant qu'il est possible en n'éliminant qu'une inconnue à la fois, il y a lieu de croire cependant qu'il peut être diminué; mais probablement on n'y parviendra que quand on aura trouvé une méthode pour éliminer, à la fois, toutes les inconnues hors une, ce que je ne sache pas qu'on puisse encore pratiquer généralement sur d'autres équations que sur celles du premier degré (*).

Des Equations à deux termes.

170. On appelle *équations à deux termes*, celles dans lesquelles il n'entre qu'une seule puissance de l'inconnue, parce qu'elles peuvent toujours être réduites à deux termes. Par exemple, l'équation $ax^5+bx^5=a^4b^2-a^3b^3$ est une équation à deux termes, parce qu'en la mettant sous cette forme $(a+b)\,x^5=a^4b^2-a^3b^3$, on voit que a et b étant des quantités connues, on pourra toujours réduire $a+b$ à une seule quantité, et $a^4b^2-a^3b^3$ pareillement à une seule quantité; ensorte que cette équation peut être représentée par cette autre $px^5=q$. Ces équations sont très-faciles à résoudre; car il est évident qu'après avoir dégagé la puissance de l'inconnue, par les mêmes règles que dans les autres équations, il ne reste plus qu'à tirer la racine du degré marqué par l'exposant de l'inconnue. Par exemple, l'équation $px^5=q$ deviendrait $x^5=\frac{q}{p}$ et tirant la racine cinquième $x=\sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

(*) Cette méthode, nous l'avons trouvée depuis; si on consulte l'ouvrage que nous avons publié, en 1779, sous le titre *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, *in*-4°, on y trouvera tout ce que l'on peut desirer de savoir sur le degré de l'équation finale résultante de tant d'équations qu'on voudra, et sur les moyens de l'obtenir la plus simple qu'il soit possible.

171. Lorsque l'exposant est impair, il n'y a jamais qu'une seule valeur réelle. Par exemple, si l'on avait cette équation $x^5 = 1024$, on aurait $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; or il est évident qu'il n'y a qu'un seul nombre réel qui, élevé à la cinquième puissance, puisse produire 1024.

Si le second membre de l'équation avait le signe $-$, la valeur de x aurait le signe $-$, parce que $-$ combiné par multiplication, avec $-$, un nombre impair de fois, donne $-$; mais lorsque l'exposant est pair, l'inconnue a deux valeurs, l'une positive, et l'autre négative, et qui peuvent être, ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Ce dernier cas aura lieu si le second membre a le signe $-$. Si l'on avait l'équation $x^4 = 625$, on en conclurait $x = \sqrt[4]{625} = 5$; mais puisque $-$ multiplié par $-$, un nombre pair de fois, donne la même chose que $+$ multiplié par $+$, -5 peut satisfaire aussi bien que $+5$; ainsi il faut écrire $x = \pm \sqrt{625} = \pm 5$ comme dans les équations du second degré. Si, au contraire, on avait eu $x^4 = -625$, on aurait conclu $x = \pm \sqrt[4]{-625}$; mais ces deux valeurs sont imaginaires, parce qu'il n'y a aucun nombre positif ou négatif qui, multiplié par lui-même un nombre pair de fois, puisse produire une quantité négative. Appliquons ces équations à une question. Supposons qu'on demande de *trouver deux moyennes proportionnelles entre* 5 *et* 625. En nommant x et y ces inconnues, on aura $\div 5 : x : y : 625$, qui donne ces deux proportions

$$5 : x :: x : y, \text{ et } x : y :: y : 625$$

D'où l'on déduit ces deux équations

$$5y = x^2 \text{ et } 625\,x = y^2.$$

La première donne $y = \frac{x^2}{5}$; substituant dans la seconde, on a $625x = \frac{x^4}{25}$; divisant par x et multipliant par 25, on a

$$x^3 = 15625,\quad x = \sqrt[3]{15625} = 25;$$

donc $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125.$

Des Equations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré.

172. Ces équations ne doivent renfermer que deux puissances différentes de x, mais dont l'une ait un exposant double de celui de l'autre. Par exemple,

$$x^4 + 5x^2 = 8 \text{ et } x^6 + 5x^3 = 8$$

sont dans ce cas. Ces équations se résolvent comme celle du second degré : après avoir rendu la plus haute puissance positive, si elle ne l'est pas, et après avoir dégagé cette même puissance des quantités qui la multiplient ou la divisent, on prend la moitié de ce qui multiplie la puissance inférieure de l'inconnue, et on ajoute à chaque membre le quarré de cette moitié, ce qui rend le premier membre un quarré parfait. Alors on tire la racine quarrée de chaque membre, en donnant à celle du second le double signe $\pm$. L'équation est réduite à une équation à deux termes. Par exemple, si l'on demandait de *trouver deux nombres dont la somme des cubes fût* 35, *et dont le produit fût* 6, on aurait ces deux équations

$$x^3 + y^3 = 35 \text{ et } xy = 6.$$

Cette dernière donnerait $y = \frac{6}{x}$, valeur qui, substituée dans la première, donne

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35;\ \text{d'où } x^6 - 35x^3 = -216.$$

Je prends donc la moitié de 35, j'en ajoute le quarré à chaque membre, et j'ai

$$x^6 - 35x^3 + (\tfrac{35}{2})^2 = (\tfrac{35}{2})^2 - 216 = \tfrac{361}{4};$$

tirant la racine quarrée de chaque membre

$$x^3 - \tfrac{35}{2} = \pm \tfrac{19}{2};\ \text{d'où } x^3 = \tfrac{35}{2} \pm \tfrac{19}{2}.$$

Cette dernière donne $x=3$ et $x=2$. Mais $y=\frac{6}{x}$; donc $y=2$ et $y=3$.

Lorsque le plus haut exposant est 4 ou un multiple de 4, il peut y avoir jusqu'à quatre racines réelles.

De la composition des Equations.

173. Nous venons de voir que les équations à deux termes ne donnaient, pour l'inconnue, qu'une seule valeur réelle lorsqu'elles sont de degré impair, et deux, lorsqu'elles sont de degré pair : elles en donnent, outre cela, plusieurs autres qui sont imaginaires, mais qui ne sont pas moins utiles, ainsi que nous le verrons lors de la résolution des équations, et ailleurs. En général *une équation quelconque donne toujours autant de valeurs pour l'inconnue qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette équation.* De ces valeurs, qu'on nomme aussi *racines* de l'équation, les unes peuvent être positives, les autres négatives ; les unes réelles, les autres imaginaires.

174. Pour rendre toutes ces vérités sensibles, il faut observer que lorsque dans une équation on fait passer tous les termes dans un seul membre, et que l'on a ordonné toutes les puissances de x ou de l'inconnue, on peut toujours considérer ce membre comme le résultat de la multiplication de plusieurs facteurs binomes simples, qui auraient tous pour terme commun x. Par exemple, lorsque l'équation

$$x^3 + 7x = 8x^2 + 9$$

a été mise sous la forme suivante,

$$(1)\ldots\ldots\ x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0,$$

on conçoit que $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, peut résulter de la multiplication de trois facteurs binomes simples $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$. En effet, si l'on multiplie ces trois facteurs, on aura

$$x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+ac+bc)\,x - abc = 0.$$

Or, pour que ces deux équations soient les mêmes, il ne s'agit que de trouver pour a, b, c, des valeurs telles que

$$a+b+c=8,\ ab+ac+bc=7,\ \text{et } abc=9.$$

Pour trouver chacune de ces quantités, a, par exemple, il faut, après avoir multiplié la première équation par a^2, et la seconde par a, il faut, dis-je, retrancher la seconde de la première, et y ajouter la troisième, ce qui donne

$$a^3 = 8a^2 - 7a + 9, \text{ ou } a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0.$$

On trouvera de la même manière, que les équations qui donneraient b et c seraient

$$b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0, \quad c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0.$$

Ce qui nous fournit les propositions suivantes.

175. 1°. Puisque l'équation qui doit donner a est la même que celle qui doit donner b, et la même que celle qui doit donner c, et que d'ailleurs il est facile de voir que les valeurs de a, b, c ne peuvent être égales, il faut donc que l'une quelconque de ces trois équations puisse donner les valeurs de a, de b et de c : donc chacune de ces équations doit avoir trois racines, dont l'une sera la valeur de a; la seconde, la valeur de b; et la troisième, la valeur de c. 2°. Chacune de ces équations est la même que l'équation (1) proposée, à la seule différence près que a, ou b, ou c, est changé en x. Donc celle-ci doit avoir trois racines, et ces trois racines doivent être les trois valeurs de a, b, c. Donc les quantités qu'il faut mettre pour a, b, c, dans $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, pour produire l'équation (1), par la multiplication de ces facteurs simples, sont les racines mêmes de cette équation.

176. Si les coefficiens des différentes puissances de x, au lieu d'être 8, 7, etc., étaient d'autres nombres, et si l'équation, au lieu d'être du troisième degré, était du quatrième, du cinquième, etc., les conséquences que nous venons de tirer seraient encore de même nature. Ainsi, si l'on avait en général,

$$(2) \ldots x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

p, q, r, étant des nombres connus. On pourrait de même considérer cette équation comme formée du produit des trois binomes $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, car ce produit étant

$$(3) \ldots x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+ac+bc)\,x - abc = 0.$$

Pour que les équations (2) et (3) soient les mêmes, il suffit que a, b, c soient tels que l'on ait

$$(4) \ldots a+b+c = p, \quad ab+ac+bc = q, \quad abc = r.$$

On en déduit $a^3 - pa^2 + qa - r = 0$,

$$b^3 - pb^2 + qb - r = 0, \text{ et } c^3 - pc^2 + qc - r = 0.$$

Ainsi l'équation qui donnera a, doit aussi donner b et c; elle doit donc avoir trois racines qui seront les valeurs des quantités a, b, c. Et comme chacune de ces équations est la même que l'équation (2), les quantités a, b, c, qu'il faut prendre pour produire cette dernière par la multiplication des facteurs simples $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, sont donc les racines mêmes de cette équation.

177. Donc en général, 1°. *une équation de degré quelconque peut toujours être considérée comme formée du produit d'autant de facteurs binomes simples, qui ont tous pour terme commun la lettre qui représente l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue;* 2°. *les seconds termes de ces binomes sont les racines de cette équation, chacune étant prise avec un signe contraire.*

178. Si l'équation, au lieu d'avoir ses termes alternativement positif ou négatif, comme nous l'avons supposé, avait toute autre succession de signes, par exemple, si elle était

$$x^3 + px^2 - qx + r = 0,$$

on n'en démontrerait pas moins, et de la même manière, qu'elle peut toujours être représentée par $(x-a) \times (x-b) \times (x-c)$; a, b, c étant les racines de cette dernière équation.

179. Puisque a, b, c, etc. sont les racines de l'équation (2), il suit des équations (4), 1°. que *dans toute équation le coefficient* $-$ p *du second terme, pris avec un signe contraire, c'est-à-dire,* $+$ p, *est égal à la somme de toutes les racines;* 2°. que *le coefficient* q *du troisième terme est égal à la somme des produits de ces racines multipliées deux à deux;* 3°. que *celui du quatrième, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines multipliées trois à trois, et* ainsi de suite, et qu'*enfin le dernier terme est le produit de toutes les racines.* Cela est général, quels que soient les différens signes des termes de l'équation, prenant toujours avec un signe contraire, le coefficient de chaque terme de numéro pair.

180. D'où il suit que, *dans une équation qui n'a pas de second terme, il y a sûrement des racines positives et des racines négatives, et que la somme des unes est égale à la somme des autres.* Ainsi, dans l'équation

$$(5)\ldots\ x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0,$$

la somme des trois racines est -2; la somme de leurs produits, multipliés deux à deux, est -23; la somme de leurs produits, trois à trois, ou le produit des trois racines, est $+60$. En effet, les trois racines sont $+5$, -4, -3, ainsi qu'on peut le voir en mettant chacun de ces nombres, au lieu de x, dans l'équation, car chacun réduit le premier membre à zéro. Or, il est évident que la somme de ces trois nombres, c'est-à-dire, $+5-4-3$, est -2; que la somme de leurs produits deux à deux, ou $-20-15+12$, est -23; et que le produit des trois, est $5 \times -4 \times -3$, c'est-à-dire, $+60$.

Pareillement, dans l'équation

$$x^3 - 19x + 30 = 0,$$

comme le second terme manque, je conclus qu'il y a des racines positives et des racines négatives, et que la somme des unes est égale à la somme des autres; en effet, les trois racines sont $+2$, $+3$, et -5.

En considérant une équation, comme formée du produit de plusieurs facteurs binomes simples, on se rend aisément raison comment il peut se faire qu'il y ait plusieurs nombres différens qui satisfassent à une équation. Par exemple, si l'on proposait cette question: *Trouver un nombre tel, que si on en retranche* 5, *et qu'à ce même nombre on ajoute successivement les nombres* 4 *et* 3, *les deux sommes multipliées entr'elles, et par le reste, fassent zéro*, on aura, en nommant x ce nombre, $x-5$ pour le reste, et $x+4$, $x+3$ pour les deux sommes; il faut donc que

$$(x+4)\times(x+3)\times(x-5)=0, \text{ c'est-à-dire, que}$$

$$x^3+2x^2-23x-60=0;$$

or, on voit que ce produit ou son égal $(x+4)\times(x+3)\times(x-5)$ peut devenir zéro dans trois cas différens, savoir, si $x=-4$, si $x=-3$, et si $x=5$. Or, quand on propose une équation telle que l'équation (5), rien ne détermine à prendre -4 plutôt que -3, ou plutôt que $+5$, puisque chacun réduisant également le premier membre à zéro, satisfait également à l'équation.

181. Nous placerons encore ici une remarque qui peut avoir son utilité. Les équations (4) du n° 176, nous ont toutes conduits à la même équation, soit pour avoir a, soit pour avoir b, soit pour avoir c. La raison en est que a, b, c, étant toutes disposées de la même manière dans chaque équation, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par aucune opération différente de celles qui détermineraient l'autre; donc, en général, *si dans la recherche de plusieurs quantités inconnues, on est obligé d'employer pour chacune les mêmes raisonnemens, les mêmes opérations, et les mêmes quantités connues, toutes ces quantités seront nécessairement racines d'une même équation, et par conséquent cette question conduira à une équation composée.*

182. Puisqu'on peut considérer une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on peut aussi la considérer comme formée du produit de plusieurs facteurs composés; ainsi une équation du troisième degré peut être considérée comme formée du produit d'un facteur du second degré, tel que x^2+ax+b, par un facteur du premier, tel que $x+c$; en effet, x^2+ax+b, peut toujours représenter le produit des deux autres facteurs simples. De même, une équation du cinquième degré peut être considérée comme formée, ou du produit de cinq facteurs simples, ou de deux facteurs du second degré, et d'un facteur du premier, ou d'un facteur du troisième et d'un facteur du second, ou enfin d'un facteur du quatrième, et d'un facteur du premier.

183. Nous avons vu qu'une équation du second degré pouvait avoir des racines imaginaires: puis donc qu'une équation de degré quelconque peut avoir été formée par le concours d'un ou de plusieurs facteurs du second

degré, elle peut aussi avoir des racines imaginaires. Mais il peut y en avoir de formes bien différentes de celles du second degré.

184. Quand on considère une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on voit qu'elle ne peut avoir que m diviseurs du premier degré, m marquant le degré.

185. Et en considérant une équation comme formée du produit de facteurs du second degré, le nombre des diviseurs du second degré qu'elle peut avoir, est exprimé par $\frac{1}{2} m(m-1)$, m marquant le degré de cette équation. En effet, chaque facteur du second degré étant le produit de deux facteurs simples, dont chacun peut diviser l'équation, doit aussi pouvoir diviser l'équation. Or, nous avons vu (147) qu'il y a $\frac{1}{2} m(m-1)$, manières différentes de multiplier, deux à deux, un nombre m de quantités, il y aura donc $\frac{1}{2} m(m-1)$, différens diviseurs du second degré. Par exemple, l'équation (3) du nº 176, admet ces trois diviseurs du second degré,

$$(x-a)(x-b),\ (x-a)(x-c),\ (x-b)(x-c),$$

Ainsi, une équation du troisième degré peut avoir trois différens diviseurs du second, et en général, une équation du degré m, peut avoir $\frac{1}{2} m(m-1)$ différens diviseurs du second degré.

Concluons donc de là, que si l'on demande quelles devraient être les valeurs de g et de h, pour que x^2+gx+h fût diviseur d'une équation proposée du degré m, on peut être assuré que g et h ne peuvent être déterminés chacun que par une équation du degré $\frac{1}{2} m(m-1)$. Car x^2+gx+h est aussi propre à représenter l'un des diviseurs du second degré que tout autre; donc h doit être susceptible de $\frac{1}{2} m(m-1)$ valeurs; il en est de même de g qui est la somme des deux racines de l'équation. Chacune de ces quantités doit donc être donnée par une équation du degré $\frac{1}{2} m(m-1)$.

On prouvera, de même, qu'en considérant une équation comme formée du produit de facteurs du troisième degré, chaque facteur du troisième degré est susceptible de $\frac{1}{6} m(m-1)(m-2)$ valeurs différentes; en sorte que si x^3+gx^2+hx+k représente l'un de ces facteurs, k ne pourra être déterminé que par une équation du degré $\frac{1}{6} m(m-1)(m-2)$. On voit assez les conséquences analogues qu'il y a à tirer pour les facteurs de tous les degrés.

186. Concluons de tout ce qui précède que lorsqu'on a trouvé une racine d'une équation, on peut, pour avoir les autres, diviser l'équation par x moins cette racine, c'est-à-dire par $x-a$, en représentant cette racine par a; la division se fera exactement, et donnera pour quotient une quantité où x sera moins élevé d'un degré; cette quantité étant égalée à zéro, sera l'équation qu'il faut résoudre pour avoir les autres racines. On voit, de même, que si l'on connaît deux racines, que je représente par a et b, il n'y a qu'à diviser l'équation par $(x-a)\times(x-b)$, et ainsi de suite.

Des transformations qu'on peut faire subir aux Equations.

187. On peut faire subir aux équations différentes transformations, dont il est à propos que nous parlions avant de passer à la résolution de ces mêmes équations.

188. *Si l'on change dans une équation les signes des termes qui renferment des puissances impaires de* x, *les racines positives de cette équation seront changées en négatives, et les négatives en positives.* En effet, pour changer les signes des racines de l'équation, il suffit de mettre $-x$ au lieu de $+x$; or, cette substitution ne change point les signes des termes qui renferment des puissances paires de x, et change, au contraire, les signes de ceux qui renferment des puissances impaires.

189. *Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, et cela sans donner un coefficient au premier terme*, il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs, et multiplier ensuite toute l'équation par le dénominateur qu'aura alors le premier terme. Par exemple, si j'ai

$$x^3+\frac{a}{m}x^2+\frac{c}{n}x+\frac{d}{p}=0;\ \text{je ferai } x=\frac{y}{mnp};\ \text{d'où}$$

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{a}{m}\,\frac{y^2}{m^2n^2p^2}+\frac{c}{n}\,\frac{y}{mnp}+\frac{d}{p}=0;$$

multipliant par $m^3n^3p^3$, et réduisant, j'ai

$$y^3+anpy^2+m^2np^2cy+m^3n^3p^2d=0.$$

190. Si m, n et p étaient égaux, il suffirait de faire $x=\frac{y}{m}$. D'où il suit que pour changer une équation dont tous les coefficiens sont des nombres entiers, mais dont le premier terme a un coefficient, en une autre dans laquelle celui-ci n'en ait plus, et où les autres aient néanmoins des entiers

pour coefficiens, il faut faire $x = \frac{y}{m}$, m marquant ce coefficient du premier terme. En effet; si j'ai l'équation $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$; en divisant par m, j'aurai $x^3 + \frac{a}{m} x^2 + \frac{b}{m} x + \frac{c}{m} = 0$, où tous les dénominateurs sont égaux.

191. *Pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coefficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du premier.* En effet, représentons, en général, cette équation par

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0.$$

Si on suppose $x = y + s$, on aura deux équations et trois inconnues; on sera donc maître de déterminer l'une d'entre elles, par telle condition que l'on voudra. Or, si l'on substitue, dans chaque terme, au lieu de la puissance de x qu'il renferme, une puissance semblable de $y + s$, on aura (148) une suite de termes, telle que celle-ci:

$$y^m + (ms + a)y^{m-1} + \ldots + k = 0.$$

Si donc nous regardons y comme l'inconnue, il est évident que cette équation sera sans second terme, si s est telle, que l'on ait $ms + a = 0$, c'est-à-dire, si l'on prend $s = \frac{-a}{m}$. Or, nous venons de voir que nous pouvions prendre pour s, telle valeur que nous jugerions à propos; puis donc que $\frac{-a}{m}$ est la valeur qu'il lui faut donner pour que l'équation en y soit sans second terme, il s'ensuit que pour changer l'équation proposée en une autre qui n'ait point de second terme, il faut faire $x = y - \frac{a}{m}$. Ce qui démontre la règle que nous venons de donner. Par exemple, pour faire disparaître le second terme de l'équation

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0\text{; je fais } x = y - \frac{6}{3} = y - 2;$$

substituant cette valeur de x, et réduisant, il vient $y^3 - 15y + 26 = 0$; équation qui n'a point le second terme y^2.

De la résolution des Equations composées.

192. Nous supposerons, dans tout ce que nous allons dire, qu'on ait fait passer dans un seul membre, tous les termes de l'équation. Nous

avons déjà dit (54) ce qu'on doit entendre par ces mots *résoudre une équation*, mais il faut fixer plus particulièrement ce que l'on entend par *résolution générale d'une équation*. Résoudre généralement une équation d'un degré quelconque, telle que

$$(1) \ldots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + k = 0,$$

c'est trouver pour l'inconnue autant de valeurs qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette inconnue, et dont chacune soit exprimée par les lettres p, q, etc. k, combinées entre elles de quelque manière que ce soit, telle cependant que chacune de ces valeurs substituées au lieu de x dans l'équation, réduise le premier membre à zéro, indépendamment de toute valeur particulière de p, q, etc. Par exemple, la règle que nous avons donnée (99) pour les équations du second degré, résout généralement ces équations. En effet;

$$(2) \ldots x^2 + px + q = 0,$$

peut représenter toute équation du second degré, parce que par p et q on peut entendre toutes sortes de nombres, positifs ou négatifs; or, cette équation résolue suivant cette même règle, donne

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Que l'on substitue maintenant l'une de ces deux valeurs, la première, par exemple, au lieu de x dans le premier membre de l'équation (2), on aura

$$\left(-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right)^2 + p\left(-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) + q,$$

qui se réduit à zéro. Il en serait de même, si l'on substituait la 2e valeur de x.

Cette expression générale des différentes valeurs de x dans une équation, est d'autant plus difficile à trouver, que le degré de l'équation est plus élevé, et il est aisé de sentir que cela doit être, si l'on fait les réflexions suivantes.

Quelle que puisse être la forme des valeurs de l'inconnue dans une équation de degré quelconque, il est certain que la résolution générale d'une équation d'un degré déterminé doit renfermer la résolution des équations générales de tous les degrés inférieurs. En effet, la résolution générale d'une équation du cinquième degré, par exemple, telle que

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

doit donner pour x cinq valeurs, dont chacune doit nécessairement renfermer toutes les lettres p, q, r, s, t. Or, lorsque t est zéro, cette équation se réduit à

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx = 0$$

qui étant le produit de ces deux facteurs $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$, et x, donne

$$1^o.\ x = 0;\ 2^o \ldots (3) \ldots x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Donc des cinq valeurs de x que donnera la résolution générale, l'une doit alors se réduire à zéro, et les quatre autres doivent être les racines de l'équation (3). Or, celle-ci n'étant que du quatrième degré, ses racines ne peuvent avoir que la forme de celles du quatrième degré : donc puisqu'elles sont, en même temps, comprises dans celles du cinquième degré, il faut que la résolution de celle-ci comprenne la résolution du quatrième. On prouvera de même que la résolution du quatrième doit comprendre celle du troisième, ainsi de suite. Donc la résolution d'une équation de degré quelconque, doit comprendre la résolution de tous les degrés inférieurs.

De là on peut conclure que l'expression de l'une quelconque des racines, doit renfermer toutes les espèces de radicaux depuis son degré jusqu'au premier (*). En effet, il est facile de voir que dans quelque degré que ce soit, il doit y avoir des radicaux de ce degré, puisque dans le cas particulier où tous les termes, excepté le premier et le dernier, manqueraient, l'expression des valeurs de x renfermerait un pareil radical; car l'équation étant alors $x^m+k=0$, on aurait $x=\sqrt[m]{-k}$; donc puisque la forme générale des racines doit comprendre la forme de celles de tous les degrés inférieurs, elle doit renfermer tous les radicaux depuis son degré jusqu'au premier.

193. Après ces réflexions sur la forme des racines, voyons la méthode qu'on peut employer pour les trouver. Celle que nous allons exposer, consiste à considérer l'équation qu'il s'agit de résoudre, comme le résultat de deux équations à deux inconnues. Nous avons vu ci-dessus (166), comment on parvenait à réduire ces deux-ci à une seule, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Il s'agit donc de les choisir telles, que l'élimination produise une équation que l'on puisse supposer la même que l'équation proposée. Nous allons voir quelles elles doivent être pour cet effet. Quoique cette méthode n'exige pas qu'on fasse disparaître le second terme de l'équation proposée, cependant les calculs étant plus simples, lorsqu'il n'y a pas de second terme, nous supposerons qu'on a fait évanouir celui-ci, par la méthode donnée (191). Ainsi, nous supposerons que

$$(4)\ldots x^m+p\,x^{m-2}+q\,x^{m-3}+\ldots+sx+t=0,$$

est en général l'équation à résoudre On prendra les deux équations

$$(5)\ldots y^m-1=0,\quad (6)\ldots ay^{m-1}+by^{m-2}+\ldots+x=0,$$

(*) Lorsque l'exposant de l'équation est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres, il peut arriver, selon la méthode qu'on emploiera pour résoudre, que l'expression générale des racines, ne renferme pas explicitement les radicaux de ce degré; mais ils n'y sont pas moins implicitement. Par exemple, dans le quatrième degré, au lieu des $\sqrt[4]{}$, on trouve par certaines méthodes, des quantités telles que $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, mais on voit que celles-ci comprennent les premières.

a, b, c, etc., étant des quantités inconnues que l'on déterminera comme il va être dit. Par le moyen de ces deux dernières, on éliminera y; ce qui conduira à une équation en x qui sera du degré m, et n'aura point de second terme. Les coefficiens (*) des différentes puissances de x, seront composés de a, b, c, etc., et leurs puissances. On égalera chaque coefficient au coefficient de pareille puissance de x dans l'équation (4); ce qui donnera autant d'équations pour déterminer a, b, c, etc., qu'il y a de ces quantités. Lorsque a, b, c, etc., auront été déterminés, on aura toutes les racines ou valeurs de x, en substituant dans l'équation (6), ces valeurs de a, b, c, etc., et mettant successivement pour y, chacune des racines de l'équation (5), qui sont faciles à déterminer, comme nous le verrons par la suite.

Application au troisième degré.

194. Soit donc (7)..$x^3+px+q=0$, l'équation à résoudre.

Je prends...(8)..$y^3-1=0$, $ay^2+by+x=0$.

Pour chasser y, je multiplie cette dernière par y, et mettant pour y^3 sa valeur 1, tirée de l'équation (8), j'ai $by^2+xy+a=0$. Je multiplie, de même, celle-ci par y, et mettant encore pour y^3 sa valeur 1, j'ai $xy^2+ay+b=0$. J'ai donc

$$ay^2+by+x=0;\ by^2+xy+a=0;\ xy^2+ay+b=0.$$

Par le moyen des deux premières, je prends la valeur de y^2, et celle de y, selon la méthode des équations du premier degré à deux inconnues; j'ai

$$y^2=\frac{xx-ab}{bb-ax} \text{ et } y=\frac{aa-bx}{bb-ax}.$$

Je substitue ces valeurs dans la troisième équation, ce qui me donne

$$(9)\ldots x^3-3abx+(a^3+b^3)=0.$$

Pour que les équations (7) et (9) soient les mêmes, il faut que

$$-3ab=p \quad \text{et} \quad a^3+b^3=q$$

ce sont là les deux équations qui donneront a et b (**). La première donne

---

(*) Le mot *coefficient* est pris ici dans un sens plus étendu que par le passé. Il signifie, en général, la totalité des quantités soit numériques, soit littérales, qui multiplient l'une quelconque des puissances de x. Ainsi, dans px^{m-2}, p est le coefficient de x^{m-2}.

(**) On pourrait peut-être demander s'il est nécessaire, pour que les deux équations deviennent les mêmes, de les égaler terme à terme; et s'il ne suffirait pas d'écrire $x^3+px+q=x^3-3abx+a^3+b^3$? Voici la réponse.

Il est indispensable d'égaler terme à terme, parce que pour que les deux

$b = -\frac{p}{3a}$; substituant dans la seconde, on a

$$a^3 - \frac{1}{27}\frac{p^3}{a^3} = q\,;\quad \text{d'où}\quad a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3.$$

Cette dernière équation, résolue comme une équatiou du second degré, donne (172)

$$(11)\ldots\ a^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\,;\ \text{d'où}\ a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}\,(*)\,;$$

cette valeur de a, substituée dans $a^3 + b^3 = q$, donne

$$b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Or l'équation $ay^2 + by + x = 0$, donne $x = -ay^2 - by$; on a donc...

$$(10)\ldots\ x = -y^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - y\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}},$$

qui renferme les trois racines. Il ne s'agit donc plus que de connaître les valeurs de y. Or, l'équation $y^3 - 1 = 0$, donne $y = 1$. Pour avoir les deux autres racines, je divise (186) $y^3 - 1$ par $y - 1$, et j'ai $y^2 + y + 1$, qui étant égalé à zéro, donne l'équation qui renferme les deux autres racines. Cette équation résolue (99), donne $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$. Substituant successivement ces trois valeurs de y, dans la formule (10), on trouvera, toutes réductions faites,

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

équations soient les mêmes, il faut que les trois racines soient les mêmes dans chacune : or, cette condition exige que la somme des racines soit la même ; ce qui a lieu. 1°. Que la somme $-3\,ab$ des produits de ces racines deux à deux, dans l'une, soit la même que la somme p des mêmes produits dans l'autre. 2°. Que le produit $a^3 + b^3$ des trois racines de l'une, soit le même que le produit q des trois racines de l'autre.

(*) Je ne donne ici qu'un seul signe au second radical, parce que je n'ai besoin que d'une valeur de a; il importe peu laquelle, chacune satisfaisant également, comme nous le verrons ci-après.

$$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1+\sqrt{+3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Si l'on suppose, dans l'équation $x^3+px+q=0$, que $q=0$; l'équation se réduit alors à $x^3+px=0$, ou $(x^2+p)\times x=0$; donc l'une des racines est $x=0$, et les deux autres se trouvent en résolvant l'équation $x^2+p=0$, qui donne $x=+\sqrt{-p}$; et $x=-\sqrt{-p}$; c'est aussi ce que donne la formule générale des racines.

195. Comme l'équation $a^6-qa^3=\frac{1}{27}p^3$, d'où nous avons déduit la valeur de a, a six racines, on pourrait peut-être demander si chacune peut être également employée; et si, dans le cas où elles seraient toutes également admissibles, il n'en résulterait pas 18 valeurs différentes pour x, puisque chacune en donnerait trois. Chacune des six valeurs de a est également bonne; mais l'une quelconque donne pour x les mêmes valeurs que toute autre. En voici la preuve : faisons, pour simplifier le calcul;

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=m,\quad \text{et}\quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=n;$$

alors l'équation (11), se changera en ces deux autres $a^3=m^3$ et $a^3=n^3$, la première donne $a=m$, et en divisant a^3-m^3, par $a-m$, on aura a^2+ma+m^2, qui étant égalé à zéro, donnera les deux autres valeurs de a, que l'on trouvera être $a=\frac{1}{2}m(-1\pm\sqrt{-3})$. On verra de même que l'équation $a^3=n^3$, donne $a=n$ et $a=\frac{1}{2}n(-1\pm\sqrt{-3})$. Or, puisqu'on a $a^3+b^3=q$, on aura $m^3+b^3=q$ et $n^3+b^3=q$, et en mettant pour m^3 et n^3 leurs valeurs,

$$b^3=\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\quad \text{et}\quad b^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},$$

c'est-à-dire, $b^3=n^3$ et $b^3=m^3$; donc les valeurs de b sont telles que $ab=mn$; ensorte que les valeurs de a et b, qui doivent aller l'une avec l'autre, sont les suivantes :

$$a=m \text{ et } b=n;\ a=\frac{1}{2}m(-1\pm\sqrt{-3}) \text{ et } b=\frac{1}{2}n(-1\pm\sqrt{-3})$$

$$a=n \text{ et } b=m;\ a=\frac{1}{2}n(-1\pm\sqrt{-3}) \text{ et } b=\frac{1}{2}m(-1\pm\sqrt{-3}).$$

Substituez maintenant l'une quelconque de ces six combinaisons dans $x = -ay^2 - by$, en mettant successivement pour y ses trois valeurs, et vous aurez toujours ces trois racines

$$x = -m - n;\ x = \frac{1}{2}m(1 + \sqrt{-3}) + \frac{1}{2}n(1 - \sqrt{-3});$$

$$x = \frac{1}{2}m(1 - \sqrt{-3}) + \frac{1}{2}n(1 + \sqrt{-3}).$$

196. En considérant les trois valeurs de x que nous avons trouvées ci-dessus, on voit que tant que p sera positif, la quantité $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ sera toujours positive, parce que $\frac{1}{4}q^2$ qui est le quarré de $\frac{1}{2}q$ sera toujours positif, quand même q serait négatif. Cette même quantité sera encore positive, tant que $\frac{1}{4}q^2$ sera plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, p étant négatif. Dans ces deux cas, les deux dernières valeurs de x sont imaginaires : car les deux radicaux cubes étant alors des quantités réelles et inégales, leur produit par les quantités $\sqrt{-3}$ et $-\sqrt{-3}$ de signes contraires, ne se détruiront pas mutuellement; ainsi il restera de l'imaginaire dans chacune de ces deux valeurs de x. Il n'y a donc alors que la première valeur de x, qui soit réelle.

197. Mais si p étant négatif $\frac{1}{27}p^3$ se trouvait plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, alors $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ serait une quantité négative, et la quantité........ $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ serait imaginaire; néanmoins les trois valeurs de x sont alors réelles. Pour s'en convaincre, il faut d'abord observer que..... . $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ qu'on a alors au lieu de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$, est la même chose que $\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right) \times -1}$ ou que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2} \times \sqrt{-1}$; ainsi pour abréger, je suppose

$$\frac{1}{2}q = m \text{ et } \sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2} = n;$$

la quantité $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ deviendra $\sqrt[3]{m + n\sqrt{-1}}$, et la quantité $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ deviendra $\sqrt[3]{m - n\sqrt{-1}}$; or ces quantités étant la même chose (132) que $(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ et $(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, si on les réduit en série, par la méthode donnée (150), on aura pour la première

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}\text{ etc.}\right)$$

et pour la seconde

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\frac{110}{3645}\frac{n}{m}\sqrt{-1}\text{ etc.}\right)$$

or, les trois valeurs de x se changent alors en

$$x=-\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}}$$

Substituant, au lieu des deux radicaux cubes, les séries qui en sont les valeurs, on trouvera, toutes réductions faites,

$$x=-\left(2+\frac{2}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{20}{243}\frac{n^4}{m^4}+\text{etc.}\right)\sqrt[3]{m}$$

$$x=\left(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\text{etc.}\right)\sqrt[3]{m}-\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\text{etc.}\right)\sqrt{3}\sqrt[3]{m}$$

$$x=\left(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\text{etc.}\right)\sqrt[3]{m}+\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\text{etc.}\right)\sqrt{3}\sqrt[3]{m},$$

quantités dans lesquelles il n'y a plus d'imaginaires. On n'a pu trouver, jusqu'à présent, que cette manière de donner, dans ce cas, une valeur algébrique réelle aux trois racines ; ainsi on ne peut les avoir alors, sous une forme réelle, que par approximation. Ce cas singulier a fort exercé les Algébristes, et on lui a donné le nom de *cas irréductible*.

Donnons maintenant quelques exemples. Supposons qu'on demande les racines de l'équation........ $y^3+6y^2-3y+4=0$; je fais disparaître (191) son second terme ; en faisant $y=x-2$; cela réduit l'équation à $x^3-15x+26=0$; or, nous avons représenté toute équation du troisième degré, sans second terme, par $x^3+px+q=0$; nous avons donc $p=-15$, $q=26$, donc

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{169-125}=\sqrt{44}:$$

les trois valeurs de x seront donc

$$x=-\sqrt[3]{13+\sqrt{44}}\qquad-\sqrt[3]{13-\sqrt{44}}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13+\sqrt{44}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13-\sqrt{44}}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13+\sqrt{44}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13-\sqrt{44}}.$$

C'est-à-dire, que la première est négative, et les deux autres imaginaires.

Prenons, pour second exemple, l'équation $x^3-9x-10=0$. Dans ce cas, on a $p=-9$, $q=-10$; par conséquent, $\frac{1}{27}p^3=-27$, et $\frac{1}{4}q^2=25$; donc $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=-2$; cette équation est donc dans le cas irréductible. Ainsi, si l'on veut avoir les valeurs de x, il faut faire usage des séries ci-dessus. Pour cet effet, on remarquera qu'on a supposé $m=\frac{1}{2}q$, et $n=\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}$; donc $m=-5$ et $n=\sqrt{2}$. Pour faire les substitutions, on commencera par évaluer $\sqrt{2}$ qu'on trouvera être $1{,}4142$; donc $\frac{n}{m}=\frac{1{,}4142}{-5}=-0{,}2828$; on évaluera aussi $\sqrt[3]{m}$ ou $\sqrt[3]{-5}$ ou $-\sqrt[3]{5}$, et l'on aura $\sqrt[3]{m}=-1{,}7099$; alors il n'y a plus qu'à substituer : nous nous bornerons à substituer dans la première qui deviendra

$$x=+1{,}7099\left\{2+\frac{2}{9}(0{,}2828)^2-\frac{20}{243}(0{,}2828)^4,\ \text{etc.}\right\}$$

quantité dans laquelle il ne s'agit plus que de faire les multiplications indiquées. Mais il est bon d'observer, en finissant, que ces séries ne sont d'un usage utile, qu'autant que m est plus grand que n; s'il était plus petit, on en formerait d'analogues pour ce cas, en observant ce qui a été dit (158). Au reste, lorsque m et n diffèrent peu, on est dans la nécessité de calculer un grand nombre de termes. Nous verrons par la suite comment on peut approcher autrement des valeurs de x.

198. Concluons de ce qui précède, que toute équation de cette forme $y^{3n} + py^{2n} + qy^n + r = 0$ est résoluble; puisqu'en faisant $y^n = x$, on a $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, c'est-à-dire, une équation du troisième degré.

Application au quatrième degré.

199. Représentons toute équation du quatrième degré, sans second terme, par

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Selon la règle donnée ci-dessus, je prends les deux équations

$$y^4 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad ay^3 + by^2 + cy + x = 0.$$

Pour éliminer, je multiplie celle-ci trois fois de suite par y, et je substitue à mesure, au lieu de y^4, sa valeur 1 tirée de l'équation $y^4 - 1 = 0$, ce procédé me donne (en comprenant la seconde équation) les quatre équations suivantes :

$$ay^3 + by^2 + cy + x = 0; \quad by^3 + cy^2 + xy + a = 0$$
$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0; \quad xy^3 + ay^2 + by + c = 0.$$

Si, à l'aide des trois premières, on tire les valeurs de y^3, y^2 et y, et si l'on substitue ces valeurs, dans la dernière, on trouvera une équation en x du quatrième degré. Égalant les coefficiens de cette équation à ceux de la proposée $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, il viendra...

$$-4ac - 2b^2 = p; \; 4a^2b + 4bc^2 = q; \; -a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r;$$

ce sont ces trois équations qui doivent faire connaître a, b et c. Pour avoir l'équation qui donnera b, je prends dans la seconde, la valeur de $a^2 + c^2$, et j'ai $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$; je quarre cette équation, ce qui me donne

$$a^4 + 2a^2c^2 + c^4 = \frac{qq}{16b^2}, \quad \text{ou} \quad a^4 + c^4 = \frac{qq}{16b^2} - 2a^2c^2;$$

je substitue cette valeur de $a^4 + c^4$ dans la troisième équation, et j'ai

$$(1)\ldots -\frac{qq}{16b^2} + 4a^2c^2 + b^4 - 4ab^2c = r.$$

De la première équation je tire la valeur de ac, substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(1)\ldots 64b^6 + 32pb^4 + 4(p^2 - 4r)b^2 - q^2 = 0,$$

Equation du sixième degré, mais qui n'a que la difficulté de celles du troisième, en regardant b^2 comme l'inconnue : on appelle cette équation *la réduite*, parce que c'est à sa résolution que se *réduit* celle des équations du quatrième degré.

200. Si l'on fait attention que le dernier terme q^2 de cette équation a le signe —, on verra que b^2 doit avoir au moins une valeur positive; car dans ce cas l'équation ne peut avoir été produite que par la multiplication de trois facteurs tels que $(b^2-l)\ (b^2-m)\ (b^2-n)$, ou de trois facteurs tels que $(b^2+l)\ (b^2+m)\ (b^2-n)$; il n'y a que ces deux combinaisons qui puissent donner le signe — au dernier terme; il y aura donc au moins un facteur de cette forme b^2-n; donc (177) $b^2=n$, c'est-à-dire que b^2 aura au moins une valeur positive. Donc puisque cette équation donne $b=\pm\sqrt{n}$, b aura au moins deux valeurs réelles.

201. Déterminons maintenant a et c. Les deux équations

$$-4ac-2b^2=p, \text{ et } 4a^2b+4bc^2=q,$$

trouvées ci-dessus, donnent

$$2ac=-\frac{1}{2}p-b^2 \text{ et } a^2+c^2=\frac{q}{4b}.$$

Ajoutant la première à la seconde, et la retranchant aussi de la seconde, on aura les deux équations suivantes :

$$a^2+2ac+c^2=\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2$$

$$a^2-2ac+c^2=\frac{q}{4b}+\frac{1}{2}p+b^2$$

tirant la racine quarrée de chacune, on aura

$$a+c=\pm\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2}\,;\ a-c=\pm\sqrt{\frac{q}{4b}+\frac{1}{2}p+b^2}.$$

Les deux signes de chaque équation pouvant être pris dans tel ordre que l'on voudra. De là il est aisé de déduire a et c; mais nous allons voir qu'on n'a besoin que de $a-c$. Développons auparavant les quatre valeurs de x. L'équation

$$ay^3+by^2+cy+x=0, \text{ donne } x=-ay^3-by^2-cy;$$

il s'agit donc d'avoir les quatre valeurs de y que donne l'équation...... $y^4-1=0$, ou $y^4=1$. Or en tirant la racine quatrième, on a $y=\pm 1$. Ayant trouvé ces deux valeurs de y, il faut (186) pour avoir les deux autres, diviser y^4-1, par le produit y^2-1 des deux facteurs $y-1$ et $y+1$, ce qui donne y^2+1 pour quotient; égalant ce quotient à zéro (186), on aura $y^2+1=0$, pour l'équation qui doit donner les deux autres racines, que l'on trouvera être $y=\pm\sqrt{-1}$. Les quatre valeurs de x seront donc

$$x=-b\pm(a+c),\ x=b\pm(a-c)\sqrt{-1},$$

Substituant pour $(a+c)$ et $(a-c)$, leurs valeurs trouvées ci-dessus, on aura

$$x=-b\pm\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\ x=-b\mp\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$

$$x=b\pm\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\ x=b\mp\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$

Equations dans lesquelles il est facile de voir que des deux signes $+$ et $-$, soit qu'on prenne le signe supérieur, soit qu'on prenne le signe inférieur, on aura toujours les quatre mêmes valeurs de x, l'une quelconque d'entr'elles ne faisant alors que se changer en l'une des autres. Ainsi, pour une même valeur de b, on n'aura jamais que quatre valeurs de x; savoir :

$$x=-b-\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\ x=-b+\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2}.$$

$$x=+b+\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\ x=+b-\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2}.$$

202. Puisque l'équation du sixième degré qui doit donner b, donne trois valeurs de b^2, on aura donc trois valeurs de b, qui auront le signe $+$, et trois qui auront le signe $-$; or il est facile de voir que soit qu'on mette $+b$, soit qu'on mette $-b$ dans les quatre dernières valeurs de x, il en résulte toujours les quatre mêmes valeurs. Il ne s'agit donc plus que de faire voir que chacune des trois valeurs de b qui auront le signe $+$, ne donnera jamais aussi que les mêmes quatre valeurs de x. Pour le démontrer, reprenons les équations

$$-4ac-2b^2=p,\ 4a^2b+4bc^2=q,$$

$$\text{et } -a^4-c^4+b^4+2a^2c^2-4ab^2c=r.$$

Quarrons la 2ᵉ de ces équations, nous aurons $16b^2(a^2+c^2)^2=qq$; mettons, au lieu de b^2, sa valeur tirée de la première; il viendra

$$-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2=qq.$$

Substituons de même, au lieu de b^2, sa valeur dans la troisième équation et nous aurons, après les réductions faites,

$$-a^4-c^4+\frac{p^2}{4}+4pac+14a^2c^2=r.$$

Substituant ces valeurs de q^2 et de r, dans l'équation (1) du nº 199, il viendra

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l}8b^6+4pb^4+2(a^4+c^4-4pac-14a^2c^2)b^2\\ \qquad\qquad+(p+4ac)(a^2+c^2)^2\end{array}\right\}=0.$$

Or, puisqu'on a trouvé $2b^2 = -p - 4ac$, il s'ensuit (186) que....... $2b^2 + p + 4ac$ doit diviser l'équation (2); ce qui a lieu en effet. Si l'on fait la division, et qu'on égale ensuite à zéro le quotient, pour avoir les deux autres valeurs de b^2, on aura

$$4b^4 - 8acb^2 + a^4 + c^4 + 2a^2c^2 = 0.$$

Cette équation étant résolue comme une équation du second degré donne

$$4b^2 = 4ac \pm 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}.$$

Or le dernier membre est (*) le quarré de $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$; donc

$$4b^2 = [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]; \text{ d'où}$$

$$(^{**})\ 2b = + [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}];$$

ainsi puisqu'on a trouvé ci-dessus, $b^2 = -\frac{1}{2}p - 2ac$, les trois valeurs positives de b sont

$$b = +\sqrt{\frac{-p-4ac}{2}},\ b = \frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}.$$

Représentons la seconde de ces valeurs, par b', et la troisième par b'', alors en ajoutant et retranchant, on aura

$$a + c = b' + b'' \text{ et } (a-c)\sqrt{-1} = b' - b''.$$

Si l'on substitue les valeurs de $a + c$ et $(a - c)\sqrt{-1}$ dans les quatre premières valeurs trouvées ci-dessus, elles se réduiront à

$$x = -b - b' - b'',\ x = +b + b' + b'' - 2b,$$
$$x = +b + b' + b'' - 2b',\ x = b + b' + b'' - 2b''.$$

Où l'on voit qu'il ne peut y avoir que quatre valeurs de x; car si l'on change, par exemple, b en b', il faut changer en même temps b' en b, puisqu'on voit que les trois racines b, b', b'' entrent toutes à-la-fois dans chacune de ces valeurs de x. Or ce changement donne les quatre mêmes valeurs pour x.

203. Revenons maintenant à la première expression des valeurs de x, c'est-à-dire, aux valeurs

$$x = -b \pm (a+c),\ x = b \pm (a-c)\sqrt{-1}.$$

(*) Il ne faut autre chose, pour s'en assurer, que quarrer la quantité $(a + c \pm)(a - c)\sqrt{-1}$. Mais si l'on demande comment on a trouvé cela, on le verra dans la suite.

(**) Nous ne prenons ici que le signe + pour la racine du second membre, parce que nous avons vu, ci-dessus, que la valeur négative de b mènerait aux mêmes conclusions.

Elles nous offrent trois cas, ou $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, ou elles sont toutes deux imaginaires, ou enfin l'une des deux est réelle, et l'autre imaginaire. Or j'observe d'abord, que lorsqu'elles sont imaginaires, elles peuvent toujours être réduites à des imaginaires de cette forme, $\sqrt{m} \times \sqrt{-1}$, m étant une quantité réelle; car puisqu'on a

$$a+c=\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2} \text{ et}$$

$$(a-c)\sqrt{-1}=\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$

b ayant toujours (200) au moins une valeur réelle que l'on peut toujours employer, elles ne peuvent devenir imaginaires que lorsque la quantité qui est sous le radical actuel, sera négative.

204. Cela posé, si $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, auquel cas, les quatre valeurs de x seront réelles, puisque b a toujours une valeur réelle, il est évident que les deux autres valeurs de $4b^2$, savoir : .... $[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$ seront réelles et positives.

205. Si au contraire $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux imaginaires, auquel cas les quatre valeurs de x seront imaginaires, alors si l'on représente $a+c$ par $k\sqrt{-1}$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ par $l\sqrt{-1}$, k et l seront des quantités réelles (203); on aura donc

$$b^2=[(k\pm l)\sqrt{-1}]^2=-(k\pm l)^2,$$

c'est-à-dire, que les deux autres valeurs de b^2 seront réelles, mais négatives.

206. Enfin, si des deux quantités $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$, l'une seulement est réelle, il est évident que des quatre valeurs de x, deux seront réelles, et deux imaginaires; or, dans ce cas, on voit aussi que les deux valeurs de b^2 exprimées par $[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{1-}]^2$ seront imaginaires.

207. Donc; *si la réduite considérée comme équation du troisième degré, a ses trois racines réelles et positives, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines réelles; si la réduite, ayant ses trois racines réelles, n'en a qu'une positive, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines imaginaires; enfin, de ces quatre racines, deux seront réelles et deux seront imaginaires, si la réduite n'a qu'une racine réelle.*

208. Puisque la formule des racines d'une équation du troisième degré ne donne ces racines sous une forme réelle que lorsqu'il n'y a qu'une racine réelle (196), il faut conclure qu'on n'aura les racines du 4^e^ degré, sous une

forme réelle, que lorsqu'il n'y aura que deux de ces racines qui soient réelles.

209. Voyons quelques exemples. Supposons qu'on demande les racines de l'équation

$$x^4+3x^2-52x+48=0. \text{ Nous aurons}$$
$$p=3,\ q=-52,\ r=48,\ qq=2704.$$

La réduite sera donc

$$64b^6+96b^4-732b^2-2704=0,$$

ou (en faisant, pour simplifier, $4b^2=u$),

$$u^3+6u^2-183u-2704=0.$$

Pour faire disparaître le second terme, je fais $u=z-2$, ce qui me donne

$$z^3-195z-2322=0.$$

Selon ce qui a été dit (n^{os} 194, 197) sur les équations du troisième degré, on trouvera que z n'a qu'une valeur réelle qui est

$$z=-\sqrt[3]{-1161+\sqrt{1073296}}-\sqrt[3]{-1161-\sqrt{1073296}}=18.$$
$$\text{Donc } u=z-2=16,\ 4b^2=u=16,\ b=2.$$

Substituant cette valeur de b, et celles de p, q et r, dans les valeurs de $a+c$ et de $(a-c)\sqrt{-1}$ trouvées ci-dessus, on aura

$$a+c=\sqrt{-12} \text{ et } (a-c)\sqrt{-1}=1.$$

De sorte que les quatre valeurs de x seront

$$x=-2\pm\sqrt{-12},\ x=3 \text{ et } x=1.$$

Dans cet exemple, les nombres se sont trouvés tels, qu'il a été possible d'évaluer exactement chaque radical. Mais ces cas sont fort rares. Le plus souvent, lorsqu'on veut avoir la valeur numérique dégagée de radicaux, il faut évaluer chaque radical par approximation.

Prenons, pour second exemple, l'équation

$$y^4+4y^3+9y^2+12y+3=0.$$

Je commence par faire disparaître le second terme, en faisant (192)...... $y=x-1$: j'ai pour nouvelle équation

$$x^4+3x^2+2x-3=0. \text{ Donc } p=3,\ q=2,\ r=-3;$$

la réduite devient

$$64b^6+96b^4+84b^2-4=0, \text{ ou, en faisant } 4b^2=u,\ u^3+6u^2+21u-4=0.$$

fais disparaître le second terme, en posant $u = z - 2$, ce qui donne... $z^3 + 9z - 30 = 0$, équation qui (196) n'a qu'une racine réelle, et qui annonce, par conséquent (206), que l'équation du quatrième degré n'en aura que deux réelles. Appliquant donc les formules données (194), on trouvera

$$z = \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}; \quad \text{donc}$$

$$u = z - 2 = -2 + \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}.$$

$$\text{Or } b = \tfrac{1}{2}\sqrt{u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-2 + \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}}$$

Substituant cette valeur de b, et celles de p et de q, dans les formules des quatre valeurs générales de x; on trouvera deux racines réelles et deux imaginaires.

Réflexions sur la méthode précédente, et sur son application aux équations des degrés supérieurs au quatrième.

210. L'équation qui nous a donné la valeur de b pour le quatrième degré, n'a monté qu'au sixième degré; mais si nous avions cherché directement l'équation qui doit donner a, ou celle qui doit donner c, nous serions parvenus à une équation du 24e degré, ainsi qu'on peut s'en convaincre de la manière suivante. Nous avons trouvé ci-dessus (202),

$$(1)\ldots -8(p + 4ac) \times (a^2 + c^2)^2 = qq, \text{ et}$$

$$(2)\ldots -a^4 - c^4 + \frac{pp}{4} 4pac + 14a^2c^2 = r.$$

Si l'on multiplie cette dernière équation par $8(p + 4ac)$, et que du produit on retranche la première, on aura, après les réductions faites,

$$(3)\ldots 512a^3c^3 + 256pa^2c^2 + 8(5p^2 - 4r)\,ac + 2p^3 - 8pr + q^2 = 0,$$

Equation qui, étant combinée avec l'équation (2), pour éliminer c donnera (168) une équation du 24e degré. Mais sans se donner la peine de faire ce calcul, on peut s'en assurer encore de cette autre manière. L'équation (1) donne

$$(4)\ldots (a^2 + c^2)^2 = -\frac{qq}{8(p + 4ac)}, \text{ et par conséquent}$$

$$(5)\ldots a^4 + c^4 = -\frac{q^2}{8(p + 4ac)} - 2a^2c^2.$$

Or, si l'on résout l'équation (3), qui, en considérant ac comme l'inconnue, est du troisième degré, on aura une valeur de ac, qui, étant substituée dans le second membre de l'équation (5), en fera une quantité toute connue que j'appelle A; si l'on représente maintenant par B, cette valeur de ac, on aura $c=\frac{B}{a}$, donc l'équation $a^4+c^4=A$, deviendra $a^8-Aa^4=-B^4$, qui, ayant huit racines, donnera huit valeurs de a. Or ac a trois valeurs; on aura donc trois équations du huitième degré, et par conséquent 24 valeurs pour a; donc l'équation en a sera du 24ᵉ degré.

211. Mais on voit, en même temps, que les exposans de toutes les puissances de a, que cette équation renfermera, seront des multiples de 4, puisque (182) elle sera le produit de trois quantités de la forme de...... $a^8-Aa^4+B^4$, devant renfermer les 24 racines que ces trois-ci fournissent. Donc si l'on y fait $a^4=u$, on aura en u une équation du sixième degré. Or je dis que cette équation ne peut renfermer que des radicaux quarrés et des radicaux cubes, ce qui est évident en résolvant l'équation....... $a^8-Aa^4=-B^4$ comme une équation du second degré; car alors on aura $a^4=\frac{1}{2}A\pm\sqrt{\frac{1}{4}AA-B^4}$, quantité dans laquelle A et B ne peuvent être composés que de radicaux quarrés et de radicaux cubes, puisqu'ils ne dépendent que d'une équation du troisième degré.

212. Si l'on se rappelle maintenant ce que nous avons vu sur le troisième degré, où la réduite était $a^6-qa^3=\frac{1}{27}p^3$; il est clair que a^3 ne peut renfermer que des radicaux quarrés. Enfin, il est évident que dans l'équation du second degré, sans second terme, $x^2+p=0$, en faisant, comme ci-dessus, $y^2-1=0$ et $ay+x=0$; la réduite sera $a^2+p=0$ qui ne donne qu'une valeur pour a^2; ainsi la réduite du second degré ne donne pour a^2 qu'un radical du premier degré, c'est-à-dire, une quantité sans radical. Donc, en remontant, on conclura par analogie, que si la réduite du cinquième degré ne renferme d'autres puissances de a que celles qui sont des multiples de 5, la valeur de a^5 ne renfermera que des radicaux quatrièmes, des radicaux cubes et des radicaux quarrés; donc si l'on démontre que par la méthode actuelle, cette réduite ne peut renfermer que des puissances de a, dont les exposans soient des multiples de 5, il s'ensuivra que cette même méthode réduit la difficulté des équations du cinquième degré, à celle des degrés inferieurs. Or, voici comment on peut s'assurer que la réduite n'aura pas d'autres puissances de a.

213. Supposant que $x^5+px^3+px^2+rx+s=0$, représente généralement toute équation du cinquième degré. En prenant, selon la méthode, les deux équations

$$y^5-1=0,\ \text{et}\ ay^4+by^3+cy^2+dy+x=0;$$

on aura, après avoir chassé y de la même manière qu'on l'a pratiqué dans les troisième et quatrième degrés, on aura, dis-je,

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{lllll}
x^5 & -5adx^3 & +5bd^2x^2 & -5cd^3x & +a^5 \\
 & -5bcx^3 & +5a^2cx^2 & -5a^3bx & +b^5 \\
 & & +5c^2dx^2 & -5b^3dx & +c^5 \\
 & & +5ab^2x^2 & -5ac^3x & +d^5 \\
 & & & +5a^2d^2x & -5a^3cd \\
 & & & +5b^2c^2x & -5ab^3c \\
 & & & -5abcdx & -5abd^3 \\
 & & & & -5bc^3d \\
 & & & & +5a^2bc^2 \\
 & & & & +5a^2b^2d \\
 & & & & +5b^2cd^2 \\
 & & & & +5ac^2d^2
\end{array}\right\}=0.$$

Ayant donc égalé le coefficient de x^3 à p, celui de x^2 à q, celui de x à r, et enfin la totalité des termes sans x à s, on aura quatre équations, lesquelles, en supposant $b=ga^2$, $c=ha^3$, $d=ka^4$, ce qui est très-permis, se changeront en quatre autres qui renfermeront g, h, k et a; mais il n'y aura d'autres puissances de a que a^5, a^{10}; donc si l'on conçoit qu'on ait éliminé g, h et k, l'équation finale ne renfermera pas d'autres puissances de a que celles dont les exposans seront des multiples de 5.

214. On voit donc, d'après tout ce qui précède, qu'à l'égard de a, c'est-à-dire, à l'égard du premier coefficient dans l'équation............ $ay^{m-1}+by^{m-2}+\text{etc.}+x=0$, la réduite est du second degré ou du degré 1.2, pour le second degré. Dans le troisième, elle est du sixième degré ou du degré 1.2.3. Dans le quatrième, elle est du vingt-quatrième, ou du degré 1.2.3.4. Il y a donc bien lieu de croire que, dans le cinquième, elle sera du degré 1.2.3.4.5, c'est-à-dire, du 120^e; et ainsi de suite. Et quoique, dans le quatrième degré, on trouve une réduite qui n'est que du sixième degré, c'est une simplification accidentelle qui, probablement, aura lieu d'une manière analogue dans les équations dont l'exposant est un nombre composé, mais non dans celles dont l'exposant est un nombre premier. En effet, il est facile de voir, pour le quatrième degré, que cette simplification est due à ce que b, dans chacune des équations où il entre, a des relations semblables à l'égard de a et à l'égard de c; au lieu que a n'est pas disposé de la même manière à l'égard de b qu'à l'égard de c. Mais dans le cinquième degré, il n'y a aucune des quantités a, b, c, d, dont on puisse dire ce que nous venons de dire de b, dans le quatrième; ce qui est facile à voir par les coefficiens de l'équation (1), du n° 213.

215. Quoi qu'il en soit, puisque la réduite du cinquième degré ne peut renfermer d'autres puissances de a que celles dont les exposans sont des

multiples de 5, il paraît donc qu'en y faisant $a^5=u$, l'équation du 24e degré qu'on aura alors, ne peut plus renfermer que des $\sqrt[4]{}$, des $\sqrt[3]{}$ et des $\sqrt{}$, puisque l'équation $a^5=u$, donnant $a=\sqrt[5]{u}$, met en évidence les radicaux cinquièmes que doit renfermer l'équation proposée.

On voit par là, ce qu'il y a à dire sur les degrés plus élevés. Ceux qui desireront plus de détails sur cette matière, peuvent consulter *les Mém. de l'Acad. des Sciences*, *ann.* 1762 et 1765, où l'on trouvera, en même temps, plusieurs classes d'équations qui admettent une résolution algébrique facile, ainsi qu'une autre méthode déduite de celle que nous venons d'exposer, laquelle simplifie le travail dans les équations dont l'exposant n'est pas un nombre premier.

216. Notre méthode suppose, comme on le voit, qu'on puisse toujours avoir toutes les racines de l'équation à deux termes $y^n-1=0$. Or, c'est ce qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'en ayant toujours au moins une, par une simple extraction de la racine du degré n, c'est-à-dire, ayant toujours $y=1$, lorsque n est impair, et $y=1$, $y=-1$, lorsque n est pair; la difficulté d'avoir les autres, est tout au plus de résoudre une équation du degré $n-1$; ce qu'on est censé savoir déjà lorsqu'on passe à la résolution d'une équation générale du degré n. Mais la difficulté n'est pas même de ce degré; elle n'est en général que du degré $\frac{1}{2}(n-1)$ lorsque n est impair, et du degré $\frac{1}{2}(n-2)$ lorsque n est pair, parce qu'après avoir divisé l'équation y^n-1 par sa racine $y-1$ lorsque n est impair, ou par $(y-1)(y+1)$, c'est-à-dire, par y^2-1 lorsque n est pair, le quotient, ou l'équation qui doit donner les autres racines, sera toujours de cette forme $y^k+y^{k-1}+y^{k-2}+y^{k-3}+\text{etc.}+1=0$, k étant un nombre pair. Or cette équation est décomposable en un nombre $\frac{1}{2}k$ de facteurs du second degré, tels que y^2+hy+1; et l'équation qui donnera h, ne montera jamais qu'au degré $\frac{1}{2}k$. Je ne m'arrête pas à démontrer en détail cette dernière proposition; on s'en assurera en prenant, par exemple, pour...... $y^8+y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1$, une quantité telle que.... $y^6+ay^5+by^4+cy^3+dy^2+ey+1$, la multipliant par y^2+hy+1, et égalant le produit, terme à terme, à y^8+y^7, etc., on aura des équations dont il sera facile de tirer a, b, c, d, e; et l'équation en h sera du quatrième degré. (*Voy.*, pour la démonstration générale, *le tom. VI des Mém. de Pétersbourg*.

Des Diviseurs commensurables des Equations.

217. On voit, par ce qui précède, que l'expression générale des racines des équations étant un composé de radicaux de différens degrés et différemment mêlés entr'eux, il peut très-bien arriver que quoique la valeur

d'une

d'une ou de plusieurs racines soit un nombre commensurable, néanmoins elle se présente sous une forme incommensurable; et c'est ce qui arrive en effet dans le troisième et le quatrième degré, et, plus probablement encore, dans les degrés supérieurs. Il est donc utile d'avoir une méthode pour trouver ces diviseurs commensurables, lorsqu'il y en a. Comme le dernier terme d'une équation est le produit de toutes les racines (179), aucun nombre ne peut donc être la valeur commensurable de x dans une équation, qu'autant qu'il sera diviseur exact du dernier terme. On pourrait donc prendre successivement tous les diviseurs du dernier terme, et les substituer successivement tant en $+$ qu'en $-$ (car x peut avoir aussi bien des valeurs négatives que des positives), au lieu de x dans l'équation : alors le diviseur qui, substitué ainsi, réduirait toute l'équation à zéro, serait la valeur de x; bien entendu que nous supposons ici qu'on a fait passer tous les termes de l'équation dans un seul membre. Mais cette opération serait souvent très-longue; nous allons faire voir à quel caractère on distingue ceux qu'on doit admettre et ceux qu'on doit rejeter; mais auparavant, il faut exposer comment on trouve tous les diviseurs d'un nombre.

218. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, il faut le diviser successivement par les nombres premiers par lesquels il pourra être divisé, en commençant par les plus simples, et continuer de diviser par le même nombre tant que cela se pourra. Alors on écrit à part, et sur une même ligne, tous ces nombres premiers, et chacun autant de fois qu'il a pu diviser. On les multiplie ensuite, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.; ces produits, les nombres premiers qu'on a trouvés et l'unité, forment tous les diviseurs cherchés. Par exemple, veut-on avoir tous les diviseurs de 60. Je divise 60 par 2, ce qui me donne 30; je divise 30 par 2, ce qui me donne 15; je divise 15 par 3, ce qui me donne 5; enfin je divise 5 par 5, ce qui me donne 1. Ainsi les diviseurs premiers sont 2, 2, 3, 5; je les multiplie deux à deux, ce qui me donne 4, 6, 10, 6, 10, 15. Je les multiplie trois à trois, et j'ai 12, 20, 30, 30; enfin les multipliant quatre à quatre, j'ai 60. Rassemblant tous ces diviseurs, en rejetant cependant ceux qui se trouvent répétés, j'ai, en y comprenant l'unité qui est diviseur de tout nombre,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.$$

219. Supposons maintenant qu'on veuille avoir les diviseurs commensurables d'une équation, lorsqu'elle en a; par exemple, d'une équation du quatrième degré, représenté généralement par.........................
(1)..$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Soit ce diviseur $= x + a$; alors l'équation proposée peut donc (182) être considérée comme ayant été formée de la multiplication de $(x + a)$ par un facteur du troisième degré, tel que... $x^3 + kx^2 + mx + n$; multiplions donc ces deux facteurs l'un par l'autre, nous aurons

$$(1)\ldots\; x^4 + (a + k)\,x^3 + (m + ak)\,x^2 + (am + n)\,x + an = 0.$$

Les équations (1) et (2) devant être les mêmes, on a

$$a+k=p\,;\; m+ak=q\,;\; am+n=r\,;\; an=s. \text{ D'où}$$

$$(3)\ldots\; n=\frac{s}{a}\,;\; m=\frac{r-n}{a}\,;\; k=\frac{q-m}{a}\,;\; 1=\frac{p-k}{a}.$$

Supposons donc maintenant qu'ayant pris pour a un des diviseurs du dernier terme, je veux savoir s'il peut être admis; les équations (3) me disent: Divisez le dernier terme de l'équation par ce diviseur; retranchez le quotient du coefficient de x^2 et divisez le reste par ce même diviseur; retranchez ce second quotient du coefficient de x et divisez le reste, encore, par le même diviseur; et continuez toujours de même jusqu'à ce que vous soyiez arrivé au coefficient du second terme de l'équation, pour lequel vous devez trouver 1 pour quotient. Si le diviseur que vous avez pris satisfait à toutes ces divisions, il peut sûrement être pris pour a; mais si l'une seulement de ces divisions ne peut être faite exactement, le nombre que vous avez choisi doit être rejeté.

Comme l'unité est toujours diviseur de tout nombre, il est visible qu'il faudra aussi tenter l'unité, tant en $+$ qu'en $-$; mais on aura plutôt fait pour celle ci de l'examiner en substituant successivement $+1$ et -1 au lieu de x, dans l'équation; substitution qui est très-facile, puisque toute puissance de $+1$ est $+1$, et que toute puissance paire de -1 est $+1$, et toute puissance impaire, -1. Si ni l'une ni l'autre de ces deux substitutions ne donne 0 pour résultat, alors a ne peut être ni $+1$, ni -1.

Cela posé, voici comment on procédera à l'examen de tous les diviseurs du dernier terme, autres que l'unité. Supposons qu'on demande si l'équation

$$(4)\ldots\; x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0.$$

a quelque diviseur commensurable; je cherche les diviseurs du dernier terme 15, autres que l'unité; les ayant trouvés, je les écris par ordre de grandeur (en les prenant tant en $+$ qu'en $-$), comme on le voit ici à la première ligne des nombres.

Diviseurs de 15....	$+15$,	$+5$,	$+3$,	-3,	-5,	-15
	$+1$,	$+3$,	$+5$,	-5,	-3,	-1
	-21,	-23,	-25,	-15,	-17,	-19
				$+5$		
				$+18$		
				-6		
				-3		
				$+1$		

Je divise le dernier terme $+15$ par chacun des nombres de la première ligne, et j'écris les quotiens pour seconde ligne. Je retranche chaque terme de la seconde ligne du coefficient de x, c'est-à-dire, de -20, et j'écris le reste pour troisième ligne. Je divise chaque terme de celle-ci par le terme correspondant de la première ligne, et à mesure que je trouve un quotient exact, je l'écris. Ici je n'en trouve qu'un, savoir $+5$; ainsi je suis sûr qu'il ne peut y avoir qu'un diviseur commensurable. Mais soit qu'il n'y ait qu'un quotient exact, soit qu'il y en ait plusieurs, on continuera en cette manière. Je retranche chaque quotient du coefficient 23 de x^2, et j'écris les restes pour cinquième ligne; c'est ici 18. Je divise, de même que ci-devant, chacun de ces restes par le terme correspondant de la première ligne, et j'écris chaque quotient au-dessous; c'est ici -6. Je retranche chacun de ces nouveaux quotiens du coefficient -9 de x^3; j'écris les restes au-dessous; c'est ici -3. Enfin je divise ceux-ci, encore, par le terme correspondant de la première suite. Je trouve pour quotient $+1$; d'où je conclus que le terme correspondant -3, dans la première ligne, est a, et que par conséquent le diviseur $x+a$ est $x-3$; c'est-à-dire, que $x-3$ divise l'équation: donc $x=3$ est la valeur commensurable de x dans l'équation proposée.

Non-seulement, par cette méthode, on trouve le diviseur de l'équation, mais on trouve encore le quotient. Il n'y a qu'à prendre dans la colonne qui a satisfait, les nombres qui se trouvent sur les lignes de numéro pair à compter de la première; ces nombres formeront le dernier terme, et les coefficiens successifs de x, x^2, x^3, etc. dans le second facteur de l'équation. Ici, par exemple, on trouve -5, $+5$, $-6+1$; j'en conclus que le second facteur est $1x^3-6x^2+5x-5$, ou x^3-6x^2+5x-5; ensorte que l'équation proposée, est le produit de $x-3$ par x^3-6x^2+5x-5.

Nous prendrons pour second exemple, l'équation suivante : .... $x^3+2x^2-33x+14=0$. En opérant, comme dans l'exemple précédent, on ne trouve que les diviseurs 7 et 2, qui soutiennent l'épreuve jusqu'à la dernière ligne; mais le second, c'est-à-dire, 2, ne peut satisfaire, parce que le dernier quotient qu'il donne est 11, au lieu qu'il doit être 1. Ainsi il n'y a qu'un diviseur commensurable, $x+7$.

220. Cette méthode s'applique également aux équations littérales : si elles ont le même nombre de dimensions dans chaque terme, alors on n'écrira, en première ligne, que ceux des diviseurs du dernier terme de l'équation qui ne sont que d'une dimension. Si le nombre des dimensions de chaque terme n'est pas le même, on le rendra tel, en introduisant une lettre dont les puissances complètent ce nombre de dimensions. Quand le nombre des dimensions est le même dans chaque terme d'une équation, on dit alors que l'équation est homogène.

221. Nous avons supposé que le premier terme n'avait aucun coefficient, s'il en avait un, le diviseur, au lieu d'être simplement $x+a$, serait en général $mx+a$, et m serait quelqu'un des facteurs du coefficient du premier terme. Alors, si l'on voulait faire usage de la méthode précédente, il faudrait, pour chaque facteur, au lieu de la seconde ligne, employer cette seconde ligne multipliée par m; au lieu de la quatrième, employer cette quatrième multipliée par m, et ainsi de suite : et n'admettre, pour a, que

les termes de la première qui auront pour correspondans, dans la dernière, le second facteur du premier terme de l'équation proposée; mais il suffira, de prendre en $+$ les nombres que l'on essaiera pour m. Au reste, on peut ramener ce cas au précédent, en faisant évanouir ce coefficient par la méthode donnée (190).

222. Lorsqu'une équation n'a pas de diviseurs commensurables du premier degré, elle peut néanmoins en avoir du second. On peut trouver ceux-ci par une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer; mais les calculs deviennent très-longs. On aura aussitôt fait en cette manière : représentez ce facteur par x^2+mx+n; multipliez-le par un autre facteur convenable pour produire une quantité du degré de l'équation proposée, c'est-à-dire, par un facteur du troisième degré, tel que x^3+ax^2+bx+c, si l'équation proposée est du cinquième; égalez le produit, terme à terme, avec l'équation, vous aurez autant d'équations particulières que d'inconnues........ a, b, c, m, n, etc. De ces équations vous tirerez aisément les valeurs de a, b, c, que vous substituerez dans les équations restantes; alors vous aurez deux équations qui ne renfermeront plus d'inconnues que m et n. Chassez m par les règles données (166), et cherchez les diviseurs commensurables de l'équation en n. Vous aurez la valeur de n, par le moyen de laquelle et de la valeur de m en n, qui résulte de l'élimination, vous déterminerez m et par conséquent le facteur x^2+mx+n. On voit par là comment on doit s'y prendre pour trouver les facteurs commensurables des troisième, quatrième, etc. degrés.

De l'extraction des Racines des Quantités en partie commensurables, et en partie incommensurables.

223. Les équations qui se résolvent à la manière de celles du second degré (172) conduisent à des expressions de cette forme $\sqrt{7+\sqrt{48}}$, ou $\sqrt{26+15\sqrt{3}}$, ou etc. Ces quantités peuvent souvent être ramenées à ne renfermer que des quantités rationnelles et de simples radicaux quarrés; ou, seulement des radicaux quarrés; ou, encore, des radicaux quarrés multipliés ou divisés par un radical simple de même degré que le radical supérieur. Voyons comment on doit s'y prendre pour les quantités de la forme $\sqrt{C+\sqrt{D}}$; je représente cette quantité par $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, m et n étant deux inconnues. J'aurai donc

$$\sqrt{C+\sqrt{D}}=\sqrt{m}+\sqrt{n};\ \text{en quarrant, il vient}$$

$$C+\sqrt{D}=m+2\sqrt{mn}+n.$$

Comme j'ai deux inconnues et une seule équation, je suis maître de déterminer l'une de ces inconnues par telle condition que je voudrai; je puis donc supposer $2\sqrt{mn}=\sqrt{D}$, et alors l'équation se réduit à $C=m+n$; je quarre ces deux équations, et j'ai

$$4mn=D \text{ et } m^2+2mn+n^2=C^2;$$

je retranche la première de ces deux équations de la seconde, et j'ai... $m^2-2mn+n^2=C^2-D$: d'où l'on voit que pour que m et n soient commensurables, il faut que la valeur de C^2-D soit un quarré. Tirant donc la racine quarrée, on aura $m-n=\sqrt{C^2-D}$; or, nous avions, ci-dessus, $m+n=C$; ajoutant et retranchant ces deux équations et divisant par 2, on aura

$$m=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}, \text{ et } n=\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}; \text{ donc}$$

$$\sqrt{C+\sqrt{D}}=\sqrt{\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}+\sqrt{\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}};$$

or quoique chacun des deux termes de ce second membre renferme deux radicaux, cependant chacun n'en aura véritablement qu'un seul, lorsque $\sqrt{C+\sqrt{D}}$ sera réductible, puisqu'alors C^2-D sera un quarré, ainsi que nous venons de le voir. Prenons pour exemple la quantité $\sqrt{7+\sqrt{48}}$: ici, $C=7$, $\sqrt{D}=\sqrt{48}$, et par conséquent $D=48$; donc $C^2-D=1$, et $\sqrt{C^2-D}=1$; on aura donc, en substituant dans la formule que nous venons de trouver,

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}.$$

Si l'on avait $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$; en faisant passer 6 sous le second radical (112) on aurait $\sqrt{11+\sqrt{72}}$, que l'on trouvera de même se réduire à..... $3+\sqrt{2}$. Pour second exemple, nous prendrons...................... $\sqrt{4ac+2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$ que nous avons dit ci-dessus (202) valoir $(a+c)+(a-c)\sqrt{-1}$. Si l'on fait passer $2(a+c)(a-c)$ sous le radical $\sqrt{-1}$, la quantité $\sqrt{4ac+2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$, devient.......... $\sqrt{4ac+\sqrt{-4.(a+c)^2(a-c)^2}}$; donc

$$C=4ac \text{ et } \sqrt{D}=\sqrt{-4(a+c)^2(a-c)^2}, \text{ ou}$$

$$D=-4(a+c)^2\times(a-c)^2=-4a^4+8a^2c^2-4c^4; \text{ donc}$$

$$C^2-D=16a^2c^2+4a^4-8a^2c^2+4c^4=4a^4+8a^2c^2+4c^4;$$

$$\text{donc } \sqrt{C^2-D}=2(a^2+c^2);$$

donc la formule devient alors $\sqrt{2ac + a^2 + c^2} + \sqrt{2ac - a^2 - c^2}$, c'est-à-dire, $\sqrt{(a+c)^2} + \sqrt{(a-c)^2 \times -1}$, qui se réduit à........... $(a+c)+(a-c)\sqrt{-1}$.

Si au lieu de $\sqrt{C+\sqrt{D}}$, on avait $\sqrt{C-\sqrt{D}}$, au lieu de..... $\sqrt{\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}+\sqrt{\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}$, on aurait......... $\sqrt{\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}-\sqrt{\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}$.

224. Voyons maintenant les quantités de la forme $\sqrt[3]{C+\sqrt{D}}$. Si l'on peut tirer exactement la racine cubique de la quantité représentée par... $C+\sqrt{D}$, cette racine ne peut être qu'une quantité de cette forme..... $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$; car si l'on supposait qu'elle peut renfermer deux radicaux quarrés, le cube en renfermerait deux aussi, ainsi qu'on peut le voir en cubant $\sqrt{g}+\sqrt{h}$. Mais on voit, par le même moyen, qu'elle peut renfermer un radical cube, tel que $\sqrt[3]{k}$. Cela posé, faisons donc

$$\sqrt[3]{C+\sqrt{D}} = m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}\sqrt{n};$$

nous aurons, en cubant,

$$C+\sqrt{D} = m^3k+3m^2k\sqrt{n}+3mkn+kn\sqrt{n} = m^3k+3mkn+(3m^2k+kn)\sqrt{n};$$

égalant la partie irrationnelle à la partie irrationnelle, nous aurons

$$\sqrt{D} = (3m^2k+kn)\sqrt{n},\ C = m^3k+3mkn;$$

quarrant la première équation et la seconde, on aura

$$D = 9m^4k^2n+6m^2k^2n^2+k^2n^3, \text{ et } C^2 = m^6k^2+6m^4k^2n+9m^2k^2n^2;$$

retranchant la première de ces deux équations de la seconde, on a

$$C^2 - D = m^6k^2 - 3m^4k^2n + 3m^2k^2n^2 - k^2n^3;$$

ou, multipliant par k,

$$C^2k - Dk = m^6k^3 - 3m^4k^3n + 3m^2k^3n^2 - k^3n^3;$$

tirant la racine cubique, il vient

$$m^2k - nk = \sqrt[3]{C^2k - Dk};\ \text{d'où}\ldots\ m^2 - n = \frac{\sqrt[3]{(C^2-D)k}}{k};$$

donc pour que $m^2 - n$ soit rationnel, et, par conséquent, pour que $C+\sqrt{D}$ ait une racine cubique, il faut que $(C^2-D)k$ soit un cube exact, ce que l'on peut toujours obtenir en prenant pour k un nombre convenable; car k est absolument arbitraire, ensorte que si C^2-D est un cube parfait, on fera $k=1$. Faisons donc, pour abréger, $\frac{\sqrt[3]{(C^2-D)k}}{k}=p$, nous aurons $m^2-n=p$, et par conséquent $n=m^2-p$; substituant cette valeur dans l'équation $C=m^3k+3mkn$, il viendra, après les réductions faites, ... $4km^3-3pkm-C=0$. Afin donc que m et n soient rationnels, il faut que la valeur de m tirée de cette dernière équation, soit rationnelle; il faudra donc chercher les diviseurs commensurables de cette équation (219), qui ne peut manquer d'en avoir, si m et n peuvent être rationnels, c'est-à-dire, si la quantité proposée est susceptible d'une racine cubique de la forme $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$. Prenons pour exemple, la quantité $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$; nous avons donc ici $C=20$, $\sqrt{D}=14\sqrt{2}$; et par conséquent $C^2-D=8$, c'est-à-dire, un cube : je puis donc faire $k=1$. Cela posé, j'aurai donc

$$\frac{\sqrt[3]{(C^2-D)k}}{k}=\frac{\sqrt[3]{8\times 1}}{1}=\sqrt[3]{8}=2,$$

et par conséquent aussi $p=2$. L'équation $4km^3-3pkm-C=0$, deviendra donc $4m^3-6m-20=0$, ou, en divisant par 2, $2m^3-3m-10=0$; je fais maintenant, $m=\frac{y}{2}$ pour faire disparaître (190) le coefficient du premier terme, et j'ai, toute réduction faite, $y^3-6y-40=0$, qui (219) a pour diviseur commensurable $y-4$; donc $y=4$, et par conséquent $m=2$; or l'équation $n=m^2-p$ donne $n=4-2=2$; donc................ $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$.

De la manière d'approcher des Racines des Equations composées.

225. La méthode que nous allons exposer pour approcher de la valeur de l'inconnue dans les équations, suppose qu'on ait déjà une valeur de cette racine, approchée seulement jusqu'à sa dixième partie près. Voyons donc comment on peut se procurer cette première valeur. Prenons, pour exemple, l'équation

$$(1)\ldots\; x^3-5x+6=0.$$

Je substitue dans cette équation, au lieu de x, plusieurs nombres, tant positifs que négatifs, jusqu'à ce que deux substitutions consécutives me donnent deux résultats de signes contraires. Lorsque j'en ai rencontré deux qui sont tels, je conclus que la valeur de x est entre les deux nombres qui, substitués au lieu de x, ont donné ces deux résultats, ensorte que si ces deux nombres ne diffèrent l'un de l'autre que de la dixième partie de l'un d'entre eux, j'ai la valeur approchée que je cherche, en prenant l'un ou l'autre, ou un milieu entre eux. Mais s'ils diffèrent davantage, alors j'opère comme on va le voir. Je substitue dans l'équation (1) les nombres 0, 1, 2, 3, etc.; mais je m'apperçois bientôt qu'ils donnent tous des résultats positifs, et que cela irait toujours de même à l'infini. C'est pourquoi je substitue les nombres 0, — 1, —2, —3, etc.; ce qui me donne les résultats....... + 6, + 10, +8, —6. Je m'arrête donc à ces deux derniers, et je conclus que l'une des racines est entre — 2 et — 3. Mais comme ces nombres diffèrent de 1, qui est plus grand que la dixième partie de chacun, je prends un milieu entre les deux nombres, c'est-à dire, que je prends la moitié — 2, 5 de leur somme — 5. Je substitue — 2, 5, au lieu de x dans l'équation, et je trouve pour résultat + 2, 875, c'est-à-dire, une quantité positive; je conclus donc que la racine est entre — 2, 5 et — 3. Je prends un milieu entre — 2, 5 et — 3, c'est — 2, 7, en négligeant au-delà des dixièmes. Je substitue — 2, 7 dans l'équation, au lieu de x; je trouve pour résultat — 0,183, c'est-à-dire, une quantité négative. Donc puisque — 2, a donné un résultat positif, et que — 2, 7 en donne un négatif, la valeur de x est entre — 2, 5 et — 2, 7; or, ces deux nombres ne diffèrent que de 0, 2 qui est plus petit que le dixième de chacun d'eux; donc la valeur de x est (en prenant un milieu entre deux) — 2, 6 à moins d'un dixième près. Ayant ainsi trouvé un nombre qui ne diffère pas de x d'un dixième de la valeur de cette même quantité, je suppose x égal à ce nombre plus une nouvelle inconnue z; c'est à-dire, ici, je suppose $x = -2,6+z$, et je substitue cette quantité, au lieu de x, dans l'équation; mais comme z est tout au plus un dixième de la quantité 2, 6, que par conséquent son quarré sera tout au plus la centième partie du quarré de celui-ci; son cube tout au plus la millième partie du cube de celui-ci, et ainsi de suite, je néglige dans cette substitution toutes les puissances de z au-dessus de la première; et afin de ne pas faire de calculs inutiles, je n'admets dans la formation du cube de $-2,6+z$ (et des autres puissances s'il y en avait) que les deux premiers termes que doit donner la règle donnée (148). Pour substituer avec ordre, j'écris, comme on le voit ici,

$$x^3 = (-2,6+z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z\,;\ -5x = -5(-2,6+z)$$
$$= -5(-2,6) - 5z\,;\ +6 = +6.$$

Le résultat de la substitution est

$$(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z - 5.(-2,6) - 5z + 6 = 0,$$

ou, en faisant les opérations indiquées et les réductions,

$$15,28z + 1,424 = 0\,;\ \text{d'où } z = -\frac{1,424}{15,28} = -0,09, \text{ etc.}$$

quantité dans laquelle je ne pousse la division que jusqu'à un chiffre significatif seulement. En général, il ne faut la pousser que jusqu'à autant de chiffres significatifs (y compris le premier qu'on trouve), qu'il y a de places entre celui-ci et le premier chiffre de la première valeur approchée de x : ici, entre 9 (qui est le premier chiffre significatif du quotient 0,09) et 2 (qui est le premier chiffre de 2, 6), première valeur approchée de x, il n'y a qu'une place; c'est pourquoi je m'arrête au premier chiffre significatif 9. La valeur de x, savoir $x = -2,6 + z$, devient donc

$$x = -2,6 - 0,09 = -2,69.$$

Pour avoir cette valeur de x plus exactement, je suppose actuellement $x = -2,69 + t$; substituant dans l'équation (1), on trouve $t = 0,000904$. La valeur de x, savoir $x = -2,69 + t$, devient donc

$$x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096.$$

Si l'on veut pousser plus loin, on fera $x = -2,689096 + u$, et on se conduira de la même manière.

Prenons, pour second exemple, l'équation

$$(2) \ldots x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

En s'y prenant comme ci-dessus, on trouvera que la valeur de x, approchée à moins d'un dixième près, est 2, 3. Je fais donc $x = 2,3 + z$. Substituant et négligeant z^2, z^3, on trouve $z = -0,03$. Je me borne aux centièmes, par la même raison que ci-dessus. La valeur de x est donc

$$x = 2,3 - 0,03 = 2,27.$$

Pour approcher davantage, je fais $x = 2,27 + t$, et substituant, j'aurai, toutes réductions faites, $t = -0,0025$. D'où $x = 2,2675$.

Réflexions sur la méthode précédente.

226. La méthode que nous venons d'exposer, et qui est due à *Newton*, exige, comme on vient de le voir, que l'on trouve deux nombres qui, substitués dans l'équation, donnent deux résultats, dont l'un soit positif et l'autre négatif. Nous avons dit qu'il y aurait toujours une racine de l'équation qui serait comprise entre les deux nombres qui ont donné ces deux résultats; et cela est facile à voir. Car si l'on suppose que la plus petite valeur de x soit représentée par a, et que celle qui est immédiatement plus grande, soit b, ensorte que $x - a$ et $x - b$ soient deux facteurs de l'équation, il est visible que si au lieu de x on substitue un nombre positif plus petit que a, $x - a$ devient négatif, et si l'on substitue un nombre positif plus grand que a, mais plus petit que b, $x - a$ deviendra positif, et le produit des autres facteurs sera de même signe que dans le premier cas; donc, puisqu'il n'y a que le facteur $x - a$ qui a changé de signe, alors le produit total changera sûrement de signe. On démontrerait la même chose si le plus petit facteur, au lieu d'être $x - a$, était $x + a$, mais en substituant des nombres négatifs. Mais ne peut-il pas arriver qu'il n'y ait aucune valeur réelle, soit positive, soit négative, qui, substituée pour x, donne

deux résultats de signe contraire. Cela peut arriver dans trois cas : 1°. lorsque les racines sont égales deux à deux, quatre à quatre, etc. ; 2°. lorsque toutes les racines sont imaginaires ; 3°. lorsqu'elles sont en partie imaginaires et en partie égales deux à deux. Par exemple, une équation qui serait formée de ces quatre facteurs $x-a$, $x-a$, $x-b$, $x-b$, c'est-à-dire, l'équation $(x-a)^2 \times (x-b)^2 = 0$, ne change jamais de signe, quelque valeur qu'on mette pour x, soit positive, soit négative. En effet, soit que $x-a$ soit positif, soit qu'il soit négatif, son quarré est toujours positif. Il en est de même de $x-b$. Quant au cas où toutes les racines sont imaginaires, il est évident qu'il n'y a aucuns nombres réels à substituer pour x, qui puissent donner deux résultats de signe contraire ; car, si cela arrivait, la valeur de x serait donc entre ces deux nombres réels ; elle serait donc réelle, ce qui est contre la supposition. Enfin le troisième cas suit immédiatement des deux que nous venons d'examiner. Que doit-on faire alors pour avoir les racines ? C'est ce que nous allons examiner.

De la manière d'avoir les racines égales des équations.

227. Pour avoir les racines égales qu'une équation peut renfermer, *multipliez chaque terme par l'exposant de* x *dans ce même terme*, *et diminuez cet exposant d'une unité*, *vous aurez une nouvelle équation : cherchez le plus grand commun diviseur entre cette dernière et l'équation proposée ; il sera composé des racines égales de celle-ci*, *mais élevées à une puissance moindre d'une unité*. Voici la démonstration de cette règle. Nous avons vu (149) que

$$(x-b)^m = x^m + m \, . \, x^{m-1} b + m \, . \, \frac{m-1}{2} \, . \, x^{m-2} b^2 + \text{etc.}$$

Concevons que, dans le second membre, on multiplie chaque terme par l'exposant de x, et qu'on diminue cet exposant d'une unité, on aura

$$m x^{m-1} + m \, . \, (m-1) x^{m-2} b + \frac{1}{2} m (m-1)(m-2) \, . \, x^{m-3} b^2 + \text{etc.}$$

Or cette quantité n'est autre chose que

$$m(x^{m-1} + (m-1) x^{m-2} b + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) x^{m-3} b^2 + \text{etc.})$$

c'est-à-dire (149), qu'elle est précisément $m(x-b)^{m-1}$.

Concluons donc que lorsqu'on multiplie les termes qui composent la puissance m du binome $x+b$, chacun par l'exposant de x, dans ce terme, et qu'on diminue cet exposant d'une unité, le nouveau produit est précisément la puissance immédiatement inférieure, multipliée par l'exposant de la puissance actuelle. La règle est donc démontrée pour le cas où toutes les racines sont égales.

Supposons actuellement que l'on ait $(x+b)^m \times (x+d)^n$: après avoir développé $(x+b)^m$, $(x+d)^n$ et fait le produit des deux résultats l'un par l'autre, si vous multipliez chaque terme par l'exposant de x, et qu'ensuite vous retranchiez l'unité de cet exposant, vous trouverez de même, par le calcul, que le résultat n'est autre chose que.........................., $m(x+b)^{m-1} \times (x+d)^n \times n(x+b)^m \times (x+d)^{n-1}$, dont le commun diviseur avec $(x+b)^m \times (x+d)^n$ est $(x+b)^{m-1} \times (x+d)^{n-1}$ et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs $x+b$, $x+d$, etc.

Recherche des Racines imaginaires des équations.

228. Quoique les racines imaginaires des équations soient susceptibles de bien des formes différentes selon le degré de l'équation, néanmoins on peut les ramener toutes à cette forme $x = a + b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles positives ou négatives. La démonstration rigoureuse de cette proposition nous mènerait trop loin : on la trouvera dans les *Mém. de l'Acad. de Berlin, an* 1746, où M. d'Alembert, auteur de cette démonstration, fait voir qu'en même temps qu'une des valeurs de x peut être représentée par $a + b\sqrt{-1}$, il y en a une autre qui doit être exprimée par $a - b\sqrt{-1}$; d'où il suit, 1°. qu'il n'y a que les équations de degrés pairs qui puissent avoir toutes leurs racines imaginaires ; 2°. qu'une équation qui a toutes ses racines imaginaires, est décomposable en facteurs du second degré de cette forme $(x - a - b\sqrt{-1}) \times (x - a + b\sqrt{-1})$: c'est-à-dire, en facteurs réels du second degré, puisqu'en faisant la multiplication, on a $x^2 - 2ax + aa + bb$, quantité où il n'y a plus d'imaginaires. Donc, lorsqu'une équation a toutes ses racines imaginaires, si l'on cherche à la décomposer en facteurs du second degré, tels que $x^2 + gx + h$ [ce que l'on fera de la manière qui a été indiquée (222)], l'équation en h aura sûrement quelques racines réelles ; donc on pourra toujours avoir ces racines au moins par approximation. Donc, dans quelque équation que ce soit, on peut toujours avoir les racines soit réelles, soit imaginaires, au moins par approximation.

SECONDE SECTION,

Dans laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique et à la Géométrie.

229. DANS le petit nombre d'applications que nous avons données dans la section précédente, on a dû remarquer que lorsqu'une fois une question a été mise en équation, ce qui reste à faire pour parvenir à la résolution, est uniforme pour toutes les questions du même degré. Tout se réduit à dégager l'inconnue ou les inconnues; et cela se fait par des règles qui sont toujours les mêmes, quelque différentes que puissent être d'ailleurs les quantités que l'on a à considérer dans chaque question, et quelque différentes que soient elles-mêmes ces questions, pourvu qu'elles soient du même degré. Ces règles dispensent de beaucoup de raisonnemens qu'on aurait à faire, si l'on voulait se passer du secours des équations; raisonnemens qui, indépendamment de leur nombre, seraient encore souvent, par leur nature, au-dessus des efforts ordinaires de l'esprit. Nous avons fait pressentir aussi, par quelques exemples, combien il est avantageux de représenter, par des signes généraux, chacune des quantités qui entrent dans une question, ainsi que les opérations que l'on a à faire sur elles; mais indépendamment des avantages que nous avons vu devoir résulter de cette méthode, il en est encore un grand nombre d'autres que nous allons faire connaître, en présentant les équations sous un point de vue plus étendu que nous ne l'avons fait jusqu'ici.

Lorsque l'on a représenté d'une manière générale chacune des quantités soit connues, soit inconnues, qui entrent dans une question, et que l'on a exprimé, par des équations, toutes les conditions qu'elle renferme, on peut alors abandonner totalement de vue la question, pour s'occuper uniquement de ces équations et de l'application des règles qui leur conviennent. Alors si l'on a bien présent à l'esprit ce que l'on est convenu d'entendre, soit par les signes, soit par la disposition des lettres, chaque équation devient, comme un livre, où l'on peut lire, avec plus de facilité, les différens rapports qui lient les quantités les unes aux autres. On peut, par différentes applications des règles exposées dans la première section, donner à ces équations de nouvelles formes qui rendent encore ces rapports plus faciles à saisir. En un mot, on peut les considérer comme le dépôt des propriétés de ces quantités, et des solutions générales d'un grand nombre de questions qu'on n'avait point en vue, qu'on ne soupçonnait pas même tenir de si près à la question principale. En effet, puisque les règles qui servent à trouver les valeurs des inconnues, ont toutes pour objet de ramener chaque quantité inconnue à former seule le premier membre d'une équation dont le second serait composé de toutes les autres quantités, et que ces règles sont évidemment applicables à chacune des quantités qui entrent dans ces équations, il est visible qu'on peut toujours, par ces mêmes règles, parvenir à avoir seule, dans un membre, l'une quelconque des quantités qui entrent dans une équation, et n'avoir que les autres dans le second membre. Alors on est dans le même cas que si l'on avait eu à résoudre la question où toutes ces dernières seraient connues, et celle-là, seule, inconnue. On voit donc qu'une même équation résout autant de questions différentes qu'elle renferme de quantités différentes. Rendons cela sensible par des exemples.

Propriétés générales des Progressions arithmétiques.

230. Nous avons vu (*Arith.* 206) *qu'un terme quelconque d'une progression arithmetique croissante était composé du premier, plus autant de fois la différence commune, qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.* Si donc on représente par a la valeur numérique du premier terme; par u celle du

terme dont il s'agit : par d la différence commune, ou la raison de la progression ; et enfin par n le nombre total des termes : alors le nombre des termes qui précèdent le terme u, sera exprimé par $n-1$; et la proposition que nous venons de citer pourra se traduire en langage algébrique, par cette équation,

$$(1)\ldots\ u=a+(n-1)d,$$

qui résout la question où connaissant la raison d d'une progression, le nombre n des termes et la valeur a du premier, on demanderait quelle doit être la valeur du dernier u. Mais puisqu'il entre quatre quantités dans cette équation, je dis qu'elle résout quatre questions générales. En effet, 1°. si l'on regarde a comme l'inconnue, et que l'on en cherche la valeur, suivant les règles de la première section, on aura

$$a=u-(n-1)d,$$

qui nous apprend que le premier terme d'une progression arithmétique croissante se trouve en retranchant du dernier u la différence d prise $n-1$ de fois, c'est-à-dire, la différence prise autant de fois, moins une, qu'il y a de termes en tout.

2°. Si l'on regarde n comme l'inconnue, l'équation (1) donne $n=\frac{u-a}{d}+1$, qui m'apprend que connaissant le premier terme a, le dernier u et la raison d d'une progression arithmétique, je saurai combien il y a de termes, en retranchant le premier du dernier, divisant le reste par la raison d, et ajoutant une unité au quotient. Par exemple, si je sais que le premier terme d'une progression est 5, le dernier 37, et la différence 2 ; de 37 je retranche 5, ce qui me donne 32, qui, étant divisé par la différence 2, donne 16, auquel ajoutant 1, j'ai 17 pour le nombre des termes de cette progression.

3°. Enfin si je regarde d comme l'inconnue dans l'équation (1), j'aurai $d=\frac{u-a}{n-1}$, qui m'apprend que pour connaître la différence qui doit régner dans une progression arithmétique, dont le premier terme, le dernier et le nombre des termes sont connus, il faut retrancher le premier du dernier, et diviser le reste par le nombre des termes moins un. Cette règle revient à celle que nous avons donnée (*Arith.* 209) pour trouver un nombre déterminé de moyennes proportionnelles entre deux quantités données : nous avons dit qu'il fallait retrancher la plus petite de la plus grande, et diviser le reste par le nombre des moyennes, augmenté d'une unité, ce qui est évidemment la même chose, puisque le nombre des moyennes est moindre de deux unités que le nombre total des termes de la progression.

La seule équation (1) nous donne donc la résolution de quatre questions générales, c'est-à-dire, nous met en état de résoudre celle-ci qui les comprend toutes quatre : *de ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes, et la différence d'une progression arithmétique, trois quelconques étant connues, trouver la quatrième.*

231. Toute autre propriété générale, énoncée aussi d'une manière générale, nous conduira, par les mêmes moyens, à la résolution d'autant de questions différentes qu'il entrera de quantités dans l'énoncé de cette propriété.

Par exemple, c'est encore une propriété des progressions arithmétiques, que *pour avoir la somme de tous les termes de quelque progression arithmétique que ce soit, il faut ajouter le premier terme avec le dernier, et multiplier le résultat par la moitié du nombre des termes.* Ainsi, pour avoir la somme des cent premiers termes de la progression ÷1.3.5.7. etc. dont le centième est 199 : au dernier 199 j'ajouterais le premier terme 1, et je multiplierais le résultat 200 par 50, qui est la moitié de 100, nombre des termes, ce qui me donne 10000 pour la somme des 100 premiers nombres impairs. Nous allons démontrer cette propriété dans un instant ; mais pour ne point perdre de vue notre objet, si en conservant les mêmes dénominations que ci-devant, nous nommons, de plus, s la somme de tous les termes, nous aurons pour la traduction algébrique de cette propriété,

$$(2)\ldots s=(a+u)\times\frac{n}{2}.$$

Cette équation nous met en état de résoudre cette question générale qui en comprend quatre. *De ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes et la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, trois étant connues, trouver la quatrième.* En effet, 1°. si l'on connaît a, u et n, l'équation donne immédiatement la valeur de s; 2°. si l'on connaît a, u et s, l'équation (2) donnera $n=\frac{2s}{a+u}$, équation où n est connu, puisqu'on suppose que l'on connaît les quantités a, u et s qui entrent dans sa valeur; 3°. et 4°. si l'on connaît a, s et n, ou u, s et n, et que l'on veuille avoir u ou a, on reprendra l'équation (2) qui donnera $u=\frac{2s}{n}-a$, qui satisfait à la première question, et $a=\frac{2s}{n}-u$, qui satisfait à la seconde.

Démontrons maintenant la propriété que nous venons de supposer. Il est évident que si nous continuons de représenter le premier terme par a et la différence par d, nous pouvons représenter toute progression arithmétique croissante par la suivante :

$$\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d.a+6d, \text{ etc.}$$

Concevons que, sous cette progression arithmétique, on fasse répondre, terme pour terme, la même progression, mais dans un ordre renversé, on aura

$$\begin{array}{l}\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d.a+6d.\\ \div a+6d.a+5d.a+4d.a+3d.a+2d.a+d.a\end{array}$$

Comme ces deux progressions sont égales, il est évident que la somme des termes de l'une des deux est la moitié des deux réunies;

réunies ; or si l'on y fait attention, on voit que les deux termes correspondans font et doivent toujours faire une même somme, et que cette somme est celle du premier et du dernier terme de la première progression, réunis; donc la totalité des deux progressions se trouvera en ajoutant le premier et le dernier terme de l'une, et prenant ce résultat autant de fois qu'il y a de termes; donc pour l'une seulement de ces deux progressions, il faudra ajouter le premier et le dernier, prendre ce résultat seulement moitié autant de fois qu'il y a de termes, c'est-à-dire, le multiplier par la moitié du nombre des termes.

232. Les huit questions générales que nous venons de résoudre, tiennent donc à deux principes seulement, savoir, celui que nous avons énoncé (230) et celui que nous avons énoncé (231); et puisque leur résolution se tire immédiatement des deux équations qui sont la traduction algébrique de ces deux énoncés, on voit comment, à l'aide de l'Algèbre, on peut faire découler d'une même source toutes les vérités qui en dépendent. Quoique ces propriétés ne soient pas toutes également utiles, cependant, par leur simplicité, elles sont très-propres à bien faire sentir l'usage des équations : c'est pourquoi nous les ferons encore servir à la recherche de quelques autres propriétés semblables.

Dans ce que nous venons d'exposer, nous n'avons considéré qu'une seule équation à la fois. Mais si deux ou un plus grand nombre d'équations qui expriment des propriétés différentes de quelques quantités, se trouvent avoir quelques-unes de ces quantités qui leur soient communes, alors on peut encore en déduire un très-grand nombre d'autres propriétés, et cela avec une très-grande facilité. Par exemple, les deux équations fondamentales des progressions arithmétiques, savoir,

$$(3) \ldots u = a + (n-1)\,d \text{ et } s = (a+u) \times \frac{n}{2},$$

ont trois quantités communes entr'elles, qui sont a, u et n. Si l'on prend successivement dans chacune de ces deux équations la valeur de l'une quelconque de ces trois quantités, et si l'on égale ensuite ces deux valeurs, on aura une nouvelle équation, dans laquelle cette quantité ne sera plus, et qui exprimera le rapport que les quatre autres ont entr'elles, indépendamment de celle-là. Par exemple, si je prends dans chaque équation la valeur de a, j'aurai ces deux valeurs

$$a = u - (n-1)d, \text{ et } a = \frac{2s}{n} - u;$$

$$\text{Donc } u - (n-1)d = \frac{2s}{n} - u,$$

équation de laquelle, en considérant sucessivement u, n, d et s comme inconnues, je tirerai, comme ci-dessus, quatre nouvelles propriétés générales des progressions arithmétiques. Par exemple, en regardant s comme inconnue, je tirerai... $s = nu - \frac{1}{2}n(n-1)d$, qui me donne le moyen de connaître la somme d'une progression arithmétique par le moyen du dernier terme, de la différence et du nombre des termes, puisqu'il n'entre que ces trois quantités et des nombres connus, dans le second membre.

Si au lieu de chasser ou d'éliminer a, nous eussions éliminé u, ou n, nous aurions eu, de même, pour chaque élimination, une nouvelle équation qui aurait renfermé quatre des cinq quantités a, u, n, d, s : et en considérant successivement chacune de ces quatre quantités, comme inconnues, on tirerait de chaque nouvelle équation quatre nouvelles formules, qui sont autant d'expressions différentes des quantités.... a, u, n, d, s, expressions dont chacune a son utilité particulière, selon que, dans la question qu'on proposera relativement aux progressions arithmétiques, on connaîtra telles ou telles de ces quantités. Par exemple, si l'on me demandait la somme de tous les termes d'une progression arithmétique dont on me ferait connaître le premier, la différence et le nombre des termes; alors, comme le dernier terme m'est inconnu, j'éliminerais u et j'aurais une équation qui, ne renfermant plus que a, n, d et s, me ferait aisément connaître s. Concluons de là que les deux équations (3) donnent la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les progressions arithmétiques, lorsqu'on y connaît, immédiatement, trois des cinq quantités a, u, n, d, s. Donnons ici quelques applications des progressions arithmétiques.

233. Supposons qu'on demande combien la base d'une pile triangulaire de boulets, dont le côté serait de 6, contiendrait de ces boulets. Il est facile de voir que le nombre des boulets de chaque bande parallèle au côté 6 (*Fig.* 2), va en diminuant continuellement de 1, et se réduit enfin à 1; 2° que le nombre des bandes est 6. Donc il s'agit de trouver la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier est 1, le dernier 6, et le nombre des termes 6. J'ajoute donc le premier 1 avec le dernier 6, et je multiplie le résultat 7 par 3, moitié du nombre des termes, ce qui me donne 21 pour le nombre des boulets de la base de la pile.

234. Nous avons vu en Géométrie, que pour avoir la surface d'un trapèze, il fallait ajouter les deux côtés parallèles, et multiplier la moitié de leur somme par la hauteur de ce trapèze. On peut démontrer cette même proposition par le principe que nous venons de donner pour sommer une progression arithmétique : en effet, on peut se représenter le trapèze $ABDC$ (*Fig.* 3) comme composé d'un nombre infini de trapèzes infiniment petits, tels que $bcih$, $cdki$. Or il est facile de voir qu'en supposant tous ces petits trapèzes de même hauteur, chacun diffère de son voisin, toujours d'une même quantité, savoir, du petit parallélogramme $cefg$, en tirant ce et bf parallèles à hk; car $gfki$ est égal à $bgih$, et cde est égal à bcg, ensorte que le trapèze $cdki$ a de plus que le trapèze $bcih$, le petit parallélogramme $cefg$, qui sera toujours de même grandeur, tant qu'on supposera ces trapèzes de même hauteur. Cela étant, tous ces trapèzes forment donc une progression arithmétique dont le premier terme est le trapèze contigu à AB, et le dernier est le trapèze contigu à CD; donc pour avoir la totalité de ces trapèzes, ou la surface du trapèze $ABDC$, il faut prendre les deux petits trapèzes extrêmes et les multiplier par la moitié du nombre de tous

les trapèzes; mais comme on les suppose infiniment petits, on peut prendre, à la place des deux trapèzes extrêmes, les deux lignes AB et CD; tandis que la hauteur IH représentera le nombre total des trapèzes; il faut donc multiplier la somme des deux lignes AB et CD par la moitié de la hauteur IH, ou la moitié de la somme des deux lignes AB et CD par la hauteur IH. D'où l'on voit que si AB est zéro, auquel cas le trapèze dégénère en triangle, il faudra multiplier la base de ce triangle par la moitié de sa hauteur, ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons démontré en Géométrie.

De la sommation des Puissances des termes d'une Progression arithmétique quelconque.

235. On vient de voir que le principe de la sommation des termes d'une progression arithmétique peut avoir quelques applications en Géométrie. Il en a encore dans plusieurs autres rencontres. Il est, par exemple, la base de la sommation des quarrés, des cubes, etc. des termes d'une progression arithmétique, et la sommation de ces puissances a aussi son utilité. Nous allons nous en occuper un moment; mais, auparavant, il est à propos de faire observer que, quand on se propose de sommer une suite de quantités qui croissent ou qui décroissent suivant une loi connue, l'objet est de déterminer la somme de ces quantités par la connaissance de quelques-unes d'entre elles, de leur nombre et de la quantité qui marque la loi de leur augmentation ou de leur diminution. Pour résoudre cette question, on peut toujours, comme pour toute autre, faire usage du principe que nous avons donné (67). Mais comme ce principe suppose que si l'on connaissait la quantité cherchée, on serait en état de la vérifier, ce qui ne peut se faire sans connaître au moins quelques-unes de ces propriétés, essayons donc de trouver les propriétés des suites des quarrés, des cubes, etc. des nombres en progression arithmétique. Soient donc a, b, c, d, etc. plusieurs nombres, en progression arithmétique, dont la différence soit r, on aura,

$$(1)\ldots\ b=a+r,\quad c=b+r;\quad d=c+r,\ \text{etc.}$$

On en déduira

$$(2)\ldots\ b^2 = a^2 + 2ar + r^2;\ c^2 = b^2 + 2br + r^2,\ \text{etc.};$$

$$(3)\ldots\ b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3;\ c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3,\ \text{etc.}$$

Ajoutant les équations entr'elles, on trouvera

$$c^2 = a^2 + 2r.(a+b) + 2r^2.$$

Et l'on voit qu'en général si le nombre des quantités...... a, b, c, d, etc. était marqué par n, que la dernière fût marquée par u, et la somme de toutes ces mêmes quantités par s', on aurait

$$u^2 = a^2 + 2r\,(s' - u) + (n - 1)\,r^2,$$

car $2r$ est multiplié par toutes les quantités a, b, c, etc., excepté la dernière, et r^2 est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'équations, c'est-à-dire, autant de fois moins une qu'il y a de quantités a, b, c, etc. Or cette équation renfermant s', il est aisé d'en tirer la valeur de cette quantité, et par conséquent l'expression de la somme de tous les termes d'une progression arithmétique. Cette valeur de s' est

$$s' = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)\,r^2}{2r} + u.$$

Si l'on ajoute de même les équations (3), on trouvera

$$c^3 = a^3 + 3r\,(a^2 + b^2) + 3r^2\,(a + b) + 2r^3,$$

où l'on voit que la quantité qui multiplie $3r$, est la somme de tous les quarrés, excepté le dernier ; que la quantité qui multiplie $3r^2$ est la somme de toutes les quantités, excepté la dernière, et qu'enfin le cube r^3 a été ajouté à lui-même autant de fois qu'il y avait d'équations, c'est-à-dire autant de fois moins une qu'il y a de quantités ; par conséquent, en général, et en nommant s'', la somme des quarrés, u le dernier terme, on aura

$$u^3 = a^3 + 3r\,(s'' - u^2) + 3r^2\,(s' - u) + (n - 1)\,r^3$$

Donc, connaissant le premier terme, le dernier, la différence r et le nombre des termes, on pourra avoir, par le moyen de cette équation, la valeur de s'', c'est-à-dire, de la somme des quarrés; car la quantité s' a été déterminée ci-dessus. Si donc on substitue pour s' sa valeur, on trouvera

$$s''=\frac{2u^3-2a^3+3ru^2+3ra^2+(n-1)r^3}{6r}$$

Si l'on élève successivement à la quatrième puissance les équations (1), qu'on les ajoute et qu'on les traite d'une manière analogue, on trouvera de même la somme des cubes. On suivra le même procédé pour obtenir la somme des puissances plus élevées.

236. Donnons maintenant quelques applications de la somme des quarrés. Si l'on suppose que la progression arithmétique dont il s'agit, soit la suite naturelle des nombres, à commencer par l'unité, c'est-à-dire, soit 1, 2, 3, etc. Alors on aura $a=1$, $r=1$ et $u=n$; car $u=a+(n-1)r$. La valeur de s'' deviendra donc

$$(1)\ldots\ s''=\frac{2n^3-2+3n^2+3+n-1}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Supposons maintenant qu'on veut savoir combien il y a de boulets dans une pile quarrée dont on connaît le nombre des boulets d'un des côtés de la base. Il est évident que cette pile est composée de rangs parallèles à la base qui sont tous des quarrés dont le côté va continuellement en diminuant de 1 à compter de la base, ou en augmentant de 1 à compter du sommet. La totalité est donc la somme des quarrés de la suite naturelle des nombres, prise jusqu'au nombre n qui marque le nombre des boulets d'un des côtés de la base : cette totalité est donc exprimée par $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, c'est-à-dire, que pour l'avoir, il faut suivre cette règle. *Au nombre des boulets d'un des côtés de la base et à son double ajoutez un; multipliez les deux résultats l'un par l'autre et leur produit par le nombre même des boulets, et prenez le sixième de ce dernier produit.* Par exemple, si la pile quadrangulaire a 6 boulets de côté, à 6 et à son double 12, j'ajoute 1, ce qui me donne 7 et 13, qui, multipliés l'un par l'autre, font 91 ; je multiplie celui-ci par 6, ce qui fait 546, dont le sixième 91 est le nombre des boulets de la pile.

Lorsque la pile n'a point pour base un quarré, mais un parallélogramme, il faut la concevoir partagée en deux parties (*Fig.* 4), dont l'une est la pile quadrangulaire dont nous venons de parler, et dont l'autre est un prisme dont on évaluera la totalité des boulets en multipliant le nombre des boulets contenus dans le triangle FBG par le nombre des boulets de l'arrête BC. Quant au nombre des boulets contenus dans le triangle BGF, on l'aura en multipliant la moitié du nombre des boulets du côté FG par ce nombre augmenté de 1.

237. Nous avons vu en Géométrie, que pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il fallait multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur. On peut le démontrer aussi par la formule de la somme des quarrés. Mais, auparavant, il faut remarquer que si dans la formule (1) du n° 236, on suppose que le nombre n des termes est infini, cette formule se réduit à $s'' = \frac{1}{3}n^3 = u^2 \times \frac{1}{3}n$, car $u = n$. En effet, supposer que n est infini, c'est supposer qu'il ne peut plus être augmenté par aucune quantité finie : ainsi pour que le calcul exprime la supposition que l'on fait que n est infini, il faut nécessairement regarder $n+1$ et n, comme étant la même chose, et $2n+1$ et $2n$, comme étant aussi égaux entr'eux : alors la formule

$$s'' = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ devient } s'' = \frac{1}{6}n.n.2n = \frac{1}{3}n^3.$$

Cela posé, nous avons démontré (*Géom.* 202) qu'en concevant une pyramide comme composée de tranches parallèles à la base, ces tranches étaient entr'elles comme les quarrés de leurs distances St au sommet (*Fig.* 5); donc en concevant la hauteur partagée en une infinité de parties égales, les distances suivront la progression naturelle des nombres, et les tranches suivront celle de leurs quarrés : donc la somme des tranches se trouvera de la même manière que celle des quarrés ;

or la formule $s'' = u^2 \times \frac{1}{3} n$, fait voir qu'il faut multiplier le dernier des quarrés par le tiers de leur nombre ; il faut donc, pour avoir la somme des tranches, multiplier la dernière, c'est-à-dire, la base par le tiers du nombre des tranches, c'est-à-dire, par le tiers de la hauteur.

238. Si l'on veut avoir la formule générale pour la sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque, on aura

$$d^m = c^m + mc^{m-1}r + \frac{1}{2}m(m-1)c^{m-2}r^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)c^{m-3}r^3 + \text{etc.}$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}r + \frac{1}{2}m(m-1)b^{m-2}r^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)b^{m-3}r^3 + \text{etc.}$$

$$b^m = a^m + ma^{m-1}r + \frac{1}{2}m(m-1)a^{m-2}r^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)a^{m-3}r^3 + \text{etc.}$$

et, par conséquent, en ajoutant, réduisant et représentant par.......... st^{m-1}, st^{m-2}, st^{m-3}, etc. la somme des puissances $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. de tous les termes, et par u le dernier terme, on aura, en général,

$$u^m = a^m + mr(st^{m-1} - u^{m-1}) + \frac{1}{2}m(m-1)r^2(st^{m-2} - u^{m-2}) \text{ etc.}$$

d'où l'on voit qu'en supposant successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=4$, etc., on aura les formules de la sommation de toutes les puissances. Car, en supposant $m=1$, on a $u = a + r(st^0 - u^0)$; or $st^0 = s \times 1$, c'est-à-dire, la somme d'autant d'unités qu'il y a de termes, et $u^0 = 1$. Ensorte qu'au lieu de $st^0 - u^0$, on peut prendre $n-1$. En supposant $m=2$, on a

$$u^2 = a^2 + 2r(st - u) + r^2(st^0 - u^0),$$

qui donne st, puisqu'on connaît la valeur de st^0. Supposons $m=3$, on aura

$$u^3 = a^3 + 3r(st^2 - u^2) + 3r^2(st - u) + r^3(st^0 - u^0),$$

qui donnera st^2, puisqu'on connaît st et st^0. Et ainsi de suite à l'infini.]

239. Lorsqu'une fois on sait trouver la somme des puissances de plusieurs nombres en progression arithmétique, il est fort aisé de trouver celle d'une infinité d'autres espèces de progressions. Par exemple, si ayant une progression arithmétique, telle que ÷ 3.7.11.15.19. etc., on conçoit qu'on ajoute successivement les termes, on formera la suite 3, 10, 21, 36, 55, etc. que l'on peut sommer. Et si l'on ajoute de même les termes de celle-ci, on aura la suite 3, 13, 34, 70, 125, etc., qu'on peut pareillement sommer ; il en sera de même des termes de celle-ci, ajoutés de la même manière, et ainsi à l'infini. En effet, la somme des termes de la progression arithmétique est

$s = \frac{1}{2}n(a+u)$, ou, en mettant pour u sa valeur

$$u = a + r(n-1);\ s = \frac{1}{2}n[2a + r(n-1)].$$

Cette valeur de s exprime donc un terme quelconque de la seconde suite. Donc pour avoir la somme des termes de la seconde suite, il faut sommer la suite des quantités que donnerait $\frac{1}{2}n\,[2a + r(n-1)]$, en mettant successivement pour n tous les nombres de la progression naturelle 1, 2, 3, etc. Or, cette quantité revient à $an + \frac{1}{2}rn^2 - \frac{1}{2}rn$, dans laquelle a et r restant toujours les mêmes, quelque valeur qu'on donne à n, il est clair que pour sommer toutes les quantités représentées par an, il suffit de sommer les quantités représentées par n, et multiplier cette somme par a; or, la somme des quantités représentées par n, est la somme de la progression arithmétique des nombres naturels. Le raisonnement est le même pour $\frac{1}{2}rn$. A l'égard de $\frac{1}{2}rn^2$, puisque r reste le même, quelque nombre que l'on substitue pour n, on sommera donc toutes les quantités représentées par n^2, c'est-à-dire, qu'on prendra la somme des quarrés des nombres naturels, et on la multipliera par $\frac{1}{2}r$. Ainsi, pour la somme des quantités an, on aura $a(n+1)\frac{1}{2}n$; pour celle des quantités $\frac{1}{2}rn$, on aura $\frac{1}{2}r(n+1)\frac{1}{2}n$, et enfin pour celle des quantités $\frac{1}{2}rn^2$, on aura $\frac{1}{2}r\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$; ensorte que la somme des quantités $\frac{1}{2}rn^2 - \frac{1}{2}rn$, ou bien celle des termes de la seconde suite, sera

$$\frac{1}{2}an(n+1) + \frac{1}{12}r(2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{1}{4}nr(n+1)^1$$

qui se réduit à

$$\frac{1}{2}an(n+1) + \frac{1}{6}rn(n-1)(n+1).$$

Et puisque chaque terme de la troisième suite est la somme des termes de la seconde, on sommera cette troisième en sommant les différentes parties de ce dernier résultat; ce qui n'exigera encore que des sommations des puissances de la suite naturelle des nombres, et ainsi à l'infini. Si l'on suppose $a = 1$ et $r = 1$, c'est-à-dire, si la progression primitive est la suite des nombres naturels, les progressions dont il s'agit actuellement, deviennent alors ce qu'on appelle les *nombres figurés*. C'est par cette dernière formule qu'on peut trouver le nombre des boulets d'une pile triangulaire : comme on a, dans ce cas, $a = 1$ et $r = 1$, elle se réduit à $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

On peut de même sommer les suites que l'on formerait, en ajoutant la suite des quarrés, ou la suite des cubes, etc. de cette même manière.

En un mot, on peut sommer par ces mêmes moyens toute suite de quantités dont un terme quelconque sera exprimé par tant de puissances parfaites que l'on voudra d'un même nombre n, ces puissances étant d'ailleurs multipliées par tels nombres connus qu'on voudra.

Propriétés et usages des Progressions géométriques.

240. On peut aussi trouver la somme des termes d'une progression géométrique par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour sommer les puissances des termes d'une progression arithmétique. Supposons que.... a, b, c, d, e, etc., soient les termes consécutifs d'une progression géométrique croissante dont la raison soit q. Puisque chaque terme contient q de fois celui qui le précède, on aura les équations suivantes :

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ e = dq, \text{ etc.}$$

donc ajoutant ces équations, on aura

$$b + c + d + e = (a + b + c + d)q,$$

d'où l'on voit qu'en général, le premier membre sera toujours la somme de tous les termes excepté le premier, et le second sera toujours la raison q multipliée par la somme de tous les termes, excepté le dernier. Donc si l'on appelle s la somme de tous les termes et u le dernier, cette équation se changera en

$$s - a = (s - u)q;\ \text{d'où (1)}..\ s = \frac{qu - a}{q - 1},$$

formule par laquelle, connaissant le premier terme a, le dernier u et la raison q, on aura la somme s de tous les termes. Cette même formule peut servir aussi pour les progressions décroissantes, puisque la progression décroissante, prise dans un ordre renversé, est une progression croissante; il n'y aura de changement à faire que celui de *dernier terme* au lieu du *premier, et du premier* au lieu du *dernier*. Si la progression décroissante s'étendait à l'infini, la somme se réduirait alors à $s = \frac{qu}{q - 1}$, u marquant le premier terme. En effet, pour exprimer que la progression s'étend à l'infini, il faut introduire dans le calcul ce que cette proposition renferme, savoir, que le dernier terme est infiniment petit ; or le moyen d'exprimer cette dernière condition, c'est de le supposer nul à l'égard du terme qu ; car si on le faisait subsister, ce serait supposer qu'il peut encore diminuer qu, ce qui est contre la première supposition. On voit donc que *pour avoir la somme de tous les termes d'une progression géométrique, il faut multiplier le plus grand terme par la raison* (1) *de la progression, et ayant retranché du produit le premier terme de cette même progression, diviser le reste par la raison diminuée d'une unité ;* ensorte que, lorsque la progression est décroissante à l'infini, cela se réduit à multiplier le plus grand terme par la raison, et diviser ensuite par la raison diminuée d'une unité. Ainsi la somme des termes de cette progression continuée à l'infini

$$\div \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \tfrac{1}{32}, \text{ etc. est } \frac{\frac{1}{2} \times 2}{2 - 1} \text{ ou } 1.$$

En général, toute progression géométrique décroissante à l'infini, dont chaque terme a pour numérateur constant un nombre moindre d'une unité que le dénominateur du premier terme, vaut 1. Car cette progression est en général

$$\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4}, \text{ etc.}$$

dont la somme est $\dfrac{\frac{n}{n+1}(n+1)}{n+1-1}$, ou $\dfrac{n}{n}$, c'est-à-dire 1.

Si cette conclusion paraît surprenante à quelques lecteurs, ils doivent faire attention que si après avoir pris, par exemple, les $\frac{2}{3}$ de la ligne AB (*Fig.* 6) que je suppose de 1 pied, on

(*) Par *la raison*, nous entendons en général le nombre de fois qu'un terme de la progression contient celui qui est immédiatement plus petit ; ensorte que cet énoncé convient à la progression décroissante comme à la progression croissante.

prend ensuite Cd, c'est-à-dire, les deux tiers de la partie restante CB, puis les deux tiers de la partie restante dB, puis les deux tiers de la partie restante eB, et ainsi à l'infini, on n'aura jamais absorbé plus que la ligne AB. La même chose aura lieu si l'on prend d'abord les trois quarts de AB, puis les $\frac{3}{4}$ de ce qui reste, et ainsi à l'infini. Or c'est ce qu'exprime la progression $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, puisque $\frac{2}{9}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{27}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{9}$, et ainsi de suite.

241. Nous avons vu (*Arith.* 212) *qu'un terme quelconque d'une progression géométrique, était composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré égal au nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit.* Donc si l'on nomme a le premier terme, u un terme quelconque, q la raison et n le nombre des termes, on aura $u = aq^{n-1}$: et comme il entre quatre quantités dans cette équation, on peut en tirer quatre formules, qui serviront à résoudre cette question générale. *Trois de ces quatre choses étant données, le premier terme, le dernier, la raison et le nombre des termes d'une progression géométrique, trouver la quatrième.* Car, 1°. l'équation donne immédiatement la valeur de u. 2°. On trouve facilement que celle de a est $a = \frac{u}{q^{n-1}}$: à l'égard de celle de q, on trouvera, par ce qui a été dit (170), $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Sur quoi nous remarquerons que cette dernière équation renferme la règle que nous avons donnée en arithmétique pour insérer plusieurs moyens proportionnels entre deux quantités données. Ces quantités sont ici a et u ; mais pour avoir la raison q qui doit régner dans la progression, on voit ici qu'il faut diviser la plus grande u par la plus petite a, et tirer la racine du degré $n - 1$ du quotient $\frac{u}{a}$; or n étant le nombre total des termes, $n - 1$ est plus grand d'une unité que le nombre des moyens ; ce qui s'accorde avec la règle citée.

Quant à la manière d'avoir n, dans l'équation $u = aq^{n-1}$, l'Algèbre ne fournit pas de moyens directs ; mais on peut la résoudre facilement, quoiqu'indirectement, en employant les logarithmes. Nous avons vu (*Arith.* 229) *que pour élever à une puissance par le moyen des logarithmes, il fallait multiplier le logarithme de la quantité par l'exposant de cette puissance.* Ainsi en représentant par L, les mots *logarithme de*, on pourra, au lieu de La^2, prendre $2\,La$; au lieu de La^3, prendre $3\,La$; au lieu de La^n, prendre $n\,La$. Donc, en se rappelant que pour multiplier par le moyen des logarithmes, il faut ajouter les logarithmes, et qu'au contraire pour diviser, il faut retrancher le logarithme du diviseur du logarithme du dividende, on aura dans l'équation $u = aq^{n-1}$;

$$Lu = La + Lq^{n-1} = La + (n-1)\,Lq\,; \quad \text{d'où}$$

$$(2)\ldots\; n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1.$$

Pour donner des applications de ceci, supposons qu'on ait placé au denier 20 une somme de 60000 livres, à condition que les intérêts que cette somme produira, chaque année, soient traités comme un nouveau fonds, qui produira également intérêt, et ainsi d'année en année, jusqu'à ce que le fonds soit monté à 1000000 de liv. On demande combien on doit attendre pour toucher cette dernière somme. Puisque l'intérêt est ici $\frac{1}{20}$ du fonds de l'année précédente, au bout d'une année quelconque le fonds sera égal au fonds de l'année précédente plus la vingtième partie de ce même dernier fonds ; ainsi, si l'on représente par a, b, c, d, etc. les fonds successifs d'année en année, on aura

$$b = a + \tfrac{1}{20}a,\; c = b + \tfrac{1}{20}b,\; d = c + \tfrac{1}{20}c, \text{ ou}$$

$$b = a\,(1 + \tfrac{1}{20}),\; c = b\,(1 + \tfrac{1}{20}),\; d = e\,(1 + \tfrac{1}{20})\,;$$

on voit donc que chaque fonds contient toujours celui qui le précède, le même nombre de fois marqué par $1 + \frac{1}{20}$ ou $\frac{21}{20}$. La suite de ces fonds forme donc une progression géométrique dont le premier terme a est 60000 livres ; le dernier u est 1000000 livres ; la raison q est $\frac{21}{20}$, et le nombre des termes est inconnu. On le trouvera donc en substituant dans la formule (2), au lieu de a, u et q, leurs valeurs, ce qui donnera

$$n=\frac{6,0000000-4,7781513}{1,3222193-1,3010300}+1=\frac{1,2218487}{0,0211893}+1=1+57,7$$

à peu près; c'est-à-dire, que le fonds de 60000 sera monté à 1000000 livres au bout de 58 ans 8 mois $\frac{1}{2}$, à peu près.

Puisque (*Arith.* 229) *pour extraire, par le moyen des logarithmes, une racine d'un degré proposé, il faut diviser le logarithme de la quantité par l'exposant;* on peut, par le moyen des logarithmes, résoudre facilement en nombres l'équation

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}, \text{ car on en déduit}$$

$$Lq=\left(\frac{1}{n-1}\right)L\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{Lu-La}{n-1}.$$

Si l'on veut appliquer ceci à un exemple, il n'y a qu'à chercher quel devrait être, dans le précédent, l'intérêt pour qu'en 58 ans et $\frac{7}{10}$, le fonds de 60000 livres montât à 1000000 livres. On a ici $a=60000$, $u=1000000$, $n=58,7$: en employant les logarithmes des tables, on trouvera

$$Lq=\frac{6,0000000-4,7781513}{58,7-1}=\frac{1,2218487}{57,7}=0,0211757;$$

ce logarithme répond dans les tables à 1,0500 à très-peu près; et ce dernier nombre réduit en vingtièmes, donne 21, d'où l'on conclura que l'intérêt est à très-peu près $\frac{1}{20}$.

On voit aussi par là comment on peut facilement insérer par le moyen des logarithmes, plusieurs moyens proportionnels géométriques entre deux nombres donnés.

242. L'équation $s=\frac{qu-a}{q-1}$, donnera aussi quatre équations qui serviront à résoudre ce problème général. *Trois de ces quatre choses, la somme, la raison, le premier et le dernier*

terme d'une progression géométrique, étant données, trouver la quatrième. Cela est trop facile à présent, pour nous y arrêter.

Enfin si de l'une des deux équations.................. $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ et $u = aq^{n-1}$, on tire la valeur d'une même quantité a, ou q, ou u, etc., et qu'on la substitue dans l'autre, on aura les autres équations qui peuvent servir à résoudre la question suivante, encore plus générale ; *de ces cinq choses, le premier terme, le dernier, la raison, la somme et le nombre des termes d'une progression géométrique, trois étant données, trouver chacune des deux autres.*

De la sommation des suites récurrentes.

243. On appelle suites *récurrentes*, celles dont un terme quelconque se forme de l'addition d'un certain nombre de termes précédens, multipliés ou divisés par des nombres déterminés, positifs ou négatifs. Par exemple, la suite 2, 3, 19, 101, 543, etc. est une suite récurrente, parce que chaque terme est formé des deux précédens, en multipliant le premier par 2, le second par 5, et ajoutant les deux produits ; 543 est égal à $19 \times 2 + 101 \times 5$; de même 101 est $3 \times 2 + 19 + 5$. On peut sommer ces suites d'une manière analogue à celle que nous avons employée ci-dessus ; il suffira d'en donner un exemple sur les suites récurrentes dont la loi ne dépend que de deux quantités, comme celle que nous venons d'apporter pour exemple.

Soient donc a, b, c, d, e, f, etc. plusieurs termes formés par cette loi, que chacun soit composé des deux précédens, dont le premier est multiplié par un nombre connu m, et le second par un nombre connu p ; on aura donc

$$c = ma + pb,\ d = mb + pc,\ e = mc + pd,\ f = md + pe,\ \text{etc.}$$

Donc en ajoutant cette suite d'équations, on aura

$$c + d + e + f + \text{etc.} = m\,(a + b + c + d) + p\,(b + c + d + e);$$

or le premier membre est la somme de tous les termes, excepté les deux premiers : le multiplicateur de m, dans le second membre, est la somme de tous les termes, excepté les deux derniers ; et enfin le multiplicateur de p, est la somme de tous les termes, excepté le premier et le dernier ; donc en appelant s cette somme, on aura

$$s - a - b = m\,(s - e - f) + p\,(s - a - f),$$

d'où l'on tire $s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$.

qui donnera la somme, lorsqu'on connaîtra les deux premiers termes, les deux derniers, et de plus les quantités m et p. On peut y faire entrer le nombre des termes; il faut, pour cela, chercher l'expression générale d'un terme quelconque, par le moyen des quantités a, b, m, p et du nombre n des termes; mais cette recherche, pour toutes les espèces de séries récurrentes, nous mènerait trop loin.

De la construction géométrique des quantités algébriques.

244. Les lignes, les surfaces et les solides étant des quantités, on peut faire sur chacune de ces trois espèces d'étendue les mêmes opérations qu'on a faites sur les nombres et sur les quantités algébriques. Mais les résultats de ces opérations peuvent être évalués de deux manières principales, ou en nombres, ou en lignes. La première manière supposant que chacune des quantités données est exprimée en nombres, ne peut avoir à présent aucune difficulté : il ne s'agit que de substituer, à la place des lettres, les quantités numériques qu'elles représentent, et de faire les opérations que la disposition des signes et des lettres indique. Quant à la manière d'évaluer en lignes les résultats des solutions que l'Algèbre a fournies, elle est fondée sur la connaissance de ce que signifient certaines expressions fondamentales, auxquelles on rapporte ensuite toutes les autres. Nous allons faire connaître les premières, et nous ferons voir ensuite comment on y rapporte les autres : c'est là ce qu'on appelle *construire* les quantités algébriques, ou les problèmes qui ont conduit à ces quantités.

245. Si l'on avait à construire une quantité telle que $\frac{ab}{c}$, dans laquelle a, b, c marquent des lignes connues, on tirerait (*Fig.* 7) deux lignes indéfinies AZ, AX, faisant entr'elles un angle quelconque. Sur l'une AX de ces lignes, on prendrait une partie AB égale à la ligne qu'on a représentée par c, puis une autre AD égale à l'une ou à l'autre des deux lignes a et b, à a, par exemple; ensuite sur la seconde AZ, on prendrait une partie AC égale à la ligne b. Ayant joint les extrémités B et C de la première et de la troisième, par la

ligne

ligne BC, on mènerait par l'extrémité D de la seconde, la ligne DE parallèle à BC; elle déterminerait sur AZ la partie AE pour la valeur de $\frac{ab}{c}$; car (*Géom.* 102) les parallèles DE et BC donnent cette proportion, $AB : AD :: AC : AE$, c'est-à-dire, $c : a :: b : AE$; donc (*Arith.* 179) $AE = \frac{ab}{c}$. C'est-à-dire, qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes données c, a, b. Et puisque (*Géom.* 120) nous avons donné deux manières de trouver cette quatrième proportionnelle, on peut employer indifféremment l'une ou l'autre pour construire $\frac{ab}{c}$.

On voit donc que si l'on avait à construire $\frac{aa}{e}$, ce cas rentrerait dans le précédent, puisqu'alors la ligne b est égale à a.

Si l'on avait à construire $\frac{ab+bd}{c+d}$, on remarquerait que cette quantité est la même que $\frac{(a+d)\times b}{c+d}$; regardant donc $a+d$ comme une seule ligne, représentée par m, et $c+d$ aussi comme une seule ligne n, on aurait $\frac{mb}{n}$ à construire, ce qui se rapporte au cas précédent.

Que l'on ait $\frac{aa-bb}{c}$, on se rappellera que $aa-bb$ est (25) la même chose que $(a+b)\times(a-b)$; ainsi se représentera $\frac{aa-bb}{c}$, sous cette forme $\frac{(a+b)(a-b)}{c}$, et l'on cherchera une quatrième proportionnelle à c, $a+b$ et $a-b$.

Si la quantité à construire est $\frac{abc}{de}$, on mettra cette quantité sous cette forme $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$; et ayant construit $\frac{ab}{d}$, comme on vient de l'enseigner, on nommera m la ligne qu'aura donnée cette construction; alors $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, devient $\frac{mc}{e}$, qui se construit comme ci-dessus.

On voit donc que pour construire $\frac{a^2b}{c^2}$, on se le représenterait comme $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$; on construirait $\frac{a^2}{c}$, et en ayant représenté la valeur par m, on construirait $\frac{mb}{c}$.

Ainsi tout l'art consiste à décomposer la quantité en portions, dont chacune revienne à la forme $\frac{ab}{c}$ ou $\frac{a^2}{c}$; et quoique cela puisse paraître difficile en quelques occasions, on en vient cependant facilement à bout, en employant les transformations.

Par exemple, si j'avais à construire $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$, je supposerais arbitrairement $b^3=a^2m$, et $c^2=an$; alors $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$ se changerait en $\frac{a^3+a^2m}{a^2+an}$ qui se réduit à $\frac{a^2+am}{a+n}$, ou...... $\frac{(a+m)\times a}{a+n}$, quantité facile à construire (après ce qui a été dit ci-dessus), dès qu'on connaîtra m et n. Or pour connaître m et n, les équations $b^3=a^2m$, et $c^2=an$, donnent... $m=\frac{b^3}{a^2}$ et $n=\frac{c^2}{a}$ qui se construisent par ce qui précède.

Ainsi tant que la quantité sera rationnelle, c'est-à-dire sans radicaux, si le nombre des dimensions du numérateur ne surpasse que d'une unité celui des dimensions du dénominateur, on ramènera toujours sa construction à chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Il arrive quelquefois que les quantités se présentent sous une forme qui semble rendre inutile le secours des transformations : c'est lorsque la quantité n'est pas *homogène*, c'est-à-dire, lorsque chacun des termes du numérateur ou du dénominateur n'est pas composé du même nombre de facteurs; par exemple, lorsque la quantité est telle que $\frac{a^3+b}{c^2+d}$. Mais il faut observer que l'on n'arrive jamais à un pareil résultat que lorsque dans la vue d'introduire des simplifications dans le calcul, on a supposé quelqu'une des quantités égale à l'unité. Par exemple, si dans $\frac{a^3+b^2c}{a^2+c^2}$, je suppose b égal à 1, alors j'aurai $\frac{a^3+c}{a^2+c^2}$. Mais comme on ne peut jamais entreprendre de construire, sans connaître les élémens qu'on emploie pour cette construction, on sait toujours dans chaque cas quelle est cette quantité qu'on a supposée égale à l'unité; on pourra donc toujours la restituer; et il ne peut y avoir d'embarras là-dessus, parce que le nombre des dimensions devant toujours être le même dans chaque terme du numérateur et du dénominateur (quoiqu'il puisse être différent des termes de l'un aux termes de l'autre), on restituera dans chaque terme une puissance de la ligne qu'on a prise pour unité, suffisamment élevée pour compléter le nombre des dimensions; ainsi, si j'avais à construire $\frac{a^3+b+c^2}{a+b^2}$, supposant que d soit la ligne qui a été prise pour unité, j'écrirais $\frac{a^3+bd^2+c^2d}{ad+b^2}$, que je construirais en faisant........ $b^2=dm$, $c^2=dn$ et $a^3=d^2p$, ce qui la changerait en.... $\frac{d^2p+bd^2+d^2n}{ad+dm}$, ou $\frac{dp+bd+nd}{a+m}$, ou $\frac{(p+b+n)d}{a+m}$, quantité facile à construire dès qu'on aura construit les valeurs de m, n et p, savoir $m=\frac{b^2}{d}$, $n=\frac{c^2}{d}$, $p=\frac{a^3}{d^2}$, en se conformant aux règles données ci-dessus.

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que le nombre des facteurs, ou le nombre des dimensions de chaque terme du numérateur, ne surpassait que d'une unité celui des dimensions du dénominateur. Il peut le surpasser de deux et même de trois, mais jamais de plus, à moins que quelque ligne n'ait été supposée égale à l'unité, ou que quelques-uns des facteurs ne représentent des nombres.

246. Lorsque le nombre des dimensions du numérateur de la quantité proposée surpasse celui des dimensions du dénominateur, de deux unités; alors la quantité exprime une surface dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélogramme, et même d'un quarré. Par exemple, si j'avais à construire la quantité $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$, je la considérerais comme $a\times\frac{a^2+ab}{a+c}$; or $\frac{a^2+ab}{a+c}$ se construit aisément par ce qui a été dit ci-dessus, en le considérant comme $a\times\frac{a+b}{a+c}$: supposons donc que m soit la valeur de la ligne qu'aura donnée cette construction; alors $a\times\frac{a^2+ab}{a+c}$ deviendra $a\times m$; or si l'on fait de a la hauteur, et de m la base d'un parallélogramme, on aura $a\times m$ pour la surface de ce parallélogramme: donc réciproquement cette surface représentera $a\times m$ ou $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$.

On ramènera de même à une pareille construction la quantité $\frac{a^3+bc^2+d^3}{a+c}$, en faisant $bc=am$ et $d^2=an$; car alors elle deviendra $\frac{a^3+amc+and}{a+c}$, qui est la même chose que $a\left(\frac{a^2+mc+nd}{a+c}\right)$. Or le facteur $\frac{a^2+mc+nd}{a+c}$ se rapporte aux constructions précédentes, ainsi que les valeurs de m et de n. Ayant trouvé la valeur de ce facteur, si je la représente par p, il ne s'agira plus que de construire $a\times p$, c'est-à-dire, faire un parallélogramme dont la hauteur soit a, et la base p.

247. Enfin si le nombre des dimensions du numérateur surpasse de 3 celui des dimensions du dénominateur, alors la

quantité exprime un solide dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélipipède. Par exemple, si j'avais à construire $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$, je considérerais cette quantité comme étant la même que $ab \times \frac{a^2+ab}{a+c}$; et ayant construit $\frac{a^2+ab}{a+c}$, selon ce qui a été dit ci-dessus, si je représente par m la ligne qu'aura donnée cette construction, la question sera réduite à construire $ab \times m$; or ab représente, ainsi que nous venons de le voir, un parallélogramme; si donc on conçoit un parallélipipède qui ait pour base ce parallélogramme, et qui ait pour hauteur la ligne m, la solidité de ce parallélipipède représentera $ab \times m$, c'est-à-dire $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$.

248. Ce que nous venons de dire suffit pour construire toute quantité rationnelle. Voyons maintenant les quantités radicales du second degré. Pour construire $\sqrt{ab}$, il faut (*Fig.* 8) tirer une ligne indéfinie AB, sur laquelle on prendra de suite la partie AC, égale à la ligne a, et la partie CB, égale à la ligne b : sur la totalité AB, comme diamètre, on décrira un demi-cercle qui coupe en D la perpendiculaire CD élevée sur AB au point C; alors CD sera la valeur de $\sqrt{ab}$, c'est-à-dire (*Géom.* 126) que pour avoir la valeur de $\sqrt{ab}$, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les deux quantités représentées par a et b; en effet, on sait (*Géom.* 125) que $AC : CD :: CD : CB$, ou $a : CD :: CD : b$; donc, en multipliant les extrêmes et les moyens, on a $\overline{CD}^2 = ab$, et par conséquent $CD = \sqrt{ab}$.

On voit par là comment on doit s'y prendre pour transformer en un quarré, une surface quelconque : s'il s'agit d'un parallélogramme dont a soit la hauteur et b la base, en nommant x le côté du quarré cherché, on aura $x^2 = ab$, et par conséquent $x = \sqrt{ab}$, on prendra donc une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur. S'il s'agit d'un triangle que l'on sait (*Géom.* 140) être la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, on prendra une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur et la moitié de la base. S'il s'agit d'un cercle, on prendra une moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence; et s'il s'agit d'une figure rectiligne quelconque, comme on sait (*Géom.* 143) qu'elle est réductible en un triangle, on la réduira aisément en un quarré, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur de ce triangle. Mais si la figure n'était point construite, et que l'on eût seulement l'expression algébrique de sa surface, par le moyen de quelques-unes de ses dimensions, alors on construirait comme pour les quantités que nous allons parcourir.

Si l'on avait $\sqrt{3ab+b^2}$, on considérerait cette quantité comme étant la même que $\sqrt{(3a+b)\times b}$; on prendrait donc une moyenne proportionnelle entre $3a+b$ et b. Pareillement, si l'on a $\sqrt{aa-bb}$, on considérera cette quantité comme étant la même que $\sqrt{(a+b)\times(a-b)}$ (25); ainsi l'on prendra une moyenne proportionnelle entre $a+b$ et $a-b$. Si l'on a $\sqrt{a^2+bc}$, on fera $bc=am$, et alors on aura $\sqrt{a^2+am}$ ou $\sqrt{(a+m)\times a}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre $a+m$ et a, après avoir construit la valeur de $m=\frac{bc}{a}$, en suivant les règles données ci-dessus.

Pour construire $\sqrt{a^2+b^2}$, on pourrait aussi faire $b^2=am$ et construire $\sqrt{a^2+am}$ selon ce qui vient d'être dit. Mais la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) nous fournit un moyen plus simple; le voici : Tirez une ligne AB (*Fig.* 9) égale à la ligne a; à son extrémité A, élevez une perpendiculaire AC égale à la ligne b; alors si vous tirez BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{a^2+b^2}$: en effet, puisque le triangle CAB est rectangle, on a (*Géom.* 164)................
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=a^2+b^2$; donc $BC=\sqrt{a^2+b^2}$.

On peut aussi, par le moyen du triangle rectangle, construire $\sqrt{a^2-b^2}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus. Pour cet effet, on tirera (*Fig.* 11) une ligne AB égale à a, et ayant décrit sur AB, comme diamètre, le demi-cercle ACB, on tirera du point A une corde $AC=b$; alors si l'on mène BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{a^2-b^2}$; car le triangle ABC étant rectangle (*Géom.* 165), on a $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$; donc $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=a^2-b^2$; donc $BC=\sqrt{a^2-b^2}$.

On peut donc construire aussi $\sqrt{a^2+bc}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus, en s'y prenant comme il suit : Faire $bc=m^2$, et construire $\sqrt{a^2+m^2}$, d'après ce qui vient d'être dit; et pour cet effet, on commencera par déterminer m en prenant une moyenne proportionnelle entre b et c, ainsi que l'indique l'équation $bc=m^2$, qui donne $m=\sqrt{bc}$.

S'il y avait plus de deux termes sous le radical, on ramènerait toujours la construction à quelques-unes des méthodes précédentes, par le moyen de transformations. Par exemple, si j'avais $\sqrt{a^2+bc+ef}$, je ferais $bc=am$, $ef=an$, et j'aurais $\sqrt{a^2+am+an}$, ou $\sqrt{(a+m+n)\times a}$, que je construirais en prenant une moyenne proportionnelle entre a et $a+m+n$, après avoir construit les valeurs de m et de n, savoir..... $m=\frac{bc}{a}$, $n=\frac{ef}{a}$. Je pourrais encore faire $bc=m^2$, $ef=n^2$, et alors j'aurais à construire $\sqrt{a^2+m^2+n^2}$. Or lorsque le radical renferme ainsi une suite de quarrés positifs, par exemple $\sqrt{a^2+m^2+n^2+p^2+\text{etc.}}$, on fera $\sqrt{a^2+m^2}=h$, ... $\sqrt{h^2+n^2}=i$, $\sqrt{i^2+p^2}=k$, et ainsi de suite; et comme chacune de ces quantités se trouve déterminée par la précédente, la dernière donnera la valeur de.............. $\sqrt{a^2+m^2+n^2+p^2+\text{etc.}}$ Pour construire ces quantités de la manière la plus simple, on regardera successivement chaque hypoténuse comme un côté; par exemple (*Fig.* 10), ayant pris $AB=a$, élevé la perpendiculaire $AC=m$, et tiré BC

qui sera h, on élevera au point C, sur BC, la perpendiculaire $CD = n$, et ayant tiré BD qui sera i, à son extrémité D, on élevera sur BD la perpendiculaire $DE = p$, et BE sera $k = \sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$.

Si quelques-uns de ces quarrés sont négatifs, alors on réunira à ce que nous venons de dire, ce qui a été dit pour construire $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Enfin, si l'on avait à construire une quantité de cette forme $\frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{d+e}}$, on la changerait en $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, en multipliant haut et bas par $\sqrt{d+e}$; alors cherchant une moyenne proportionnelle entre $b+c$ et $d+e$ et la nommant m, on aurait à construire $\frac{am}{d+e}$, ce qui est facile.

Au reste, il s'agit ici de règles générales; on peut souvent construire d'une manière beaucoup plus simple, en partant toujours des mêmes principes; mais ces simplifications se tirent de quelques considérations particulières et propres à chaque question, et ne peuvent, par conséquent, être exposées qu'à mesure que les questions en amènent l'occasion. Nous remarquerons seulement, en terminant cette matière, que quoique la construction des quantités radicales, dont il vient d'être question, se réduise à prendre des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, et à construire des triangles rectangles; cependant on peut quelquefois avoir des constructions plus ou moins simples ou élégantes, selon la méthode qu'on emploie pour trouver ces moyens proportionnels; c'est pourquoi nous enseignerons ici deux autres manières de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. La première consiste à décrire sur la plus grande AB des deux lignes données (*Fig.* 11) un demi-cercle ACB, et ayant pris une partie AD égale à la seconde, d'élever la perpendiculaire CD et de tirer la corde AC qui sera moyenne proportionnelle entre AB et AD; car en tirant CB, le triangle ACB (*Géom.* 65) est rectangle, et par conséquent (*Géom.* 112) AC est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse AB et le segment AD. La seconde manière consiste (*Fig.* 12) à tirer une ligne AB égale à la plus grande ligne donnée, et ayant pris sur elle une partie AC égale à la plus petite, décrire sur le reste BC un demi-cercle CDB, auquel on mène la tangente AD qui (*Géom.* 129) est moyenne proportionnelle entre AB et AC.

On voit donc que les quantités rationnelles peuvent toujours être construites par le moyen des lignes droites, et que les quantités radicales du second degré peuvent être construites par le cercle et la ligne droite réunis. Quant aux quantités radicales de degrés supérieurs, leur construction dépend de la combinaison de différentes lignes courbes; nous en parlerons par la suite. Nous allons nous occuper, pour le présent, des questions dont la solution dépend de quantités ou rationnelles, ou radicales du second degré.

Diverses Questions de Géométrie, et Réflexions tant sur la manière de les mettre en équation, que sur les diverses solutions que donnent ces équations.

249. Le principe que nous avons donné (67) pour mettre les questions en équation, s'applique également aux questions de Géométrie. Il faut de même représenter ce que l'on cherche par un signe particulier, et raisonner ensuite à l'aide de ce signe et de ceux qui représentent les autres quantités, comme si tout était connu et que l'on voulût vérifier. Cette méthode, ou manière de procéder, est ce qu'on appelle l'*Analyse*. Pour être en état de faire les raisonnemens qu'exige cette vérification, il faut connaître au moins quelques propriétés de la quantité que l'on cherche. Il est donc clair que, pour être en état de mettre les questions de Géométrie en équation, il faut avoir présentes à l'esprit les connaissances que nous avons données dans la seconde partie de ce Cours. Dans la plupart des questions numériques, ou de la nature de celles que nous avons parcourues dans la première Section, il suffit le plus souvent, pour appliquer le principe, de traduire en langage

algébrique l'énoncé de la question; mais dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, il faut souvent employer encore d'autres moyens : nous tâcherons de les faire connaître à mesure que nous avancerons; mais ce que nous pouvons dire en général, pour le présent, c'est qu'il n'est pas toujours nécessaire, pour vérifier une quantité, d'examiner si elle satisfait immédiatement aux conditions de la question : cette vérification se fait souvent avec plus de facilité, en examinant si cette quantité a certaines propriétés qui sont essentiellement liées avec les conditions de la question. Après cette réflexion, dont nous aurons occasion de faire usage, nous passons aux exemples qui, dans cette matière, sont toujours plus faciles à saisir que les préceptes généraux.

250. Proposons-nous donc pour première question, de *décrire un quarré* ABCD (Fig. 13) *dans un triangle donné*, EHI. Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, etc. Avec un peu d'attention on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF; ainsi l'équation se présente tout naturellement; il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB et celle de GF, et ensuite les égaler. Nommons donc a la hauteur connue EF; b la base connue HI, et x la ligne inconnue GF; alors EG vaudra $a-x$. Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 115) avoir $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$, c'est-à-dire, $EF : EG :: HI : AB$, ou $a : a-x :: b : AB$; donc (*Arith.* 179) $AB=\frac{ab-bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\frac{ab-bx}{a}=x$; d'où l'on tire $x=\frac{ab}{a+b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (245), trouver une quatrième proportionnelle à $a+b$, b et a, ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a+b$, c'est-à-dire, égale à $EF+HI$, et l'on tirera EO; puis ayant pris FM égale à $HI=b$, on mènera, parallélement à EO, la ligne MG qui, par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x : car les triangles semblables EFO, GFM donnent $FO:FM::FE:FG$, ou $a+b:b::a:FG$ qui vaudra donc $\frac{ab}{a+b}$.

251. Proposons-nous pour seconde question celle-ci... *connaissant la longueur de la ligne* BC (Fig. 14) *et les angles* B *et* C *que forment avec elle les deux lignes* BA *et* CA, *déterminer la hauteur* AD *à laquelle ces deux dernières lignes se rencontrent.* On fait entrer les angles dans le calcul algébrique à l'aide des mêmes lignes qu'on emploie dans la Trigonométrie, c'est-à-dire, à l'aide des sinus, tangentes, etc. Ainsi quand on dit qu'on donne un angle, l'angle C, par exemple, on entend que l'on donne la valeur de son sinus ou de sa tangente; cela posé, nommons $BC=a$, $AD=y$. Dans le triangle rectangle ADC, nous aurons (*Géom.* 296) $CD:DA$ comme le rayon est à la tangente de l'angle ACD; ou....... $CD:y::r:m$, en appellant r le rayon et m la tangente de l'angle ACD; donc (*Arith.* 179) $CD=\frac{ry}{m}$. Par un raisonnement semblable, on trouvera en nommant n la tangente de ABD, $BD:y::r:n$, donc $BD=\frac{ry}{n}$; or $BD+DC=BC=a$; donc $\frac{ry}{m}+\frac{ry}{n}=a$. D'où l'on tire $y=\frac{amn}{rn+rm}$.

On peut rendre cette expression plus simple, en introduisant au lieu des tangentes m et n des deux angles C et B, leurs cotangentes que nous nommerons p et q. Pour cet effet, il faut se rappeler (*Géom.* 280) que $tang:r::r:cot$; en vertu de cette proposition, on aura $m:r::r:p$ et $n:r::r:q$; d'où l'on tire $m=\frac{r^2}{p}$ et $n=\frac{r^2}{q}$; substituant, au lieu de m et n, ces valeurs dans celle de y, on trouvera $y=\frac{ar}{p+q}$.

252. On voit par là, que lorsque parmi les quantités qu'on peut regarder comme données, celles qu'on a employées ne conduisent pas à un résultat aussi simple qu'on le desire, il n'est pas nécessaire de recommencer un nouveau calcul pour s'assurer si, en employant les autres données, on ne pourrait pas arriver à un résultat plus simple. Il suffit d'exprimer par des équations les rapports des données qu'on a employées d'abord avec celles qu'on veut introduire; c'est ainsi que nous venons d'exprimer m et n par les équations $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$;

253. Nous choisirons pour troisième exemple une question qui nous donne lieu tout à la fois de faire voir la manière de mettre en équation les questions de Géométrie, et comment, par différentes préparations de ces équations, on peut découvrir de nouvelles propositions. *Connaissant les trois côtés d'un triangle* ABC (Fig. 15), *trouver les segmens* AD *et* DC *formés par la perpendiculaire* BD, *et la perpendiculaire* BD *elle-même.* Si je connaissais chacune de ces lignes, voici comme je les vérifierais. J'ajouterais le quarré de BD avec le quarré de CD, et je verrais si la somme est égale au quarré de BC : ce qui doit être, puisque le triangle BCD est rectangle (*Géom.* 164). J'ajouterais de même le quarré de AD au quarré de BD, et je verrais si la somme est égale au quarré de AB. Imitons donc ce procédé, et pour cet effet soit $BD = y$; $CD = x$; $BC = a$; $AB = b$; $AC = c$; alors AD qui est $= AC - CD$ sera $= c - x$. Nous aurons donc

$$xx + yy = aa, \text{ et } cc - 2cx + xx + yy = bb.$$

Comme xx et yy n'ont, dans chaque équation, d'autre coefficient que l'unité, je retranche la seconde équation de la première, ce qui me donne

$$(1) \ldots 2cx - c^2 = a^2 - b^2; \text{ d'où } x = \tfrac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \tfrac{1}{2}c.$$

Or, sous cette forme, on voit, d'après ce qui a été dit (245), que pour avoir x il faut chercher une quatrième proportionnelle à c, $a+b$, et $a-b$; et l'ayant trouvée, en prendre la moitié que l'on ajoutera avec $\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, avec la moitié du côté AC; ce qui est absolument conforme à ce que nous avons dit (*Géom.* 383). Mais on peut tirer plusieurs autres conclusions de ces mêmes équations; nous allons en exposer quelques-unes pour accoutumer les commençans à lire dans une équation ce qu'elle renferme.

254. 1°. L'équation (1) est la même chose que........ $c(2x-c)=(a+b)(a-b)$. Or puisque le produit des deux premiers facteurs est égal au produit des deux derniers, on peut (*) considérer les deux premiers comme les extrêmes, et les deux derniers comme les moyens d'une proportion, et l'on aura par conséquent

$$c : a+b :: a-b : 2x-c; \text{ or } 2x-c=x-c+x;$$

donc en remettant à la place de ces lettres les signes qu'elles représentent, on aura

$$AC : BC+AB :: BC-AB : CD-AD,$$

ce qui est précisément ce que nous avons démontré (*Géom.* 302).

255. 2°. Si du point C, comme centre, et d'un rayon égal à BC on décrit l'arc BO, et si l'on tire la corde BO, on aura

$$\overline{BD}^2+\overline{DO}^2=\overline{BO}^2; \text{ or } DO=CO-CD=BC-CD=a-x;$$

$$\text{donc } \overline{BO}^2=yy+aa-2ax+xx;$$

mais nous avons trouvé ci-dessus,

$$yy+xx=aa; \text{ donc } \overline{BO}^2=2aa-2ax=2a(a-x).$$

(*) Dorénavant, lorsque nous aurons ainsi partagé chaque membre d'une équation en deux facteurs, nous conclurons tout de suite la proportion. Il suffit d'être averti, une fois pour toutes, que dès que deux produits sont égaux, les facteurs de l'un peuvent être considérés comme les extrêmes d'une proportion dont les facteurs de l'autre seraient les moyens. (*Arith.* 180.)

Mettant donc pour x, sa valeur $\frac{aa-bb+cc}{2c}$, on aura

$$\overline{BO}^2=2a\left(a+\frac{b^2-a^2-c^2}{2c}\right)=\frac{a}{c}\left\{b^2-(a-c)^2\right\};$$

or (25) en considérant $a-c$ comme une seule quantité, on a

$$b^2-(a-c)^2=(b+a-c)\ (b-a+c);$$

$$\text{donc } \overline{BO}^2=\frac{a}{c}(b+a-c)\ (b-a+c)$$

qu'on peut mettre sous cette autre forme

$$\overline{BO}^2=\frac{a}{c}(a+b+c-2c)\ (a+b+c-2a;$$

donc si on nomme $2s$ la somme des trois côtés, on aura

$$\overline{BO}^2=\frac{a}{c}(2s-2c)\ (2s-2a)=\frac{4a}{c}(s-c)\ (s-a).$$

Or si du point C, on abaisse sur OB la perpendiculaire CI, on aura (*Géom.* 295) dans le triangle rectangle CIO, cette proportion

$$CO : OI :: R : \sin OCI, \text{ ou } a : \tfrac{1}{2}BO : R :: \sin OCI;$$

$$\text{donc } BO=\frac{2a\sin OCI}{R}; \text{ et } \overline{BO}^2=\frac{4a^2\sin^2 OCI}{R^2};$$

égalant ces deux valeurs de BO^2, on aura

$$\frac{4a^2}{R^2}\sin^2 OCI=\frac{4a}{c}(s-c)\ (s-a),$$

d'où l'on tire cette proportion

$$ac : (s-c)\ (s-a) :: R^2 : \sin^2 OCI$$

qui est la règle que nous avons donnée (*Géom.* 304) pour trouver les angles d'un triangle par le moyen des trois côtés, mais dont nous avons renvoyé la démonstration à cette troisième partie. En effet, ac est le produit des deux côtés qui comprennent l'angle BCA; $s-c$ et $s-a$ sont les deux restes que l'on a en retranchant ces deux mêmes côtés successivement de la demi-somme, R est le rayon et OCI est la moitié de l'angle BCA, puisque CI est une perpendiculaire menée du centre C sur la corde BO.

256. 3°. L'équation $yy+xx=aa$ donne

$$yy=aa-xx=(a+x)(a-x);$$

donc en mettant pour x, sa valeur, on aura

$$yy=\left(a+\frac{aa-bb+cc}{2c}\right)\left(a+\frac{bb-aa-cc}{2c}\right)$$

$$=\left[\frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\right]\times\left[\frac{b^2-(c-a)^2}{2c}\right]$$

$$=\left[\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right]\times\left[\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2c}\right].$$

Nommant donc $2s$, la somme des trois côtés a, b, c, on aura

$$4c^2y^2=16s(s-a)(s-b)(s-c). \text{ D'où}$$

$$\tfrac{1}{2}cy=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Mais $\frac{1}{2}cy$, mesure la surface du triangle ABC; donc *pour avoir la surface d'un triangle au moyen des trois côtés, il faut de la demi-somme retrancher successivement chacun des trois côtés; multiplier les trois restes entre eux et par la demi-somme, et enfin tirer la racine quarrée de ce produit.*

257. 4°. L'équation $2cx-cc=aa-bb$, donne........ $bb=aa+cc-2cx$; mais si la perpendiculaire tombait hors du triangle, on aurait, en conservant les mêmes dénominations (*Fig.* 16),

$$yy+xx=aa, \text{ et } yy+cc+2cx+xx=bb,$$

parce que AD qui était $c-x$, est ici $c+x$. Donc retranchant la première équation de la seconde, on aurait

$$cc+2cx=bb-aa, \text{ ou } c(c+2x)=(b+a)\times(b-a),$$

$$\text{qui donne } c:b+a::b-a:c+2x;$$

Or $c+2x$ étant $x+c+x$ est $CD+AD$; donc

$$AC:(AB+BC)::(AB-BC):(CD+AD),$$

ce qui est la seconde partie de la proposition que nous avons démontrée (*Géom.* 302).

258. 5°. La même équation $cc+2cx=bb-aa$, donne $bb=aa+cc+2cx$; comparant donc à l'équation......... $bb=aa+cc-2cx$ qui convient à la figure 15, on voit que le quarré bb du côté AB, opposé à l'angle aigu C, vaut moins que la somme $aa+cc$ des quarrés des deux autres côtés, puisqu'il vaut cette somme diminuée de $2cx$. Au contraire, le quarré bb du côté AB, opposé à l'angle obtus (*Fig.* 16), vaut $aa+cc+2cx$, c'est-à-dire, plus que la somme des quarrés des deux autres côtés. On peut donc, par ces deux remarques, lorsqu'on a à calculer les angles d'un triangle par le moyen des côtés, reconnaître si l'angle que l'on cherche doit être aigu ou obtus.

259. 6°. Les deux équations

$$b^2=a^2+c^2-2cx,\ b^2=a^2+c^2+2cx$$

confirment ce que nous avons dit sur les quantités négatives. Car on voit que selon que la perpendiculaire BD (*Fig.* 15 et 16) tombe dans le triangle ou au-dehors, le segment CD est de différens côtés. Or dans ces équations le terme $2cx$ a en effet des signes contraires. Donc réciproquement, quels que soient les calculs que l'on aura faits pour l'un de ces triangles, on aura ceux qui conviennent pour les cas analogues du second, en donnant des signes contraires aux parties qui seront situées de différens côtés, sur une même ligne : or dans ce que nous avons dit ci-dessus, tant sur le calcul de l'un des angles, que sur celui de la surface, le segment CD n'y entre plus; donc ces deux proportions appartiennent indifféremment à toute espèce de triangle rectiligne. On pourrait tirer encore de ces mêmes équations, plusieurs autres propositions; mais nous avons d'autres objets à envisager.

260.

260. Quoiqu'en général on ait d'autant plus de ressources et de facilité pour mettre les questions de Géométrie en équation, que l'on connaît un plus grand nombre de propriétés des lignes, cependant, comme l'Algèbre elle-même fournit les moyens de trouver ces propriétés, le nombre des propositions vraiment nécessaires, est assez limité. Ces deux propositions, *que les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels*, et que *dans un triangle rectangle, la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit est égale au quarré de l'hypoténuse*, ces deux propositions, dis-je, sont la base de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Mais selon la nature des questions, il peut y avoir bien des manières de faire usage de ces deux propositions. Cet usage n'était point difficile à appercevoir dans la question que nous venons de traiter. Mais dans les conséquences que nous avons tirées de la résolution pour le calcul de l'angle, par le moyen des trois côtés, l'idée de décrire l'arc BO (*Fig.* 15) pour calculer la corde BO, et par sa moitié OI, calculer le sinus de l'angle OCI, cette idée ne se présente pas d'abord. Il en est de même dans beaucoup d'autres questions. Tantôt ce sont des lignes qu'il faut prolonger jusqu'à ce qu'elles en rencontrent d'autres; tantôt des lignes qu'il faut mener parallèles à quelqu'autre, ou faisant un angle donné avec quelqu'autre. En un mot, l'application de l'Algèbre à la Géométrie ainsi qu'à toute autre matière, exige, de la part de l'*Analyste*, un certain discernement dans le choix et l'emploi des moyens. Mais comme ce discernement s'acquiert en grande partie par l'usage, nous allons appliquer ces observations à divers exemples.

261. Proposons-nous d'abord cette question : *D'un point* A (*Fig.* 17) *dont la situation est connue à l'égard des deux lignes* HD *et* DI *qui font entr'elles un angle connu* HDI, *tirer une ligne droite* AEG *de manière que le triangle intercepté* EDG *ait une surface donnée, c'est-à-dire, une surface égale à celle d'un quarré connu* c^2. Du point A menons la ligne AB parallèle à DH, et la ligne AC perpendiculaire

sur DG prolongée : du point E où la ligne AEG doit couper DH, concevons la perpendiculaire EF. Si nous connaissions EF et DG, en les multipliant l'une par l'autre, et prenant la moitié du produit, nous aurions la surface du triangle EDG, laquelle devrait être égale à cc. Supposons donc $DG = x$; à l'égard de EF, voyons si nous ne pouvons pas en déterminer la valeur, tant par le moyen de x, que de ce qu'il y a de connu dans la question. Puisqu'on suppose que la situation du point A est connue, on doit regarder comme connue la distance BD à laquelle passe la parallèle AB, et la distance AC du point A à la ligne DG prolongée. Nommons donc BD, a, et AC, b; alors les triangles semblables ABG et EDG nous donnent $BG : DG :: AG : EG$; et les triangles semblables ACG, EFG nous donnent

$$AG : EG :: AC : EF; \text{ donc } BG : DG :: AC : EF;$$

c'est-à-dire, $\quad a + x : x :: b : EF$; donc $EF = \dfrac{bx}{a+x}$;

puis donc que la surface du triangle EDG doit être égale au quarré cc, il faut que

$$EF \times \frac{DG}{2} \text{ ou } \frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc.$$

On en déduit $\qquad x = \dfrac{c^2}{b} \pm \sqrt{\dfrac{c^4}{b^2} + \dfrac{2ac^2}{b}}$.

De ces deux valeurs de x, celle qui a le signe — est inutile à la question présente. Pour construire la première, je la mets sous la forme suivante :

$$x = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}};$$

cela posé, ayant tiré une ligne indéfinie PQ (*Fig.* 18), sur un point quelconque C de cette ligne, j'élève la perpendiculaire $AC = b$, et je prends sur CA et CP les lignes CO, CM égales chacune au côté c du quarré donné; ayant tiré AM, je lui mène par le point O la parallèle ON qui me détermine CN pour la valeur de $\frac{cc}{b}$, puisque les triangles semblables ACM, OCN donnent $AC : OC :: CM : CN$, c'est-à-dire, $b : c :: c : CN$; donc $CN = \frac{cc}{b}$; cela étant, la valeur de x devient donc

$$x = CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN};$$

or $\sqrt{(CN + 2a) \times CN}$ exprime (248) une moyenne proportionnelle entre CN et $CN + 2a$; il ne s'agit donc plus que de déterminer cette moyenne proportionnelle et de l'ajouter à CN. Pour cet effet, sur NC prolongée, je prends $CQ = 2a$, et sur la totalité NQ je décris le demi-cercle NVQ rencontré en V par CA : je porte la corde NV de N en P, et j'ai CP pour la valeur de x; car NV (*Géom.* 112) est moyenne proportionnelle entre NC et NQ, c'est-à-dire, entre CN et $CN + 2a$; donc NV ou $PN = \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$; donc

$$CP = CN + PN = CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN} = x;$$

on portera donc CP de D en G (*Fig.* 17) et l'on aura le point G par lequel et par le point A tirant AG, on aura le triangle EDG égal au quarré cc.

262. Si l'on veut savoir ce que signifie la seconde valeur de x, on remarquera que rien, dans la question, ne déterminant s'il s'agit plutôt de l'angle EDG (*Fig.* 17) que de son égal $E'DG'$, formé par le prolongement des lignes GD, ED, et les quantités données étant les mêmes pour celui-ci que pour l'autre, cette seconde solution doit être celle de la question où il s'agirait de faire dans l'angle $E'DG'$ la même chose que nous avons faite dans l'angle EDG. En effet, en nommant DG', x, et conservant les autres dénominations, les triangles ABG', $E'DG'$, semblables à cause des parallèles AB et DE', donnent $BG' : DG' :: AG' : G'E'$, et en abaissant la perpendiculaire $E'F'$, les triangles semblables ACG', $E'F'G'$ donnent..........

$AG' : G'E' :: AC : F'E'$; donc $BG' : DG' :: AC : F'E'$, c'est-à-dire, $a - x : x :: b : F'E'$; donc $F'E' = \frac{bx}{a-x}$; puis donc que la surface du triangle $G'E'D$ doit être égale au quarré cc, il faut que

$$\frac{bx}{a-x} \times \tfrac{1}{2} x = c^2. \text{ D'où } x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{b^2} + \frac{2acc}{b}},$$

valeurs de x qui sont précisément les mêmes que celles du cas précédent, avec cette différence qu'elles ont des signes contraires, ainsi que cela doit être, puisqu'ici la quantité x est prise du côté opposé à celui où on la prenait d'abord : nouvelle confirmation de ce que nous avons déjà dit plus d'une fois, que les valeurs négatives devaient être prises dans un sens opposé à celui où l'on a pris les positives.

La construction que nous avons donnée pour le cas précédent, sert aussi pour celui-ci, avec ce seul changement, de porter (*Fig.* 18) NV de N en K vers Q ; alors la valeur de x qui, dans le cas précédent, était CP, sera CK dans celui-ci. En effet, la valeur de x, qui convient au cas présent, est

$$x = -\frac{c^2}{b} + \sqrt{\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}} = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \times \frac{cc}{b}},$$

c'est-à-dire, $$x = -CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN};$$

puis donc que $$NV = \sqrt{(CN + 2a) \times CN},$$ on a

$$x = -CN + NV = -CN + NK = CK.$$

Ainsi on portera CK de D en G' (*Fig.* 17), et l'on aura le point G' par lequel et par le point A tirant $AG'E'$, on aura le triangle $G'DE'$ égal au quarré cc, c'est-à-dire, la seconde solution de la question.

263. Nous avons supposé que le point A (*Fig.* 17) était au-dessus de la ligne BG; s'il était au-dessous (*Fig.* 19), la

quantité b, ou la ligne AC serait négative, et les deux premières valeurs de x seraient par conséquent

$$x=-\frac{cc}{b}\pm\sqrt{\frac{c^4}{bb}-\frac{2acc}{b}} \text{ ou}$$

$$x=-\frac{cc}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{cc}{b}-2a\right)\times\frac{cc}{b}},$$

où l'on voit que le problème n'est possible alors, que lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, puisque, lorsqu'il est plus grand, la quantité, sous le radical, est négative, et par conséquent (98) les valeurs de x sont imaginaires ou absurdes. Lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, les deux valeurs de x sont négatives, c'est-à-dire, qu'alors le problème est impossible à l'égard de l'angle HDI; mais il a deux solutions à l'égard de son égal $E'DG'$. Pour avoir ces deux solutions, il faut construire les deux valeurs

$$x=-\frac{cc}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{cc}{b}-2a\right)\times\frac{cc}{b}},$$

ce que l'on fera de la manière suivante. Ayant déterminé, comme ci-dessus, la valeur CN de $\frac{cc}{b}$ (*Fig.* 20), on prendra $NQ=2a$, et ayant décrit sur NQ, comme diamètre, le demi-cercle NVQ, on lui mènera la tangente CV; on portera ensuite CV de C en P vers N et de C en K à l'opposé; alors NP et NK seront les deux valeurs de x, on les portera (*Fig.* 19) de D en G et de D en G', et tirant par le point A et par les points G et G' les deux droites EG, $E'G'$, chacun des deux triangles EDG, $E'DG'$ sera égal au quarré cc. Quant à ce que nous disons que NP et NK (*Fig.* 20) seront les deux valeurs de x, cela se tire de ce que (*Géom.* 129) CV étant moyenne proportionnelle entre CN et CQ, est......

$=\sqrt{CQ\times CN}$, ou (en mettant pour ces lignes leurs valeurs),

$$CV \text{ ou } CP \text{ ou } CK=\sqrt{\left(\frac{cc}{b}-2a\right)\frac{cc}{b}}, \text{ donc}$$

$$NP=CN-CP=\frac{cc}{b}-\sqrt{\left(\frac{cc}{b}-2a\right)\frac{cc}{b}}, \text{ et}$$

$$NK=CN+CK=\frac{cc}{b}+\sqrt{\left(\frac{cc}{b}-2a\right)\frac{cc}{b}};$$

or ces deux quantités sont les mêmes que les valeurs de x, en changeant les signes ; donc ces mêmes quantités portées de D vers G (*Fig.* 19) seront les valeurs de x.

264. Si le point A (*Fig.* 21) était dans l'angle même HDI, alors BD tombant du côté opposé à celui où il tombait d'abord, a sera négatif, et les deux valeurs primitives de x deviendraient

$$x=\frac{cc}{b}\pm\sqrt{\frac{c^4}{bb}-\frac{2acc}{b}},$$

qui sont les mêmes (en changeant les signes) que celles que nous venons de construire. On voit donc qu'alors on doit construire, comme on l'a fait (*Fig.* 20), mais porter les valeurs NP et NK de x, les porter, dis-je (*Fig.* 21), de D vers I; et l'on aura les deux triangles DEG, $DE'G'$ qui satisferont de même à la question.

265. Enfin le point A (*Fig.* 22) pourrait être situé au-dessous de BD, mais dans l'angle $E'DI$. Alors a et b seraient tous deux négatifs, ce qui donnerait

$$x=-\frac{cc}{b}\pm\sqrt{\frac{c^4}{bb}+\frac{2acc}{b}},$$

qui sont précisément de signes contraires aux premières valeurs que nous avons trouvées pour x. On construira donc, comme on l'a fait (*Fig.* 18). Alors CK sera la valeur positive de x, et CP sa valeur négative; on portera la première (*Fig.* 22) de D en I vers I, et l'autre à l'opposite, c'est-à-dire, de D en G'.

Nous avons insisté sur les différens cas de cette solution; pour faire voir comment une seule équation les comprend tous; comment on les déduit par le seul changement des signes; comment les positions contraires des lignes sont désignées par la contrariété des signes, et réciproquement. Il nous reste encore à indiquer quelques usages de cette même solution.

266. *D'un point donné* A (Fig. 23) *hors d'un triangle ou dans un triangle donné* DHI, *mener une ligne* AF *qui divise ce triangle en deux parties* DEF, EFIH *qui soient entre elles dans le rapport connu de* m *à* n. La solution de cette question est comprise dans la précédente; car puisque le triangle DHI est donné, et que l'on sait quelle partie le triangle DEF doit être du triangle DHI, si l'on cherche le quatrième de cette proportion $m+n : m ::$ la surface du triangle DHI est à un quatrième terme; ce quatrième terme sera la surface que doit avoir le triangle DEF. Or on peut toujours trouver un quarré cc égal à cette surface (248); la question est donc réduite à mener par le point A, une ligne EAF qui comprenne avec les deux côtés DH, DI, un triangle DEF égal au quarré cc, c'est-à-dire, est réduite à la question précédente.

267. On voit encore qu'on ramènerait à la même question, celle de partager une figure rectiligne quelconque (*Fig.* 24) par une ligne tirée d'un point quelconque A, en deux parties $BCFE$, $EFDHK$, qui fussent entre elles dans un rapport donné. En effet, la figure $BCDHK$ étant supposée connue, on connaît tous ses angles et tous ses côtés; on connaîtra donc facilement le triangle BLC formé par les deux côtés KB et DC prolongés, puisqu'on connaît dans ce triangle le côté BC et les deux angles LBC, LCB, supplémens des angles connus CBK et BCD; ainsi on doit regarder la surface du triangle LBC comme connue; et puisque celle de $EBCF$ doit

être une portion déterminée de la surface totale, elle est donc connue aussi ; la question est donc réduite à mener une ligne *EAF* qui forme, dans l'angle *KLD*, un triangle égal à un quarré connu. Enfin, on voit par là comment on partagerait cette figure en un plus grand nombre de parties dont les rapports seraient donnés.

268. Une remarque qu'il est encore à propos de faire, et que nous allons confirmer par d'autres exemples, c'est que, si quelques-unes des quantités données qui entrent dans l'équation qui sert à résoudre une question, sont telles qu'en changeant leurs signes en signes contraires, l'équation ne change point ; ou si un changement de position dans la ligne ou les lignes cherchées de la figure, n'entraîne aucun changement de position ni de grandeur dans les lignes données, alors, parmi les différentes valeurs de x, lorsqu'il y en a plusieurs dans l'équation, on en trouvera toujours une qui sera la solution propre pour le cas qu'indique ce changement. Par exemple, dans la question que nous venons de traiter, on a vu que l'une des valeurs de x donnait directement la solution pour le cas où la ligne *AEG* (*Fig.* 17) devait traverser l'angle *HDI*, ainsi qu'on l'a supposé en faisant le calcul ; mais on a vu en même temps que la seconde valeur de x donnait la solution pour le cas où il s'agirait, non pas de l'angle *HDI*, mais de son opposé au sommet. La raison en est qu'ayant, dans chaque cas, les mêmes quantités données à employer, et les mêmes raisonnemens à faire, on ne peut être conduit qu'à la même équation ; donc la même équation doit donner les deux solutions. Nous allons en voir encore des exemples, en parcourant d'autres questions.

269. Proposons-nous cette question : *D'un point donné* A *hors d'un cercle* BDC (Fig. 25) *tirer une ligne droite* AE, *de manière que sa partie* DE *interceptée dans le cercle soit égale à une ligne donnée.* Puisque le cercle *BDEC* est donné, son diamètre est censé connu, et puisque le point *A* est donné, si l'on tire par le centre *O* la droite *AOC*, on connaîtra la

distance AB, et par conséquent la ligne AC. Pour savoir comment on doit tirer la ligne AE, il ne s'agit que de trouver une valeur de AD telle, que son prolongement DE soit égal à la ligne donnée. Je nomme donc AD, x; la ligne connue AB, a; la ligne connue AC, b; enfin je nomme c la ligne donnée à laquelle DE doit être égale. Cela posé, puisque la figure $BDEC$ est un cercle, les sécantes AC, AE doivent (*Géom.* 127) être réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures; on doit donc avoir $AC : AE :: AD : AB$, c'est-à-dire, en vertu des dénominations précédentes,

$$b : (x+c) :: x : a. \quad \text{D'où } x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}.$$

De ces deux valeurs, la première satisfait seule à la question actuelle. Pour achever la solution, il faut construire cette quantité, ce qu'on peut faire sans employer les transformations enseignées (245). Pour cet effet, on tirera du point A la tangente AT qui, étant moyenne proportionnelle entre AB et AC (*Géom.* 129), donnera $\overline{AT}^2 = AB \times AC$; la valeur de x deviendra donc

$$x = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \overline{AT}^2};$$

tirons le rayon TO, il sera perpendiculaire à AT (*Géom.* 48); si donc on prend $TI = \frac{1}{2}c$, alors en tirant AI, on aura...
$AI = \sqrt{\frac{1}{4}cc + \overline{AT}^2}$; donc pour avoir x, il ne s'agit plus que de porter TI de I en R et de décrire du point A, comme centre, et du rayon AR, l'arc RD qui déterminera le point cherché D; car AD ou AR sera égal à

$$AI - IR = AI - TI = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + \overline{AT}^2} - \tfrac{1}{2}c = x.$$

Pour connaître maintenant ce que signifie la seconde valeur de x, il faut remarquer que puisqu'elle est toute négative, elle ne peut tomber que du côté opposé à celui vers lequel tend AD. Voyons donc s'il y a quelque question dépendante des mêmes quantités et des mêmes raisonnemens, et qui ait rapport à ce côté. Or, je remarque que si l'on suppose a et b

négatifs, l'équation $xx+cx=ab$ ne change en aucune manière; donc puisqu'alors le cercle $BDEC$ deviendrait $B'D'E'C'$ situé vers la gauche de la même manière que le premier l'est vers la droite, il s'ensuit que cette même équation renferme aussi la solution qui appartiendrait à ce cas; la seconde valeur de x appartient donc à ce même cas, et satisfait à la même condition; c'est pourquoi si dans la construction précédente on porte IT de I en R', sur AI prolongé, et qu'ensuite du point A, comme centre, et d'un rayon égal à AR', on décrive un arc qui coupe, en E', la circonférence $B'D'E'C'$, le point E' sera tel, que la partie interceptée $E'D'$ sera égale à c. En effet, AE' étant égal à $AR'=AI+IR'$, vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}c^2+\overline{AT}^2}+\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, sera égal à la seconde valeur de x en y changeant les signes; or puisqu'on porte cette quantité du côté opposé à celui vers lequel on a supposé que tendait x, il s'ensuit que AE' est véritablement la seconde valeur de x. Au reste, comme les deux cercles sont égaux et situés de la même manière, les deux solutions peuvent appartenir toutes deux au même cercle, ensorte que si l'on décrit du point A, comme centre, et du rayon AR', l'arc $R'E$, la ligne AE résoudra aussi la question; en effet, il est aisé de voir que le point E, déterminé de cette manière, est sur le prolongement de la ligne AD déterminée par la première construction. Mais des deux solutions distinctes que fournit l'Algèbre, la première tombe à la droite du point A, et appartient au point D de la circonférence convexe; la seconde tombe à la gauche, et appartient au point E' de la circonférence concave. On voit par là se confirmer de plus en plus que les quantités négatives doivent être portées de côtés opposés, et réciproquement.

270. Supposons maintenant qu'il s'agisse de *trouver sur la direction de la ligne donnée* AB (Fig. 26) *un point* C *tel que sa distance au point* A, *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la ligne entière* AB. Je nommerai c la ligne donnée AB, et x, la distance cherchée AC; alors

BC sera $a-x$; et puisqu'on veut que $AB : AC :: AC : CB$, ou que $a : x :: x : a-x$, il faut que

$$x^2 = a(a-x), \text{ d'où } x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2}.$$

Pour construire la première valeur de x, il faut, selon ce qui a été enseigné (249), élever au point B la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, et ayant tiré AD, on aura

$$AD = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + aa},$$

il ne s'agit donc plus que de retrancher de cette ligne la quantité $\frac{1}{2}a$; ce qui se fera en portant DB de D en O; alors AO vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}aa + aa} - \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire, sera égale à x; on portera donc AO de A en C vers B, et le point C où elle aboutira sera le point cherché.

Quant à la seconde valeur de x, si l'on porte BD de D en O', sur le prolongement de AD, alors AO' vaudra..... $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + aa}$; puis donc que la valeur de x est cette même quantité, prise négativement, on portera AO' de A en C' sur AB prolongée du côté opposé à celui vers lequel on a supposé, dans la solution, que x tendait, et l'on aura un second point C' qui jouira aussi de cette propriété que sa distance au point A sera moyenne proportionnelle entre sa distance au point B et la ligne entière AB.

Remarquons, en passant, que cette question renferme celle de *couper une ligne donnée* AB *en moyenne et extrême raison*: aussi la construction que nous venons d'en donner est-elle la même que celle que nous avons prescrite (*Géom.* 130). Mais on voit que l'Algèbre nous conduit à trouver cette construction, au lieu qu'en Géométrie nous la supposions déjà découverte, et nous en démontrions seulement la légitimité.

271. Si l'on fait un peu d'attention sur la marche que nous avons suivie dans les questions précédentes, on verra que nous avons toujours pris, pour l'inconnue, une ligne qui, étant une fois connue, servirait à déterminer toutes les autres, en se conformant aux conditions de la question. C'est ce qu'on doit toujours observer; mais il y a encore un choix à faire pour

se déterminer sur cette ligne : il y en a souvent plusieurs dont chacune aurait également la propriété de déterminer toutes les autres si une fois elle était connue; or parmi celles-là il en est qui conduiraient à des équations plus composées les unes que les autres. Pour aider à se déterminer dans ces cas, nous placerons ici la règle suivante.

272. *Si parmi les lignes ou les quantités qui, étant prises chacune pour l'inconnue, pourraient servir à déterminer toutes les autres quantités, il s'en trouve deux qui y servent de la même manière, ensorte qu'on prévoie que l'une ou l'autre conduirait à la même équation (aux signes + ou — près); alors on fera bien de n'employer ni l'une ni l'autre, mais de prendre pour inconnue une autre quantité qui dépende également de l'une ou de l'autre de ces deux-là*; par exemple, de prendre pour inconnue leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou un moyen proportionnel entre elles, ou etc. On arrivera toujours à une équation plus simple qu'en cherchant l'une ou l'autre. La question que nous avons résolue (269) peut nous en fournir un exemple. Rien dans cette question ne déterminait à prendre AD (*Fig.* 25) pour inconnue plutôt que AE; en prenant AD pour l'inconnue x, on avait $x+c$ pour AE; et en regardant AE comme l'inconnue x, on aurait eu $x-c$ pour AD, et du reste le calcul est le même dans chaque cas, ensorte que l'équation ne différera que par les signes. C'est pourquoi si, au lieu de prendre aucune des deux pour l'inconnue, je prends leur demi-somme, et que je la nomme $2x$; comme leur différence DE est donnée par les conditions de la question, et est $=c$, on aura (*Géom.* 103) $AE=x+\frac{1}{2}c$, et $AD=x-\frac{1}{2}c$; et en employant le même principe que celui dont nous avons fait usage dans la première solution, nous aurons

$$(x+\tfrac{1}{2}c)\ (x-\tfrac{1}{2}c)=ab;\ \text{d'où}\ x=\sqrt{\tfrac{1}{4}c^2+ab}.$$

Il est aisé d'en conclure

$$AE=\tfrac{1}{2}c+\sqrt{\tfrac{1}{4}cc+ab},\quad AD=-\tfrac{1}{2}c+\sqrt{\tfrac{1}{4}cc+ab},$$

comme ci-dessus (269).

La question suivante nous fournira plusieurs exemples de l'application du même principe.

273. *D'un point* D (Fig. 27) *situé dans l'angle droit* IAE, *et également éloigné des deux côtés* IA *et* AE, *mener une ligne droite* DB, *de manière que la partie* CB *comprise dans l'angle droit*, EAB, *soit égale à une ligne donnée.* Ayant abaissé les perpendiculaires DE, DI, je puis indifféremment prendre pour inconnue CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB. Si je prends, par exemple, CE pour l'inconnue, alors faisant $CE = x$, et désignant par a chacune des deux lignes égales DE, DI, qui sont censées connues; nommant de plus c la ligne donnée à laquelle BC doit être égale, j'aurai...... $AC = AE - CE = a - x$; et les triangles semblables DEC, CAB me donneront AB par cette proportion, $CE : DE :: AC : AB$, ou $x : a :: a - x : AB$. Donc $AB = \frac{a^2 - ax}{x}$. Or par la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) on a $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$: substituant, au lieu de ces lignes, leurs valeurs algébriques, on trouvera

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0;$$

équation du quatrième degré, mais qui n'est pas, à beaucoup près, la plus simple qu'on puisse employer pour résoudre cette question. En effet, si au lieu de prendre CE pour inconnue, nous prenions IB, alors faisant $IB = x$, et imitant la solution précédente, on aurait une équation qui ne différerait de celle qu'on vient de trouver, qu'en ce qu'au lieu de $a - x$ on aurait $x - a$; c'est-à-dire, qui serait absolument la même, puisque ces quantités y sont au quarré. Celle où l'on prendrait AB pour inconnue, ne différerait que par les signes de celle qui résulterait de $AC = x$. De même, à l'égard de DB et de DC, l'équation où l'une sera prise pour inconnue, ne différera que par les signes de celle où l'inconnue serait l'autre ligne : il faut donc les rejeter toutes. Mais si nous prenons, pour inconnue, la somme des deux lignes DB et DC, et si nous représentons cette somme par $2x$, alors

(*Géom.* 301) nous aurons $DB = x + \frac{1}{2}c$, et $DC = x - \frac{1}{2}c$; or les parallèles DI et CA nous donnent, pour trouver AB et AC, les deux proportions suivantes :

$$DC : CB :: IA \text{ ou } DE : AB, \text{ et } DB : CB :: DI : AC;$$

c'est-à-dire,

$$x - \tfrac{1}{2}c : c :: a : AB, \text{ et } x + \tfrac{1}{2}c : c :: a : AC;$$

donc $$AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c} \text{ et } AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c};$$

donc, puisque le triangle rectangle CAB donne.......... $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, on aura

$$\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc; \quad \text{d'où}$$

$$(1) \ldots x^4 - (\tfrac{1}{2}c^2 + 2a^2)x^2 = \tfrac{1}{2}a^2c^2 - \tfrac{1}{16}c^4;$$

équation du quatrième degré, à la vérité, mais plus facile à résoudre que la précédente, puisque (172) on la traite à la manière de celle du second degré. Elle donne

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}cc + aa \pm a\sqrt{cc + aa}}.$$

Des quatre valeurs de x que donne la double combinaison des deux signes $\pm$, il n'y en a qu'une qui appartienne à la question telle qu'elle a été proposée, et cette valeur est

$$x = +\sqrt{\tfrac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{cc + aa}}.$$

La valeur $x = +\sqrt{\tfrac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{cc + aa}}$,

résout la question pour le cas où l'on demanderait que la ligne CB fût dans l'angle CAB, à gauche (*Fig.* 28); et alors x représente, non pas la demi-somme, mais la demi-différence des deux lignes BD et DC; c'est ce dont il est facile de se convaincre en nommant $2x$ cette différence, et résolvant le problème de la manière que ci-dessus; car on aura $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$; et les parallèles DI et

CA donneront $DB:CB::DI:CA$, et $DC:CB::AI:AB$, ou $\frac{1}{2}c+x:c::a:CA$, et $\frac{1}{2}c-x:c::a:AB$; donc

$$CA=\frac{ac}{\frac{1}{2}c+x} \text{ et } AB=\frac{ac}{\frac{1}{2}c-x};$$

donc à cause du triangle rectangle CAB, on aura

$$\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c+x)^2}+\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c-x)^2}=c^2, \text{ ou,}$$

$$x^4-(\tfrac{1}{2}c^2+2aa)x^2=\tfrac{1}{2}aacc-\tfrac{1}{16}c^4,$$

équation qui est absolument la même que celle que nous venons de trouver pour la somme des deux lignes BD et DC (*Fig.* 27). Donc la même équation satisfaisant aux deux cas, l'une des racines doit donner la somme, et une autre doit donner la différence; or il est facile de voir que les deux que l'on doit prendre, sont celles que nous venons d'indiquer, puisque les deux autres racines étant négatives, ne peuvent appartenir qu'à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.

Quant à ces deux autres racines, pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou, du moins dans l'équation, si le point D (*Fig.* 27) est, comme on l'a supposé d'abord, au-dessous de AI et à gauche de AE, ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première et à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de $A'I'$ et de $A'E'$: or, dans ce cas, la quantité a, tombant de côtés opposés à ceux où elle tombait d'abord, est négative; donc on aura la solution qui convient à ce cas, si l'on met $-a$, au lieu de $+a$, dans l'équation (1); mais comme cette équation ne change pas alors, il s'ensuit que cette même équation doit aussi résoudre ces deux nouveaux cas; donc les deux autres valeurs de x sont, l'une la demi-somme des deux lignes DB' et DC' (*Fig.* 27), et l'autre leur demi-différence (*Fig.* 28). On voit en effet que dans cette nouvelle position les points B et C tombent de côtés opposés à ceux où ils tombaient d'abord, et que par conséquent la somme et la différence des deux lignes DB' et DC' doivent être négatives, comme l'équation les donne en effet. Pour construire la solution qu'on vient de trouver, on prendra sur EA prolongée, (*Fig.* 27 *et* 28), la partie $AN = c$, et ayant tiré IN, on portera cette dernière sur DI prolongée de I en K : sur DK, comme diamètre, on décrira le demi-cercle KLD rencontré en L par AI prolongée. Du milieu H de AN on tirera IH que l'on portera de I en M (*Fig.* 27), et on aura LM pour la première valeur de x; mais, dans la figure 28, on décrira du point L, comme centre, et d'un rayon égal à IH, un petit arc qui coupe IK en M, et IM sera la seconde valeur de x; et puisqu'on a $BD = x + \frac{1}{2}c$, on aura

$$BD = LM + AH \;(Fig. 27), \quad \text{et} \quad BD = IM + AH \;(Fig. 28);$$

ainsi il n'y aura plus qu'à décrire du point D, comme centre, et du rayon BD qu'on vient de déterminer, un arc qui coupe IA prolongée en quelque point B, la droite DB sera telle qu'on la demande. En effet, le triangle rectangle IAN (*Fig.* 27 *et* 28) donne

$$IN \text{ ou } IK = \sqrt{\overline{IA}^2 + \overline{AN}^2} = \sqrt{aa + cc},$$

et puisque LI est moyenne proportionnelle entre DI et IK, on a

$$\overline{IL}^2 = DI \times IK = a\sqrt{aa + cc};$$

or le triangle rectangle IAH donne

$$IH \text{ ou } MI = \sqrt{\overline{IA}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc},$$

et le triangle rectangle LIM donne

$$LM = \sqrt{\overline{MI}^2 + \overline{IL}^2} = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc + a\sqrt{aa + cc}} = x \;(Fig. 27)$$

$$IM = \sqrt{\overline{LM}^2 - \overline{IL}^2} = \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}cc - a\sqrt{aa + cc}} = x \;(Fig\, 28).$$

Il faut remarquer, au sujet de cette dernière valeur, que la construction que nous venons d'en donner, suppose que IH (*Fig.* 28) est plus grand que LI, ou tout au plus égal. S'il

était

était plus petit, la question serait impossible pour ce dernier cas; c'est ce que fait voir aussi l'Algèbre: car dans la valeur

$$x = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc - a\sqrt{aa + cc}},$$

si $aa + \frac{1}{4}cc$ qui est $\overline{IH}^2$, est plus petit que $a\sqrt{aa + cc}$ qui est $\overline{IL}^2$, la quantité que couvre le radical supérieur sera négative, et par conséquent la valeur de x sera imaginaire.

En prenant, pour inconnue, la somme des deux lignes DB et DC (*Fig.* 27) ou leur différence (*Fig.* 28), nous sommes arrivés à une équation plus simple qu'en prenant CE avec AC, ou AB avec IB, parce que la relation des lignes DB et DC aux lignes IB et AB est semblable à celles que les mêmes lignes BD et CD ont avec les lignes AC et CE, c'est-à-dire, qu'elles peuvent être déterminées par des opérations semblables, en employant IB et AB, ou AC et CE. En général, comme l'équation doit renfermer tous les différens rapports que la quantité cherchée peut avoir avec celles dont elle dépend, cette équation sera toujours d'autant plus simple, que la quantité qu'on choisira pour inconnue, aura moins de rapports différens avec les autres; en voici un exemple bien sensible dans cette solution de la même question.

274. Puisque l'angle CAB (*Fig.* 29) est droit, si l'on conçoit que sur CB, comme diamètre, on décrive un cercle, il passera par le point A: tirons la ligne DA qui, prolongée, rencontre la circonférence en M; alors il est aisé de voir que puisque les lignes DI et DE sont égales, l'angle DAI, ou son égal BAM, sera de 45 degrés; et puisque ce dernier a pour mesure la moitié de l'arc MB (Géom. 63), cet arc BM sera donc de 90°; donc si l'on tire le rayon LM, le triangle... DLM sera rectangle, et par conséquent, en abaissant sur DM la perpendiculaire LN, le côté LM (*Géom.* 112) sera moyen proportionnel entre DM et MN, ou entre DM et AN, puisque la perpendiculaire LN rend $AN = NM$ (*Géom.* 52). De là il est aisé d'avoir une solution très-simple, en pre-

nant AN pour inconnue. Représentons par x cette ligne AN, et nommons d la ligne DA qui est censée connue ; alors DM sera $d+2x$, et puisqu'on a, selon ce qui vient d'être remarqué, $DM:LM::LM:MN$, on aura $d+2x:\frac{1}{2}c::\frac{1}{2}c:x$, et par conséquent

$$dx+2x^2=\frac{1}{4}c^2. \text{ D'où } x=-\frac{1}{4}d\pm\sqrt{\frac{1}{16}dd+\frac{1}{8}cc.}$$

Pour construire cette quantité, je l'écris ainsi,

$$x=-\frac{1}{4}d\pm\sqrt{\frac{1}{16}dd+\frac{1}{16}cc+\frac{1}{16}cc}.$$

Je prends sur les côtés Ao, AI de l'angle droit IAo, les parties Am, An égales chacune à $\frac{1}{4}c$, et achevant le quarré $Ampn$, je tire la diagonale Ap qui sera perpendiculaire à DA, et égale à $\sqrt{\frac{1}{16}cc+\frac{1}{16}cc}$; je prends, sur AD, la partie Ar égale à $\frac{1}{4}d$ ou $\frac{1}{4}AD$, et tirant pr, j'ai

$$pr=\sqrt{\overline{Ar}^2+\overline{Ap}^2}=\sqrt{\frac{1}{16}dd+\frac{1}{16}cc+\frac{1}{16}cc}.$$

Il ne s'agit donc plus, pour avoir la première valeur de x, que de retrancher de pr la quantité $\frac{1}{4}d$, ce qui se fera en décrivant du point r, comme centre, et du rayon rp un arc qui coupe DM en N, ce qui donne AN pour la première valeur de x; ensorte qu'élevant au point N la perpendiculaire NL que l'on coupera en L par un arc décrit du point A, comme centre, et du rayon $\frac{1}{2}c$, on aura le point L par lequel et par le point D tirant DCB, on aura la solution.

Quant à la seconde valeur de x, savoir

$$x=-\frac{1}{4}d-\sqrt{\frac{1}{16}dd+\frac{1}{16}c^2+\frac{1}{16}c^2};$$

on l'aura en portant rp de r en N', car alors AN' étant égale à $Ar+rN'$ vaudra $\frac{1}{4}d+\sqrt{\frac{1}{16}dd+\frac{1}{16}c^2+\frac{1}{16}c^2}$, c'est-à-dire, sera égale à la seconde valeur de x, en changeant les signes ; et comme elle tombe du côté opposé à la première, elle sera, eu égard à tout, la véritable valeur de x dans ce second cas. On élevera donc aussi au point N' la perpendiculaire $N'L'$ que l'on coupera en L' par un arc décrit pareillement du point A, comme centre, et du rayon égal à $\frac{1}{2}c$; alors tirant par le point L' et par le point D la droite .... $B'\,L'\,D$, on aura la seconde solution dont la question peut être susceptible : c'est ce dont il est aisé de se convaincre en jetant les yeux sur la figure 30 et y appliquant, mot à mot, ce que nous avons dit de la figure 29 au commencement de cette solution : on verra qu'en nommant AN ou MN, x et conservant les autres dénominations, on aura

$$DM : ML :: ML : MN\,;\ \text{ou}\ 2x - d : \tfrac{1}{2}c :: \tfrac{1}{2}c : x\,;$$

d'où l'on tire

$$x = \tfrac{1}{4}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}dd + \tfrac{1}{16}cc + \tfrac{1}{16}cc},$$

dont une des valeurs est précisément la même que celle dont il s'agit ; les signes seulement sont différens, ainsi que cela doit être. Mais il se présente ici une remarque importante à faire. Il peut arriver que l'arc que l'on voudra décrire du point A (*Fig.* 29), comme centre, et du rayon $\frac{1}{2}c$ ne rencontre pas la perpendiculaire $N'L'$, parce que la quantité $\frac{1}{2}c$ peut être plus petite que AN'. Or nous avons dit que lorsque les questions du second degré étaient impossibles, l'Algèbre le faisait connaître : cependant, dans l'équation...........

$$x = -\tfrac{1}{4}d - \sqrt{\tfrac{1}{16}dd + \tfrac{1}{16}c^2 + \tfrac{1}{16}c^2}$$

rien ne manifeste dans quel cas cette impossibilité a lieu ; car tout est nécessairement positif sous le radical. Voici la solution de cette difficulté. Il est incontestable que lorsqu'une question, exprimée algébriquement, sera impossible, l'Algèbre manifestera cette impossibilité ; mais il faut bien faire attention que ce sera lorsqu'on aura exprimé, par cette même Algèbre, tout ce que la question suppose, soit explicitement, soit implicitement ; c'est précisément ce qui n'a pas lieu ici. En effet, la question suppose tacitement que les trois points D, A, L ne sont pas sur une même ligne droite, et c'est ce que nous n'avons point exprimé algébriquement ; nous avons exprimé que LM était moyenne proportionnelle entre DM et NM, propriété qui appartient à la vérité au triangle rectangle, mais qui peut avoir lieu aussi lorsque les trois points *D*, *A*, *L* sont supposés en ligne droite. En effet, il est évident qu'on peut se proposer cette question : *trouver sur la direction* DL (Fig. 31) *quel intervalle il faudrait laisser entre les deux droites* DA *et* ML, *de grandeurs connues*, *pour que* ML *soit moyenne proportionnelle entre* DM *et* MN, *le point* N *étant le milieu de* AM. Or cette question conduit (comme il est facile de s'en assurer) précisément à la même équation que ci-dessus, et cette équation donne deux solutions, l'une pour le cas où les deux points *A* et *M* sont entre *D* et *L*; l'autre pour le cas contraire. Il n'est donc pas étonnant que lorsque la première question devient impossible (du moins dans un de ses cas), l'Algèbre n'en dise rien, puisqu'elle doit donner la solution de cette seconde question qui est toujours possible.

275. Cette réflexion nous porte donc à distinguer deux sortes de questions, savoir, les questions *concrètes* et les questions *abstraites*. Par les premières on doit entendre les questions de la nature de l'avant-dernière, où ce que l'on cherche est spécifié ou particularisé par quelque condition, quelque propriété, ou quelque construction particulière que l'équation n'exprime point. Les questions abstraites, au contraire, seront celles où les quantités sont considérées uniquement comme quantités, et où l'équation exprime tout ce que la question renferme, comme dans la dernière question. Celles-ci peuvent toujours avoir autant de solutions, soit positives, soit négatives, que l'équation a de solutions réelles ; au lieu que le nombre des solutions d'une question concrète est souvent moindre que le nombre des solutions, même positives de l'équation; la question suivante, qui est de cette dernière espèce, nous en fournira un exemple.

276. Supposons que *ABED* (*Fig.* 32) représente une sphère engendrée par la rotation du demi-cercle *ABE* autour du diamètre *AE*. Le secteur *ABC*, dans ce mouvement, engendre un secteur sphérique qui est composé d'un seg-

ment sphérique engendré par la rotation du demi-segment *ABP*. Supposons qu'on demande en quel endroit le segment sphérique et le cône seront égaux entre eux. Pour résoudre cette question, il faut se rappeler (*Géom.* 247) que le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte *BAD* par le tiers du rayon *AC*. Or la surface de la calotte (*Géom.* 225) se trouve en multipliant la circonférence *ABED* par la hauteur *AP* de cette calotte. Donc si on représente par le rapport de $\frac{r}{c}$, celui du rayon d'un cercle à sa circonférence, et si l'on nomme AC, a; AP, x; on aura la circonférence *ABDE* par cette proportion .... $r:c::a:ABDE$ qui sera donc $\frac{ca}{r}$; donc la surface de la calotte sera $\frac{cax}{r}$, et, par conséquent la solidité du secteur sera $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ ou $\frac{caax}{3r}$. Pour avoir la solidité du cône, il faut multiplier la surface du cercle qui lui sert de base, c'est-à-dire, la surface du cercle qui a pour rayon *BP*, par le tiers de la hauteur *CP*: or puisque

$$CP = CA - AP = a - x; \text{ et que } CB = a,$$

on aura dans le triangle rectangle *BPC*,

$$BP = \sqrt{CB^2 - PC^2} = \sqrt{a^2 - (a-x)^2} = \sqrt{2ax - x^2}.$$

Mais pour avoir la surface du cercle qui a pour rayon *BP*, il faut multiplier sa circonférence par la moitié du rayon; et pour avoir cette circonférence, il faut calculer le quatrième terme de cette proportion $r:c::\sqrt{2ax - xx}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{c\sqrt{2ax - xx}}{r}$; multipliant donc par la moitié du rayon $\sqrt{2ax - xx}$, on aura $\frac{c(2ax - xx)}{2r}$ pour la surface de la base du cône; en multipliant cette surface par le tiers de la hauteur *CP*; c'est-à-dire, par $\frac{a-x}{3}$ on aura $\frac{c(2ax-xx)}{2r} \times \frac{a-x}{3}$ pour la solidité du cône ; ou pour que le cône soit égal au segment, il faut que le secteur, qui est la somme des deux, soit double de l'un ou de l'autre, il faut donc que

$$\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax-xx}{2r} \times \frac{a-x}{3}.$$

On en déduit $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$;

or de ces deux solutions, il n'y a que $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ qui puisse satisfaire, puisque $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ valant plus que $2a$, c'est-à-dire, plus que le diamètre, la solution qu'elle indique ne peut convenir à la sphère. Si l'on veut construire la solution $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, on lui donnera cette forme $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}aa - aa}$; et ayant pris $AM = \frac{3}{2}a$ on décrira sur AM, comme diamètre, le demi-cercle AOM, et ayant inscrit la corde AO égale à a; on tirera OM que l'on portera de M en P vers A; le point P, où elle aboutira, déterminera la hauteur AP ou x. En effet, à cause du triangle rectangle AOM, on a

$$OM \text{ ou } PM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{9}{4}aa - aa};$$

Donc $AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}aa - aa} = x.$

Quant à la seconde solution $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, elle n'appartient point, ainsi que nous venons de le dire, à la question présente ; mais elle appartient, ainsi que la première, à cette autre question abstraite que fournit la lecture de l'équation

$$xx - 3ax = -aa, \text{ ou } 3ax - xx = aa.$$

La ligne connue AN (Fig. 33) *étant partagée en trois parties égales aux points* B *et* D, *trouver sur la direction de cette ligne un point* P, *tel que la partie* AD *soit moyenne proportionnelle entre les distances du point* P *aux extrémités* A *et* N. En effet, si l'on nomme a le tiers AD de la ligne connue

AN, et *AP*, x; on aura $PN = 3a - x$; et les conditions de la question donnent

$$x : a :: a : 3a - x \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{3}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}aa}$$

comme ci-dessus; on les aura toutes deux aussi par la même construction, excepté que, pour la seconde, c'est-à-dire, pour $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, on portera *MO* de *M* en *P'* vers *N*, et alors *AP* et *AP'* seront les deux valeurs de x.

Autres applications de l'Algèbre à divers objets.

277. Pour résoudre la dernière question, nous avons été obligés de calculer l'expression algébrique d'un secteur sphérique et du cône qui en fait partie. Les corps que nous avons considérés en Géométrie, reviennent souvent dans plusieurs questions, et principalement dans les questions physico-mathématiques, parce qu'ils sont les élémens de tous les autres. Il est donc à propos de se familiariser avec les expressions algébriques, soit de leur totalité, soit de leurs parties. Outre que cela sera utile dans la quatrième partie de ce Cours, cela nous fournira encore l'occasion de faire voir l'utilité de l'Algèbre pour la comparaison des corps et pour la mesure de ceux qu'on peut y rapporter. Si l'on représente en général par $\frac{r}{c}$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle, [rapport que l'on connaît avec une exactitude plus que suffisante (*Géom.* 152) pour la pratique] : alors la circonférence de tout autre cercle dont le rayon serait a, sera $\frac{ca}{r}$, et sa surface $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2}a$, ou $\frac{ca^2}{2r}$. On voit par là que les surfaces des cercles croissent comme les quarrés de leurs rayons; car $\frac{c}{2r}$ étant toujours de même valeur, la quantité $\frac{ca^2}{2r}$ ne croît qu'à proportion de ce que croît a^2.

Si h est la hauteur d'un cylindre dont le rayon de la base est a, on aura (*Géom.* 237) $\frac{ca^2}{2r} \times h$ pour la solidité; par la même raison, on aura $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$, pour la solidité d'un autre cylindre dont la hauteur serait h', et dont le rayon de la base serait a'; ensorte que les solidités de ces deux cylindres seront entre elles $:: \frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$, ou $:: a^2h : a'^2h'$, en supprimant le facteur commun $\frac{c}{2r}$; c'est-à-dire, que les solidités des cylindres sont comme les produits de leurs hauteurs par les quarrés des rayons de leurs bases. Si les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases, alors on a $h : h' :: a : a'$, et par conséquent $h' = \frac{ha'}{a}$; et le rapport $a^2h : a'^2h'$ devient $a^2h : \frac{a'^3h}{a}$, ou en supprimant le facteur commun h, multipliant par a les deux termes du rapport, il devient $a^3 : a'^3$, c'est-à-dire, qu'alors les solidités sont comme les cubes des rayons des bases.

En général les surfaces, comme nous l'avons vu en Géométrie, dépendent du produit de deux dimensions, et les volumes du produit de trois dimensions; ainsi si chaque dimension de l'un des deux solides ou de deux surfaces que l'on compare, est à chaque dimension de l'autre, dans le même rapport, ces deux surfaces seront entre elles comme les quarrés, et ces deux solides seront comme les cubes de deux dimensions homologues; et plus généralement encore, si deux quantités quelconques de même nature sont exprimées par le produit de tant de facteurs qu'on voudra, et si chaque facteur de l'une est à chaque facteur de l'autre, dans un même rapport, ces deux quantités seront entre elles comme un facteur homologue de chacune, élevé à une puissance d'un degré égal au nombre de ces facteurs. Par exemple, si une quantité est exprimée par $abcd$ et une autre par $a'b'c'd'$, auquel cas ces deux quantités sont l'une à l'autre.........

$::abcd : a'b'c'd'$; alors si on a $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on tirera des proportions que donnent ces rapports.......
$b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, et par conséquent le rapport $abcd : a'b'c'd'$ deviendra $abcd : \frac{a'^4bcd}{a^3}$ ou $a : \frac{a'^4}{a^3}$, ou $a^4 : a'^4$. La même chose aurait lieu, quand même ces quantités ne seraient pas exprimées par des monomes; si, par exemple, elles étaient exprimées, l'une par $ab + cd$, et l'autre par $a'b' + c'd'$, dans le cas où les dimensions de la première seront proportionnelles aux dimensions de la seconde, ces quantités seront l'une à l'autre $:: a^2 : a'^2$; en effet, puisqu'on suppose que
$a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on aura ....

$$b = \frac{a'b}{a}, c' = \frac{a'c}{a}, d' = \frac{a'd}{a},$$

et par conséquent le rapport $ab + cd : a'b' + c'd'$ deviendra

$$ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}, \text{ ou } ab + cd : \frac{a'^2ab + a'^2cd}{a^2},$$

$$\text{ou} \quad a^2(ab + cd) : a'^2(ab + cd), \quad \text{ou} \quad a^2 : a'^2.$$

Cette dernière observation démontre d'une manière générale, que les surfaces des figures semblables sont comme les quarrés de deux de leurs dimensions homologues, et les solidités des solides semblables, comme les cubes: car quelles que soient ces figures ou ces solides, les premières peuvent toujours être considérées comme composées de triangles semblables dont les hauteurs et les bases sont proportionnelles dans chaque figure; et les derniers peuvent être considérés comme composés de pyramides semblables dont les trois dimensions sont aussi proportionnelles. On voit par là comment on peut comparer facilement les quantités, lorsqu'on en a l'expression algébrique, et cela, soit que ces quantités soient de même espèce ou d'espèce différente comme un cône et une sphère, un prisme et un cylindre, pourvu seulement qu'elles soient de même nature ; c'est-à-dire, ou toutes deux des solides, ou toutes deux des surfaces.

278. Nous avons dit (*Géom.* 243) comment on devoit s'y prendre pour avoir la solidité d'une pyramide tronquée ou d'un cône tronqué. Si donc on nomme h la hauteur de la pyramide entière, h' la hauteur de la pyramide retranchée, s la surface de la base inférieure et s' celle de la base supérieure ; on aura (*Géom.* 202) $s : s' :: h^2 : h'^2$, et par conséquent ....

$h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$ ou $h' = h\sqrt{\frac{s'}{s}}$; mais si on nomme k la hauteur du tronc, on aura $k = h - h'$; et par la substitution

$$k = h - h\sqrt{\frac{s'}{s}} \text{ ou } k = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}} \text{ ; d'où } h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}.$$

Or la solidité de la pyramide totale est $s \times \frac{h}{3}$, et celle de la pyramide retranchée est $s' \times \frac{h'}{3}$, ou en mettant pour h' la valeur qu'on vient de trouver, $s' \times \frac{h}{3}\sqrt{\frac{s'}{s}}$; donc la solidité du tronc sera

$$\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}} \text{ ou } \frac{h}{3}\left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right) \text{ ou } \frac{h}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right);$$

mettons donc pour h la valeur que nous venons de trouver, et nous aurons $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, qui se réduit à $\frac{k}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}\right)$, ou, en faisant la division par ..... $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$, se réduit à $\frac{k}{3}(s + \sqrt{ss'} + s')$, qui nous apprend que *toute pyramide ou tout cône tronqué, est composée de trois pyramides de même hauteur, dont l'une a pour base la base inférieure* s *du tronc, l'autre la base supérieure* s', *et la troisième, une moyenne proportionnelle* $\sqrt{ss'}$ *entre la base supérieure* s' *et la base inferieure* s ; car pour avoir la solidité de ces trois pyramides, il suffirait, puisqu'elles sont de même hauteur, de réunir les trois bases, ce qui donnerait $s+\sqrt{ss'}+s'$, et de multiplier la totalité par le tiers $\frac{k}{3}$ de la hauteur commune, ce qui donne la même quantité qu'on vient de trouver.

279. Si a représente le rayon d'une sphère, $\frac{ca^2}{2r}$ sera la surface de son grand cercle; $\frac{4ca^2}{2r}$ ou $\frac{2ca^2}{r}$ sera la surface de cette même sphère, et par conséquent $\frac{ca^2}{2r}\times\frac{4}{3}a$, ou $\frac{c}{2r}\times\frac{4a^3}{3}$ sera sa solidité (*Géom.* 222 et 244). Si l'on nomme x la hauteur d'un segment quelconque, on aura, comme nous l'avons vu dans la solution de la dernière question, $\frac{caax}{3r}$ pour la solidité du secteur, et $\frac{c}{2r}(2ax-xx)\times\frac{a-x}{3}$ pour celle du cône qui en fait partie; donc celle du segment (*Géom.* 248) sera

$$\frac{ca^2x}{3r}-\frac{c}{2r}(2ax-xx)\frac{a-x}{3}=\frac{c}{3c}\left[aax(2ax-xx)\left(\frac{a-x}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{c}{3r}.\frac{2aax-2aax+axx+2axx-x^3}{2}=\frac{c}{3r}.\frac{3axx-x^3}{2}$$

$$=\frac{cx^2}{2r}(a-\tfrac{1}{3}x),$$

qui fait voir que *la solidité du segment est égale au cercle qui aurait pour rayon la hauteur de ce segment, multiplié par le rayon moins le tiers de cette hauteur.*

Quand on a les expressions algébriques des quantités, il est facile de résoudre plusieurs questions qu'on peut faire sur ces mêmes quantités. Par exemple, si l'on demandait quelle doit être la hauteur d'un cône qui serait égal en solidité à une sphère donnée, et qui aurait pour rayon de sa base le rayon de la sphère : en nommant h cette hauteur et a le rayon de la base, on aura $\frac{c}{2r}\times\frac{a^2h}{3}$ pour la solidité de ce cône ; et puisqu'il doit être égal à la sphère qui a aussi pour rayon a, on aura

$$\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}, \text{ d'où l'on tire } h = 4a.$$

Cette valeur de h nous fait connaître que la hauteur est égale au double du diamètre de la sphère, ce qui doit être en effet; car la sphère étant (*Géom.* 246) les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, doit être le double d'un cône de même base et de même hauteur que ce cylindre; c'est-à-dire, égale à un cône de même base et d'une hauteur double.

280. Pour donner encore un exemple, proposons-nous cette question : *Connaissant le poids d'une sphère dans l'air, et son poids dans l'eau, connaître le rayon de cette sphère.* Pour résoudre cette question, nous supposerons un principe d'hydrostatique que nous démontrerons dans la quatrième partie de ce Cours. Ce principe est que ce qu'un corps perd de son poids dans l'eau ou dans tout autre liquide, est égal au poids du volume de liquide qu'il déplace. Cela posé, supposons que p est le poids d'un pouce cube d'eau, et x le rayon inconnu de la sphère dont il s'agit, c'est-à-dire, le nombre de pouces de ce rayon. La solidité de cette sphère sera donc $\frac{2cx^3}{3r}$; et pour avoir le poids d'un pareil volume d'eau, il faudra multiplier cette quantité par p, puisqu'un pouce cube d'eau pesant p, un nombre de pouces cubes d'eau exprimé par $\frac{2cx^3}{3r}$ doit peser p de fois autant ; c'est-à-dire, qu'il doit peser $\frac{2pcx^3}{3r}$; supposons donc que P est le poids qu'a, dans l'air, la sphère en question; alors, selon le principe que nous venons de poser, elle ne doit peser dans l'eau que $P - \frac{2cpx^3}{3r}$; puis donc qu'on suppose connu ce qu'elle pèse dans l'eau, si l'on représente ce poids par P', on aura

$$P - \frac{2cpx^3}{3r} = P' ; \text{ d'où } x = \sqrt[3]{\frac{(P-P')3r}{2cp}}.$$

Supposons, pour en donner une application, que la sphère dont il s'agit pèse 5 onces dans l'air et 2 onces dans l'eau; et qu'un pied cube d'eau pèse 72 liv., ce qui donne (en divisant par 1728 qui est le nombre des pouces cubes contenus dans un pied cube) $\frac{72}{1728}$ ou $\frac{1}{24}$ de livre, c'est-à-dire, $\frac{16}{24}$ ou $\frac{2}{3}$ d'once pour un pouce cube; prenons d'ailleurs le rapport de 113 à 355 pour celui du diamètre à la circonférence, et par conséquent, celui de $\frac{113}{2}$ à 355 pour celui de r à c; nous aurons donc $p=\frac{2}{3}$, $P=5$, $P'=2$, $r=\frac{113}{2}$, $c=355$, et par conséquent,

$$x=\sqrt[3]{3.\frac{113}{2}\left(\frac{5-2}{2\times 355\times\frac{2}{3}}\right)}=\sqrt[3]{\frac{3051}{2840}};$$

prenant les logarithmes, pour plus de facilité,

$$Lx=\tfrac{1}{3}\,L\tfrac{3051}{2840}=\tfrac{1}{3}\,(L\,3051-L\,2840)=0{,}0103746,$$

qui répond à 1,0242 à très-peu près : ce globe a donc un pouce et 0,0242, ou un pouce et 242 dix-millièmes de pouce pour rayon.

Nous avons supposé tacitement que le globe entrait entièrement dans l'eau, par son poids; si au contraire il fallait lui ajouter un certain poids pour le faire plonger entièrement, alors ce serait cette quantité qu'il faudrait prendre pour P', mais, en même temps, il faudrait traiter P' comme négatif; c'est-à-dire, qu'alors on aurait $x=\sqrt[3]{\frac{(P+P')\times 3r}{2cp}}$. En effet, $\frac{2cpx^3}{3r}$ étant, ainsi que nous l'avons vu dans la solution précédente, le poids d'un volume d'eau égal à ce globe, et P le poids de ce globe dans l'air, $\frac{2cpx^3}{3r}-P$ sera la quantité dont il pèse moins qu'un pareil volume d'eau, et par conséquent, ce qu'il faut ajouter pour le faire plonger entièrement; on aura donc $\frac{2cpx^3}{3}-P=P'$, qui donne la valeur de x que nous venons d'assigner pour ce cas.

Des Lignes courbes en général, et, en particulier, des Sections coniques.

281. La considération des lignes courbes n'est point un objet de pure spéculation. Tant que les questions qu'on a à résoudre ne passent pas le second degré, on n'a pas besoin du secours de ces lignes; mais au-delà elles deviennent nécessaires. Nous allons donc donner une idée générale des lignes courbes, et des usages qu'elles peuvent avoir pour la construction des équations auxquelles on arrive dans la résolution des questions. Parmi les lignes courbes que l'on considère en Géométrie, les unes sont telles que chacun de leurs points peut être déterminé par une même loi, c'est-à-dire, par des calculs et des opérations semblables; dans d'autres, chaque point se détermine par une loi différente, c'est-à-dire, par des calculs ou des opérations différentes; mais cette différence elle-même est assujétie à une loi. Quant aux lignes tracées au hasard, telles que seraient, par exemple, les traits qu'imprime sur le papier la plume d'un écrivain, ils ne peuvent être l'objet d'une Géométrie rigoureuse. Néanmoins les recherches dont celle-ci s'occupe conduisent même à imiter, par des procédés directs et certains, des contours qui ne semblent assujétis à aucune loi : et l'art de lier ainsi, par des rapports approchés, des quantités dont la loi véritable serait ou inconnue ou trop composée, n'est pas une des applications les moins utiles de la Géométrie et de l'Algèbre ; nous aurons quelques occasions de le voir par la suite.

Pour pouvoir tracer les lignes courbes qui font l'objet de la Géométrie, il faut donc connaître la loi à laquelle sont assujétis les différens points de leur contour. Or cette loi peut être donnée de plusieurs manières ; ou en indiquant un procédé par lequel ces courbes peuvent être décrites d'un mouvement continu ; tel est le cercle qui se décrit en faisant tourner, dans un plan, une ligne donnée, et autour d'un point donné ; ou bien en faisant connaître quelque propriété qui appartienne constamment à chacun des points de cette courbe; c'est ainsi que sachant que tout angle qui a son sommet à la circonférence du cercle, et qui s'appuie sur un diamètre, est droit, je puis trouver successivement chacun des points d'un cercle dont je connais le diamètre, en tirant d'une des extrémités *A* de ce diamètre (*Fig.* 34) une infinité de lignes droites *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, et menant de l'autre extrémité *B*, les perpendiculaires *BC*, *BD*, *BE*, *BF*; les différens points, *C*, *D*, *E*, *F*, etc., déterminés de cette manière, appartiendront tous à la circonférence qui a *AB* pour diamètre.

Enfin cette loi peut être donnée par une équation, et on peut toujours supposer qu'elle le soit par ce dernier moyen, parce que les deux autres dont nous venons de faire mention servent à trouver l'équation qui exprime cette loi. C'est sous ce dernier point de vue que nous allons principalement considérer les courbes, parce qu'il est, tout à la fois, le plus simple et le plus fécond pour en connaître les propriétés, les singularités et les usages. Voyons donc comment une équation peut exprimer la nature d'une courbe, et puisque, jusqu'ici, nous ne connaissons encore que la circonférence du cercle, commençons par celle-ci.

282. Supposons donc que *AMB* (*Fig.* 35) est une courbe à laquelle nous ne connaîtrions encore d'autre propriété que celle-ci; que la perpendiculaire *PM*, abaissée d'un point quelconque *M* de cette courbe sur la ligne *AB*, est moyenne proportionnelle entre les deux parties *AP* et *PB*. Voyons comment l'Algèbre peut nous aider à trouver chacun des points de cette courbe, et ses différentes propriétés. Si je nomme a la ligne *AB*; la partie *AP*, x, et la perpendiculaire *PM*, y; alors *PB* sera $a-x$; et puisque nous supposons *PM* moyenne proportionnelle entre *AP* et *PB*, nous aurons

$$x : y :: y : a-x;\quad \text{d'où } y^2 = ax - x^2.$$

Concevons maintenant que *AB* soit partagé en un certain nombre de parties égales, en 10, par exemple, et que par chaque point de division on élève des perpendiculaires pm, pm, pm, etc. ; il est visible que si, dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on suppose x successivement égal à chacune des lignes Ap, Ap, etc., y deviendra égal à chaque ligne correspondante pm, pm, etc., puisque l'équation..... $yy = ax - xx$ exprime que y est toujours moyenne proportionnelle entre x et $a - x$, quel que soit d'ailleurs x, ce qui est la propriété que nous supposons à chaque perpendiculaire pm. Donc on peut trouver successivement chacun des points de cette courbe, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, et calculant les valeurs correspondantes de y : en voici un exemple. Dans la supposition que nous venons de faire, que a est divisé en 10 parties, ou qu'il est composé de 10 parties, nous aurons $a = 10$, et par conséquent l'équation devient $yy = 10x - xx$. Si donc nous supposons successivement

$$x = 1,\ x = 2,\ x = 3,\ x = 4,\ x = 5,\ x = 6,\ \text{etc.}$$

Les valeurs correspondantes de y, seront

$$y = \sqrt{9}, y = \sqrt{16}, y = \sqrt{21}, y = \sqrt{24}, y = \sqrt{25}, y = \sqrt{24};\ \text{etc.}$$

Ou bien

$$y = 3,\ y = 4,\ y = 4{,}5;\ y = 4{,}9;\ y = 5;\ y = 4{,}9;\ \text{etc.}$$

Ainsi, si l'on porte ces valeurs de y successivement sur les perpendiculaires correspondantes aux valeurs 1, 2, 3, 4, etc. de x, les points m, m, etc. déterminés de cette manière, appartiendront tous à une courbe qui aura cette propriété que chaque perpendiculaire pm sera moyenne proportionnelle entre les deux parties Ap et pB de la droite AB, courbe que nous allons voir, dans un moment, être la circonférence même du cercle.

Nous avons vu que toute racine paire avait deux valeurs, l'une positive, l'autre négative. Ainsi outre les valeurs de y, que nous venons de trouver, on a encore ces autres-ci,

$$y = -3;\ y = -4;\ y = -4{,}5;\ y = -4{,}9;\ y = -5;\ y = -4{,}9;\ \text{etc.}$$

Pour

Pour avoir les points de la courbe qu'annoncent ces nouvelles valeurs de y, il faut, conformément à ce que nous avons déjà dit plusieurs fois sur les quantités négatives, prolonger les perpendiculaires pm, pm, etc., et porter à l'opposite, c'est-à-dire, de p en m', les quantités pm', pm', etc. égales chacune à sa correspondante pm. Si l'on veut avoir un plus grand nombre de points de la courbe, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer AB divisé en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 100, c'est-à-dire, supposer $a=100$; ou bien, en conservant à a la même valeur 10, que ci-dessus, supposer à x des valeurs intermédiaires entre celles qu'on lui a données ci-dessus, on trouvera de même les valeurs intermédiaires de y, et par conséquent de nouveaux points de la courbe. La valeur $y=0$, que donne $x=10$, fait voir que la courbe rencontre la ligne AB au point B, ou $x=a=10$, puisque la perpendiculaire pm ayant alors pour valeur zéro, la distance du point m à la droite AB est nulle. On peut voir aussi, avec facilité, qu'elle doit rencontrer la ligne AB au point A : en effet, puisqu'aux endroits où la courbe rencontre cette ligne, la valeur de y doit être 0; pour savoir quels sont ces points, il n'y a qu'à supposer que y est zéro, dans l'équation $yy=ax-xx$, ce qui la réduit à $0=ax-xx$; or $ax-xx$ étant $=x(a-x)$, ce produit est zéro, dans deux cas, lorsque $x=0$, et lorsque $x=a$. Donc réciproquement y sera aussi zéro dans ces deux cas; or x est évidemment $=0$ au point A, et il est $=a$, au point B; donc la courbe rencontre en effet la ligne AB, aux points A et B.

D'après cet exemple, on peut commencer à appercevoir comment une équation sert à déterminer les différens points d'une courbe. Nous en verrons d'autres exemples; mais auparavant expliquons certains mots dont nous ferons usage par la suite.

283. Lorsqu'on veut exprimer, par une équation, la nature d'une ligne courbe, on rapporte, ou l'on conçoit qu'on rapporte chacun des points m, m, etc. à deux lignes fixes AB et

OAO, qui font entr'elles un angle déterminé, aigu, droit ou obtus, et en imaginant que de chaque point m on mène les lignes mp et mp', parallèles aux lignes *OAO* et *AB*, il est évident qu'on connaîtra la situation de ce point, si l'on connaît les valeurs des lignes mp' ou Ap et pm, ou, ce qui revient au même, si l'on connaît l'une de ces lignes, et son rapport avec l'autre. Or ce que l'on entend, lorsqu'on dit qu'une équation exprime la nature d'une ligne courbe, c'est que cette équation donne le rapport qu'il y a, pour chaque point m, entre la ligne Ap et la ligne pm, ensorte que l'une étant connue, l'équation fait connaître l'autre; et selon que ce rapport est plus ou moins composé, la courbe est elle-même d'un genre plus ou moins élevé. Les lignes Ap, ou mp', qui mesurent la distance de chaque point m à l'une *OAO* des deux lignes de comparaison, s'appellent les *abscisses;* et les lignes mp ou $p'A$, qui mesurent la distance à l'autre ligne *AB* de comparaison, s'appellent les *ordonnées*; la ligne *AB* s'appelle *l'axe des abscisses*, et la ligne *OAO* se nomme *l'axe des ordonnées*. Le point A d'où l'on commence à compter les abscisses, s'appelle l'*origine des abscisses;* on appelle de même *origine des ordonnées*, celui d'où l'on commence à compter les ordonnées Ap' ou pm : dans la Figure 35, ces deux points sont un seul et même point, savoir, le point A; rien n'assujétit à compter les abscisses depuis le même point d'où l'on compte les ordonnées; mais quand aucune circonstance ne détermine à faire autrement, il est toujours plus simple de les compter du même point. Les lignes Ap, pm se nomment d'un nom commun, les *coordonnées de la courbe;* et considérées comme appartenant indifféremment à un point quelconque de la courbe, on les appelle *des indéterminées;* on donne le même nom aux lettres ou signes algébriques x et y par lesquelles on représente ces lignes Ap et pm.

284. Revenons maintenant à notre équation, et voyons comment on peut en tirer les propriétés de la courbe.

1°. Du milieu C de *AB*, tirons à un point quelconque M

de la courbe la droite CM; en quelque endroit que ce soit, le triangle CMP sera rectangle; on aura donc

$$\overline{MP}^2+\overline{PC}^2=MC^2. \text{ Or } PC=AC-AP=\tfrac{1}{2}a-x. \text{ Donc}$$

$$y^2+\tfrac{1}{4}a^2-ax+x^2=\overline{MC}^2.$$

Or puisque la droite MP, ou y, est partout moyenne proportionnelle entre AP et PB, on a $yy=ax-xx$; donc

$$ax-xx+\tfrac{1}{4}aa-ax+xx=\overline{MC}^2;$$

c'est-à-dire, $\frac{1}{4}aa=\overline{MC}^2$, qui donne $MC=\frac{1}{2}a$; chaque point M ou m est donc également éloigné du point C; la courbe est donc une circonférence de cercle.

2°. D'un point quelconque M ou m de la courbe, menons aux deux extrémités A et B les droites MA et MB; les triangles rectangles MPA, MPB nous donneront

$$\overline{AP}^2+\overline{MP}^2=\overline{AM}^2 \text{ et } \overline{PM}^2+\overline{PB}^2=\overline{MB}^2;$$

ou, en mettant les valeurs algébriques,

$$xx+yy=\overline{AM}^2 \text{ et } aa-2ax+xx+yy=\overline{MB}^2;$$

donc en ajoutant ces deux équations et mettant pour yy sa valeur $ax-xx$, on aura

$$aa-2ax+2xx+2ax-2xx=\overline{AM}^2+\overline{MB}^2,$$

$$\text{c'est-à-dire, } \overline{AM}^2+\overline{MB}^2=aa=\overline{AB}^2;$$

propriété du triangle rectangle, et qui, par conséquent, nous fait connaître que l'angle AMB est toujours droit en quelque endroit que soit le point M sur la courbe (*Géom.* 65).

3°. Si dans l'équation $xx+yy=\overline{AM}^2$, on met pour yy sa valeur $ax-xx$, on aura $\overline{AM}^2=ax$, qui donne cette proportion

$$a : AM :: AM : x, \text{ ou } AB : AM :: AM : AP;$$

c'est-à-dire, que la corde AM est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le segment ou l'abscisse AP (*Géom*. 112).

On trouverait de même toutes les autres propriétés du cercle que nous avons démontrées en Géométrie, et cela en partant toujours de cette supposition, que l'ordonnée PM ou pm est moyenne proportionnelle entre AP et PB, ou Ap et pB.

Nous avons compté les abscisses depuis le point A, origine du diamètre, et nous avons eu l'équation $yy = ax - xx$. Si nous voulions compter les abscisses depuis le centre, c'est-à-dire, prendre pour abscisses les lignes Cp, Cp, etc.; alors représentant chacune de ces lignes par z, nous aurions..... $CP = AC - AP$, c'est-à-dire, $z = \frac{1}{2}a - x$, et par conséquent $x = \frac{1}{2}a - z$. Mettant donc pour x cette valeur dans l'équation $yy = ax - xx$, on aura

$$y^2 = a\left(\tfrac{1}{2}a - z\right) - \left(\tfrac{1}{2}a - z\right)^2, \text{ qui se réduit à } yy = \tfrac{1}{4}aa - zz,$$

c'est là l'équation du cercle en supposant les coordonnées perpendiculaires, et leur origine au centre.

Au reste, toute propriété qui appartiendra essentiellement à chaque point de la courbe, donnera toujours, en la traduisant algébriquement, la même équation pour la courbe, avec la condition cependant qu'on prenne les mêmes abscisses et les mêmes ordonnées; mais quand on changera l'origine ou la direction des coordonnées, ou toutes les deux, on pourra avoir une équation différente; néanmoins elle sera toujours du même degré. Nous venons de voir la vérité de la dernière partie de cette proposition, dans le changement que nous venons de faire pour les abscisses; au lieu de l'équation $yy = ax - xx$, nous avons eu $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, qui, étant déduite de la première, a pour base la même propriété; mais si nous partions de cette autre propriété que chaque distance MC est toujours la même et $= \frac{1}{2}a$, alors, nommant CP, z, et PM, y, nous aurions, à cause du triangle rectangle MPC, $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, qui donne $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, équation déjà trouvée plus haut, quoiqu'ici nous soyons partis d'une propriété différente.

De l'Ellipse.

285. Proposons-nous maintenant d'examiner *quelle serait la courbe qui jouirait de cette propriété que la somme des deux distances* MF + Mf (Fig. 36) *de chacun de ses points à deux points fixes* F *et* f, *serait toujours égale à une ligne donnée* a. Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *Ellipse*, il faut chercher une équation qui exprime quelle relation il y a, en vertu de cette propriété connue, entre les perpendiculaires PM menées de chaque point M sur une ligne déterminée telle que Ff, par exemple, et leurs distances FP ou AP à quelque point F ou A pris arbitrairement. Dans cette vue, je prends pour origine des abscisses le point A, déterminé en prenant, à compter du milieu C de Ff, la ligne $CA = \frac{1}{2}a$; et ayant fait $CB = CA$, je nomme AP, x; PM, y; la ligne AF qui est censée connue, c; enfin la ligne FM, z; alors

$$FP = AP - AF = (^*)\ x - c;\ Mf = FMf - FM = a - z;$$
$$fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c.$$

Cela posé, les triangles rectangles FPM, fPM, donnent

$$\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2,\ \text{et}\ \overline{Mf}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{fP}^2,$$

ou $$(1)\ zz = yy + xx - 2cx + cc,$$

et $aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + c^2$.
Retranchant la seconde de ces deux dernières équations de la première, et effaçant aa qui se trouvera de part et d'autre, j'ai

$$2az = 2ax + 2ac - 4cx,\quad \text{d'où } z = \frac{1}{a}(ax + ac - 2cx);$$

(*) Si le point M avait été pris de manière que la perpendiculaire MP tombât entre A et F, alors FP serait $c - x$; mais cela n'apporterait aucun changement à l'équation finale, parce que, dans la formation de cette équation, on n'emploie que le quarré de FP, qui est toujours $xx - 2cx + cc$, soit qu'il vienne de $x - c$, soit qu'il vienne de $c - x$.

mettant donc pour z cette valeur dans l'équation (1), on en déduira

$$(2)\ldots y^2 = \frac{4c}{a^2}(a-c)(ax-x^2).$$

Telle est l'équation de la courbe dont chaque point a la propriété que nous avons supposée.

286. Cette équation peut servir à décrire la courbe par points, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, comme nous l'avons fait ci-dessus à l'occasion du cercle, et calculant en même temps les valeurs de y. Comme le procédé est absolument le même, nous n'en ferons point le calcul.

287. On peut encore décrire l'*ellipse* par points, en cette manière; après avoir fait $CB = CA = \frac{1}{2}a$, on prend un intervalle quelconque Br, et l'on décrit au-dessus et au-dessous de AB, du point f comme centre, avec Br pour rayon, un arc que l'on coupe en M et M' par un autre décrit du point F, comme centre, et du rayon Ar. Tous les points M et M', trouvés de cette manière, sont à l'ellipse.

288. La propriété fondamentale, d'après laquelle nous venons de trouver l'équation, donne elle-même un moyen fort simple de décrire cette courbe par un mouvement continu. En effet, ayant choisi les deux points F et f tels qu'on les veut, on placera deux pointes ou piquets aux deux points F et f, et y ayant fixé les deux extrémités d'un fil plus grand que la distance Ff, si l'on tend ce fil par le moyen d'un style M que l'on fera marcher en tenant toujours ce fil tendu, ce style M tracera la courbe en question, puisque la somme des deux points F et f sera toujours égale à la longueur totale du fil.

289. De là il est aisé de voir que si la longueur du fil a été prise égale à AB, la courbe passera par les deux points

A et B : car puisque $Cf = CF$, on aura $AF = Bf$, et par conséquent

$$AF + Af = Af + Bf = a, \text{ et } BF + Bf = BF + AF = a.$$

C'est ce que l'équation fait voir aussi ; car pour savoir où la courbe rencontre la droite Ff prolongée, il faut faire $y = 0$: or cette supposition donne $x(a - x) = 0$, ce qui a lieu dans deux cas ; savoir, lorsque $x = 0$, c'est-à-dire, au point A et lorsque $x = a$, c'est-à-dire au point B.

290. L'équation (2) fait voir aussi que la courbe s'étend au-dessous comme au-dessus de la ligne AB, et qu'elle est absolument la même de part et d'autre de l'axe AB. En effet, cette équation donne

$$(3)\ldots y = \pm\sqrt{\frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)},$$

qui fait voir que, pour chaque valeur de x ou de AP, il y a deux valeurs de y ou de PM parfaitement égales, mais qui étant de signes contraires, doivent être portées de côtés opposés.

Il est encore évident que si sur le milieu C de AB on élève la perpendiculaire DD', la courbe sera partagée en deux parties parfaitement égales et semblables : c'est une suite immédiate de la description ; c'est aussi une suite de l'équation ; mais cette conclusion deviendra plus facile quand nous aurons fait sur cette équation les autres remarques qui nous restent à faire.

291. La ligne AB s'appelle le *grand axe* de l'ellipse, et la ligne DD' le *petit axe*. Les deux points F *et* f s'appellent les *foyers*. Les points A, B, D, D' sont les *sommets* des axes ; et le point C le *centre*.

292. Si l'on veut avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le foyer, il faut supposer dans l'équation (3) AP ou $x = AF = c$; alors on aura

$$y = \pm\frac{2}{a}(ac - c^2). \text{ Donc } m''m''' = \frac{4}{a}(ac - c^2);$$

cette ligne $m''m'''$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'ellipse. *Le paramètre est donc moindre que le quadruple de la distance* c *du sommet au foyer*, puisque sa valeur qui est la même chose que, $4c - \frac{4c^2}{a}$, est évidemment moindre que $4c$. Si l'on nomme p cette valeur du paramètre, on aura

$$p = \frac{1}{a}(4ac - 4c^2). \text{ Donc } \frac{p}{a} = \frac{4ac - 4c^2}{a^2};$$

on pourra donc changer l'équation de l'ellipse, en cette autre

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx).$$

293. Si l'on veut savoir quelle est la valeur de la ligne CD, il n'y a qu'à supposer dans l'équation (2), que AP ou.... $x = AC = \frac{1}{2}a$; on aura

$$y^2 = CD^2 = c(a - c) = AF \times BF.$$

On voit donc que CD, *ou le demi-petit axe, est une moyenne proportionnelle entre les deux distances d'un même foyer aux deux sommets* A *et B*.

Comme la ligne DD' est une des lignes les plus remarquables de l'ellipse, on l'introduit dans l'équation de préférence à la ligne AF ou c. Pour nous conformer à cet usage, nous nommerons b cette ligne DD'; nous aurons donc..... $CD = \frac{1}{2}b$, et puisque nous venons de trouver $\overline{CD}^2 = ac - cc$, nous aurons $bb = 4ac - 4cc$; l'équation à l'ellipse pourra donc être changée en (4)...

$$(4)\ldots\ yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx).$$

Puisque nous avons $pa = 4ac - 4cc$; et $bb = 4ac - 4cc$; de ces deux équations nous conclurons $pa = bb$, et par conséquent, en réduisant cette équation en proportion $a:b::b:p$;

le paramètre est donc *une troisième proportionnelle au grand axe et au petit axe.*

294. L'équation (4) donne $yy : ax - xx :: bb : aa$; faisant donc attention que $ax - xx = x(a - x)$, et mettant au lieu des quantités algébriques, les lignes de la figure qu'elles représentent, on aura $\overline{PM}^2 : AP \times PB :: \overline{DD'}^2 : \overline{AB}^2$; c'est-à-dire, que *le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe de l'ellipse, est au produit des deux abscisses* AP *et* PB : *comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.* Et puisque cette propriété a lieu pour tous les points de l'ellipse, il s'ensuit que *les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

295. L'équation (4) ne diffère de celle du cercle (282) qui serait décrit sur AB comme diamètre (*Fig.* 37) qu'en ce que, dans la première, $ax - xx$, est multipliée par $\frac{bb}{aa}$ c'est-à-dire, par le rapport du quarré du petit axe au quarré du grand; ensorte que si l'on nomme z une ordonnée quelconque PN du cercle, on aura $zz = ax - xx$; mettant donc pour $ax - xx$, cette valeur zz dans l'équation à l'ellipse, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa} zz$, et tirant la racine quarrée $y = \frac{b}{a} z$, ou... $ay = bz$, qui donne

$y : z :: b : a$, ou $PM : PN :: DD' : AB$, ou $:: CD : AC$ ou CE :

on voit donc que *les ordonnées à l'ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur le grand axe, diminuées proportionnellement, c'est-à-dire, dans le rapport du grand axe au petit axe.* De là il est aisé de décrire une ellipse par le moyen du cercle. On voit en même temps que le cercle est une ellipse dont les deux axes a et b sont égaux, ou dont la distance du sommet au foyer est égale au demi-grand axe, ou encore dont le paramètre est égal au diamètre. Car en supposant dans les équations ci-dessus, $b = a$, ou $c = \frac{1}{2} a$, ou $p = a$; on a $yy = ax - xx$, équation au cercle.

296. Par les équations que nous avons trouvées jusqu'ici, il paraît donc qu'il n'en est pas de l'ellipse comme du cercle : une seule ligne détermine celui-ci, c'est son diamètre ; au lieu que le grand axe AB (*Fig.* 36) ne suffit pas pour déterminer l'ellipse ; il faut encore connaître ou le petit axe b ou son paramètre p ou la distance c du sommet au foyer. Quand on connaît le grand axe et la distance c, l'ellipse est facile à décrire, comme on l'a vu ci-dessus. Mais si l'on donnait le grand axe et le petit axe, il faudrait pour décrire l'ellipse par un mouvement continu, déterminer les foyers ; c'est une chose facile, en prenant le demi-grand axe pour rayon, et traçant de l'extrémité D (*Fig.* 36) du petit axe, comme centre, deux petits arcs qui coupent le grand axe aux deux points F et f qui seront les foyers : car la somme des deux distances $FD + Df$ devant être égale à a, il faut, lorsque ces deux lignes sont égales, que chacune soit égale à $\frac{1}{2}a$. Si l'on donnait le grand axe et le paramètre, on déterminerait le petit axe en prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes ; c'est ce qu'enseigne la proportion .. $a : b :: b : p$, trouvée ci-dessus (293). Le petit axe étant trouvé, on acheverait comme il vient d'être dit.

297. *Si pour quelque point* M *que ce soit de l'ellipse* (Fig. 36) *on prolonge la ligne* fM *tirée d'un des foyers, jusqu'à ce que son prolongement* MG *soit égal à l'autre distance* MF ; *et qu'ayant tiré* GF, *on lui mène du point* M *la perpendiculaire* MOT, *cette dernière sera tangente à l'ellipse, c'est-à-dire, ne la rencontrera qu'au seul point* M. En effet, à cause des lignes égales MF et MG, la ligne MT est perpendiculaire sur le milieu GF. Donc si de tel autre point N que ce soit, pris sur cette ligne, on mène les deux droites NG et NF, elles sont égales. Supposerons donc que MT pût rencontrer l'ellipse en quelqu'autre point N ; alors, en tirant Nf, il faudrait que $FN + Nf$ pût être égal à $MF + Mf$, ou $GM + Mf$, c'est-à-dire, à Gf ; mais Gf est plus petit que

$GN + Nf$; et, par conséquent plus petit que $FN + Nf$; donc le point N est hors de l'ellipse.

298. Les angles FMO, OMG sont égaux, d'après la construction qu'on vient de donner; or OMG est égal à son opposé fMN, donc FMO est égal à fMN. Donc *les deux lignes qui vont d'un même point de l'ellipse aux deux foyers, font des angles égaux avec la tangente.* L'expérience apprend qu'un rayon de lumière qui tombe sur une surface, se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; donc si F est un point lumineux, tous les rayons qui, partis du point F, tomberont sur la concavité MAM' iront se rassembler en f, et réciproquement. Si du point M, on élève sur MT la perpendiculaire MI, qui sera en même temps perpendiculaire à la courbe, cette ligne divisera l'angle FMf en deux parties égales; car si des angles droits IMT, IMN on retranche les angles égaux FMT et fMN, les angles restans FMI et IMf seront égaux.

299. De là, on peut calculer la valeur de la distance PI depuis l'ordonnée jusqu'à l'endroit où la perpendiculaire MI rencontre l'axe. Cette ligne PI s'appelle *sou-normale*, et la ligne MI, *Normale*. Pour calculer PI, nous allons d'abord calculer FI. Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales, on a $Mf : MF :: fI : FI$ (*Géom.* 104); et par conséquent (*Géom.* 98)

$$fM + FM : Mf - FM :: fI + FI : fI - FI.$$

Or $Mf + FM = a$; et en faisant $MF = z$, comme ci-dessus (285), $Mf = a - z$, par conséquent $Mf - MF = a - 2z$; d'ailleurs

$$fI + FI = Ff = AB - 2AF = a - 2c,$$

$$\text{et } fI - FI = Ff - 2FI = a - 2c - 2FI; \text{ donc}$$

$$a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2FI; \text{ donc}$$

$$aa - 2ac - 2a \times FI = aa - 2ac - 2az + 4cz,$$

D'où l'on tire $FI = \frac{az - 2cz}{a}$ ou, en mettant pour z sa valeur $\frac{1}{a}(ax + ac - 2cx)$ trouvée (285), on a

$$FI = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa};$$ mais

$$FI = FP + PI = AP - AF + PI = x - c + PI;$$

donc $PI = FI - x + c = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa} - x + c$

$= \frac{4(ac - c^2)}{aa}(\frac{1}{2}a - x) = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}a - x)$, car $ac - c^2 = \frac{1}{4}b^2$ (293)

300. De là, il est aisé d'avoir la valeur de la distance PT depuis l'ordonnée jusqu'à la rencontre de la tangente, ce qu'on appelle la *sou-tangente*. Car le triangle IMT étant rectangle, et PM une perpendiculaire abaissée de l'angle droit, on a (*Géom.* 112) $PI : PM :: PM : PT$, c'est-à-dire $\frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}a - x) : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$ ou, en mettant pour yy sa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $PT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x}$.

Les expressions algébriques des deux lignes PI et PT peuvent servir à mener une perpendiculaire et une tangente à l'ellipse, en quelque point M que ce soit. Car lorsque le point M est donné, en abaissant la perpendiculaire MP, on a la valeur de $AP = x$; et comme on est supposé connaître a et b, on connaît donc tout ce qui entre dans la valeur de P et dans celle de PT.

301. De l'expression de PT, on peut conclure que si l'on mène une tangente au cercle décrit sur le grand axe AB (*Fig.* 37), au point N où ce cercle est rencontré par l'ordonnée PM à l'ellipse, les tangentes NT et MT aboutiront au même point T sur l'axe. Car puisque le second axe b n'entre point dans l'expression de PT, cette ligne PT sera donc toujours la

même tant que a sera le même et x le même. Ainsi toutes les tangentes aux points correspondans de toutes les ellipses décrites sur AB, comme grand axe, se rencontrent au même point T.

Si à PT (*Fig.* 36), on ajoute CP qui est $\frac{1}{2}a - x$, on aura $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$ qui, en réduisant tout en fraction, se réduit à $\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$; c'est-à-dire, que $CT = \frac{\overline{AC}^2}{CP}$, d'où l'on tire cette proportion $CP : AC :: AC : CT$.

302. Si l'on veut avoir l'expression de TM, cela sera facile par le moyen du triangle rectangle TPM qui donne

$$\overline{TM}^2 = \overline{TP}^2 + \overline{PM}^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa}(ax - xx)$$

$$= \left[ax - xx + \frac{bb}{aa}(\tfrac{1}{2}a - x)^2\right] \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}.$$

303. Si de quelque point M que ce soit de l'ellipse, on mène sur le petit axe DD' la perpendiculaire ou l'ordonnée MP', et qu'on pose $DP' = x'$; $MP' = y'$; on aura
$DP' = CD - CP' = CD - PM$, ou $x' = \frac{1}{2}b - y$, et $y = \frac{1}{2}b - x'$.
On aura de même

$$MP' = CP = CA - AP; \text{ ou } y' = \tfrac{1}{2}a - x \text{ et } x = \tfrac{1}{2}a - y,$$

Si l'on substitue ces valeurs de x et de y dans l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2), \text{ on trouvera } y_1{}^2 = \frac{a^2}{b^2}(bx_1 - x_1{}^2),$$

équation semblable à celle qu'on a eue pour le grand axe, et dont on tirera par conséquent des conclusions semblables, savoir, que *le quarré d'une ordonnée* P′M *au petit axe, est au produit des deux abscisses* DP′ × P′D′, *comme le quarré du grand axe est au quarré du petit.* On en conclura aussi que *les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes;* et que l'*el-*

lipse peut être décrite par le moyen du cercle construit sur son petit axe, en alongeant les ordonnées de ce cercle dans le rapport du petit axe au grand (*Fig.* 37).

304. On peut voir facilement par là, que la courbure de la surface extérieure des mâts est celle d'une portion d'ellipsoïde, c'est-à-dire, d'un solide engendré par la révolution d'une demi ellipse DRO (*Fig.* 39) tournant autour de son grand axe. En effet, pour terminer les diamètres moyens entre le plus grand et le plus petit, on tire une ligne CD pour représenter le plus grand diamètre, et décrivant des extrémités C et D, comme centres, avec le rayon CD, les deux arcs DA et CA qui se coupent en A, on abaisse la perpendiculaire AB, et ayant mené, parallèlement à CD une ligne EF égale au plus petit diamètre du mât, on regarde la partie interceptée BL comme représentant la hauteur du mât depuis le premier pont, où se trouve le plus grand diamètre, jusqu'au chouquet. On divise BL en un certain nombre de parties égales, et menant par les points de division des parallèles IgN à la ligne CD, on prend ces parallèles pour les diamètres moyens que doit avoir le mât à des hauteurs représentées par la ligne correspondante Bg; or si l'on conçoit que BM soit la hauteur réelle qui a été représentée par BL, et si l'on prend BT telle que l'on ait $BT : BM :: Bg : BL$, alors BT sera la hauteur à laquelle on doit placer le demi-diamètre gN; tirant donc TR parallèle et égale à gN, le point R sera un point de la surface du mât; mais si par le point R et par le point N, on mène RN qui rencontre BD en V, cette ligne sera parallèle à BM, et puisqu'on a $BT : BM :: Bg : BL$ ou $BT : Bg :: BM : BL$, on aura, à cause de $BT = RV$ et $Bg = VN$; $RV : VN :: BM : BL$; c'est-à-dire que les ordonnées RV de la courbe du mât sont aux ordonnées VN du cercle AND, toujours dans un même rapport; donc cette courbe est une ellipse. Si l'on voulait la décrire par un mouvement continu, il faudrait en déterminer les axes, ce qui est facile en menant CO parallèle à BM, et telle que

$CO : CD :: BM : BL$; CO et CD seront les deux demi-axes, avec lesquels il sera facile de déterminer les foyers, et par conséquent de décrire la courbe, par quelqu'une des méthodes que nous avons données (286, 87 et 88). Mais tout ceci suppose qu'on sait déterminer le point L, tel que menant ELF parallèle à CD, ELF soit égal au plus petit diamètre du mât ; c'est ce que l'on fera facilement en cette manière : on prolongera CD vers H d'une quantité CH égale à la moitié du petit diamètre : du point H, comme centre, avec un rayon égal à CD, on décrira un petit arc qui coupera AB au point cherché L. Car si l'on imagine la ligne EF prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre CO en T, et que l'on tire le rayon CF, le triangle rectangle CTF donnera

$$CT = \sqrt{\overline{CF}^2 - \overline{TF}^2} = \sqrt{\overline{HL}^2 - \overline{BH}^2} = BL,$$

puisqu'on prescrit de faire $HL = CD = CF$, et $HC =$ à la valeur de LF, ce qui rend $BH = TF$.

305. Par ce qui précède, on voit donc que les propriétés à l'égard du second axe sont semblables à celles qu'on a trouvées à l'égard du premier, du moins en ce qui ne dépend point des foyers. Si l'on veut avoir sur le second axe les lignes analogues à celles que nous venons de calculer sur le premier axe, c'est-à-dire, $P'I'$, $P'T'$, CT'' et MT'' (*Fig.* 36), on les trouvera aisément par le moyen de leurs correspondantes qu'on vient d'avoir, et des triangles semblables qu'il est aisé de reconnaître dans la figure. Si on exprime ces lignes par le moyen des abscisses DP' ou x', on trouvera leurs expressions toutes semblables à celles qu'on a eues, en x, pour les lignes analogues sur le premier axe. On donne aussi un *paramètre* au second axe ; mais ce que l'on entend alors par cette ligne, ce n'est pas une ligne qui passe par le foyer de ce second axe (car il n'a point de foyers), mais une troisième proportionnelle à ce second axe et au premier.

306. Jusqu'ici nous n'avons compté les abscisses que depuis le sommet ; si nous voulions les compter depuis le centre

C, alors nommant l'abscisse CP, z, nous aurions AP ou $x = \frac{1}{2}a - z$; substituant cette valeur de x dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ et dans les valeurs de PI, PT, CI et $\overline{TM}^2$, on aura

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right);\ PI = \frac{b^2}{a^2}z;\ PT = \frac{1}{z}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right).$$

$$CT = \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{z};\ \ TM^2 = \frac{1}{z^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2}{a^2}z^2\right);$$

L'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - z^2\right)$, donne $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$, qui fait voir que pour une même valeur de CP ou z, on a deux ordonnées PM et PM'. Comme les valeurs de z commencent en C et finissent en A, il semble d'abord que cette équation ne donne que la moitié DAD' de l'ellipse; mais rien ne détermine à donner à z des valeurs positives plutôt que des valeurs négatives; en donnant à z de ces dernières valeurs, on aura les ordonnées pm qui déterminent la seconde moitié, et comme en mettant $-z$, au lieu de $+z$, dans $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$, cette quantité ne change pas, il s'ensuit que la moitié DBD' est parfaitement égale et semblable à la moitié DAD'.

307. Si d'un point quelconque M de l'ellipse (*Fig.* 38), on mène au milieu C de l'axe AB, c'est-à-dire, au centre une droite MCM' terminée de l'autre part à l'ellipse, on appelle cette droite un diamètre. Si par le sommet M, on mène la tangente MT, et par le centre C le diamètre NN' parallèle à MT, celui-ci s'appellera *diamètre conjugué* du premier. Une ligne mO menée d'un point m de l'ellipse parallèlement à MT, et terminée au diamètre MM', s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre, et MO en est l'*abscisse*. Le paramètre

paramètre du diamètre MM' est une troisième proportionnelle à MM' et NN'.

308. Nous allons démontrer que les ordonnées mO, pour un diamètre quelconque, ont des propriétés semblables à celles des ordonnées aux axes. A cet effet, j'abaisse des points m et O les perpendiculaires mp, OQ sur l'axe AB; puis je mène la ligne mS parallèle au même axe. Je fais

$$AB=a;\ PM=y;\ CP=z;\ Qp=g;\ CQ=k,$$

j'aurai

$$AP=\tfrac{1}{2}a-z;\ PB=\tfrac{1}{2}a+z;$$
$$Ap=CA-Cp=CA-CQ-Qp=\tfrac{1}{2}a-k-g;$$
$$pB=CB+Cp=\tfrac{1}{2}a+k+g.$$

Les triangles semblables TPM, mSO donnent

$$TP:MP::mS \text{ ou } pQ:SO;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\frac{1}{4}aa-zz}{z}:y::g:SO=\frac{gzy}{\frac{1}{4}aa-zz}.$$

Les triangles semblables CMP, COQ donnent

$$CP:PM::CQ:QO, \text{ ou } z:y::k:QO=\frac{ky}{z};$$

donc

$$pm=QS=QO-SO=\frac{ky}{z}-\frac{gzy}{\frac{1}{4}aa-zz}.$$

Or puisque le point m appartient à l'ellipse, il faut (294) que

$$\overline{pm}^2:\overline{PM}^2::Ap\times pB:AP\times PB,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{ky}{z}-\frac{gzy}{\frac{1}{4}aa-zz}\right)^2:yy::(\tfrac{1}{2}a-k-g)$$
$$\times(\tfrac{1}{2}a+k+g):(\tfrac{1}{2}a-z)(\tfrac{1}{2}a+z),$$

ou multipliant les extrêmes entr'eux et les moyens aussi, et réduisant, on trouvera........

$$(1)\quad -\tfrac{1}{4}a^2\frac{k^2}{z^2}+\frac{g^2z^2}{\tfrac{1}{4}a^2-z^2}=\tfrac{1}{4}a^2-g^2,$$

équation qui nous est nécessaire pour notre objet ; mais avant d'en faire usage, tirons-en une connaissance dont nous avons besoin. Si l'on suppose que le point O, qui jusqu'ici était quelconque, descende en C, c'est-à-dire, que la ligne mO passe par le centre, ou devienne CN, alors CQ, ou k devient zéro, et la ligne Qp ou g devient CR. Or si dans l'équation qu'on vient de trouver, on fait $k=0$, on trouvera

$$gg=\tfrac{1}{4}aa-zz;$$

c'est-à-dire,

$$\overline{CR}^2=\tfrac{1}{4}aa-zz=(\tfrac{1}{2}a-z)(\tfrac{1}{2}a+z)=AP\times PB.$$

Après cette remarque, revenons à notre objet et faisons

$$CM=\tfrac{1}{2}a',\ CN=\tfrac{1}{2}b'=mO=y',\ CO=z'.$$

Les triangles semblables CPM, CQO donnent

$$CM:CO::CP:CQ;\ \text{ou}\ \tfrac{1}{2}a':z'::z:k=\frac{zz'}{\tfrac{1}{2}a'}.$$

Les triangles CNR, mSO, semblables à cause des côtés parallèles, donnent

$$mO:mS::CN:CR,\ \text{ou}\ y':g::\tfrac{1}{2}b':CR=\frac{\tfrac{1}{2}gb'}{y'};$$

donc $$\overline{CR}^2=\frac{\tfrac{1}{4}ggb'b'}{y'y'};$$

mais $$CR=\tfrac{1}{4}aa-zz;$$

donc $$\frac{ggb'b'}{y'y'}=\tfrac{1}{4}aa-zz;$$

d'où l'on tire $$gg=\frac{y'y'(\tfrac{1}{4}aa-zz)}{\tfrac{1}{4}b'b'}.$$

Reprenons maintenant l'équation et substituons pour gg et kk les valeurs que nous venons de trouver ; nous aurons....

$$\tfrac{1}{4}a^2 \frac{z^2z'^2}{\tfrac{1}{4}a'^2 - z^2} \times \frac{z^2}{\tfrac{1}{4}a^2 - z^2} \times \frac{y'^2(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)}{\tfrac{1}{4}b'^2} = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{y'^2(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)}{\tfrac{1}{4}b'^2}$$

On en déduit (2)...$y'^2 = \frac{b'b'}{a'a'}(\tfrac{1}{4}a'a' - z'z'$. Donc

$$y^2, : \tfrac{1}{4}a^2, - z^2 : : b^2, : a^2, ; \text{ ou } \overline{mO}^2 : OM \times OM' : : \overline{NN'}^2 : \overline{MM'}^2.$$

Ainsi l'équation par rapport à deux diamètres conjugués quelconques, est semblable à celle qu'on a eue à l'égard des deux axes.

309.. Si l'on fait $y' = 0$, on trouve

$$z' = \pm \tfrac{1}{2} a'.$$

La courbe rencontre donc la ligne MM' en deux points M et M' également éloignés du centre C ; ainsi *tous les diamètres de l'ellipse se coupent en deux parties égales au centre.*

310. L'équation (2) donnant

$$y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{\tfrac{1}{4} a'a' - z'z'},$$

fait voir que si l'on prolonge mO de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe ; donc *chaque diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine* M.

311. De là on peut conclure ; 1°. que la tangente à l'extrémité N du diamètre NN' est parallèle au diamètre MM'. 2°. que les ordonnées Om au diamètre MM' sont celles du cercle qui auroit MM' pour diamètre, mais diminuées ou augmentées dans le rapport de a' à b', et inclinées sous un angle égal à celui des diamètres conjugués. Si $a' = b'$, ces ordonnées sont précisément égales à celles de ce même cercle. Enfin si l'on veut savoir à quel endroit de l'ellipse les deux

17.

diamètres conjugués peuvent être égaux, il n'y a qu'à chercher à quel endroit on a $CP = CR$, ou $\overline{CP}^2 = \overline{CR}^2$; c'est-à-dire, $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; or cette équation donne $z = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, que l'on construira ainsi : ayant décrit sur le grand axe AB, comme diamètre (*Fig.* 37), le demi-cercle $ANEB$ coupé en E par le petit axe CD, on divisera l'arc AE en deux parties égales en N'', et ayant abaissé $N''P$ qui coupe l'ellipse en M'' et M', CM'' et CM' seront les deux demi-diamètres conjugués égaux. Car si l'on nomme CP, z comme le triangle CPN'' est rectangle et isoscèle, à cause de l'angle ACN'' de 45°, on aura

$$z^2 + z^2 = \overline{CN}^2 = \frac{1}{4}a^2 = 2z^2; \quad \text{donc} \quad z = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

312. Si du centre C (*Fig.* 38) on mène la perpendiculaire CF sur la tangente TM, les triangles semblables TPM, TCF donneront

$$TM : PM :: CT : CF; \quad \text{d'où } CF = \frac{PM \times CT}{TM}.$$

Pareillement les triangles TPM et CNR, semblables à cause des côtés parallèles, donneront

$$TM : PT :: CN : CR; \quad \text{donc } CN = \frac{TM \times CR}{PT}.$$

Donc

$$CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT},$$

d'où

$$\overline{CN}^2 \times \overline{CF}^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{CT}^2 \times \overline{CR}^2}{PT^2};$$

or nous avons trouvé (308) que

$$y^2 \text{ ou } \overline{PM}^2 = \frac{bb}{aa}(\tfrac{1}{4}aa - zz), \quad \overline{CT}^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz},$$

$$\overline{PT}^2 = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}, \text{ et } \overline{CR}^2 = \tfrac{1}{4}aa - zz:$$

substituant ces quantités, on aura, après les réductions faites, $\overline{CN}^2 \times \overline{CF}^2 = \frac{1}{16} a^2 b^2$, et par conséquent $CN \times CF = \frac{1}{4} ab$; or en menant la tangente NT'' qui rencontre TM en I; $CN \times CF$ exprime la surface du parallélogramme $CMIN$; et $\frac{1}{4} ab$ exprime celle du rectangle formé sur les deux demi-axes; donc *les parallélogrammes formés par les tangentes aux extrémités des diamètres conjugués, sont égaux entr'eux, et au rectangle formé sur les deux axes.*

313. Les mêmes triangles semblables TPM et CRN donnent, $PT : PM :: CR : RN$; donc

$$\overline{RN}^2 = \frac{\overline{CR}^2 \times \overline{PM}^2}{PT^2} = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa};$$

mais les triangles rectangles CRN et CPM donnent

$$\overline{CR}^2 + \overline{RN}^2 = \overline{CN}^2 \quad \text{et} \quad \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2;$$

donc

$$\overline{CR}^2 + \overline{RN}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{CM}^2;$$

substituant dans le premier membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques, on aura, toute réduction faite,

$$\tfrac{1}{4} aa + \tfrac{1}{4} bb = \overline{CN}^2 + \overline{CM}^2;$$

donc *la somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconque de l'ellipse, est égale à la somme des quarrés des deux demi-axes.*

314. Si dans $\overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RN}^2$, on substitue pour CR et RN leurs valeurs, on aura

$$\overline{CN}^2 = \tfrac{1}{4} aa - zz + \frac{bbzz}{aa};$$

or nous avons trouvé

$$\overline{TM}^2 = \left(\tfrac{1}{4} aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right) \times \frac{\frac{1}{4} a^2 - z^2}{z^2},$$

Par conséquent

$$\overline{TM}^2 = \overline{CN}^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz};$$

mais les triangles semblables TPM, $MP'T'$ donnent, en quarrant,

$$\overline{PT}^2 : \overline{TM}^2 :: \overline{P'M}^2 : \overline{MT'}^2;$$

ou

$$\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : \overline{CN}^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz : \overline{MT'}^2;$$

donc

$$\overline{MT''}^2 = \overline{CN}^2 \frac{z^2}{\frac{1}{2}a^2 - z^2}, \quad \text{donc } \overline{TM}^2 \times \overline{MT'}^2 = \overline{CN}^2$$

ou $$TM \times MT' = \overline{CN}^2;$$

mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura $2CM$:

$$2CM : 2CN :: 2CN : p' \text{ (307)}; \quad \text{d'où } \overline{CN}^2 = \tfrac{1}{2}p' \times CM.$$

Donc

$$TM \times MT' = \tfrac{1}{2}p' \times CM; \quad \text{donc } CM : TM :: MT' : \tfrac{1}{2}p'.$$

Si sur TT', comme diamètre (*Fig.* 40), on décrit un demi-cercle, il passera sur le point C, puisque l'angle TCT' est droit; or si l'on prolonge CM jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en V, on aura, par la nature du cercle (*Géom.* 127),

$$CM : TM :: MT' : MV; \quad \text{donc } MV = \tfrac{1}{2}p'.$$

315. De là on peut tirer une méthode simple pour avoir les axes d'une ellipse, et par conséquent pour la décrire, lorsqu'on ne connaît que deux diamètres conjugués MM' et NN', avec l'angle qu'ils font entre eux. On prolongera CM d'une quantité MV égale à son demi-paramètre, du milieu X de CV on élevera une perpendiculaire XZ, qui rencontre en Z la ligne indéfinie TT' menée par le point M, parallèlement à NN', puis du point Z, comme centre, avec la distance

ZC comme rayon, on décrira un cercle qui rencontrera TT'' en deux points T et T'', par lesquels et le point C tirant TC et $T'C$, ce seront les directions des deux axes. On déterminera ensuite la grandeur de ces axes, en abaissant les perpendiculaires MP et MP', et prenant CA égal à la moyenne proportionnelle entre CT et CP, et CD égal à la moyenne proportionnelle entre CT' et CP'; car on a vu ci-dessus (301) que $CP : CA :: CA : CT$; il est aisé de prouver, par le moyen des triangles semblables TPM et TCT'', et des valeurs connues de TP, PM et CT, que $CT = \frac{\overline{CD}^2}{CP'}$, c'est-à-dire, que $CP' : CD :: CD : CT'$.

316. Remarquons, en finissant ce qui regarde l'ellipse, qu'on emploie souvent cette courbe dans l'architecture navale. On s'en sert pour déterminer les diamètres moyens des *vergues*, comme nous avons vu, ci-dessus, qu'on s'en servait pour les diamètres moyens des *mâts*. On l'emploie encore pour déterminer les projections des *lisses*, etc. Dans tous ces cas on part, pour décrire l'ellipse, de la propriété qu'a cette courbe, savoir que ses ordonnées sont proportionnelles à celles du cercle décrit sur l'un de ces axes. C'est encore sur ce principe qu'est fondée la règle suivante que l'on donne pour construire le *maître couple* d'un navire auquel on veut donner beaucoup de capacité. Supposant (*Fig.* 41) que AE est égal à la ligne du *creux*; EM perpendiculaire à AE, la demi-largeur du vaisseau; MF le demi-plat de la varangue; $FB = EI$ l'acculement; on décrit à part un quarré $opqr$ dont on fait le côté $op = EF$. Ayant divisé op en un certain nombre de parties égales, et AI en un pareil nombre de parties, on mène, par les points de division, des perpendiculaires à op et AI; puis décrivant du point r, comme centre, et du rayon ro, le quart de cercle onq, on porte la partie mn de chaque parallèle à pq, en $m'n'$ sur la parallèle à IB, correspondante à pareille division; la courbe $An'B$, qui passe par tous les points n' ainsi déterminés, forme une partie du maître couple qu'on achève ensuite, pour la partie inférieure, en menant du

point B au point C bord de la quille, la ligne BC, élevant sur son milieu l, la perpendiculaire lk qui coupe en k la ligne Bk parallèle à AE; alors du point k, comme centre, avec le rayon kB, on décrit l'arc de cercle BC qui touche la courbe $An'B$ au point B, parce que son centre k est sur la perpendiculaire à la courbe $An'B$, au point B. L'autre moitié se construit de même.

Il est facile de voir maintenant que la courbe dont il s'agit est une ellipse dont le demi-grand axe est $BT = AI$; et le demi-petit axe $= AT = pq = EF$; en effet si par le point (*) n' et par le point n on mène $n'n$, cette ligne sera parallèle à AE; et puisque les points m et m' sont deux points de division correspondans, on aura $om : Am' :: op : AI$; c'est-à-dire, en supposant que nn' rencontre or en s et AT en u, $sn : un' :: or$ ou $AT : TB$; donc les ordonnées un' de la courbe $An'B$ sont aux ordonnées sn du quart de cercle, toujours dans le rapport de BT à AT; donc cette courbe est une ellipse : d'ailleurs il est facile de voir que BT et AT sont demi-axes. Or comme l'ellipse rencontre perpendiculairement ses axes, il est visible que pour joindre le point B et le point C par un arc qui touche la courbe en B, il faut que le centre k de cet arc soit sur la ligne TB prolongée.

De l'Hyperbole.

317. Considérons maintenant la courbe (*Fig.* 42) qui aurait, en chacun de ses points M, cette propriété, que la différence $Mf - MF$ des distances Mf et MF à deux points fixes F et f, fût toujours la même, et égale à une ligne donnée a. Nous allons chercher, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires PM, menées sur la ligne Ff, et leurs distances FP ou AP à quelque point fixe F ou A, pris arbitrairement sur la ligne Ff. Je prends donc, pour origine des abscisses, le point A déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff, la ligne

(*) Nous supposons ici, pour faciliter la démonstration, qu'on a placé le côté op sur le prolongement de IA.

$CA = \frac{1}{2}a$, et je fais $CB = CA$. Cela posé, je nomme AP x; PM, y; la ligne AF, qui est censée connue, c; et la ligne FM, z; alors

$$FP = AF - AP = c - x \text{ (*)}$$

$$fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x.$$

Mais

$$Mf - MF = a; \quad \text{donc } Mf = a + MF = a + z.$$

Les triangles rectangles FPM, fPM donnent

$$\overline{FP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{FM}^2, \text{ et } \overline{fP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{fM}^2;$$

c'est-à-dire,

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2,$$

et $\quad c^2 + 2ac + a^2 + 2cx + 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2.$

Retranchant la première de ces deux équations de la seconde, on a

$$4cx + 2ac + 2ax = 2az, \quad \text{d'où } z = \frac{2cx + ac + ax}{a};$$

mettant donc, pour z, cette valeur dans la première équation, nous aurons.................... $cc - 2cx + xx + y^2$ $= \frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$; d'où

$$(1) \ldots y^2 = \frac{(4ac + 4cc)}{aa}(ax + xx).$$

318. Cette équation peut servir à décrire la courbe, par des points trouvés successivement, en donnant à x plusieurs valeurs. On peut encore décrire la courbe, par points, en prenant arbitrairement une partie Br plus grande que BF, et décrivant du point f, comme centre, et du rayon br, un arc que l'on coupera en quelque point M par un autre arc décrit du point F, comme centre, avec le rayon Ar.

(*) Si le point P était au-delà de F par rapport à A; FP serait $x - c$; mais cela ne changerait rien à l'équation finale.

Enfin on peut décrire cette même courbe, par un mouvement continu, de la manière suivante. On fixera au point f une règle indéfinie qui puisse tourner autour de ce point. Au point F et à l'un des points Q de cette règle, on attachera les extrémités d'un fil FMQ, moins long que fQ, et dont la différence avec fQ soit égale à AB ; alors, par le moyen d'une pointe, ou stile M, on appliquera une partie MQ du fil, suivant la règle : faisant alors mouvoir le stile, de M vers A, en tenant toujours le fil tendu, la règle s'abaissera, la partie FM diminuera et le stile M décrira la courbe MA dont il s'agit, et qu'on appelle une *hyperbole*. En effet, il est évident que la totalité fQ ou $fM + MQ$ étant toujours de même grandeur, et la longueur $FM + MQ$ étant toujours la même, leur différence $fM + MQ - FM - MQ$, ou $fM - FM$, sera toujours constante et $= BA = a$.

319. L'équation (1) donnant

$$(2)\ldots y = \pm\sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)},$$

fait voir que, pour une même abscisse $AP = x$, on a toujours deux ordonnées égales PM, PM', qui tombent de part et d'autre du prolongement de AB qu'on appelle le *premier axe* : ainsi la courbe a une seconde branche AM' parfaitement égale à la première ; l'une et l'autre s'étendent à l'infini, puisqu'il est évident que plus on augmentera x, plus les deux valeurs de y augmenteront.

320. Si l'on fait x négatif dans la formule (2), il viendra

$$y = \pm\sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}(x^2 - ax)};$$

or $xx - ax$, ou $x(x - a)$, étant négatif tant que x est plus petit que a, les valeurs de y sont alors imaginaires et, par conséquent, y n'a aucune valeur réelle depuis A jusqu'à B ; mais sitôt que x surpasse a, $xx - ax$ redevenant positif, les valeurs de y redeviennent réelles ; il part donc du point B

une nouvelle portion de courbe mBm' qui, comme la première, s'étend à l'infini de chaque côté du prolongement de AB, et qui est parfaitement égale à celle-là; parce que si l'on prend $Bp=AP$, alors $xx-ax$ ou $AP\times pB$ devient égal à $AP\times PB$; donc aussi pm est égale à PM.

321. Si dans l'équation (2) on fait $y=0$, on trouvera que $ax+xx$ ou $x(a+x)=0$, qui donne $x=0$, et $x=-a$; donc la courbe rencontre l'axe AB aux deux points A et B.

322. Si l'on suppose $AP=AF$, c'est-à-dire, $x=c$, pour avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le point F (qu'on appelle le *foyer*, ainsi que le point f), la formule (2) donnera

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}(4ac+4c^2)(ac+c^2)}=\pm\frac{2}{a}(ac+c^2).$$

Donc la double ordonnée $m''m'''=\frac{4}{a}(ac+c^2)$:

cette ligne est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'hyperbole: ainsi, en représentant cette ligne par p, on aura

$$p=\frac{4(ac+cc)}{a};\quad \text{et par conséquent } \frac{p}{a}=\frac{4(ac+cc)}{aa},$$

substituant dans l'équation de la courbe, on la changera en cette autre plus simple,

$$y^2=\frac{p}{a}(ax+xx).$$

De la valeur de p, on peut conclure que *le paramètre du premier axe de l'hyperbole est plus grand que le quadruple de la distance du sommet* A *au foyer* F; car cette valeur se réduit à $p=4c+\frac{4cc}{a}$, qui est évidemment plus grande que $4c$.

323. Si sur le milieu C de AB, on élève une perpendiculaire DD', dont la moitié CD soit moyenne proportionnelle entre c et $a+c$, c'est-à-dire, entre AF et fA, cette perpendiculaire

est ce qu'on appelle le *second axe* de l'hyperbole; ainsi, en la nommant b, on aura

$$\tfrac{1}{4}b^2 = c(a+c),\ \text{ou}\ bb = 4ac + 4cc,$$

et, introduisant cette valeur de bb dans l'équation (1) du n° 317, celle-ci se changera en

$$(3)\,..\ y^2 = \frac{bb}{aa}(ax + xx).$$

On voit donc que ces trois équations de l'hyperbole ne diffèrent des trois équations correspondantes de l'ellipse, que par le signe du quarré cc et du quarré xx.

L'équation (3) nous fournit aussi une propriété analogue à celle que nous avons remarquée dans l'ellipse : en effet, si l'on chasse le dénominateur aa, on aura

$$aayy = bb(ax + xx),\ \text{qui donne cette proportion}$$

$$yy : ax + xx :: bb : aa,$$

$$\text{ou}\quad \overline{PM}^2 : AP \times PB :: \overline{DD'}^2 : \overline{AB}^2\ \text{ou}\ :: \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2;$$

le quarré d'une ordonnée au premier axe de l'hyperbole, *est* donc *au produit* AP $\times$ BP *des deux abscisses*, *comme le quarré du second axe*, *est au quarré du premier*; et par conséquent, *les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

Lorsque les deux axes a et b sont égaux, l'équation est $yy = ax + xx$ qui ne diffère de celle du cercle que par le signe du quarré xx. L'hyperbole s'appelle alors *hyperbole équilatère.*

De l'équation $p = \dfrac{4ac + 4cc}{a}$, on tire $4ac + 4cc = ap$, et puisqu'on a aussi $4ac + 4cc = bb$, on a donc $ap = bb$, qui donne $a : b :: b : p$; donc *le paramètre du premier axe est une troisième proportionnelle à ce premier axe et au second.*

324. Si du point D au point A, on tire la droite DA, le triangle rectangle DCA donnera

$$DA = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa},$$

ou, mettant pour bb sa valeur $4ac+4cc$,

$$DA=\sqrt{cc+ac+\tfrac{1}{4}aa}=c+\tfrac{1}{2}a=AF+CA=CF.$$

Donc, pour avoir les foyers quand on a les axes, il faut porter DA de C en F; et au contraire, pour avoir le second axe quand on a le premier et les foyers, il faut décrire du point A, comme centre avec le rayon CF, un arc qui coupe la perpendiculaire DD', en quelque point D.

325. On voit aussi que la description de l'hyperbole dépend de deux quantités, savoir, le grand axe et le petit axe; ou le grand axe et les foyers; ou le grand axe et le paramètre. D'après ce que nous venons de dire, on ramènera toujours aisément la description de l'hyperbole à l'une des méthodes que nous venons d'indiquer. Car si l'on donnait, par exemple, le grand axe et le paramètre, alors prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes, on aurait le second axe qui servirait à trouver les foyers.

326. Si l'on prend sur Mf, la partie $MG=MF$, et qu'ayant tiré FG on lui mène du point M la perpendiculaire MOT, cette ligne sera tangente à l'hyperbole, c'est-à-dire, ne rencontrera la courbe qu'au seul point M. En effet, d'un autre point quelconque N, pris sur TM, menons aux deux foyers les droites Nf et NF, et au point G la droite NG; il est évident, par la construction, que NF et NG seront égales; or Nf est plus petit que $NG+Gf$, et par conséquent, plus petit que $NF+Gf$; donc $Nf-NF$ est plus petit que Gf, c'est-à-dire, que $Mf-MF$; donc le point N est hors de l'hyperbole : on démontrera la même chose de tout point de TM, autre que le point M.

Les angles FMO et OMG sont égaux, d'après la construction précédente; or OMG est égal à son opposé NMQ; donc FMO est égal à NMQ; donc la ligne MF, menée au foyer F, fait, avec la tangente, le même angle que fait, avec cette même tangente, le prolongement MQ de la ligne fM qui va à l'autre foyer. Donc *si le point* F *est un point* *lumineux, tous les rayons qui, partis du point* F, *tomberont sur la concavité* MAM′, *se réfléchiront comme s'ils partaient du point* f.

327. Déterminons maintenant la *soutangente* PT. Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales par la tangente MT, on aura (*Géom* 104) $fM : MF :: fT : FT$, or en nommant, comme ci-dessus, MF, z, on a $fM = z + a$; d'ailleurs Ff ou $Bf + AB + AF$ valant $a + 2c$, la ligne fT ou $Ff - FT$, vaudra $a + 2c - FT$; on aura donc

$$z + a : z :: a + 2c - FT : FT.$$

D'où

$$FT = \frac{(2c + a)z}{2z + a}. \quad \text{Or } (317),\ z = \frac{2cx + ac + ax}{a}.$$

Donc, substituant cette valeur de z, dans celle de FT, on trouvera

$$FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}.$$

Ayant trouvé FT, il est aisé d'avoir la soutangente PT; car

$$PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x$$
$$= \frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a};$$

d'où l'on voit que l'expression de la soutangente, pour l'hyperbole, ne diffère que par les signes de celle qu'on a eue pour l'ellipse.

328. Si de PT on retranche AP, on aura AT ou la distance du sommet au point où la tangente rencontre l'axe. Cette distance se réduit à $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

329. Cette expression de AT nous donne lieu de faire quelques remarques sur la courbure de l'hyperbole. Nous avons vu ci-dessus que chacune des deux branches AM', AM, s'étendait à l'infini. Cependant leur courbure est telle, que toutes

les tangentes que l'on peut mener à chacun des points de ces branches infinies, ne rencontrent jamais l'axe que dans l'intervalle compris entre A et C. En effet, si dans la valeur de AT on substitue, pour x, toutes les quantités imaginables depuis o jusqu'à l'infini, la valeur de AT ne croît que depuis o jusqu'à $\frac{1}{2}a$; car quand x est infini, le dénominateur $\frac{1}{2}a+x$ doit essentiellement être regardé comme la même chose que x, puisque si l'on conservait alors $\frac{1}{2}a$, ce serait supposer qu'il peut augmenter x, et détruire, par conséquent, la supposition qu'on fait que x est infini : or, dans ce cas, la quantité AT se réduit à $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a$; donc la tangente à l'extrémité infinie de chaque branche AM et AM', passe par le centre C. Or les branches opposées Bm et Bm' sont parfaitement égales à celles-là ; d'ailleurs les points A et B sont également distans de C; donc ces mêmes tangentes le sont aussi aux extrémités infinies des branches Bm et Bm'. On les voit (*Fig.* 43) représentées par les lignes CX, CY.

330. Ces tangentes s'appellent les *Asymptotes* de l'hyperbole : ce sont, comme on le voit, des lignes qui partent du centre, s'approchent sans cesse de l'hyperbole, sans pouvoir l'atteindre qu'à une distance infinie. Si par le sommet A (*Fig.* 42), on mène la droite At parallèle à PM, les triangles semblables TAt, TPM, donnent

$$TP : PM :: TA : At;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} : At = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ay}{a+x}\right),$$

ou, en mettant pour y sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{ax+xx}$,

$$At = \tfrac{1}{2}\,\frac{b\sqrt{ax+xx}}{a+x},$$

qui, lorsque x est infini, devient $\frac{1}{2}b$ ou CD, parce que ax doit être supprimé vis-à-vis de xx, et a vis-à-vis de x. Voici donc comment on déterminera les asymptotes : on élevera au point A (*Fig.* 43) une perpendiculaire AL, que l'on prolongera de part et d'autre du point A d'une quantité égale à CD; alors tirant par le centre C et par les deux extrémités L et L' deux lignes droites, elles seront les asymptotes.

331. Pour avoir l'expression de CT (*Fig.* 42) il faut de CA retrancher AT, et l'on aura

$$CT = \tfrac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\overline{CA}^2}{CP},$$

qui donne $CP : CA :: CA : CT$.

332. Si l'on veut avoir l'expression de TM, le triangle rectangle TPM donne

$$\overline{TM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PT}^2 = \frac{bb}{aa}(ax + xx) + \frac{(ax + xx)^2}{(\frac{1}{2}a + x)^2}$$
$$= \left[\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}a + x)^2 + ax + xx\right] \times \frac{ax + xx}{(\frac{1}{2}a + x)^2}.$$

333. Pour avoir l'expression de PI ou de la sous-normale, les triangles TPM, MPI, semblables parce que l'angle TMI est droit, et que PM est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit, donneront

$$TP : PM :: PM : PI,$$

ou
$$\frac{ax + xx}{a + x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx},$$

ou, à cause de

$$y^2 = \frac{bb}{aa}(ax + xx), \quad PI = \frac{bb}{aa}(\tfrac{1}{2}a + x).$$

334. Cherchons maintenant l'équation par rapport au second axe DD'; et pour cet effet, menons la perpendiculaire MP' sur ce second axe, et faisant

$$MP' = y'; \quad DP' = x';$$

ou

on aura

$$CP' = PM = y = \tfrac{1}{2}b - x' \; ; \; P'M = CP = \tfrac{1}{2}a + x = y' \; ;$$

et par conséquent $x = y' - \frac{1}{2}a$; substituant donc, pour x et y, ces valeurs dans l'équation (3) du n° 323, on aura

$$(4) \ldots y'y' = \frac{a^2}{b^2}(\tfrac{1}{2}bb - bx' + x'x') ;$$

d'où l'on voit qu'il n'en est pas de l'hyperbole comme de l'ellipse ; l'équation, à l'égard du second axe, n'est pas semblable à celle qu'on a à l'égard du premier.

335. Enfin, si l'on veut l'équation par rapport à l'axe AB, en prenant les abscisses depuis le centre C, on fera $CP = z$; d'où $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; donc $x = z - \frac{1}{2}a$. substituant dans l'équation (3) du n° 323, on aura

$$yy = \frac{bb}{aa}(zz - \tfrac{1}{4}aa),$$

pour l'équation par rapport au premier axe, les abscisses étant comptées du centre.

Et à l'égard du second axe DD', si l'on nomme CP', z', on aura $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$: donc $x' = \frac{1}{2}b - z'$; substituant dans l'équation (4), on aura

$$y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \tfrac{1}{4}bb).$$

336. Si l'on veut rapporter au centre C, les expressions de PT, CT, PI et TM, trouvées ci-dessus, il n'y a qu'à substituer, dans ces expressions, $z - \frac{1}{2}a$ au lieu de x, et l'on trouvera

$$TP = \frac{1}{z}(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2), \; CT = \frac{a^2}{4z}, \; PI = \frac{b^2}{a^2}z \; ;$$

$$TM^2 = \left(\frac{b^2}{a^2}z^2 + z^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right)\left(\frac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z^2}\right).$$

Et si l'on prolonge MT jusqu'à ce qu'elle rencontre le second axe en T', les triangles semblables TPM, TCT' donneront

$$TP : PM :: CT : CT',$$

ou $$\frac{zz-\frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT' = \frac{\frac{1}{4}aay}{zz-\frac{1}{4}aa};$$

mais

$$zz-\tfrac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}; \quad \text{donc } CT' = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{CD^2}{MP} = \frac{CD^2}{CP'}.$$

Donc $$CP' : CD :: CD : CT'.$$

337. Si par le centre C de l'hyperbole (*Fig.* 43) on mène une droite quelconque MCM', terminée de part et d'autre à l'hyperbole, cette droite s'appelle un *diamètre*. Toute droite mO menée d'un point m de la courbe, parallèlement à la tangente en M, et terminée au diamètre MM' prolongé, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre, MO et OM' en sont les *abscisses*. Nous allons démontrer que les propriétés des ordonnées mO, à l'égard des diamètres terminés à la courbe, sont les mêmes que celles des ordonnées PM à l'égard du premier axe. Menons des points m et O les perpendiculaires mp et OQ sur l'axe AB, et du point m menons mS parallèle à AP; soit $PM=y$, $CP=z$, $Qp=g$, $CQ=k$; nous aurons $AP=z-\frac{1}{2}a$; $BP=z+\frac{1}{2}a$; $Ap=Cp-CA=CQ-Qp$

$$-CA=k-g-\tfrac{1}{2}a; \; Bp=Cp+BC=k-g+\tfrac{1}{2}a.$$

Les triangles semblables CPM, CQO donnent........
$CP : PM :: CQ : QO$, c'est-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$.
Les triangles semblables TPM, mSO donnent $PT:PM::mS$ ou $Qp : SO$; c'est-à-dire (336),

$$\frac{zz-\frac{1}{4}aa}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{zz-\frac{1}{4}aa};$$

Donc $$mp = SQ = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz-\frac{1}{4}aa};$$

or puisque le point m appartient à l'hyperbole, il faut (323) que $\overline{pm}^2 : \overline{PM}^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$. Cette proportion donne

$$(1) \ldots -\tfrac{1}{4}\frac{aakk}{zz}+\frac{ggzz}{zz-\frac{1}{4}aa}=gg-\tfrac{1}{4}aa,$$

équation qui va nous servir à démontrer la propriété dont il s'agit. Mais auparavant nous ferons observer que si de part ou d'autre du centre C, on prend sur l'axe AB la partie CR qui soit moyenne proportionnelle entre BP et AP, c'est-à-dire, telle que $\overline{CR}^2 = AP \times BP = zz - \frac{1}{4}aa$; et qu'ayant élevé la perpendiculaire RN', terminée en N' par la ligne NN', menée par le centre C parallèlement à TM, on fasse $CN = CN'$, alors NN' est ce qu'on appelle *un diamètre conjugué* au diamètre MM', et le *paramètre* du diamètre MM' est une troisième proportionnelle à MM' et NN'. Revenons maintenant à notre objet; soit

$$CM = \tfrac{1}{2}a'\,;\ CN = CN' = \tfrac{1}{2}b'\,;\ CO = z'\,;\ \text{et}\ Om = y'.$$

Les triangles semblables CPM, CQO donnent

$$CM : CP :: CO : CQ\ ;\ \text{c'est-à-dire},\ \tfrac{1}{2}a' : z :: z' : k = \frac{2zz'}{a'}.$$

Les triangles mSO et $CN'R$, semblables à cause des côtés parallèles, donnent

$$CN' : CR :: mO : mS,\ \text{ou}\ \tfrac{1}{2}b' : CR :: y' : g = \frac{2y' \times CR}{b'}.$$

Donc

$$g^2 = \frac{4y_{\prime}^2 \times CR^2}{b_{\prime}^2}\,;\ \text{or}\ CR^2 = z^2 - \tfrac{1}{4}a^2.\ \text{Donc}\ g^2 = \frac{4y_{\prime}^2 z^2 - a^2 y_{\prime}^2}{b_{\prime}^2}.$$

Mettant ces valeurs de g^2 et k^2, dans l'équation (1), on trouvera (2) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; équation semblable à celle qu'on a eue pour le premier axe.

338. $y' = 0$, donne $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; la courbe rencontre donc la ligne MM', en deux points opposés M et M', éloignés du

centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2}a'$, ou CM; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

339. L'équation (2) donnant deux valeurs égales et de signe contraire, pour y', fait voir que si l'on prolonge mO de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe; chaque diamètre MM' coupe donc en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine M.

340. La même équation donne $y'y' : z'z' - \frac{1}{4}a'a' :: b'b' : a'a'$, ou $\overline{mO}^2 : MO \times OM' :: \overline{NN'}^2 : \overline{MM'}^2$; c'est-à-dire que, *le quarré d'une ordonnée quelconque* mO *à un diamètre, est au produit* MO $\times$ OM' *de ses deux abscisses, comme le quarré du diamètre conjugué, est au quarré de ce premier diamètre.*

341. Si du centre C on abaisse sur TM la perpendiculaire CF, les triangles semblables CFT, TPM, donneront..... $TM : PM :: CT : CF$, et par conséquent $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Les triangles semblables CRN', TPM donneront............ $PT : TM :: CR : CN'$ ou CN; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; donc

$$CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT};$$

donc $CF^2 \times CN^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{CT}^2 \times \overline{CR}^2}{\overline{PT}^2}$; or $\overline{PM}^2 = yy$..... $= \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$; $\overline{CR}^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (337), (336) $\overline{CT}^2$..... $= \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, $\overline{PT}^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$; substituant ces valeurs, on trouve, $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$; or si l'on prolonge MT jusqu'à l'asymptote, en I, MI sera égal à CN, comme nous le verrons ci-dessous, et $CIMN$ sera, par conséquent, un parallélogramme, dont la surface sera $= CF \times MI = CF \times CN$; donc quelque part où soit le point M, le parallélogramme $CIMN$ sera toujours égal en surface au rectangle des deux demi-axes, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ ou $\frac{1}{4}ab$.

342. Les triangles semblables TPM et CRN' donnent $TP : PM :: CR : RN'$; donc $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, et $\overline{RN'}^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{CR}^2}{\overline{PT}^2} = \frac{bbzz}{aa}$, après avoir substitué les valeurs algébriques et fait les réductions; or les triangles rectangles CPM et CRN', donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$, et $\overline{CN'}^2$ ou........ $\overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RN'}^2$; donc $\overline{CM}^2 - \overline{CN}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 - \overline{CR}^2 - \overline{RN'}^2$; substituant dans le second membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques trouvées ci-dessus, on aura, après les réductions faites, $\overline{CM}^2 - \overline{CN}^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; c'est-à-dire, que *la différence des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques, est toujours la même, et est égale à la différence des quarrés des deux demi-axes*. Ainsi, dans l'hyperbole équilatère, chaque diamètre est égal à son conjugué.

343. Si dans $\overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RN'}^2$, on substitue pour $\overline{CR}^2$ et $\overline{RN'}^2$ leurs valeurs algébriques, on aura............. $\overline{CN}^2 = zz - \frac{1}{4}a^2 + \frac{bbzz}{aa}$; or nous avons trouvé (336), $\overline{TM}^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$; donc $\overline{TM}^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times \overline{CN}^2$; mais les triangles semblables MPT et $MP'T'$ donnent, $\overline{PT}^2 : \overline{TM}^2 :: \overline{P'M}^2 : \overline{T'M}^2$; donc $\overline{T'M}^2 = \frac{\overline{CN}^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$, donc $\overline{TM}^2 \times \overline{T'M}^2 = \overline{CN}^4$, ou $TM \times T'M = \overline{CN}^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura $2CM : 2CN :: 2CN : p'$, et par conséquent $\overline{CN}^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$, donc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, d'où $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$

344. De là on peut conclure la méthode suivante pour avoir les axes de l'hyperbole, et par conséquent pour décrire cette

courbe, lorsqu'on ne connaît que deux diamètres conjugués, et l'angle qu'ils font entr'eux. On prendra sur MC (*Fig.* 44) une ligne $MH = \frac{1}{2}p'$, et sur le milieu I de CH on élevera une perpendiculaire IK, qui coupera en quelque point K la ligne MT', menée par le point M parallèlement au conjugué NN'. De ce point K, comme centre, avec un rayon égal à la distance de K à C, on décrira un cercle qui rencontrera MT' aux deux points T et T', par lesquels et par le centre C tirant TC et CT', ces lignes seront les directions des axes; car il est clair, 1°. que l'angle TCT' sera droit, puisque la circonférence passe par le point C, et qu'elle a TT' pour diamètre; 2°. par la nature du cercle, on a (*Géom.* 127) $CM : TM :: MT' : MH$; donc puisqu'on a fait $MH = \frac{1}{2}p'$, on a $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$. Ayant ainsi déterminé les directions des axes, on en déterminera la grandeur en abaissant du point M les perpendiculaires MP, MP', et prenant CA moyenne proportionnelle entre CP et CT, et CD' moyenne proportionnelle entre CP' et CT'; c'est une suite des expressions que nous avons trouvées (336) pour CT et CT'. Quand les deux diamètres conjugués que l'on connaît sont égaux, alors le paramètre leur est égal aussi, ce qui rend $MH = MC$. Les deux points de section H et C se confondant alors, MC est une tangente au cercle; ainsi il faut tout simplement, pour avoir le centre K, élever sur CM une perpendiculaire au point C.

De l'Hyperbole entre ses asymptotes.

345. L'hyperbole considérée, par rapport entre ses asymptotes, a quelques propriétés dont la connaissance peut être utile; nous allons les exposer. Il faut se rappeler ici comment on détermine les asymptotes. (*Voy.* 330.) Nous allons rapporter chaque point E de l'hyperbole (*Fig.* 45) aux deux asymptotes; CLO, $CL'o$, en menant la ligne EQ parallèle à l'une d'entr'elles, et nous chercherons la relation qu'ont entre elles les lignes EQ et CQ. Pour trouver cette relation, nous mènerons par le point quelconque E, la ligne OEo parallèle

au second axe DD', et la ligne ES parallèle à CLO; par le sommet A nous tirerons AG, parallèle à $CL'o$. Soit

$$CA = \tfrac{1}{2}a;\ CD = AL = AL' = \tfrac{1}{2}b;\ CP = z;$$

$$PE = y;\ AG = m;\ GL = n;\ CQ = t;\ QE = u.$$

Les triangles semblables CPO, CAL, donnent $CA : AL :: CP : PO$; d'où $PO = Po = \frac{bz}{a}$; donc $EO = \frac{bz}{a} - y$, et $Eo = \frac{bz}{a} + y$; donc $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$, en mettant pour yy sa valeur $\frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$; donc $EO \times Eo = \overline{CD}^2 = \overline{AL}^2$; propriété qui appartient à tout point de l'hyperbole, puisque le point E a été pris arbitrairement.

346. Les triangles QEO, ESo et AGL, semblables entre eux, donnent $AL : AG :: EO : EQ$, et $AL : GL :: Eo : ES$: donc multipliant ces deux proportions par ordre, afin d'y introduire $EO \times Eo$ dont on a la valeur, on aura....... $\overline{AL}^2 : AG \times GL :: EO \times Eo : EQ \times ES$, c'est-à-dire, $\frac{1}{4}bb : mn :: \frac{1}{4}bb : ut$; donc $ut = mn$; équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. Ainsi en quelque point E que ce soit de l'hyperbole, on a toujours $EQ \times ES$, ou plutôt....... $EQ \times CQ = AG \times GL$. Or si l'on suppose que le point E tombe en A, CQ devient CG, et QE devient AG; on a donc $CG \times AG = AG \times GL$; donc $CG = GL$. Mais le point G se trouvant, par là, être le milieu de CL, on doit avoir $CG = AG = GL$; car le cercle décrit sur CL comme diamètre, lequel aurait par conséquent CG pour rayon, passerait par le point A, à cause de l'angle droit A; on a donc $m = n$, et par conséquent $ut = m^2 = \overline{CG}^2$. Ce quarré constant m^2 ou $\overline{CG}^2$, auquel le produit ut ou $CQ \times QE$ est toujours égal, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole.

347. De la propriété que nous venons de démontrer, on peut déduire cette autre : *d'un point quelconque* E *de l'hyper-*

bole, si l'on tire, de quelque manière que ce soit, une droite REr *terminée aux asymptotes, les parties* RE, mr, *interceptées entre la courbe et les asymptotes, seront égales.* Car si par le point m on mène hmH parallèle à OEo, les triangles semblables REO et RmH donnent $ER:Rm::EO:Hm$; et les triangles semblables rhm et roE donnent $Er:mr::Eo:mh$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura

$$ER\times Er:Rm\times mr::EO\times Eo:Hm\times mh;$$

or les deux produits $EO\times Eo$ et $Hm\times mh$ sont égaux chacun à $\overline{CD}^2$ (345); donc $ER\times Er=Rm\times mr$, ou........... $ER\times(Em+mr)=(ER+Em)\times mr$; faisant les multiplications indiquées, et supprimant, de part et d'autre, $ER\times mr$, on aura $ER\times Em=Em\times mr$; donc $ER=mr$.

348. De là on conclura que toute tangente Tt à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact M.

349. Si, par le point M, on tire IM parallèle à DD', et si par un point quelconque E, on tire REr parallèle à la tangente Tt, les triangles semblables TMI et REO donneront $TM:IM::RE:EO$; et les triangles semblables Mit, Eor donneront Mt ou $TM:Mi::Er:Eo$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura.................. $\overline{TM}^2:MI\times Mi::RE\times Er:EO\times Eo$; or les deux produits $MI\times Mi$ et $EO\times Eo$ sont chacun égal à $\overline{CD}^2$; donc $\overline{TM}^2=RE\times Er$.

350. Si du centre C on mène le diamètre CMV, il divisera en deux parties égales la ligne Rr parallèle à Tt, puisque (348) il passe par le milieu M de Tt; nommant donc CM, $\frac{1}{2}a'$; TM, $\frac{1}{2}q$; CV, z'; l'ordonnée VE, y'; les triangles semblables CMT, CVR, donneront $CM:MT:CV:VR$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a':\frac{1}{2}q$, ou $a':q::z':VR=Vr=\frac{qz'}{a'}$; donc

$RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, et $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; donc, puisque......... $RE \times Er = \overline{TM}^2 = \frac{1}{4}qq$, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; or (337) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; substituant, on aura....... $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$; d'où $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, c'est-à-dire, $MT = CN$, CN étant le demi-diamètre conjugué de CM ; c'est ce que nous avons promis (341) de démontrer. On a donc (*Fig.* 43) $MI = CN$.

351. On a donc aussi, pour toute droite REr parallèle au conjugué CN (*Fig.* 45), $RE \times Er = \overline{CN}^2$.

352. On voit donc que, connaissant deux demi-diamètres conjugués CM, CN (*Fig.* 46), et l'angle qu'ils font entre eux, il est très-facile de décrire l'hyperbole par des points trouvés successivement. En effet, ce qui a été dit (348 et 350) fait voir qu'en menant par l'origine M du demi-diamètre CM la ligne TMt parallèle à CN, et prenant de part et d'autre du point M les parties MT, Mt égales chacune à CN, si par le centre C on tire les lignes CT et Ct, elles seront les asymptotes. Et ce qui a été démontré (347) fait voir que si, par le point M, on tire arbitrairement tant de droites PMQ, MPQ qu'on voudra, et qu'on fasse sur chacune $PO = MQ$, les points O, trouvés de cette manière, appartiendront tous à l'hyperbole cherchée. On peut ensuite faire servir chaque point O à en trouver d'autres tels que V, V, etc., en tirant les droites ROS, ROS, etc. et faisant $SV = RO$.

353. On voit aussi par là comment, entre deux lignes données pour asymptotes, on peut décrire une hyperbole qui passe par un point donné entre ces lignes.

354. Enfin, en divisant l'angle des asymptotes et son supplément, chacun en deux parties égales, on aura les directions des deux axes, dont on déterminera la grandeur comme il a

été dit (344) ; ce qui donne un second moyen de résoudre la question dont il s'agissait au même endroit.

De la Parabole.

355. Il s'agit maintenant de trouver les propriétés de la courbe dont chaque point serait aussi éloigné d'un point fixe F (*Fig.* 47) que d'une droite XZ dont la position est connue, c'est-à-dire, d'une courbe telle, que pour chaque point M, abaissant la perpendiculaire MH, on ait toujours $MF=MH$. Du point F menons FV perpendiculaire sur XZ, et partageons FV en deux parties égales en A, A sera un point de la courbe, puisque $AV=AF$; ce point est le *sommet*. Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *parabole*, nous allons chercher une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires MP, abaissées sur FV, et leurs distances AP au point A. Nous nommerons donc AV ou AF, c; AP, x; PM, y; alors nous aurons ....
$VP=AV+AP=c+x=MH$; et puisque $MF=MH$, nous aurons aussi $MF=c+x$; d'ailleurs $FP=AP-AF=x-c$; or le triangle rectangle FPM donne $\overline{FP}^2+\overline{PM}^2=\overline{FM}^2$; donc $xx-2cx+cc+yy=cc+2cx+xx$; donc transposant et réduisant, $yy=4cx$; c'est là l'équation de la courbe, et voici ce qu'elle nous apprend. 1°. Cette équation donne....
$y=\pm\sqrt{4cx}$; donc, pour une même valeur de $x=AP$, on a deux valeurs égales de y ou PM; mais comme l'une est positive, et l'autre négative, elles s'étendent à droite et à gauche de la ligne indéfinie API qu'on appelle l'*axe*, c'est-à-dire, qu'elles sont PM et PM'; la courbe a donc deux branches AM, AM', parfaitement égales et qui s'étendent à l'infini, puisqu'il est clair que plus x augmentera, plus $\sqrt{4cx}$, et, par conséquent, y augmentera. 2°. Si l'on fait x négatif, on aura $y=\pm\sqrt{-4cx}$, c'est-à-dire, imaginaire ; la courbe ne s'étend donc point au-dessus du point A. 3°. Si l'on fait $x=c$, pour avoir l'ordonnée qui passe par le point F qu'on appelle *le foyer*, on a $y=\pm\sqrt{4cc}=\pm 2c$, c'est-à-dire, que $Fm''=2c$;

donc $m''m'''=4c$. Cette ligne $m''m'''$ qui passe par le foyer, est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'axe de la parabole. Ainsi le *paramètre de l'axe de la parabole est quadruple de la distance* AF *du sommet au foyer.*

4°. Donc si l'on nomme p ce paramètre, on aura $4c=p$, et l'équation de la parabole deviendra par conséquent $yy=px$.

356. Ayant l'équation d'une parabole, il est aisé de décrire cette courbe par des points trouvés successivement, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, et calculant les valeurs correspondantes de y.

357. On peut encore la décrire par points de cette autre manière : ayant choisi le point A que l'on veut prendre pour sommet, et la ligne indéfinie TVI qui doit être la direction de l'axe, on prendra les parties AV, AF égales chacune à $\frac{1}{4}p$, le point F sera le foyer, alors on élevera sur chaque point de l'axe des perpendiculaires indéfinies MM', et traçant du point F, comme centre, et de la distance VP comme rayon, deux petits arcs qui coupent chaque perpendiculaire en deux points M et M', ces points seront à la parabole, puisque FM, qu'on fait par là égal à VP, sera égal à MH, en imaginant la droite VH perpendiculaire à l'axe. Cette droite XVH s'appelle la *directrice.*

358. Enfin on peut décrire la parabole par un mouvement continu, en employant une *équerre* VHf; on attache sur un point quelconque f d'une des branches de cette équerre, l'extrémité d'un fil de longueur égale à fH; et ayant fixé l'autre extrémité au point F, on applique par le moyen d'un style M, une partie du fil contre fH; et tenant toujours le fil tendu, on fait glisser l'autre côté de l'équerre le long de ZX; le style M, dans ce mouvement, trace la parabole MA.

359. L'équation $yy=px$, nous apprend que, pour chaque point M, *le quarré de l'ordonnée* MP *est égal au produit de l'abscisse correspondante par le paramètre.* On voit dans cette même équation, que *les quarrés* yy *des ordonnées sont entre*

eux comme les abscisses x, c'est-à-dire que............ $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: AP : Ap$; car $\overline{PM}^2 = p \times AP$, et $\overline{pm}^2 = p \times Ap$; donc $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : Ap$.

L'équation de l'ellipse trouvée (285), est............... $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$, si l'on y suppose que le grand axe a est infini, alors xx doit être supprimé comme incapable de diminuer ax; il en est de même de $4cc$ à l'égard de $4ac$; l'équation se réduit donc à $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4aacx}{aa}$: c'est-à-dire, $yy = 4cx$, qui est l'équation à la parabole. *La parabole n'est* donc *qu'une ellipse dont le grand axe est infini.*

360. Si, après avoir joint les points F et H par la ligne FH, on mène du point M, sur cette ligne, la perpendiculaire MOT, cette dernière sera tangente à la parabole, c'est-à-dire, ne la rencontrera qu'au seul point M. En effet, d'un autre point quelconque N de cette ligne, menons NF, NH et la ligne NZ perpendiculaire sur XZ; si quelqu'autre point tel que N de cette ligne pouvait appartenir à la parabole, il faudrait que $NF = NZ$; or NZ est plus petit que NH qui, en vertu de la construction, est égale à NF.

361. L'angle FMO étant, par cette construction, égal à OMH, lequel est égal à fMN, il s'ensuit que FMO est égal à fMN; donc les rayons de lumière partis du point F et tombant sur la concavité MAM' se réfléchissent tous parallèlement à l'axe; et réciproquement les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe, vont tous se rassembler au foyer F.

362. La ligne MH étant parallèle à VP, les triangles HMO, TOF sont semblables, et de plus égaux, puisque HO est égal à OF; donc $FT = MH = PV = x + c$; par conséquent, $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; donc la *soutangente* PT *de la parabole est double de l'abscisse* AP. (Voyez la note).

363. Si du point M, on mène la perpendiculaire MI sur

la tangente TM, les triangles semblables TPM, PMI donneront $TP:PM::PM:PI$, c'est-à-dire, $2x:y::y:IP=\frac{y^2}{2x}$, ou, parce que $y^2=px$, $PI=\frac{px}{2x}=\frac{1}{2}p$. *La sous-normale de la parabole, est donc la même pour chaque point, et est égale à la moitié du paramètre.*

364. On emploie la parabole pour tracer le *maître couple* des vaisseaux auxquels on veut donner beaucoup de façons. On décrit un rectangle $ABCD$ (*Fig.* 48) dont la longueur AB est celle du *Bau*, et la hauteur est le *creux* du navire : de part et d'autre du milieu E de DC, on prend EG, EH égales chacune au demi-plat de la varangue, et ayant mené GM et HL, perpendiculaires à DC et égales chacune à l'acculement, on décrit deux paraboles égales AM, BL qui aient leurs sommets en A et en B, pour axe commun la ligne AB, et dont la première passe par M et la seconde par L. Pour pouvoir tracer ces paraboles, il faut connaître leur paramètre; or si l'on prolonge GM jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en P, alors MP sera une ordonnée, et AP l'abscisse correspondante; mais l'équation $yy=px$, faisant voir que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abscisse et le paramètre, nous indique que pour trouver le paramètre, on peut tirer AM et à son extrémité M, élever une perpendiculaire MK qui rencontrera AB au point K, et déterminera KP pour ce paramètre; car à cause de l'angle droit AMK, la perpendiculaire PM est moyenne proportionnelle entre AP et PK. Ayant déterminé ainsi le paramètre, il sera facile d'avoir tant de points de la parabole que l'on voudra par la methode donnée (357). Lorsque ces paraboles sont tracées, on achève le plat de la varangue, en employant deux arcs de cercle dont l'un MO tourne sa convexité en bas, et l'autre OS la tourne en haut; mais il faut, non-seulement, que les deux arcs MO et OS se touchent, ce qui est aisé d'après ce qui a été dit en Géométrie (49); il faut encore que MO touche la parabole en M; c'est ce qui aura lieu

si le centre de l'arc MO est en quelque point R de la perpendiculaire MI à la parabole; or nous venons de voir (363) que pour déterminer cette perpendiculaire, il fallait prendre la sous-normale PI égale à la moitié du paramètre; il n'y aura donc qu'à tirer du point M, au milieu I de PK, la ligne MI, et prendre le centre de l'arc MO sur cette droite MI. On prend ordinairement ce centre de manière que le point O où l'arc MO rencontre la ligne MS tirée au bord S de la quille, soit le milieu de MS; c'est pourquoi ayant pris MF et FO égales chacune au quart de MS, on élevera du point F sur MS la perpendiculaire RF qui déterminera le centre R de l'arc MO, puis par le point R et le point O, l'on tirera RO que l'on prolongera de la quantité OT égale à RO; et le point T sera le centre de l'arc OS; ensorte que les deux arcs MO et OS se toucheront en O, et le premier touchera la parabole en M. L'autre moitié s'achève de même.

365. Toute ligne MX (*Fig.* 49) tirée d'un point M de la parabole, parallèlement à l'axe AQ, s'appelle un *diamètre;* chaque diamètre a son *paramètre*, qui est en général le quadruple de la distance MF de l'origine de ce diamètre au foyer. Toute droite mO menée d'un point m de la parabole, parallèlement à la tangente TM qui passe par l'origine ou le sommet M de ce diamètre, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. Nous allons voir que les ordonnées à un diamètre quelconque, ont la même propriété que les ordonnées à l'axe. Menons l'ordonnée MP à l'axe, et des points m et O menons-lui les parallèles mp, OQ; enfin du point m menons mS parallèle à l'axe. Nommons AP, x; PM, y; Qp, g; AQ, k. Nous aurons $Ap=k-g$. Les triangles semblables TPM, mSO donnent

$TP:PM::mS:SO$; c'est-à-dire, $2x:y::g:SO=\frac{gy}{2x}$; donc

$PM-OS=QO-SO=QS=pm=y-\frac{gy}{2x}$; or puisque le point m appartient à la parabole, il faut (359) que.......

$\overline{pm}^2 : \overline{PM}^2 :: Ap : AP$; c'est-à-dire,

$$\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : yy :: k - g : x\text{; d'où } k - x = \frac{g^2}{4x}.$$

Soit $MO = x'$; et $mO = y'$. Nous aurons............ .. $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; donc $x' = k - x$, et par conséquent $\frac{gg}{4x} = x'$, ou $gg = 4xx'$; mais le triangle rectangle mSO, donne $mS^2 + SO^2 = mO^2$, ou $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Mettant pour gg sa valeur $4xx'$, et pour yy sa valeur px, on trouvera $(4x + p)\, x' = y'y'$. Mais si on appelle p' le paramètre du diamètre MX, on aura $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$: donc enfin $p'x' = y'y'$. L'équation à l'égard d'un diamètre quelconque, est donc la même qu'à l'égard de l'axe. *Le quarré de l'ordonnée* mO *à un diamètre quelconque* MX, *est donc égal au produit de l'abscisse par le paramètre de ce diamètre; et les quarrés des ordonnées à un diamètre quelconque de la parabole sont entr'eux comme les abscisses correspondantes.*

366. Il suit de tout ce qui précède, que si l'on veut décrire une parabole qui ait une ligne indéfinie MX pour diamètre, une ligne donnée p' pour paramètre de ce diamètre, et dont les ordonnées fassent un angle donné avec ce même diamètre, on tirera par l'origine M une ligne NMT, dont l'angle NMX avec la ligne MX soit égal à l'angle donné. Par le même point M, on mènera MF faisant de l'autre part avec MT l'angle FMT égal à NMX; et ayant fait $MF = \frac{1}{4}p'$, le point F sera le foyer de la parabole (361 et 365); tirant donc par le point F la ligne indéfinie TFQ parallèle à MX, et qui rencontre MT en T, ce sera la direction de l'axe, dont on déterminera le sommet A en abaissant la perpendiculaire MP, et partageant PT en deux parties égales en A (362). Alors ayant le foyer et le sommet, il sera facile de décrire la parabole (357 et 358).

367. Les trois courbes que nous venons de considérer successivement, ont été nommées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant un cône par un plan. Par exemple, on a

l'ellipse $AMmBA$ (*Fig.* 50) si l'on coupe le cône CHI par un plan $AMBA$, de manière que ce plan étant oblique à la la base du cône, rencontre d'ailleurs les deux côtés CH, CI, au-dessous du sommet C : il faut seulement en excepter le cas où ce plan ferait avec le côté CI, l'angle CAB égal à celui que fait l'autre côté CH avec la base ; dans ce cas la section serait un cercle. Si le plan coupant ne rencontre l'un des côtés CH, qu'autant que celui-ci sera prolongé au-dessus du sommet C, on a l'hyperbole AMm (*Fig.* 51). Enfin on a la parabole, si le plan coupant est parallèle à l'un CH des côtés du cône (*Fig.* 52). En voici la démonstration. Concevons que par l'axe d'un cône (droit ou oblique) CHI, on fasse passer un plan perpendiculaire à la base du cône, la section sera un triangle. Coupons maintenant le cône par trois plans AMm, FMG, HmI perpendiculaires à ce triangle ; les deux derniers seront parallèles à la base et les sections FMG, HmI seront des cercles (*Géom.* 199) qui rencontreront la section AMm en M et en m. Les intersections FG, HI des plans de ces cercles, avec le triangle par l'axe, seront les diamètres de ces mêmes cercles. Les intersections PM, pm, de ces cercles, avec le plan AMm seront (*Géom.* 188) perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, et seront en même temps ordonnées de ces cercles et de la section AMm. Cela posé, les triangles semblables APG, ApI, donnent $AP : Ap :: PG : pI$ et les triangles semblables BFP, BHp donnent $PB : pB :: FP : Hp$; d'où................ $AP \times PB : Ap \times pB :: PG \times FP : pI \times Hp$; or par la nature du cercle $FP \times PG = \overline{PM}^2$, et $Hp \times pI = \overline{pm}^2$; donc...... $AP \times PB : Ap \times pB :: \overline{PM}^2 : \overline{pm}^2$; donc les quarrés des ordonnées de la section AMm sont entr'eux comme les produits des abscisses ; or ces abscisses tombent de différens côtés de l'ordonnée (*Fig* 50) et d'un même côté (*Fig.* 51) ; donc AMm (*Fig.* 50) est une ellipse et (*Fig.* 51) une hyperbole. Quant à la figure 52, en supposant les mêmes choses que ci-dessus, on a $\overline{PM}^2 = FP \times PG$, $\overline{pm}^2 = Hp \times pI$, ou à cause des parallèles

parallèles Pp, FH, et FP, Hp qui donnent..............

$FP = Hp$, $\overline{pm}^2 = FP \times pI$; donc........................

$\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$, à cause des triangles semblables APG, ApI; donc les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses; donc la courbe est une parabole.

Réflexions sur les Equations aux Sections coniques.

368. Il suit de ce que nous avons démontré (308), que si dans l'ellipse on représente par x l'abscisse CO (*Fig.* 38), comptée du centre sur le diamètre MM', y l'ordonnée mO parallèle au diamètre conjugué CN, $CM = \frac{1}{2}a$, $CN = \frac{1}{2}b$, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$ pour l'équation à ce diamètre, quelque angle que fassent d'ailleurs ces deux diamètres conjugués. Et si, par le point m, on mène mO', parallèle à MM', et qui sera alors une ordonnée au diamètre NN' alors nommant CO', x'; et mO', y', on aura $y = x'$, et $x = y'$; et l'équation deviendra $x'x' = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - y'y'\right)$; d'où.........

$y'y' = \frac{aa}{bb}\left(\frac{1}{4}bb - x'x'\right)$. C'est-à-dire, qu'en prenant les abscisses du centre, l'équation, par rapport à quelque diamètre que ce soit, est toujours de même forme, tant qu'on prend les ordonnées parallèles au diamètre conjugué. Si b est égal à a, l'équation devient $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, que nous avons vu (284) appartenir au cercle. Mais il faut bien faire attention que c'est en supposant les ordonnées perpendiculaires au diamètre; car lorsqu'elles font tout autre angle qu'un angle droit, l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ appartient à l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués égaux.

Pour l'hyperbole, si l'on nomme x l'abscisse CO (*Fig.* 43), prise depuis le centre sur le diamètre MM' terminé à la courbe, et y l'ordonnée mO, parallèle au diamètre conjugué NN'; $CM = \frac{1}{2}a$, CN ou $CN' = \frac{1}{2}b$; on aura (337) $yy = \frac{bb}{aa}\left(xx - \frac{1}{4}aa\right)$ pour l'équation à ce diamètre, quel que soit d'ailleurs l'angle compris entre les deux diamètres conjugués. Mais si menant, par le point m', la ligne $m'O'$, parallèle au diamètre CM, on nomme y' la ligne $m'O'$, qui est alors une ordonnée au diamètre NN', et si l'on fait l'abscisse $CO' = x'$, on aura $x' = y$, et $y' = x$, ce qui changera l'équation en $y'y' = \frac{aa}{bb}\left(x'x' + \frac{1}{4}bb\right)$, d'où l'on voit que l'equation, par rapport au diamètre conjugué NN', n'est pas semblable à celle que l'on trouve pour le diamètre MM' terminé à la courbe.

A l'égard de la parabole, nous avons vu (365) qu'en prenant les abscisses sur un diamètre quelconque, depuis l'origine de ce diamètre, et menant les ordonnées parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, l'équation était toujours $yy=px$, y étant l'ordonnée, x l'abscisse, et p le paramètre de ce diamètre.

Enfin, à l'égard de l'hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes, en prenant les abscisses depuis le centre, sur une des asymptotes, et les ordonnées parallèles à l'autre asymptote, nommant les premières x, les secondes y, et aa la puissance de l'hyperbole, l'équation de l'hyperbole sous ce dernier aspect est $xy=aa$.

369. Mais il faut bien remarquer que pour que ces équations se rapportent aux deux lignes ou axes dont on est convenu, il est essentiel que l'une des indéterminées, y, par exemple, se compte depuis la ligne même sur laquelle on prend les x, car on pourrait avoir une équation de quelqu'une des formes que nous venons de parcourir, et qui cependant ne se rapporterait point aux diamètres conjugués, si cette équation est à l'ellipse ou à l'hyperbole, ou qui, lorsqu'elle appartient à une parabole, n'exprimerait point la relation entre les abscisses et ce que nous avons appelé jusqu'ici les *ordonnées*; par exemple (*Fig.* 53) si CM', CN sont deux diamètres conjugués de l'ellipse, à l'égard desquels on ait l'équation $yy=\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa-xx\right)$, CM' étant $\frac{1}{2}a$; CN, $\frac{1}{2}b$; CQ, x; et QM, y; si par le centre C on tire une droite indéfinie FCE qui rencontre les ordonnées QM en E, si l'on nomme les lignes CE, z; qu'enfin par un point B pris à une distance connue $BC=m$, on mène BF parallèle à QM, et qu'on nomme CF, n; alors les triangles semblables CBF, CQE donnent $m:n::x:z$; donc $x=\frac{mz}{n}$; si on substitue cette valeur de x dans l'équation ci-dessus, elle donnera............

$yy=\frac{bbmm}{aann}\left(\frac{aann}{4mm}-zz\right)$, équation de même forme, mais que l'on aurait tort, comme on le voit, de regarder comme appartenant aux diamètres conjugués; car les abscisses z étant prises sur CE, les ordonnées y ou QM se comptent du point Q, où la ligne EM, parallèle à CN, rencontre CM'.

370. On voit donc, en général, 1°. que si l'on a une équation du second degré à deux indéterminées x et y, et si l'une des indéterminées se compte depuis la ligne sur laquelle on prend l'autre, cette équation appartiendra à l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, ou au cercle, si ne renfermant d'autres puissances de x et de y que les quarrés, ces deux quarrés se trouvent avec différens signes dans différens membres, et si en même temps la quantité toute connue qui se trouve dans un même membre avec le quarré

qui aura le signe —, a elle-même le signe + ; car si l'on avait, par exemple, $yy = \frac{bb}{aa}\left(-\frac{1}{4}aa - xx\right)$, cette équation n'exprimerait aucune ligne possible, puisqu'elle donne $y = \pm\sqrt{\frac{bb}{aa}\left(-\frac{1}{4}aa - xx\right)}$, quantité absurde (97).

371. 2°. Si les deux quarrés yy et xx, passés dans différens membres, ont le même signe, et s'il n'y a d'autres puissances de x et de y que ces quarrés, l'équation appartiendra toujours à une hyperbole, laquelle sera rapportée à un diamètre terminé à la courbe ou à son conjugué, selon que le terme tout connu aura le même signe que les quarrés xx et yy, ou des signes différens.

372. 3°. Si l'équation ne renferme que l'un des quarrés et n'a que deux termes, dont le second soit le produit de l'autre indéterminée par une quantité connue, elle appartiendra à une parabole rapportée à l'un de ces diamètres, si ces deux termes placés dans différens membres ont le même signe; mais s'ils ont différens signes, l'équation n'exprime aucune ligne possible.

373. 4°. Enfin si l'équation n'ayant que deux termes, l'un est le produit des deux indéterminées x et y, et l'autre une quantité toute connue, elle exprime une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

374. Telles sont les équations aux sections coniques rapportées aux différentes lignes avec la condition exprimée (370). Nous en verrons l'usage dans peu ; mais il n'est pas inutile de dire d'avance que toutes les fois qu'on aura une équation à deux indéterminées x et y, qui aura les conditions que nous venons d'exposer, il sera toujours facile de construire la section conique à laquelle elle appartiendra, et cela en se conduisant comme dans cet exemple.

Supposons qu'on ait l'équation $ncd - qyy = gxx$, je l'écrirais ainsi, $yy = \frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$; or, sous cette forme, je vois (308 et 370) que cette équation appartient à une ellipse dont le rapport des quarrés des deux diamètres conjugués est $\frac{g}{q}$, et dont le quarré de celui de ces diamètres sur lequel les x sont comptés, est $\frac{4ncd}{g}$. J'ai donc $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, et $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$. Ce qui détermine les deux diamètres conjugués a et b. Quant à l'angle qu'ils font, c'est celui des lignes x et y, angle qui est censé connu par la question. Or nous avons vu (315) comment, connaissant ces trois choses, on peut décrire l'ellipse. On se conduira de même pour les équations aux autres sections, lorsqu'elles se rapporteront à quelques-unes de celles que nous avons exposées ci-dessus. Nous allons voir qu'en général toute équation du second degré, à deux indéterminées, exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune ligne possible (*); et cela se démontre en faisant voir que toute équation pareille peut toujours être ramenée à quelqu'une de celles que nous avons données ci-dessus. Mais pour répandre plus de jour sur la méthode dont nous allons faire usage et sur les constructions auxquelles elle conduit, il est à propos de placer ici les réflexions suivantes.

375. Puisque toute question qui peut être résolue par l'Algèbre, conduit toujours à une ou à plusieurs équations, toute équation à deux indéterminées, u et t, peut toujours être considérée comme venant d'une question où ces deux indéterminées u et t représentaient les deux inconnues. Quelle qu'ait été cette question, on peut toujours considérer l'équation comme exprimant la nature d'une courbe, et cela est bien facile à concevoir; car si l'on donne arbitrairement et successivement à l'une des deux inconnues, à u, par exemple, plusieurs valeurs, et qu'à l'aide de l'équation et des règles de l'Algèbre on calcule à chaque fois la valeur de t, il est évident que rien n'empêche de marquer sur une ligne indéfinie AR (*Fig* 53, 54 et 55) les valeurs AP, AP, etc., qu'on a données à u, de mener par les points P, P, etc. des lignes PM, PM, etc., parallèles entre elles et sous un angle déterminé, et de faire ces dernières égales aux valeurs correspondantes qu'on a trouvées pour t : la suite des points M, M, etc. déterminés de cette manière, formera une courbe dont la nature dépendra du rapport des lignes AP et PM; et puisque ce rapport est exprimé par l'équation dont ces lignes ont été déduites, cette équation exprime donc la nature de cette courbe. Cela posé, concevons que la courbe soit une section conique : il est clair que, comme dans la question qui a donné cette équation, on ignorait, ou l'on pouvait ignorer totalement si un pareil usage de cette équation donnerait une section conique, on n'a pas cherché à disposer les lignes AP et PM, de manière que l'une ayant sa direction sur un diamètre, l'autre fût parallèle à la tangente menée par le sommet de ce diamètre, ce qui est d'abord nécessaire pour que l'équation ait l'une des formes ci-dessus. On voit donc par là comment il peut se faire qu'une équation, quoique n'ayant pas l'une de ces formes, appartienne néanmoins à une section conique.

376. Voyons donc maintenant comment on peut ramener toute équation du second degré, et qui renferme deux indéterminées, à avoir l'une des formes sous lesquelles se présentent les équations des sections coniques, rapportées aux lignes que nous avons fixées (368).

377. La méthode que nous allons exposer, suppose qu'on sache faire

---

(*) Il faut seulement en excepter les cas où elle serait le produit de deux facteurs du premier degré, tels que $ax+by+c$ et $dx+fy+g$; mais alors elle n'est pas réellement du second degré. Nous n'examinerons pas ici cette espèce d'équation.

disparaître le second terme dans une équation du second degré à une inconnue. La règle pour cette opération est simple : il faut, après avoir dégagé le quarré de l'inconnue, faire la somme de cette inconnue plus la moitié du coefficient du 2e terme, pris avec son signe, et égaler cette somme à une nouvelle inconnue. Par exemple, pour faire disparaître le second terme de l'équation $x^2+3x=\frac{9}{4}$, je fais $x+\frac{3}{2}=z$; d'où $x=z-\frac{3}{2}$; substituant cette valeur de x dans l'équation proposée, j'ai $zz=\frac{18}{4}$, équation qui n'a plus de second terme.

378. On peut même, si on le veut, égaler l'inconnue augmentée de la moitié du coefficient du second terme, non à une inconnue simple, mais à une inconnue multipliée ou divisée par une quantité arbitraire; et cette remarque nous servira dans quelques momens. Par exemple, dans l'équation $x^2-4x=7$, je puis faire $x-2=\frac{k}{n}z$; j'aurai, en opérant toujours de la même manière, $\frac{kk}{nn}zz=11$; on n'en aura pas moins la même valeur pour x, quelque valeur qu'on donne à k et à n; en effet, cette équation donne $\frac{k}{n}z=\sqrt{11}$; et puisque $x-2=\frac{k}{n}z$, on a $x-2=\sqrt{11}$; précisément comme par le premier procédé. En un mot, cela ne change rien à ce que l'on cherche; mais en introduisant ainsi une quantité arbitraire, on se ménage les moyens de remplir certaines vues auxquelles on ne satisferait quelquefois que d'une manière indirecte, ou moins simple, en s'y prenant autrement.

Moyens de ramener aux Sections coniques toute Equation du second degré à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible.

379. Supposons qu'on ait l'équation

$$(1)\ldots dt^2+cut+eu^2+fdt+geu+hd^2=0,$$

qui renferme toutes les équations complètes du second degré à deux indéterminées u et t. Concevons que cette équation appartienne à une courbe MM (*Fig.* 53 et 54) dont AP et PM sont les coordonnées. Voici comment on s'assurera que cette courbe est toujours une section conique, et comment on déterminera cette section. Il faut, lorsqu'il ne manque aucun des deux quarrés t^2 et u^2, faire disparaître successivement le second terme de cette équation par rapport à t, et le second terme par rapport à u; ce que l'on fera de la manière suivante. L'équation (1) donne

$$(2)\ldots tt+\left(f+\frac{cu}{d}\right)t+\frac{euu}{d}+\frac{geu}{d}+hd=0.$$

Je fais donc (377) $t = y - \frac{1}{2}\left(f + \frac{cu}{d}\right)$. L'équation (2) devient

$$(3)\ldots\ 4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)\,u + (cc - 4de)\,uu.$$

Comme d, c, e, f, etc. désignent des quantités connues, on peut supposer $ffdd - 4hd^3 = r$, $2cfd - 4ged = q$ et $cc - 4de = m$; l'équation (3) deviendra

$$(4)\ldots\ 4d^2y^2 = r + qu + mu^2.$$

L'équation (4) donne $\quad u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m}y^2.$

Pour faire disparaître le second terme par rapport à u, on supposera $u = \frac{qx}{2mn} - \frac{q}{2m}$; n étant une indéterminée, que l'on déterminera dans peu (*). L'équation (4) donnera

$$(5)\ldots\ \frac{q^2x^2}{4m^2n^2} - \frac{q^2}{4m^2} + \frac{r}{m} = \frac{4d^2y^2}{m}.$$

équation qui appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, tant qu'aucune des quantités d, m, q, r, etc. n'est zéro; excepté le cas où nous allons voir qu'elle n'exprimerait aucune ligne possible.

Examinons maintenant dans quel cas la courbe est une ellipse, dans quel cas une hyperbole, et enfin dans quels cas il n'y a pas de courbe. Pour cet effet, dégageons y^2, et nous aurons

$$(6)\ldots\ y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}\right),$$

équation dans laquelle q, n et d étant au quarré, les signes ne peuvent changer que lorsque m ou r, au lieu d'être positifs, seront négatifs; mais le changement du signe de r n'en apportant aucun à ceux des quarrés yy et xx, la courbe ne change point par le changement du signe de r. A l'égard de m, s'il est négatif, l'équation (6) donne

$$(7)\ldots\ y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right).$$

On voit donc (370 et 371) que tant que m sera positif, la courbe sera une hyperbole; et qu'au contraire, elle sera une ellipse, quand m sera négatif; or la quantité m a représenté ci-dessus $cc - 4de$; et, dans cette dernière, la quantité c étant au quarré, cc est toujours positif; donc m ou $cc - 4de$ ne peut devenir négatif qu'autant que $4de$ surpassera cc, et cela, soit que d et e soient tous deux positifs, soit qu'ils soient tous deux négatifs.

(*) Cette quantité n est introduite pour pouvoir ramener directement l'équation aux diamètres conjugués. Si l'on égalait simplement à x, l'équation finale acquerrait la forme de l'équation à l'ellipse ou à l'hyperbole; mais elle serait dans le cas que nous avons examiné (369).

380. Donc *si l'on veut savoir dans quels cas une équation du second degré, à deux indéterminées* u *et* t, *telle que*.......................
$dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, *appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, il n'y a qu'à examiner si le quarré* cc *du coefficient du terme* ut, *moins le quadruple du produit* de *des coefficiens de* t^2 *et de* u^2, *fait une quantité positive ou négative : dans le premier cas, la courbe sera une hyperbole; et dans le second cas, une ellipse, à moins que* d *ne soit* = e; *alors la courbe peut être un cercle, ainsi qu'on le verra plus bas.* Il faut seulement excepter de cette règle le cas où r étant négatif, serait plus grand que $\frac{qq}{4m}$ pour l'ellipse; car alors la quantité $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ devenant $nn\left(1 - \frac{4mr}{qq}\right)$, est négative si $\frac{4mr}{qq}$ est plus grand que 1, ou, ce qui revient au même, si r est plus grand que $\frac{qq}{4m}$, ce qui rend la valeur de y imaginaire, et alors il n'existe pas de courbe. Il reste à faire voir comment on peut décrire l'ellipse et l'hyperbole que nous venons de reconnaître; considérons l'ellipse.

381. Des deux équations $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, et $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que nous avons eues pour faire disparaître les seconds termes, la seconde, par la supposition actuelle que m est négative; se change en $u - \frac{q}{2m} = \frac{-qx}{2mn}$; mais comme n est une indéterminée, on peut la supposer indifféremment positive ou négative; en la supposant négative, on a $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; construisons ces équations pour avoir la position des diamètres conjugués. La première, savoir, $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, fait voir que pour obtenir y, il faut augmenter chaque t de $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$; on mènera donc par le point A, origine des u et des t (*Fig.* 53) la ligne $AB = \frac{1}{2}f$, parallèle à la ligne PM ou t. Par le point B, on mènera BKI parallèle à la ligne AR sur laquelle se comptent les u, et ayant pris arbitrairement la ligne BK, on mènera, parallèlement à AB, la ligne KL qui soit à $BK :: \frac{1}{2}c : d$; si l'on tire par les points B et L la ligne indéfinie BLQ, alors les lignes QM, comptées des points Q où cette ligne coupe les lignes PM, seront les valeurs de y. En effet, on a $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ = t + \frac{1}{2}f + IQ$; or les triangles semblables BKL et BIQ, donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : IQ$, c'est-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$; donc $QM = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Puisque

les y se comptent depuis la ligne LQ, il s'ensuit (369) que pour que l'équation à l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués, les x doivent être comptés sur la ligne BLQ, et que le point d'où elles seront prises, sera le centre; ensorte que QLB est la direction d'un des diamètres. Voyons à déterminer ce centre. La seconde équation......... $u-\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$, fait voir que si, sur $AP=u$, on prend $AG=\frac{q}{2m}$, la quantité GP qui vaut $AP-AG$, sera $u-\frac{q}{2m}$, et par conséquent $\frac{qx}{2mn}$; on a donc $GP=\frac{qx}{2mn}$; or si par le point G on mène GNC, parallèle aux lignes PM, le point C où elle rencontrera LQ, sera l'origine des x, et par conséquent le centre; en effet, nous venons de voir que les x doivent être comptés sur LQ; or lorsque GP est zéro, sa valeur $\frac{qx}{2mn}$ doit être zéro; x doit donc être zéro alors, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les x commenceront au point C: ainsi les lignes QM étant y, les lignes CQ sont x. De là il est facile d'avoir la valeur de n; car on a....... $GP=\frac{qx}{2mn}$, ou, en mettant pour x sa valeur CQ, et pour $\frac{q}{2m}$ sa valeur AG, $GP=\frac{AG\times CQ}{n}$; donc $n=\frac{AG\times CQ}{GP}$, mais les parallèles QP, CG et AB, donnent $GP : AG :: CQ : BC=\frac{AG\times CQ}{GP}$; donc $n=BC$; c'est-à-dire, que pour que l'équation à l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués dont les directions sont QB et CN, il faut mettre pour n la valeur de BC, qui est déterminée par les constructions précédentes.

Il ne reste donc plus, pour être en état de décrire cette ellipse, qu'à déterminer la grandeur des diamètres conjugués; car l'angle BCN qu'ils font entr'eux, se trouve déterminé par les opérations précédentes. Or cela est facile, en imitant ce que nous avons fait (374). Il ne s'agit que de comparer l'équation (7) du n° 379, à l'équation $yy=\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa-xx\right)$. Cette comparaison donne

$$a=\sqrt{4nn+\frac{16mnnr}{qq}},\qquad b=\sqrt{\frac{q^2}{4mdd}+\frac{r}{dd}};$$

et puisque m, n, q, r, d sont connues, on a les valeurs des diamètres conjugués a et b, avec lesquelles, et connaissant d'ailleurs l'angle BCN qu'ils doivent faire, on décrira l'ellipse de la manière qui a été enseignée (315).

382. Remarquons que si les valeurs de a et b sont égales, et qu'en même temps l'angle BCN soit droit, la courbe est alors un cercle. Si l'on veut

déterminer dans quels cas cela aura lieu : il n'y a qu'à supposer dans notre équation à l'ellipse que $\frac{qq}{16mddnn}=1$, ce qui donne $nn=\frac{qq}{16mdd}$. Si de plus l'angle BCD est droit, on doit avoir $\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{BD}^2=\overline{AG}^2$; or $BC=n$, et les triangles semblables BCD, BLK donnent .... $BK:KL::BD$ ou $AG:CD$, c'est-à-dire ; $d:\frac{1}{2}c::\frac{q}{2m}:CD$, d'où l'on tire $CD=\frac{cq}{4md}$; donc $\frac{qq}{16mdd}+\frac{qqcc}{16mmdd}=\frac{qq}{4mm}$, ou $m+cc=4dd$; mais puisque m est négatif ; on a (379) $cc-4de=-m$, ou $m=4de-cc$, il faudra donc que $d=e$.

383. On voit donc que *pour savoir si la courbe est un cercle, une ellipse ou une hyperbole*, il est inutile d'avoir égard aux trois derniers termes flt, geu et hd^2 de l'équation (1) du nº 379, cela dépend seulement des trois premiers, ensorte que si d, c et e sont tels que $cc-4de$ soit positif, la courbe sera une hyperbole; elle sera une ellipse, si au contraire $cc-4de$ est négatif, excepté le cas où l'on aura en même temps $d=e$, c'est-à-dire, où les deux quarrés u^2 et t^2 auront le même coefficient; alors elle sera un cercle si de plus l'angle des nouvelles coordonnées est droit.

384. Tout ce que nous venons de dire, à l'exception de ce que renferme le nº 382, s'applique également à l'hyperbole, c'est-à-dire, à l'équation (6) du nº 379, à la différence des signes près. Ainsi en relisant tout ce qui précède et l'appliquant à la figure 54, il n'y a d'autre changement à faire que de porter AG à l'opposite de AP, ce qui est indiqué par l'équation $u+\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$, que l'on a eue d'abord (379). Du reste, tout est le même en changeant le mot *ellipse* en celui d'*hyperbole*.

385. Il nous reste deux cas à examiner : ce sont 1º. celui où l'on aurait $cc-4de=0$; 2º. celui où l'on aurait tout à la fois $d=0$ et $e=0$. Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $cc-4de=0$ ou $cc=4de$, la courbe est une parabole. Comme la quantité m est alors zéro, la construction précédente devient inutile, parce qu'après avoir fait évanouir le second terme par rapport à t, le terme u^2 ne s'y trouve plus (379). Ce cas se reconnaît facilement en examinant si dans l'équation, on a $cc=4de$, c'est-à-dire, si $dt^2+cut+eu^2$, est un quarré. Dans ce cas on fera disparaître le second terme par rapport à t, et l'équation se réduira à $4ddyy=r+qu$; pour ramener cette dernière à la forme $yy=px$, qui (368) est celle de la parabole rapportée à un diamètre dont les ordonnées sont parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, on fera $\frac{r+qu}{4dd}=nx$; (n étant une indéterminée). On aura $yy=nx$. Il ne s'agira donc plus que de cons-

truire l'équation $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à t, et l'équation $\frac{r+qu}{4dd}=nx$, qui aura servi à la seconde réduction. La première de ces deux équations étant précisément la même que celle que nous avons construite (381), se construira de même ici; ainsi il n'y a qu'à appliquer à la figure 55, mot à mot, ce qui a été dit (381) pour la figure 53, relativement à la construction de $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, les y seront les lignes QM (*Fig* 55), et l'on aura BLQ pour la direction du diamètre sur lequel les x doivent être comptés. Pour déterminer l'origine des x, et par conséquent le sommet de ce diamètre, on emploiera l'équation $\frac{r+qu}{4dd}=nx$ qui, donnant $u+\frac{r}{q}=\frac{4ddnx}{q}$, fait voir que si l'on prend à l'opposite de AP la quantité $AG=\frac{r}{q}$, on aura $GP=\frac{4ddnx}{q}$; donc si par le point G, on mène GCD parallèle aux lignes PM, et qui rencontre QLB en C, le point C sera l'origine des x, puisque l'équation $GP=\frac{4ddnx}{q}$ fait voir que quand GP est zéro, x doit être zéro, et que d'ailleurs les x doivent être comptés sur la ligne de laquelle partent les y, c'est-à-dire, sur BQ. Il ne s'agit plus que de déterminer le paramètre n. Or on vient de voir que...... $GP=\frac{4ddnx}{q}$; mais les parallèles CD et QI donnent $BC:BD$ ou ...... $AG::CQ:DI$ ou GP; c'est-à-dire, $BC:\frac{r}{q}::x:\frac{4ddnx}{q}$; donc........ $BC=\frac{r}{4ddn}$; donc $n=\frac{r}{4BC\times dd}$; or r et d sont donnés dans l'équation, et BC est déterminé par la construction; on connaît donc n ou le paramètre; d'ailleurs cette même construction détermine, en même temps l'angle des coordonnées CQ et QM ou x et y; il est donc aisé de construire la parabole selon qu'il a été enseigné (366).

386. Puisque l'équation générale appartient à la parabole lorsqu'on a $cc=4de$, il s'ensuit que lorsque le produit ut des deux indéterminées ne se trouve point dans cette équation, il faut pour qu'elle appartienne à la parabole, qu'il y manque aussi un des deux quarrés t^2 ou u^2; car c étant alors zéro, l'équation $cc=4de$ ou $o=4de$, fait voir que d ou $e=o$.

387. Si les deux quarrés sont tous deux dans l'équation, et que le produit ut ne s'y trouve point, alors la construction donnée (381), et qui convient aux figures 53 et 54, devient plus simple, parce que c étant zéro la ligne KL est zéro, et BL tombe sur BK, qui devient alors un diamètre; les lignes des x et des y sont donc parallèles à celles des u et des t. Dans

ce même cas, l'évanouissement du second terme par rapport à u se fera sans employer l'inconnue n, parce que BC qui est n (381) étant alors égal à BD ou AG, on a $n = \frac{q}{2m}$, ce qui réduit l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ qu'on a eue pour faire disparaître le second terme, par rapport à u, à $u + \frac{q}{2m} = x$. Il suit de là, qu'outre les conditions mentionnées (383), il faut dans le cas présent, pour que la courbe soit un cercle, que l'angle des coordonnées u et t soit droit.

388. Lorsque le produit ut se trouve dans l'équation, si après avoir fait évanouir le second terme par rapport à l'une des deux indéterminées, par exemple, par rapport à t, il ne se trouvait plus d'autre puissance de l'indéterminée u que le quarré, alors, quoiqu'il n'y ait plus de second terme à faire disparaître, il n'en faudrait pas moins faire une transformation qui consisterait à faire $u = \frac{lx}{n}$, $\frac{l}{n}$ étant une fraction inconnue, mais que l'on déterminerait lors de la construction, d'une manière semblable à ce que nous venons de faire (381). Nous en donnerons un exemple plus bas.

389. Si des trois termes t^2, ut et u^2, il ne manque que l'un des deux quarrés, l'équation appartient toujours à une hyperbole, ou n'exprime aucune courbe; parce que si d ou e est zéro, la quantité $cc - 4de$ se réduisant à cc, est essentiellement positive (383).

390. Enfin, si les deux quarrés t^2 et u^2 manquent en même temps, auquel cas on a une équation de cette forme, $gut + ht - ku - l = 0$; g, h, k, l pouvant être indifféremment positifs ou négatifs, on peut encore faire usage de la construction donnée (381). L'équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; mais comme les abscisses et les ordonnées ne sont point comptées du centre, on les y ramènera de la manière suivante. L'équation proposée donne

$$(8)\ldots \left(t - \frac{k}{g}\right) u + \frac{h}{g}\, t - \frac{l}{g} = 0.$$

Soit $t - \frac{k}{g} = y$. D'où $t = y + \frac{k}{g}$. L'équation (8) deviendra

$$\left(u + \frac{h}{g}\right) y + \frac{hk}{g^2} - \frac{l}{g} = 0.$$

Posant $u + \frac{h}{g} = x$, on trouvera l'équation

$$(10)\ldots\ldots xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg},$$

qui appartient à l'hyperbole entre ses asymptotes, les abscisses x étant comptées depuis le centre sur une des asymptotes, et les ordonnées y étant comptées depuis cette asymptote parallèlement à l'autre ; enfin la puissance de cette hyperbole est $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (346).

Avant de procéder à la construction de cette hyperbole, on exécutera celle des deux équations $t - \frac{k}{g} = y$, et $u + \frac{h}{g} = x$ qui ont servi à réduire. La première fait voir qu'il faut diminuer chaque t de la quantité $\frac{k}{g}$ pour avoir y. On mènera donc par le point A (*Fig.* 56) origine des u et des t, une ligne AB parallèle aux lignes PM ou t, et égale à $\frac{k}{g}$: tirant ensuite par le point B la ligne CBQ parallèle à AP, les lignes QM seront les y, puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$. Pour avoir les x, l'équation $u + \frac{h}{g} = x$, fait voir qu'il faut augmenter les u, c'est-à dire, les lignes AP de la quantité $\frac{h}{g}$; on portera donc, à l'opposite de AP, la ligne $AG = \frac{h}{g}$, en tirant GS, parallèle aux lignes PM, laquelle rencontre BQ en C, CQ sera x, et C sera le centre de l'hyperbole dont CQ et CS seront les asymptotes : ayant les asymptotes et l'équation (10), on décrira l'hyperbole de la manière qui a été enseignée (353).

Si les trois premiers termes t^2, ut et u^2 manquaient dans l'équation, alors elle n'exprimerait plus qu'une ligne droite dont la construction est facile, après ce que nous avons dit sur celle des équations qui ont servi aux réductions précédentes.

391. Ainsi, 1°. *toute équation du second degré, à deux indéterminées, et qui n'est point décomposable en deux facteurs du premier degré, tels que* mx + ny + q, *exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune courbe.* 2°. *Cette courbe est ellipse, ou hyperbole, ou parabole, selon que le quarré du coefficient du produit* ut *des deux indéterminées, moins le quadruple du produit des coefficiens des deux quarrés* t^2 *et* u^2 *est négatif, ou positif, ou zéro* ; *et, en particulier, elle peut être un cercle, lorsque ce même résultat étant négatif, les coefficiens de* u^2 *et de* t^2 *sont égaux.* 3°. *Et pour ramener toute équation, appartenante à une section conique, aux équations que nous avons données en traitant de ces courbes, il faut se conformer à ce qui a été enseigné* (379, 385, 387, 388 *et* 390).

Application de ce qui précède, à la résolution de quelques questions indéterminées.

392. Pour faire connaître l'usage des transformations que nous venons d'enseigner, proposons-nous cette question : *trouver quelle est la courbe* (Fig. 57) *dont les distances de chaque point* M *à deux points fixes* A *et* B *seraient toujours dans le rapport constant de* g *à* h. Imaginons que de chaque point M, on ait abaissé une perpendiculaire MP sur la ligne AB; cherchons la relation de ces perpendiculaires, avec leurs distances AP au point A, et pour cet effet nommons AP, u; PM, t, et la ligne connue $AB=c$. Cela posé; les triangles rectangles APM, BPM, donnent $AM=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PM}^2}=\sqrt{u^2+t^2}$ et $BM=\sqrt{\overline{BP}^2+\overline{PM}^2}$; or $BP=AP-AB=u-c$; donc $BM=\sqrt{u^2-2cu+cc+tt}$; or... $AM:BM::g:h$; donc $\sqrt{uu+tt}:\sqrt{u^2-2cu+cc+tt}::g:h$; on en déduit

$$(gg-hh)\,uu+(gg-hh)\;tt-2ggcu+ggcc=0,$$

équation qui (383) appartient au cercle. Pour ramener cette équation à la forme $yy=\frac{1}{4}aa-xx$ (368), je vois que comme elle ne contient pas de second terme par rapport à t il suffit à l'égard de cette indéterminée, de supposer $t=y$, ce qui donne

$$(gg-hh)\,uu+(gg-hh)\,yy-2ggcu+ggcc=0\,;$$

il faut donc faire disparaître le second terme par rapport à u; et comme le produit ut ne se trouve point dans l'équation, il suffit (387) d'employer la règle donnée (377). Je fais $u=\frac{ggc}{gg-hh}+x$; et je trouve............

$yy=\frac{hhggcc}{(gg-hh)^2}-xx$, équation qui, étant comparée à.............

$yy=\frac{1}{4}aa-xx$, donne le rayon $\frac{1}{2}a=\frac{hgc}{gg-hh}$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre qui doit être sur ABP; puisque $t=y$. Or pour avoir x, il faut diminuer u de $\frac{ggc}{gg-hh}$; on prendra donc ....

$AC=\frac{ggc}{gg-hh}$, et alors CP sera x, ainsi du point C, comme centre et du rayon $\frac{hgc}{gg-hh}$, on décrira un cercle; chaque point M de ce cercle aura la propriété dont il s'agit.

393. Nous prendrons pour seconde question, celle-ci : *Trouver hors de*

la ligne donnée AR (Fig. 58) *tous les différens points* M, *tels qu'en tirant aux deux points* A *et* R *les lignes* MA, MR, *l'angle* AMR *soit toujours égal à un même angle donné.* Représentons par r le rayon des tables, et par m la tangente de l'angle donné, auquel AMR doit être égal; abaissons la perpendiculaire MP; faisons $AP = u$, $PM = t$; $AR = b$; alors $PR = b - u$. Rappelons-nous ces trois propositions démontrées (*Géom.* 284, 285 et 278)..

$$1^o.\ sin\ (A + B) = \frac{sin\ A\ cos\ B + sin\ B\ cos\ A}{r}$$

$$2^o.\ cos\ (A + B) = \frac{cos\ A\ cos\ B - sin\ A\ sin\ B}{r}$$

$$3^o.\ tang(A + B) = \frac{r\ sin\ (A + B)}{cos\ (A + B)}.$$

Cela posé, les triangles rectangles APM, RPM donnent (*Géom.* 295) $AM : AP :: r : sin\ AMP$; $AM : PM :: r : sin\ MAP$ ou cos AMP ; ...... $RM : RP :: r : sin\ RMP$; $RM : PM :: r : sin\ MRP$ ou $cos\ RMP$; d'où l'on tire $sin\ AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; $cos\ AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; $sin\ RMP = \frac{r \times RP}{RM}$, $cos\ RMP = \frac{r \times PM}{RM}$ donc, puisque $AMR = AMP + PMR$, on aura $sin\ AMR = \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}$, et $cos\ AMR = \frac{r \times \overline{PM}^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}$; donc $\frac{r\ sin\ AMR}{cos\ AMR}$, ou... $tang\ AMR = \frac{r \times AR \times PM}{PM^2 - AP \times RP}$; ou, en mettant les valeurs algébriques et réduisant, $mtt + muu - mbu - rbt = o$, équation au cercle (383), ainsi qu'on devait bien s'y attendre. Pour déterminer le centre et le rayon, il faut ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}\ aa - xx$, Pour cet effet, je dégage tt ce qui donne $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = o$, je fais (377) $t - \frac{rb}{2m} = y$; opérant comme à l'article cité, l'équation trouvée devient $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu = o$. Reste donc à faire disparaître le second terme par rapport à u; je fais (387) $u - \frac{b}{2} = x$; l'équation devient $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, laquelle, comparée à $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, donne le rayon $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}}$. Pour trouver le centre et déterminer, en même temps, ce rayon, l'équation $t - \frac{rb}{2m} = y$, m'apprend que si je mène

AB parallèle à PM, c'est-à-dire, si j'élève au point A la perpendiculaire $AB = \frac{rb}{2m}$, et si je tire BCQ parallèle à AR, les lignes QM seront y, mais l'équation $u - \frac{b}{2} = x$ me fait voir que si je prends $AG = \frac{b}{2}$, GP sera x; donc si par le point G je mène GC parallèle à PM, le point C sera le centre. D'ailleurs, si l'on tire AC, on aura, à cause de l'angle droit G, $AC = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}}$; AC sera donc le rayon comme nous l'avons déjà trouvé plus haut. Cette construction se réduit donc à élever sur le milieu de AR la perpendiculaire $GC = \frac{rb}{2m}$, et à décrire un cercle du point C, comme centre, avec CA pour rayon : tout angle MAR qui aura son sommet à la circonférence de ce cercle, et qui passera par les points A et R sera égal à l'angle donné. Or pour construire la quantité $\frac{b}{2m}$, il n'y aura autre chose à faire qu'à mener une droite AO qui fasse avec AB l'angle BAO égal à l'angle donné : elle coupera GC au point cherché C; car dans le triangle rectangle ABC, on a $r : tang\, BAC :: AB : BC$ ou AG; c'est-à-dire, $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; donc AB ou $GC = \frac{rb}{2m}$. Tout se réduit à mener par le point A, la ligne AO qui fasse avec AR l'angle RAO égal au complément de l'angle donné : cette ligne coupera en C la perpendiculaire élevée sur le milieu de AR; ensorte que C sera le centre, et CA le rayon.

394. De là il est facile de résoudre la question suivante : *Connaissant la position des trois points*, R, A, R′ (Fig. 59) *et les angles sous lesquels on voit les lignes* RA, AR′ *d'un certain point* M, *trouver ce point* M. Sur les milieux G et G' des deux lignes RA et $R'A$, on élevera les perpendiculaires GC et $G'C'$; par le point A, on mènera les lignes AC et AC' faisant avec AR et AR', chacune avec chacune, les angles RAC, $R'AC'$ égaux chacun au complément de l'angle RMA, $R'MA$ sous lequel la ligne correspondante est vue. Des points C et C', comme centres, et des rayons CA et $C'A$, on décrira deux cercles qui se couperont en A et en M; le point M sera le point cherché. C'est une suite évidente de la solution précédente. Ce problème peut servir à marquer, sur la carte d'un pays, la position d'un point d'où l'on a relevé trois objets connus. Si les angles observés RMA, $R'MA$ étaient égaux aux angles $RR'A$ et $R'RA$, alors le problème ne serait plus déterminé, les deux cercles se confondraient, et chaque point de leur circonférence satisferait à la question.

395. Pour troisième question, il s'agira de trouver la courbe ou les courbes

qui auraient la propriété suivante : *AZ, AT* (*Fig* 60) *sont deux lignes qui font entr'elles un angle quelconque donné ; il s'agit de trouver les courbes dont la distance de chaque point* M *à un point fixe* F, *pris sur* AZ, *soit toujours dans un même rapport avec la distance* MT *du même point* M *à la droite* AT, *cette distance étant mesurée parallèlement à* AZ. D'un point quelconque M de cette courbe, imaginons la ligne MP parallèle à AT, et la perpendiculaire MS sur AZ ; l'angle MPS est donné ; c'est pourquoi son sinus et son cosinus sont censés connus ; nous les nommerons p et q, en représentant par r le rayon des tables. Nommons AP, u, et PM, t ; la ligne connue AF, c.

Cela posé, dans le triangle rectangle MPS, nous aurons (*Géom.* 295) $r : \sin MPS :: MP : MS$ et $r : \sin PMS$ ou $\cos MPS :: PM : PS$; c'est-à-dire, $r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}$, et $r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$. Donc..............

$FS = PS - PF = PS - AP + AF = \frac{qt}{r} - u + c$; or le triangle rectangle MSF donne.........

$$MF = \sqrt{\overline{MS}^2 + \overline{FS}^2}\ ;$$

$$\text{donc}\quad MF = \sqrt{\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc}\ ;$$

ou, parce que (*Géom.* 281) $p^2 + q^2 = r^2$, on aura..................

$MF = \sqrt{t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc}$; puis donc que MF doit être à MT ou AP dans un rapport donné, si l'on représente ce rapport par celui de g à h, on trouvera

$$h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)\,u^2 + \frac{2ch^2qt}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0,$$

équation qui renferme les sections coniques (379) et qui (391) appartiendra à l'ellipse, si $\frac{4q^2h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2g^2$ est négatif ; ou parce que.......... $r^2 - q^2 = p^2$, si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est négatif : au contraire, elle appartiendra à l'hyperbole, si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est positif. Elle sera à la parabole si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2} = 0$, ou si $rg = ph$; enfin la courbe sera un cercle, lorsqu'on aura $h^2 = h^2 - g^2$, ce qui ne peut jamais avoir lieu qu'autant que g sera zéro, ou que h sera infinie, parce que, dans ce dernier cas, on doit négliger g^2 vis-à-vis de h^2.

Si l'on veut maintenant construire la courbe dans chacun de ces cas, il n'y a qu'à imiter ce qui a été fait (379 *et suiv.*) ; comme nous avons alors, opéré sur l'ellipse, pour voir la similitude des opérations et des constructions à l'égard de ces deux courbes, nous allons ici appliquer à l'hyperbole ce qui a été fait au même endroit cité, c'est-à-dire, chercher à

$yy = \frac{bb}{aa}\left(xx - \frac{1}{4}aa\right)$. Je dégage donc t^2 dans l'équation trouvée ci-dessus, et pour faire disparaître le second terme, par rapport à t, je fais.. $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$; observant que $r^2 - q^2 = p^2$, et posant ensuite..... $p^2h^2 - r^2g^2 = r^2k^2$, je trouve

$$u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2}u + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0,$$

Soit
$$u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n};$$

on trouvera $y^2 = -\frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 + \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$; mais puisqu'il s'agit de l'hyperbole, la quantité r^2kk, qui n'est autre chose que $p^2h^2 - r^2g^2$, est négative, puisque, selon la remarque que nous venons de faire ci-dessus, $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ ou $\frac{4h^2}{r^2}(r^2g^2 - p^2h^2)$ doit être positif pour que la courbe soit une hyperbole. Ainsi il faut rendre k^2 négatif, en observant, lorsqu'on voudra substituer sa valeur dans l'équation, de remettre, pour cette valeur, la quantité $r^2g^2 - p^2h^2$, au lieu de $p^2h^2 - g^2r^2$; l'équation devient donc $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$. Comparant cette équation avec..... $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{1}{4}aa\right)$, on aura $-\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}$ et $\frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} + nn$, d'où l'on tirera les deux diamètres conjugués a et b, que nous allons voir être les deux axes mêmes de l'hyperbole. Déterminons donc la direction des diamètres conjugués, auxquels notre équation réduite se rapporte. Conformément à ce qui a été fait (381), il faut construire $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, et $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; mais comme k^2 est négatif, il faut changer cette dernière en (1).. $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n^2}$; je ne change point le signe du terme affecté de x, quoique k^2 y entre, parce que la quantité n peut être prise arbitrairement positive ou négative. Il faut donc, en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité, mener par le point A, parallèlement à PM, la ligne $AB = \frac{cq}{r}$, et tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ, prendre arbitrairement sur le prolongement de cette ligne, la partie BK, puis mener KL parallèle à PM, et telle que l'on ait $BK : KL :: r : q$: alors si, par le point B et le point L, vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q, les lignes QM seront y. Car

$$QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r};$$

or les triangles semblables BKL et BQI donnent $BK:KL::BI$ ou $AP:QI$; c'est-à-dire, $r:q::u:QI=\frac{qu}{r}$; donc $QM=t-\frac{qu}{r}+\frac{cq}{r}=y$.

Mais on peut abréger cette construction, en menant tout de suite du point F la ligne FB perpendiculaire sur TA; car il est évident que l'angle FAB est égal à APM, et que, par conséquent, dans le triangle rectangle ABF, on a $r:q::c:AB=\frac{qc}{r}$; ainsi, puisque QM est parallèle à AB, les y sont perpendiculaires sur BQ, et par conséquent BQ est la direction d'un des axes, dont l'autre par conséquent est parallèle à QM.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre. Or l'équation (1) fait voir qu'il faut prendre, à l'opposite des u, la quantité $AG=\frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$, et tirer GC parallèle à PM ou perpendiculaire à BQ, qui déterminera le point C pour l'origine des x, et par conséquent pour le centre. En effet, les x doivent être pris sur CQ, puisque les y se comptent depuis cette ligne; or l'équation (1) donne $GP=\frac{AG\times x}{n}$; les lignes x commencent donc en même temps que les lignes GP; donc les lignes x doivent commencer au point C, et sont par conséquent CQ; donc le point C est le centre. On s'y prendra d'une manière semblable pour l'ellipse. A l'égard de la parabole, puisqu'on a, dans ce cas, $rg=ph$, l'équation que l'on a eue en y et u, après l'évanouissement du second terme par rapport à t, et après avoir introduit pour r^2-q^2 sa valeur p^2, devient, en mettant dans la valeur de k^2 au lieu de g, sa valeur tirée de $rg=ph$, devient, dis-je, $y^2=\frac{2cp^2u}{r^2}-\frac{c^2p^2}{r^2}$; pour la réduire à la forme ordinaire de l'équation à la parabole, on fera (385) $\frac{2cp^2u}{r^2}-\frac{c^2p^2}{r^2}=nx$, ce qui donnera $yy=nx$; et ayant construit de la même manière que dans le cas précédent, l'équation $t+\frac{cq}{r}-\frac{qu}{r}=y$, qu'on a eue pour l'évanouissement du second terme par rapport à t, on construira l'équation $\frac{2cp^2u}{r^2}-\frac{c^2p^2}{r^2}=nx$, d'une manière analogue à ce qui a été fait (385).

396. Qu'il soit question maintenant de *trouver* (Fig. 62) *la courbe que décrirait un point donné* M *de la ligne donnée* OH, *ou de son prolongement, si l'on faisait glisser les extrémités* O *et* H *le long des deux côtés* CO, CH *de l'angle donné* OCH. D'un point quelconque M de cette courbe, menons MP parallèle à CH, puis MN perpendiculaire à CO; faisons $CP=u$, $PM=t$; et puisque l'angle OCH ou son égal OPM est donné, son supplément MPN est donné aussi : nommons donc p le sinus et q le cosinus de ce dernier, en supposant le rayon r; enfin désignons par g et h les lignes données OM et MH. Le triangle rectangle PNM nous

donne $r:p::t:MN$, et $r:q::t:PN$; donc $MN=\frac{pt}{r}$, et $PN=\frac{qt}{r}$. Les parallèles CH et PM nous donnent $MH:PC::MO:PO$; c'est-à-dire, $h:u::g:PO=\frac{gu}{h}$; donc $NO=\frac{qt}{r}+\frac{gu}{h}$; or le triangle rectangle MNO donne $\overline{MN}^2+\overline{NO}^2=\overline{MO}^2$, c'est-à-dire, ...
$\frac{p^2t^2}{r^2}+\frac{q^2t^2}{r^2}+\frac{2gqut}{rh}+\frac{g^2u^2}{h^2}=gg$; donc, puisque $p^2+q^2=r^2$, on aura $t^2+\frac{2gqut}{rh}+\frac{g^2u^2}{h^2}=gg$, équation à l'ellipse (380).

Pour ramener cette équation à la forme $yy=\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa-xx\right)$, il faut d'abord faire disparaître le second terme par rapport à t. Je fais donc $t+\frac{gqu}{rh}=y$, et observant que $r^2-q^2=p^2$, je trouve $y^2+\frac{g^2p^2u^2}{r^2h^2}=g^2$; or, quoique dans cette équation il n'y ait pas de second terme par rapport à u, néanmoins (388) comme le terme ut s'est trouvé dans l'équation primitive, je fais une transformation pour u, en faisant $u=\frac{lx}{n}$, et j'ai.....
$y^2=\frac{g^2p^2l^2}{r^2h^2n^2}\left(\frac{r^2h^2n^2}{p^2l^2}-x^2\right)$. Mais comme on n'a besoin que d'une seule indéterminée n, je supposerai; $l=r$, ce qui réduira l'équation à.........
$y^2=\frac{g^2p^2}{h^2n}\left(\frac{h^2n^2}{p^2}-x^2\right)$. Pour déterminer l'ellipse, j'en cherche d'abord les diamètres conjugués, en comparant à l'équation $yy=\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa-xx\right)$: cette comparaison donne $a=\frac{2hn}{p}$ et $b=2g$. Voyons maintenant quelles en sont les directions, et quelle est la valeur de n. Les deux équations à construire sont $t+\frac{gqu}{rh}=y$ et $u=\frac{lx}{n}=\frac{rx}{n}$. Pour la première, si l'on prend arbitrairement CK, et que l'on mène ensuite KL parallèle à PM, et telle que $CK:KL::rh:gq$, alors les lignes QM, comptées depuis la rencontre des lignes PM avec CL, seront y; en effet, les triangles semblables CKL et CPQ donnent $CK:KL::CP:CQ$; c'est-à-dire, $rh:gq::u:PQ=\frac{gqu}{rh}$; donc $QM=PM+PQ=t+\frac{gqu}{rh}=y$.

Les lignes QM étant y, il faut maintenant que les x soient comptés sur CQ; or l'équation $u=\frac{rx}{n}$ fait voir que les x commencent en même temps que les u; donc le point C est l'origine des x; donc C est le centre, et CQ et CH sont les directions des deux diamètres conjugués. Quant à la valeur de n, l'équation $u=\frac{rx}{n}$ ou $CP=\frac{r\times CQ}{n}$, donne $n=\frac{r\times CQ}{CP}$; mais.........

$CP : CQ :: CK : CL$; donc $\frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK}$; donc $n = \frac{r \times CL}{CK}$; mais puisque CK est arbitraire, on peut le supposer $= r$, ce qui donne $n = CL$; on a donc tout ce qu'il faut pour construire l'ellipse (315).

Application des mêmes principes à quelques questions déterminées.

397. Après avoir résolu la seconde question indéterminée que nous nous sommes proposée (393), nous en avons fait usage (394) pour résoudre une question déterminée. Nous avons tacitement considéré cette dernière comme en renfermant deux autres, toutes deux indéterminées, et qui étant chacune de même espèce que la première, ont été résolues chacune de la même manière. L'intersection des deux courbes ou cercles qui étaient le *lieu* de chacune de ces deux questions partielles, a donné la résolution de la question déterminée. Lorsque l'équation finale qui exprime les conditions d'une question passe le second degré, on s'y prend d'une manière semblable pour la résoudre. Dans le cas où l'on pourrait n'employer qu'une inconnue, on en emploie deux, et l'on cherche à former par les conditions de la question deux équations qui, étant construites séparément, donnent chacune une courbe dont chaque point satisfait à l'équation qui lui appartient : si le problème est possible, les deux courbes se rencontrent en un ou plusieurs points, selon que la question est susceptible d'une ou de plusieurs solutions, selon qu'elle renferme plusieurs cas dépendans des mêmes données et des mêmes raisonnemens. Ces intersections fournissent les différentes solutions de la question. Tant que les deux équations à deux indéterminées ne passeront pas le second degré, on voit donc que la résolution ne dépendra jamais que de l'intersection de deux sections coniques tout au plus; au lieu que, dans ces mêmes cas, si on n'employait qu'une seule inconnue, ou si, par le moyen des deux équations trouvées, on éliminait ou chassait une des deux inconnues, l'équation monterait au troisième et plus souvent au quatrième degré. Mais si l'une des équations ou toutes les deux passent le second degré, alors la résolution dépend de l'intersection de courbes plus élevées que les sections coniques. Voyons d'abord quelques exemples des questions qui ne passeraient pas le quatrième degré.

398. Proposons-nous pour première question de *trouver deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données* a *et* b. Si je nomme t et u ces deux moyennes proportionnelles, j'aurai la progression........ $\div a : t : u : b$, qui me donne ces deux proportions $a : t :: t : u$ et $t : u :: u : b$, et, par conséquent, ces deux équations $au = t^2$ et $bt = u^2$, qui toutes deux se rapportent directement à la parabole. C'est pourquoi si l'on tire (*Fig.* 63) deux lignes indéfinies AZ, AX qui fassent entre elles un angle quelconque que, pour plus de simplicité, on supposera droit, et si sur l'une AZ, comme diamètre, et du point A, comme sommet de ce diamètre, on

construit (366) une parabole dont le paramètre du diamètre AZ soit a, et dont l'angle des coordonnées soit XAZ, cette parabole sera le lieu de l'équation $au=t^2$, ensorte que les lignes AP étant u, les lignes PM seront t. Pareillement si sur AX, comme diamètre, et du point A, comme sommet, on construit une parabole dont le paramètre du diamètre AX soit b, et dont l'angle des coordonnées soit XAZ, cette parabole sera le lieu de l'équation $bt=u^2$, ensorte que les lignes AP' étant t, les lignes $P'M'$ seront u. Mais pour que la question soit résolue, il faut que les deux équations $au=t^2$ et $bt=u^2$ aient lieu en même temps, c'est-à-dire, que la valeur de u dans l'une soit la même que la valeur de u dans l'autre, et qu'il en soit de même de t; or c'est ce qui arrive évidemment au point M où se rencontrent les deux paraboles; car les u étant comptés sur AZ, et les t sur AX ou parallèlement à AX, il est visible que si l'on tire AP et PM parallèlement à AX et AZ, la valeur MP de u dans la parabole AMM' est la même que la valeur AP de u dans la parabole AMM; pareillement la valeur AP de t, dans la parabole AMM' est la même que la valeur PM de t dans la parabole AMM; on apperçoit aisément que le point M est le seul pour lequel à une même valeur de u, dans les deux courbes, correspondent deux valeurs égales de t : il faut cependant en excepter le point A, autre intersection des deux courbes; mais comme u et t y sont zéro, il est évident que ce point ne satisfait point à la question. Les valeurs de u et t sont donc AP et PM, le point M étant le point de rencontre.

399. Au reste, quoiqu'on puisse toujours parvenir à la solution en construisant séparément les équations que l'on trouve, quelquefois en préparant ces équations, on peut trouver des constructions plus simples; par exemple, si l'on ajoute les deux équations $au=t^2$ et $bt=u^2$, on aura $au+bt=u^2+t^2$, équation au cercle, en supposant que les u et les t seront pris sur des lignes perpendiculaires entre elles. Or, quoique la parabole soit facile à construire, le cercle l'est encore davantage : ainsi dans le cas présent, je préférerais de construire d'abord l'équation $au=t^2$ seulement, comme ci-dessus; après quoi je construirais l'équation au cercle $au+bt=u^2+t^2$, en la changeant en cette autre $yy=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb-xx$, par l'évanouissement des seconds termes par rapport à t et à u, en faisant $t-\frac{1}{2}b=y$, et $u-\frac{1}{2}a=x$. Alors prenant $AB=\frac{1}{2}b$, et tirant BQ parallèle à AP, j'aurais les lignes QM pour les valeurs de y. Prenant ensuite $AO=\frac{1}{2}a$ et menant OC parallèle à AX, j'aurais les lignes CQ pour valeurs de x; c'est pourquoi du point C, comme centre, avec un rayon $=\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}=AC$, je dé-

crirais un cercle qui, coupant la parabole AM au point M, me donnerait PM et AP pour les valeurs de t et de u.

400. On peut varier beaucoup ces constructions : par exemple, si l'on ajoute l'une des deux équations avec l'autre multipliée par une quantité arbitraire $\frac{l}{n}$ positive ou négative, on aura $au + \frac{l}{n} bt = t^2 + \frac{l}{n} u^2$, équation qui peut appartenir à l'ellipse ou à l'hyperbole, selon la quantité qu'on prendra pour $\frac{l}{n}$, ensorte qu'on peut construire avec l'une ou l'autre de ces deux courbes, comme on vient de le faire avec le cercle. On peut même construire avec l'une et avec l'autre, ou avec l'une seulement combinée avec un cercle, et cela en donnant à $\frac{l}{n}$ des valeurs convenables, et qui sont faciles à déterminer d'après ce qui a été dit (391).

401. Proposons-nous pour seconde question de *diviser un angle ou un donné, en trois parties égales.* Soit EO (*Fig.* 64) l'arc qu'il s'agit de diviser, A son centre : après avoir supposé $EM = \frac{1}{3} EO$ et mené les rayons AM, AE, si on abaisse les perpendiculaires OR et MP, les lignes OR et AR, qui sont les sinus et cosinus de l'arc donné, seront censées connues, et il s'agira de déterminer AP et PM. Faisons donc $OR = d$; $AR = c$; $AE = r$; $AP = u$ et $PM = t$. Cela posé, le triangle rectangle APM donne $u^2 + t^2 = rr$. Or les triangles semblables APM, ARS donnent $AP : PM :: AR : RS$; c'est-à-dire, $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Mais si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en V, l'arc MV sera égal à l'arc MO, comme étant chacun double de ME; donc l'angle $OMS = AMV = ASR = OSM$. Donc le triangle SOM est isoscèle, et par conséquent $OS = OM = MV = 2t$; donc, puisque $OR = OS + SR$, on aura $d = 2t + \frac{ct}{u}$, ou $tu + \frac{1}{2} ct = \frac{1}{2} du$.

Les deux équations à construire sont donc $t^2 = r^2 - u^2$, et $tu + \frac{1}{2} ct = \frac{1}{2} du$.

La première est toute construite, puisque c'est l'équation du cercle EMO. Quant à la seconde, elle appartient à l'hyperbole (390); et comme les deux quarrés manquent, il faut, conformément à ce qui a été dit au même endroit cité, passer dans un même membre tous les termes affectés de u, ce qui donne $\frac{1}{2} du - tu = \frac{1}{2} ct$; faisant $\frac{1}{2} d - t = y$, on a $uy + \frac{1}{2} cy = \frac{1}{4} cd$. Je fais ensuite $u + \frac{1}{2} c = x$, et j'ai $xy = \frac{1}{4} cd$, équation à l'hyperbole entre les asymptotes, que l'on déterminera de la manière suivante. L'équation $\frac{1}{2} d - t = y$ fait voir que si par le point A, origine des u et des t, on mène AB, parallèle à PM et égale à $\frac{1}{2}d$, et que l'on tire QBC parallèle à AP, les lignes QM, comptées dans un sens opposé aux PM, seront y; en effet $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; donc CQ est la direction d'une des asymptotes. La seconde équation $u + \frac{1}{2}c = x$, fait voir que si l'on prolonge AP vers G de la quantité $AG = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AR$, les lignes GP ou leurs égales CQ, en tirant GC parallèle à PM, seront x; donc C est le centre, et les lignes CQ et GC sont les asymptotes. On décrira donc, par la méthode donnée (353), une hyperbole entre ces asymptotes, laquelle passe par le point A, ainsi que l'indique l'équation.................. $xy = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$; cette hyperbole coupera le cercle au point cherché M.

Si l'arc EO était de plus de 90°, son cosinus RA tombant alors du côté opposé, serait négatif; il faudrait, dans les équations ci-dessus, supposer c négatif. Et si l'arc EO était de plus de 180°, et de moins que 270°, comme l'arc $EOE'O'$, son sinus et son cosinus seraient négatifs; il faudrait donc changer les signes de c et de d dans les équations trouvées ci-dessus.

Si l'on prolonge GC de la quantité $CG' = CG$, et CB de la quantité $CB' = CB$, et qu'ayant mené $B'A'$ et $G'A'$ parallèles à CG' et CB', on décrive entre les lignes CG' et CB', comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A', cette hyperbole rencontrera le cercle en deux points A', M', comme la première le rencontre aux deux points M et M''. Or de ces quatre points, trois méritent d'être remarqués : savoir, les points M, M' et M''. Le premier donne l'arc EM pour le tiers de l'arc donné EO. Le second, M', donne l'arc $E'M'$ pour le tiers de $E'O$, supplément de EO. Enfin le troisième, M'', donne $E'M''$ pour le tiers de $EOE'O$, c'est-à-dire, de l'arc OE augmenté de la demi-circonférence. En effet, l'arc $E'O$ a pour sinus et cosinus les lignes RO et AR, ainsi que l'arc EO, avec cette seule différence que AR, considéré comme cosinus de l'arc $E'O$, plus grand que 90°, est négatif; donc pour avoir la solution, dans ce second cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer dans celle qui précède, que c est négatif; or ce changement n'affecte que la seconde équation, et change sa réduite $xy = \frac{1}{4}cd$, en $xy = -\frac{1}{4}cd$, équation qui appartient à l'hyperbole $A'M'$, et qui fait donc voir que la solution de ce cas sera fournie par l'intersection M' de cette branche d'hyperbole avec le cercle; nous verrons, dans un moment, pourquoi ce n'est pas le point A'. $P'M'$ est donc le sinus de l'arc cherché, dans ce second cas. Cet arc est donc $E'M'$; c'est-à-dire, que $E'M'$ est le tiers de $E'O$.

A l'égard de la troisième solution, si l'on augmente l'arc EO de 180°, ce qui se fera en prenant $E'O' = EO$, alors l'arc $EOE'O'$ a pour sinus et cosinus les lignes $R'O'$ et AR', qui sont nécessairement égales aux lignes RO et AR, avec cette différence seulement que, tombant toutes deux de côtés opposés à ces dernières, elles sont négatives; donc pour avoir la solution qui convient à ce cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer c et d négatifs. Or ce changement n'en produit aucun dans l'équation où entrent c et d, c'est-à dire, dans l'équation $xy = \frac{1}{4}cd$; donc la première hyperbole doit donner, par son intersection M'', la solution de ce troisième cas; donc $P''M''$ est le sinus de l'arc cherché dans ce troisième cas; cet arc est donc $E'M''$, c'est-à-dire, que $E'M''$ est le tiers de $EOE'O'$. Ainsi la même construction qui sert à trouver le tiers d'un arc donné A, sert aussi à trouver le tiers de $180^\circ - A$, et le tiers de $180^\circ + A$.

On peut appliquer ici ce que nous avons dit (399) sur les différentes sections coniques qu'on peut employer pour construire, en combinant à volonté les deux équations en u et t. A l'égard de la quatrième intersection, nous avons dit qu'elle se faisait au point A', ce qui est évident, puisque l'hyperbole est assujétie à passer par le point A' qui est déterminé en faisant $B'A' = AB$, et $CB' = CB$, ce qui fait voir que $AR' = AR$ et $R'A' = RO$; donc le point A' appartient à la circonférence. Mais il ne donne point une nouvelle solution, puisqu'il est connu et déterminé par des opérations indépendantes des équations qui ont donné la solution.

402. Si de l'équation $2tu + ct = du$, trouvée ci-dessus, on tire la valeur de t, pour la substituer dans l'équation $u^2 + t^2 = r^2$, et si l'on observe que $c^2 + d^2 = r^2$, et si l'on divise ensuite par $u + c$, on trouvera (1)..... $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, équation qui doit renfermer les trois cas que nous venons d'examiner : elle doit donc avoir trois racines; or la construction fait voir que u a en effet trois valeurs, savoir, AP, AP', AP'', et ces deux dernières tombant de côtés opposés à la première, on voit que cette équation a trois racines ou valeurs de u, dont deux sont négatives; savoir, $u = -AP'$, $u = -AP''$, et la troisième positive, savoir, $u = AP$.

403. L'équation (1) est dans le cas irréductible; et ses racines étant les cosinus de $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^\circ - EO)$, $\frac{1}{3}(180^\circ + EO)$, on peut, par le moyen des tables des sinus, trouver les trois racines d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible, avec une approximation suffisante; voici la méthode. Représentons toute équation du troisième degré, dans le cas irréductible, par $u^3 - pu + q = 0$; en comparant à l'équation.........
$u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, nous aurons $-\frac{3}{4}r^2 = -p$; $-\frac{cr^2}{4} = q$; d'où...
$r = \sqrt{\frac{4}{3}p}$, et $c = -\frac{3q}{p}$. Représentons par R le rayon des tables; alors nous aurons le cosinus de l'arc EO, rapporté aux tables, en calculant le quatrième terme de cette proportion $r : c$, ou.........................

$\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} :: R : \frac{3qR}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}$; ce quatrième terme étant cherché dans les tables, donnera le sinus du complément de l'arc EO : c'est pourquoi, ajoutant 90° au nombre de degrés que l'on trouvera, ou, au contraire, retranchant ce nombre de 90°, selon que q sera positif ou négatif dans l'equation, la somme ou la différence sera EO que je représente par A; on cherchera donc, dans les mêmes tables, les cosinus des trois arcs $\frac{A}{3}$, $\frac{180° - A}{3}$, et $\frac{180° + A}{3}$; mais pour les réduire au rayon r, on multipliera chacun par $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire, par $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$, les trois valeurs de u seront donc.........

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cos \frac{A}{3}\,;\ u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cos \frac{180° - A}{3},\ \text{et}\ u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cos \frac{180° + A}{3};$$

telle est l'expression des valeurs absolues de u; mais ce qui a été dit (402) fait voir que, eu égard à leurs signes, les valeurs de u sont

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cos \frac{A}{3}\,;\ u = -\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cos \frac{180° - A}{3};\ \text{et}\ u = -\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cos \frac{180° + A}{3};$$

valeurs où il faudra observer de changer le signe de celles dans lesquelles l'arc $\frac{A}{3}$, ou $\frac{180° - A}{3}$, ou $\frac{180° + A}{3}$ passera 90°. On peut faciliter ces opérations par le moyen des logarithmes.

404. Proposons-nous maintenant cette question plus générale que celle que nous avons résolue (273). *D'un point* D (Fig. 65) *donné de position à l'égard des deux lignes* AR, AP, *qui font entre elles un angle connu, mener la ligne* PD *de manière que sa partie interceptée* RP *soit égale à une ligne donnée.* Du point D menons la ligne DS perpendiculaire à AP prolongé, et la ligne DO parallèle à AR, menons aussi du point R la ligne RN perpendiculaire à AP. Les lignes DO, DS, OS et AO sont censées connues, tant parce que la position du point D est supposée connue, que parce que l'angle RAP, ou son supplément RAN egal à DOS, est donné; c'est pourquoi nous ferons $DO = r$; $DS = p$; $OS = q$; $AO = d$, et la ligne donnée $RP = c$. Enfin nous nommerons u et t les inconnues AP et AR. Cela posé, les triangles semblables DSO, RNA donneront $DO : DS :: AR : RN$, et $DO : OS :: AR : AN$; ou $r : p :: t : RN = \frac{pt}{r}$, et $r : q :: t : AN = \frac{qt}{r}$; donc $NP = \frac{qt}{r} + u$; or $\overline{RN}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{RP}^2$, substi-

tuant les valeurs algébriques de RN, NP, RP, et observant que....... $p^2+q^2=r^2$, on trouve $t^2+\frac{2qut}{r}+u^2=cc$. Mais comme on a deux inconnues, il faut deux équations : or les triangles semblables DOP, RAP, donnent $DO:RA::OP:AP$; ou, $r:t::d+u:u$, et par conséquent, $ru=td+ut$. Ce sont là les deux équations qu'il faut construire pour résoudre la question. La première (380) appartient à l'ellipse, et la seconde à l'hyperbole. Pour construire la première, je fais $t+\frac{qu}{r}=y$; d'où.... $yy+\frac{ppuu}{rr}=cc$. Je fais $u=\frac{l}{n}x$ (388), et j'ai $yy+\frac{ppllxx}{rrnn}=cc$; je pose $l=r$, d'où $yy=\frac{pp}{nn}\left(\frac{ccnn}{pp}-xx\right)$. Comparant à $yy=\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa-xx\right)$, on trouvera les diamètres conjugués $a=\frac{2cn}{p}$, et $b=2c$. Déterminons leur position et la valeur de n; mais pour mieux sentir l'usage de cette construction, concevons auparavant que, donnant successivement à u ou AP plusieurs valeurs, on mène, parallèlement à AR, les lignes PM égales aux valeurs correspondantes de t, ce qui produira la courbe dont l'équation nous occupe actuellement. Cela posé, ayant pris arbitrairement AK sur AP, et mené KL parallèle à PM et qui soit à $AK::q:r$, on aura....... $QM=PM+PQ=t+\frac{qu}{r}$, à cause des triangles semblables AKL et APQ; donc $QM=y$; AQ est donc la direction d'un des diamètres, et les x doivent être comptés sur ce diamètre; or l'équation $u=\frac{l}{n}x=\frac{r}{n}x$, fait voir que les x commencent en même temps que les u; donc les x sont AQ. Cela étant, l'équation $u=\frac{rx}{n}$ devient donc $AP=\frac{r\times AQ}{n}$, qui donne.. $n=\frac{r\times AQ}{AP}$, ou $AP:AQ::r:n$; c'est-à dire, $AK:AL::r:n$; comme AK est arbitraire, on peut le supposer $=r$, et l'on aura, par conséquent, $n=AL$. Il ne s'agit donc plus que de construire (315) une ellipse dont les diamètres conjugués fassent entr'eux un angle égal à AQM, et dont celui qui a AQ pour direction, soit $=\frac{2cn}{p}$, et l'autre qui a AR pour direction, soit $=2c$. Cette ellipse sera le lieu de la première équation. Mais on peut remarquer, en passant, que cette ellipse est précisément celle que décrirait le milieu d'une ligne égale à $2RP$, glissant le long des côtés AP, AR; c'est ce dont il est aisé de se convaincre, en comparant avec la solution donnée (396) et y supposant $g=h=c$. Quand l'angle RAP est droit, l'ellipse devient un cercle dont le rayon est c.

Il ne reste plus qu'à construire $ru=dt+ut$, je fais $r-t=y'$, et ensuite $u+d=x'$, ce qui donne $x'y'=rd$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. On prendra donc, en vertu de l'équation $r-t=y'$, sur

AR, la quantité $AT = r = OD$, c'est-à-dire, que par le point D on tirera DTV parallèle à AP; alors les lignes VM seront y' en les comptant de V vers M, c'est-à-dire, dans un sens opposé à PM; car $VM = PV - PM = r - t$, donc $VM = y'$. Ensuite, en vertu de l'équation $u + d = x'$, on prendra $OA = d$, c'est-à-dire, qu'on mènera par le point D la ligne DO parallèle à AT; alors les lignes DV seront x', puisque $DV = OP = OA + AP = d + u$. On construira donc (353) entre les lignes DO et DV, comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A, puisqu'on a $x'y' = rd = AO \times AT$; cette hyperbole rencontrera l'ellipse aux deux points M et M' par lesquels menant MR et $M'R'$, parallèles à AP, on aura deux points R et R' tels que tirant les droites DRP, $D'R'$, les parties PR et $P'R'$, interceptées dans les angles égaux RAP, $R'AP'$, seront égales à la ligne c. Si en prolongeant les asymptotes, on décrit l'hyperbole opposée (*Fig.* 66) $M''A'M'''$, dans le cas où elle rencontrera l'ellipse, elle déterminera deux nouveaux points M'', M''' par lesquels menant des parallèles à AP, on aura sur AT deux nouveaux points R'', R'''; si maintenant on mène les lignes $R''D$, $R'''D$, les parties comprises dans l'angle TAS seront aussi égales à la ligne donnée c. Telle est, en général, la manière dont on doit s'y prendre pour résoudre les questions déterminées qui n'excéderont pas le quatrième degré.

405. Si l'on avait résolu la question sans employer deux inconnues, on pourrait néanmoins faire usage de la même méthode, en introduisant une nouvelle inconnue. Par exemple, si l'on proposait de *trouver un cube qui soit à un cube connu* a^3 *dans un rapport donné, exprimé par celui de* m *à* n. En nommant u le côté de ce cube, on aurait $u^3 : a^3 :: m : n$, et par conséquent $nu^3 = ma^3$. Pour construire cette équation, je supposerais $u^2 = at$; alors l'équation se changerait en $natu = ma^3$, ou $tu = \frac{ma^2}{n}$. Je construirais donc la parabole qui a pour équation $u^2 = at$, et l'hyperbole qui a pour équation $tu = \frac{ma^2}{n}$. L'intersection de ces deux courbes me donnerait la valeur de u et t. Si l'on multiplie par u l'équation $tu = \frac{ma^2}{n}$, et qu'on y substitue de nouveau pour u^2 sa valeur at, on aura...... $at^2 = \frac{ma^2u}{n}$, ou $t^2 = \frac{ma}{n}u$, autre équation à la parabole, que l'on peut construire conjointement avec l'équation $u^2 = at$. On peut remarquer, en passant, que ces équations sont celles qu'on aurait en cherchant deux moyennes proportionnelles entre a et $\frac{ma}{n}$; ainsi on peut construire précisément de la même manière qu'on l'a fait (398).

406. L'équation $nu^3 = ma^3$, donne $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$; la construction des radicaux cubes se fait donc par le moyen des sections coniques. Il en est

de même des radicaux quatrièmes, lorsqu'ils renferment des radicaux cubes; car s'ils ne couvraient que des radicaux quarrés, ou des quantités rationnelles, leur construction se ramènerait toujours au cercle; en effet, en prenant une moyenne proportionnelle m entre a et b, on aurait $\sqrt[4]{a^3m}$; prenant une moyenne proportionnelle n entre a et m, on aurait $\sqrt[4]{a^2n^2}$ ou $\sqrt{an}$, qui exprime une moyenne proportionnelle entre a et n.

407. Quand l'équation déterminée aurait un plus grand nombre de termes, on la construirait toujours d'une manière analogue.

408. Mais en introduisant ainsi arbitrairement une nouvelle équation, il peut arriver que les deux courbes ne se rencontrent point, quoique la question qui aura donné l'équation ait une ou plusieurs solutions; c'est pourquoi, pour éviter tout embarras, nous allons exposer un procédé qui a lieu également pour tous les degrés. Supposons que l'équation soit.... $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$; on fera... $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = a^2 t$, t marquant une indéterminée, et a, p, q des nombres ou des lignes connues; alors si l'on conçoit qu'on donne à u successivement plusieurs valeurs AP, AP, etc. (*Fig.* 67) et que l'on porte (*) les valeurs correspondantes de t (qui seront faciles à avoir, puisque t ne monte qu'au premier degré) en PM, PM, etc. sous un angle quelconque que, pour plus de simplicité, on peut supposer droit, il en naîtra une courbe. Or pour savoir où cette courbe rencontre l'axe AP, il faut supposer $t = 0$; ce qui donne l'équation proposée; donc les distances AO, AO', AO'', etc. auxquelles la courbe rencontre l'axe, seront les différentes valeurs de u. Mais si l'on veut une construction, cela sera aisé, en donnant à l'équation cette forme $t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$; or la construction de chacun des termes $\frac{u^3}{a^2}$, $\frac{u^2}{a}$, $\frac{pu}{a}$, pour chaque valeur de u donnée en lignes, est facile et s'exécute par ce qui a été dit (245).

409. Quand il entrera plus d'une inconnue dans la question, on pourra ramener la construction à celle que nous venons de donner, en réduisant toutes les inconnues à une seule, par la méthode donnée (161 *et suiv.*)

410. La question étant indéterminée, si u ou t, dans l'équation qui en résulte, ne monte pas au-delà du 2e degré, on pourra toujours construire cette équation, à quelque degré que monte l'autre indéterminée, en donnant à celle-ci des valeurs arbitraires qui seront les abscisses; et calculant les valeurs correspondantes de la première dont on fera les ordonnées.

(*) En observant de porter de côtés opposés de l'axe AP, celles qui se trouveraient avoir des signes contraires.

Mais si les deux indéterminées passent le second degré, alors il faudra, pour chaque valeur que l'on donnera à l'une d'elles, trouver les valeurs de l'autre, par la méthode qu'on vient de donner. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur les constructions de cette dernière espèce qu'on rencontre d'ailleurs assez rarement.

411. Avant de terminer cette troisième Partie, nous ferons encore remarquer quelques usages de l'application des équations aux courbes. Puisque toute équation à une section conique est toujours du second degré, et que l'équation la plus générale de ce degré peut toujours être réduite à cette forme $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, il s'ensuit qu'on peut toujours faire passer une section conique par cinq points donnés, pourvu que ces points, pris trois à trois, ne soient pas en ligne droite, parce qu'une section conique ne peut rencontrer une ligne droite en plus de deux points. En effet, concevons que A, B, C, D, E..... (*Fig.* 68) soient cinq points donnés et qui aient cette condition : si l'on rapporte ces cinq points à la ligne AD qui joint deux d'entr'eux, en menant les lignes BF, CH, EG, sous un angle donné, ou perpendiculaires à AD, alors les distances AF, BF; AG, GE; AH, HC; AD, qui sont censées connues, peuvent être regardees comme les abscisses et les ordonnées d'une ligne courbe. Or je dis qu'on peut toujours supposer que cette ligne courbe a pour équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; en effet, soit $AF = n$; $BF = m$; $AG = n'$; $GE = m'$; $AH = n''$; $CH = m''$, $AD = n'''$; il est visible que, 1°. pour le point A, on aura $u = 0$, et $t = 0$, ce qui réduit l'équation à $h = 0$. 2°. Pour le point B, on aura.. $u = n$ et $t = m$; ce qui change l'équation en $dm^2 + cmn + en^2 + fm$... $+ gn = 0$, parce que $h = 0$. 3°. Pour le point E, on aura $u = n'$, $t = m'$, et par conséquent, $dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$. 4°. Pour le point C, on trouvera de même $dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$. 5°. Enfin, pour le point D, ou $t = 0$ et $u = n'''$, on aura $en'''^2 + gn''' = 0$, ou $en''' + g = 0$. Or ces quatres équations renfermant toutes les quantités c, e, f, g, au premier degré, il sera facile d'en avoir les valeurs, alors, en les substituant dans l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, ou plutôt dans l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu = 0$, puisque $h = 0$, on aura c, e, f, g en quantités toutes connues, et l'équation se divisera par d. Il sera donc alors facile de construire la courbe, et de déterminer si elle est ellipse, hyperbole, parabole ou cercle. Si l'on ne donnait que quatre points, alors un des coefficiens serait arbitraire ; ce qui donne lieu d'imposer, à volonté, une condition, et deux, si l'on ne donne que trois points, et ainsi de suite.

On distingue les lignes par le degré de leur équation. Ainsi la ligne droite, dont l'équation n'est que du premier degré, est ligne du premier ordre. Les sections coniques sont les lignes du second ordre. On voit donc qu'on peut, par la même méthode, déterminer l'équation d'une ligne du troisième ordre, qu'on assujétirait à passer par autant de points moins un que l'équation générale de cet ordre, à deux indéterminées, peut avoir de termes différens : il en est de même dans les ordres supérieurs.

412. Cette même méthode peut servir à lier par une loi approchée et simple, plusieurs quantités connues, dont la loi serait ou trop composée, ou inconnue. Supposons, par exemple, que l'on connaisse trois quantités que je représente par les lignes CB, ED, GF, (*Fig.* 69), et que ces quantités dépendent de trois autres AB, AD, AF. Il s'agit de trouver une quantité HI, intermédiaire aux premières, ou qui en soit voisine, et qui dérive de AH de la même manière que CB, ED, etc. dérivent de AB, AD, etc. On peut satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, en prenant une équation à deux indéterminées u et t qui ait au moins autant de termes différens qu'il y a de quantités telles que CB, ED, GF. Mais, entre tous ces différens moyens, celui qui donne plus de facilité pour les différens usages qu'on peut faire de cette méthode, est de regarder la ligne IH comme l'ordonnée, et la ligne AH comme l'abscisse d'une courbe qui passerait par les points donnés C, E, G, etc., et qui aurait pour équation celle-ci, $t = a + bu + cu^2 +$ etc. en prenant autant de termes que l'on a de quantités ou de points C, E, G; alors supposant, comme ci-dessus, que u valant AB, t vaut CB; que u valant AD, t vaut DE; que u valant AF, t vaut GF, et ainsi de suite, on aura autant d'équations pour déterminer a, b, c, etc. qu'on a de points. Ayant déterminé les valeurs de a, b, c, etc., si on les substitue dans l'équation $t = a + bu + cu^2$, etc., on aura une équation dans laquelle tout sera connu, excepté u et t. Si donc on met pour u la distance connue AH, qui convient à la quantité HI que l'on cherche, alors on aura la valeur correspondante de t, c'est-à-dire, HI. On voit par là, la confirmation de ce que nous avons dit (281). En effet, si l'on voulait imiter le contour $ABCDEF$ (*Fig.* 70), on abaisserait d'un certain nombre de points de ce contour, des perpendiculaires sur une ligne déterminée XZ, puis, par la méthode qu'on vient de voir, on déterminerait l'équation d'une courbe qui passerait par tous ces points, et dans laquelle t étant au premier degré, u montât au degré marqué par le nombre de ces points moins un ; alors cette équation servirait à déterminer des perpendiculaires intermédiaires qui approcheraient d'autant plus des véritables, qu'on aura pris d'abord un plus grand nombre de points A, B, C, D, etc.

Appendice.

413. Nous nous étions proposés de faire entrer dans ce volume plusieurs autres matières ; mais pour ne point passer de justes bornes, nous sommes obligés de les renvoyer au suivant. Cependant, nous placerons encore ici quelques propositions dont nous aurons occasion de faire usage par la suite, et dont quelques-unes nous serviront à démontrer l'une

des règles que nous avons données (*Géom.* 361, *Quest.* VI) pour trouver les angles d'un triangle sphérique lorsqu'on en connaît les trois côtés.

414. Quand le rayon $r = 1$, on a (*Géom.* 284, 285 et 278)

$$1^\circ.\ sin.\ (a \pm b) = sin.a\ cos.b \pm sin.b\ cos.a.$$

$$2^\circ.\ cos.\ (a \pm b) = cos.a\ cos.b \mp sin.a\ sin.b.$$

$$3^\circ.\ tang\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a};\ cot\ a = \frac{cos\ a}{sin\ a}.$$

415. Cela posé, si l'on divise la valeur de *sin* $(a \pm b)$ par celle de *cos.* $(a \pm b$, on aura

$$tang\ (a \pm b) = \frac{sin\ a\ cos\ b \pm sin\ b\ cos\ a}{cos\ a\ cos\ b \mp sin\ a\ sin\ b},$$

divisant haut et bas, par $cos\ a\ cos\ b$; on trouvera

$$tang\ (a \pm b) = \frac{tang\ a \pm tang\ b}{1 \mp tang\ a\ tang\ b}.$$

Si l'on divise la valeur de $cos\,(a \pm b)$ par celle de..... $sin\ (a \pm b)$, on trouvera

$$cot\ (a \pm b) = \frac{cot\ a \pm tang\ b}{1 \pm cot\ a\ tang\ b}.$$

416. Ces valeurs de $sin\ (a + b)$, $cos\,(a + b)$........, $tang\,(a + b)$ peuvent servir à trouver les sinus, cosinus et tangentes des arcs multiples d'un arc donné, et par conséquent les équations qui serviraient à diviser un angle en plusieurs parties égales. Il n'y a qu'à supposer successivement $b = a$, $= 2a$, $= 3a$, et ainsi de suite. Par exemple,.... $b = a$, donne $sin\ 2a = 2 sin\ a\ cos\ a$, et................. $cos\ 2a = cos\ a\ cos\ a - sin\ a\ sin\ a = cos^2\ a - sin^2 a = 1 - 2\ sin^2\ a$, (en mettant pour $cos^2 a$ sa valeur $1 - (sin^2\ a)$. En supposant $b = 2a$, on aura.........................

$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a$, et...............
$\cos 3a = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a$. Or les deux équations précédentes donnent les valeurs de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$; si donc on les substitue dans celles-ci, on aura les valeurs de $\sin 3a$ $\cos 3a$, exprimées au moyen des sinus et cosinus de l'arc simple a, et ainsi de suite. On obtiendra de la même manière $\tang 2a$, $\tang 3a$, etc. en employant la formule qui donne $\tang (a + b)$ et supposant successivement ....
$b = a$, $= 2a =$ etc.

417. Si l'on ajoute la valeur de $\sin (a + b)$, à celle de $\sin (a - b)$, on aura $\sin (a+b) + \sin (a-b) = 2 \sin a \cos b$, et par conséquent

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2} \sin (a + b) + \tfrac{1}{2} \sin (a - b).$$

En ajoutant pareillement la valeur de $\cos (a + b)$ à celle de $\cos (a - b)$, on trouvera..........................

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b,$$

ou $$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} \cos (a + b) + \tfrac{1}{2} \cos (a - b).$$

Retranchant $\cos (a + b)$ de $\cos (a - b)$, on trouvera

$$\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \sin b;$$

d'où $$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} \cos (a - b) - \tfrac{1}{2} \cos (a + b).$$

418. Si l'on fait $a + b = m$ et $a - b = n$, et qu'après avoir ajouté et retranché, on divise les deux membres par 2, on aura $a = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n$ et $b = \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n$, d'où l'on conclura

1°. $\sin m + \sin n = 2 \sin (\tfrac{1}{2} m + \tfrac{1}{2} n) \times \cos (\tfrac{1}{2} m - \tfrac{1}{2} n)$.

2°. $\cos m + \cos n = 2 \cos (\tfrac{1}{2} m + \tfrac{1}{2} n) \times \cos (\tfrac{1}{2} m - \tfrac{1}{2} n)$,

3°. $\cos n - \cos m = 2 \sin (\tfrac{1}{2} m + \tfrac{1}{2} n) \times \sin (\tfrac{1}{2} m - \tfrac{1}{2} n)$.

Ces propositions seront très-utiles; on voit avec quelle facilité elles se trouvent et se démontrent par le calcul. Nous nous bornerons,

bornerons, pour le présent à faire voir l'usage pour la démonstration de la règle donnée (*Géom.* 361, *Quest.* VI).

419. Soit donc ABC (*Fig.* 71) un triangle sphérique, AD un arc de cercle, abaissé de l'angle A perpendiculairement sur le côté opposé BC; prenons sur ce même côté $BE = BA$ et ayant imaginé l'arc de grand cercle AE, par son milieu O et par le point B, imaginons aussi l'arc de grand cercle BO, qui divisera l'angle ABC en deux parties égales. Cela posé, dans le triangle EBO, on aura (*Géom.* 349), en supposant le rayon $= 1$, $1 : \sin BE$ ou $\sin AB :: \sin OBE$ ou $\sin \frac{1}{2} ABC : \sin OE$; donc $\sin OE$ ou $\sin \frac{1}{2} AE = \sin AB \times \sin \frac{1}{2} ABC$; or (416) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$, ou, en faisant $2a = m$, $\cos m = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} m$; donc $\sin^2 \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos m$, et par conséquent on peut, au lieu de $\sin^2 \frac{1}{2} AE$, mettre $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos AE$; donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos AE = \sin^2 AB \times \sin^2 \frac{1}{2} ABC$; or (*Géom.* 357) dans le triangle ABC, on a . . . .

$$\cos BD : \cos CD \text{ ou } \cos(BC - BD) :: \cos AB : \cos AC;$$

c'est-à-dire . . . .

$$\cos BD : \cos BC \cos BD + \sin BC \sin BD :: \cos AB : \cos AC,$$

et par conséquent . . . .

$$\cos BD \cos AC = \cos AB \cos BC \cos BD + \cos AB \sin BC \sin BD;$$

d'où . . . .

$$\sin BD = \frac{\cos BD \cos AC - \cos AB \cos BC \cos BD}{\cos AB \sin BC}.$$

Par le même principe, on aura dans le triangle BAE. . . . ,

$$\cos BD : \cos DE \text{ ou } \cos(AB - BD) :: \cos AB : \cos AE;$$

c'est-à-dire, ...

$$\cos BD : \cos AB \cos BD + \sin AB \sin BD :: \cos AB : \cos AE;$$

donc . . . .

$$\cos BD \cos AE = \cos AB \cos AB \cos BD + \cos AB \sin AB \sin BD;$$

d'où l'on tire. . . . .

$$\sin BD = \frac{\cos BD \cos AE - \cos^2 AB \cos BD}{\cos AB \sin AB};$$

égalant ces deux valeurs de $\sin BD$, on aura............,

$$\cos AE = \frac{\sin AB \cos AC - \cos AB \sin AB \cos BC + \cos^2 AB \sin BC}{\sin BC};$$

substituant cette valeur dans l'équation, et observant que $1 - \sin^2 AB = \cos^2 AB$, on trouvera.......................

$$\sin BC \sin AB - \cos AC + \cos AB \cos BC$$
$$= 2 \sin AB \times \sin BC \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC;$$

or (414) $\cos AB \cos BC + \sin BC \sin AB = \cos(BC - AB)$; donc....................................

$$\cos(BC - AB) - \cos AC = 2 \sin AB \sin BC \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC;$$

mais (418) $\cos(BC - AB) - \cos AC$ est la même chose que $2\sin(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB + \frac{1}{2}AB - AB)\sin(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - BC)$, ou, en nommant S la somme des trois côtés, la même chose que $2\sin(\frac{1}{2}S - AB)\sin(\frac{1}{2}S - BC)$; donc................

$$\sin(\tfrac{1}{2}S - AB) \times \sin(\tfrac{1}{2}S - BC) = 2 \sin AB \sin BC \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC,$$

d'où, après avoir divisé par 2, on tire......................

$$\sin AB \times \sin BC : \sin(\tfrac{1}{2}S - AB) \times \sin(\tfrac{1}{2}S - BC) :: 1$$

ou $r^2 : \sin^2 \frac{1}{2} ABC$; ce qui donne, en employant les logarithmes, la règle qu'il s'agissoit de démontrer.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE SECTION,

Dans laquelle on donne les Principes du Calcul des Quantités algébriques.

SECONDE SECTION,

NOTES

SUR L'ALGÈBRE,

PAR A.-A.-L. REYNAUD.

1. NOUS avons vu, dans l'Arithmétique, comment on pouvait résoudre un grand nombre de problèmes à l'aide des seules combinaisons des quatre règles. Mais ces solutions ont des inconvéniens, car souvent on n'arrive au résultat que par des tâtonnemens, et quelquefois même, les valeurs que l'on trouve pour les inconnues ne satisfont point à la question proposée; enfin, on ne parvient jamais à des résultats généraux. On a remédié à ces inconvéniens, en représentant les quantités connues et inconnues, par des *caractères* indépendans de toute valeur particulière. Ces *caractères* sont les lettres de l'Alphabet. On prend les premières lettres, a, b, c, etc., pour désigner les *quantités connues* et les dernières lettres, x, y, z, t, u, v, etc., représentent les *inconnues*.

2. Par exemple; si l'on veut résoudre cette question : *la somme de deux nombres est* 12, *leur différence est* 6; *quels sont ces nombres ?* En désignant par x le plus petit des deux nombres; le plus grand sera $x+6$ (*) et la somme de ces deux nombres devant être égale à 12, on aura, $x+x+6=12$.

Pour trouver x, on observera que $x+x$, exprime 2 fois x,

(*) Nous avons fait connaître (*A*, n° 25) les *signes*,

$+$	$-$	$\times$	$=$	$>$

ils signifient respectivement

plus	*moins*	*multiplié par*	*égal*	*plus grand que*.

ou $x \times 2$. De sorte que $x \times 2 + 6 = 12$; 12 étant la somme des deux quantités 6 et $x \times 2$, si l'on ôte 6 de 12, le reste 6 sera égal à $x \times 2$; et par conséquent, le plus petit nombre x, sera la moitié de 6, ou 3; le plus grand nombre sera donc $3 + 6$, ou 9. Les nombres 3 et 9 satisfont aux deux conditions du problème, car leur somme est 12 et leur différence est 6.

3. Si l'on prenait d'autres nombres pour la somme et la différence, le résultat changerait; mais les raisonnemens et les opérations à faire, pour déduire le plus petit nombre et le plus grand, de la somme et de la différence, resteraient les mêmes. Par conséquent, pour découvrir comment les valeurs des inconnues se déduisent des quantités connues, il suffit de représenter ces dernières par des *caractères* généraux. On désignera donc la somme des deux nombres inconnus par a et leur différence par b; le plus petit nombre étant x, le plus grand sera $x + b$ et la somme de ces deux nombres devant être égale à a, on aura..... $x + x + b = a$; ou $x \times 2 + b = a$.

a étant la somme des deux quantités b et $x \times 2$, si de a on ôte b, le reste $a - b$, sera égal à $x \times 2$. Donc $x \times 2 = a - b$. Le double de x étant $a - b$, le plus petit nombre x sera la moitié de $a - b$, ou $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Le plus grand nombre $x + b$, sera donc $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b$, ou $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; car $b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$. Ainsi,

$$x = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b \quad \text{et} \quad x + b = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b.$$

Ces résultats nous apprennent, que *le plus petit nombre est toujours égal à la demi-somme moins la demi-différence et que le plus grand est égal à la demi-somme plus la demi-différence.* Ce qui s'accorde avec le résultat du n° 145 de mon Arithmétique.

L'égalité $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, est une *formule algébrique*, qui donne le *tableau des opérations arithmétiques à effectuer sur les quantités connues*, a *et* b, *pour en déduire l'inconnue* x.

4. Les égalités écrites à l'aide des signes algébriques, ont reçu le nom d'*Equations*. Les deux quantités séparées par le

signe $=$, sont les deux *membres* de l'équation ; la quantité placée à gauche du signe $=$ est le *premier membre*, et celle qui est à droite est *le second membre*. Les quantités séparées par les *signes* $+$ et $-$, sont les *termes* de l'équation. Ainsi, $x+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, est une *équation*; le 1^er^ *membre* est $x+b$, le 2^e^ *membre* est $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$; les *termes* du 1^er^ membre sont x et b; les *termes* du 2^e^ membre sont $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$.

5. Quand on déduit d'une équation la valeur de l'inconnue qu'elle renferme, on dit qu'on *résout* cette équation. Par conséquent, *résoudre une équation, c'est lui faire subir des transformations qui ne troublent pas l'égalité et après lesquelles l'inconnue se trouve seule dans un membre ; alors, l'autre membre, représente la valeur de l'inconnue. Quand on dit qu'une égalité n'est pas troublée, on entend que l'inconnue ne change pas de valeur.*

6. Les exemples précédens suffisent pour faire voir que *la solution d'un problème est composée de trois parties essentiellement différentes. La première consiste à mettre le problème en équation, en traduisant les conditions qu'il exprime en langage algébrique ; ce qui se réduit toujours à indiquer, au moyen des signes algébriques, sur les quantités connues et inconnues, les mêmes opérations, qu'il faudrait effectuer, si connaissant les valeurs des inconnues, on voulait s'assurer qu'elles satisfont à toutes les conditions du problème.* De sorte que *pour mettre un problème en équation, il suffit d'indiquer la* PREUVE. *Dans la seconde partie, on cherche à résoudre l'équation du problème, en dégageant l'inconnue des quantités avec lesquelles elle se trouve combinée.* Enfin, *dans la troisième partie, on fait la* PREUVE, *en vérifiant si les valeurs obtenues pour les inconnues, satisfont à toutes les conditions du problème.* On pourrait appliquer cette règle à des exemples, mais la résolution des équations qui en résulteraient, exigeant la connaissance des *opérations de l'Algèbre*, nous commencerons par ces opérations.

Calcul des Quantités algébriques.

7. Nous ferons d'abord connaître la *notation qui a été adoptée*. Les *signes* $+$ et $-$ indiquant l'addition et la soustraction, les expressions $a+b$ et $a-b$, désigneront la somme et la différence des quantités représentées par les lettres a et b. Pour indiquer le produit des quantités a, b, c, on pourrait écrire $a\times b\times c$, mais on est convenu de sous-entendre le signe $\times$; de sorte que abc représente le produit des quantités a, b, c.

8. En général, *pour indiquer le produit de plusieurs quantités, on écrit ces quantités les unes à la suite des autres, sans les séparer par aucuns signes.*

9. Quand les quantités que l'on doit ajouter ou multiplier, sont égales, on simplifie le résultat. Ainsi, $b+b+b$, indiquant la somme de 3 quantités égales à b, ou $b\times 3$, ou $3\times b$, on écrit $3b$ (n° 8) ; et bbb indiquant le produit de 3 facteurs égaux à b, on écrit b^3. Dans l'expression $3b$, on dit que 3 est le *coefficient* de b, et dans b^3 on dit que l'*exposant* de b est 3. D'après ces conventions.....

$$b+b=2b\,;\ ab+ab+ab=3ab\,;\ abc+abc=2abc.$$

$$b^3=bbb\,;\ b^4=bbbb\,;\ 2^3=2\times 2\times 2=8\,;\ 3^2=3\times 3=9.$$

10. *On est convenu d'omettre le coefficient* $+1$ *et l'exposant* 1. Ainsi, b est la même chose que $+1b^1$ et ab est la même chose que $+1a^1b^1$.

11. Les quantités, b^3, b^4, etc., étant respectivement égales à $1\times b\times b\times b$, $1\times b\times b\times b\times b$, etc. (n° 9), on peut dire que l'*exposant d'une lettre indique combien de fois l'unité est multipliée par cette lettre*. De sorte que, *pour obtenir la valeur du produit indiqué par une lettre affectée d'un exposant, il suffit d'écrire l'unité et de mettre à sa suite la lettre autant de fois facteur, qu'il y a d'unités dans l'exposant.*

12. Les produits de facteurs égaux, ont reçu le nom de

puissances. On désigne une *puissance*, par le nombre de facteurs égaux dont elle est formée et l'un des facteurs égaux, se nomme la *Racine*. La quatrième *puissance* de b est donc b^4 et la *racine* quatrième de b^4 est b; la $3^{ème}$ *puissance* de 2 est $2 \times 2 \times 2$, ou 8, et la *racine* $3^{ème}$ de 8 est 2. En général; *la* $m^{ième}$ *puissance d'une quantité, est le produit de m facteurs égaux à cette quantité et la racine* $m^{ième}$ *d'une puissance est la quantité qui prise m fois facteur, reproduit cette puissance.* Ainsi, 2 est la racine quatrième de 16, parce que 2 pris 4 fois facteur, donne $2 \times 2 \times 2 \times 2$, ou 16. Pour indiquer la racine du degré m d'une quantité, on couvre cette quantité du *signe* $\sqrt{}$, nommé *Radical*, entre les branches duquel on met le nombre qui marque le *degré* ou l'*indice* de la *racine*. $\sqrt[3]{a^3}$ indique donc la *racine* $3^{ème}$ de a^3; la valeur de cette *racine* est a. La deuxième puissance a reçu le nom de *quarré* et la troisième puissance a reçu le nom de *cube;* de sorte que les expressions, *racine quarrée* et *racine cubique*, sont synonimes avec *racine deuxième* et *racine troisième*. Le *quarré* de 3 est 3×3 ou 9 et la *racine quarrée* de 9 est 3; le *cube* de 2 est $2 \times 2 \times 2$, ou 8, et la *racine cubique* de 8 est 2.

13. Les *termes* de l'expression $2a+b-s$, sont $2a$, $+b$, et $-s$. Chacun de ces termes est un *monôme*. Lesquantités composées de 2 termes, ou de 3 termes, ou etc., sont des *binômes*, ou des *trinômes*, ou etc. En général, une quantité composée de *plusieurs termes* est un *polynôme*.

14. *Les termes qui ne sont pas précédés du signe* $+$ *ou du signe* $-$, *sont censés affectés du signe* $+$. Ainsi, dans le polynôme, $a-b+c$, le premier terme a est censé affecté du signe $+$. Les quantités affectées du signe $+$, sont dites *positives*, et les quantités affectées du signe $-$, sont des quantités *négatives*. Les nombres $+3$ et $+5$ sont *positifs*; -3 et -5 sont des nombres *négatifs*.

15. *La soustraction conduit aux quantités négatives*. En effet; si l'on voulait ôter 7 de 5, le *reste* serait -2, car

pour retrancher 7, il suffit d'ôter successivement 5 et 2 ; mais quand on a ôté 5 de 5, le reste est zéro ; on devrait donc ôter 2 de 0 ; le reste demandé est donc $0-2$, ou -2. Par la même raison, quand on retranche $a+b$, de a, le *reste* est $a-a-b$, ou $0-b$, ou $-b$. En général, *la quantité négative* $-b$, *indique le reste d'une soustraction dans laquelle la quantité à soustraire surpasse de b, la quantité dont on veut la soustraire.* De sorte qu'*on peut considérer une quantité négative, comme exprimant le reste d'une soustraction qui n'a pu s'effectuer entièrement.*

16. Le nombre des facteurs simples contenus dans un produit, en constitue le *degré. Les coefficiens numériques ne comptent pas dans l'estimation du degré des quantités algébriques.*

17. *Un polynôme est dit* HOMOGÈNE, *quand tous les termes sont du même degré.* Ainsi, $a^3+5a^2b-b^3$, est un *polynôme homogène du troisième degré.*

18. *On est convenu de déterminer les grandeurs des quantités algébriques, par les grandeurs des exposans.* De sorte que sous le rapport de l'Algèbre, a^3 est plus grand que a^2 ; mais il ne s'agit pas des valeurs numériques, car lorsque a est moindre que l'unité, la valeur numérique de a^3 est moindre que celle de a^2 ; par exemple, $a=\frac{1}{2}$, donne $a^3=\frac{1}{8}$ et $a^2=\frac{1}{4}$.

19. *Quand les termes d'un polynôme, sont disposés suivant l'ordre indiqué par les grandeurs des exposans d'une même lettre, prise arbitrairement, on dit que le polynôme est* ORDONNÉ *par rapport à cette lettre.* Le polynôme $a^5+5ba^4+b^2a^3$, est donc *ordonné*, suivant les *puissances décroissantes* de a et ce polynôme, *ordonné* suivant les *puissances croissantes* de a, est $b^2a^3+5ba^4+a^5$.

20. *Pour indiquer des opérations à effectuer sur des quantités, on renferme ces quantités entre parenthèses et l'on met hors des parenthèses, les signes des opérations à effectuer.* Ainsi, pour indiquer, la *somme*, ou la *différence*, ou le *pro-*

duit, ou le *quotient*, des deux binômes $a-b$, $c-d$, on écrit (*A*, n° 217)....

$(a-b)+(c-d)$, ou $(a-b)-(c-d)$, ou $(a-b)\times(c-d)$, ou $(a-b):(c-d)$.

Les expressions, $(a-b):(c-d)$, $\frac{(a-b)}{(c-d)}$, $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)$, $\frac{a-b}{c-d}$, désignent également le quotient de la division de $(a-b)$ par $(c-d)$.

Les conventions des n^{os} 8 et 9, s'appliquent aux polynômes, en renfermant chaque polynôme entre deux parenthèses. Ainsi, $(a-b)(c-d)$, indique le produit des binômes $(a-b)$ et $(c-d)$; $(a-b)^3$ désigne le produit de trois facteurs égaux à $(a-b)$, c'est-à-dire la 3^e puissance de $(a-b)$ et $\sqrt[3]{(a+b)}$ désigne la racine 3^e de $(a+b)$.

21. Les polynômes algébriques, peuvent quelquefois se réduire à une forme plus simple. Par exemple, si p désigne une quantité quelconque, on aura.....

$$p+3+5=p+8;\ p-3-5=p-8;\ p+5-3=p+2;\ p+3-5=p-2.$$

En effet; $p+3+5$, exprime que l'on doit ajouter successivement 3 et 5, à p; ce qui revient à ajouter 8 à p; $p-3-5$, indique que l'on doit soustraire 3 et 5 de p, ce qui se réduit à retrancher 8 de p; $p+5-3$, exprime que l'on doit ajouter 5 à p, pour retrancher ensuite 3; ce qui revient à ajouter 2 à p; enfin, on obtient la valeur de $p+3-5$, en ajoutant 3 à p et retranchant ensuite 5; ce qui revient à retrancher 2 de p. On a donc.....

$$+3+5=+8;\ -3-5=-8;\ +5-3=+2;\ +3-5=-2.$$

22. *L'ordre dans lequel on écrit les termes d'un polynôme, est indifférent*, car dans tous les cas, le résultat exprime la somme des quantités additives, diminuée de la somme des quantités soustractives. Ainsi, $2+7-5=7-5+2=4$.

23. En général, *pour réduire une expression composée de plusieurs nombres affectés des signes* $+$ *et* $-$, *il suffit de*

calculer deux sommes; l'une des nombres affectés du signe $+$, *l'autre des nombres affectés du signe* $-$; *on retranche la plus petite somme de la plus grande; le reste, affecté du signe des nombres qui ont donné la plus grande somme, exprime le résultat demandé.* S'il s'agit de l'expression $5-6+3-7+10$, on calculera deux sommes; l'une 18, des nombres positifs 5, 3, 10, et l'autre 13, des nombres 6, 7, précédés du signe $-$; la différence entre ces deux sommes étant $18-13$, ou 5, et la plus forte somme correspondant aux nombres affectés du signe $+$, l'expression proposée se réduit à $+5$. On verrait de même que $-5+6-3+7-10$, se réduit à -5.

24. Par conséquent, si l'on considère la quantité b comme une certaine unité, on aura.....

$$3b+5b=8b;\ -3b-5b=-8b;\ 5b-3b=2b;\ 3b-5b=-2b;$$
$$5b-6b+3b-7b+10b=+5b;\ -5b+6b-3b+7b-10b=-5b.$$

25. En général, *pour réduire un polynôme à sa plus simple expression, il suffit de réunir tous les* TERMES SEMBLABLES (*) *en un seul, en opérant sur les coefficiens de ces termes, d'après la règle du nº* 23. Par exemple, s'il s'agit du polynôme...

$$5a-7b^2c-3a+4b^2c-2a+11a-b,$$

on écrira les termes semblables, les uns à côté des autres, de cette manière.....

$$5a+11a-3a-2a-7b^2c+4b^2c-b.$$

Le coefficient de a, sera $5+11-3-2$, ou $+11$; le coefficient de b^2c sera $-7+4$, ou -3; le polynôme se réduira donc à, $11a-3b^2c-b$. On dit que ce dernier polynôme est réduit à sa plus simple expression, parce que tant qu'on ne donnera pas des valeurs particulières aux lettres, a, b, c, on

(*) On entend par *termes semblables*, ceux qui sont les mêmes, abstraction faite des coefficiens numériques. Ainsi, $3a^2b$ et $7a^2b$ sont des termes semblables. Les termes $2ab$ et $2ab^2$ ne sont pas semblables.

ne pourra pas le réduire à un plus petit nombre de termes. Si l'on supposait, $a=100$, $b=2$, $c=3$, on trouverait, en effectuant les opérations indiquées,

$$5a-7b^2c-3a+4b^2c-2a+11a-b$$
$$=5\times100-7\times2^2\times3-3\times100+4\times2^2\times3-2\times100+11\times100-2$$
$$=500-84-300+48-200+1100-2=1648-586=1062.$$
$$11a-3b^2c-b=11\times100-3\times2^2\times3-2=1100-36-2=1062.$$

26. Cet exemple suffit, pour faire voir combien il est important de *réduire* les polynômes, avant d'y substituer les valeurs numériques des lettres. *Un polynôme, réduit à sa plus simple expression, offre le tableau des opérations à faire, sur les valeurs numériques des lettres, pour obtenir le plus promptement possible, la valeur numérique de ce polynôme.* Le principal but du *calcul des quantités algébriques*, est de réduire ainsi les expressions littérales aux formes les plus simples. Il s'agira toujours de *trouver quelle est la forme la plus simple dont un résultat est susceptible, quand on n'assigne aucune valeur numérique aux lettres.* La solution de ce problème nous conduit aux *quatre règles de l'Algèbre.*

27. *Le but de l'*ADDITION *algébrique est de réunir plusieurs quantités en une seule;* de sorte que *les opérations indiquées par la somme de plusieurs quantités, doivent produire le même effet que l'ensemble des opérations indiquées par ces quantités.* Il résulte de cette définition, que la somme de plusieurs quantités, doit être composée de la somme de toutes les parties additives, diminuée de la somme des parties soustractives (*A*, n° 135). *On obtiendra donc la somme de plusieurs quantités, en écrivant les termes de ces quantités, les uns à la suite des autres et avec leurs signes* (*). *Les termes qui ne*

(*) Quand nous parlerons des *signes* de plusieurs quantités, nous sous-entendrons toujours qu'il s'agira des signes + et — qui affectent ces quantités.

sont précédés d'aucuns signes, sont censés avoir le signe $+$.
Ainsi, ...

$$(a+b)+(c-d)=a+b+c-d;\ (+5)+(+3)=+5+3=+8=8;$$

$$(-5)+(-3)=-5-3=-8;\ (+5)+(-3)=5-3=2;\ (+3)+(-5)=3-5=-2.$$

On peut parvenir directement aux mêmes résultats. En effet; pour ajouter $(c-d)$ à $(a+b)$, on dira; si l'on ajoutait c, à $(a+b)$, la somme serait $a+b+c$; mais on ne devait ajouter que $c-d$; on a donc ajouté d de trop; la somme $a+b+c$ est donc trop forte de d; la somme demandée est donc $a+b+c-d$. La somme des nombres $+5$ et $+3$ est $+8$, car ajouter successivement 5 et 3, revient à ajouter 8; la somme des nombres -5 et -3 est -8, car soustraire successivement, 5 et 3, revient à soustraire 8; la somme des nombres $+5$ et -3 est $+2$, car ajouter 5 et retrancher 3, se réduit à ajouter 2; enfin, la somme des nombres $+3$ et -5 est -2, car ajouter 3 pour soustraire ensuite 5, revient à soustraire 2. La somme des polynômes $5a-2b-c$, $6b-8a+c$, sera $5a-2b-c+6b-8a+c$; cette somme se réduit à $-3a+4b$.

28. *La* SOUSTRACTION *algébrique a pour but, connaissant la somme de deux quantités, et l'une de ces quantités, de trouver l'autre quantité* (A, n° 16). Ainsi, lorsque de A, on ôte B, le *reste* R doit être tel, que $B+R=A$. Le *reste* sera donc la quantité qu'il faudrait ajouter à B, pour obtenir A; mais, si l'on ajoutait à B, tous les termes de B pris avec des signes contraires, le résultat serait zéro, car tous les termes seraient deux à deux égaux et de signes contraires; la quantité R, que l'on doit ajouter à B, pour trouver A, est donc composée de la quantité A, et de tous les termes de B, pris avec des signes contraires. Par conséquent, *pour obtenir le reste d'une soustraction, il suffit d'écrire les termes de la quantité à soustraire, à la suite de la quantité dont on soustrait, en ayant soin de changer les signes de tous les termes de la quantité à soustraire.* De sorte que *pour soustraire une*

quantité, il suffit de changer les signes des termes de cette quantité. On aura donc......

$$(a-b)-(c-d)=a-b-c+d\,;\ a-(b-c+d)=a-b+c-d\,;$$
$$a-(+b)=a-b\,;\ a-(-b)=a+b\,;\ a-(-b-c-d)=a+b+c+d.$$

Pour faire la *preuve*, on observera que dans chaque opération, le *reste* ajouté à la quantité à soustraire, donne une somme égale à la quantité dont on soustrait. Par exemple, lorsqu'on retranche $(c-d)$ de $(a-b)$, le *reste* est $a-b-c+d$, car ce *reste* ajouté à $(c-d)$, donne une somme............ $c-d+a-b-c+d$, qui se réduit à $a-b$.

Les principes de l'Arithmétique (*A*, n° 141), conduisent aux mêmes résultats. En effet; pour ôter $(c-d)$ de $(a-b)$, on dira : si l'on voulait soustraire c, de $a-b$, le reste serait $a-b-c$; mais on ne devait soustraire que $c-d$; on a donc ôté d de trop; le reste $a-b-c$ est donc trop faible de d; le reste demandé est donc $a-b-c+d$. La quantité a étant équivalente à $(a+b-b)$, suivant que l'on ôtera $+b$ ou $-b$, de a, le reste sera évidemment, $a-b$ ou $a+b$. Si de $(-3a+4b)$, on ôte $(5a-2b-c)$, le *reste* $-3a+4b-5a+2b+c$, se réduira à $6b-8a+c$.

29. On peut *comparer les grandeurs de plusieurs quantités*, en faisant abstraction des signes $+$ et $-$ ou en ayant égard à ces signes. Dans le premier cas, on compare les *grandeurs absolues* des quantités, dans le second, on compare les *grandeurs relatives* de ces quantités. Nous avons vu en Arithmétique, comment on pouvait comparer les grandeurs absolues des nombres. Pour comparer les valeurs relatives des nombres, on observera que dans la *suite*, $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$, etc., chaque nombre est égal au précédent augmenté de l'unité; *la valeur relative d'un nombre négatif est donc d'autant plus grande que ce nombre renferme moins d'unités.* En général; *les quantités négatives les plus grandes en valeur relative, sont celles dont les valeurs absolues sont les plus petites.* Pour démontrer cette propriété, il suffit de faire voir que l'inégalité

$-a > -(a+b)$, est exacte; or en ajoutant $a+b+c$ à chaque membre de cette inégalité, on ne trouble pas l'inégalité, et l'on trouve $c+b > c$; cette dernière inégalité étant vraie (a, b, c, sont supposés positifs), la première inégalité est exacte. On en déduit que *les valeurs relatives des quantités négatives, sont moindres que zéro; mais en valeur absolue, il n'existe pas de quantité plus petite que zéro.*

30. Pour prévenir les erreurs, nous distinguerons deux sortes d'opérations. Les *opérations* seront *arithmétiques*, quand nous n'aurons égard qu'aux *valeurs absolues* des quantités et les *opérations* seront *algébriques*, quand nous aurons égard aux signes de l'Algèbre. Ainsi, la *somme arithmétique* des nombres $+7$ et -5 sera $7+5$, ou 12, et la *somme algébrique* des mêmes nombres, sera $7-5$, ou 2.

31. *Le but de la* MULTIPLICATION *algébrique, est de prendre une quantité, nommée multiplicande, autant de fois qu'il est indiqué par une autre quantité nommée multiplicateur. Le résultat se nomme produit.* De sorte que *le produit est toujours composé avec le multiplicande, comme le multiplicateur est composé avec l'unité* (*A*, *n*° 194). Nous allons successivement démontrer les *règles relatives aux lettres, aux exposans, aux coefficiens et aux signes.*

32. *La règle des lettres* se réduit à la convention du n° 8. Ainsi, abc, indique le produit des quantités a, b, c. Les expressions $a \times b \times c$, $a.b.c$, indiquent le même produit.

33. Pour démontrer la *règle des exposans*, il suffit d'observer que le produit de deux quantités étant formé du produit de tous les facteurs du multiplicande et du multiplicateur, *le produit des puissances d'une même quantité a pour exposant la somme des exposans des facteurs.* Ainsi, $b^2 \times b^3 = b^5$, car b, étant 2 fois facteur dans b^2 et 3 fois facteur dans b^3, doit être 5 fois facteur dans le produit. On parvient au même résultat en remarquant que..... $b^2 \times b^3 = bb \times bbb = bbbbb = b^5$.

34. *Lorsqu'un produit contient plusieurs puissances d'une même lettre, on peut n'écrire cette lettre qu'une seule fois, en lui donnant pour exposant la somme des nombres qui marquent combien de fois elle est facteur.* En effet; un produit ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications (*A*, n° 33); on a donc.....

$$a^3b^2c^4a^5b^5d = a^3a^5 \times b^2b^5 \times c^4d = a^{3+5} \times b^{2+5} \times c^4d = a^8b^7c^4d.$$

35. *Le coefficient du produit de plusieurs monômes est égal au produit des coefficiens des facteurs*, car le produit des facteurs $2a$, $3b$, $5c$, est $2a \times 3b \times 5c$, ou $2.3.5 \times abc$, ou $30abc$.

36. *Dans la multiplication de deux monômes, le produit a le signe +, quand les facteurs ont le même signe et le produit a le signe —, quand les facteurs ont des signes différens.* La démonstration de cette règle se déduit de ce que *le produit est composé avec le multiplicande, comme le multiplicateur est composé avec l'unité* (n° 31). En effet; le signe d'un produit ne dépendant que des signes des facteurs, il suffit de considérer le cas où le multiplicande est un nombre entier, positif ou négatif, $+b$ ou $-b$. Cela posé; 1°. *Quand le multiplicateur a le signe +, le produit a le signe du multiplicande*, car le multiplicateur positif $+b$, étant formé de l'addition de b unités, le produit sera la somme de b quantités égales au multiplicande. Or pour ajouter plusieurs quantités, il suffit d'écrire ces quantités avec leurs signes (n° 27); les produits de $+a$ et de $-a$, par $+b$, sont donc $+ab$ et $-ab$. 2°. *Quand le multiplicateur a le signe —, le produit a un signe contraire au multiplicande*, car le multiplicateur négatif $-b$, étant formé de la soustraction de b unités, on obtiendra le produit en retranchant b fois le multiplicande; mais pour soustraire le multiplicande, il suffit d'en changer le signe (n° 28). Les produits de $+a$ et de $-a$, par $-b$, sont donc $-ab$ et $+ab$. On en déduit la règle énoncée. On peut observer que *le multiplicateur positif $+b$, indiquant l'addition de b*

quantités égales au multiplicande, le multiplicateur négatif $-b$, *indique la soustraction de* b *quantités égales au multiplicande.*

37. La règle du n° 36, conduit aux propriétés suivantes; 1°. *Un produit a le signe* $+$, *quand tous ses facteurs sont positifs; 2°. le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs, est positif*, car ces facteurs, pris deux à deux, donnent des produits positifs; 3°. *le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs, est négatif*, car le produit de tous les facteurs, excepté le dernier facteur, a le signe $+$ (2°); 4°. *le produit de deux facteurs ne change pas de signe, quand on change les signes de ses facteurs*, car en vertu de ce changement, deux signes semblables restent semblables et deux signes différens restent différens; 5°. *le produit de deux facteurs change de signe, quand on change le signe d'un seul facteur*, car par ce changement, deux signes semblables deviennent différens et deux signes différens deviennent semblables; 6°. *le produit de plusieurs facteurs ne change pas de signe, quand on change les signes d'un nombre pair de facteurs*, car les produits deux à deux des facteurs ne changent pas de signes (4°); 7°. *le produit change de signe, quand on change les signes d'un nombre impair* $2n+1$, *de facteurs*, car lorsqu'on aura changé les signes de $2n$ facteurs, le produit n'aura pas changé de signe (6°); le changement de signe du dernier facteur, fait donc changer le signe du produit (5°); 8°. *pour soustraire un produit, il suffit de changer les signes d'un nombre impair de facteurs*, car le produit, qui change de signe (7°), se trouve soustrait (n° 28); 9°. *un produit ne change pas de signe, quand on change en même temps le signe qui le précède et les signes d'un nombre impair de facteurs*, car le produit change deux fois de signe.

38. La *multiplication des polynômes*, se déduit de ce principe, que *lorsque dans le produit de deux facteurs, l'un des facteurs augmente ou diminue, le produit augmente ou diminue de l'autre facteur multiplié par l'augmentation ou la diminu-*

tion du facteur qui a varié (*A*, n° 147). En effet; pour former le produit de $a+b$, par c, on dira : le produit de a par c serait ac ; mais ce n'est pas a qu'il faut répéter c fois, c'est a augmenté de b; le multiplicande a est donc trop petit de b; le produit ac est donc trop petit de c fois b; le produit de $a+b$ par c est donc $ac+bc$. Par la même raison, le produit de $a+b$ par d, sera $ad+bd$. On en déduit facilement les produits de $a+b$, par $c+d$ et par $c-d$. En effet ; pour multiplier $a+b$ par $c+d$, on dira : si l'on multipliait $a+b$ par c, le produit serait $ac+bc$; or le multiplicateur c est trop petit de d; le produit $ac+bc$ est donc trop petit de d fois $(a+b)$, ou de $ad+bd$; le produit de $(a+b)$ par $(c+d)$ est donc $ac+bc+ad+bd$. On voit que *le produit total est la somme des produits partiels de chaque terme du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur.* Le produit de $a+b$ par c, étant $ac+bc$, si le multiplicateur c diminue de d et devient $c-d$, le produit diminuera de d fois $(a+b)$ ou de $ad+bd$; le produit de $a+b$ par $c-d$ est donc..... $ac+bc-ad-bd$. Le produit de $a-b$ par c, est $ac-bc$, car le produit de a par c étant ac, si le multiplicande diminue de b, le produit ac diminuera de c fois b ou de cb. Le produit de $a-b$ par d est donc $ad-bd$. Le produit de $a-b$ par $c+d$, sera $ac-bc+ad-bd$, car le produit de $a-b$ par c étant $ac-bc$, si le multiplicateur augmente de d, le produit augmentera de d fois $(a-b)$ ou de $ad-bd$. Enfin, le produit de $a-b$ par c, étant $ac-bc$, si le multiplicateur c diminue de d et devient $c-d$, le produit diminuera de d fois $a-b$ ou de $ad-bd$; le produit de $a-b$ par $c-d$ est donc $(ac-bc)-(ad-bd)$, ou $ac-bc-ad+bd$. On a donc.....

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd;\ (a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd.$$
$$(a-b)(c+d)=ac-bc+ad-bd;\ (a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

On verra de même que le produit de a^2b-2a, par $3ab-b^2$, est $3a^3b^2-6a^2b-a^2b^3+2ab^2$.

39. En comparant, dans chaque multiplication, les facteurs avec le produit, on voit que l'on parviendrait directement au

résultat, en multipliant successivement chaque terme du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, d'après les règles données pour la multiplication des monômes. On pourra donc éviter de répéter continuellement les mêmes raisonnemens, au moyen de cette *règle abrégée :*

40. *Pour former le produit de deux polynômes; multipliez successivement chaque terme du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, d'après les règles données pour la multiplication des monômes. La somme algébrique des produits partiels, ainsi formés, sera le produit total.*

41. *Pour mettre plus d'ordre dans la formation du produit de deux polynômes et faciliter les réductions dont ce produit est susceptible, on* ORDONNE (*n*° 19) *les facteurs par rapport à une même lettre et l'on dispose les produits partiels de manière que les termes semblables se trouvent les uns sous les autres.* S'il s'agit, par exemple, de multiplier $(b^3+a^2b+a^3+ab^2)$ par $(4b^2+3a^2-3ab)$, on *ordonnera* ces facteurs par rapport à la lettre a, et l'on sera conduit au calcul suivant.....

$$
\begin{array}{lllllll}
\textit{Multiplicande} & a^3+ba^2 & +b^2a & +b^3 & & & \\
\textit{Multiplicateur} & 3a^2-3ba & +4b^2 & & & & \\
\hline
\textit{Produits partiels} & 3a^5+3ba^4 & +3b^2a^3 & +3b^3a^2 & & \ldots\ldots\ldots\ldots & (1^{\text{er}}\ \textit{produit}). \\
 & \quad -3ba^4 & -3b^2a^3 & -3b^3a^2 & -3b^4a & \ldots\ldots & (2^{\text{e}}\ \textit{produit}). \\
 & & +4b^2a^3 & +4b^3a^2 & +4b^4a & +4b^5. & (3^{\text{e}}\ \textit{produit}). \\
\hline
\textit{Produit total}\ldots & 3a^5 & +4b^2a^3 & +4b^3a^2 & +b^4a & +4b^5. &
\end{array}
$$

La multiplication du multiplicande, par le premier terme $3a^2$ du multiplicateur, a donné le 1er produit partiel; on a obtenu le 2e produit partiel, en multipliant le multiplicande par le 2e terme $-3ba$, du multiplicateur et l'on a formé le 3e produit partiel en multipliant le multiplicande, par le 3e terme $+4b^2$, du multiplicateur. On a disposé les termes semblables les uns sous les autres et la somme des produits partiels, a donné le produit total.

42. *Quand les facteurs et le produit sont ordonnés, par rapport à une même lettre, le premier terme du produit est le produit*

produit du premier terme du multiplicande, par le premier terme du multiplicateur et le dernier terme du produit résulte de la multiplication du dernier terme du multiplicande, par le dernier terme du multiplicateur. Ainsi, dans l'exemple précédent, $3a^5$ est le produit de a^3 par $3a^2$ et $4b^5 = b^3 \times 4b^2$.

43. *Lorsqu'un polynôme renferme plusieurs termes affectés des mêmes puissances de la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner, on réunit tous ces termes en un seul et l'on ordonne les coefficiens de cette lettre par rapport à une autre lettre.* Ainsi, pour ordonner le polynôme................ $a^5 + 2b^2a^4 - 5a^3 - 3ba^4 - a^4 - 2b^2a^3$, par rapport aux puissances décroissantes de a et b, on écrira................ $a^5 + (2b^2 - 3b - 1)\,a^4 - (2b^2 + 5)\,a^3$; ce polynôme, ordonné suivant les puissances croissantes de a et b, deviendrait.... $-(5 + 2b^2)\,a^3 - (1 + 3b - 2b^2)\,a^4 + a^5$. Ce dernier polynôme est composé des trois termes $-(5+2b^2)\,a^3$, $-(1+3b-2b^2)\,a^4$, et $+a^5$. En général, *un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de a, est de la forme*.............. $pa^m + qa^{m-1} + ra^{m-2} +$ *etc.; les coefficiens p, q, r, etc., des diverses puissances de a, sont indépendans de a; le premier terme est* pa^m, *le 2^e^ est* qa^{m-1}; *etc.*

44. *La* DIVISION *algébrique a pour but, connaissant le produit de deux facteurs, nommé dividende et l'un deux, nommé diviseur, de trouver l'autre facteur, appelé quotient (A, n° 27).* Toutes les règles relatives à la division se déduiront donc de celles qui ont été données pour la multiplication, car *le quotient sera la quantité par laquelle il faudra multiplier le diviseur, pour obtenir le dividende.* On trouvera donc les facteurs du quotient, en supprimant dans le dividende, tous les facteurs du diviseur.

45. *La* RÈGLE DES LETTRES *est de supprimer dans le dividende, toutes les lettres du diviseur; le résultat exprime les lettres du quotient*, car le dividende contenant toutes les lettres du diviseur et du quotient, si l'on supprime celles du divi-

seur, il restera celles du quotient. Ainsi.....

$$\frac{abcd}{bd}=ac;\ \frac{abcde}{ade}=bc;\ \frac{abcdep}{acp}=bde.$$

46. *Dans la division de deux puissances d'une même quantité, la* RÈGLE DES EXPOSANS *est de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende; le reste est l'exposant du quotient*, car l'exposant du dividende est la somme des exposans du diviseur et du quotient (n° 33). Le quotient de la division de b^5 par b^3 est donc b^{5-3}, ou b^2. On peut d'ailleurs le démontrer directement, en observant que....

$$\frac{b^5}{b^3}=\frac{b^2\times b^3}{1\times b^3}=\frac{b^2}{1}=b^2.$$

47. *La démonstration de la règle précédente, suppose que l'exposant du dividende surpasse celui du diviseur*. Voyons s'il est possible d'appliquer la même règle quand l'exposant du dividende n'est pas plus grand que celui du diviseur. Pour que la règle du n° 46, soit générale, il faut que....

$$\frac{b^p}{b^p}=b^{p-p}=b^0 \text{ et que } \frac{b^p}{b^{p+q}}=b^{p-(p+q)}=b^{-q}.$$

(p et q sont des nombres entiers positifs). Or

$$\frac{b^p}{b^p}=1 \quad \text{et} \quad \frac{b^p}{b^{p+q}}=\frac{1\times b^p}{b^q\times b^p}=\frac{1}{b^q}.$$

Il suffit donc d'examiner si la nature des signes $+$ et $-$ et des exposans, permet de supposer que $b^0=1$ et que..... $b^{-q}=\frac{1}{b^q}$. Mais b^p indique un produit composé du facteur 1 et de p facteurs égaux à b (n° 11); ce produit deviendra donc égal à l'unité, quand l'exposant de b sera zéro. L'égalité $b^0=1$, résulte donc de la définition des exposans (n° 11). Ainsi, *toute quantité élevée à la puissance zéro, est égale à l'unité.*

48. Pour que $b^{-q}=\frac{1}{b^q}$, il faut que dans b^{-q}, l'exposant né-

gatif $-q$, indique que l'unité est divisée par q facteurs égaux à b; or dans b^{+q}, l'exposant positif exprime que l'unité est multipliée par q facteurs égaux à b; par conséquent, pour que la règle du n° 46, soit générale, il faut supposer que l'*exposant positif indiquant des multiplications, l'exposant négatif indique des divisions;* ce qui n'est pas contraire à la nature des exposans et des signes $+$ et $-$. On verra que *pour que les règles de l'Algèbre soient générales, il faut supposer que les signes $+$ et $-$ indiquent des manières d'être directement opposées, des quantités.* D'après cette convention, la règle du n° 46 sera générale. Ainsi.....

$$\frac{a^5}{a^3}=a^2;\ \frac{a^3}{a^5}=a^{-2};\ \frac{a^2b^3cd^4}{a^5b^3cd^2}=a^{2-5}b^{3-3}c^{1-1}d^{4-2}=a^{-3}b^0c^0d^2=a^{-3}d.^2$$

49. *Les exposans négatifs indiquent donc des divisions qui n'ont pu se faire exactement.*

50. *Les règles des n^{os} 33 et 46, conviennent aux exposans entiers, positifs et négatifs; le produit des puissances d'une même quantité a pour exposant la somme algébrique des exposans des facteurs. Pour diviser deux puissances d'une même quantité l'une par l'autre, il suffit de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende, en ayant égard aux signes des exposans; le reste est l'exposant du quotient.* En effet; lorsque p et q, sont des nombres entiers positifs, on a (n^{os} 33, 46 et 48),

$$a^pa^q=a^{p+q};\ \frac{a^p}{a^q}=a^{p-q};\ a^{-p}=\frac{1}{a^p},\ \text{d'où}\ \frac{1}{a^{-p}}=a^{+p}.$$

On en déduit, $$a^{+p}\times a^{-q}=a^p\times\frac{1}{a^q}=\frac{a^p}{a^q}=a^{+p-q};$$

$$a^{-p}\times a^{-q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^pa^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{-p-q}$$

$$\frac{a^{-p}}{a^{+q}}=a^{-p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^pa^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-p-q}=a^{-p-(+q)}$$

$$\frac{a^{+p}}{a^{-q}}=a^{+p}\times\frac{1}{a^{-q}}=a^{+p}\times a^{+q}=a^{+p+q}=a^{+p-(-q)}.$$

$$\frac{a^{-p}}{a^{-q}}=a^{-p}\times\frac{1}{a^{-q}}=a^{-p}\times a^{+q}=\frac{1}{a^{p}}\times a^{+q}=\frac{a^{q}}{a^{p}}=a^{q-p}=a^{-p+q}.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

51. *La* RÈGLE DES COEFFICIENS *est de diviser le coefficient du dividende, par celui du diviseur; le résultat est le coefficient du quotient*, car le coefficient du dividende est le produit du coefficient du diviseur, par le coefficient du quotient (n° 35).
Ainsi, $\frac{6ab}{2a}=3b$, et $\frac{30\,ab^2c^3d^4}{15\,ab^4cd}=2b^{-2}c^2d^3$.

52. *La* RÈGLE DES SIGNES *est la même que dans la multiplication; le quotient a le signe* $+$, *quand le dividende et le diviseur ont le même signe, et le quotient a le signe* $-$, *quand le dividende et le diviseur ont des signes différens.* En effet; le dividende étant le produit du diviseur par le quotient (n° 44), il résulte du principe du n° 36, que lorsque le dividende a le signe $+$, le quotient a le même signe que le diviseur, et que lorsque le dividende a le signe $-$, le quotient a un signe contraire au signe du diviseur. On a donc.....

$$\frac{+ab}{+a}=+b;\ \frac{+ab}{-a}=-b;\ \frac{-ab}{+a}=-b;\ \frac{-ab}{-a}=+b.$$

53. Les règles relatives à la *division des mônomes*, donnent

$$\frac{-6a^5b^4c^2d}{+3a^2bc^2}=-2a^3b^3d;\ \frac{-6a^5b^4c^2d}{-2a^3b^3d}=3a^2bc^2.$$

54. La division des monômes ne pouvant plus offrir de difficulté, occupons-nous de la *division des polynômes*. Le dividende devant toujours être considéré comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs (n° 44), il est naturel d'examiner comment on forme un produit, afin d'en

déduire comment on peut décomposer ce produit. En voici un exemple.....

Multiplication, ou formation d'un produit.

$$\begin{array}{l}
a^3+3ba^2 \\
\underline{a^2+2ba\ +b^2} \\
a^5+3ba^4 \\
\quad +2ba^4+6b^2a^3 \\
\qquad\qquad +\ b^2a^3+3b^3a^2 \\
\hline
a^5+5ba^4+7b^2a^3+3b^3a^2
\end{array}$$

Division, ou décomposition d'un produit.

$$\begin{array}{lr|l}
 & a^5+5ba^4+7b^2a^3+3b^3a^2 & a^3+3ba^2 \\
\cline{3-3}
 & a^5+3ba^4 & a^2+2ba+b^2 \\
\cline{2-2}
1^{er}\ \textit{reste}\ldots & 2ba^4+7b^2a^3+3b^3a^2 & \\
 & 2ba^4+6b^2a^3 & \\
\cline{2-2}
2^{e}\ \textit{reste}\ldots\ldots\ldots\ldots & b^2a^3+3b^3a^2 & \\
 & b^2a^3+3b^3a^2 & \\
\cline{2-2}
3^{e}\ \textit{reste}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Comparant le produit avec ses facteurs, on voit; 1° que les facteurs étant ordonnés par rapport à une lettre a, le produit est ordonné par rapport à cette lettre; 2° que le 1^er^ terme du produit total est le produit du 1^er^ terme du multiplicande, par le 1^er^ terme du multiplicateur (n°42); 3° que les autres termes du produit, résultent de la réduction de plusieurs termes des produits partiels. Par conséquent; la division du 1^er^ terme a^5 du dividende, par le 1^er^ terme a^3 du diviseur, donnera le 1^er^ terme a^2 du quotient, tandis que la division d'un autre terme du dividende, par un terme du diviseur, peut ne pas donner un terme du quotient. Les autres termes du quotient sont faciles à obtenir, car le dividende exprimant la somme des produits partiels du diviseur par chaque terme du quotient, si l'on retranche du dividende, le produit du diviseur par le 1^er^ terme du quotient, le *reste* $2ba^4+7b^2a^3+3b^3a^2$, sera le produit du diviseur, par les autres termes du quotient; la division du 1^er^ terme $2ba^4$ de ce *reste*; par le 1^er^ terme a^3 du diviseur, donnera donc le 2^e^ terme $2ba$ du quotient. Enfin, si l'on retranche du 1^er^ *reste*, le produit du diviseur par le 2^e^ terme du quotient, le 2^e^ *reste* $b^2a^3+3b^3a^2$, sera le produit du diviseur, par le 3^e^ terme du quotient; de sorte que la division du 1^er^ terme b^2a^3 de ce 3^e^ *reste*, par le 1^er^ terme a^3 du diviseur, donnera le dernier terme b^2 du diviseur; retranchant du 2^e^ *reste*, le produit du diviseur par b^2, le *reste* zéro indique, que le quotient $a^2+2ba+b^2$ est exact.

55. En général, le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, si l'on ordonne le dividende et le diviseur par rapport à une lettre et si l'on conçoit le quotient ordonné par rapport à cette lettre, le 1er terme du dividende sera le produit du 1er terme du diviseur, par le 1er terme du quotient (n° 42); *la division du 1er terme du dividende, par le 1er terme du diviseur, donnera donc toujours le 1er terme du quotient.* Or le dividende est la somme des produits partiels du diviseur par tous les termes du quotient; par conséquent, si l'on retranche du dividende, le produit du diviseur par le 1er terme du quotient, le *reste* sera le produit du diviseur par tous les autres termes du quotient; la division du 1er terme de ce *reste*, par le 1er terme du diviseur, donnera donc le 2e terme du quotient (n° 42); et ainsi de suite. *Lorsqu'on parviendra au reste zéro, le quotient obtenu sera exact*, car ayant successivement retranché du dividende, les produits partiels du diviseur par les termes du quotient, c'est comme si l'on eût retranché du dividende, le produit du diviseur par le quotient obtenu; or le reste de cette soustraction est zéro; le dividende est donc égal au produit du diviseur par le quotient obtenu; ce quotient est donc exact. On en déduit cette règle générale : *Pour diviser deux polynômes l'un par l'autre; disposez les calculs comme en Arithmétique. Ordonnez le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre. Divisez le 1er terme du dividende, par le 1er terme du diviseur; le résultat sera le 1er terme du quotient. Retranchez du dividende, le produit du diviseur par le 1er terme du quotient; vous obtiendrez un 1er reste. Divisez le 1er terme du 1er reste, par le 1er terme du diviseur; le résultat sera le 2e terme du quotient. Continuez à opérer de la même manière; vous obtiendrez successivement tous les termes du quotient, en divisant chaque fois le 1er terme du dernier reste obtenu, par le 1er terme du diviseur. Lorsque vous parviendrez au reste zéro, le quotient obtenu sera exact; et si vous n'avez pas commis de faute de calcul, le diviseur multiplié par ce quotient, donnera un produit qui sera égal au dividende. Pour soustraire les produits partiels du diviseur,*

par les termes du quotient, on écrit les termes de ces produits, en changeant les signes + en — et les signes — en + (n° 28). On effectue ensuite les réductions, et l'on ordonne le reste. Les coefficiens de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, pouvant être des polynômes; on les ordonne alors par rapport à une autre lettre (*). Appliquons cette règle à la décomposition du produit formé dans le n° 41; et proposons-nous, connaissant le produit et le multiplicande, de trouver le multiplicateur. Voici le calcul.....

Dividende.... $3a^5+4b^2a^3+4b^3a^2+b^4a+4b^5$	$a^3+ba^2+b^2a+b^3$ *Div.*
$-3a^5-3ba^4-3b^2a^3-3b^3a^2$	$3a^2-3ba+4b^2$ *Quot.*
1er *reste...* $-3ba^4+b^2a^3+b^3a^2+b^4a+4b^5$	$\frac{3a^5}{a^3}=3a^2$. 1er *terme du quot.*
$+3ba^4+3b^2a^3+3b^3a^2+3b^4a$	
2e *reste........* $+4b^2a^3+4b^3a^2+4b^4a+4b^5$	$\frac{-3ba^4}{a^3}=-3ba$; 2e *terme.*
$-4b^2a^3-4b^3a^2-4b^4a-4b^5$	
3e *reste...............* 0	$\frac{+4b^2a^3}{a^3}=+4b^2$; 3e *terme.*

(*) Lorsqu'on ordonne les dividendes partiels et le diviseur, par rapport à une même lettre a, la division du 1er terme de chaque dividende, par le 1er terme du diviseur, donne un terme du véritable quotient; ce quotient est réduit à sa plus simple expression et les exposans de a diminuent dans les *restes* successifs. *Si le dividende étant exactement divisible par le diviseur, on n'ordonnait pas les dividendes partiels et le diviseur, la division d'un terme quelconque de chaque dividende, par un terme du diviseur, pourrait ne pas donner un terme du véritable quotient; mais si parvenu à un reste quelconque, on ordonnait ce reste et le diviseur et si l'on continuait la division d'après la règle du n°* 55, *l'opération se terminerait et le quotient total, réduit à sa plus simple expression, donnerait le véritable quotient.* En effet; supposons que le quotient exact de la division du polynôme A, par le polynôme B, soit q. On aura $A=Bq$ et q sera réduit à sa plus simple expression. Si l'on divise A par B, sans ordonner, on trouvera un quotient q' et un *reste* R. De sorte que (n° 57), $R=A-Bq'=Bq-Bq'=B(q-q')$. Si l'on ordonne R et B, la division de R par B, effectuée d'après la règle du n° 55, donnera le quotient exact $q-q'$; le quotient total sera donc $q'+q-q'$. Ce quotient se réduira donc à q. Ce qui démontre le principe énoncé. On voit donc que *l'on ordonne le dividende et le diviseur, afin de parvenir directement à la plus simple expression du quotient.*

56. Si l'on ordonnait le dividende et le diviseur, par rapport aux puissances croissantes de a, on obtiendrait un quotient $4b^2 - 3ba + 3a^2$, qui serait ordonné suivant les puissances croissantes de a. En général, *quand le dividende est ordonné suivant les puissances croissantes ou décroissantes d'une lettre, le quotient est aussi ordonné suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la même lettre.* Nous supposerons (du n° 58 au n° 61), que *le dividende et le diviseur seront ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre.* On serait conduit à des résultats analogues, si le dividende et le diviseur étaient ordonnés suivant les puissances croissantes d'une lettre.

57. Dans le cours des opérations relatives à la division, *le dividende est toujours égal au produit du diviseur, par le quotient obtenu, plus le dernier reste.* Et par conséquent, *lorsqu'on parvient à un reste nul, le quotient obtenu est exact.* En effet; on a trouvé le *reste*, en retranchant successivement du dividende, les produits du diviseur par les termes du quotient; ce qui revient à retrancher du dividende, le produit du diviseur par le quotient obtenu; le *reste* exprime donc l'excès du dividende, sur le produit du diviseur par le quotient obtenu; le *reste* ajouté au produit du diviseur par le quotient, doit donc donner une somme égale au dividende. Ce qui démontre le principe énoncé.

58. *Pour que les exposans de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, diminuent dans les restes successifs, il faut ordonner le dividende et le diviseur, suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, et réunir en un seul terme tous les monômes affectés de la même puissance de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné* (n° 43). Par exemple, si dans la division de $4a^3 + 2ba$, par $2a^2 + ba^2 - 5a + 7$, on regardait $2a^2$ comme le premier terme du diviseur; les restes successifs contiendraient toujours a^3; de sorte qu'on ne parviendrait pas à un reste *moindre* que le diviseur (n° 18).

Mais en ordonnant le dividende et le diviseur, suivant les puissances décroissantes de a, le 1er terme du diviseur sera $(b+2)a^2$; les entiers du quotient seront $\left(\frac{4}{b+2}\right)a+\frac{20}{(b+2)^2}$ et le *reste*, moindre que le diviseur, sera.........................

$$\left(\frac{2b^3+8b^2-20b+44}{b^2+4b+4}\right)a-\frac{140}{(b+2)^2}.$$

59. Lorsque les coefficiens de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, sont des polynômes; la recherche de chaque terme du quotient, peut conduire à une *division complexe*. Ainsi, pour diviser..............................

$(b^3-1)a^3-(b^3+b^2-2)a^2+(4b^2+3b+2)a-3(b+1)$, par $(b-1)a^2-(b-1)a+3$, on sera conduit à diviser b^3-1 par $b-1$; le quotient sera b^2+b+1; le quotient total sera $(b^2+b+1)a-(b+1)$. On trouvera de même que le quotient de la division de..............................

$(b+1)a^5-(b-1)ba^4-(b+1)b^2a^2+(b-1)b^3a$, par $(b-1)a^3-(b-1)b^2$, est $\left(\frac{b+1}{b-1}\right)a^2-ba$.

60. *Quand on ne veut admettre au quotient que des exposans positifs de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, on doit arrêter la division lorsque l'exposant de cette lettre dans le* 1er *terme du reste, est moindre que dans le* 1er *terme du diviseur.* Par exemple, si l'on ne veut admettre au quotient que des exposans positifs de a, la division de.............

$a^4+(c-b^2)a^2+(d-bc)a-bd$, par a^3-ba^2, donnera le quotient $a+b$ et le *reste*, $ca^2+(d-bc)a-bd$. Mais, si l'on admet au quotient des exposans négatifs de a, on continuera la division; on parviendra au *reste* zéro, et le quotient exact sera $a+b+ca^{-1}+da^{-2}$. Enfin, si l'on divisait a^2+2ba, par $a+b$, on ne parviendrait jamais au reste zéro; le quotient indéfini, serait $a+b-b^2a^{-1}+b^3a^{-2}-b^4a^{-3}+$etc.

61. En général : *le dividende, le diviseur et le quotient étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même*

lettre ; lorsqu'on parvient à un terme du quotient, dans lequel l'exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné est moindre, que le plus petit exposant de cette lettre dans le dividende, diminué du plus petit exposant de cette lettre dans le diviseur, on est certain que la division ne se termine pas (on admet au quotient des exposans négatifs de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné), car le produit du dernier terme du diviseur, par le dernier terme du quotient, devant donner le dernier terme du dividende (n° 42), si l'on conçoit que le dividende, le diviseur et le quotient étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre a, les derniers termes du dividende, du diviseur et du quotient, sont respectivement a^p, a^q et a^r; on aura $p=q+r$; d'où $r=p-q$.

62. *Lorsqu'un polynôme a un diviseur indépendant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné; ce diviseur divise exactement chacun des coefficiens de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné.* En effet; si un diviseur δ, indépendant de x, divise le polynôme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ etc.; le quotient q de cette division, sera nécessairement de la forme $a+bx+cx^2+dx^3+$etc.; car δ ne contenant pas x, il n'y a qu'une quantité de la forme $a+bx+$etc., qui multipliée par δ, puisse reproduire le dividende $A+Bx+$etc. Ainsi,

$$A+Bx+Cx^2+\text{etc.}=d(a+bx+cx^2+\text{etc.})=ad+bdx+cdx^2+\text{etc.}$$

Mais les polynômes $A+Bx+$etc., $ad+bdx+$etc., doivent être les mêmes; on a donc $A=ad$; $B=bd$; etc.; les coefficiens A, B, C, etc., de x, sont donc divisibles par le diviseur δ, indépendant de x.

63. *Pour diviser un polynôme, par une quantité δ, indépendante de la lettre par rapport à laquelle ce polynôme est ordonné, il suffit de diviser chacun des coefficiens de cette lettre, par le diviseur δ (n° 62).* Si l'on veut diviser.... $(b^2-1)+(b^3-1)x+(b^3-2b+1)x^2$, par $b-1$, on divisera successivement b^2-1, b^3-1, b^3-2b+1, par $b-1$; les quotiens seront $b+1$, b^2+b+1, b^2+b-1; le quotient total sera $(b+1)+(b^2+b+1)x+(b^2+b-1)x^2$.

Fractions algébriques.

64. Quand les deux termes d'une fraction sont des nombres entiers, la valeur de cette fraction s'obtient également, ou en divisant le numérateur par le dénominateur, ou en divisant l'unité en un nombre de parties égales marqué par le dénominateur et prenant autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur (*A*, n° 37). Mais, les deux termes d'une fraction algébrique n'étant pas toujours des nombres entiers, *une fraction algébrique doit être considérée comme indiquant le quotient de la division du numérateur par le dénominateur. Les propriétés des fractions arithmétiques, conviennent aux fractions algébriques.* Ainsi; 1°. *une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre.* De sorte que, *pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier successivement les deux termes de chaque fraction, par le produit des dénominateurs différens de toutes les autres fractions* (*A*, n° 40). *On simplifie les calculs en réduisant toutes les fractions à leur plus petit dénominateur commun* (*A*, n° 183); 2°. *pour ajouter ou pour soustraire des fractions qui ont le même dénominateur, il suffit de former la somme ou la différence des numérateurs et d'affecter le résultat du dénominateur commun* (*A*, n° 38); 3°. *pour multiplier une fraction par une quantité, il suffit de multiplier le numérateur ou de diviser le dénominateur, par cette quantité* (*A*, n° 41); 4°. *pour diviser une fraction par une quantité, il suffit de multiplier le dénominateur ou de diviser le numérateur, par cette quantité* (*A*, n° 41); 5°. *pour multiplier plusieurs fractions entr'elles, il suffit de diviser le produit des numérateurs, par celui des dénominateurs* (*A*, n° 42); 6°. *pour diviser par une fraction, il suffit de multiplier le dividende, par la fraction diviseur renversée* (*A*, n° 45). Ainsi, *pour diviser l'une par l'autre deux fractions de même dénominateur, il suffit de diviser le numérateur de la première, par celui de la seconde; pour diviser deux fractions de même numérateur, on divise le dénominateur de la seconde, par celui*

de la première. Quand on divise l'unité par une fraction ; le quotient est égal à cette fraction renversée (*A*, n° 46). Nous avons fait voir, en Arithmétique, que les fractions numériques jouissent de ces propriétés; mais les raisonnemens que nous avons employés étant fondés sur ce que les numérateurs et les dénominateurs étaient des nombres entiers, ce qui n'a pas toujours lieu pour les fractions algébriques, il est indispensable de démontrer ces propriétés, quand le numérateur et le dénominateur sont quelconques. Cela posé; si q, q' et q'', désignent les valeurs des fractions algébriques, $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a}$, $\frac{b''}{a''}$, on aura... $b=aq$, $b'=aq'$; $b''=a''q''$.

Toutes les *propriétés des fractions algébriques*, se déduisent de ces égalités et de ces deux principes, qu'*un produit ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications*, et que *lorsqu'on effectue les mêmes opérations sur deux quantités égales, les résultats sont égaux*. Le premier principe a été démontré en Arithmétique (n° 331); le second principe est évident.

1°. L'égalité $b=aq$, donne $bm=aqm=am\times q$; $q=\frac{bm}{am}=\frac{b}{a}$.

2°. Les égalités $b=aq$, $b'=aq'$, donnent.....

$$b+b'=aq+aq'=a(q+q');\ \text{d'où}\ q+q'=\frac{b+b'}{a},$$

$$b-b'=aq-aq'=a(q-q');\ \text{d'où}\ q-q'=\frac{b-b'}{a}.$$

3°. $bm=aqm$, donne $qm=\frac{bm}{a}=\frac{b}{\left(\frac{a}{m}\right)}$ (1°).

4°. $q=\frac{bm}{am}$ (1°) $=\frac{b}{am}\times m$ (3°); donc $\frac{q}{m}=\frac{b}{am}=\frac{\left(\frac{b}{m}\right)}{a}$ (1°).

5°. $b = aq$ et $b'' = a''q''$, donnent.....................

$bb'' = aq \times a''q'' = aa'' \times qq''$; d'où $qq'' = \frac{bb''}{aa''}$.

6°. $b = aq$, donne $\frac{ac}{b} = \frac{ac}{aq} = \frac{c}{q}$. Donc, $\frac{c}{q} = \frac{ac}{b} = c \times \frac{a}{b}$.

Ce qui démontre les principes énoncés. Ces principes donnent

$$\left(\frac{a-b}{c-d}\right) + \left(\frac{a+b}{c-d}\right) = \frac{a-b+a+b}{c-d} = \frac{2a}{c-d};$$

$$\left(\frac{2a}{c-d}\right) - \left(\frac{a-b}{c-d}\right) = \frac{2a-(a-b)}{c-d} = \frac{2a-a+b}{c-d} = \frac{a+b}{c-d};$$

$$\frac{a}{pqr} + \frac{b}{qrs} + \frac{c}{q^2s^2} = \frac{a \times qs^2}{pqr \times qs^2} + \frac{b \times pqs}{qrs \times pqs} + \frac{c \times pr}{q^2s^2 \times pr} = \frac{aqs^2 + bpqs + cpr}{prq^2s^2};$$

$$\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \times (a+b) = \frac{(a-b)(a+b)}{c-d} = \frac{a^2-b^2}{c-d};$$

$$\frac{(a-b)}{(c-d)(a+b)} \times (a+b) = \frac{a-b}{c-d}; \quad \left(\frac{ab}{c}\right) : b = \frac{ab}{cb} = \frac{a}{c};$$

$$\left(\frac{a^2+ba+b^2}{a^2+a+1}\right) \times \left(\frac{a-b}{a-1}\right) = \frac{(a^2+ba+b^2)(a-b)}{(a^2+a+1)(a-1)} = \frac{a^3-b^3}{a^3-1};$$

$$\left(\frac{a^3-b^3}{a^3-1}\right) : \left(\frac{a-b}{a-1}\right) = \frac{a^3-b^3}{a^3-1} \times \frac{a-1}{a-b} = \frac{(a^2+ba+b^2)(a-b) \times (a-1)}{(a^2+a+1)(a-1) \times (a-b)} = \frac{a^2+ba+b^2}{a^2+a+1}.$$

$$\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}; \quad \frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{b}; \quad 1 : \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a}{b}.$$

65. *Une fraction est positive, quand ses deux termes ont des signes semblables et elle est négative quand ses deux termes ont des signes différens* (n° 52). Par conséquent, *une fraction ne change pas de signe, quand on change les signes du numérateur et du dénominateur; elle change de signe, quand on ne change le signe que de l'un de ces deux termes. Pour soustraire une fraction, il suffit de changer les signes des monômes qui composent son numérateur ou son dénominateur. Quand*

le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont formés d'un produit indiqué, de facteurs monômes ou polynômes, on peut changer les signes d'un nombre quelconque de facteurs, sans changer la valeur numérique de la fraction; il faut seulement observer que si le nombre total des facteurs qui changent de signe, tant dans le numérateur que dans le dénominateur, est pair, la fraction ne change pas de signe, et que s'il est impair, elle change de signe. Ces propriétés résultent de la combinaison des principes établis dans les nos 28, 37 et 52.

Équations du premier degré (no 79) à une seule inconnue.

66. Lorsque les conditions d'un problème sont exprimées par une équation du premier degré à une seule inconnue, cette inconnue ne peut être combinée avec les quantités connues que par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division; il est donc naturel, pour graduer les difficultés, de commencer par les équations les plus simples, celles où l'inconnue n'est combinée avec les quantités connues, que d'une seule manière. Il sera ensuite facile d'en déduire la résolution des équations plus composées, car cela se réduira à leur appliquer successivement les règles données pour chacune des quatre manières dont les quantités connues peuvent être combinées avec l'inconnue.

67. Les transformations qu'exige la résolution des équations, sont fondées, sur ce principe évident : *Lorsqu'on fait les mêmes opérations sur des quantités égales, les résultats sont égaux.* Par conséquent ; 1°. *lorsqu'à deux quantités égales, on ajoute une même quantité, les sommes sont égales;* 2°. *quand de deux quantités égales, on retranche une même quantité, les restes sont égaux;* 3°. *en multipliant deux quantités égales, par une même quantité, les produits sont égaux;* 4°. *lorsqu'on divise deux quantités égales, par une même quantité, les quotiens sont égaux.* Comme les deux membres d'une équation sont deux quantités égales, les principes précédens s'y appliquent et les transformations qui en résultent, n'altèrent pas la valeur

de l'inconnue. Ces principes suffisent pour résoudre les équations.

68. En effet; soit l'équation... $x+3=5$. Si des deux quantités égales $(x+3)$ et 5, on ôte le même nombre 3, les restes x et $(5-3)$ seront égaux; on aura donc.... $x=5-3$.

69. Soit l'équation, $x-3=5$. Si l'on ajoute 3 à chaque membre, il viendra $x-3+3=5+3$; ou... $x=5+3$.

L'équation $x+3=5$, a donné $x=5-3$.

L'équation $x-3=5$, a donné $x=5+3$.

On voit donc que *pour faire passer un terme d'un membre d'une équation dans un autre, il suffit d'effacer ce terme dans le membre où il se trouve, et de l'écrire dans l'autre avec un signe contraire; c'est-à-dire avec le signe — s'il avait le signe +, et avec le signe + s'il avait le signe —.*

70. Soit l'équation, $2x=6$. En divisant les deux quantités égales $2x$ et 6, par un même nombre 2, les quotiens x et $\frac{6}{2}$, seront égaux. Donc $x=\frac{6}{2}$. Ainsi, *lorsque l'inconnue x est seule dans le premier membre, pour la dégager du coefficient qui la multiplie, il faut le supprimer dans le premier membre et diviser l'autre membre par ce coefficient:* Il en résulte que *l'inconnue x est égale au second membre de l'équation primitive, divisé par le coefficient de x dans cette équation.*

71. Soit l'équation, $\frac{x}{3}=4$. En multipliant par 3, les deux quantités égales $\frac{x}{3}$ et 4, les produits $\frac{x}{3}\times3$, ou x, et 4×3, seront égaux; on aura donc, $x=4\times3$. Par conséquent, *lorsque l'inconnue x est seule dans le premier membre, pour la dégager de son diviseur, il faut le supprimer dans le premier membre et multiplier le second membre par ce diviseur. L'inconnue x est donc égale au second membre de l'équation primitive, multiplié par le diviseur de x dans cette équation.*

72. Les règles précédentes donnent le moyen de *dégager* l'inconnue des quantités avec lesquelles elle est combinée par

voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Il est facile d'en déduire la résolution d'une équation quelconque. En voici des exemples :

1er *Exemple.* Résoudre l'équation... $3x-4=2x+7$.

Je fais passer $2x$, du 2e membre dans le 1er, et -4 du 1er dans le 2e, en changeant les signes de ces termes (n° 69); ce qui me donne... $3x-2x=7+4$; ou $x=11$.

Cette valeur de x satisfait à l'équation proposée, car l'hypothèse $x=11$, donne $3x-4=29$ et $2x+7=29$.

73. En général, *pour reconnaître si une valeur de l'inconnue satisfait à une équation, il faut voir si cette valeur mise à la place de l'inconnue, rend le premier membre identiquement égal au second. Lorsque cette condition est remplie, la valeur de l'inconnue satisfait à l'équation proposée ; et elle ne peut y satisfaire que dans ce cas.* Cela est évident, car une équation étant l'expression algébrique de certaines conditions auxquelles le nombre représenté par x doit satisfaire ; si ce nombre était connu, en effectuant sur lui toutes les opérations indiquées sur x, chaque membre devrait prendre la même valeur numérique; et si cette condition n'était pas remplie, le nombre mis pour x, ne serait pas admissible.

74. L'équation $3x-4=2x+7$, peut être considérée comme la traduction algébrique de ce problème, *trouver un nombre x, tel que son triple, diminué de 4, soit égal à son double, augmenté de 7.* En général, *toute équation algébrique, peut être considérée comme l'expression des conditions d'un problème. Pour trouver l'énoncé de ce problème, il suffit de traduire l'équation proposée en langage ordinaire.*

75. *Les deux membres d'une équation étant égaux, on peut prendre l'un pour l'autre.* Les équations.....

$$3x-4=2x+7;\ 2x+7=3x-4.$$

Doivent

Doivent donc conduire à la même valeur de x. Or, la 1re a donné $x=11$. La 2^e doit donc conduire au même résultat; et en effet, elle donne successivement...

$$2x+7=3x-4;\ 2x-3x=-4-7;\ -x=-11.$$

Multipliant chaque membre de cette dernière équation par -1, on trouve $x=11$.

76. En général, *on peut changer les signes de tous les termes d'une équation, sans troubler l'égalité des deux membres*, car cela revient à multiplier les deux membres par -1.

77. 2^e *Exemple.* Résoudre l'équation, (1)... $\frac{b}{a}+\frac{cx}{d}=m-\frac{nx}{p}$.

On fera d'abord disparaître tous les dénominateurs, en multipliant les deux membres par le produit adp de ces dénominateurs; car cette multiplication donne

$$\frac{b\times adp}{a}+\frac{cx\times adp}{d}=m\times adp-\frac{nx\times adp}{p},$$

et en effectuant les divisions indiquées, il vient....

$$(2)\ldots\ b\times dp+cx\times ap=m\times adp-nx\times ad.$$

Cette dernière équation donne successivement....

$$acpx+adnx=admp-bdp;\ (cp+dn)\,ax=(am-b)\,dp;\ x=\frac{(am-b)\,dp}{(cp+nd)\,a}.$$

78. Si l'on compare les équations (1) et (2), on en déduira que *pour faire disparaître les dénominateurs qui affectent les termes d'une équation, il suffit de multiplier chaque numérateur, par le produit des dénominateurs des autres fractions, et chaque entier, par le produit de tous les dénominateurs.* Le seul but de la multiplication des deux membres de l'équation proposée, par le produit des dénominateurs, étant de rendre les nouveaux numérateurs, divisibles par les dénominateurs, *on simplifiera les calculs en multipliant les deux membres, par le plus petit dénominateur commun des termes fractionnaires de*

l'équation proposée (*A*, *nos* 183 *et* 184). Ainsi, pour chasser les dénominateurs des équations.....

$$\frac{p}{ab}-\frac{qx}{ac}=\frac{r}{dbc}-\frac{mx}{abc},\ \frac{5x}{6}-\frac{2}{15}=\frac{7x}{9}+\frac{8}{15},$$

il suffira de multiplier les deux membres de la 1re, par $abcd$ et ceux de la seconde, par 90. Ce qui donnera.....

$$pcd-bdqx=ar-mdx \text{ et } 75x-12=70x+48.$$

On déduira de ces équations, $x=\frac{ar-pcd}{(m-bq)d}$ et $x=12$.

79. *Pour déterminer le degré d'une équation, on fait disparaître les dénominateurs qui peuvent renfermer les inconnues* (*n°* 78). *La plus forte somme des exposans des inconnues, dans les différens termes du résultat, exprime le degré de l'équation proposée.* S'il s'agit des équations $\frac{1}{x}=2$, $\frac{1}{x}+y^2=2$, on fera disparaître les dénominateurs; ce qui donnera $2x=1$ et $1+xy^2=2x$. Par conséquent, la 1re équation est du 1er degré et la 2e équation est du 3e degré.

80. La méthode exposée dans les exemples précédens, conduit à cette règle générale. *Pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue; chassez les dénominateurs, d'après la règle du n°* 78; *faites passer, tous les termes qui renferment l'inconnue dans le premier membre et les termes tous connus dans le second membre* (*n°* 69). *La valeur de l'inconnue sera égale au second membre de cette dernière équation, divisé par la somme algébrique des quantités qui multiplient l'inconnue, dans le premier membre* (*n°* 70).

Equations du 1er degré entre plusieurs inconnues.

81. *Une seule équation entre deux inconnues, ne suffit pas pour déterminer ces inconnues*, car en donnant une valeur arbitraire à l'une des inconnues, il reste une équation, qui sert à déterminer l'autre inconnue. *Une équation entre deux in-*

connues admet donc une infinité de solutions ; le problème qui conduirait à une équation de cette espèce, serait donc indéterminé. Par exemple, si l'on demandait deux nombres dont la somme fût 12, en désignant ces nombres par x et y, l'on aurait $x+y=12$. Or il est évident que le problème admet une infinité de solutions; les inconnues x et y doivent donc être susceptibles d'une infinité de valeurs. Et en effet, l'équation $x+y=12$, donnant $y=12-x$, la valeur de y ne sera déterminée que lorsqu'on connaîtra x. Substituant donc pour x des nombres quelconques, les valeurs correspondantes de y se déduiront de l'équation, $y=12-x$.

82. *Deux équations, entre deux inconnues, suffisent pour déterminer les valeurs de ces inconnues.* En effet; soient les équations.....

$$(1)\ldots y-x=6\,;\ (2)\ldots (x+y)=12.$$

Chaque équation en particulier admet une infinité de solutions (n° 81), mais il n'existe qu'une solution commune à ces équations. Pour le démontrer, on tirera de la 1re équation, $y=6+x$. Si dans la 2e équation on met pour y sa valeur $(6+x)$, alors...

$$x+y=12,\ \text{deviendra}\ (3)\ldots x+(6+x)=12.$$

Cette dernière équation donne $x=3$; la valeur $6+x$, de y, devient donc $6+3$, ou 9. Il est facile de prouver que ces valeurs de x et y, sont les seules qui puissent satisfaire en même temps aux équations proposées. En effet; si l'équation (1) existait seule, on pourrait prendre pour x un nombre arbitraire; mais comme en vertu de cette équation, y doit être égal à $(x+6)$, la valeur de x augmentée de 6, donnerait y. Or d'après l'équation (2), la valeur de x augmentée de y ou de $(6+x)$, doit donner 12. Le système des équations (1), (2), n'admet donc que les valeurs de x qui satisfont à l'équation (3); mais cette équation n'admet que la valeur $x=3$; l'inconnue y, assujétie à être égale à $x+6$, n'a donc que la valeur $y=3+6=9$; donc enfin, les équations proposées n'admettent que les valeurs $x=3$, $y=9$. Ces valeurs satisfont aux équations (1) et (2), car elles donnent...

$$(y-x)=9-3=6 \text{ et } x+y=3+9=12.$$

83. La méthode que nous avons suivie pour résoudre les équations (1) et (2), pouvant s'appliquer à deux équations quelconques du premier degré entre deux inconnues, nous établirons cette règle générale : *Pour résoudre deux équations du premier degré entre deux inconnues ; tirez d'une équation la valeur d'une inconnue, comme si l'autre inconnue était déterminée ; substituez cette valeur de l'inconnue dans l'autre équation. Le résultat sera une équation du premier degré à une seule inconnue, que vous pourrez résoudre au moyen de la règle du n° 80. L'une des inconnues étant ainsi déterminée, on substituera sa valeur dans l'expression de l'autre inconnue, ce qui conduira à la valeur de cette seconde inconnue.* Par exemple, étant donné les équations.....

$$3x+7y=27\,;\ 30x+60y=240\,;$$

on tirera la valeur de y de la 1^re^ équation, comme si x était connu ; ce qui donnera...

$$7y=27-3x \text{ et } y=\tfrac{1}{7}(27-3x).$$

Mettant cette valeur de y, dans la 2^e^ équation, le résultat sera l'équation à une seule inconnue...

$$30x+60\left(\frac{27-3x}{7}\right)=240.$$

Cette équation donne, $x=2$. Substituant la valeur de x, dans celle de y, on aura.....

$$y=\frac{27-3x}{7}=\frac{27-3.2}{7}=\frac{27-6}{7}=\frac{21}{7}=3.$$

Ces valeurs de x et y, satisfont aux équations proposées, car elles donnent.....

$$3x+7y=3.2+7.3=27 \text{ et } 30x+60y=30.2+60.3=240.$$

84. *Deux inconnues ne peuvent pas satisfaire à plus de deux équations; de sorte qu'un problème à deux inconnues devient impossible, lorsqu'il conduit à plus de deux équations*, car deux équations déterminant les valeurs des deux inconnues (n° 82), ces valeurs ne peuvent pas satisfaire à d'autres équations. Par exemple, si l'on demandait deux nombres, dont la différence fût 6, la somme 12 et le quotient 4; en désignant ces nombres par x et y, on serait conduit aux trois équations,

$$y-x=6;\ x+y=12;\ \frac{y}{x}=4.$$

Les deux premières donnent $x=3$ et $y=9$. Ces valeurs de x et y ne satisfaisant pas à la 3e équation, la question proposée est impossible.

85. *Pour résoudre trois équations du premier degré à trois inconnues; tirez d'une équation la valeur d'une inconnue, comme si les deux autres inconnues étaient déterminées. Substituez cette valeur de l'inconnue dans les deux autres équations. Vous n'aurez plus que deux équations du 1er degré entre deux inconnues. La règle du n° 83, conduira aux valeurs de ces deux inconnues. Ces valeurs, substituées dans l'expression de la 3e inconnue, détermineront cette inconnue.* Par exemple, étant donné les équations.....

$$(1)\ldots 3x+2y+z=16;\ 2x+2y+2z=18;\ 2x+2y+z=14.$$

On tirera de la 1re équation, $\ldots z=16-3x-2y$.

La substitution de cette valeur de z dans les deux autres équations, donnera.....

$$2x+2y+2(16-3x-2y)=18;\ 2x+2y+(16-3x-2y)=14.$$

Ces deux dernières équations donneront, $x=2$ et $y=3$ (n° 83). La valeur de z deviendra donc.....

$$z=16-3x-2y=16-3.2-2.3=16-12=4.$$

Les valeurs de, x, y, z, sont donc, $x=2$, $y=3$ et $z=4$. Ces valeurs sont exactes, car en les substituant dans les équations proposées, on trouvera que les deux membres prennent la même valeur numérique.

La forme des équations (1) permet de simplifier les calculs précédens. En effet; si l'on retranche la 3^e^ équation de la 1^re^, on aura.....

$$(3x+2y+z)-(2x+2y+z)=(16-14)\,;\ \text{d'où}..\ x=2.$$

Retranchant la 3^e^ de la 2^e^, il vient...

$$(2x+2y+2z)-(2x+2y+z)=(18-14)\,;\ \text{d'où}\ z=4.$$

La substitution de ces valeurs de x et z, dans la 1^re^ équation, donne...

$$16=3x+2y+z=6+2y+4\,;\ \text{d'où}\ 2y=6\ \text{et}\ y=3.$$

86. En général, *étant donné un nombre quelconque d'équations du 1^er^ degré entre le même nombre d'inconnues, on pourra toujours trouver la valeur déterminée de chaque inconnue. Pour y parvenir, on prendra dans une équation la valeur d'une inconnue, comme si tout le reste était connu. La substitution de cette valeur dans les autres équations, conduira à des équations, qui ne contiendront plus cette inconnue. Le nombre des équations et celui des inconnues, sera ainsi diminué d'un. Opérant sur ces nouvelles équations, comme sur les proposées, on aura deux équations de moins et deux inconnues de moins. Continuant ce procédé, on parviendra à une seule équation du premier degré à une seule inconnue. Cette dernière équation donnera la valeur de l'inconnue qu'elle renferme (n° 80); et remontant aux équations précédentes, on parviendra aux valeurs des autres inconnues.*

87. L'application de cette règle peut offrir quelque difficulté, quand toutes les inconnues n'entrent pas à la fois dans chaque équation. Il faut alors examiner avec soin la forme des équations proposées. On en déduit les valeurs des inconnues. En voici des exemples :

1^er^ *Exemple.* $(2x+1)=5\,;\ y-x=2\,;\ x+2y+z=17.$

La 1^re^ équation donne $x=2$. La substitution de cette valeur de x, dans la 2^e^ équation, conduit à $y=x+2=4$. La 3^e^ équation donne...

$$z=17-x-2y=17-2-2.4=7.\text{ Donc, } x=2, y=4, z=7.$$

2^e^ *Exemple.* $x+y=5$; $2z+t=4$; $x-z=2$; $x-z-y=0$.

La même inconnue n'entrant pas dans les deux premières équations, ces équations n'établissent aucune liaison entre x, y et t, z. On ne tirerait donc aucun parti de leur combinaison. Mais avec un peu d'attention, on voit que les deux dernières équations, conduisent à la valeur de y, car en retranchant la 4^e^ équation de la 3^e^, il vient...

$$(x-z)-(x-z-y)=2-0.\quad \text{D'où } y=2.\quad \text{Alors...}$$

La 1^re^ équation donne... $x=5-y=5-2=3$;
La 3^e^ équation donne... $z=x-2=3-2=1$;
La 2^e^ équation donne... $t=4-2z=4-2=2$.

3^e^ *Exemple.* $x+y=12$; $x-y=6$; $x+2y=17$; $x+z+t=10$.

Comme on a quatre équations, pour déterminer quatre inconnues, le problème paraît possible ; mais les inconnues x et y entrant seules dans les trois premières équations, il est impossible de satisfaire à ces équations (n° 84).

Problèmes qui conduisent à un nombre d'Equations égal à celui des inconnues.

88. Les règles précédentes donnant le moyen de résoudre les équations du premier degré, nous allons traiter les problèmes qui conduisent à ces équations ; et pour montrer l'avantage des signes algébriques, nous les appliquerons d'abord aux solutions de plusieurs problèmes de l'*Introduction* à l'Algèbre.

89. *Avec des pièces de* 6^f^ *et de* 15^f^, *faire* 180^f^ *en* 18 *pièces* (*A*, *n*° 303). Si, le nombre des pièces de 15^f^ étant connu, on voulait vérifier s'il satisfait aux conditions du problème, on le retrancherait de 18 ; le reste exprimerait le nombre des pièces de 6^f^ ; on multiplierait ensuite 15^f^, par le nombre des

pièces de 15^{s}, et 6^{s} par le nombre des pièces de 6^{s}; la somme de ces produits devrait être égale à 180^{s}. Désignons donc par x le nombre des pièces de 15^{s} et effectuons sur x les opérations que nous venons d'indiquer (n° 6). Le nombre des pièces de 6^{s} sera $(18-x)$. Or les x pièces de 15^{s} valent x fois 15^{s}, ou $15\,x^{s}$ et les $(18-x)$ pièces de 6^{s} valent $(18-x)$ fois 6^{s}, ou $(18-x)6^{s}$. Les 18 pièces, ainsi choisies, valent donc $15x^{s}+(18-x)\,6^{s}$; mais ces 18 pièces doivent former 180^{s}; donc......
$15x^{s}+(18-x)6^{s}=180^{s}$; ou $15x+(18-x)6=180$. D'où $x=8$.

On doit donc prendre 8 pièces de 15^{s} et 10 de 6^{s}. En effet; les 8 pièces de 15^{s} valent 120^{s}, les 10 pièces de 6^{s} valent 60^{s}; ces 18 pièces valent donc 180^{s}.

90. *Partager* 35 *en deux parties qui soient dans le rapport de* 3 *à* 4 (*A*, *n*° 227). Comme 4 est les $\frac{4}{3}$ de 3, la 2e partie sera les $\frac{4}{3}$ de la 1re; de sorte que si la 1re partie est x, la 2e sera les $\frac{4}{3}$ de x, ou $\frac{4}{3}\,x$. Mais la somme des parties doit être égale à 35.

Donc, $x+\dfrac{4x}{3}=35$. On en déduit $x=15$. La 1re partie est donc 15; la 2e est les $\frac{4}{3}$ de 15, ou 20. Si l'on veut éviter les fractions, on désignera la 1re partie par $3x$, la 2e sera les $\frac{4}{3}$ de $3x$, ou $4x$; et la somme $7x$ de ces parties, devant être 35, on aura $7x=35$; D'où $x=5$. Donc...

La 1re partie $3x=3.5=15$; la 2e partie $4x=20$.

91. *Partager* 45 *en trois parties proportionnelles aux nombres* 3, 5, 7 (*A*, *n*° 228). D'après les rapports établis entre les parties, la 2e partie est les $\frac{5}{3}$ de la 1re et la 3e est les $\frac{7}{3}$ de la 1re; conséquemment, si la 1re partie est $3x$, la 2e sera les $\frac{5}{3}$ de $3x$, ou $5x$ et la 3e sera $7x$. Or la somme $15x$ de ces parties, doit être 45. Donc $x=3$. Les parties demandées sont donc 9, 15 et 21.

92. *Dans la question du n*° 302 *de l'Arithmétique*, on désignera la part d'une fille par x^{f}; celle d'un fils sera $2x^{f}$ et celle de la mère sera $4x^{f}$. Les 3 filles prendront $3x^{f}$, les 2 fils

$4x^f$ et la mère $4x^f$; ce qui fait $11x^f$ en tout. Mais cette somme doit composer l'héritage 11000^f. Donc $11x = 11000$; d'où $x = 1000$. Ainsi, la part d'une fille est 1000^f, celle d'un fils est 2000^f et la mère doit prendre 4000 francs.

93. Dans la question du n° 287 (*Arith.*), on désignera l'âge de *Diophante*, par $84x$ années, afin de pouvoir en prendre le 6ᵉ, le 12ᵉ et le 7ᵉ. D'après l'énoncé du problème, *Diophante* a passé : dans l'enfance, le 6ᵉ de sa vie, ou $14x$ années; dans l'adolescence, le 12ᵉ de sa vie, ou $7x$ années; dans le mariage, avant d'avoir un fils, le 7ᵉ de sa vie, plus 5 ans, ou $(12x+5)$ ans; avec son fils, la moitié de sa vie, ou $42x$ ans; et 4 ans après la mort de son fils. Mais *Diophante* a passé la totalité de sa vie dans ces différens états; la somme de ces temps doit donc être égale à $84x$ années. On doit donc avoir...

$$14x + 7x + (12x+5) + 42x + 4 = 84x; \text{ d'où } x = 1.$$

Diophante a donc vécu 84 ans.

94. Dans la question du n° 288 (*Arith.*), on désignera le butin total par x^f; le capitaine en prélève les $\frac{2}{3}$, ou $\frac{2}{3}x^f$; il reste $\frac{1}{3}x^f$; les deux lieutenans prennent les $\frac{4}{5}$ de ce reste; ils ne laissent donc que le 5ᵉ du reste $\frac{x^f}{3}$, ou $\frac{x^f}{15}$. Les quatre sous-lieutenans prennent les $\frac{4}{10}$ de $\frac{x^f}{15}$; ils ne laissent donc que les $\frac{6}{10}$ de $\frac{x^f}{15}$, ou $\frac{6x^f}{150}$, ou $\frac{x^f}{25}$. Mais ce dernier reste doit composer les 12000^f laissés aux soldats; donc, $\frac{x}{25} = 12000$; d'où.... $x = 300000$. Le butin total est donc 300000^f. On en déduit facilement la part de chaque officier.

95. Dans la question du n° 289 (*Arith.*), on supposera que le dévot entre dans l'église avec x écus de $3^{\#}$, ou $3x^{\#}$; il en donne le 5ᵉ; il ne lui reste donc que les $\frac{4}{5}$ de $3x^{\#}$, ou

$\frac{12x^{\#}}{5}$, ou $\frac{4x}{5}$ écus de $3^{\#}$; mais chaque écu devient une pièce de $5^{\#}$; donc, après ce changement, le dévot aura $\frac{4x}{5}$ pièces de $5^{\#}$, ou $4x^{\#}$; il en donne le 10[e] ; il ne lui reste donc que les $\frac{9}{10}$ de $4x^{\#}$, ou $\frac{36x^{\#}}{10}$, ou $\frac{3x}{10}$ pièces de $12^{\#}$. Or chaque pièce de $12^{\#}$ devient une pièce de $21^{\#}$; donc, après ce changement, le dévot aura $\frac{3x}{10}$ pièces de $21^{\#}$, ou $\frac{63x^{\#}}{10}$; il dépense $3^{\#}$; il rentre donc chez lui avec $\left(\frac{63x^{\#}}{10} - 3^{\#}\right)$. Mais il doit rentrer avec x écus de $6^{\#}$, ou $6x^{\#}$. Donc.....

$$\frac{63x}{10} - 3 = 6x\,;\ \text{d'où}\ x = 10.$$

Ainsi, le dévot avait 10 écus de $3^{\#}$, ou $30^{\#}$.

96. Si l'on compare les solutions précédentes à celles de l'*Introduction*, on verra qu'*un des grands avantages de l'Algèbre sur l'Arithmétique est de conduire plus directement au résultat.*

97. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils et il y a dix ans qu'il en était le quintuple. Il faut découvrir l'âge du père et celui du fils.* Si l'âge actuel du fils est x ans, celui du père, qui en est le triple, sera $3x$ ans ; dix ans auparavant, l'âge du fils était $(x-10)$ ans et celui du père était $(3x-10)$ ans. Mais alors, l'âge du père était égal à cinq fois l'âge du fils. Donc... $3x - 10 = 5\,(x-10)$. D'où $x = 20$. Le fils a donc 20 ans et le père 60 ans. Il y a dix ans, le fils avait 10 ans et le père 50 ans ; l'âge du père était donc en effet quintuple de celui du fils.

98. *Une personne charitable veut distribuer une somme d'argent à des pauvres ; si elle donnait $2^{\#}$ à chaque pauvre, il lui resterait $7^{\#}$, et il lui faudrait $4^{\#}$ de plus, pour donner $3^{\#}$ à chaque pauvre. On*

demande combien il y avait de pauvres et quelle était la somme d'argent. Désignons le nombre des pauvres par x; si chacun recevait 2₶, les x pauvres recevraient x fois 2₶, ou $2x$₶; mais après cette distribution, il resterait 7₶; la somme d'argent est donc ($2x$₶ + 7₶). Si chaque pauvre recevait 3₶, les x pauvres recevraient $3x$₶; or il manque 4₶ pour faire cette distribution; la somme d'argent est donc ($3x$₶ — 4₶). Egalant ces deux expressions de la même somme d'argent, on aura $3x-4=2x+7$; d'où, $x=11$ et $2x+7=29$. Donc, le nombre des pauvres est 11 et la somme d'argent est 29₶. En effet; pour donner 2₶ à chacun des 11 pauvres, il faut 22₶; la personne a 29₶; il lui restera donc 7₶; pour donner 3₶ à chacun des 11 pauvres, il faudrait 33₶; la somme d'argent n'est que 29₶, il manque donc 4₶. Toutes les conditions du problème sont donc remplies.

99. *Un père dit à son fils, il y a 90₶ dans ces quatre bourses. Si je mettais 5₶ dans la 1re, si j'ôtais 4₶ de la 2e, si je triplais l'argent de la 3e et si j'ôtais la moitié de l'argent de la 4e, chaque bourse contiendrait alors la même somme. Combien y avait-il d'argent dans chaque bourse?* Si après avoir effectué les opérations indiquées, chaque bourse contient $3x$₶; alors, $3x$₶ exprimera l'argent de la 1re bourse augmenté de 5₶; la 1re bourse contenait donc $3x$₶ — 5₶. L'argent de la 2e bourse, diminué de 4₶, sera $3x$₶; la 2e bourse contenait donc $3x$₶ + 4₶. Le triple de l'argent de la 3e bourse étant $3x$₶, la 3e bourse contenait x₶. Enfin, la moitié de l'argent de la 4e bourse étant $3x$₶, la 4e bourse contenait $6x$₶. Les quatre bourses contenaient donc ($3x$₶ — 5₶) + ($3x$₶ + 4₶) + x₶ + $6x$₶, ou $13x$₶ — 1₶. Mais ces quatre bourses devaient contenir 90₶. Donc $13x-1=90$. D'où $x=7$. On en déduit que les quatre bourses contenaient 16₶, 25₶, 7₶ et 42₶.

100. *Un nombre est composé de deux chiffres; le chiffre des unités est double de celui des dixaines et lorsqu'on ajoute 36 à ce nombre, la somme est égale au nombre* RENVERSÉ (*). *On demande quel est le nombre qui jouit de ces propriétés.* Le chiffre des dixaines étant x, celui des unités sera $2x$; le nombre cherché sera, x dixaines + $2x$ unités. Ce nombre *renversé* sera donc, $2x$ dixaines + x unités. Mais le nombre cherché augmenté de 36, doit être égal au nombre *renversé*. Donc.....

$$(x \text{ dixaines} + 2x \text{ unités} + 36) = (2x \text{ dixaines} + x \text{ unités}).$$

Une dixaine valant 10 unités, cette équation devient...

$$10x + 2x + 36 = 20x + x. \quad \text{D'où } x = 4 \text{ et } 2x = 8.$$

Le nombre cherché est donc 48. Ce nombre satisfait à toutes les conditions du problème, car le chiffre des unités est double de celui des dixaines et si l'on ajoute 36 à 48, l'on obtient 84, qui est le nombre *renversé*.

(*) On dit qu'un nombre est *renversé*, lorsque les chiffres sont écrits dans un ordre inverse. Ainsi, le nombre 12345 *renversé* devient 54321.

101. *Un nombre est composé de 3 chiffres; leur somme est* 11 ; *le chiffre des unités est double de celui des centaines, et quand on ajoute* 297 *à ce nombre, on obtient une somme qui est le nombre renversé. Quel est le nombre qui jouit de ces propriétés?* Si l'on raisonne comme dans le n° 100, on trouvera que le nombre cherché est 326.

102. *Deux lettres de change, l'une de* 6000^f *payable dans* 25 *mois, l'autre de* 27000^f *payable dans* 4 *mois, ont supporté le même escompte; c'est-à-dire, que les pertes éprouvées sur chacune, pour les toucher sur-le-champ, sont égales. On demande le taux de l'argent. On n'a égard qu'aux intérêts simples.* Soit x^f l'escompte, ou l'intérêt de 100^f par mois. L'intérêt de 100^f pendant 25 mois sera $25x^f$; 100^f comptant valent donc $100^f + 25x^f$ après 25 mois; $100^f + 25x^f$, payables dans 25 mois, valent donc 100^f comptant. L'escompte de $100^f + 25x^f$, est donc de $25x^f$, pour 25 mois. Puisque pour 25 mois...

L'escompte de $(100 + 25x)^f$, est..... $25x^f$

L'escompte de..... 1^f, sera... $\dfrac{25x^f}{100 + 25x}$, ou $\dfrac{x^f}{4 + x}$.

L'escompte des 6000^f sera donc 6000 fois $\dfrac{x^f}{4 + x}$, ou $\dfrac{6000x^f}{4 + x}$.

On trouvera de la même manière que l'escompte des 27000^f est de $\dfrac{27000x^f}{25 + x}$, pour 4 mois. Mais, les escomptes des deux lettres de change sont égaux. Donc...

$$\frac{6000x}{4 + x} = \frac{27000x}{25 + x}. \quad \text{D'où } x = 2.$$

L'argent était donc à 2 pour 100 par mois. On ferait la *preuve* comme dans le n° 256 (*Arith.*).

103. *Un particulier a acheté* 96 *aunes de drap de Louviers à* $\frac{5}{8}$, *pour une certaine somme d'argent. Quelque temps après, le prix du drap ayant diminué, il retourne chez son marchand, qui lui donne, pour la même somme,* 100 *aunes de drap de Sedan à* $\frac{7}{8}$. *On suppose que le drap de Louviers à* $\frac{5}{8}$ *est diminué de* 10^f *par aune, et qu'à dimensions égales, le drap de Sedan a éprouvé une diminution de prix proportionnelle à sa qualité, qui est les* $\frac{6}{7}$ *de celle du drap de Louviers. Il s'agit de trouver le prix de l'aune de drap de Louviers à* $\frac{5}{8}$, *avant la diminution du prix des draps.* Désignons ce prix par $5x + 10$ francs. Les 96 aunes

de drap de Louviers auront coûté $(5x+10)^f \times 96$. Mais, après la diminution du prix des draps, l'aune de drap de Louviers à $\frac{5}{8}$ ne coûte que $5x^f$; l'aune de drap de Louviers à $\frac{7}{8}$ coûte donc $7x^f$; et comme la qualité du Sedan est les $\frac{6}{7}$ de celle du Louviers, l'aune de drap de Sedan à $\frac{7}{8}$ ne coûtera que les $\frac{6}{7}$ de $7x^f$, ou $6x^f$. Les 100 aunes de Sedan à $\frac{7}{8}$ ont donc coûté $600x$ francs. Mais l'énoncé dit que les 100 aunes de Sédan ont coûté le même prix que les 96 aunes de Louviers. Donc $600x=(5x+10)96$; on en déduit $x=8$ et $5x+10=50$. Le prix cherché est donc 50 francs. On peut vérifier ce résultat de la manière suivante. Avant la diminution du prix des draps, l'aune de Louviers à $\frac{5}{8}$ coûtait 50^f; les 96 aunes de Louviers ont donc coûté 96 fois 50^f, ou 4800^f. Mais après la diminution du prix des draps, l'aune de Louviers à $\frac{5}{8}$ ne coûte que 40^f; l'aune de Louviers à $\frac{7}{8}$ ne coûte donc que 56^f; la qualité du drap de Sedan étant les $\frac{6}{7}$ de celle du Louviers, une aune de drap de Sedan à $\frac{7}{8}$ ne coûte que les $\frac{6}{7}$ de 56^f, ou 48^f; les 100 aunes de Sédan à $\frac{7}{8}$, ont donc coûté 4800 francs; résultat conforme à l'énoncé.

104. Nous sommes parvenus à résoudre des questions compliquées, avec une seule inconnue. On va voir que des problèmes dont les énoncés sont très-simples, peuvent exiger l'emploi de plusieurs inconnues.

105. *Un marchand a des vins de liqueur de deux qualités; 8 bouteilles de la première qualité, plus 10 de la 2e, valent 180^f et 3 bouteilles de la première qualité, plus 7 de la 2e, coûtent 87^f. On demande le prix de la bouteille de vin de chaque espèce.* La solution de ce problème exige l'emploi de deux inconnues. Désignons par x^f le prix d'une bouteille de 1re qualité et par y^f le prix d'une bouteille de 2e qualité. Alors, 8 bouteilles de 1re qualité, plus 10 de 2e qualité, coûteront $8x^f+10y^f$; et 3 bouteilles de la 1re qualité, plus 7 de la 2e, coûteront $3x^f+7y^f$. Mais ces deux sommes doivent être 180^f et 87^f. Donc.....

$$8x+10y=180 \text{ et } 3x+7y=87.$$

Ces équations donnent $x=15$ et $y=6$. La bouteille de vin de 1re qualité coûte donc 15^f et celle de 2e qualité coûte 6 francs. En effet, 8 bouteilles à 15^f plus 10 à 6^f, valent 180^f, et 3 bouteilles à 15^f plus 7 à 6^f, valent 87 francs.

106. *Deux couriers, qui marchent l'un vers l'autre, sont partis en*

même temps de deux endroits distans de 105 *lieues. Chaque jour, le premier courier parcourait* 2 *lieues de plus que le jour précédent, et le second parcourait* 3 *lieues de plus que la veille. Ces couriers se sont rencontrés après* 6 *jours de marche, et le second a parcouru* 9 *lieues de plus que le premier. Combien chaque courier a-t-il parcouru de lieues le premier jour?* Si l'on désigne ces chemins par x et y lieues, on trouvera, $x = 3$ et $y = 2$.

107. Dans les questions précédentes, *la valeur de l'inconnue, tirée d'une équation, a toujours satisfait au problème qui avait fourni cette équation; mais quelquefois, la valeur de l'inconnue, qui satisfait à une équation, ne satisfait pas au problème.* Pour sentir à quoi tient cette circonstance, il faut observer qu'il existe des problèmes dans lesquels l'inconnue doit satisfaire à certaines conditions particulières qui ne sont pas susceptibles d'être exprimées dans l'équation; alors, la valeur de l'inconnue, ne satisfaisant qu'aux conditions du problème, exprimées par l'équation, peut ne pas satisfaire aux autres conditions. En voici un exemple: *Un curé veut distribuer une somme d'argent aux pauvres de sa paroisse. S'il donnait* 2^f *à chaque pauvre, il lui resterait* 7^f; *il lui manque* 6^f, *pour donner* 4 *fr. à chaque pauvre. On propose de découvrir le nombre des pauvres et la somme d'argent.* Si le nombre des pauvres est x, on trouvera....

$$2x + 7 = 4x - 6\text{; d'où } x = \frac{13}{2}.$$

Cette valeur fractionnaire de x satisfait à l'équation, mais elle indique l'impossibilité du problème, car le nombre des pauvres ne peut être une fraction.

108. *Un père de famille ordonne, par son testament, que l'aîné de ses fils prendra* 100^f *sur la totalité des biens, plus le dixième de ce qui restera; le second* 200^f, *et le dixième de ce qui restera; le troisième* 300^f, *plus le dixième de ce qui restera; et ainsi de suite jusqu'au dernier, en augmentant toujours de* 100 *francs. Les enfans sont également partagés. Il faut trouver, la valeur de l'héritage, le nombre des enfans et la part de chaque enfant.* Si l'on désigne l'héritage par x *francs* et si l'on égale la part du fils aîné à celle du second fils, on trouvera $x = 8100$. La part du fils aîné sera $\frac{1}{10}x^f + 90^f$, ou 900^f. Mais toutes les parts doivent être égales. Il y a donc neuf enfans. Si l'on effectue le partage, suivant les volontés du testateur, on trouvera que ces nombres satisfont à toutes les conditions du problème.

109. Cette solution conduit à des remarques importantes; car, pour déterminer la valeur de x, on n'a exprimé qu'une des conditions du problème

et cependant les autres conditions se sont trouvées remplies. Il est rare que cela arrive ainsi. *Les valeurs des inconnues ne satisfont ordinairement qu'aux conditions du problème exprimées par les équations qui les déterminent; les seuls cas qui fassent exception, sont ceux où les conditions, non exprimées, sont des conséquences des conditions exprimées.* La question actuelle est de cette espèce. En effet, si l'on calcule les différences entre les parts des enfans, on trouvera que toutes ces différences contiennent le facteur $x - 8100$; la valeur $x = 8100$, réduisant ce facteur à zéro, les différences entre les parts deviennent nulles; de sorte que les relations qui lient l'inconnue x, avec les quantités connues, sont telles, que la valeur $x = 8100$, rend toutes les parts égales, comme l'exige l'énoncé.

110. Soit proposé de résoudre les équations.......

$$5x + 1 = 2x + 1\,;\ 3(4x + 12) = 4(3x + 9)\,;\ 5 + x = 2 + x.$$

La 1re donne $x = 0$; la 2e conduit à l'égalité $12x + 36 = 12x + 36$, qui est vraie, quel que soit x, et la 3e conduit à cette absurdité, $5 = 2$. Ainsi, dans la 1re équation, la valeur de l'inconnue est zéro; la 2e équation est *indéterminée*, car on peut donner à x une valeur arbitraire; la 3me équation est impossible, c'est-à-dire qu'aucune valeur finie de x ne peut satisfaire à cette équation.

111. Passons à l'examen des *solutions négatives*. Soit proposé de *trouver le nombre qu'il faut ajouter à 7, pour obtenir* 5. Le nombre inconnu étant x, on aura $7 + x = 5$; d'où $x = -2$. Sous le rapport de l'algèbre, cette valeur négative de x satisfait, car en ajoutant à 7, le nombre négatif -2, la *somme algébrique* est $7 - 2$, ou 5. Mais s'il s'agit d'une addition arithmétique, la question est absurde; la valeur négative de x indique comment on doit changer l'énoncé pour rendre la question possible, sous le rapport de l'arithmétique; en effet, pour que l'équation $x = -2$, devienne arithmétiquement possible, il suffit de changer le signe de x; l'équation primitive $7 + x = 5$, deviendra donc possible, si l'on change le signe de x; l'équation $7 - x = 5$, qui en résulte, donne $x = 2$; or l'équation $7 - x = 5$, correspond à cet énoncé : *quel nombre x, doit-on soustraire de 7, pour obtenir* 5.

112. *La valeur négative de x, indique donc le changement à faire dans l'énoncé, pour que la question devienne arithmétiquement possible.* Cette propriété est générale. Par exemple, si l'on demande *quel est le nombre dont le triple, diminué de* 1000, *est égal à son quadruple augmenté de* 2000, on désignera ce nombre par x, et l'on aura...

$$(1)\ldots\ldots\ 3x - 1000 = 4x + 2000\,;\ \text{d'où}\ x = -3000.$$

Cette valeur négative de x, exprime que l'équation (1) conduirait à une valeur positive de x, si l'on changeait le signe de x. Mais quand on change le signe de x, l'équation (1) devient......

$$-3x - 1000 = -4x + 2000\,;\ \text{d'où}\ 3x + 1000 = 4x - 2000.$$

Cette dernière équation répond à cet énoncé : *quel est le nombre x, dont le triple augmenté de* 1000 *est égal au quadruple, diminué de* 2000. Ce problème donne $x = 3000$. De sorte que le nombre cherché est 3000.

113. En général, 1o. *lorsque toutes les conditions d'un problème sont exprimées dans une équation, la valeur positive de l'inconnue satisfait toujours au problème;* 2o. *quand la nature d'un problème impose à l'inconnue quelques conditions particulières, non exprimées dans l'équation, la valeur positive de l'inconnue peut ne pas convenir à la question; elle n'y convient que dans le cas où elle satisfait aux conditions particulières qui lui sont imposées;* 3o. *la valeur négative de l'inconnue indique toujours comment on doit changer l'énoncé du problème, pour le rendre possible. Ces diverses propriétés résultent de ce que la valeur de l'inconnue, tirée d'une équation, ne peut et ne doit satisfaire qu'aux conditions du problème exprimées par cette équation.*

114. *Deux couriers partent au même instant et marchent dans le même sens. En une heure, le premier courier parcourt v' lieues, et le second v'' lieues; la distance entre les points de départ est d lieues. Dans combien de temps les couriers se joindront-ils, et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre?* Comme les couriers marchent dans le même sens, ils ne peuvent se rencontrer que lorsque celui qui est en arrière marche le plus vîte. Nous supposerons donc que le second courier est en arrière, et que sa vîtesse v'' est plus grande que la vitesse v' du premier courier. Cela posé, si les couriers se rencontrent après x heures de marche, et si les distances des points de départ du premier et du second courier, au point de rencontre, sont d' et d'' lieues, on trouvera.......

$$v''x - v'x = d\,;\ d' = v'x,\ d'' = v''x.\ \text{On en déduira.....}$$

$$(1)\ldots\ldots\ x = \frac{d}{v'' - v'}\,;\ d' = \frac{v'd}{v'' - v'}\,;\ d'' = \frac{v''d}{v'' - v'}.$$

115. *Les conséquences tirées de l'examen de ces formules, s'accordent avec celles qui se déduisent immédiatement de l'énoncé du problème.*

116. Par exemple; lorsque d et v'' restant les mêmes, v' augmente, sans dépasser v'', x est positif et augmente; de sorte que la valeur de x exprime que tout étant d'ailleurs égal, plus le premier courier (qui est en avant), marche vîte, plus il faut de temps au second courier pour le joindre. Cette conclusion est celle que l'on déduirait de l'énoncé du problème, dans l'hypothèse actuelle.

117. Quand d et $v'' - v'$ sont nuls, la valeur de x se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Cette valeur est *indéterminée*, car elle dépend de l'équation $(v'' - v')x = d$, qui est vraie, quel que soit x. L'algèbre indique donc que *lorsque les couriers, qui marchent également vîte, partent en même temps du même point pour suivre la même route, le nombre d'heures après lequel ils se rencontrent est indéterminé; de sorte que les couriers se rencontrent à chaque instant, et sont toujours ensemble.* L'analyse de la question actuelle conduit au même résultat, car les couriers marchent dans le même sens et partent au même instant du même endroit.

118. Lorsque d n'étant pas nul, $v'' = v'$, la valeur de x devient $\frac{d}{0}$. Interprétons ce résultat. L'expression $\frac{d}{b}$, indiquant le quotient de la division de d par b, (n° 64), on voit que le dividende d ne changent pas, le quotient $\frac{d}{b}$ augmente à mesure que le diviseur b diminue. Par exemple, si les valeurs successives de b sont, $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$, etc., les valeurs correspondantes de $\frac{d}{b}$, seront, d, $10d$, $100d$, etc. Lorsque b sera extrêmement petit, $\frac{d}{b}$ sera très-grand et enfin, quand d n'étant pas nul, b sera zéro, le quotient $\frac{d}{0}$, sera plus grand que toute quantité assignable; ce qu'on exprime en disant que le quotient $\frac{d}{0}$ est *infiniment grand*. Le *signe* ∞, a été adopté pour désigner l'*infiniment grand*. La valeur infinie de x, exprime que les couriers se recontreront après avoir marché pendant un temps infiniment grand. Ce temps ne pouvant jamais finir, l'algèbre indique ainsi que les couriers ne se rencontréront jamais. Ce qui est exact, puisque les couriers marchant dans le même sens et avec la même vîtesse, restent toujours éloignés de la distance d lieues, qui les séparait à l'instant du départ. On peut encore observer que lorsque $v'' - v'$ diminue et s'approche de zéro, la valeur de x augmente et tend vers l'infini; de sorte que zéro et l'infini sont des *limites* dont $v'' - v'$ et x, approchent indéfiniment; la valeur, $\frac{d}{v'' - v'}$, de x, indique donc que si les vîtesses des couriers diffèrent très-peu, ces couriers ne se rencontreront qu'après avoir marché pendant un temps très-grand. Mais, quand les vîtesses sont égales, les couriers ne se rencontrent plus, et les formules (1) donnant des valeurs infinies pour, x, d' et d'', l'algèbre indique ainsi que *le point de rencontre a disparu en s'éloignant à l'infini.*

119. Si l'on veut apercevoir, comment *la valeur infinie de x, satisfait à l'équation $(v'' - v')x = d$, quand $v'' = v'$*; on observera que cette équa-

tion donnant $\frac{d}{x} = v'' - v' = 0$, on ne pourra jamais satisfaire à cette équation en mettant pour x des quantités finies; mais cependant, plus x sera grand, plus $\frac{d}{x}$ sera près de zéro; de sorte qu'en supposant x infini, $\frac{d}{x}$ sera nul.

120. Si tout restant d'ailleurs égal dans la question du nº 114, on suppose que le 1er courier au lieu de marcher dans le sens du second, marche en sens contraire, alors, les quantités v' et d', qui exprimaient des espaces parcourus par le 1er courier marchant dans le sens du 2e, prendront des acceptions opposées, car elles exprimeront des espaces parcourus par le 1er courier marchant en sens contraire du second. On trouvera...

$$(2)\ldots\ x = \frac{d}{v''+v'};\ -d' = \frac{-v'd}{v''+v'};\ d'' = \frac{v''d}{v''+v'}.$$

Comparant les formules (2), avec les formules (1) du nº 114, on voit que les quantités d' et v', qui ont pris des acceptions opposées, ont changé de signe.

121. En général: *lorsqu'après avoir résolu un problème en prenant des quantités dans une certaine acception, on veut résoudre ce problème en prenant ces quantités dans une acception opposée, il suffit de changer les signes des quantités qui reçoivent des acceptions opposées.* Réciproquement, *lorsque des formules ne diffèrent que par les signes de certaines quantités, ces formules appartiennent à des questions qui ne diffèrent qu'en ce que les quantités affectées de signes différens, ont des acceptions opposées.* On pourra vérifier l'exactitude de cette règle, en résolvant des problèmes.

Formules générales pour la résolution des équations du premier degré.

122. On distingue deux sortes d'équations; les *équations numériques*, et les *équations littérales. Les équations* NUMÉRIQUES *sont celles dans lesquelles les coefficiens des inconnues sont des nombres, et l'on dit qu'une équation est* LITTÉRALE, *lorsque les coefficiens des inconnues contiennent des lettres.* Ainsi, $5x+7y=12$, est une *équation numérique*, et $ax+by=c$, est une *équation littérale.*

123. La règle du nº 86, donne le moyen de résoudre m équations du premier degré entre m inconnues; mais lorsque les équations sont littérales, on simplifie les calculs et l'on rend les résultats symétriques, en représentant les coefficiens d'une même inconnue par la même lettre, affectée de plusieurs *accens*, selon le nombre des équations. On verra même (nº 131), que cette notation a l'avantage de réduire la recherche de toutes les inconnues à celle d'une seule inconnue.

124. *Toute équation du premier degré, à une seule inconnue, peut être ramenée à la forme* (1)... $ax=b$; *et a n'étant pas nul, il n'existe qu'une seule valeur de x qui puisse satisfaire à l'équation* (1), car après avoir fait passer les termes en x dans le 1er membre, et les termes tout connus dans le 2e membre, on peut désigner par a la somme des coefficiens de x, et par b le second membre. L'équation (1), donne $x=\frac{b}{a}$; *cette valeur de x est la seule qui puisse satisfaire à l'équation* (1). En effet; si une autre valeur $x=\left(\frac{b}{a}+q\right)$, pouvait satisfaire, on aurait $a\left(\frac{b}{a}+q\right)=b$; d'où $aq=0$; ce qui est absurde, puisque ni a, ni q, ne sont nuls.

125. *Toute équation du premier degré, entre deux inconnues, peut être mise sous la forme*, $ax+by=c$, car après avoir fait passer les termes affectés des inconnues dans le 1er membre et les termes tout connus dans le 2e membre, on peut désigner par a et b les sommes des termes qui multiplient x et y, et par c la somme des termes tout connus. *Cette équation admet une infinité de valeurs de x et y*, (no 81). Par exemple, si l'on donne des valeurs arbitraires à x, les valeurs correspondantes de y, seront données par la formule, $y=\frac{c-ax}{b}$.

126. *Deux équations du premier degré entre deux inconnues, peuvent toujours être mises sous cette forme.....*

$$(1)\ldots\ ax+by=c;\quad (2)\ldots\ a'x+b'y=c'.$$

Les coefficiens, a, b, c, a', b', c', désignent des quantités connues; x et y ont les mêmes valeurs dans ces deux *équations*; de sorte que *résoudre les équations* (1) *et* (2), *c'est trouver des quantités connues, qui, substituées pour x et y, rendent identiques les deux membres de chaque équation*. Les différens procédés que l'on peut employer pour résoudre ces équations, conduisent aux mêmes résultats, parce qu'ils sont fondés sur ce principe unique, que *x et y ont les mêmes valeurs dans chaque équation*.

1er *Procédé*. L'équation (1), donne $x=\frac{c-by}{a}$,

Substituant cette valeur de x dans l'équation (2), on trouve.........

$$(3)\ldots\ a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c'. \text{ On en déduit........}$$

$$a'c-a'by+ab'y=ac';\ (ab'-a'b)\,y=(ac'-ca');\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Mettant cette valeur de y dans l'équation (1), il vient......

$$ax+b\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)=c;\ \text{d'où}\ x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

La substitution de la valeur de y, dans l'équation (2), conduit à la même valeur de x. Cela devait nécessairement arriver, car ayant mis dans l'équation (2), la valeur de x tirée de l'équation (1), l'équation (3), qui en est résultée, exprime que x a la même valeur dans les équations (1) et (2); la valeur de y, tirée de l'équation (3), doit donc jouir de la propriété de donner la même valeur de x, lorsqu'on la substitue dans les équations (1) et (2). Cette remarque est générale; *on n'obtient les valeurs des inconnues, qu'en exprimant qu'elles sont les mêmes dans les équations proposées.*

127. Lorsqu'en combinant plusieurs équations, on fait disparaître une inconnue, on dit qu'on *élimine* cette inconnue. Ainsi, l'équation (3), est le résultat de l'*élimination* de x, entre les équations (1) et (2). L'équation (3) est l'*équation finale* en y.

128. Les valeurs de x et y, tirées des équations (1) et (2), sont donc...

$$(4)\ldots\ldots\ x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'};\quad (5)\ldots\ldots\ y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ces valeurs satisfont aux équations (1) et (2), car elles rendent ces équations identiques. Voici le calcul pour l'équation (1).....

$$c = ax + by = \frac{a\,(cb' - bc')}{(ab' - ba')} + \frac{b\,(ac' - ca')}{(ab' - ba')} = \frac{c\,(ab' - ba')}{(ab' - ba')} = c.$$

2e *Procédé.* Pour résoudre les équations (1) et (2), on multipliera les deux membres de la 1re par b', et ceux de la 2e par b; retranchant le second produit du premier, il viendra.....

$$(ab' - ba')x = cb' - bc';\ \text{d'où}\ x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

On trouvera y de la même manière, en multipliant les deux membres de l'équation (1) par a', ceux de l'équation (2) par a, et retranchant ensuite les nouvelles équations l'une de l'autre.

129. *Trois équations du premier degré entre trois inconnues, peuvent être mises sous la forme.....*

$$(1)\ldots ax + by + cz = d;\ (2)\ldots a'x + b'y + c'z = d';\ (3)\ldots a''x + b''y + c''z = d''.$$

1er *Procédé.* Pour résoudre ces équations, on tirera de la 1re.......

$$z = \frac{d - ax - by}{c}.$$

La substitution de cette valeur de z, dans les équations (2) et (3), donne...

$$(a'c - ac')x + (b'c - bc')y = (cd' - c'd);$$
$$(a''c - ac'')x + (b''c - bc'')y = (cd'' - c''d).$$

Ces deux dernières équations donnent (no. 126).....

$$(4)\ldots\ x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

$$(5)\ldots\ y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

La substitution de ces valeurs de x et y, dans l'une quelconque des équations proposées, donnera une équation qui ne contiendra que l'inconnue z. On en déduira.....

$$(6)\ldots\ z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

2e *Procédé*. On fera, $d - cz = \gamma$, et $d' - c'z = \gamma'$; les équations (1) et (2) deviendront, $ax + by = \gamma$, $a'x + b'y = \gamma'$; d'où, $x = \frac{\gamma b' - b\gamma'}{ab' - ba'}$, et $y = \frac{a\gamma' - \gamma a'}{ab' - ba'}$, (n° 128). Substituant ces valeurs de x et y, dans l'équation (3), chassant le dénominateur $ab' - ba'$, et mettant ensuite les valeurs de γ et γ', on parviendra à la formule (6).

130. En général, *pour résoudre m équations du premier degré entre m inconnues; on prendra dans une équation la valeur d'une inconnue; la substitution de cette valeur dans les autres équations, donnera* $(m - 1)$ *équations, entre* $(m - 1)$ *inconnues. Opérant sur ces nouvelles équations, comme sur les précédentes, on en déduira* $(m - 2)$ *équations, entre* $(m - 2)$ *inconnues; et continuant à opérer de la même manière, on parviendra à une équation du premier degré à une seule inconnue. Cette dernière équation donnera la valeur de l'inconnue qu'elle renferme; et remontant aux équations précédentes, on en déduira les valeurs des autres inconnues.*

* 131. *Lorsqu'on a trouvé la valeur générale de l'une des inconnues, on peut toujours en déduire les valeurs des autres inconnues, sans effectuer aucun calcul.* En effet;

1°. Les équations (1)... $ax + by = c$; (2)... $a'x + b'y = c'$;

ayant donné (3)...... $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, (n° 126),

on peut déduire y de x; car les équations (1) et (2) ne changeant pas lorsqu'on change, a, a', x, en b, b', y, et réciproquement, b, b', y, en a, a', x; toutes les formules déduites de ces équations, jouissent de la même propriété. Effectuant donc ce changement dans la formule (3), on trouvera...

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

2°. Les équations (1), (2), (3), du n° 129, jouissent de la même propriété. Par exemple, si, après avoir calculé la valeur de x, exprimée par la formule (4) du n° 129, on veut en déduire y; on dira : les équations (1), (2), (3), ne changeant pas quand on change a, a', a'', x, en b, b', b'', y, et réciproquement b, b', b'', y, en a, a', a'', x; toutes les formules qu'on en déduit, jouissent de la même propriété. Effectuant donc ce changement dans la formule (4) du n° 129, on doit trouver la valeur de y. Et en effet, le résultat est la formule (5) du n° 129. Par une raison semblable, si l'on change, dans la formule (4), a, a', a'', x, en c, c', c'', z; on obtiendra la valeur de z.

* 132. En comparant les valeurs générales des inconnues, avec les équations d'où elles sont déduites, on peut découvrir une règle générale, pour former ces valeurs, sans effectuer aucun calcul. En effet;

1°. L'équation $ax=b$, donne $x=\frac{b}{a}$; on voit donc que *le dénominateur est le coefficient de x et que le numérateur s'en déduit en changeant ce coefficient dans le terme tout connu b.*

2°. Si l'on compare les formules (4) et (5) du n° 128, avec les équations (1) et (2) du n° 126, on verra que *le dénominateur* ($ab'-ba'$) *est composé des coefficiens des inconnues x et y.* Pour obtenir ce dénominateur, il suffit de former les *permutations*, ab, ba, du produit ab; d'affecter la 1re du signe $+$, la 2e du signe $-$ et de mettre un *accent* à la seconde lettre de chaque *permutation*; le résultat est le dénominateur ($ab'-ba'$). *Les numérateurs, des valeurs de x et y, se déduisent de ce dénominateur, en y changeant le coefficient de l'inconnue qu'on cherche, dans le terme tout connu et conservant les accens.* Ainsi, pour former le numérateur de x, on changera a en c, dans ($ab'-ba'$); ce qui donnera ($cb'-bc'$). Changeant b en c, dans le dénominateur, $ab'-ba'$, le résultat ($ac'-ca'$), sera le numérateur de y.

3°. Dans le n° 129, si l'on compare les valeurs de x, y, z, données par les formules (4), (5), (6), avec les équations (1), (2), (3), on verra que *les valeurs des inconnues, dans trois équations entre trois inconnues, jouissent des mêmes propriétés. Le dénominateur commun n'est encore composé que des coefficiens des inconnues. Pour obtenir ce dénominateur, il suffit de former les six permutations, abc, acb, cab, bac, bca, cba, du produit abc; on les affecte alternativement des signes $+$ et $-$, en mettant un accent à la 2e lettre et deux accens à la 3e lettre; le résultat, $ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$, est le dénominateur commun des valeurs de x, y, z. Les numérateurs se déduisent de ce dénominateur, en changeant le coefficient de l'inconnue qu'on cherche, dans le terme tout connu et conservant les accens.* Par exemple, si dans le dénominateur commun, on change le coefficient a, de x, dans le terme tout connu d, le résultat, $db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''$, sera le numérateur de la fraction qui exprime x.

133. Remarque. *Pour que la règle précédente convienne à m équations entre m inconnues, il est indispensable de former les permutations des coefficiens des m inconnues, dans l'ordre que nous allons indiquer. On prend d'abord les arrangemens $+ab$, et $-ba$; dans chacun de ces arrangemens, on place la lettre c successivement à la 3e place, à la 2e et à la 1re, en ayant soin de donner à chaque première permutation de trois lettres, le signe de la permutation de deux lettres qui l'a fourni, et de changer alternativement les signes des autres permutations. Alors,*

$$+ab \text{ donne}, +abc, -acb, +cab;$$
$$-ba \text{ donne}, -bac, +bca, -cba.$$

Réunissant ces permutations, on trouve ....

$$+abc-acb+cab-bac+bca-cba,$$

On en déduit le dénominateur commun, en affectant la 2e lettre de chaque permutation d'un accent, et la 3e de deux accens.

*134. *Lorsque l'équation littérale du 1er degré à une seule inconnue, est possible, impossible ou indéterminée, la valeur générale de l'inconnue est finie, infinie, ou indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$; la réciproque a lieu.* En effet; toute équation du 1er degré à une seule inconnue, peut être ramenée à la forme....

$$(1)\ldots\ ax=b;\ d'où\ (2)\ldots\ x=\frac{b}{a}\ \text{et}\ (3)\ldots\ \frac{b}{x}=a.$$

1°. *Quand l'équation* (1), *est possible*, il existe un nombre p, qui, mis au lieu de x, la rend *identique*. Donc, $ap=b$; d'où $\frac{b}{a}=p$. *La formule* (2) *donne donc pour x, la valeur finie p.*

Réciproquement, *lorsque la formule* (2) *donne une valeur finie de x*, $\frac{b}{a}$ est un nombre, et la substitution de $\frac{b}{a}$, pour x, dans l'équation (1), conduit à l'identité $b=b$; *l'équation est donc possible.*

2°. *Quand l'équation est impossible*, le produit ax, ne peut jamais devenir égal à b; il faut donc que a soit zéro et que b ne soit pas nul, car dans toute autre hypothèse, l'équation (1) serait possible. *La valeur* de x, donnée par la formule (2), *est donc infinie* (n° 118).

Réciproquement, *lorsque la formule* (2) *donne une valeur infinie de x*; $a=0$ et b est un nombre. *L'équation* (1), qui devient $0\times x=b$, *est donc impossible.*

La valeur infinie de x indique que l'erreur sera d'autant moindre, que x sera plus grand. En effet; quand $a=0$, l'équation (3) donne $\frac{b}{x}=0$; or b n'est pas nul; donc, tant que x sera fini, $\frac{b}{x}$ ne sera pas égal à zéro, et l'erreur sera $\frac{b}{x}$; mais cette errreur sera d'autant moindre que x sera plus grand; et il sera toujours possible d'assigner une valeur de x assez grande, pour que l'erreur $\frac{b}{x}$, soit aussi petite que l'on voudra.

3°. *Quand l'équation* (1) *est indéterminée*, des valeurs arbitraires de x doivent y satisfaire; or $x=0$, donne $b=0$; b doit donc être nul. L'équation (1) se réduit donc à, $ax=0$; mais cette dernière équation doit être vraie quel que soit x; il faut donc que $a=0$. Et en effet, quand a et b sont nuls; l'équation (1) donne l'*identité*, $0\times x=0$, ou $0=0$, dans laquelle x reste indéterminé (n° 311). *La valeur indéterminée de x, donnée par la formule* (2), *est* $\frac{0}{0}$.

Réciproquement, *lorsque la valeur de x, donnée par la formule* (2), *est* $\frac{0}{0}$, *l'équation* (1) *est indéterminée*, car a et b étant nuls, on peut donner des valeurs arbitraires à x.

* 135. La résolution des équations déterminées du premier degré entre plusieurs inconnues, conduisant à une équation à une seule inconnue, *les propriétés énoncées dans le* n° 134, *doivent convenir à m équations du premier degré entre m inconnues*. On pourra s'en convaincre dans les n^os^ 136, 137 et 138.

* 136. *Quand deux équations littérales du premier degré entre deux inconnues, sont possibles, impossibles ou indéterminées, les formules générales donnent, pour les inconnues, des valeurs finies, infinies, ou indéterminées de la forme* $\frac{0}{0}$; *et réciproquement, lorsque les formules générales donnent, pour les inconnues, des valeurs finies, infinies, ou indéterminées de la forme* $\frac{0}{0}$; *les équations sont possibles, impossibles ou indéterminées*. En voici la preuve. Les équations................. (1)... $ax+by=c$, (2)... $a'x+b'y=c'$, ont donné (n° 126)..........

$$(3)\ldots x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\ (4)\ldots y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

1°. *Quand le système des équations* (1) *et* (2) *est possible*, il existe des nombres p et q, qui substitués pour x et y, rendent ces équations *identiques*. On a donc...... $ap+bq=c$ et $a'p+b'q=c'$. D'où...........

$$p=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ \text{et}\ q=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Les formules (3) *et* (4), *donnent donc des valeurs finies de x et y.*

Réciproquement, *si les valeurs de x et y, données par les formules* (3) *et* (4), *sont finies, le système des équations* (1) *et* (2) *sera possible, c'est-à-dire que ces équations admettront une solution commune*, car la substitution de ces valeurs dans ces équations, conduit aux identités, $c=c$, $c'=c'$.

2°. *Lorsque les équations* (1) *et* (2) *sont incompatibles, les formules* (3) *et* (4), *conduisent à des valeurs infinies de x et y*. En effet; ces équations donnent..... $y=\frac{c-ax}{b}$ et $y=\frac{c'-a'x}{b'}$; aucune valeur de x ne peut donc satisfaire à l'équation, $\frac{c-ax}{b}=\frac{c'-a'x}{b'}$. Or cette dernière équation donne $(ab'-ba')x=(cb'-bc')$. Il faut donc que $ab'-ba'=0$ et que $cb'-bc'$ ne soit pas nul (n° 134. 2°). Par la même raison, les valeurs de x, déduites des équations (1) et (2), ne pouvant pas être égales, on verra que $(ac'-ca')$ n'est pas nul. Les formules (3) et (4) donnent donc des valeurs infinies de x et y.

Les valeurs infinies de x et y, indiquent qu'aucuns nombres ne peuvent satisfaire aux équations (1) *et* (2), *mais que l'erreur sera d'autant moindre, que x et y seront plus grands.* En effet; ces équations donnent......

$$\frac{cb'-bc'}{x}=ab'-ba'; \quad \frac{ac'-ca'}{y}=ab'-ba'.$$

Le second membre de chaque équation étant zéro, le 1er membre doit être nul. Or les numérateurs $(cb'-bc')$, $(ac'-ca')$, ne sont pas nuls; aucunes valeurs finies de x et y ne pourront donc satisfaire à ces équations. Mais plus x et y seront grands, plus les premiers membres approcheront de zéro, plus l'erreur sera petite. *Les formules* (3) *et* (4), *ont donc le double avantage d'indiquer l'erreur, et de faire connaître comment on peut la rendre aussi petite que l'on veut.*

Réciproquement, *lorsque les formules générales* (3) *et* (4), *donnent des valeurs infinies pour x et y, les équations* (1) *et* (2) *sont incompatibles.* En effet; quand les valeurs de x et y sont infinies, le dénominateur commun $(ab'-ba')$ est zéro, et les numérateurs $(cb'-bc')$, $(ac'-ca')$, ne sont pas nuls. On a donc, $ab'-ba'=0$, $cb'-bc'=n$, $ac'-ca'=n'$; n et n' désignent des quantités positives ou négatives, qui ne sont pas nulles. L'équation $ab'-ba'=0$, donne $a=\frac{ba'}{b'}$, $b=\frac{ab'}{a'}$. Mettant successivement les valeurs de a et b, dans l'équation (1), on trouve $b\,(a'x+b'y)=cb'$ et $a\,(a'x+b'y)=ca'$. Mais, en vertu de l'équation (2), il faut que..... $a'x+b'y=c'$; on aurait donc, $bc'=cb'$ et $ac'=ca'$; d'où $n=0$ et $n'=0$. Ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle. Les équations (1) et (2) sont donc contradictoires.

3°. *Quand les équations* (1) *et* (2) *sont indéterminées, les formules* (3) *et* (4) *donnent des valeurs indéterminées de x et y de la forme $\frac{0}{0}$.* En effet; les équations (1) et (2), admettant une infinité de solutions, la valeur de x doit être indéterminée; mais on a vu (no 136. 2o), que cette valeur dépendait de l'équation $(ab'-ba')\,x=(cb'-bc')$. Donc, $ab'-ba'=0$, et $cb'-bc'=0$ (no 134. 3o). On en déduit, $ac'-ca'=0$. Les formules (3) et (4) donnent donc des valeurs indéterminées de x et y, de la forme $\frac{0}{0}$.

Réciproquement, *lorsque les formules* (3) *et* (4), *donnent pour x et y des valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$, les équations* (1) *et* (2) *sont indéterminées.* En effet; dans l'hypothèse actuelle, $ab'-ba'=0$ et $cb'-bc'=0$; d'où, $ac'-ca'=0$, $a=\frac{ba'}{b'}$ et $c=\frac{bc'}{b'}$. La substitution de ces valeurs de a et c, dans l'équation (1), donne, (2)... $a'x+b'y=c'$. L'équation (2) n'est donc qu'une conséquence de l'équation (1); les valeurs de x et y ne sont donc assujeties qu'à satisfaire à l'équation (1); elles sont donc indéterminées (n° 81); les équations (1) et (2) sont donc indéterminées.

* 137. Si l'on avait, $c=0$ et $c'=0$, les équations (1) et (2) deviendraient (5).... $ax+by=0$, (6).... $a'x+b'y=0$ et les formules (3), (4), donneraient... (7).... $x=\frac{0}{ab'-ba'}$, $y=\frac{0}{ab'-ba'}$.

Dans ce cas; 1°. *lorsque* $(ab'-ba')$ *n'est pas nul, les formules* (7) *donnent* $x=0$ *et* $y=0$; *ces valeurs sont les seules qui satisfassent aux équations* (5) *et* (6), *et le rapport* $\frac{y}{x}$, *qui se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$, *est indéterminé*; 2°. *quand* $(ab'-ba')=0$, *les formules* (7) *donnent* $x=\frac{0}{0}$ *et* $y=\frac{0}{0}$; *ces valeurs de* x *et* y *sont indéterminées, mais le rapport* $\frac{y}{x}$, *a pour valeur déterminée* $-\frac{a}{b}$. En effet; l'équation (5), donne $\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}$; on satisfera à cette condition, en posant, ... (8) ..... $y=-at$ et $x=bt$. Les équations (5) et (6) deviendront...... (9) ... $(ab-ab)t=0$, $(ab'-ba')t=0$; soit $\frac{y}{x}=z$; les équations (5) et (6), donneront (10)... $(a+bz)x=0$; (11)... $(a'+b'z)x=0$.

Cela posé; 1°. quand $(ab'-ba')$ *n'est pas zéro*, la seule manière de satisfaire aux équations (9), est de prendre $t=0$; les équations (8) donnent alors, $x=0$ et $y=0$; les équations (10) et (11) sont donc satisfaites quel que soit z; *la valeur de* $\frac{y}{x}$, *reste donc indéterminée*; x *et* y *sont nuls*.

2°. *Lorsque* $ab'-ba'=0$, les équations (9) sont satisfaites, quel que soit t; *les valeurs de* x *et* y, fournies par les équations (8), *sont donc indéterminées*. Les équations (10) et (11) devant exister, quel que soit x, il faut que, $a+bz=0$, $a'+b'z=0$; d'où $z=-\frac{a}{b}$ et $z=-\frac{a'}{b'}$. Ces valeurs de z doivent donc être égales; et en effet, dans l'hypothèse actuelle, $ab'=ba'$; d'où $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$; *la valeur déterminée de* $\frac{y}{x}$ *est donc* $-\frac{a}{b}$. Pour concevoir comment x et y peuvent être indéterminés dans les équations (5) et (6), quand $(ab'-ba')=0$, il suffit d'observer que cette condition donnant $a=\frac{ba'}{b'}$, l'équation (5) devient $a'x+b'y=0$; l'équation (6) n'est donc qu'une conséquence de l'équation (5); les valeurs de x et y ne sont donc assujéties qu'à satisfaire à l'équation (5); elles sont donc indéterminées (n° 81); et leur rapport, tiré de l'équation (5), est $\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}$.

* 138. *L'analyse des racines* (n° 202), *des équations du premier degré entre*

deux inconnues, convient à m équations du premier degré entre m inconnues, car ces équations conduisant à deux équations du 1er degré entre deux inconnues, on peut leur appliquer les principes des nos 136 et 137. Les élèves devront s'exercer sur trois équations entre trois inconnues. Nous nous bornerons à discuter les équations.....

$(10)\ldots ax+by+cz=0;\ (11)\ldots\ a'x+b'y+c'z=0;(12)\ldots a''x+b''y+c''z=0.$

Dans les formules (4), (5), (6), du no 129, $d,\ d',\ d''$, étant nuls, les numérateurs de $x, y,\ z$, sont zéro. Le dénominateur commun, que nous désignerons par D, est $ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=D.$

Cela posé; 1°. *lorsque D n'est pas zéro, les formules* (4), (5), (6), *donnent*, $x=0$, $y=0$, $z=0$. *Ces valeurs de, x, y, z, sont les seules qui puissent satisfaire aux équations proposées, et les rapports*, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, *qui se présentent sous la forme* $\frac{0}{0}$, *sont indéterminés;* 2°. *quand D est nul, les formules* (4), (5), (6), *donnent*, $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, $z=\frac{0}{0}$; *les valeurs de, x, y, z, sont indéterminées; mais les rapports*, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, *sont déterminés; les valeurs de ces rapports se déduisent des équations* (10) *et* (11). En effet; soit (13)... $\frac{x}{z}=x'$ et $\frac{y}{z}=y'$; les équations, (10), (11), (12), deviendront...

$(14)..(ax'+by'+c)z=0;(15)..(a'x'+b'y'+c')z=0;(16)..(a''x'+b''y'+c'')z=0.$

On satisfait à ces équations en posant....

$(17)\ldots ax'+by'+c=0;(18)\ldots a'x'+b'y'+c'=0;(19)\ldots a''x'+b''y'+c''=0.$

Les équations (17) et (18), donnent....

$$(20)\ldots\ x'=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}=\frac{x}{\ }\ ;\ y'=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}=\frac{y}{z}.$$

Les valeurs de, x, y, z, qui satisferont aux équations (20), et par conséquent aux équations (10) et (11), seront..

$$(21)\ldots\ x=(bc'-cb')\,t;\ y=(ca'-ac')\,t;\ z=(ab'-ba')t.$$

Mais ces valeurs doivent aussi satisfaire à l'équation (12). Il faut donc que t, satisfasse à l'équation.....

$$a''(bc'-cb')\,t+b''(ca'-ac')\,t+c''(ab'-ba')\,t=0.$$

Or, cette dernière équation se réduit à $Dt=0$. *La possibilité des équations*, (10), (11), (12), *ne dépend donc que de l'équation* $Dt=0$. Cela posé :

1°. *Lorsque D n'est pas zéro*, la seule manière de satisfaire à l'équation $Dt = 0$, est de prendre $t = 0$; les équations (21) donnent, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; et dans les équations, (14), (15), (16), z étant zéro, x' et y' restent indéterminées. *Les rapports*, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, *sont donc indéterminés et*, x, y, z, *sont nuls.*

2°. *Quand D est nul*, l'equation $Dt = 0$, est vraie, quel que soit t; *les valeurs de*, x, y, z, fournies par les équations (21), *sont donc indéterminées.* Les équations (14), (15), (16), devant subsister, quel que soit z, il faut que x' et y' satisfassent aux équations (17), (18), (19). Les formules (20) expriment les valeurs de x' et y', tirées des deux premières équations. La substitution de ces valeurs dans l'équation (19), donne $D = 0$; équation qui est vraie par hypothèse. Les valeurs de x' et y', qui satisfont aux équations proposées, sont donc données par les équations (20); de sorte que *les rapports* $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, *sont déterminés* (*).

On peut démontrer directement que, *lorsque $D = 0$, les valeurs de* x, y, z, *qui satisfont aux équations* (10), (11), (12), *doivent être indéterminées.* En effet; l'équation $D = 0$, donne.....

$$(22)\ldots\ a''\left(\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}\right) + b''\left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) + c'' = 0.$$

Mais les équations (10) et (11) donnent.....

$$(23)\ldots\ \frac{x}{z} = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}\ \text{et}\ \frac{y}{z} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'};$$

(*) Pour en donner un exemple, nous résoudrons ce problème : *Connaissant les trois angles*, a, b, c, *d'un triangle rectiligne*, *déterminer les côtés opposés*, x, y, z (Trigonométrie analytique, n° 80). Tous les triangles semblables ayant leurs angles respectivement égaux et leurs côtés homologues proportionnels, le problème est indéterminé; les côtés, x, y, z, du triangle demandé, sont indéterminés, mais les rapports de ces côtés sont déterminés. Et en effet, x, y, z, dépendent des équations (Trig. n° 124),

$$-x + y\cos c + z\cos b = 0;\ x\cos c - y + z\cos a = 0;\ x\cos b + y\cos a - z = 0.$$

Si l'on compare ces équations avec les équations, (10), (11), (12), la valeur de D deviendra, $D = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1 + 2\cos a\cos b\cos c$.

Il s'agit donc de prouver que cette valeur de D est nulle. Mais...
$a + b + c = 180°$. D'où, $\cos a = -\cos(b + c) = \sin b\sin c - \cos b\cos c$.

Substituant cette valeur de $\cos a$, dans celle de D, on trouvera

$$D = \sin^2 b\sin^2 c - (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c).$$

Or, $1 - \cos^2 b = \sin^2 b$ et $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$; la valeur de D se réduit donc à zéro.

l'équation (22) devient donc.....

$$a''\left(\frac{x}{z}\right)+b''\left(\frac{y}{z}\right)+c''=0, \text{ ou } a''x+b''y+c''z=0.$$

L'équation (12) n'est donc qu'une conséquence des équations (10) et (11); les valeurs de, x, y, z, ne sont donc assujéties qu'à satisfaire aux équations (10) et (11); ces valeurs sont donc indéterminées (nº 81). *Les rapports,* $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, *sont alors déterminés par les équations* (23).

139. Ce qui précède conduit à cette règle générale : 1º. *Lorsqu'on a, m équations du premier degré entre m inconnues, on en déduit les valeurs de ces inconnues; chaque inconnue n'a qu'une seule valeur.* (Nous avons analysé les exceptions dont cette règle est susceptible). *Etant donné m équations du premier degré entre* $(m+n)$ *inconnues, on peut assigner des valeurs arbitraires à n inconnues*, car il reste m inconnues, avec lesquelles on satisfait aux m équations; 3º. *enfin, étant donné* $(m+n)$ *équations entre m inconnues, on satisfera à m équations avec les m inconnues, et les valeurs de ces inconnues, substituées dans les n autres équations, donneront n équations de condition, entre les données. La possibilité des équations proposées, dépendra de l'existence de ces n équations de condition.*

* 140. Problème. *Déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficiens des inconnues et les termes tout connus, pour que des équations admettent des valeurs données des inconnues?* Si l'on substitue les valeurs des inconnues, les équations qui en résulteront exprimeront les relations demandées. Par exemple, pour que $x=2$ et $y=3$, satisfassent aux équations (1).. $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$, il faut que (2).. $2a+3b=c$, $2a'+3b'=c'$. On peut donc donner des valeurs arbitraires aux coefficiens a, b, a', b'; soit $a=3$, $b=7$, $a'=30$, $b'=60$; les équations (2) donneront, $c=27$, $c'=240$. *Il existe donc une infinité d'équations qui admettent les mêmes valeurs des inconnues.*

Théorie des inégalités.

* 141. *Quand on n'a égard qu'aux valeurs absolues des quantités, on peut traiter les inégalités d'après les principes établis pour les équations; car en effectuant les mêmes opérations sur des quantités inégales, le plus grand résultat doit correspondre à la plus grande quantité. Mais on commettrait souvent des erreurs, en appliquant ce principe aux valeurs relatives des deux membres d'une inégalité.* Si l'on combine les principes des nºs 29, 36 et 52, on démontrera facilement que les inégalités jouissent des propriétés suivantes : 1º. *Une inégalité n'est pas troublée, lorsqu'on ajoute à ses deux membres ou qu'on en retranche, une même quantité.* De sorte que, *pour faire passer un terme d'un membre*

dans un autre, il suffit d'en changer le signe. Par conséquent, *lorsqu'on change les signes des deux membres d'une inégalité, on doit renverser le signe d'inégalité;* 2°. *on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité, par une quantité positive, et quand la quantité par laquelle on multiplie ou l'on divise est négative, il faut renverser le signe d'inégalité;* 3°. *lorsqu'on divise une quantité positive, par chaque membre d'une inégalité, si les deux membres ont des signes semblables, il faut renverser le signe d'inégalité, et s'ils ont des signes différens, il faut conserver le signe d'inégalité; l'inverse a lieu quand le dividende est négatif;* 4°. *ayant plusieurs inégalités, si l'on ajoute les plus petits membres entr'eux, ainsi que les plus grands, la plus petite somme correspondra aux plus petits membres;* 5°. *lorsque les membres de plusieurs inégalités sont positifs, si l'on multiplie les plus petits membres entr'eux, ainsi que les plus grands, le premier produit sera plus petit que le second;* 6°. *quand les deux membres d'une inégalité sont positifs, on peut les élever à une puissance positive quelconque, sans troubler l'inégalité.* La manière de *résoudre les inégalités*, se déduit de ces propriétés. Par exemple, l'inégalité.....

$$7x - \frac{23}{3} > \frac{2}{3}x + 5, \text{ donne } 21x - 23 > 2x + 15;\ 19x > 38;\ x > 2.$$

* 142. Ainsi, *une inégalité en x, donne une* LIMITE (**) *de l'inconnue x, tandis qu'une équation en x, donne la valeur de cette inconnue.*

* 143. *Le système de deux inégalités en x, donne deux limites de x, et le problème, qui conduit à ces inégalités, peut être indéterminé, déterminé ou impossible.* En voici des exemples. (x désignera toujours l'inconnue).

* 144. *Le double d'un nombre, diminué de 5, est plus grand que 25 et le triple du même nombre, diminué de 7, est plus petit que son double, augmenté de 13. Quel est ce nombre?* Les deux conditions du problême donnent.....

$2x - 5 > 25$ et $3x - 7 < 2x + 13$. On en déduit, $x > 15$ et $x < 20$.

On peut donc prendre pour x tous les nombres, entiers et fractionnaires, compris entre 15 et 20.

* 145. *Un berger, interrogé sur le nombre de ses moutons, répond: ce nombre est tel, que son double diminué de 5, est plus grand que 25, et que son triple, diminué de 7, est plus petit que son double augmenté de 13. Quel est le nombre des moutons?* On trouvera, $x > 15$ et $x < 20$. Ces inégalités admettent une infinité de solutions; mais comme la nature du problème impose à l'inconnue x, la condition d'être un nombre entier positif, le nombre des moutons ne peut être que, 16, 17, 18 ou 19.

(**) Par *limite* de x, nous entendons ici une quantité plus grande ou plus petite que x.

* 146. *Une femme porte des oranges au marché. Le nombre des oranges est tel, que son triple augmenté de 2, est plus grand que son double augmenté de 61, et son quintuple diminué de 70, est plus petit que son quadruple diminué de 9. Quel était le nombre des oranges?* On trouvera, $x > 59$ et $x < 61$. La femme portait donc 60 oranges.

* 147. *Le double d'un nombre, diminué de 5, est plus petit que 25 et son triple, diminué de 7, est plus grand que son double augmenté de 13. Quel est ce nombre?* Ce problème n'admet aucune solution, car il donne, $x < 15$ et $x > 20$.

* 148. *Lorsqu'on ne peut pas déterminer directement la valeur d'une inconnue x, on a quelquefois recours aux inégalités, pour démontrer que x ne peut être ni plus grand, ni plus petit, qu'une quantité connue $\mathcal{C}$; on en déduit $x = \mathcal{C}$.* Par exemple, *si le double d'un nombre, augmenté de 7, ne peut surpasser 19, et si le triple du même nombre, diminué de 5, ne peut être moindre que 13, on en conclura que ce nombre est 6.* En effet; si l'on prend le signe $\not>$, pour indiquer qu'une quantité *ne peut pas être plus grande* qu'une autre quantité; on aura... $2x + 7 \not> 19$ et $3x - 5 \not< 13$. On en déduira $x \not> 6$ et $x \not< 6$. Donc, $x = 6$.

Analyse indéterminée.

149. *Toute équation numérique du premier degré entre deux inconnues, peut être ramenée à la forme, $a'x + b'y = c'$; a', b', c', désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs* (n° 78). *Cette équation admet une infinité de solutions* (n° 81). Il s'agit de *découvrir les solutions en nombres entiers.* De sorte que, a', b', c', x et y, seront des nombres entiers, positifs ou négatifs. Si l'on divise, a', b' et c', par leur plus grand commun diviseur (A, n° 61), les quotiens, a, b, c, seront premiers entr'eux, et la question sera réduite à *trouver les solutions entières* (**) *de l'équation.....*

(1)... $ax + by = c$. (*a, b, c, sont premiers entr'eux*).

150. *Lorsque a et b auront un facteur commun d; x et y ne pourront pas être des nombres entiers.* En effet; si x et y étaient des nombres entiers, la division de $ax + by$, par d, donnerait pour quotient un nombre entier, qui serait égal à la fraction irréductible $\frac{c}{d}$ (A, n° 368); ce qui est absurde. Nous supposerons donc toujours que, a, b, c, étant premiers entr'eux, a et b n'ont aucuns facteurs communs.

151. Pour *trouver les solutions entières de l'équation* (1), on observera que *le problème serait résolu, si l'un des coefficiens des inconnues était*

(**) Par *solutions entières*, il faut entendre les nombres entiers qui mis au lieu de x et y, satisfont à l'équation (1).

l'unité. Par exemple, $b=1$, donne $y=c-ax$, et chaque valeur entière de x, détermine une valeur entière de y. On ne peut plus suivre le même procédé, quand a et b sont plus grands que l'unité; mais *il est toujours possible de faire dépendre la résolution de l'équation proposée, de celle d'une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues est l'unité*. En effet; b et a étant premiers entr'eux (nº 150), b est nécessairement plus petit ou plus grand que a.

152. 1er *Cas*. Quand b est moindre que a, on tire de l'équation (1)....

$$(2)\ldots\ldots\; by=c-ax \text{ et } y=\frac{c-ax}{b}.$$

On pourrait extraire de cette fraction, tous les entiers qu'elle renferme, en divisant c et a par b; mais comme le seul but de ces divisions est de réduire le coefficient d'une inconnue à l'unité, on abrège le calcul en n'effectuant la division que sur le terme ax. Divisant donc a par b, on obtient un quotient q et un reste r; on a, $a=bq+r$ et $r<b$. Donc........

$$y=\frac{c-ax}{b}=\frac{c-(bq+r)x}{b}=-qx+\frac{c-rx}{b}.$$

Or, x est un nombre entier. Par conséquent, pour que y soit entier, il suffit et il faut que $\frac{c-rx}{b}$, soit un nombre entier e. Donc...

$$\frac{c-rx}{b}=e;\text{ d'où}\ldots y=-qx+e;\,(3)\ldots rx=c-be;\; x=\frac{c-be}{r}.$$

Lorsque $r=1$, le problème est résolu; car en donnant à e des valeurs entières, les équations, $x=c-be$, $y=-qx+e$, donnent des nombres entiers pour x et y. Quand r n'est pas l'unité, on opère sur l'équation (3) comme sur l'équation (2), et la difficulté est diminuée, car on veut parvenir à un coefficient égal à l'unité, et dans les équations (3) et (2), le coefficient r, de x, est moindre que le coefficient b, de y. La division de b par r, donne un quotient q' et un reste r'; on a, $b=rq'+r'$ et.....

$$x=\frac{c-be}{r}=\frac{c-(rq'+r')e}{r}=-q'e+\frac{c-r'e}{r},$$

Pour que x soit entier, il suffit et il faut que $\frac{c-r'e}{r}$ soit un entier e', car $q'e$ est un nombre entier. Donc.....

$$\frac{c-r'e}{r}=e';\text{ d'où}\ldots x=-q'e+e';\,(4)\ldots r'e=c-re';\; e=\frac{c-re'}{r'};$$

Quand $r'=1$, le problème est résolu; car en donnant à e' des valeurs entières, les équations.....

$$(5)\ldots\ldots\; e=c-re',\; x=-q'e+e',\, y=-qx+e,$$

donnent des valeurs entières de, e, x et y. Lorsque r' n'est pas l'unité, on opère sur l'équation (4), comme sur les équations (2), (3), et l'on divise r par r'. Mais, sans pousser plus loin les calculs, on peut observer qu'ils se réduisent à chercher le plus grand commun diviseur entre a et b (A, nº 58). Or, a et b sont premiers entr'eux (nº 150); on parviendra donc à un *reste* égal à l'unité. Mais, les *restes* successifs, r, r', etc., sont les coefficiens des inconnues dans les équations (3), (4), etc. On parviendra donc toujours à une équation dans laquelle le coefficient d'une inconnue sera l'unité. Le problème est donc résolu. Par exemple, soit $r'=1$; on aura, $b=rq'+1$, $e=c-re'$, et les équations (5) donneront,

$$x=e'-q'e=e'-q'(c-re')=(rq'+1)e'-cq'=be'-cq'.$$
$$y=e-qx=(c-re')-q(be'-cq')=(1+qq')c-(r+bq)e'.$$

Supposant, $1+qq'=p$, et observant que $r+bq=a$, on aura......

$$(6)\ldots\quad x=be'-cq';\ y=-ae'+cp;\ p=1+qq'.$$

e' *est une indéterminée*, car dans l'équation (2), la valeur de y dépend de la valeur arbitraire de x; dans l'équation (3), x dépend de la valeur arbitraire de e; et dans l'équation (4), e dépend de la valeur arbitraire que l'on donne à e'. On peut d'ailleurs démontrer directement que e' étant quelconque, les valeurs de x et y, données par les formules (6), satisferont toujours à l'équation (1); car en substituant ces valeurs dans l'équation (1) et observant que l'on a.....

$$p=1+qq',\ b=rq'+1,\ a=bq+r=(rq'+1)q+r,$$

on sera conduit à l'équation, $0\times e'=0$, qui est vraie, quel que soit e'.

153. *Toutes les valeurs entières de x et y, qui satisfont à l'équation* (1), *se déduisent des formules* (6), *en donnant successivement à l'indéterminée e', les valeurs*, 0, 1, 2, 3, *etc.*, -1, -2, -3, etc. Cela se réduit à prouver que lorsque e' est entier, x et y sont entiers, et que lorsque, x, y, sont entiers, e' est entier. Or les équations (5) démontrent que e' étant un nombre entier, e, x et y sont des nombres entiers. Ces équations donnant... $e=y+qx$, $e'=x+q'e$, on voit que lorsque x et y sont entiers, e et e' sont entiers. Le principe est donc démontré.

154. *Quand on connaît une solution de l'équation* (1), *on peut en déduire toutes les autres solutions*, car les formules (6) démontrent que si e' augmente de l'unité, x et y augmenteront respectivement de $+b$ et de $-a$. Par conséquent, si $x=\alpha$ et $y=\beta$, satisfont à l'équation (1), $x=\alpha+b$ et $y=\beta-a$, satisferont à la même équation, et n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,............... (7)... $x=\alpha+nb$ et $y=\beta-na$, sera une solution de l'équation (1). *Connaissant donc la solution*, $x=\alpha$, $y=\beta$, *toutes les solutions de l'équation* (1) *se déduiront des formules* (7), *en donnant à n les valeurs* 0, 1, 2, *etc.*, -1, -2, *etc.* On peut *démontrer directement cette*

propriété. En effet; si $x=\alpha$ et $y=\beta$, satisfont à l'équation,......... (1)... $ax+by=c$, on aura $a\alpha+b\beta=c$. Egalant ces deux valeurs de c, on trouvera, $y-\beta=-\frac{a(x-\alpha)}{b}$. Or, b et a sont premiers entr'eux, et $y-\beta$ est entier; $\frac{x-\alpha}{b}$ doit donc être un nombre entier n (A, n° 369). Donc, $x-\alpha=bn$ et $y-\beta=-an$. On en déduit, ...
$x=\alpha+bn$ et $y=\beta-an$.

Ce qui démontre le principe énoncé.

155. 2e *Cas.* Lorsque b sera plus grand que a, on tirera la valeur de x de l'équation (1), et l'on opérera comme dans le premier cas; ce qui conduira à des résultats de même forme.

156. D'après ce qui précède, l'équation (1) admet une infinité de solutions entières, quand a, b, c, n'ayant aucuns facteurs communs, a et b sont premiers entr'eux. Mais, *lorsque x et y doivent être des nombres entiers positifs, le nombre des solutions dépend des grandeurs et des signes de, a, b, c.* En effet; on peut toujours supposer a positif (*); il suffit donc de considérer les équations, ...

$$ax+by=c,\quad ax-by=c,\quad ax-by=-c,\quad ax+by=-c.$$

157. *En n'admettant pour x et y que des nombres entiers positifs*, on voit que *la 1re équation n'est susceptible que d'un nombre déterminé de solutions*, car la somme des nombres positifs ax et by, devant être égale à c, les parties de cette somme ne peuvent pas croître indéfiniment. *La 2e équation et la 3e, peuvent admettre une infinité de solutions*, car les nombres ax et by croissant indéfiniment, leur différence peut conserver la même valeur c. Enfin, *la dernière équation est absurde*, car la somme des nombres positifs, ax, by, ne peut être égale au nombre négatif $-c$.

* 158. *Les formules* (6) *démontrent les mêmes propriétés.* En effet; 1°. *quand b et c sont positifs*, les équations (6) font voir que e' doit être un nombre entier positif, plus grand que $\frac{cq'}{b}$ et moindre que $\frac{cp}{a}$. Donc, $\frac{cq'}{b}<\frac{cp}{a}$; d'où $aq'<bp$. *Cette inégalité a toujours lieu*, car en y substituant les valeurs de, p, b, a, (n° 152, page 65), elle se réduit à, $0<1$. *On obtiendra donc toutes les solutions entières positives de l'équation* (1), *en donnant à l'indéterminée e', les valeurs entières positives comprises entre $\frac{cq'}{b}$ et $\frac{cp}{a}$.* Ainsi, *le problème sera toujours possible, quand il tombera un ou plusieurs nombres entiers entre $\frac{cq'}{b}$ et $\frac{cp}{a}$*;

(*) Si a était négatif, on changerait les signes de tous les termes.

le problème sera impossible, quand il ne tombera pas de nombre entier entre $\frac{cq'}{b}$ *et* $\frac{cp}{a}$; 2°. *lorsque b est négatif et c positif*, on a.........

$$ax - by = c, \ x = -be' - cq', \ y = -ae' + cp.$$

Tant que e' sera positif, x sera négatif; on doit donc supposer, $e' = -e''$, $e'' > 0$. D'où $x = be'' - cq'$ et $y = ae'' + cp$. Donnant à e'' des valeurs entières, plus grandes que $\frac{cq'}{b}$, les valeurs correspondantes de x et y seront entières et positives; de sorte que *l'équation, $ax - by = c$, admet toujours une infinité de solutions entières positives;* 3°. on prouverait, par des raisonnemens analogues, que *l'équation $ax - by = -c$, jouit de la même propriété;* 4°. enfin, *si b étant positif, c était négatif*, l'équation (1) deviendrait $ax + by = -c$, et *aucunes valeurs positives de x et y ne pourraient satisfaire à cette dernière équation. Les formules* (6) *indiquent cette impossibilité*, car elles donnent... $x = be' + cq'$ et $y = -ae' - cp$. Or y doit être positif; donc $e' = -e''$, $e'' > 0$, $x = cq' - be''$, $y = ae'' - cp$. Pour que x et y soient positifs, il faut que e'' soit moindre que $\frac{cq'}{b}$ et plus grand que $\frac{cp}{a}$; ce qui est impossible (1°).

159. *L'équation* (1)... $\alpha x + \beta y = \gamma$, *jouit donc des propriétés suivantes. Lorsqu'on ne veut admettre pour x et y que des nombres entiers, il faut que, α, β, γ, n'ayant plus de facteur commun, α et β, soient premiers entr'eux. Quand cette condition est remplie, l'équation* (1) *admet une infinité de solutions entières. Les formules qui donnent ces solutions ne dépendent que de la recherche du plus grand commun diviseur entre α et β. Les valeurs de x et y, déduites de ces formules, sont les seules qui satisfassent à l'équation* (1), *et connaissant une solution, on peut en déduire toutes les autres. Lorsqu'on ne veut admettre pour x et y, que des nombres entiers positifs, le nombre des solutions dépend des signes de, α, β, γ; l'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$, n'admet qu'un nombre déterminé de solutions entières positives, quelquefois il n'en existe aucune; les équations, $\alpha x - \beta y = \gamma$, $\alpha x - \beta y = -\gamma$, admettent toujours une infinité de solutions; enfin, l'équation.... $\alpha x + \beta y = -\gamma$, n'en admet aucune.*

160. *Payer* 49#, *avec des pièces de* 5# *et de* 3#. Si l'on prend x pièces de 5# et y pièces de 3#, on aura $5x + 3y = 49$, et l'on ne pourra admettre que les valeurs entières positives de x et y. Comparant cette équation avec, $ax + by = c$, on aura $a = 5$, $b = 3$, $c = 49$. La division de a par b, donnera le quotient $q = 1$ et le *reste* $r = 2$; divisant b par r, on trouvera le quotient $q' = 1$ et le *reste* $r' = 1$; les formules (6), du n° 152, donneront, $x = 3e' - 49$, $y = 98 - 5e'$. On ne pourra donc donner à e' que les valeurs, 17, 18, 19, comprises entre $\frac{49}{3}$ et $\frac{98}{5}$.

On parviendra plus directement au même résultat, en appliquant la méthode du n° 152, à l'équation, $5x + 3y = 49$. Voici le calcul :

$$y = \frac{49 - 5x}{3} = -x + \frac{49 - 2x}{3} = -x + e\,;\ 49 - 2x = 3e\,;$$

$$x = \frac{49 - 3e}{2} = -e + \frac{49 - e}{2} = -e + e'\,;\ 49 - e = 2e'\,;\ e = 49 - 2e'\,;$$

d'où, $x = e' - e = 3e' - 49$ et $y = e - x = 98 - 5e'$.

Enfin, on peut abréger le calcul, en opérant de la manière suivante :

$$y = \frac{49 - 5x}{3} = -2x + \frac{49 + x}{3}\,;\ \text{soit}\ 49 + x = 3e\,;\ \text{on aura...}$$

$$x = 3e - 49\,;\ y = -2x + e = 98 - 5e.$$

* 161. *Les neuf Muses, portant chacune le même nombre de couronnes de fleurs, rencontrèrent les trois Grâces, et leur offrirent des couronnes. La distribution faite, les Grâces et les Muses avaient chacune le même nombre de couronnes. On demande combien les Muses portaient de couronnes et combien elles en donnèrent.* Si chaque Muse porte x couronnes et donne y couronnes ; les neuf Muses, qui avaient $9x$ couronnes, auront donné $9y$ couronnes, aux trois Grâces. La distribution faite, chaque Muse n'aura plus que $(x - y)$ couronnes ; les trois Grâces auront reçu $9y$ couronnes ; chacune portera donc $3y$ couronnes. Mais alors, chaque Muse et chaque Grâce, doit avoir le même nombre de couronnes ; donc.....

$$x - y = 3y\,;\ \text{d'où}\ 9x = 36y = \text{le nombre total des couronnes.}$$

Cette dernière équation démontre que tout multiple de 36 peut être pris pour le nombre des couronnes (A, n° 309).

* 162. Les élèves qui auront bien saisi l'esprit des méthodes précédentes, en déduiront facilement le moyen de trouver les valeurs entières des inconnues, lorsque le nombre des inconnues sera plus grand que celui des équations. Par exemple, *étant donné deux équations du premier degré entre trois inconnues, x, y, z, on peut toujours les ramener à la forme...*

$$(1)\ldots\ ax + by + cz = d\,;\ a'x + b'y + c'z = d'\,;$$

a, b, c, d, désignant des nombres entiers premiers entr'eux, ainsi que a', b', c', d'. Pour que ces équations admettent des valeurs entières de x, y, z, il faut que, a, b, c, soient premiers entr'eux, ainsi que a', b', c' (n° 150). Ces conditions étant remplies, on peut facilement trouver les valeurs entières des inconnues. A cet effet, on *élimine* z, entre les équations (1) ; ce qui conduit à un résultat de la forme $Ax + By = C$; A, B et C, désignant des nombres entiers premiers entr'eux. Pour que cette équation admette des valeurs entières de x et y, il faut que A et B soient premiers entr'eux (n° 150). Lorsque cette condition est remplie,

les valeurs de x et y sont données par les formules (2)... $x = \alpha + Be$, $y = \mathcal{C} - Ae$, dans lesquelles e est indéterminé. Mais, comme toutes les valeurs entières de x et y ne donnent pas des valeurs entières de z, on substitue les valeurs de x et y, dans l'une quelconque des équations (1); ce qui conduit à un résultat de la forme $A'z + B'e = C'$; les nombres entiers, A', B', C', n'ont aucun facteur commun, et pour que z et e puissent être des nombres entiers, il faut que A' et B' soient premiers entr'eux. Les valeurs entières positives de z et e, qui satisfont à cette équation, sont de la forme, $z = p'' + q''e'$; $e = \mathcal{C}' + A'e'$; (e' est une indéterminée). La substitution de cette valeur de e, dans les formules (2), conduit à des résultats de cette forme, $x = p + qe'$, $y = p' + q'e'$. De sorte que les valeurs de, x, y et z, qui satisfont aux équations (1), sont....

$$(3)\ldots\quad x = p + qe',\ y = p' + q'e',\ z = p'' + q''e'.$$

Dans ces formules, p, q, p', q', p'', q'', sont des nombres entiers, positifs ou négatifs; et l'on obtient toutes les solutions entières des équations (1), en donnant à l'indéterminée e', les valeurs 0, 1, 2, etc., -1, -2, etc. Si l'on applique cette méthode générale aux équations..

$$4x - 2y + 5z = 13,\ -3x + 5z + 7y = 10;\ \text{on trouvera...}$$
$$x = 3(15e' + 1),\ y = 35e' + 2;\ z = 1 - 22e'.$$

Les équations proposées n'admettent donc qu'une solution entière positive, $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

* 163. *Trois mobiles partent en même temps d'un même point de la circonférence, avec des vîtesses, v', v'', v'''. La longueur de la circonférence est c. Il s'agit de trouver les rencontres de ces mobiles, deux à deux et trois à trois. On suppose, $v'' > v'$ et $v''' > v''$.* Si la 1re rencontre du 2e mobile avec le 1er, a lieu dans m heures; ces mobiles auront alors parcouru $v''m$ et $v'm$ unités d'espace, et l'on aura. $v''m = v'm + c$; d'où, $m = \frac{c}{v'' - v'}$; la n^{ieme} rencontre des deux mobiles aura donc lieu dans $\frac{cn}{v'' - v'}$ heures. Le 3e mobile aura donc rencontré n' fois le 1er mobile, après $\frac{cn'}{v''' - v'}$ heures. Par conséquent, si les trois mobiles se rencontrent après x heures, on aura.....

$$(1)\ldots\quad x = \frac{cn}{v'' - v'}\ \text{et}\ x = \frac{cn'}{v''' - v'};\ \text{d'où}\ \frac{n}{n'} = \frac{v'' - v'}{v''' - v'}.$$

Les indéterminées n et n', devant être des nombres entiers, on réduira la fraction $\frac{v'' - v'}{v''' - v'}$, à sa plus simple expression $\frac{\alpha}{\mathcal{C}}$; et p désignant un nombre entier indéterminé, on aura.....

$$n = p\alpha,\ n' = p\mathcal{C}\ (A,\ \text{n}^\circ\ 366);\ \text{d'où}\ x = \frac{cp\alpha}{v'' - v'}.$$

Ainsi, *après* $\frac{cp\alpha}{v''-v'}$ *heures, le 2e mobile aura rencontré* $p\alpha$ *fois le 1er mobile, le 3e mobile aura rencontré* $p\beta$ *fois le 1er mobile, et les mobiles se seront rencontrés p fois, trois à trois.* Pour trouver le nombre des rencontres du 2e mobile avec le 3e, on observera que les équations (1) donnent.....

$$v''x - v'x = cn \text{ et } v'''x - v'x = cn'; \text{ d'où } x = \frac{c(n'-n)}{v'''-v''}.$$

Le nombre des rencontres du 2e mobile avec le 3e, sera donc $n'-n$, *ou* $p(\beta-\alpha)$. Donnant à p les valeurs, 1, 2, 3, etc., on obtiendra toutes les rencontres des mobiles. Ainsi, *la 1re rencontre des trois mobiles aura lieu dans* $\frac{c\alpha}{v''-v'}$ *heures; le 2e mobile aura rencontré* α *fois le 1er mobile, le 3e mobile aura rencontré* β *fois le 1er mobile, et le 2e mobile aura rencontré* $(\beta-\alpha)$ *fois le 3e mobile.*

* 164. *Une montre indique les heures, les minutes et les secondes. Les trois aiguilles sont sur la 12e heure. Il s'agit de trouver les rencontres de ces aiguilles, deux à deux et trois à trois.* Le cadran contient 60 divisions; pendant une heure, les aiguilles parcourent respectivement, 5, 60 et 3600 divisions. Comparant donc les énoncés des problèmes des nos 163 et 164, on aura.....

$$v' = 5,\ v'' = 60,\ v''' = 3600;\ c = 60. \text{ D'où.....}$$
$$\frac{v''-v'}{v'''-v'} = \frac{55}{3595} = \frac{11}{719} = \frac{\alpha}{\beta};\ \alpha = 11,\ \beta = 719;\ \frac{c\alpha}{v''-v'} = 12.$$

Ainsi, *la 1re rencontre des trois aiguilles n'aura lieu que dans 12 heures; l'aiguille des minutes aura rencontré 11 fois celle des heures, l'aiguille des secondes aura rencontré 719 fois celle des heures, et l'aiguille des minutes aura rencontré 708 fois celle des secondes.*

Equations du second degré.

165. Toute *équation du second degré à une seule inconnue*, peut se ramener à la forme, $x^2 + 2px - q = 0$, (no 79) (*). Pour graduer les difficultés, nous résoudrons d'abord l'équation $x^2 = \alpha$. Il s'agit de *trouver une quantité qui multipliée par elle-même, donne un produit égal à* α. Cette quantité, est la *racine quarrée* de α; on l'indique de cette manière $\sqrt[2]{\alpha}$, (no 12).

(*) Par exemple, l'équation $2x^2 - \frac{11}{3}x = -\frac{9}{3}$, donne...
$x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{9}{6} = 0$; dans ce cas, $2p = -\frac{11}{6}$ et $q = -\frac{9}{6}$.

De sorte que *le produit de* $\sqrt[2]{a}$ *par* $\sqrt[2]{a}$, *est égal à* a (*). Nous sommes donc conduits à examiner comment on peut *extraire la racine quarrée* de la quantité connue a. Cette quantité, étant numérique ou littérale, nous allons successivement nous occuper de l'*extraction de la racine quarrée des nombres* et de celle des *quantités littérales*. On verra que ces opérations reposent sur les mêmes principes.

166. Nous examinerons d'abord, comment on peut *revenir du quarré d'un nombre entier, à sa racine*. Les quarrés des nombres, 1, 10, 100, etc., étant 1, 100, 10000, etc., les nombres compris entre 1, 100, 10000, etc. ont des racines qui sont comprises entre, 1, 10, 100, etc., et par conséquent: *les nombres de* 1 *ou* 2 *chiffres, ont pour racine un nombre d'un seul chiffre; les nombres de* 3 *ou* 4 *chiffres, ont deux chiffres à leurs racines. Et en général, les nombres composés de*, $2\,n-1$, *chiffres ou de* $2\,n$ *chiffres, ont* n *chiffres à leur racine*. Par exemple, 4096 étant compris entre 100 et 10000, la racine de 4096, est comprise entre les racines de 100 et de 10000, c'est-à-dire entre 10 et 100; la racine de 4096 a donc 2 chiffres. Cette racine est 64, car $64 \times 64 = 4096$.

167. Les nombres moindres que 100, n'ayant qu'un seul chiffre à leur racine, les racines de ces nombres se déduiront de la *table* suivante....

Racines, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Quarrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

168. Pour appercevoir comment on peut *revenir du quarré d'un nombre de deux chiffres, à sa racine*, il est nécessaire d'étudier la composition de ce quarré. Si a désigne le nombre des dixaines de la racine, et b les unités, la racine sera $10\,a+b$, et nommant p le quarré, on aura..............

$$p=(10\,a+b)^2=(10\,a+b)\times(10\,a+b)=100\,a^2+2\,ab\times 10+b^2.$$

Donc, le quarré $p=a^2$ centaines $+\;2\,ab$ dixaines $+\;b^2$ unités.

169. *Le quarré, d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient donc trois parties; savoir: le quarré des dixaines, le double des dixaines multiplié par les unités et le quarré des unités. Ces trois produits expriment respectivement, des centaines, des dixaines et des unités*. Par exemple, si la racine était 64, on aurait.....

$$a=6,\ b=4;\ a^2=6\times 6=36;\ b^2=4\times 4=16;\ 2\,ab=48;$$
$$(64)^2=(60+4)^2=36 \text{ centaines } + 48 \text{ dixaines, } + 16 \text{ unités} = 4096.$$

(*) Lorsque nous parlerons d'une *racine*, sans en désigner le *degré*, nous supposerons toujours qu'il s'agira de la racine quarrée. Ainsi, les expressions, $\sqrt[2]{9}$, $\sqrt{9}$, indiqueront également la racine quarrée de 9. La *valeur arithmétique* de la *racine* de 9, sera 3.

170. Voyons comment on peut *revenir du quarré 4096, à sa racine 64.* Les 6 dixaines de la racine, sont faciles à obtenir, car le quarré des dixaines étant des centaines, ne peut se trouver que dans les 40 centaines de 4096, et le plus grand quarré contenu dans 40, étant le quarré 36 des 6 dixaines de la racine, la racine 6 de 36, sera les dixaines de la racine. D'ailleurs, 4096 tombant entre les quarrés de 60 et de 70, la racine de 4096 tombe entre 60 et 70; le chiffre des dixaines de cette racine est donc 6.

* 171. En général, *la racine du plus grand quarré contenu dans les centaines d'un nombre quelconque n, donne les dixaines de la racine du nombre n.* En effet; si α^2 désigne le plus grand quarré contenu dans les centaines de n, on aura.....

$$n > \alpha^2 \text{ centaines et } n < (\alpha+1)^2 \text{ centaines ; ou } n > 100\,\alpha^2 \text{ et } n < 100(\alpha+1).$$

$$\text{Donc, } \sqrt{n} > 10\alpha \text{ et } \sqrt{n} < 10(\alpha+1). \text{ Ou, } \sqrt{n} > \alpha \text{ dixaines et } \sqrt{n} < (\alpha+1) \text{ dixaines.}$$

La racine quarrée du nombre n, contiendra donc α dixaines. Ce qui démontre le principe énoncé.

172. Cela posé ; pour trouver le chiffre des unités de la racine de 4096, on observera que 4096 contenant, le quarré 36 centaines des 6 dixaines de la racine, le double des 6 dixaines multiplié par le chiffre inconnu b des unités et le quarré b^2 des unites (nº 169), si l'on ôte 36 centaines de 4096, le *reste* 496, ne renfermera plus que le double des dixaines multiplié par les unités et le quarré des unités. Or le double produit des dixaines par les unités, étant des dixaines, ne peut faire partie que des 49 dixaines du *reste* 496 et ces 49 dixaines sont composées du double des dixaines de la racine multiplié par les unités, plus des dixaines contenues dans le quarré des unités. Par conséquent, si l'on divise 49 dixaines, par le double des 6 dixaines de la racine, les 4 unités du quotient exprimeront, ou le nombre des unités de la racine, ou un nombre plus grand. Pour découvrir si le quotient 4, est le chiffre des unités, on formera le quarré de 64; ce quarré étant égal au nombre proposé, la racine 64 est exacte. Le *reste* 496, peut servir à reconnaître si la racine 64 est exacte; car ce reste étant composé du double des dixaines multiplié par les unités et du quarré des unités, en multipliant le double des dixaines, qui est 120, par les 4 unités, et ajoutant au produit 480, le quarré 16, des 4 unités, la somme 496 doit être égale au *reste* 496. On peut obtenir les deux parties du *reste*, en écrivant sur la droite des 12 dixaines, le chiffre 4 des unités; le nombre 124, qui en résulte, multiplié par les 4 unités, doit donner un produit égal au *reste* 496, car ce produit est composé du quarré 16 des 4 unités et du produit du double des 6 dixaines de la racine, par les 4 unités. Et en effet; lorsqu'on retranche, 4 fois 124, de 496, le *reste* est zéro. On dispose ces calculs comme on le voit ici.......

Quarré	4096	64 Racine.	
	36		
1er *reste*.......	496	124; 4	double des dixaines, augmenté des unités, ou $20\,a + b$.
	496		
Dernier *reste*.....	0	496	double des dixaines, multiplié par les unités, augmenté du quarré des unités, ou $20\,a\,b + b^2$ (*).

173. Lorsqu'après avoir retranché du nombre proposé, le quarré des dixaines de la racine, on obtient un *reste*, les dixaines de ce *reste* contiennent, le double des dixaines de la racine, multiplié par les unités, plus les dixaines qui peuvent se trouver dans le quarré des unités; *la division des dixaines du reste, par le double des dixaines de la racine, peut donc donner pour quotient le chiffre des unités de la racine, ou un chiffre plus grand.* Dans ce dernier cas, le produit formé d'après la règle précédente, est plus grand que le *reste*, et l'on diminue le chiffre des unités d'assez de fois un, pour que le produit du double des dixaines plus les unités, par les unités, ne surpasse pas le *reste*. On trouvera de cette manière que la racine de 289 est 17.

174. *La composition assignée* (nº 169), *au quarré d'un nombre de deux chiffres, convient au quarré d'un nombre de trois chiffres.* En effet; pour former le quarré de 649, il suffit de décomposer ce nombre en 64 dixaines, plus 9 unités. Ce qui donne (nº 169),

$$(649)^2 = (640 + 9)^2 = (640)^2 + 2\,(640) \times 9 + 9^2. \text{ Donc...}$$
$$(649)^2 = 4096 \text{ centaines} + 1152 \text{ dixaines} + 81 \text{ unités} = 421201.$$

(*) *Pour revenir du quarré à la racine, il est indispensable de commencer par la recherche des plus hautes unités de la racine.* En effet; le double des dixaines de la racine, multiplié par les unités, contenant les deux chiffres inconnus de la racine, on ne doit pas espérer de déduire de ce produit, l'un des chiffres de la racine; mais si l'on connaissait le quarré des dixaines ou celui des unités, il serait facile d'en déduire les dixaines ou les unités de la racine. On doit donc chercher à découvrir l'un de ces quarrés. Le quarré du chiffre des unités de la racine pouvant contenir, ou des unités simples, ou des unités et des dixaines, et ces dixaines étant confondues avec les dixaines, qui résultent de la multiplication du double des dixaines de la racine par les unités; *il est difficile de reconnaître quel est le quarré du chiffre des unités de la racine.* Il n'en est pas de même du quarré du chiffre des dixaines de la racine, car ce quarré est le plus grand quarré contenu dans les centaines du nombre proposé (nº 171). *On doit donc commencer par la recherche des dixaines de la racine.*

Il est actuellement facile de revenir du quarré 421201, à sa racine 649. En effet; le quarré des 64 dixaines de la racine, étant des centaines, ce quarré ne peut faire partie que des 4212 centaines, du nombre proposé; mais la racine du plus grand quarré contenu dans 4212, sera les dixaines de la racine (n° 171); on obtiendra donc ces dixaines, en opérant comme si l'on voulait extraire la racine de 4212; ce qui donnera 64 dixaines, avec un *reste* 116 centaines. Ce *reste* exprime les centaines qui sont comprises dans la somme des deux autres parties du quarré. Retranchant donc de 421201, le quarré 4096 centaines, des 64 dixaines de la racine, le *reste* 11601 sera égal au double des 64 dixaines de la racine, multiplié par le chiffre des unités, plus le quarré des unités. (On obtient ce *reste* en ajoutant aux 116 centaines, les dixaines et les unités de 421201). Raisonnant donc comme dans le n° 172, on divisera les 1160 dixaines du *reste*, par le double 128, de 64; le quotient 91 sera le chiffre des unités, ou un chiffre plus fort. Mettant sur la droite de 128, le chiffre 9 que l'on veut essayer, et retranchant 9 fois 1289, de 11601, le *reste zéro* exprime que 9 est le chiffre des unités. De sorte que 649 est la racine exacte de 421201. On disposera l'opération comme dans le n° 172.

175. En général: *pour extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque, il suffit d'employer des raisonnemens analogues aux précédens.* Par exemple, si l'on veut extraire la racine du nombre 42211009, on concevra cette racine décomposée en dixaines et en unités, comme dans les nos 172 et 174. Le quarré des dixaines ne pourra faire partie que des 422110 centaines du nombre proposé, et la racine du plus grand quarré contenu dans ces centaines, sera les dixaines de la racine cherchée (n° 171). Opérant comme dans le n° 174, on trouvera que la racine demandée contient 649 dixaines. Le *reste* sera 909 centaines; retranchant de 42211009, le quarré des 649 dixaines, le *reste* 90909, sera composé du double des 649 dixaines, multiplié par les unités de la racine et du quarré des unités. Divisant les 9090 dixaines, du *reste*, par le double 1298 des dixaines de la racine, le quotient 7, sera le chiffre des unités, ou un chiffre plus fort. Mettant sur la droite de 1298, le chiffre 7 que l'on essaie, et retranchant 7 fois 12987, de 90909, le *reste zéro* exprime que 7 est le chiffre des unités. De sorte que 6497 est la racine exacte de 42211009. On voit que ces raisonnemens conduisent à diviser le nombre proposé en tranches de deux chiffres, à partir de la droite; le nombre des tranches indique le nombre des chiffres de la racine. Ce qui s'accorde avec la règle du n° 166.

176. Lorsqu'après avoir abaissé une tranche de deux chiffres, sur la droite d'un *reste* quelconque, les dixaines du résultat sont moindres que le double de la racine déjà obtenue, on doit mettre un zéro sur la droite des chiffres de la racine déjà obtenus, car le chiffre correspondant de la racine est zéro. On abaisse ensuite la tranche suivante, pour continuer le calcul comme à

l'ordinaire. D'après cette remarque, on trouvera que la racine quarrée de 94249 est 307.

177. Ce qui précède donnant le moyen de *revenir du quarré d'un nombre entier à sa racine;* voyons comment on peut résoudre le même problème pour les quarrés des fractions. Le quarré de $\frac{b}{a}$, étant $\frac{b}{a} \times \frac{b}{a}$, ou $\frac{b^2}{a^2}$; *le quarré d'une fraction est égal au quarré du numérateur, divisé par le quarré du dénominateur. On obtiendra donc la racine d'une fraction, en divisant la racine du numérateur, par celle du dénominateur.* Ainsi, la racine de $\frac{4}{9}$, est $\frac{2}{3}$.

178. *Pour obtenir la racine d'un nombre décimal*, il suffit d'extraire la racine de la fraction ordinaire qui exprime ce nombre décimal. On en déduit cette règle abrégée : *Calculez la racine du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre proposé; séparez autant de décimales sur la droite de cette racine, qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des décimales du quarré; le résultat sera la racine demandée.* En effet; désignez le nombre décimal proposé par b; le nombre de ses chiffres décimaux sera un nombre pair $2n$ (A, n° 75); et si la valeur de b, abstraction faite de la virgule, est $\mathcal{C}$, vous aurez....

$$b = \frac{\mathcal{C}}{10^{2n}} \text{ (A, n° 66). D'où } \sqrt{b} = \frac{\sqrt{\mathcal{C}}}{\sqrt{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{\mathcal{C}}}{10^n}.$$

Or, pour diviser $\sqrt{\mathcal{C}}$, par 10^n, il suffit de séparer n décimales sur la droite de $\sqrt{\mathcal{C}}$ (A, n° 72). La règle est donc démontrée. Ainsi, la racine de 144 étant 12, celle de 1,44 est 1,2, et celle de 0,0144 est 0,12.

179. Dans les exemples précédens, les nombres proposés étant des quarrés, on a trouvé les valeurs exactes des racines. Mais, *il existe des nombres dont les racines ne peuvent pas être exprimées exactement en nombres.* Par exemple, *lorsque la racine d'un nombre entier tombe entre deux nombres entiers consécutifs, on doit en conclure que cette racine existe, et qu'elle ne peut être exprimée exactement par aucun nombre,* car cette racine n'est pas un nombre entier, et le quarré d'une fraction irréductible étant une fraction irréductible (A, n° 372), la racine ne peut être une fraction. Ainsi, la racine de 5, tombant entre 2 et 3, cette racine existe, mais elle ne peut être exprimée exactement par aucun nombre.

* 180. On conçoit qu'*il doit exister des quantités qui ne sont pas susceptibles d'être exprimées en nombres.* En effet; les accroissemens successifs d'un nombre quelconque, peuvent toujours être exprimés par une fraction $\frac{b}{a}$, dans laquelle a et b désignent des nombres entiers; or quelque grand que soit a, l'accroissement $\frac{b}{a}$, a une valeur numérique déterminée;

les nombres ne peuvent donc pas croître d'une manière continue ; *tous les états de grandeur d'une quantité, ne peuvent donc pas être exprimés exactement par des nombres.* La racine quarrée de 5 est de cette espèce (*).

* 181. Les nombres entiers et les fractions, ayant une *commune mesure*, ou un *rapport*, ou une *raison*, avec l'unité, on dit que ces quantités sont *commensurables* ou *rationnelles;* et, par opposition, les quantités qui n'ont *aucune commune mesure*, avec l'unité, sont dites *incommensurables* ou *irrationnelles.* La racine quarrée de 5 est *incommensurable* ou *irrationnelle*, parce que ne pouvant être exprimée exactement par aucun nombre, entier ou fractionnaire, il en résulte que si l'on divise l'unité en un nombre quelconque de parties égales, l'une de ces parties ne sera jamais assez petite pour être contenue un nombre exact de fois, dans l'unité et dans la racine quarrée de 5.

182. *Lorsqu'on propose d'extraire la racine quarrée d'un nombre entier, on ignore si cette racine est exacte; on opère donc comme si le nombre était un quarré. Quand le dernier reste est zéro, la racine demandée est exacte; lorsqu'il n'est pas zéro, la racine cherchée est* INCOMMENSURABLE, *et la racine obtenue exprime la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé* (nos 172 ... 176). Ainsi, l'extraction de la racine quarrée de 4099, donnant 64 à la racine, et 3 de *reste;* le plus grand quarré contenu dans 4099 est celui de 64; et en effet, 4099 tombe entre les quarrés des nombres 64 et 65.

183. La valeur d'une quantité, à moins d'une unité près, est la *valeur entière approchée* de cette quantité. Ainsi, $\frac{17}{3}$ étant compris entre 5 et 6, les *valeurs entières approchées* de $\frac{17}{3}$, sont 5 et 6. En général, *si une quantité* α, *est plus grande que le nombre entier* p *et moindre que* $p+1$; *les valeurs entières approchées de* α, *seront* p *et* $p+1$. *La plus petite valeur entière approchée de* α, *sera donc* p.

184. *Pour obtenir la racine d'un nombre* α, *à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé; on prépare ce nombre de manière qu'il contienne le double du nombre des décimales qu'on veut trouver à la racine. La racine de* α, *exprime le résultat demandé.* S'il s'agit de calculer la racine de 2, à moins d'un centième d'unité près, on écrira 2,0000; la

---

(*) Une *ligne* pouvant croître d'une manière continue, *tous les états de grandeur d'une quantité, sont susceptibles d'être exprimés exactement par des lignes.* Ainsi, dans le *cercle* dont le *diamètre* est 6, le quarré de l'*ordonnée* correspondante aux *segmens* 5 et 1, étant 5×1, ou 5; la longueur de l'*ordonnée*, exprime la racine quarrée de 5.

racine de 20000, à moins d'une unité près, étant 141, la racine demandée sera 1,41; et en effet, le nombre 2, tombe entre les quarrés de 1,41 et de 1,42. Pour trouver la racine quarrée de 0,02, à moins d'un millième d'unité près, on écrira 0,020000; supprimant la virgule, la racine de 0020000, ou de 20000, sera 141, à moins d'une unité près; la racine demandée sera donc 0,141. Pour déterminer la racine de $\frac{2}{3}$, à moins d'un centième d'unité près, on observera que cette racine doit contenir 2 décimales; on réduira donc $\frac{2}{3}$ en décimales, et l'on s'arrêtera à la quatrième décimale; ce qui donnera 0,6666; supprimant la virgule, la racine de 6666, sera 81, à moins d'une unité près. La racine demandée sera donc 0,81.

* 185. *Lorsqu'on veut approcher le plus possible de la valeur d'une racine, avec un nombre déterminé de décimales, on calcule une décimale de plus, et l'on supprime ensuite cette décimale, d'après la règle connue* (A, n° 94). Ainsi, la racine de $\frac{5}{2}$, étant 1,58 etc.; la valeur la plus approchée de cette racine, quand on ne conserve qu'une décimale, est 1,6. Cette valeur est trop forte, mais l'erreur est moindre qu'un demi-dixième.

* 186. *Dans le cours des opérations relatives à l'extraction de la racine quarrée, pour reconnaître si un chiffre α', mis à la racine, est trop faible, il suffit d'ajouter l'unité au double de la partie de la racine déjà obtenue; quand le résultat n'est pas plus grand que le reste* (*), *le chiffre α' est trop faible; dans le cas contraire, le chiffre α' est exact.* En effet; désignez le nombre donné par n, la partie de la racine déjà obtenue par α, et le *reste* $n-\alpha^2$, par r. Lorsque $2\alpha+1$, ne sera pas plus grand que r, on aura....

$$2\alpha+1=n-\alpha^2-b;\ \text{d'où}\ n=(\alpha+1)^2+b;\ b \not< 0,\ (\text{n}^\circ\ 143).$$

n contiendra donc au moins le quarré de $(\alpha+1)$; le premier chiffre à droite, de α, pourra donc être augmenté d'un. Quand $2\alpha+1$, sera plus grand que r, on aura...:

$$2\alpha+1=(n-\alpha^2)+b;\ \text{d'où}\ n=(\alpha+1)^2-b;\ b>0.$$

n sera donc moindre que $(\alpha+1)^2$; le dernier chiffre à droite de α, ne pourra donc pas être augmenté d'un. Ce qui démontre le principe énoncé.

187. *Lorsqu'après avoir trouvé le chiffre des unités de la racine quarrée d'un nombre entier, le dernier reste n'est pas nul et est moindre que*

(*) Le *reste* est égal au nombre proposé, diminué du quarré de la partie de la racine déjà obtenue.

le double de la racine obtenue, augmenté d'un; cette racine exprime la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé (nº 186). Ainsi, l'extraction de la racine quarrée de 159, donnant 12 unités à la racine, avec le *reste* 15, et ce *reste* étant moindre que $12 \times 2 + 1$, le nombre 12 exprime la racine du plus grand quarré contenu dans 159. Et en effet, 159 tombe entre les quarrés de 12 et de 13.

* 188. *Lorsqu'on a trouvé plus de la moitié des chiffres de la racine d'un nombre N, on obtient la valeur entière approchée de la seconde partie de la racine, en divisant le* reste, *par le double de la partie de la racine qu'on a déjà obtenue.* En effet; si n désigne le nombre des unités de $\sqrt{N}$, les valeurs entières approchées de $\sqrt{N}$, seront n et $n+1$; on aura, $\sqrt{N} = n + \delta$; δ sera une quantité positive moindre que l'unité; et δ sera zéro, quand N sera le quarré d'un nombre entier. On calculera plus de la moitié des chiffres de n, par la méthode du nº 175; ce qui donnera la première partie α de la racine; le *reste* correspondant sera, $r = N - \alpha^2$. Posant $n - \alpha = \beta$, il s'agit de prouver que la division de r, par 2α, donnera β ou $\beta + 1$ unités, au quotient. Cela posé; l'égalité....

$$\sqrt{N} = \alpha + \beta + \delta, \text{ donne } \frac{N - \alpha^2}{2\alpha} = \beta + \delta + \frac{\beta^2 + 2\beta\delta + \delta^2}{2\alpha}.$$

Or δ est positif et moindre que 1; le quotient de la division du *reste* $N - \alpha^2$, par 2α, est donc toujours plus grand que β et moindre que $\beta + 1 + \frac{(\beta + 1)^2}{2\alpha}$. Il suffit donc de prouver que $(\beta + 1)^2$ est moindre que 2α. Supposons donc α le plus petit possible et β le plus grand possible. Dans ce cas; 1º. si n contient $2p$ chiffres; α renfermera $2p$ chiffres et β contiendra $p - 1$ chiffres. On aura (*)....

$$2\alpha > 10^{2p-1} \text{ et } \beta = 10^{p-1} - 1\text{; donc } (\beta + 1)^2 = 10^{2p-2}.$$

2º. Lorsque n renfermera $2p + 1$ chiffres; α sera un nombre de $2p + 1$ chiffres et β contiendra p chiffres; on aura donc....

$$2\alpha > 10^{2p}\text{; } \beta = 10^p - 1\text{; donc } (\beta + 1)^2 = 10^{2p}.$$

$(\beta + 1)^2$ est donc toujours moindre que 2α; ce qui démontre le principe énoncé. Par exemple, si, après avoir calculé les deux premiers chiffres 1, 9, de $\sqrt{39600}$, on divise le *reste* 3500, par le double 380, de la racine obtenue, on trouvera 9 unités au quotient; de sorte que l'une des valeurs entières approchées de $\sqrt{39600}$, est 199; et en effet, cette racine tombe entre 198 et 199.

(*) Lorsqu'un nombre entier contient x chiffres, sa plus petite valeur est 10^{x-1} et sa plus grande valeur est $10^x - 1$; (A, nºs 314 et 317).

* 189. *Quand N est le quarré d'un nombre entier;* on a $\delta = 0$; d'où $\frac{N - \alpha^2}{2\alpha} = \beta + \frac{\beta^2}{2\alpha}$; or $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ est moindre que 1; la division de $N - \alpha^2$, par 2α, donne donc alors la seconde partie β de la racine $\alpha + \beta$.

* 190. *Tout nombre terminé vers la droite, par l'un des chiffres,* 2, 3, 7, 8, *ou par un* 5 *qui n'est pas précédé du chiffre* 2, *ou par un nombre impair de zéros ou de décimales, n'est pas un quarré; sa racine est donc incommensurable. Il en est de même d'une fraction dont le produit des deux termes n'est pas un quarré.* En effet; 1°. les quarrés des nombres d'un seul chiffre étant terminés par l'un des chiffres, 1, 4, 5, 6, 9, les nombres terminés par l'un des chiffres, 2, 3, 7, 8, ne sont pas des quarrés; 2°. Quand le premier chiffre à droite d'un quarré b^2, est 5, le premier chiffre à droite de b est nécessairement 5; b contient a dixaines et 5 unités; donc.....

$$b^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \times 10a \times 5 + 25 = a(a+1)\,\text{centaines} + 25\,\text{unités}.$$

Les deux premiers chiffres à droite de b^2, valent donc 25; il est donc impossible que le premier chiffre à droite d'un quarré étant 5, le second ne soit pas 2; 3°. le nombre des zéros ou des décimales d'un quarré, est nécessairement pair (A, n° 75); 4°. soit la fraction $\frac{b}{a}$; on aura.................
$\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{ba}{aa}} = \frac{\sqrt{ba}}{a}$. La racine de $\frac{b}{a}$, sera donc commensurable ou incommensurable, selon que le produit ba, sera un quarré ou n'en sera pas un.

* 191. Les règles précédentes suffisent pour calculer les racines exactes ou approchées des nombres. Occupons-nous de la solution du même problème sur les quantités littérales. L'extraction de la racine des polynômes, dépendant de celle des monômes, nous commencerons par cette dernière.

192. Le quarré du monôme na^pb^q, étant $na^pb^q \times na^pb^q$, ou $n^2a^{2p}b^{2q}$; on voit que *pour obtenir le quarré d'un monôme, il suffit d'élever chaque facteur de ce monôme au quarré. Ce qui revient à former le quarré du coefficient numérique n et à doubler les exposans des autres facteurs.* Par conséquent, *pour revenir du quarré à la racine, il suffit d'extraire la racine de chaque facteur; ce qui revient à extraire la racine du coefficient numérique, et à diviser par* 2 *les exposans des autres facteurs.* Ainsi, $\sqrt{9a^8b^6} = \sqrt{9}\,\sqrt{a^8}\,\sqrt{b^6} = 3a^4b^3$.

193. *Quand tous les facteurs d'un monôme ne sont pas des quarrés, ce monôme n'est pas un quarré. On indique alors l'extraction de la racine et l'on réduit ensuite le radical à sa plus simple expression, en faisant sortir de dessous le radical, les facteurs qui ont des racines exactes.* Par exemple....

$$\sqrt{18a^9b^7} = \sqrt{9a^8b^6 \times 2ab} = \sqrt{9a^8b^6} \times \sqrt{2ab} = 3a^4b^3 \times \sqrt{2ab} = 3a^4b^3\,\sqrt{2ab}$$

194. L'extraction de la racine quarrée des monômes ne pouvant plus offrir de difficultés, occupons-nous des polynômes. Le quarré du binôme $p+q$, étant $p^2+2pq+q^2$, on voit que *le quarré de la somme de deux quantités, se compose du quarré de la première quantité, du double de la première quantité multiplié par la seconde et du quarré de la seconde quantité.* On en déduit le moyen d'*extraire la racine quarrée d'un polynôme quelconque.* Par exemple, soit....

$$p=4x^6+28x^5+49x^4+12x^3+42x^2+9.$$

Le polynôme p et sa racine r, étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, le 1er terme du quarré est le quarré du 1er terme de la racine (no 42); le 1er terme de r, sera donc $\sqrt{4x^6}$, ou $2x^3$. Désignant par $r_{,}$, la somme des autres termes de la racine, on aura........

$$p=(2x^3+r_{,})^2=4x^6+(2.\,2x^3+r_{,})\,r_{,}=4x^6+28x^5+\text{ etc.}$$

Retranchant $4x^6$, de p, le premier *reste* sera....

$$R_{,}=p-4x^6=(4x^3+r_{,})\,r_{,}=28x^5+49x^4+\text{ etc.}$$

$28x^5$, est donc le produit du premier terme de $r_{,}$, par le 1er terme $4x^3$, du polynôme $4x^3+r_{,}$, (no 42). Divisant donc le premier terme $28x^5$ du *reste*, par le double $4x^3$ du premier terme de la racine, le quotient $7x^2$ sera le premier terme de $r_{,}$, c'est-à-dire le deuxième terme de la racine. Retranchant de p, le quarré $(2x^3+7x^2)^2$, de la somme des deux premiers termes de la racine, ou ce qui revient au même, retranchant du *reste* $R_{,}$, le produit de $4x^3+7x^2$, par $7x^2$, on obtiendra un deuxième *reste*....... $R_{,,}=12x^3+42x^2+9$. Nommant $r_{,,}$ la somme des autres termes de la racine, et regardant $2x^3+7x^2$ comme la première partie de la racine, on aura (no 194).......

$$p=(2x^3+7x^2+r_{,,})^2=(2x^3+7x^2)^2+2(2x^3+7x^2)\,r_{,,}+r^2_{,,}.\ \text{Or,}$$

$$R_{,,}=p-(2x^3+7x^2)^2.\ \text{Donc, } R_{,,}=[2(2x^3+7x^2)+r_{,,}]\,r_{,,}=12x^3+42x^2+9.$$

$12x^3$ est donc le produit de $2\times 2x^3$, par le premier terme de $r_{,,}$. Divisant donc le premier terme $12x^5$ du deuxième *reste*, par le double $4x^3$ du premier terme de la racine, le quotient 3 sera le premier terme de $r_{,,}$, c'est-à-dire le troisième terme de la racine r. Retranchant du polynôme p, le quarré $(2x^3+7x^2+3)^2$, des trois premiers termes de la racine, ou ce qui revient au même, ôtant du deuxième reste $R_{,,}$, le produit de........... $2(2x^3+7x^2)+3$, par 3, le troisième *reste* sera zéro. La racine demandée est donc, $2x^3+7x^2+3$.

195. On en déduit cette règle générale : *pour extraire la racine quarrée d'un polynôme p; ordonnez ce polynôme par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre. Concevez la racine ordonnée de la même manière; disposez les calculs comme dans le* no 172. *La racine quarrée du premier terme de p, sera le premier terme* α, *de la racine cherchée. Otez* α^2, *de p; le premier terme du reste* $R_{,}$, *divisé par* 2α, *donnera le deuxième terme* $\alpha_{,,}$, *de la racine. Retranchez de* $R_{,}$ *le produit....*

$2x_{\prime}+a_{\prime\prime}$) $a_{\prime\prime}$; vous obtiendrez un reste $R_{\prime\prime}$. La division du premier terme de $R_{\prime\prime}$, par $2a$, donnera le troisième terme de la racine; et ainsi de suite. Lorsque vous parviendrez à un reste nul, la racine obtenue soit exacte. Quand vous trouverez à la racine, un terme ω tel que ω^2 sera moindre que le dernier terme de p, la racine cherchée ne sera pas exacte, car le dernier terme d'un quarré est nécessairement le quarré du dernier terme de la racine (nº 42). Ainsi.....

$$\sqrt{b^2-4ac}=b-2acb^{-1}-2a^2c^2b^{-3}-4a^3c^3b^{-5}-\text{etc.}$$

196. Ce qui précède donne le moyen de *résoudre toutes les équations du second degré à une seule inconnue, qui ne renferment que le quarré de l'inconnue*, car on peut toujours ramener ces équations à la forme, $x=\sqrt{a}$, et nous savons extraire la racine quarrée d'une quantité quelconque a.

197. Les propriétés des signes + et — conduisent à des remarques importantes. En effet; le quarré de $+c$ et celui de $-c$, étant $+c^2$; lorsqu'on donne le quarré c^2, la *racine* a deux valeurs $+c$ et $-c$. De sorte que l'équation $x^2=c^2$, est également satisfaite, en substituant $+c$ ou $-c$ pour x. *La racine quarrée d'une quantité doit donc être affectée du double signe + et —*. Ainsi, $x^2=c^2$, donne $x=+c$ et $x=-c$; ce qu'on indique en posant $x=\pm c$. La racine de x^2 étant $\pm x$; on pourrait écrire $\pm x=\pm c$, mais *le double signe donné à x, ne conduirait à aucune nouvelle valeur de x, car* $-x=\pm c$, donne $+x=-c$, et $+x=+c$.

198. *L'équation $x^2=c^2$, devait admettre deux valeurs de x*, car cette équation revient à $x^2-c^2=0$, et x^2-c^2 étant le produit de $(x-c)$ par $(x+c)$, ce produit sera zéro quand un des facteurs, $(x-c)$, $(x+c)$, sera zéro; ce qui donne $x=+c$ et $x=-c$. Aucune autre valeur de x, ne pouvant réduire ce produit à zéro, *l'équation proposée n'a que deux racines*.

199. *Pour obtenir toutes les solutions d'une équation du second degré, il suffit, lorsqu'on extrait la racine quarrée de chaque membre, de mettre + et — devant la racine de l'un des membres* (nº 197).

200. *Dans l'équation $x^2=\mathcal{C}$, les deux valeurs de x seront réelles lorsque $\mathcal{C}$ sera positif*, car on pourra toujours trouver la racine exacte ou approchée de la quantité positive $\mathcal{C}$. Mais quand $\mathcal{C}$ sera négatif, comme une quantité positive ou négative, élevée au quarré, ne donne jamais un résultat négatif, la valeur de x, n'existera pas. On dit alors que x est *imaginaire*. Ainsi, $\sqrt{-4}$ est une *expression imaginaire*, car aucune quantité élevée au quarré, ne peut donner -4. L'équation $x^2=-4$, qui donne $x=\pm\sqrt{-4}$, est donc absurde. On pourra cependant faire usage des *imaginaires*, pourvu que l'on se rappelle que d'après leur origine, le quarré de $\sqrt{-a}$, est $-a$ (nº 165).

* 201. *L'emploi des imaginaires est de la plus grande utilité*, car

on ne peut quelquefois parvenir à des résultats réels, qu'en introduisant des imaginaires. Dans ce cas, les imaginaires disparaissent du dernier résultat. Par exemple, si α, représentant l'imaginaire $\sqrt{-4}$, la solution d'un problème conduisait à, $x^2 = -\alpha^2$; ce problème serait possible, car $\alpha = \sqrt{-4}$, donne $\alpha^2 = -4$; d'où, $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

202. Dans l'équation $x^2 = \mathcal{C}$, les valeurs de x étant fournies par l'extraction de *la racine* quarrée de $\mathcal{C}$; ces valeurs de x se nomment les *racines* de l'équation. On a donné le même nom aux valeurs des inconnues qui satisfont à des équations quelconques. Ainsi, les hypothèses, $x = 2$, $x = 3$, réduisant $x^2 - 5x + 6$, à zéro, les nombres 2 et 3, sont les *racines* de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. Désormais, *les valeurs des inconnues qui rendront les deux membres d'une équation identiques, seront les* RACINES *de cette équation.*

203. Ces notions établies, occupons-nous de la *résolution des équations complètes du second degré. Toute équation du second degré à une seule inconnue, peut être ramenée à la forme* (1)...$x^2 + 2px - q = 0$, (n° 79). La marche la plus naturelle à suivre, pour résoudre l'équation (1), est de ramener cette équation au premier degré; cela serait facile, si le premier membre était un quarré, car il suffirait d'extraire la racine de chaque membre. Par exemple, $x^2 + 2px + p^2$, étant le quarré de $(x + p)$, l'équation (2)... $x^2 + 2px + p^2 = r^2$, donne $(x + p)^2 = r^2$. On en déduit (n° 199), $x + p = \pm r$; d'où $x = -p \pm r$. On doit donc chercher à ramenér l'équation (1) à la forme de l'équation (2). Pour y parvenir, on fera passer $-q$ dans le 2e membre; ce qui donnera, $x^2 + 2px = q$. Or $x^2 + 2px$ peut être considéré comme les deux premiers termes du quarré d'un binôme, dont le 1er terme serait x, et dont le double du 1er terme par le 2e, serait $2px$. Le 2e terme de ce binôme serait donc $\frac{2px}{2x}$, ou p. Ajoutant donc p^2, à chaque membre de l'équation $x^2 + 2px = q$, on aura

$$x^2 + 2px + p^2 = q + p^2; \text{ d'où } (x + p)^2 = q + p^2.$$

Extrayant la racine du 1er membre, indiquant l'extraction de la racine du 2e membre, on trouvera (n° 199),

$$x + p = \pm\sqrt{q + p^2}; \text{ d'où } x = -p \pm \sqrt{q + p^2}. \quad (*)$$

204. Désignant ces deux racines par x' et x'', on aura..............

$$(3)\ldots x' = -p + \sqrt{p^2 + q}; \quad x'' = -p - \sqrt{p^2 + q}.$$

Ces valeurs de x rendent l'équation (1) identique.

(*) Si l'équation proposée était $x^2 - 8x + 12 = 0$; on aurait......... $2p = -8$; $p = -4$; $-q = 12$; d'où $\sqrt{q + p^2} = \sqrt{-12 + 16} = \sqrt{4} = 2$, $x = 4 \pm 2$; de sorte que les *racines* seraient 6 et 2.

205. La comparaison des équations (1) et (3), conduit à cette règle générale : *Dans toute équation du second degré, ramenée à la forme.....* $x^2+2px=q$, *l'inconnue x est égale à la moitié du coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine quarrée, du second membre augmenté du quarré de la moitié du coefficient de x.*

206. *Toute équation du second degré a deux racines, et ne peut en avoir un plus grand nombre.* En effet; l'équation (1) donne......

$$(x+p)^2=p^2+q, (\text{n}^\text{o}\ 203);\quad \text{d'où}\quad (x+p)^2-(p^2+q)=0.$$

Or p^2+q est le quarré de $\sqrt{p^2+q}$, et $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Donc, $(x+p)^2-(\sqrt{p^2+q})^2=0$, ou $(x+p+\sqrt{p^2+q})(x+p-\sqrt{p^2+q})=0$.

Le premier membre, $x^2+2px-q$, de l'équation (1), est donc le produit des deux *facteurs du premier degré*, $(x+p+\sqrt{p^2+q})$, $(x+p-\sqrt{p^2+q})$. Mais un produit est nul, quand un de ses facteurs est zéro, et il ne peut être nul que dans ce cas, (nos 313 et 290). Le principe est donc démontré.

207. Chaque facteur étant x, moins une racine, on voit que *pour décomposer* $x^2+2px-q$, *en deux facteurs du premier degré, il suffit de chercher les racines* x', x'', *de l'équation* $x^2+2px-q=0$. *Les facteurs demandés sont* $x-x'$ *et* $x-x''$. On trouvera ainsi que x^2-5x+6, est le produit de $x-2$, par $x-3$.

208. Les formules (3), du no 204, démontrent que, *dans toute équation du second degré, ramenée à la forme* $x^2+2px-q=0$, *la somme des racines est égale au coefficient de la première puissance de x, pris en signe contraire, le produit de ces racines est égal au dernier terme, et la différence des racines est égale au double du radical.*

209. Ces relations donnent le moyen de *déterminer les signes des racines des équations du second degré, sans résoudre ces équations.* En effet; l'équation du second degré est susceptible des quatre formes............

$$(5)\ldots x^2+2px-q=0;\quad (6)\ldots x^2-2px-q=0;$$
$$(7)\ldots x^2+2px+q=0;\quad (8)\ldots x^2-2px+q=0;$$

p et q désignent des nombres positifs. Dans l'équation (5), le produit des deux racines étant le nombre négatif $-q$, les racines ont des signes contraires; mais la somme de ces racines est une quantité négative $-2p$; la racine négative est donc la plus grande. Dans l'équation (6), les racines ont des signes contraires, et la plus grande est positive. Dans l'équation (7), le produit des racines étant positif, ces racines sont de même signe, mais leur somme est négative; elles sont donc négatives. Enfin, dans l'équation (8), le produit des racines étant positif, les racines sont de même signe; or leur somme est positive; elles sont donc positives. L'inspection des racines des équations (5), (6), (7), (8), conduirait aux mêmes résultats, car ces racines sont (no 205)........

$$(9)\ldots x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}\,,\quad (10)\ldots x = +p \pm \sqrt{p^2 + q}\,,$$

$$(11)\ldots x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}\,,\quad (12)\ldots x = +p \pm \sqrt{p^2 - q}\,,$$

et la racine de p^2 étant p, on a $\sqrt{p^2+q} > p$, $\sqrt{p^2-q} < p$.

210. Le radical $\sqrt{p^2+q}$ étant toujours réel, quand q est positif; les racines des équations (5) et (6), sont réelles. Ainsi, *toute équation du second degré, dont le dernier terme est négatif, a ses racines réelles.*

211. *Dans les équations* (7) *et* (8), *quand* p^2 *est plus grand que* q, *les racines sont réelles et inégales; lorsque* $p^2 = q$, *les racines sont réelles et égales* (n° 208), *et le premier membre de chaque équation est le produit de deux facteurs égaux. Lorsque* p^2 *est moindre que* q, *le radical* $\sqrt{p^2-q}$, *devenant imaginaire* (n° 206), *les racines sont imaginaires; cela exprime que les équations sont alors impossibles*, car q étant plus grand que p^2, on a $q = p^2 + \alpha^2$, $\alpha^2 > 0$; les équations, (7), (8), deviennent $(x+p)^2 + \alpha^2 = 0$, $(x-p)^2 + \alpha^2 = 0$; et l'on voit qu'aucunes valeurs réelles de x ne peuvent satisfaire à ces équations.

212. Par conséquent, *lorsque les racines des équations* (7) *et* (8), *sont imaginaires, ces équations expriment que la somme de deux quarrés est zéro; ce qui est absurde, puisqve l'un des quarrés n'est pas zéro. Aucunes valeurs réelles de* x *ne peuvent donc satisfaire aux équations* (7) *et* (8). Dans ce cas, les formules (11) et (12) sont des *symboles algébriques*, qui rendent les équations (7) et (8) identiques; mais ces *symboles* ne sont pas des quantités.

* 213. Il est essentiel de remarquer la *différence qui existe entre les quantités incommensurables et les expressions imaginaires;* les unes et les autres ne peuvent être exprimées exactement en nombres, mais on approche autant que l'on veut des incommensurables, on peut même les exprimer exactement par des lignes (note du n° 180, page 76), tandis qu'aucune quantité ne peut approcher des valeurs des imaginaires.

* 214. Problème. *Résoudre l'équation* $(1)\ldots ax^2 + bx + c = 0$, *sans diviser par* a. On fera passer c dans le 2e membre (n° 203); ce qui donnera... $(2)\ldots ax^2 + bx = -c$. Or, $ax^2 + bx$ exprime les deux premiers termes du quarré d'un binôme; ax^2 est le quarré du 1er terme de ce binôme; ce 1er terme est donc $x\sqrt{a}$; mais, bx est le double du 1er terme, multiplié par le 2e. Divisant donc bx, par $2x\sqrt{a}$, le quotient $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, sera le 2e terme du binôme. Ajoutant donc à chaque membre le quarré de ce 2e terme, l'équation (2) deviendra.......

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = -c + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Le 1er membre sera le quarré de $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$; extrayant donc la racine quarrée de chaque membre, on trouvera (no. 199).....

$$x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}\text{ ; d'où, } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Désignant ces deux racines par x' et x'', on aura..................

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};x'-x''=\frac{1}{a}\sqrt{b^2-4ac}.$$

Lorsque b^2-4ac sera positif, les deux racines seront réelles et inégales; quand b^2-4ac sera zéro, les deux racines seront égales et réelles; enfin, lorsque b^2-4ac sera négatif, les deux racines seront inégales et imaginaires. La réciproque est vraie.

* 215. Nous avons supposé que l'équation (1) était du second dégré, de sorte que a n'était pas zéro. Mais, en faisant $a=0$, l'équation (1) donne $x=-\frac{c}{b}$; la *généralité des formules algébriques* exige donc que, dans cette hypothèse, l'une des racines, x', x'', devienne $-\frac{c}{b}$. Or, $a=0$, rend x'' infini; la valeur de x', qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, doit donc se réduire à $-\frac{c}{b}$. Et en effet; si l'on substitue la valeur de $\sqrt{b^2-4ac}$ (no 195), on trouvera, $x'=cb^{-1}-c^2b^{-3}a-2c^3b^{-5}a^2-$ etc.; faisant $a=0$, la valeur de x' se réduit à $-\frac{c}{b}$.

Réciproquement, *lorsque, a, b, c, sont des quantités finies, pour que l'une des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$, devienne infinie, il faut que a soit zéro.*

* 216. En général; *pour exprimer que les racines de l'équation.... $ax^2+bx+c=0$, sont réelles et égales, on pose $b^2-4ac=0$; lorsqu'une des racines étant une quantité finie, l'autre racine doit être infiniment grande, on égale le coefficient de x^2 à zéro.*

* 217. Problème. *Décomposer ax^2+bx+c, en deux facteurs du premier degré.* On mettra ce trinôme sous la forme $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Cherchant les facteurs de $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$, on trouvera (no 207).....

$$(1)\ldots\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

Multipliant le 1er membre par a, et chaque facteur du 2e membre par $\sqrt{a}$, il viendra.....

$$ax^2+bx+c=\left(x\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\right)\left(x\sqrt{a}+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\right).$$

Lorsque b^2-4ac *sera zéro, les deux facteurs seront égaux, et...* ax^2+bx+c *sera le quarré de* $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$. Pour démontrer la réciproque, on résoudra le problème suivant :

* 218. *Déterminer la relation qui doit exister entre, a, b et c, pour que ax^2+bx+c, soit un quarré.* Quand le trinome ax^2+bx+c, est un quarré, sa racine est un binôme; ax^2 exprime le quarré du premier terme, ce premier terme est donc $x\sqrt{a}$; mais bx doit être le produit du double du premier terme de la racine, par le second; ce second terme est donc $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; son quarré devant être égal à c, la relation demandée est $\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=c$; d'où $b^2-4ac=0$. Et en effet, quand cette condition est remplie, ax^2+bx+c, est le quarré de... $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$.

* 219. *Diviser le nombre connu a, en deux parties telles, que le rapport de leurs quarrés soit m^2.* Si la 2e partie est x, la 1re sera $a-x$, et l'on aura (1)... $\frac{(a-x)^2}{x^2}=m^2$.

On pourrait résoudre cette équation par la méthode générale du nº 203, mais on abrégera les calculs en prenant la racine quarrée de chaque membre; car il en résultera (nº 199)....

$$\frac{a-x}{x}=\pm m;\ \text{d'où } x=\frac{a}{1\pm m}\ \text{et } a-x=\frac{\pm ma}{1\pm m}.$$

Les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs. De sorte que le problème admet ces deux solutions....

1re *Solution.* 1re partie $=\frac{ma}{1+m}$; 2e partie $=\frac{a}{1+m}$.

2e *Solution.* 1re partie $=\frac{-ma}{1-m}$; 2e partie $=\frac{a}{1-m}$.

Ces parties satisfont aux deux conditions du problème, car dans chaque solution, la somme des deux parties se réduit à $+a$ et le quarré de la 1re partie, divisé par le quarré de la 2e, donne m^2 pour quotient.

* 220. Lorsque $m=1$, la 1re solution donne $\frac{1}{2}a$ pour la valeur de chaque

partie, ce qui satisfait évidemment au problème. Mais la 2e solution conduit à des valeurs infinies. Pour interpréter ce résultat, on observera que dans l'hypothèse actuelle, l'équation (1) donne....

$$\frac{a^2 - 2ax + x^2}{x^2} = 1;\ \text{d'où}\ (2)\ldots\ \frac{a}{x}\left(2 - \frac{a}{x}\right) = 0.$$

On satisfait à cette équation en posant $2 - \frac{a}{x} = 0$; d'où $x = \frac{1}{2}a$; ce qui conduit à la 1re solution. Si l'on met pour x des nombres plus grands ou plus petits que $\frac{1}{2}a$, on ne satisfera jamais à l'équation (2), mais cependant, plus x sera grand, plus $\frac{a}{x}$ sera petit; de sorte qu'en supposant x infiniment grand, $\frac{a}{x}$ sera nul; le 1er membre de l'équation (2) se réduira donc à zéro; la valeur infinie de x satisfait donc à l'équation (2), dans ce sens, qu'en mettant pour x un nombre très-grand, l'erreur est d'autant moindre que le nombre substitué est plus grand.

*221. *Un particulier doit, 7200f payables dans un an et 7200f payables dans deux ans. Il s'acquitte avec* 11000 *francs argent comptant. On demande le taux de l'argent. On a égard aux intérêts des intérêts.* Désignant par x *francs* l'intérêt annuel de 100f et posant....
$1 + \frac{x}{100} = z$, d'où $x = 100(z-1)$; l'intérêt annuel de 1f sera $\frac{xf}{100}$; donc, 1 franc comptant vaudra, après un an, $1f + \frac{xf}{100}$, ou z francs, et après deux ans, z^2 francs (A, nº 248). Par conséquent (A, nº 252), les 7200f payables dans un an, valent comptant $\frac{7200f}{z}$ et les 7200f payables dans deux ans, valent comptant $\frac{7200f}{z^2}$. Mais, on acquitte cette dette totale avec 11000f argent comptant; donc....

$$\frac{7200}{z} + \frac{7200}{z^2} = 11000;\ \text{ou}\ z^2 - \frac{36}{55}z - \frac{36}{55} = 0.$$

La nature de la question, exigeant que z soit positif, on ne calculera que la racine positive de cette dernière équation; ce qui donnera, $z = \frac{6}{5}$ et $x = 20$. *L'argent était donc à* 20 *pour* 100 *par an.* Et en effet; à 20 pour 100 par an, les 7200f, payables dans un an, valent 6000f argent comptant et les 7200f payables dans deux ans, valent 5000f comptant (A, nº 252). Ces deux dettes représentent donc une dette totale de 11000f argent comptant.

Formation des puissances et extraction des racines.

Puissances et racines des monômes.

222. *La* PUISSANCE *m d'une quantité est le produit de m facteurs égaux à cette quantité* (nº 12). Ainsi, la puissance m de b^p est le produit de m facteurs égaux à b^p. Pour indiquer ce produit, on écrit $(b^p)^m$.

223. *Pour élever une quantité à une puissance, il suffit de multiplier l'exposant de cette quantité, par le nombre qui indique à quelle puissance on veut élever la quantité proposée*, car (nº 222),

$$(a^2)^3 = a^2a^2a^2 = a^{2+2+2} = a^6;\ (a^p)^m = a^p \times a^p \times a^p \ldots \times a^p = a^{p+p+p+\cdots+p} = a^{pm}.$$

224. *Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever séparément chaque facteur à cette puissance.* En effet; un produit ne changeant pas quand on change l'ordre des facteurs (A, nº 331), on a....

$$(abc)^m = (abc)(abc)(abc) \text{ etc.} = (aaa\ldots)(bbb\ldots)(ccc\ldots) = (a)^m \times (b)^m \times (c)^m.$$

225. *Pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance*, car...

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b}{a} \times \frac{b}{a} \times \frac{b}{a} \cdots \times \frac{b}{a} = \frac{bbb\ldots b}{aaa\ldots a} = \frac{b^m}{a^m}.$$

226. *Toute puissance de degré pair, d'une quantité positive ou négative, est positive, et toute puissance impaire d'une quantité, a le signe de cette quantité.* Cela résulte des principes du nº 37. On peut aussi le démontrer de la manière suivante :

$$(\pm a)^{2m} = [(\pm a)^2]^m = (a^2)^m = +a^{2m} \text{ et } (\pm a)^{2m+1} = (\pm a)^{2m} \times (\pm a) = \pm(a^{2m+1}).$$

227. Dans l'égalité $(a^p)^m = a^{pm}$, la quantité a^{pm} est la *puissance m* de a^p et a^p est la *racine* du degré m de a^{pm} (nº 12). De sorte que si α désigne la *racine arithmétique* (*) du degré m, de β, on aura $\sqrt[m]{\beta} = \alpha$ et $\beta = \alpha^m$. Par conséquent, pour revenir d'une *puissance* à sa *racine*, il suffit de renverser

(*) Dans toute cette théorie, nous ne considérerons que les *valeurs arithmétiques* (nº 30) des radicaux. De sorte que les radicaux seront positifs, ainsi que les quantités qui seront sous les radicaux. Par exemple, la *valeur arithmétique* de $\sqrt[3]{8}$ est la même que celle de $\sqrt[6]{64}$ (nº 238), mais les *valeurs algébriques* de ces radicaux ne sont pas les mêmes, car le premier radical n'a qu'une seule valeur réelle, $+2$, et le second radical a deux valeurs réelles, $+2$, -2. Nous verrons, par la suite, comment on doit opérer sur les *valeurs algébriques* des radicaux.

les règles des nos 223, 224 et 225. Ainsi, *on extrait la racine du degré m d'une quantité, en divisant l'exposant de cette quantité par m. On obtient la racine d'un produit, en prenant la racine de chaque facteur. La racine d'une fraction est égale à la racine du numérateur, divisée par la racine du dénominateur.* On peut démontrer directement ces propriétés. En effet; il s'agit de prouver que l'on a....

$$\sqrt[m]{a^{pm}} = a^p;\ \sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c};\ \sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}.$$

Ces égalités sont exactes, car en élevant les deux membres de chacune à la puissance m, d'après les principes des nos 12, 223, 224 et 225, on trouvera, $a^{pm} = a^{pm}$, $abc = a \times b \times c$ et $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

228. Lorsque p est divisible par m, le radical $\sqrt[m]{a^p}$ est égal à $a^{\frac{p}{m}}$. Pour que cette formule convienne au cas où p n'est pas divisible par m, il faut généraliser la définition du nº 222, en supposant que *la puissance* $\frac{p}{m}$ *de* a, *indique la racine du degré m de la puissance p de a.* D'après cette convention, $a^{\frac{p}{m}}$ *et* $\sqrt[m]{a^p}$, *expriment également la racine du degré m de* a^p. *De sorte que chacune de ces quantités élevée à la puissance* m, *donne* a^p.

229. *Pour faire sortir un facteur de dessous un radical du degré* m, *il suffit d'extraire la racine du degré m de ce facteur,* car les principes du nº 227 donnent....

$$\sqrt[m]{a^{pm} \times b} = \sqrt[m]{a^{pm}} \times \sqrt[m]{b} = a^p \times \sqrt[m]{b}.$$

$$\sqrt[3]{8a^4b^8} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6 \times ab^2} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6} \times \sqrt[3]{ab^2} = 2ab^2\sqrt[3]{ab^2}.$$

230. Réciproquement, *pour faire passer sous un radical du degré* m *un facteur placé hors de ce radical, il suffit d'élever le facteur à la puissance* m, car on a (nº 229)....

$$a^p\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^{pm}b};\ 2ab^2\sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6 \times ab^2} = \sqrt[3]{8a^4b^8}.$$

231. Lorsque les exposans des quantités qui sont sous un radical, ne sont pas divisibles par l'indice de ce radical, l'extraction indiquée ne peut pas s'effectuer exactement; on cherche alors à *réduire le radical à sa plus simple expression;* ce qui revient à extraire de dessous le radical, tous les facteurs qui ont des racines exactes (nº 229). Par exemple...

$$\sqrt[3]{54a^5b^2} = \sqrt[3]{3^3a^3 \times 2a^2b^2} = \sqrt[3]{3^3a^3} \times \sqrt[3]{2a^2b^2} = 3a\sqrt[3]{2a^2b^2}.$$

232. La plupart des extractions de racines ne pouvant pas s'effectuer exactement, et le calcul des valeurs approchées des racines incommensurables étant très-long, on a cherché à effectuer, sur les quantités soumises aux signes des radicaux, les opérations indiquées sur les racines de ces quantités; on a réduit les expressions aux formes les plus simples, afin de n'effectuer les extractions de racines que sur les quantités ainsi réduites.

233. *L'addition et la soustraction des radicaux semblables* (*) *s'effectue sur les coefficiens de ces radicaux.* Ainsi, $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=5\sqrt{a}$ et $5\sqrt{a}-2\sqrt{a}=3\sqrt{a}$.

234. *Quand des radicaux sont différens, on ne peut qu'indiquer l'addition et la soustraction.* Ainsi, la somme des radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, est $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$, et leur différence est $\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}$.

235. *Des radicaux qui paraissent différens, peuvent quelquefois devenir semblables*; les radicaux, $5a\sqrt[3]{2a^2b^2}$, $\sqrt[3]{54a^5b^2}$, deviennent *semblables*, lorsqu'on les réduit à leur plus simple expression, car le second radical se réduit à $3a\sqrt[3]{2a^2b^2}$ (n° 231).

236. *Pour multiplier plusieurs radicaux du même degré, il suffit de former le produit des quantités qui sont sous les radicaux, et de mettre ce produit sous un radical du même degré.* En effet; soit $x=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$; les principes des n^os^ 224 et 228 donneront..... $x^m=a\times b\times c$; donc $x=\sqrt[m]{abc}$; donc, $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}$.

237. *Pour diviser deux radicaux du même degré l'un par l'autre, on indique la division des quantités placées sous les radicaux, et l'on met le quotient sous un radical du même degré*, car en faisant......

$$x=\left(\sqrt[m]{a}\right):\left(\sqrt[m]{b}\right),$$ il vient (n° 225), $x^m=\frac{a}{b}$; d'où, $x=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

238. *Un radical ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie ou*

(*) *Des radicaux sont semblables*, lorsqu'étant du même degré, les quantités placées sous ces radicaux sont les mêmes. Quand ces quantités sont différentes, les radicaux sont *différens*. Ainsi, $2\sqrt[3]{ab}$, et $2c\sqrt[3]{ab}$, sont des *radicaux semblables*; les radicaux $2\sqrt[3]{a}$, et $3\sqrt[2]{b}$, sont *différens*.

qu'on divise, par une même quantité, l'indice du radical et les exposans des quantités qui sont sous le radical. En effet; soit.........

$x = \sqrt[m]{a^p b^q}$ et $y = \sqrt[mr]{a^{pr} b^{qr}}$. On aura (nos 228, 223 et 224).........

$$x^m = a^p b^q \,;\ (x^m)^r = (a^p b^q)^r \,;\ x^{mr} = a^{pr} b^{qr} \,;\ x = \sqrt[mr]{a^{pr} b^{qr}}$$

$$y^{mr} = a^{pr} b^{qr} \,;\ (y^m)^r = (a^p b^q)^r \,;\ y^m = a^p b^q \,;\ y = \sqrt[m]{a^p b^q}.$$

Donc... $\sqrt[m]{a^p b^q} = \sqrt[mr]{a^{pr} b^{qr}}$ et $\sqrt[mr]{a^{pr} b^{qr}} = \sqrt[m]{a^p b^q}$.

239. *Pour réduire plusieurs radicaux au même indice, il suffit de multiplier l'indice de chaque radical et les exposans des quantités qui sont sous ce radical, par le produit des indices des autres radicaux; les radicaux ne changent pas de valeur* (no 238) *et chaque radical a pour indice le produit des indices des radicaux proposés. On est conduit au même résultat en transformant les radicaux, en exposans fractionnaires, et réduisant les fractions qui en résultent au même dénominateur. Dans cette réduction, on peut faire usage des simplifications de calcul indiquées dans l'arithmétique*, (A, no 183). Ainsi, les radicaux, $\sqrt[6]{2a^5}$, $\sqrt[15]{b^2}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{2ab^2}$, réduits au même indice, deviennent $\sqrt[30]{2^5 a^{25}}$, $\sqrt[30]{b^4}$, $\sqrt[30]{a^{15}}$ et $\sqrt[30]{2^{10} a^{10} b^{20}}$.

240. *Pour multiplier ou pour diviser des radicaux de degrés différens, on les réduit d'abord au même indice* (no 239), *et on leur applique ensuite les règles des* nos 236 *et* 237. Ainsi.......

$$\sqrt[m]{a^p} \times \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn}} \times \sqrt[mn]{b^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{pn} b^{mq}} \,;\ \sqrt[m]{a^p}\,\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn+mq}}.$$

$$(\sqrt[m]{a^p}) : (\sqrt[n]{b^q}) = \sqrt[mn]{a^{pn} : b^{qm}} \,;\ \sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn-qm}}.$$

241. *On élève un radical à une puissance, en élevant la quantité qui est sous le radical à cette puissance, ou en divisant l'indice du radical par l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever ce radical*, car en faisant $\sqrt[mq]{a^p b^r} = x$, on en déduit (nos 223, 228 et 238),

$$a^p b^r = x^{mq} = (x^m)^q.\ \text{Donc},\ x^m = \sqrt[qm]{a^p b^r} = \sqrt[qm]{(a^{pm} b^{rm})} = \sqrt[qm]{(a^p b^r)^m}.$$

242. *On obtient la racine du degré m d'un radical, en extrayant la racine du degré m de la quantité soumise au radical, ou en multipliant l'indice du radical par m.* En effet; soit.....

$x=\sqrt[m]{(\sqrt[r]{a^{pm}b^{qm}})}$. On aura, $x^m=\sqrt[r]{a^{pm}b^{qm}}$; $x^{mr}=a^{pm}b^{qm}$.

Donc, $x=\sqrt[mr]{a^{pm}b^{qm}}=\sqrt[r]{a^pb^q}$. Donc, $\sqrt[m]{(\sqrt[r]{a^{pm}b^{qm}})}=\sqrt[r]{a^pb^q}=\sqrt[mr]{a^{pm}b^{qm}}$.

Ce qui démontre le principe énoncé, car a^pb^q est la racine du degré m, de $a^{pm}b^{qm}$.

243. *Quand l'indice d'un radical est le produit de plusieurs nombres premiers, p, q, r, etc.; on peut obtenir la valeur de ce radical en extrayant successivement des racines des degrés, p, q, r, etc.,* car en désignant $\sqrt[pqr]{b}$, par x, et faisant, $\sqrt[p]{b}=c$, $\sqrt[q]{c}=d$, $\sqrt[r]{d}=e$, il vient... $e^r=d$; $e^{qr}=d^q=c$; $e^{pqr}=c^p=b=x^{pqr}$; d'où $x=e$.

*244. La *théorie des exposans incommensurables*, repose sur les principes suivans; 1°. *Quand α et β sont positifs, la valeur de α^β est plus grande ou plus petite que l'unité, selon que α est plus grand ou plus petit que l'unité; la réciproque est vraie;* 2°. *Les valeurs des puissances positives des quantités plus grandes que l'unité, sont d'autant plus grandes, que les exposans de ces puissances sont plus grands, et les valeurs des puissances positives des quantités moindres que l'unité, sont d'autant moindres que les exposans des puissances sont plus grands. La réciproque est vraie.* En effet;

1°. Quand β est commensurable, on a, $\beta=\frac{m}{n}$; (m et n sont des nombres entiers positifs). Soit $\alpha>1$. Il s'agit de prouver que l'on a.....

$\alpha^\beta>1$, ou $\alpha^{\frac{m}{n}}>1$, ou $\alpha^m>1^n$, ou $\alpha^m>1$, ou $\alpha>\sqrt[m]{1}$, ou $\alpha>1$.

Ce qui est exact. On verrait de même que $\alpha<1$, donne $\alpha^\beta<1$. Le 1er principe est donc démontré, quand β est commensurable. Lorsque β est incommensurable, on peut supposer $\beta=\beta'+\delta'$, β' étant commensurable et δ' étant susceptible de devenir moindre que toute quantité donnée. Soit $\alpha>1$; $\alpha^{\beta'}$ sera plus grand que l'unité; donc $\alpha^{\beta'}=1+\gamma$. Si l'on avait $\alpha^\beta<1$, on en déduirait $\alpha^{\beta'+\delta'}=1-m$; donc $\alpha^{\beta'}-\alpha^{\beta'+\delta'}=\gamma+m$; mais δ' pouvant devenir aussi petit que l'on veut, il est bien évident que la valeur de $\alpha^{\beta'+\delta'}$ peut approcher indéfiniment de $\alpha^{\beta'}$; la différence $\gamma+m$, entre ces deux quantités, devrait donc devenir plus petite que toute quantité donnée; ce qui est impossible puisque γ et m sont des quantités positives et finies. α^β ne peut donc pas être plus petit que l'unité. Supposant $m=0$, on voit que α^β ne peut être égal à l'unité. Donc $\alpha^\beta>1$. On démontrerait de même que $\alpha<1$, donne $a^{\beta}<1$. La réciproque se déduit de la proposition directe, car, par exemple, si α^{β} étant plus grand que 1, α était moindre que 1, l'inégalité $\alpha<1$, donnerait $\alpha^{\beta}<1$; ce qui est contre l'hypothèse. Le 1er principe est donc démontré.

2°. Lorsque les quantités α, β et a, sont positives, il est évident que $a^{\alpha+\beta}$ exprime le produit de a^{α}, par une quantité α^{γ}, dans laquelle γ est positif. Par conséquent, $a^{\alpha+\beta}-a^{\alpha}=a^{\alpha}(a^{\gamma}-1)$. Or, selon que a est plus grand ou plus petit que l'unité, $a^{\gamma}-1$ est positif ou négatif, et la réciproque est vraie (1°); le second principe est donc démontré.

*245. *A mesure que les exposans des puissances croissent, les puissances des quantités plus grandes que l'unité croissent très-rapidement, tandis que les puissances des quantités moindres que l'unité, s'approchent rapidement de zéro.* Par exemple, les huit premières puissances des quantités 8 et $\frac{1}{8}$, sont....

$$8,\ 64,\ 512,\ 4096,\ 32768,\ 262144,\ 2097152,\ 16777216,\ \text{et}$$
$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{512},\ \frac{1}{4096},\ \frac{1}{32768},\ \frac{1}{262144},\ \frac{1}{2097152},\ \frac{1}{16777216}.$$

246. *Les règles qui ont été démontrées pour les exposans entiers, conviennent à des exposans quelconques.* Il s'agit de prouver que *l'on a toujours,*

$$(1)..a^{\alpha}\times a^{\beta}=a^{\alpha+\beta};\ (2)..\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta};\ (3)..(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta};\ (4)..a^{\alpha}\times a^{-\alpha}=1.$$

1°. On déduit facilement des principes des nos 33, 46, 50, 223, 225, que *ces formules sont exactes quand α et β sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.*

2°. *Les mêmes formules sont vraies, lorsque α et β sont des nombres fractionnaires, positifs ou négatifs*, car m, n, p, q, étant des nombres entiers positifs, on a (nos 240 et 241),

$$\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[n]{a^q}=\sqrt[mn]{a^{pn+qm}};\ \sqrt[m]{a^p}:\sqrt[n]{a^q}=\sqrt[mn]{a^{pn-qm}};\ \left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q=\sqrt[m]{a^{pq}}.$$

Si l'on transforme ces radicaux en exposans fractionnaires, il viendra...

$$a^{\frac{p}{m}}\times a^{\frac{q}{n}}=a^{\frac{pn+qm}{mn}}=a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}};\ a^{\frac{p}{m}}:a^{\frac{q}{n}}=a^{\frac{pn-qm}{mn}}=a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}$$

$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q=a^{\frac{pq}{m}}$. Soit $\frac{p}{m}-\frac{q}{n}=s$. On aura..... $a^{\frac{p}{m}}:a^{\frac{q}{n}}=a^s$ et $a^{\frac{q}{n}}:a^{\frac{p}{m}}=a^{\frac{q}{n}-\frac{p}{m}}=a^{-s}$; d'où $a^s\times a^{-s}=1$

Les formules, (1), (2), (3), (4), sont donc vraies quand α et β sont des nombres fractionnaires positifs. On en déduit que ces formules sont vraies pour des exposans fractionnaires négatifs, car la formule (4), donnant...

$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}$ et $\frac{1}{a^{-\alpha}} = a^{\alpha}$, *on peut toujours transformer les exposans négatifs en exposans positifs*. Par exemple...

$$a^{\frac{p}{m}} \times \left(a^{-\frac{q}{n}}\right) = a^{\frac{p}{m}} \times \left(\frac{1}{a^{\frac{q}{n}}}\right) = \left(a^{\frac{p}{m}}\right) : \left(a^{\frac{q}{n}}\right) = a^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}}.$$

247. *Les formules* (1), (2), (3), (4), *sont donc vraies lorsque les exposans sont commensurables*. Mais on peut toujours trouver des quantités commensurables qui diffèrent d'aussi peu que l'on veut des exposans incommensurables. Les mêmes formules doivent donc convenir aux exposans incommensurables. On peut d'ailleurs le démontrer de la manière suivante :

* 248. 3°. *Les formules du* n° 246, *conviennent aux exposans incommensurables*. Nous démontrerons cette propriété pour la formule (1). La même démonstration pourra s'appliquer aux autres formules. Lorsque α et β sont incommensurables et positifs, il existe toujours des quantités commensurables, α', β', qui diffèrent de α et de β, d'aussi peu que l'on veut. Posant donc, $\alpha = \alpha' + \delta'$ et $\beta = \beta' + \delta''$; δ' et δ'' seront des quantités incommensurables, que l'on pourra supposer positives ou négatives et moindres que des quantités données. Les exposans, α', β', étant commensurables, on aura, $a^{\alpha'} \times a^{\beta'} = a^{\alpha' + \beta'}$ (n° 247). Cela posé; si r désignant une quantité finie et positive, on pouvait avoir (5)... $a^{\alpha} \times a^{\beta} = a^{\alpha + \beta - r}$; il en résulterait, $a^{\alpha' + \delta'} \times a^{\beta' + \delta''} = a^{\alpha' + \beta' + \delta' + \delta'' - r}$

Soit $a > 1$. On aura (n° 244, 2°.)... $a^{\alpha'} < a^{\alpha' + \delta'}$ et $a^{\beta'} < a^{\beta' + \delta''}$

Donc, $a^{\alpha'} \times a^{\beta'} < a^{\alpha' + \delta'} \times a^{\beta' + \delta''}$, ou $a^{\alpha' + \beta'} < a^{\alpha' + \beta' + \delta' + \delta'' - r}$

Donc, (n° 244, 2°.), $\alpha' + \beta' < \alpha' + \beta' + \delta' + \delta'' - r$. D'où, $r < \delta' + \delta''$.

On parvient au même résultat quand a est moindre que l'unité. Mais on peut toujours rendre δ' et δ'' assez petits pour que $\delta' + \delta''$ soit moindre que la quantité donnée r. L'inégalité, $r < \delta' + \delta''$, ne peut donc pas subsister. L'équation (5) est donc fausse. Pour démontrer que le produit de a^{α} par a^{β} ne peut être $a^{\alpha + \beta + r}$, il suffit de supposer dans les raisonnemens précédens que, r, δ' et δ'', deviennent négatifs. Le produit de a^{α}, par a^{β}, est donc $a^{\alpha + \beta}$.

Théorie des combinaisons.

249. La *théorie des combinaisons*, est de la plus grande utilité dans toutes les parties des mathématiques. Nous nous bornerons à résoudre trois problèmes, qui serviront dans la recherche de la *formule du binôme*. Les diverses formes que prend un produit, lorsqu'on change l'ordre des facteurs, sont les *permutations* de ce produit; ainsi, le produit abc, donne six *permutations*, abc, acb, bac, bca, cab, cba. Chacune de ces *permutations* a la même valeur (A, n° 331). Tous les produits que l'on peut former en multipliant des lettres, 2 à 2, ou 3 à 3, ou etc., sont les *combinaisons* 2 à 2, ou 3 à 3, ou, etc., de ces lettres; les *combinaisons* 2 à 2, des lettres, a, b, c, sont donc, ab, ba, ac, ca, bc et cb; ces lettres ne donnent que trois *produits* différens, ab, ac, bc. On devra donc distinguer, les *permutations*, les *combinaisons* et les *produits*. Les quatre lettres, a, b, c, d, prises 2 à 2, donnent les 12 *combinaisons*, ab, ac, ad; ba, bc, bd; ca, cb, cd; da, db, dc. Pour trouver ces combinaisons, on a mis successivement à la suite de chaque lettre, chacune des trois autres lettres. En général; pour former toutes les combinaisons 2 à 2 de m lettres, on peut mettre successivement à la suite de chaque lettre, les $(m-1)$ autres lettres; chaque lettre occupant la première place, donne donc $(m-1)$ combinaisons de deux lettres; les *m lettres, prises deux à deux, donnent donc m fois $(m-1)$ ou $m(m-1)$, combinaisons*. Connaissant les combinaisons 2 à 2 de m lettres, on en déduit les combinaisons 3 à 3, en mettant successivement à la fin de chaque combinaison de deux lettres, chacune des $(m-2)$ autres lettres; chaque combinaison de deux lettres, donnant $(m-2)$ combinaisons de trois lettres, les $m(m-1)$ combinaisons 2 à 2, donneront $m(m-1)$ fois $(m-2)$ combinaisons 3 à 3. De sorte, que *m lettres, prises trois à trois, donnent $m(m-1)(m-2)$ combinaisons*. Et *l'analogie* porte à croire que *le nombre des combinaisons de m lettres prises n à n, est* .... $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots[m-(n-1)]$. On peut s'en convaincre en résolvant ce problème :

250. *Déterminer le nombre des* Combinaisons *de m lettres, prises n à n*. Le problème serait résolu si l'on pouvait faire dépendre le nombre des combinaisons de m lettres, n à n, du nombre des combinaisons de m lettres, $n-1$ à $n-1$, car ces dernières dépendraient successivement des combinaisons de m lettres, $n-2$ à $n-2$, $n-3$ à $n-3$, ..., 2 à 2; et (n° 249), le nombre des combinaisons de m lettres, 2 à 2, est $m(m-1)$. Désignant donc par c_n, le nombre des combinaisons de m lettres, n à n, et par c_{n-1}, le nombre des combinaisons de m lettres, $n-1$ à $n-1$, la question sera réduite à trouver la relation qui existe entre c_n et c_{n-1}. Cela posé; pour déduire toutes les combinaisons de m lettres n à n, des combinaisons $(n-1)$ à $(n-1)$, il suffit de mettre successivement à la suite de chaque combinaison de $(n-1)$ lettres, chacune des $m-(n-1)$ lettres

qui n'entrent pas dans cette combinaison (n° 249). Une quelconque des combinaisons $(n-1)$ à $(n-1)$, donnera donc $m-(n-1)$ ou $(m-n+1)$ combinaisons qui renfermeront n lettres ; les c_{n-1} combinaisons, dont m lettres prises $(n-1)$ à $(n-1)$ sont susceptibles, donneront donc c_{n-1} fois $(m-n+1)$, combinaisons de m lettres n à n. Mais, c_n désigne ce nombre de combinaisons. Donc... $c_n=(m-n+1)\,c_{n-1}$.

Cette formule étant vraie quel que soit n, on peut mettre successivement $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 4 et 3, au lieu de n ; ce qui donne....

$$c_{n-1}=(m-n+2)c_{n-2};\,c_{n-2}=(m-n+3)c_{n-3};\ldots;c_4=(m-3)c_3;\,c_3=(m-2)c_2.$$

Egalant le produit des premiers membres, c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_4, c_3, de ces équations, au produit des seconds membres, supprimant le facteur commun, $c_{n-1}\times c_{n-2}\times\ldots\times c_3$, et observant que $c_2=(m-1)m$, on trouvera...

$$(1)\ldots\ c_n=m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-n+3)\,(m-n+2)\,(m-n+1).$$

Cette formule exprime le *nombre des combinaisons de m lettres prises n à n.* Donnant successivement à n les valeurs, 2, 3, 4, etc., on trouvera....

$$c_2=m(m-1)\,;\,c_3=m(m-1)\,(m-2)\,;\,c_4=m(m-1)\,(m-2)\,(m-3).$$

251. *Déterminer le nombre des* PERMUTATIONS *d'un produit de n lettres.* Si p_n désigne le nombre cherché, la valeur de p_n sera égale au nombre des combinaisons de n lettres prises n à n. Supposant donc $m=n$, dans la formule (1), on aura....

$$(2)\ldots\ p_n=n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\,2.1=1.2.3\ldots(n-1)\,n.$$

252. *Déterminer le nombre des produits réellement différens de m lettres prises n à n.* On désignera le nombre cherché par b_n. Chaque produit de n lettres donnant p_n permutations (n° 251), les b_n produits de n lettres, donneront b_n fois p_n, combinaisons de m lettres n à n. Mais, (n° 250), ce nombre est représenté par c_n. Donc $p_n\times b_n=c_n$. Donc...

$$(3)\ldots\ b_n=\frac{c_n}{p_n}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-n+2)\,(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ldots\ (n-1)\ .\ n}.$$

Donnant à n les valeurs, 2, 3, 4, etc., on trouvera....

$$b_2=\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2};\ b_3=\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3};\ b_4=\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4};\ \text{etc.}$$

Puissances des polynômes.

253. *Lorsque m est un nombre entier positif*, on peut obtenir la *puissance m, du binôme* $(x+a)$, en formant le produit de m facteurs égaux à $(x+a)$. Par cette méthode, la puissance m, dépend des puissances, 1, 2, 3, ..., $(m-1)$. De sorte que les calculs sont d'autant plus longs, que

l'exposant m est plus grand. On a cherché une *formule générale pour calculer directement la puissance* m *de* $(x+\alpha)$, *sans passer par toutes les puissances précédentes.* Le moyen qui paraît le plus naturel, est de former les premières puissances de $(x+\alpha)$, au moyen de la multiplication; en opérant de cette manière, on apperçoit facilement la loi des exposans de α et de x, mais on ne peut pas découvrir la loi des coefficiens numériques, parce que ces coefficiens résultent des réductions qu'entraîne l'égalité des facteurs. Or, ces réductions n'auraient pas lieu, si les seconds termes des binômes étaient différens. On est donc conduit à *chercher la forme générale du produit de* m *binômes différens*, $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, ..., $(x+k)$; quand ce produit sera connu, on supposera les seconds termes, $a, b, c, \ldots, k$, égaux à α; ce qui donnera la puissance m de $(x+\alpha)$. En multipliant successivement ces facteurs, on trouve....

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

254. Sans pousser plus loin les calculs, on voit que *dans le produit de plusieurs binômes*, $(x+a)$, $(x+b)$, *etc.*, *l'exposant de* x *dans le premier terme est égal au nombre des facteurs binômes, et les exposans de* x *dans les termes suivans diminuent successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme, qui ne renferme pas* x. On peut concevoir que l'exposant de x dans le dernier terme est zéro, car $x^0=1$. *La loi des coefficiens de* x *est évidente; le coefficient du premier terme est l'unité; le coefficient du second terme est la somme des seconds termes*, a, b, c, *etc.*, *des binômes; le coefficient du troisième terme est la somme de tous les produits deux à deux de ces seconds termes. Et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme qui est le produit de tous les seconds termes.* Pour démontrer que *cette loi est générale*, il suffit de faire voir que si elle est vraie pour m binômes, elle sera encore vraie pour $m+1$ binômes. Si la loi assignée convient au produit P_m, des m binômes, $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, ..., $(x+k)$; on aura....

$$(1)\ldots\ P_m=x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_{n-1}x^{m-n+1}+p_nx^{m-n}+\ldots+p_m.$$

p_1, sera la somme des m seconds termes, $a, b, c, \ldots k$; p_2 sera la somme des produits 2 à 2 de ces seconds termes; en général, p_n sera la somme de tous les produits n à n des m seconds termes, et d'après cette loi, le dernier terme p_m, sera le produit, $abc\ldots k$, des m seconds termes. Si l'on multiplie les deux membres de la formule (1), par $(x+l)$; le produit des $(m+1)$ facteurs, $(x+a)$, $(x+b)$, ..., $(x+k)$, $(x+l)$, sera...

$$x^{m+1}+(p_1+l)x^m+(p_2+p_1l)x^{m-1}+\ldots+(p_n+lp_{n-1})x^{m-n+1}+\ldots+lp_m.$$

La loi des exposans de x *n'a pas changé*, car l'exposant de x dans le premier terme est égal au nombre $(m+1)$ des facteurs et les exposans de x dans les termes suivans, diminuent successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme, dans lequel l'exposant de x est zéro. *La loi des coefficiens n'a pas changé.* En effet; p_1 est la somme des m seconds termes, a, b, c, ... k; le coefficient $(p_1 + l)$, du 2e terme, est donc égal à la somme des $m + 1$ seconds termes, a, b, c, ..., k, l. Dans le produit des m binômes, le coefficient p_2, du 3e terme, exprime la somme des produits 2 à 2 des m seconds termes; dans le produit des $m + 1$ binômes, le coefficient $p_2 + p_1 l$, du 3e terme, exprime la somme des produits 2 à 2 des $m + 1$ seconds termes, car p_2 est la somme de tous les produits 2 à 2 dans lesquels l n'entre pas, et $p_1 l$, ou $(a + b + c + .. + k)\,l$, donne tous les produits 2 à 2 qui renferment l. En général, dans le produit des m binômes, $(x + a)$, $(x + b)$, .., $(x + k)$, le coefficient p_n du terme du rang $n + 1$, étant la somme des produits n à n des m seconds termes, a, b, c, .., k; dans le produit des $m + 1$ binômes, $(x + a)$, $(x + b)$, ..., $(x + k)$, $(x + l)$, le coefficient $(p_n + l p_{n-1})$, du terme du même rang, est la somme des produits n à n des $m + 1$ seconds termes, a, b, c, ..., k, l; car p_n exprime la somme des produits n à n, dans lesquels l n'entre pas, et p_{n-1} étant la somme de tous les produits $n - 1$ à $n - 1$ des m seconds termes, a, b, c, .., k; le produit de p_{n-1} par l, donne tous les produits n à n dans lesquels l entre; de sorte que $p_n + l p_{n-1}$, est la somme des produits n à n, des $m + 1$ seconds termes, a, b, c, .., k, l. Enfin; p_m désignant le produit des m seconds termes, a, b, c, .., k; le dernier terme $l p_m$ est le produit des $m + 1$ seconds termes, a, b, c, ..., k, l. Par conséquent, *si la loi énoncée* (no 254), *convient au produit de m binômes, elle conviendra au produit de m + 1 binômes.* Mais, cette loi est vraie pour trois binômes, elle est donc vraie pour quatre; convenant à quatre binômes, elle conviendra à cinq binômes, et ainsi de suite.

255. Cela posé; si les m seconds termes, a, b, c, ..., k, deviennent égaux à α, le premier membre de la formule (1) du no 254, deviendra $(x + \alpha)^m$. Dans le second membre, p_1 qui exprimait la somme des m seconds termes, deviendra $\alpha + \alpha + \alpha +$ etc., ou α répété m fois, ou αm. Le nombre des produits 2 à 2 des m seconds termes, étant $\frac{1}{2}\,m\,(m - 1)$, la somme p_2, de ces produits, deviendra $\frac{1}{2}\,m\,(m - 1)$ fois α^2, ou $\frac{1}{2}\,m\,(m - 1)\,\alpha^2$. Et en général; le nombre des produits différens de m lettres n à n, étant b_n; la somme p_n, de ces produits, deviendra $\alpha^n \times b_n$. Enfin, le dernier terme p_m, qui exprimait le produit des m seconds termes, deviendra α^m. De sorte que la formule (1) du no 254, donnera....

$$(2)\ldots (x+\alpha)^m = x^m + m\alpha x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\alpha^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Cette formule, connue sous le nom de *formule du binôme de* NEWTON, sert à déterminer directement toutes les puissances entières et positives d'un binôme. Si T_{n+1}, désigne le terme du rang ($n+1$), on aura, (n° 252),

$$(3)\ldots\ T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(n-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ldots\ldots n}\alpha^n x^{m-n}.$$

T_{n+1} est le *terme général* de la *suite*, $x^m+m\alpha x^{m-1}+$ etc.; parce qu'en supposant successivement, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., on en déduit les termes de cette *suite*. La formule (3) démontre les propriétés suivantes :

256. *La puissance m, du binôme ($x+\alpha$), contient $m+1$ termes; le dernier terme est α^m.* En effet; l'hypothèse $n=m$, donne $T_{m+1}=\alpha^m$, et ce terme est le dernier, car en donnant à n des valeurs plus grandes que m, un des facteurs de T_{n+1} devient zéro.

257. *Chaque terme se déduit du précédent, d'après une loi constante.* En effet; lorsqu'on change n, en $n+1$, la formule (3), donne....

$$(4)\ldots\ T_{n+2}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots n}\times\frac{(m-n)}{(n+1)}\alpha^{n+1}x^{m-n-1}.$$

La comparaison des formules (3) et (4), conduit à cette règle générale: *Pour déduire un terme quelconque du précédent; multipliez le terme précédent par l'exposant de x dans ce terme; diminuez l'exposant de x d'une unité, augmentez celui de α d'une unité, et divisez par l'exposant de α ainsi augmenté d'une unité. Le résultat sera le terme demandé.* Tous les termes de la puissance m de ($x+\alpha$), peuvent donc se déduire du premier terme x^m. Lorsque $m=5$, on trouve...

$$(x+\alpha)^5=x^5+5\alpha x^4+10\alpha^2x^3+10\alpha^3x^2+5\alpha^4x+\alpha^5.$$

258. Dans ce développement, *les coefficiens des termes pris à égale distance du 1er terme et du dernier sont égaux.* Cette propriété est générale. En effet; la formule (3) donnant le terme qui en a n avant lui, il suffit de chercher le rang du terme qui est suivi de n termes; or le nombre total des termes est $m+1$; le terme qui en a n après lui, est donc précédé de $m-n$ termes; mais la formule (3) donne le terme qui est précédé de n termes; on obtiendra donc le terme qui est suivi de n termes, en changeant n en $m-n$, dans la formule (3); ce qui donnera.....

$$(5)\ldots T_{m-n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots(m-n)}\alpha^{m-n}x^n.$$

Or, on peut toujours supposer que T_{m-n} est plus éloigné du premier terme que T_n; dans ce cas, $m-n$ étant plus grand que n, la valeur de T_{m-n+1} est de la forme....

$$T_{m-n+1}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\times(m-n)(m-n-1)\ldots(n+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots n\ldots\times(n+1)(n+2)\ldots(m-n)}\alpha^{m-n}x^n.$$

$$\text{Donc}\ldots\ T_{m-n+1}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots n}\alpha^{m-n}x^n$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

259. Pour obtenir le développement de $(x-\alpha)^m$, on changera le signe de α, dans la formule (2) du nº 255, ce qui donnera.....

$$(x-\alpha)^m=x^m-m\alpha x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\alpha^2x^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3x^{m-3}+\text{etc.}$$

260. *Toutes les puissances des polynômes se déduisent de la formule du binôme.* En effet ; si l'on change α en $\alpha+\beta$, la formule (2) du nº 255, donnera..........

$$(x+\alpha+\beta)^m=x^m+m(\alpha+\beta)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(\alpha+\beta)^2x^{m-2}+\ldots+(\alpha+\beta)^m.$$

Calculant les puissances, 2, 3,..., m, du binôme $(\alpha+\beta)$, on obtiendra le développement de la puissance m du trinôme $(x+\alpha+\beta)$. Changeant dans cette dernière formule, β en $(\beta+\gamma)$ et développant les puissances, 2, 3,..., m, du binôme $\beta+\gamma$, on obtiendra le développement de la puissance m du quatrinôme $(x+\alpha+\beta+\gamma)$; et ainsi de suite. D'après cette règle, le quarré du polynôme, $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$etc., sera......

$$a^2+2abx+(2ac+b^2)x^2+(2ad+2bc)x^3+(2ae+2bd+c^2)x^4+\text{etc.}$$

Extraction des racines des Polynômes.

261. La composition de la puissance m d'un polynôme étant connue (nº260), il est facile de revenir de cette puissance à sa racine. Par exemple, soit proposé d'*extraire la racine cubique* du polynôme......

$$p=8x^6-36x^5+66x^4-63x^3+33x^2-9x+1=r^3.$$

On a (nº 255), $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$.

Le plus fort exposant de x dans le cube, étant 6, le plus haut exposant de x dans la racine cubique, sera 2. On aura donc....

$$p=(ax^2+r_{,})^3=a^3x^6+(3a^2x^4+3ax^2r_{,}+r_{,}^2)\,r_{,}.$$

Or, le plus fort exposant de x dans $r_{,}$, est moindre que 2; les exposans de x, dans $(3a^2x^4+3ax^2r_{,}+r_{,}^2)r_{,}$, sont donc moindres que 6. *Le 1er terme du cube est donc le cube du 1er terme de la racine;* le 1er terme de r est donc $\sqrt[3]{8x^6}$, ou $2x^2$. On a donc....

$$p=(2x^2+r_{,})^3=8x^6+[3(2x^2)^2+3(2x^2)r_{,}+r_{,}^2]\,r_{,}.$$

Retranchant $8x^6$, de p, le 1er *reste* sera.....

$$R_{,}=[3(2x^2)^2+3(2x^2)r_{,}+r_{,}^2]\,r_{,}=-36x^5+66x^4-63x^3+\text{etc.}$$

Les exposans de x dans $r_{,}$, étant moindres que 2, on voit que le terme qui sera affecté de la plus forte puissance de x, dans le polynôme...... $3(2x^2)^2+3(2x^2)r_{,}+r_{,}^2$, sera $3(2x^2)^2$. Le 1er terme $-36x^5$ de $R_{,}$, est donc le produit de $3(2x^2)^2$, par le 1er terme de $r_{,}$ (n° 42); divisant donc $-36x^5$, par $3(2x^2)^2$, le quotient $-3x$, sera le 1er terme de $r_{,}$, c'est-à-dire le 2e terme de r. Retranchant de p, le cube de la somme des deux premiers termes de la racine, on obtiendra un 2e *reste*....

$$R_{,,}=p-(2x^2-3x)^3=12x^4-36x^3+33x^2-9x+1.$$

Faisant $r-(2x^2-3x)=r_{,,}$, on aura.....

$$p=(2x^2-3x+r_{,,})^3=(2x^2-3x)^3+3(2x^2-3x)^2r_{,,}+3(2x^2-3x)r_{,,}^2+r_{,,}^3$$

Donc... $R_{,,}=12x^4-36x^3+\text{etc.}=[3(2x^2-3x)^2+3(2x^2-3x)r_{,,}+r_{,,}^2]r_{,,}$.

Le plus fort exposant de x, dans $r_{,,}$ étant moindre que 1, on voit que $12x^4$ est le produit de $3(2x^2)^2$, par le 1er terme de $r_{,,}$; divisant donc $12x^4$, par $3(2x^2)^2$, le quotient 1, sera le 1er terme de $r_{,,}$, c'est-à-dire le 3e terme de la racine. Retranchant de p, le cube de $2x^2-3x+1$, le *reste* sera zéro. La racine cherchée est donc $2x^2-3x+1$.

262. Des raisonnemens analogues pouvant s'appliquer aux racines de tous les degrés, on en déduira cette règle générale : *Pour extraire la racine du degré m, d'un polynôme P; ordonnez ce polynôme par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre. Concevez la racine ordonnée de la même manière et disposez les calculs comme dans le* n° 172. *La racine du degré m du* 1er *terme de P, sera le* 1er *terme* $\alpha_{,}$ *de la racine cherchée. Otez* $\alpha_{,}^m$, *de P. Le* 1er *terme du reste* $R_{,}$, *divisé par* $m\alpha_{,}^{m-1}$ *donnera le* 2e *terme* $\alpha_{,,}$ *de la racine. Retranchez* $(\alpha_{,}+\alpha_{,,})^m$, *de P; vous obtiendrez un reste* $R_{,,}$; *la division du* 1er *terme de* $R_{,,}$, *par* $m\alpha_{,}^{m-1}$, *donnera le* 3e *terme* $\alpha_{,,,}$ *de la racine; et ainsi de suite. Lorsque vous parviendrez à un reste nul, la racine obtenue sera exacte. Quand vous trouverez un terme* ω, *de la racine, tel que* ω^m *sera moindre que le dernier terme de P; vous serez certain de ne jamais parvenir au reste zéro;* de sorte que *la racine demandée ne sera pas exacte*, car le dernier terme de la puissance m d'un polynôme, est nécessairement la puissance m du dernier terme de ce polynôme (n° 42). D'après cette règle, la racine cinquième de....

$$x^{10}+5x^9-30x^7-15x^6+81x^5+30x^4-120x^3+80x-32, \text{est } x^2+x-2.$$

Extraction des racines des nombres.

263. Les différentes parties qui composent la puissance m d'un polynôme, pouvant se déduire de cette puissance (n° 262), *il est toujours facile de revenir de la puissance d'une quantité littérale à sa racine. Le calcul des racines des nombres, présente plus de difficulté;* parce que les parties qui composent la puissance d'un nombre, sont confondues dans cette puissance. *On peut toujours trouver directement le premier chiffre de la*

racine ; mais la recherche des autres chiffres exige des tâtonnemens d'autant plus nombreux que le degré de la racine à extraire est plus grand. Nous allons faire voir comment on peut *extraire la racine cubique.* Il sera facile d'en déduire le moyen d'extraire la racine d'un degré quelconque.

264. Les cubes des nombres, 1, 10, 100, etc., étant 1, 1 000, 1 000 000, etc. ; les nombres compris entre, 1, 1000, 1 000 000, etc., ont des racines cubiques qui sont comprises entre, 1, 10, 100, etc. Et par conséquent, *les nombres de, 1, 2, ou 3 chiffres, n'ont qu'un seul chiffre à leur racine cubique ; les nombres de 4, 5, ou 6 chiffres, ont deux chiffres à leur racine cubique ; et ainsi de suite.*

265. Les nombres moindres que 1000, n'ayant qu'un seul chiffre à leur racine cubique, les racines cubiques de ces nombres se déduiront de la *table* suivante....

Racines......	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Cubes........	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

266. Pour *revenir du cube d'un nombre de deux chiffres à sa racine*, on examinera la composition de ce cube. Si a désigne les dixaines de la racine et b les unités ; la racine sera $(10a+b)$ et le cube sera donné par la formule (nº 261),

$$(1)\ldots(10a+b)^3 = a^3 \text{ mille} + 3a^2 \times b \text{ centaines} + 3ab^2 \text{ dixaines} + b^3 \text{ unités}.$$

267. *Le cube, d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient donc, le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités et le cube des unités. Ces quatre produits expriment respectivement, des mille, des centaines, des dixaines et des unités.* Par exemple, si la racine était 64, on aurait....

$$(60+4)^3 = 216 \text{ mille} + 432 \text{ centaines} + 288 \text{ dixaines} + 64 = 262\,144.$$

268. Voyons comment on peut *revenir du cube* 262 144, *à sa racine* 64. Le cube des dixaines etant des mille, ne peut se trouver que dans les 262 mille de 262 144 et l'on démontrerait, comme dans le nº 171, que la racine cubique du plus grand cube contenu dans 262, doit exprimer les dixaines de la racine cherchée. Mais, ce plus grand cube est 216, ou 6^3. Le chiffre des dixaines de la racine est donc $a=6$. Le nombre 262 144, diminué du cube de 6 dixaines, donne le *reste* 46 144 ; ce *reste* contient $3a^2b$ centaines $+\,3a^2b$ dixaines $+\,b^3$ unités. Les 461 centaines du *reste*, renferment donc le terme $3a^2b$, plus la retenue de centaines fournie par les deux dernières parties du cube ; divisant donc 461, par 108, qui est égal à $3a^2$, les quatre unités du quotient exprimeront ou le chiffre b des unités de la racine, ou un chiffre plus grand. Le cube de 64 étant 262 144, la racine cherchée est 64.

269. Un procédé analogue conduit à la *racine cubique d'un nombre quelconque.* Par exemple, si l'on veut extraire la racine cubique de 273 359 449 ;

on observera que cette racine a trois chiffres (n° 264). Pour déterminer ces trois chiffres, on concevra la racine décomposée en dixaines et en unités; le cube des dixaines ne pouvant se trouver que dans les mille du nombre proposé, la racine du plus grand cube contenu dans 273 359, sera les dixaines de la racine demandée. Opérant comme dans le n° 268, on trouvera que la racine cubique du nombre proposé contient 64 dixaines. Pour trouver les unités, on retranchera du nombre proposé, le cube des 64 dixaines; le *reste r*, sera 11 215 449. Désignant le nombre 64 des dixaines de la racine, par a, et nommant b le chiffre des unités, la racine cherchée sera $(10a+b)$, et le *reste r* contiendra les trois dernières parties du cube de $(10a+b)$, ou $3a^2b$ centaines $+ 3ab^2$ dixaines $+ b^3$ unités. Les 112 154 centaines du *reste*, renferment donc le terme $3a^2b$, plus les centaines contenues dans la somme des deux dernières parties du cube. Divisant donc 112 154, par $3a^2$, ou par 12 288, les 9 unités du quotient exprimeront le chiffre b des unités, ou un chiffre plus grand. Le cube de 649 étant égal au nombre proposé, la racine demandée est 649. Ces exemples suffisent pour mettre en état d'extraire la racine cubique d'un nombre entier quelconque. Occupons-nous des fractions.

270. Le cube de la fraction $\frac{b}{a}$, étant $\frac{b}{a} \times \frac{b}{a} \times \frac{b}{a}$, ou $\frac{b^3}{a^3}$; *la racine cubique d'une fraction est égale à la racine cubique du numérateur, divisée par la racine cubique du dénominateur.* Ainsi, la racine cubique de $\frac{8}{27}$, est $\frac{2}{3}$.

271. Raisonnant comme dans le n° 184, on sera conduit à cette règle générale : *Pour extraire la racine cubique d'un nombre, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé; préparez le nombre de manière qu'il contienne le triple du nombre des décimales que vous voulez obtenir à la racine; faites abstraction de la virgule décimale, et calculez la valeur entière approchée de la racine cubique du nombre ainsi préparé; séparez autant de décimales sur la droite de cette racine que l'exige l'approximation demandée. Le résultat sera la racine cherchée.* Ainsi, pour obtenir la racine cubique de 2,7, à moins d'un centième d'unité près, on écrira 2,700 000; supprimant la virgule et calculant la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique de 2 700 000, on trouvera 139; la racine demandée est donc 1,39; et en effet, 2,7 tombe entre les cubes de 1,39 et de 1,40. Pour se rendre compte de ce procédé, on observera que....

$$\sqrt[3]{2{,}7} = \sqrt[3]{2{,}700\,000} = \sqrt[3]{\frac{2\,700\,000}{1\,000\,000}} = \frac{\sqrt[3]{2\,700\,000}}{\sqrt[3]{1\,000\,000}} = \frac{\sqrt[3]{2\,700\,000}}{100}.$$

Or, $\sqrt[3]{2\,700\,000}$, tombe entre 139 et 140; $\frac{\sqrt[3]{2\,700\,000}}{100}$, tombe donc entre

$\frac{139}{100}$ et $\frac{140}{100}$. La racine cubique de 2,7, à moins d'un centième d'unité près, est donc 1,39.

272. Problème. *Calculer la racine du degré m d'un nombre $\frac{p}{q}$, à moins de $\frac{b}{a}$ d'unité près.* Pour y parvenir, on fera (1)... $\sqrt[m]{\frac{p}{q}} = \frac{b}{a}x$. Calculant la plus petite valeur entière approchée de x et désignant cette valeur par c; la racine demandée sera $\frac{bc}{a}$, car la valeur exacte de x, tombant entre c et $(c+1)$, la valeur de $\sqrt[m]{\frac{p}{q}}$, tombera entre $\frac{b}{a}c$ et $\frac{b}{a}(c+1)$; l'erreur commise en prenant $\frac{bc}{a}$, pour la racine, sera donc moindre que $\frac{b}{a}$. Si l'on veut obtenir la racine cubique de 12, à moins de $\frac{2}{3}$ d'unité près, on posera....

$$\sqrt[3]{12} = \frac{2}{3}x\,;\ \text{d'où } x^3 = \frac{27}{8} \times 12 = \frac{81}{2} = 40{,}5\,;\ x = \sqrt[3]{40{,}5} = 3, \text{ etc.}$$

La plus petite valeur entière approchée de x étant 3, la racine demandée est les $\frac{2}{3}$ de 3, ou 2; et en effet, 12 tombe entre 2^3 et $\left(2+\frac{2}{3}\right)^3$.

273. Le principe du n° 243, donne le moyen de *simplifier les calculs relatifs aux extractions de racines.* Par exemple, 6 étant le produit de 2 par 3, on trouvera la racine sixième de 148 035 889, en prenant la racine cubique de la racine quarrée de ce nombre. Or....

$$\sqrt[2]{148\,035\,889} = 12\,167 \text{ et } \sqrt[3]{12\,167} = 23.$$

La racine cherchée est donc 23.

Fractions continues.

274. Nous avons fait connaître plusieurs *propriétés des fractions continues* (A, n^{os} 186... 192). Nous allons d'abord démontrer que ces propriétés sont générales. Nous établirons ensuite quelques principes qui serviront dans la résolution des équations numériques.

275. *Pour convertir une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ (moindre que l'unité), en fraction continue, il suffit de chercher le plus grand commun*

diviseur entre n et m. Si les quotiens successifs sont, p', p'', p''', etc.,

on aura... $\frac{m}{n} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \text{etc.}}}$

En effet; la division de n par m, donnera un quotient p' et un *reste* r'; divisant m par r', le quotient sera p'' et le *reste* r''. Et ainsi de suite. On aura...

$$n = mp' + r'\;;\; m = r'p'' + r''\;;\; r' = r''p''' + r'''\;;\;\text{etc. D'où (A, n° 187)...}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{mp'+r'} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{r'}{m}} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{r'}{r'p''+r''}} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{r''}{r'}}}\;;\;\text{etc.}$$

Or, en continuant ces divisions, on parviendra toujours à un *reste* égal à l'unité, (A, n° 58). Le principe est donc démontré.

276. La *conversion des fractions continues en fractions ordinaires*, s'exécute d'après la règle qui a été donnée en arithmétique (n° 189). Ainsi, pour réduire la fraction continue $\cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p''}}$, en fraction ordinaire, on effectuera le calcul suivant...

$$p' + \frac{1}{p''} = \frac{p'p''+1}{p''}\;;\qquad \frac{1}{\left(p' + \frac{1}{p''}\right)} = \frac{p''}{p'p''+1}.$$

277. Pour éviter des répétitions inutiles, nous supposerons toujours...

$$x = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \text{etc.}}}}}}}\;;\qquad y = q''' + \cfrac{1}{q'''' + \text{etc.}}\;;$$

$$\text{d'où, } x = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{y}}}}\;;\qquad \frac{1}{p'} = \frac{b'}{a'}\;;\qquad \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p''}} = \frac{b''}{a''}\;;$$

$$\cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{1}{p'''}}} = \frac{b'''}{a'''}\;;\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots + \cfrac{1}{q}}}\;;\qquad \frac{\beta'}{\alpha'} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q'}}}}\;;$$

$$\frac{\beta''}{\alpha''} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q''}}}}\;;\qquad \frac{\beta'''}{\alpha'''} = \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q'''}}}}.$$

Les *fractions convergentes*, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b''}{a''}$, etc., seront les *réduites* successives ; $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, etc., seront des *réduites* d'un rang quelconque ; $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b'''}{a'''}$,.., $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$, seront les *réduites* de rang impair, et celles de rang pair seront $\frac{b''}{a''}$,.., $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta''}{\alpha''}$, etc. (*). Les derniers *quotiens* contenus dans, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b''}{a''}$, . . , $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\beta''}{\alpha''}$, etc., seront p', p'',..., q, q', q'', etc. *Pour déduire* $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$, *de* $\frac{\beta''}{\alpha''}$, *il suffira de mettre*, $q''+\frac{1}{q'''}$, *au lieu de* q'', *dans la valeur de* $\frac{\beta''}{\alpha''}$ *et pour obtenir* x, *il suffira de changer* q''' *en* y, *dans* $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$. *La valeur de* y *sera toujours positive et plus grande que l'unité.* La règle du n° 276, donnera...

(1)... $\frac{b'}{a'}=\frac{1}{p'}$; $\frac{b''}{a''}=\frac{p''}{p'p''+1}$; $\frac{b'''}{a'''}=\frac{p''p'''+1}{(p'p''+1)p'''+p'}$; etc. (**). D'où...

(2)... $b'''=b''p'''+b'$; $a'''=a''p'''+a'$; $a''b'-a'b''=+1$; $a'''b''-a''b'''=-1$.

278. *Toutes les réduites peuvent se déduire des deux premières, au moyen de la formule générale...*

$$(3)\ldots\ \beta'''=\beta''q'''+\beta';\qquad \alpha'''=\alpha''q'''+\alpha'.$$

En effet ; les égalités (2), du n° 277, démontrent que la loi exprimée par les formules (3), convient aux premières réduites, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b''}{a''}$, $\frac{b'''}{a'''}$. Il suffit donc de prouver que si la loi énoncée convient aux réduites, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\beta''}{\alpha''}$, la même loi conviendra aux réduites, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$. Supposant donc...

$$(4)\ldots\ \beta''=\beta'q''+\beta\quad \text{et}\quad \alpha''=\alpha'q''+\alpha,$$

(*) En arithmétique, la *réduite* $\frac{b'}{a'}$, était la 2e *fraction convergente*. On devra donc se rappeler, quand on comparera les règles que nous allons donner, avec celles qui ont été données en arithmétique, que l'ordre des *réduites* changera ; *les réduites de rang impair deviendront de rang pair et réciproquement.*

(**) On peut déduire $\frac{b'''}{a'''}$ de $\frac{b''}{a''}$, en mettant $p''+\frac{1}{p'''}$, au lieu de p'', dans la valeur $\frac{p''}{p'p''+1}$, de $\frac{b''}{a''}$.

il faut en déduire les formules (3). Or, $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$ se déduit de $\frac{\beta''}{\alpha''}$, en mettant $q''+\frac{1}{q'''}$, au lieu de q'', dans $\frac{\beta''}{\alpha''}$ (n° 277). Donc...

$$\frac{\beta'''}{\alpha'''}=\frac{\beta'\left(q''+\frac{1}{q'''}\right)+\beta}{\alpha'\left(q''+\frac{1}{q'''}\right)+\alpha}=\frac{(\beta'q''+\beta)q'''+\beta'}{(\alpha'q''+\alpha)q'''+\alpha'}=\frac{\beta''q'''+\beta'}{\alpha''q'''+\alpha'}.$$

Ce qui démontre le principe énoncé. Les formules (3) sont donc générales. On en déduit cette règle abrégée : *Pour calculer les réduites successives; écrivez les quotiens, p'', p''', etc., par ordre et sur une même ligne. Calculez les deux premières réduites*, $\frac{1}{p'}$, $\frac{p''}{p'p''+1}$; *posez ces réduites sous p'' et p'''. Pour en déduire la 3e réduite; multipliez les deux termes de la 2e réduite, par le quotient p''' qui se trouve au-dessus; les produits, augmentés des deux termes de la 1re réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 3e réduite; la 4e réduite se déduira de la 3e et de la 2e, comme la 3e s'est déduite des deux précédentes. Et ainsi de suite. On peut simplifier le calcul en posant $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{p'}$, sous les quotiens, p', p''. La 2e réduite se déduit des fractions*, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{p'}$, *d'après la loi énoncée*, (A, n° 192).

279. *Les fractions continues, qui expriment des fractions ordinaires, sont toujours composées d'un nombre limité de termes, p', p'', etc.*; et la règle précédente conduit à une dernière réduite qui est égale à la fraction continue totale. Mais, *il existe des quantités incommensurables dont les valeurs sont exprimées par des fractions continues qui se prolongent à l'infini.* Dans ce cas, on ne parvient jamais à la valeur exacte de la fraction continue, mais nous ferons voir (n° 286), qu'*on peut toujours obtenir une réduite qui approche autant que l'on veut de la fraction continue totale.* Cette propriété repose sur des principes que nous allons d'abord établir.

280. Les formules (4) et (3) du n° 278, démontrent que *les dénominateurs α'', α''', etc., des réduites, croissent très-rapidement.* Par conséquent; *lorsque la fraction continue ne sera pas terminée, on pourra toujours parvenir à une réduite dont le dénominateur sera plus grand qu'une quantité donnée.*

281. *Si $\frac{B}{A}$ et $\frac{B'}{A'}$, désignent deux réduites consécutives quelconques; l'expression* $A'B-AB'$, *sera égale à $+1$ ou à -1, selon que $\frac{B}{A}$ sera*

de rang impair ou de rang pair. En effet; les formules (2) du n° 277, démontrent que cette propriété convient aux trois premières réduites, $\frac{b'}{a'}, \frac{b''}{a''}, \frac{b'''}{a'''}$. Il suffit donc de faire voir que pour trois réduites consécutives quelconques, $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\beta''}{\alpha''}$, on a... $(\alpha'\beta-\alpha\beta')=-(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')$. Cela n'offre aucune difficulté, car les formules (4), du n° 278, donnent......
$(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')=-(\alpha'\beta-\alpha\beta')$. On a donc... $\alpha'\beta-\alpha\beta'=-1$; $\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha\alpha'}$.

282. *Ces formules démontrent, que les fractions convergentes,* $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta'}{\alpha'}$; *sont irréductibles et que les réduites de rang impair, sont plus grandes que celles de rang pair.*

283. *Les réduites,* $\frac{b'}{a'}, \frac{b''}{a''}$, *etc., sont alternativement plus grandes et plus petites que la fraction continue totale* x. En effet; la valeur de x, se déduit de $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$, en changeant q''' en y, dans $\frac{\beta'''}{\alpha'''}$ (n° 277). Mais....

$$\frac{\beta'''}{\alpha'''}=\frac{\beta''q'''+\beta'}{\alpha''q'''+\alpha'} \text{ (n° 278). Donc, } x=\frac{\beta''y+\beta'}{\alpha''y+\alpha'}.$$

On en déduit, (1)... $x-\frac{\beta''}{\alpha''}=\left(\frac{\beta'}{\alpha'}-x\right)\frac{\alpha'}{y\alpha''}$.

Or, $\frac{\alpha'}{y\alpha''}$ est positif; la valeur de x est donc comprise entre $\frac{\beta'}{\alpha'}$, et $\frac{\beta''}{\alpha''}$. Mais, la première réduite $\frac{1}{p'}$, est plus grande que x, car son dénominateur p' est moindre que le dénominateur $p'+\frac{1}{p''+\text{etc.}}$, de x. Par conséquent; *les réduites de rang impair sont plus grandes que x et celles de rang pair sont moindres que x.*

284. *Les réduites approchent de plus en plus de la valeur de la fraction continue totale.* En effet; les inégalités, $y>1$, $\alpha''>\alpha'$ (n°s 277 et 280), démontrent que $\frac{\alpha'}{y\alpha''}$ est moindre que l'unité. Mais, les deux membres de l'équation (1) sont positifs (n° 283); $x-\frac{\beta''}{\alpha''}$ est donc moindre que $\frac{\beta'}{\alpha'}-x$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. *Les propriétés des* n°s 283 et 284, *prouvent que les réduites de rang impair vont en diminuant et que celles de rang pair vont en augmentant.* On peut le démontrer directement, car les formules (3) et (4) du n° 278, combinées avec le principe du n° 281, donnent....

$$\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'} - \frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = \frac{+q'''}{\alpha'\alpha'''} \text{ et } \frac{\mathcal{C}''}{\alpha''} - \frac{\mathcal{C}}{\alpha} = + \frac{q''}{\alpha\alpha''}.$$

285. *Lorsqu'on prend une réduite* $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, *au lieu de la fraction continue totale* x; *l'erreur est moindre que* $\frac{1}{\alpha^2}$. En effet; le principe du n° 281, donne....

$$\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'} - \frac{\mathcal{C}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\alpha'}. \text{ Or, (n° 280), } \frac{1}{\alpha\alpha'} < \frac{1}{\alpha^2}. \text{ Donc, } \frac{\mathcal{C}'}{\alpha'} - \frac{\mathcal{C}}{\alpha} < \frac{1}{\alpha^2}.$$

Mais, la valeur de x est comprise entre $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, et $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ (n° 283). Le principe est donc démontré.

286. *Quand la valeur incommensurable, d'une inconnue* x, *est donnée par une fraction continue, on peut toujours obtenir une valeur de* x, *assez approchée, pour que l'erreur soit moindre qu'une quantité donnée* $\frac{b}{a}$. *Il suffit de continuer les calculs du* n° 278, *jusqu'à ce qu'on parvienne à une réduite* $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, *telle que* α *soit plus grand que* $\sqrt{\frac{a}{b}}$. *Cette réduite jouit de la propriété demandée.* En effet; l'erreur commise en prenant $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ au lieu de la fraction continue totale x, étant moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$ (n° 285), il s'agit de satisfaire à la condition $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{b}{a}$; or cette inégalité donne $\alpha > \sqrt{\frac{a}{b}}$ et l'on peut toujours obtenir une réduite $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, dont le dénominateur soit plus grand que $\sqrt{\frac{a}{b}}$, (n° 280). Le principe est donc démontré.

287. Pour appliquer cette théorie générale à des exemples, nous considérerons les fractions continues....

$$z = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19 + \text{etc.}}}}}; \qquad t = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}}}}.$$

Si l'on forme les valeurs approchées de la fraction continue qui exprime z, la règle du n° 278, conduira au calcul suivant....

Quotiens, 2, 2, 1, 19, etc.

Réduites, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{59}{138}$, etc.

Prenant, $z = \frac{59}{138} = 0{,}4275$ etc., cette valeur de x sera trop petite, mais l'erreur sera moindre que $\left(\frac{1}{138}\right)^2$, ou que $0{,}00005$ etc. On trouvera de même, $t = 0{,}76808$ etc.

Théorie du plus grand commun diviseur.

288. Un monôme ou un polynôme est *premier*, quand il n'est divisible que par lui-même et par l'unité (*). Le trinôme $x^2 - 5x + 6$, étant le produit de $x - 2$, par $x - 3$, et chacun de ces binômes n'étant divisible que par lui-même et par l'unité, les facteurs ou diviseurs *premiers* de $x^2 - 5x + 6$, sont $x - 2$ et $x - 3$. Des *quantités* sont *premières entr'elles*, quand elles n'ont pas de facteur commun. Ainsi, les produits, a^2b, c^2d^3, sont *premiers entr'eux*. Les trinômes, $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 5x + 4$, sont premiers entr'eux, car les facteurs premiers de $x^2 - 5x + 6$, sont $x - 2$, $x - 3$, et ceux de $x^2 - 5x + 4$, sont $x - 1$ et $x - 4$.

* 289. La *théorie du plus grand commun diviseur*, repose sur des principes que nous allons établir. *Les propriétés des facteurs premiers, qui ont été démontrées en arithmétique (nos 366...372), conviennent aux quantités algébriques qui ne renferment que des exposans entiers positifs*. Pour le démontrer, on répétera les raisonnemens qui ont été employés en arithmétique, on n'admettra que des exposans entiers positifs, au quotient (no 60), et l'on se rappellera que *les grandeurs des quantités algébriques ne dépendent que des exposans* (no 18). Ce qui conduira aux principes suivans; 1o *Lorsqu'une fraction* $\frac{B}{A}$ *est égale à une fraction irréductible* $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{a}}$, *on peut en conclure*, $B = \mathfrak{C}n$ et $A = \mathfrak{a}n$ (A, no 366); 2o. *Les seules opérations qui n'altèrent pas la valeur d'une fraction, sont la multiplication et la division de ses deux termes, par une même quantité* (A, no 367); 3o. *Une fraction est irréductible, quand ses deux termes n'ont aucun facteur commun* (A, no 368); 4o. *Le produit* $\mathfrak{a}\mathfrak{C}$ *étant*

(*) Dans toute cette théorie (du no 288 au no 306), nous supposerons que les quantités proposées ne renferment que des exposans entiers positifs et que les coefficiens sont des nombres entiers. Sous ce point de vue, a et b sont les *facteurs premiers* de a^2b. Cela ne serait plus vrai si l'on admettait des radicaux, car on pourrait considérer a, comme le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{a}$. Lorsque a et b désignent des polynômes, a et b peuvent ne pas être *premiers*; par exemple, quand $a = x^2 - 1$, a n'est plus un facteur *premier*, car $x^2 - 1$ est divisible par $x - 1$ et par $x + 1$. Tout ce que nous dirons, ne sera donc relatif qu'à la forme *actuelle* de chaque quantité.

divisible par γ, *et* γ *n'ayant pas de facteur commun avec* $\mathcal{C}$; γ *divise nécessairement* α (A, n° 369); 5°. *Quand un facteur premier* p, *divise* $\mathcal{C}^r$; p *divise nécessairement* $\mathcal{C}$ (A, n° 370); 6°. *Lorsque la fraction* $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ *est irréductible, la fraction* $\frac{\mathcal{C}^r}{\alpha^s}$ *est également irréductible* (A, n° 371); *et par conséquent*, 7° lorsque α et $\mathcal{C}$ sont premiers entr'eux, α^s *et* $\mathcal{C}^r$ *sont aussi premiers entr'eux.*

* 290. *Quand un facteur premier* p, *divise un produit; p divise nécessairement un des facteurs du produit.* En effet; supposons que p, divisant le produit $\alpha\,\mathcal{C}\,\gamma$, p ne divise ni α ni $\mathcal{C}$; p sera premier avec α et avec $\mathcal{C}$. Mais, p divise $\alpha \times \mathcal{C}\gamma$; p divise donc $\mathcal{C}\gamma$, (n° 289. 4°); p divise donc γ, (n° 289. 4°). La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs.

* 291. *Lorsque les quantités*, p, $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, *n'ont aucuns facteurs communs*; $p_{,,}{}^t$ *et* $p^r\,p_{,}{}^s$, *sont premiers entr'eux*; $p_{,,,}{}^u$ *et* $p^r\,p_{,}{}^s\,p_{,,}{}^t$ *sont premiers entr'eux. Et ainsi de suite.* En effet; si $p_{,,}{}^t$ et $p^r \times p_{,}{}^s$, avaient un facteur *premier* commun α; α diviserait $p^t{}_{,,}$; α diviserait donc $p_{,,}$ (n° 289. 5°); or, α ne peut diviser $p_{,}$; α et $p_{,}{}^s$ seraient donc premiers entr'eux; mais α divise $p^r \times p_{,}{}^s$; α diviserait donc p^r (n° 289. 4°); α diviserait donc p, (n° 289. 5°); p et $p_{,,}$ auraient donc un facteur commun α; ce qui est contre l'hypothèse. $p^t{}_{,,}$ et $p^r\,p^s{}_{,}$, sont donc premiers entr'eux. On démontrerait de même que $p_{,,,}{}^u$ et $p^r\,p_{,}{}^s\,p_{,,}{}^t$, sont premiers entr'eux, car en supposant qu'un facteur premier α pût diviser ces deux quantités; α diviserait $p_{,,,}$; mais α ne diviserait ni p ni $p_{,}$; α serait donc premier avec p^r et $p^s{}_{,}$; α diviserait $p^r \times p_{,}{}^s\,p_{,,}{}^t$; α diviserait donc $p^s{}_{,}\,p^t{}_{,,}$; α diviserait donc $p^t{}_{,,}$ (n° 289. 4°); α diviserait donc $p_{,,}$ (n° 289, 5°); $p_{,,}$ et $p_{,,,}$ auraient donc un facteur commun α. Ce qui est contre l'hypothèse. Et ainsi de suite. Le principe est donc démontré.

* 292. *Lorsque*, p, $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, *etc., n'ayant aucuns facteurs communs*; p^r, $p_{,}{}^s$, $p_{,,}{}^t$, *etc., divisent* A^{p^r} *on peut en conclure que* A *est divisible par le produit*, $p^r\,p_{,}{}^s p_{,,}{}^t$ *etc.* En effet; p^r divise A; donc, $A = p^r \times \alpha$. Or, $p_{,}{}^s$ et p^r sont premiers entr'eux (n° 289. 7°) et $p_{,}{}^s$ divise $p^r\,\alpha$; $p_{,}{}^s$ divise donc α (n° 289. 4°). Ainsi, $\alpha = \mathcal{C}p_{,}{}^s$; d'où $A = \mathcal{C}p^r p_{,}{}^s$. Mais, $p_{,,}{}^t$ et $p^r\,p_{,}{}^s$ sont premiers entr'eux (n° 291), et $p_{,,}{}^t$ divise le produit $\mathcal{C} \times (p^r\,p_{,}{}^s)$; $p_{,,}{}^t$ divise donc $\mathcal{C}$ (n° 289. 4°). Donc, $\mathcal{C} = \gamma\,p_{,,}{}^t$; donc $A = \gamma\,p^r\,p_{,}{}^s\,p_{,,}{}^t$. Et ainsi de suite.

293. *Le plus grand commun diviseur entre des quantités, est le plus grand de tous les diviseurs communs à ces quantités.* Or, les quantités algébriques les plus grandes sont celles dont les *degrés* sont les plus élevés (nos 16, 17 et 18). *Le plus grand commun diviseur entre des quantités algébriques, est donc le diviseur du degré le plus élevé* (n° 16) *qui divise en même temps ces quantités.* Le plus grand commun diviseur entre $a^2\,b^2\,c$ et $a^3\,bq$, est donc $a^2\,b$. Soit......

$$A = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2);\ B = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$
$$A' = (x-1)(x+1)(x+3)(y+1)(y-2);\ B' = (x-1)(x+1)(x+4)(y+1)(y-3).$$

Si l'on effectue les multiplications, on trouvera....

$A = x^4 - 5x^2 + 4$; $B = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

$A' = (y^2 - y - 2)x^3 + (3y^2 - 3y - 6)x^2 - (y^2 - y - 2)x - 3y^2 + 3y + 6$;

$B' = (y^2 - 2y - 3)x^3 + (4y^2 - 8y - 12)x^2 - (y^2 - 2y - 3)x - 4y^2 + 8y + 12$.

Les *diviseurs premiers* communs à A et B, seront $x-1$, $x+1$ et $x-2$; les diviseurs communs à A et B, seront donc (n° 292), $x-1$, $x+1$, $x-2$, $(x-1)(x+1)$, ou x^2-1; $(x-1)(x-2)$, ou x^2-3x+2; $(x+1)(x-2)$, ou x^2-x-2; $(x-1)(x+1)(x-2)$, ou....... x^3-2x^2-x+2. Ainsi, A et B ont, 3 *diviseurs du premier degré en* x, 3 *diviseurs du* 2^e^ *degré, et un seul plus grand commun diviseur* x^3-2x^2-x+2. Les diviseurs communs entre A' et B' seront, $x-1$, $x+1$, $y+1$, $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(y+1)$, $(x+1)(y+1)$; et............ $(x-1)(x+1)(y+1)$, ou x^2y+x^2-y-1. Le plus grand commun diviseur, entre A' et B', est donc le polynôme du 3^e^ degré, x^2y+x^2-y-1.

* 294. *Deux quantités quelconques, B et A, ne peuvent avoir qu'un seul plus grand commun diviseur.* En effet, si B et A avaient deux plus grands communs diviseurs, D, d, du degré m; il existerait nécessairement un facteur premier α, qui ne serait pas élevé à la même puissance dans D et d. On aurait donc, $D = m\alpha^r$ et $d = n\alpha^{r+s}$ (*); B et A seraient donc divisibles par m et par α^{r+s}; or, m et α sont premiers entr'eux; m et α^{r+s}, n'ont donc pas de facteurs communs (289. 7°); B et A seraient donc divisibles par $m\alpha^{r+s}$ (n° 292), c'est-à-dire par $D\alpha^s$; B et A auraient donc un commun diviseur $D\alpha^s$, d'un degré plus élevé que leur plus grand commun diviseur. Ce qui est impossible. Le principe est donc démontré.

295. *Le plus grand commun diviseur entre des monômes, est facile à découvrir, car il suffit de multiplier le plus grand commun diviseur des coefficiens numériques de ces monômes, par le plus grand commun diviseur algébrique des monômes.* Ce dernier est en évidence et l'on a vu (A, n° 61), comment on peut trouver le plus grand commun diviseur numérique. Par exemple, le plus grand commun diviseur entre les trois monômes, $48a^2b^3$, $18a^3b^4$, $15a^2b^2c$, sera le produit $3a^2b^2$, du plus grand commun diviseur 3, entre 48, 18 et 15, par le plus grand commun diviseur a^2b^2, entre a^2b^3, a^3b^4 et a^2b^2c. Si l'on divise les monômes proposés, par leur plus grand commun diviseur $3a^2b^2$, les quotiens $16b$, $6ab^2$, $5c$, seront premiers entr'eux.

296. *Pour trouver le plus grand commun diviseur entre des polynômes A, B, C, etc.; on cherchera d'abord le plus grand commun diviseur monôme δ, entre les termes de ces polynômes* (n° 295). *Pour obtenir δ, on déterminera le plus grand commun diviseur monôme entre les termes*

(*) r et s sont des nombres entiers positifs; r peut être zéro.

de chaque polynôme. Si, α, β, etc., désignent ces communs diviseurs, on divisera, A par α, B par β, etc.; ce qui donnera des quotiens, A', B', etc.; on aura donc, $A = \alpha A'$, $B = \beta B'$, etc. Aucun monôme ne pourra diviser A', ou B', ou etc. Le plus grand commun diviseur entre les monômes, α, β, etc., *exprimera δ. Le plus grand commun diviseur entre A', B', C', etc., sera un polynôme D' et le plus grand commun diviseur entre, A, B, C, etc., sera $\delta \times D'$. Or, on sait trouver δ* (n° 295). La question est donc réduite à *chercher le plus grand commun diviseur D', entre des polynômes, A', B', C', etc., qui ne renferment plus de diviseurs monômes.*

297. *La règle qui a été donnée* (A, n° 58), *pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers, convient aux polynômes.* En effet; si D' désigne le plus grand commun diviseur entre deux polynômes A', B'; D' ne pourra pas être plus grand que la plus petite des quantités A', B'; car D' doit diviser A' et B'. Quand A' ne sera pas moindre que B', on sera conduit à diviser A' par B', car dans le cas où la division réussirait, le plus grand commun diviseur entre A' et B', serait B'. Divisant donc A', par B', on obtiendra un quotient Q' et un *reste* R', moindre que B' (n° 60). On aura, $A' = B'Q' + R'$. Lorsque R' sera nul, le plus grand commun diviseur entre A' et B', sera B'. *Quand R' ne sera pas nul, le plus grand commun diviseur D', entre A' et B', sera le même que le plus grand commun diviseur d', entre B' et R'.* En effet; D' divise A' et B'; D' divise donc $A' - B'Q'$; D' divise donc B' et R'; D' ne peut donc pas être plus grand que le plus grand commun diviseur d', entre B' et R'. Mais, d' divise B' et R'; d' divise donc $B'Q' + R'$, ou A'; d' divise donc A' et B'; d' ne peut donc pas être plus grand que le plus grand commun diviseur D', entre A' et B'. Les diviseurs D', d', ne peuvent donc pas être plus grands l'un que l'autre; ces diviseurs sont donc égaux.

298. *Le plus grand commun diviseur entre deux quantités, est donc le même que le plus grand commun diviseur entre la plus petite de ces quantités et le* reste *de la division de la plus grande quantité par la plus petite.* La question est donc réduite à trouver le plus grand commun diviseur entre deux quantités, B' et R', respectivement moindres que A' et B'. On divisera donc B', par R'; ce qui donnera un quotient Q'' et un *reste* R''. On aura, $B' = R'Q'' + R''$; lorsque R'' sera nul, le plus grand commun diviseur D', entre B' et R', sera R'. Quand R'' ne sera pas nul, le plus grand commun diviseur D', entre A' et B', sera le même que celui des quantités, R', R''. Et ainsi de suite. Les équations, $A' = B'Q' + R'$, $B' = R'Q'' + R''$, etc., démontrent que *D divise tous les restes*, R', R'', *etc.*, et que *le plus grand commun diviseur entre deux restes quelconques, est le même que le plus grand commun diviseur des quantités proposées.* Mais, lorsqu'un *reste* r, divise exactement le *reste* précédent r', le plus grand commun diviseur entre r' et r, est r. *Deux polynômes ne peuvent donc avoir qu'un seul plus grand commun diviseur.* On en déduit cette règle générale:

299. *Pour trouver le plus grand commun diviseur D', entre deux quantités, A', B', telles que A' n'est pas moindre que B'; divisez A' par B'. Lorsque le reste R' sera nul, B' sera égal à D'; quand R' ne sera pas zéro, divisez B' par R'; lorsque le reste R'', de cette nouvelle division, sera zéro, le diviseur R' exprimera D'; quand R'' ne sera pas nul, divisez R' par R''; et ainsi de suite. Le reste qui divisera le reste précédent, sera le plus grand commun diviseur demandé. Le plus grand commun diviseur, divise tous les restes.*

300. *Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur entre deux quantités, on peut toujours en déduire le plus grand commun diviseur entre un nombre quelconque de quantités.* Par exemple, pour trouver le plus grand commun diviseur de trois quantités, A, B, C; on cherchera, le plus grand commun diviseur d, entre A et B; le plus grand commun diviseur D, entre d et C, sera le plus grand commun diviseur demandé. En effet; si l'on divise A et B, par leur plus grand commun diviseur d, les quotiens, p, q, n'auront pas de facteurs communs; et si l'on divise C et d, par leur plus grand commun diviseur D, les quotiens p', q', seront premiers entr'eux. On aura....

$$A=pd;\ B=qd;\ C=p'D,\ d=q'D. \text{ D'où, } A=pq'D,\ B=qq'D,\ C=p'D.$$

Il suffit donc de prouver que si l'on divise, A, B, C, par leur commun diviseur D, les trois quotiens, pq', qq', p', n'auront pas de facteurs communs. Si un facteur premier α, pouvait diviser ces trois quantités; α diviserait p' et α ne diviserait pas q', car p' et q' sont premiers entr'eux; α et q' seraient donc premiers entr'eux. Mais, α diviserait les produits, pq', qq'; α diviserait donc p et q, (n° 289. 4°); ce qui est impossible, puisque p et q n'ont pas de facteurs communs. D est donc le plus grand commun diviseur entre, A, B, C. La même démonstration pouvant s'appliquer à un nombre quelconque de quantités, on en déduit cette règle générale :

301. *Pour trouver le plus grand commun diviseur entre des quantités, A, B, C, etc.; il suffit de chercher successivement; le plus grand commun diviseur δ, entre A et B; le plus grand commun diviseur δ', entre δ et C; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière des quantités proposées. Le plus grand commun diviseur obtenu dans la dernière opération, est celui des quantités, A, B, C, etc.*

302. *Pour trouver le plus grand commun diviseur D', entre deux polynômes, A', B'; on ordonnera ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x; ce qui donnera....*

$$A'=P'x^m+Q'x^{m-1}+\ldots+S'x+T' \text{ et } B'=p'x^n+q'x^{n-1}+\ldots+s'x+t'.$$

Si m n'est pas moindre que n, on divisera A', par B'; on obtiendra un reste $R'=a'x^{n-1}+$ etc. La division de B' par R', donnera un reste $R''=a''x^{n-2}+$ etc.; continuant à diviser les restes les uns par les autres, on parviendra, après n divisions tout au plus, à un reste R_2

dans lequel l'exposant de x sera zéro. Ce reste sera donc indépendant de x. Quand R sera nul, le reste précédent exprimera D'. Quand le reste R, indépendant de x, ne sera pas nul, on en conclura que le plus grand commun diviseur D', est indépendant de x, car D' doit diviser R (n° 299). D' devra donc diviser les coefficiens, $P', Q', \ldots, S', T', p', q', \ldots, s', t'$, des polynômes A', B'; D' sera donc le plus grand commun diviseur entre ces coefficiens; or ces coefficiens ne renferment pas x; la question sera donc réduite à trouver le plus grand commun diviseur entre des quantités qui renferment une lettre de moins que A' et B'. Par une raison semblable, on obtiendra directement le plus grand commun diviseur D', entre P', Q', etc., ou D' dépendra de la recherche du plus grand commun diviseur entre des quantités qui contiendront deux lettres de moins que A' et B'. Continuant à opérer de la même manière, on obtiendra directement D', ou D' sera le plus grand commun diviseur entre des nombres et l'on sait trouver ce commun diviseur (A, nos 58 et 61). Le problème est donc résolu. Par exemple; soit...

$$A' = x^4 - 5x^2 + 4 \text{ et } B' = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6.$$

La division de A', par B', donnera un *reste* $R' = -x^3 + 2x^2 + x - 2$. Divisant B', par R', le *reste* sera zéro. Le plus grand commun diviseur entre A' et B', est donc $-x^3 + 2x^2 + x - 2$, ou $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Ce qui s'accorde avec le n° 293.

303. Le procédé du n° 302, a l'inconvénient d'introduire des fractions dans les quotiens et dans les *restes*, car le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel, n'est pas toujours divisible par le coefficient du premier terme du diviseur. On évitera les fractions, au moyen du principe suivant: *On ne change pas le plus grand commun diviseur entre deux quantités A et B, en multipliant ou divisant l'une d'elles, par une quantité qui n'a aucuns facteurs communs avec l'autre quantité.* En effet; si le plus grand commun diviseur entre A et B, est D, on aura, $A = A'D$, $B = B'D$; A' et B' seront premiers entr'eux. Multipliant A, par une quantité α, *première* avec B; α sera premier avec B' et avec D; il s'agit de prouver que le plus grand commun diviseur entre $A\alpha$ et B est encore D. Or, $A\alpha = DA'\alpha$ et $B = B'D$; il suffit donc de faire voir que $A'\alpha$ et B' sont premiers entr'eux. Si un facteur premier p, divisait B' et $A'\alpha$; p et α seraient premiers entr'eux, car p divise B', et B' est premier avec α; mais p diviserait $A'\alpha$; p diviserait donc A'; A' et B' auraient donc un facteur commun p; ce qui est contre l'hypothèse. On prouverait de même que le plus grand commun diviseur ne change pas, en divisant A, par p. Le principe est donc démontré.

304. Nous allons en déduire le moyen d'*éviter les fractions*. Nous supposerons que les polynômes, A' et B', renferment $\gamma'+1$ lettres et que l'on sache trouver le plus grand commun diviseur entre des polynômes qui contiennent γ' lettres. Les coefficiens de x, dans A' et B', ne renfermeront que

γ' lettres; on saura donc trouver le plus grand commun diviseur entre ces coefficiens. Soit (n° 302),

$$A' = P'x^m + Q'x^{m-1} + \ldots + S'x + T' \text{ et } B' = p'x^n + q'x^{n-1} + \ldots + s'x + t'.$$

Si l'on divisait $P'x^m +$ *etc.*, par $p'x^n +$ *etc.*, le premier terme du quotient serait $\frac{P'}{p'}x^{m-n}$. Pour *éviter les fractions*, il faudra généralement multiplier A', par p' (*). Or, cette multiplication peut altérer le plus grand commun diviseur, car p' et B' peuvent avoir un facteur commun δ'; mais δ' est indépendant de x; δ' divisera donc tous les coefficiens, p', q' .., s', t', de B' (n° 62). Quand ces coefficiens n'auront pas de facteur commun; p' et B', seront premiers entr'eux; on pourra donc multiplier A' par p' et diviser A' par le plus grand commun diviseur α', entre P', Q'..., S', T'. On est donc conduit à chercher deux plus grands communs diviseurs, α', $\mathcal{C}'$; l'un entre, P', Q', .., S', T'; l'autre entre, p', q', .., s', t'. On aura, $A' = \alpha' A''$ et $B' = \mathcal{C}' B''$. Les polynômes, A'', B'', seront de cette forme,......... $A'' = P''x^m + Q''x^{m-1} +$ etc., $B'' = p''x^n + q''x^{n-1} +$ etc.; A'' et B'' n'auront pas de commun diviseur indépendant de x, car ce diviseur commun devrait diviser les coefficiens, P'', Q'', etc., ce qui est impossible, puisque ces coefficiens sont premiers entr'eux. *Le plus grand commun diviseur D', entre A' et B', sera le produit du plus grand commun diviseur δ', entre α' et $\mathcal{C}'$, par le plus grand commun diviseur δ'', entre A'' et B''.* Or, par hypothèse, on sait trouver δ'. Il ne s'agit donc plus que de calculer δ''. Le diviseur B'' n'ayant pas de facteur indépendant de x, on n'altèrera pas le plus grand commun diviseur δ'', entre A'' et B'', en multipliant ou en divisant chaque dividende partiel, par des quantités indépendantes de x (n° 303). Conséquemment; dans la division de A'' par B'', *on évitera les fractions*, en multipliant chaque dividende partiel, par le coefficient p'', du premier terme du diviseur, et l'*on simplifiera les calculs*, en supprimant les facteurs indépendans de x qui pourront se trouver dans ces dividendes. On parviendra ainsi à un *reste* $R' = a'x^{n-1} +$ etc., dans lequel les coefficiens de x seront premiers entr'eux. Divisant donc B'', par R', on multipliera chaque dividende par a' et l'on supprimera les facteurs indépendans de x qui pourront se trouver dans ces dividendes. Continuant à opérer de la même manière, on parviendra au *reste R indépendant de x*. Lorsque R sera nul, le *reste* précédent exprimera δ''. Quand R ne sera pas nul, les polynômes, A'', B'', n'auront pas de commun diviseur, car ils n'ont pas de commun diviseur indépendant de x, et s'ils avaient un facteur commun en x, ce facteur diviserait le *reste* R, (n° 299); ce qui est impossible, puisque R ne contient pas x.

(*) Lorsque P' et p' auront un facteur commun p, on en déduira, $P' = ap$ et $p' = bp$. Il suffira donc de multiplier A', par b.

305. Par conséquent, *lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur entre des polynômes qui contiennent un certain nombre de lettres, on peut toujours obtenir le plus grand commun diviseur entre des polynômes qui contiennent une lettre de plus*. Or, on sait trouver le plus grand commun diviseur entre des nombres (A, nos 58 et 61). On pourra donc calculer le plus grand commun diviseur entre des polynômes qui ne renfermeront qu'une seule lettre. On en déduira le plus grand commun diviseur entre des polynômes qui auront deux lettres; et ainsi de suite. On est donc en état de calculer le plus grand commun diviseur entre des polynômes qui renferment un nombre quelconque de lettres.

306. On en déduit cette règle générale. *Pour trouver le plus grand commun diviseur D, entre deux polynômes A et B; ordonnez ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre x. Cherchez le plus grand commun diviseur monôme α des termes de A, et le plus grand commun diviseur monôme β des termes de B* (n° 295); *vous trouverez, $A=\alpha A'$ et $B=\beta B'$. Calculez deux plus grands communs diviseurs, α', β'; l'un entre les coefficiens de x dans A', l'autre entre les coefficiens de x dans B'; il en résultera, $A'=\alpha' A''$ et $B'=\beta' B''$. Déterminez le plus grand commun diviseur δ'', entre A'' et B''* (n° 304). *Vous aurez, $A''=\delta'' A'''$ et $B''=\delta'' B'''$. D'où, $A=\alpha\alpha'\delta'' A'''$ et $B=\beta\beta'\delta'' B'''$. Calculez, le plus grand commun diviseur δ, entre α et β* (n° 295), *le plus grand commun diviseur δ', entre α' et β'; le plus grand commun diviseur cherché sera, $D=\delta\times\delta'\times\delta''$* (*). Par exemple, soit.... $A=(6y^5-6y^7)x^8-(6y^4-12y^6+6y^8)x^7+(6y^6-6y^4)x^5$; $B=(9y^9+9y^{12})x^5-(9y^{10}+9y^7)x^3$.

Les plus grands communs diviseurs monômes de A et B, seront $\alpha=6y^4x^5$ et $\beta=9y^7x^3$. Le *plus grand commun diviseur monôme*, entre A et B, sera donc, $\delta=3y^4x^3$. Divisant, A par α et B par β, les quotiens seront....

(*) En effet; A et B sont de cette forme, $A=\delta\delta'\delta'' M$, $B=\delta\delta'\delta'' N$; δ est le plus grand commun diviseur monôme de A et de B; δ' est le plus grand commun diviseur polynôme, indépendant de x, entre A et B; enfin, δ'' est le plus grand commun diviseur polynôme, dépendant de x, entre A et B. Il s'agit de prouver que M et N sont premiers entr'eux; si un monôme p, divisait M et N, A et B auraient un commun diviseur $p\delta$ monôme, plus grand que leur plus grand commun diviseur monôme δ; ce qui est absurde. Par une raison semblable, δ' et δ'', étant les plus grands communs diviseurs polynômes, indépendans de x et dépendans de x, entre A et B, on en conclura qu'un polynôme, indépendant de x ou dépendant de x, ne peut diviser M et N; M et N n'ont donc aucuns facteurs communs. Le plus grand commun diviseur entre A et B, est donc $\delta\delta'\delta''$.

$$A'=(y-y^3)x^3-(1-2y^2+y^4)x^2+(y^2-1);\ B'=(y^2+y^5)x^2-(1+y^3).$$

Pour obtenir le *plus grand commun diviseur* δ' *indépendant de* x entre A' et B', on cherchera le plus grand commun diviseur α' entre les coefficiens, $(y-y^3)$, $(1-2y^2+y^4)$, (y^2-1), de x dans A'; on aura soin d'ordonner ces coefficiens par rapport aux puissances décroissantes de y, et supprimant dans $y-y^3$, le facteur y qui est *premier* avec les autres coefficiens, α' sera le plus grand commun diviseur entre les trois quantités, $(-y^2+1)$, (y^4-2y^2+1), (y^2-1). On trouvera (n° 301), $\alpha'=-y^2+1$. Le plus grand commun diviseur entre y^5+y^2 et y^3+1, sera $\beta'=y^3+1$, car $y^5+y^2=(y^3+1)y^2$. Le plus grand commun diviseur entre α' et β', sera $\delta'=y+1$. Divisant, A' par α' et B' par β', les quotiens seront.......

$$A''=yx^3+(y^2-1)x^2-1;\ B''=y^2x^2-1.$$

Enfin, pour trouver le *plus grand commun diviseur dépendant de* x, entre A'' et B'', on effectuera le calcul d'après la règle du n° 304. Le coefficient y, du 1er terme du dividende A'', n'étant pas divisible par le coefficient y^2 du 1er terme du diviseur, on multipliera A'' par y, et divisant $A''y$, par B'', le 1er terme du quotient sera x et le *reste* sera.... $y(y^2-1)x^2+x-y$; on multipliera ce *reste* par y et l'on divisera le produit par B''; ce qui donnera le *reste* $R'=yx-1$. La division de B'', par R', donnant un *reste* nul, le plus grand commun diviseur entre A'' et B'', est $\delta''=yx-1$. Le plus grand commun diviseur entre A et B, est donc, $D=\delta\,\delta'\,\delta''=3y^4x^3\,(y+1)\,(yx-1)$.

*307. *Pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux polynômes* P *et* Q, *qui renferment des coefficiens numériques fractionnaires et des exposans négatifs, on multipliera* P *et* Q *par une quantité* MN, *telle que les produits,* PMN, QMN, *ne contiennent que des coefficiens numériques entiers et des exposans positifs.* N *désignera le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs numériques* (A, n° 184), *et pour former* M, *on prendra les lettres,* a, b, c, *etc., qui seront affectées d'exposans négatifs,* $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, *etc.; la valeur de* M *sera,* $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ *etc. On cherchera le plus grand commun diviseur* d, *entre* PMN *et* QMN (n° 306). *Le plus grand commun diviseur entre* P *et* Q, *sera* $\frac{d}{MN}$. Par exemple, soit, $P=\frac{1}{2}y^{-1}x+\frac{1}{2}(1-y^{-2})-\frac{1}{2}y^{-2}x^{-2}$ et $Q=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y^{-2}x^{-2}$; on multipliera P et Q par $2y^2x^2$; ce qui donnera les polynômes, A'', B'', du n° 306; le plus grand commun diviseur demandé sera donc, $\frac{yx-1}{2y^2x^2}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}y^{-1}x^{-1}-\frac{1}{2}y^{-2}x^{-2}$.

308. *Pour réduire une fraction algébrique à sa plus simple expression, il suffit de diviser les deux termes de cette fraction, par leur*

plus grand commun diviseur. La fraction qui en résulte est irréductible, (nº 289, 3º).

Théorie générale des équations.

309. Dans la *théorie générale des équations*, on se propose de résoudre les équations de tous les degrés, et de faire connaître les propriétés de ces équations. Pour résoudre plusieurs équations entre plusieurs inconnues, on cherche d'abord à faire disparaître le plus grand nombre d'inconnues possible. Tel est le but de l'*Élimination*. Il reste ensuite à résoudre les équations auxquelles on parvient. La théorie des équations se divise donc naturellement en trois parties; l'*élimination*, les *propriétés des équations*, et la *résolution des équations*. Nous ferons d'abord connaître une *notation* qui jettera un grand jour sur cette théorie.

310. *Pour exprimer que la valeur d'une quantité dépend de celle d'une autre quantité, on dit que la première quantité est* FONCTION *de la seconde.* Ainsi, dans l'équation, $y = x + 1$, la valeur de y dépendant de celle de x, on dit que y est *fonction* de x et l'on écrit, $y = F(x)$. *Lorsqu'on veut considérer, dans un même calcul, des fonctions différentes, on les distingue par la forme de la lettre F et quand des fonctions sont composées de la même manière, on conserve le même signe de fonction.* Ainsi, $F(x)$, et $f(x)$, désignent des fonctions différentes de x, tandis que $f(x)$ et $f(z)$ sont des fonctions composées de la même manière, l'une en x, l'autre en z; de sorte que $f(z)$ est ce que devient $f(x)$, quand on change x en z. Par exemple, $f(x) = x^2$, donne $f(z) = z^2$, $f(a) = a^2$, $f(1-x) = (1-x)^2$.

311. Nous distinguerons deux sortes d'égalités; savoir : les *équations* et les *identités*. *Une* ÉQUATION *en x sera une égalité qui n'aura lieu que pour des valeurs particulières de x. Une* IDENTITÉ *en x, sera une égalité qui sera vraie, quel que soit x.* Nous conserverons le *signe* $=$ pour les équations et le *signe* $\doteqdot$, placé entre deux quantités, indiquera que ces quantités sont *identiques*. Ainsi, $x + 2 = 5$, sera une *équation*, et $x + 2 \doteqdot x + 2$, sera une *identité*, car la première égalité n'est vraie que pour $x = 3$, tandis que la seconde subsiste quel que soit x.

312. *Dans l'identité* (1)... $a + bx + cx^2 + etc. \doteqdot A + Bx + Cx^2 + etc.$, *on a toujours*, $a = A$, $b = B$, $c = C$, *etc.* En effet; cette identité étant vraie quel que soit x et les coefficiens, a, b, c, etc., A, B, C, etc., étant indépendans de x; si l'on fait $x = 0$, les coefficiens ne changeront pas et l'on aura, $a = A$; l'identité (1) deviendra, $bx + cx^2 +$ etc. $\doteqdot Bx + Cx^2 +$ etc., ou $b + cx +$ etc. $\doteqdot B + Cx +$ etc. Donc, par la même raison, $b = B$. Et ainsi de suite. Le principe est donc démontré (*).

(*) On peut démontrer ce principe de la manière suivante. L'identité (1) donne, (2).... $a - A \doteqdot (B - b)x + (C - c)x^2 +$ etc. Si les coefficiens, A, a,

313. *Quand l'hypothèse $x=\alpha$, réduit le polynôme* .... $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx+t$, *à zéro, ce polynôme est exactement divisible par* $(x-\alpha)$, *et lorsque* $x=\alpha$ *ne le réduit pas à zéro, il n'est pas divisible par* $x-\alpha$. *La réciproque est vraie* (**). En effet ; la division du polynôme, par $x-\alpha$, conduira à un *reste* R indépendant de x (nº 60). Nommant Q le quotient obtenu, on aura.....

$$(1)\ldots\ x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+sx+t \doteqdot (x-\alpha)\,Q+R,\ (\text{nº } 57).$$

Or, cette identité est vraie quel que soit x, et Q ne contient que des puissances positives de x. Supposant donc $x=\alpha$; Q deviendra un nombre, le *reste* R ne changera pas, et l'identité (1) deviendra.....

$$(2)\ldots\ \alpha^m+p\alpha^{m-1}+q\alpha^{m-2}+\ldots+s\alpha+t \doteqdot R.$$

Cela posé : lorsque $x=\alpha$, réduira x^m+ etc., à zéro, le premier membre de l'identité (2) sera zéro ; le reste R sera donc zéro ; le polynôme sera donc divisible par $x-\alpha$. Quand $x=\alpha$, ne réduira pas le polynôme à zéro, la valeur de R ne sera pas nulle ; le polynôme ne sera donc pas divisible par $x-\alpha$. Dans ce cas, *on obtient le reste de la division du polynôme* $x^m+px^{m-1}+$*etc.*, *par* $x-\alpha$, *en faisant* $x=\alpha$ *dans ce polynôme*. Réciproquement ; si x^m+ etc., est divisible par $x-\alpha$; R sera nul ; $\alpha^m+p\alpha^{m-1}+$ etc., sera donc nul ; $x=\alpha$, réduira donc le polynôme à zéro. Quand x^m+ etc., ne sera pas divisible par $x-\alpha$, R ne sera pas nul ; $\alpha^m+p\alpha^{m-1}+$ etc., ne sera donc pas nul ; $x=\alpha$ ne réduira donc pas le polynôme à zéro. Ce qui démontre le principe énoncé.

314. *Lorsque,* α, β, γ, *etc., désignant des quantités différentes, les hypothèses,* $x=\alpha, x=\beta, x=\gamma$, *etc., réduisent le polynôme,* $x^m+px^{m-1}+$*etc.*, *à zéro ; ce polynôme est divisible par le produit* $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ *etc.*, (nºs 313 et 292). *La réciproque est vraie.*

315. Le principe du nº 313, donne le moyen de reconnaître dans quel cas

---

n'étaient pas égaux, la différence $a-A$ serait une quantité finie δ. Or, $x=0$ réduit le 2e membre de l'identité (2) à zéro ; on pourrait donc donner à x une valeur assez petite pour que le 2e membre de cette identité fût moindre que δ. L'identité (2) ne serait donc pas vraie, quel que fût x ; ce qui est contre l'hypothèse ; il ne peut donc pas exister de différence entre A et a. Donc, $A=a$. L'identité (1) donne alors, $b+cx+$ etc. $\doteqdot B+Cx+$etc. ; donc, par la même raison, $B=b$; et ainsi de suite.

(**) m *désignera toujours un nombre entier positif.* Le principe énoncé ne serait plus vrai si le polynôme contenait des radicaux. Par exemple, $x=\alpha$ réduit le polynôme $x-\alpha+\sqrt{x-\alpha}$, à zéro, et cependant ce polynôme n'est pas divisible par $x-\alpha$. Il est divisible par $\sqrt{x-\alpha}$, car................ $x-\alpha \doteqdot \sqrt{x-\alpha}\times\sqrt{x-\alpha}$.

$x^m \pm \alpha^m$, est divisible par, $x \pm \alpha$; (α est positif). On en déduit cette règle générale. *Quand m est pair ;* $x^m - \alpha^m$ *est divisible par* $x-\alpha$ *et par* $x+\alpha$, car $x=\alpha$ et $x=-\alpha$, réduisent $x^m-\alpha^m$ à zéro ; $x^m+\alpha^m$, *n'est divisible par aucuns des binômes*, $x+\alpha$, $x-\alpha$. *Quand m est impair ;* $x^m-\alpha^m$ *est divisible par* $x-\alpha$; $x^m-\alpha^m$ *n'est pas divisible par* $x+\alpha$; $x^m+\alpha^m$ *est divisible par* $x+\alpha$ *et* $x^m+\alpha^m$ *n'est pas divisible par* $x-\alpha$. Le quotient de la division de $x^m-\alpha^m$, par $x-\alpha$, est

$$x^{m-1}+\alpha x^{m-2}+\alpha^2 x^{m-3}+\ldots\ldots+\alpha^{m-2}x+\alpha^{m-1},$$

car ce quotient, multiplié par $x-\alpha$, donne $x^m-\alpha^m$.

Théorie de l'élimination.

316. L'équation générale du degré m, entre deux inconnues x et y, est....

$$(1)\ldots x^m+(a+by)\,x^{m-1}+(c+dy+ey^2)\,x^{m-2}+\ldots+(p+qy+\ldots+ty^m)=0,$$

car la plus forte somme des exposans de x et y, dans chaque terme, est m (n° 79). L'équation générale du degré n, entre x et y, sera....

$$(2)\ldots x^n+(a_1+b_1y)\,x^{n-1}+\ldots+(p_1+q_1y+\ldots+t_1y^n)=0\ (*).$$

Soit proposé d'*éliminer* x entre ces équations. Lorsqu'on pourra résoudre l'une des équations (1), (2), par rapport à x, la substitution de la valeur de x, dans l'autre équation, conduira à l'*équation finale* en y. Mais, cette opération n'étant pas toujours possible, nous allons voir comment on peut parvenir à l'équation finale, sans résoudre les équations proposées. Nous désignerons les premiers membres de ces équations, par $F(x,y)$ et $f(x,y)$; ce qui donnera, (3)...$F(x,y)=0$, (4)...$f(x,y)=0$.

Les valeurs de x, y, qui satisfont à ces équations, devant rendre les premiers membres identiquement nuls ; si $x=\alpha$ et $y=\mathcal{C}$, est une *solution* des équations (3) et (4), on aura $F(\alpha,\mathcal{C})\doteq 0$ et $f(\alpha,\mathcal{C})\doteq 0$. Mais, au lieu de substituer simultanément les valeurs de x et y, on peut mettre d'abord la valeur de y et ensuite celle de x ; le dernier résultat sera le même. Faisant donc $y=\mathcal{C}$, les fonctions $F(x,y)$, $f(x,y)$, deviendront $F(x,\mathcal{C})$ et $f(x,\mathcal{C})$. Ces deux fonctions de x, seront divisibles par $(x-\alpha)$, car l'hypothèse $x=\alpha$, doit les réduire à zéro (n° 313). Les valeurs de y, qui satisfont aux équations (3) et (4), jouissent donc de la propriété, quand on les substitue dans $F(x,y)$ et $f(x,y)$, d'introduire un commun diviseur $x-\alpha$, entre les résultats, $F(x,\mathcal{C})$, $f(x,\mathcal{C})$. Réciproquement, lorsque l'hypothèse $y=\mathcal{C}'$, introduit un commun diviseur $x-\alpha'$, entre $F(x,\mathcal{C}')$

(*) Nous ne considérerons que les équations dans lesquelles les coefficiens des inconnues seront des nombres entiers ou fractionnaires, et nous rejetterons les valeurs infinies des inconnues.

et $f(x, \mathcal{C}')$, on a, $F(x, \mathcal{C}') \mp P(x-\alpha')$, et $f(x, \mathcal{C}') \mp Q(x-\alpha')$; la valeur $\mathcal{C}'$, de y, satisfait donc aux équations proposées, car combinée avec $x=\alpha'$, elle réduit $F(x, y)$ et $f(x, y)$, à zéro. Par conséquent, si après avoir ordonné les premiers membres des équations proposées par rapport aux puissances décroissantes de x, on cherche le plus grand commun diviseur entre ces premiers membres; lorsqu'on sera parvenu à un *reste* R, indépendant de x, toutes les valeurs de y, qui satisfont aux équations proposées, réduiront ce *reste* à zéro. L'équation $R=0$, donnera donc toutes les valeurs de y qui satisfont aux équations proposées.

317. On peut encore le démontrer de cette autre manière. Si A et B désignent les premiers membres des équations (1) et (2), la division de A par B, donnera un quotient $q_{,}$ et un *reste* $r_{,}$; ce *reste* sera de la forme....... $a_{,}x^{n-1}+b_{,}x^{n-2}+$etc. Dans la division de B par $r_{,}$, on ne parviendra à un *reste* du degré $n-2$, qu'après avoir calculé deux termes au quotient. Mais, pour que ce quotient ne contienne que des puissances positives de y, il faut, à chaque division, multiplier le dividende B, par $a_{,}$; ce qui revient à multiplier B, par $a_{,}^2$. On divisera donc $Ba_{,}^2$, par $r_{,}$; on obtiendra un quotient $q_{,,}$ et un *reste* $r_{,,}=a_{,,}x^{n-2}+$ etc. Ces divisions successives conduiront toujours à un reste R, indépendant de x (n° 60). Supposons donc, que la division de $r_{,}a_{,,}^2$ par $r_{,,}$, donne le quotient $q_{,,,}$ et le *reste* R indépendant de x. On aura.....

$$(5)\ldots\ A=Bq_{,}+r_{,};\quad (6)\ldots\ Ba_{,}^2=r_{,}q_{,,}+r_{,,};\quad (7)\ldots\ r_{,}a_{,,}^2=r_{,,}q_{,,,}+R.$$

Cela posé: les équations, (5), (6), (7), démontrent que si $x=\alpha$ et $y=\mathcal{C}$, satisfont aux équations, $A=0$, $B=0$, ces valeurs de x et y réduiront les *restes*, $r_{,}$, $r_{,,}$, R, à zéro, car les quotiens, $q_{,}$, $q_{,,}$ et $q_{,,,}$, ne contenant que des puissances positives de y, l'hypothèse $y=\mathcal{C}$ ne peut rendre aucuns de ces quotiens infinis.

318. *Les valeurs de x et y, qui satisfont aux équations proposées, réduisent donc deux restes consécutifs quelconques, et par conséquent tous les restes, à zéro. Des valeurs de x et y qui ne réduiraient pas deux restes à zéro, ne satisferaient donc pas aux équations proposées; on devra donc rejeter ces valeurs.*

319. *Des valeurs de x et y, qui réduisent deux restes consécutifs à zéro, peuvent ne pas satisfaire aux équations proposées.* En effet; si $x=\alpha$ et $y=\mathcal{C}$, donnent $r_{,}=0$ et $r_{,,}=0$; l'équation (6) prouve que ces valeurs réduiront $Ba_{,}^2$ à zero; B pourra donc ne pas être réduit à zéro, car $y=\mathcal{C}$ peut réduire $a_{,}$, à zéro. Des valeurs de x et y, qui réduisent R et r'' à zéro, peuvent ne pas réduire A et B à zéro, car ces valeurs peuvent réduire $a_{,,}$ à zéro. L'équation $R=0$, n'est donc pas toujours l'*équation finale*.

320. *Quand le reste R, indépendant de x, n'a aucuns facteurs communs avec les coefficiens, $a_{,}$, $a_{,,}$, des premiers termes des diviseurs; $R=0$ est l'équation finale. Et les valeurs de x et y, qui réduisent deux*

restes consécutifs à zéro, satisfont aux équations proposées. En effet; si $x=\alpha$ et $y=\beta$, réduisent R et $r_{\prime\prime}$ à zéro, les équations, (7), (6) et (5), démontrent que $r_{\prime}$, B et A, seront réduits à zéro, car $y=\beta$ ne peut réduire aucun des coefficiens, $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime}$, à zéro. Les solutions des équations, $A=0$, $B=0$, sont donc alors les mêmes que celles des équations plus simples $R=0$; $r_{\prime\prime}=0$. *Une valeur de y, tirée de l'équation $R=0$, sera donc bonne, lorsqu'elle ne réduira à zéro, aucuns des coefficiens, $a_{\prime}$, $a_{\prime\prime}$, des premiers termes des restes.*

321. Toutes les valeurs de y, qui satisfont aux équations proposées, (3)... $F(x,y)=0$, (4).. $f(x,y)=0$, réduisent le *reste* R indépendant de x, à zéro; mais l'équation $R=0$, peut donner des valeurs de y qui ne satisfont pas aux équations proposées (n° 319). Pour reconnaître si une valeur $y=\beta$, tirée de $R=0$, satisfait aux équations (3) et (4); on suppose $y=\beta$, dans $F(x,y)$ et $f(x,y)$. Quand les résultats, $F(x,\beta)$, $f(x,\beta)$, ont un commun diviseur $\varphi(x)$, la valeur $y=\beta$ est bonne, car combinée avec l'une quelconque des racines de l'équation $\varphi(x)=0$, elle réduit $F(x,y)$ et $f(x,y)$, à zéro. Lorsque $F(x,\beta)$ et $f(x,\beta)$, n'ont pas de commun diviseur en x, la valeur $y=\beta$ ne convient pas aux équations proposées.

322. On en déduit cette règle générale : *Pour éliminer x entre les équations, $F(x,y)=0$, $f(x,y)=0$; ordonnez les polynômes $F(x,y)$, $f(x,y)$, suivant les puissances décroissantes de x, et opérez comme si vous cherchiez le plus grand commun diviseur entre ces polynômes. Ne supprimez aucun facteur algébrique et multipliez les dividendes par des fonctions de y telles que les quotiens ne renferment que des puissances positives de y. Continuez les divisions jusqu'au reste R, indépendant de x. L'équation $R=0$, donnera toutes les valeurs de y qui satisfont aux équations proposées. Cette équation pourra donner des valeurs étrangères de y. Pour reconnaître si une racine $y=\beta$, de $R=0$, satisfait aux équations proposées, on fera $y=\beta$ dans ces équations; et suivant que les résultats, $F(x,\beta)$, $f(x,\beta)$, auront un commun diviseur en x, ou n'en auront pas; la valeur $y=\beta$, conviendra ou ne conviendra pas, aux équations proposées. Quand $y=\beta$ donne un commun diviseur $\varphi(x)$; les valeurs de x qui répondent à $y=\beta$, sont les racines de l'équation $\varphi(x)=0$,* (*). Par conséquent, *lorsqu'on saura résoudre les équations à une seule inconnue, $R=0$, $\varphi(x)=0$, on en déduira toutes les solutions des équations proposées.*

323. *Si les n couples, $x=\alpha_1$, $y=\beta_1$; $x=\alpha_2$, $y=\beta_2$; ...; $x=\alpha_n$,*

(*) Pour trouver les valeurs de x, qui répondent à $y=\beta$, il suffit de faire $y=\beta$, dans les *restes* successifs, à partir du dernier; si le premier *reste* qui n'est pas réduit à zéro est r; on cherchera les racines, α_1, α_2, etc., de l'équation $r=0$. Parmi ces valeurs de x, celles qui réduiront $F(x,\beta)$ et $f(x,\beta)$, à zéro, seront les valeurs demandées.

$y = \beta_n$, satisfont aux équations, $F(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$; et si aucunes autres valeurs de x et y ne peuvent satisfaire à ces équations; l'équation finale en y sera $(y - \beta_1)(y - \beta_2) \ldots (y - \beta_n) = 0$ et l'équation finale en x sera $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0$. Quand $\beta_1 = \beta_2$, l'équation finale en y contient le facteur $(y - \beta_1)^2$ et les valeurs de x, correspondantes à $y = \beta_1$, sont α_1 et α_2. En général, *lorsque p valeurs de x, correspondent à $y = \beta$, l'équation finale en y contient le facteur $(y - \beta)^p$. De sorte que les équations finales en x et en y, sont toujours du même degré.*

* 324. *Quand r valeurs de x, répondent à $y = \beta$; le plus grand commun diviseur entre $F(x, \beta)$ et $f(x, \beta)$, est un polynôme du degré r, de la forme $x^r + px^{r-1} +$ etc. Les racines de l'équation $x^r + px^{r-1} +$ etc. $= 0$, sont les r valeurs de x qui correspondent à $y = \beta$. Réciproquement, lorsque $y = \beta$ introduit un plus grand commun diviseur du degré r, entre $F(x, \beta)$ et $f(x, \beta)$; on doit en conclure que r valeurs de x correspondent à $y = \beta$; le plus grand commun diviseur égalé à zéro, détermine ces valeurs de x.* En effet; si les r valeurs de x, qui répondent à $y = \beta$, sont α_1, α_2, ..., α_r, les hypothèses, $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, .., $x = \alpha_r$, réduiront $F(x, \beta)$, et $f(x, \beta)$ à zéro; et ces valeurs de x seront les seules qui réduiront ces fonctions de x à zéro. Le plus grand commun diviseur entre $F(x, \beta)$ et $f(x, \beta)$, sera donc le polynôme du degré r, $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_r)$. Ce polynôme, égalé à zéro, donnera, $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ..., $x = \alpha_r$. Réciproquement, lorsque $y = \beta$, introduit un plus grand commun diviseur $x^r + px^{r-1} +$ etc., entre $F(x, \beta)$ et $f(x, \beta)$, les r racines, de l'équation $x^r + px^{r-1} +$ etc. $= 0$, réduisent $F(x, \beta)$ et $f(x, \beta)$ à zéro. Ces racines sont donc les valeurs de x qui répondent à $y = \beta$. Dans ce cas, l'équation finale en y, contient le facteur $(y - \beta)^r$, (n° 323).

325. *Lorsque dans la recherche du plus grand commun diviseur entre les premiers membres $F(x, y)$, $f(x, y)$, des équations* (1), (2), *du* n° 316, *on est parvenu au reste R, indépendant de x, il peut arriver trois cas;* 1°. *Quand R n'est pas identiquement nul, les fonctions $F(x, y)$, $f(x, y)$, n'ont pas de commun diviseur.* En effet; s'il existait un commun diviseur d entre ces fonctions; d diviserait R; d serait donc indépendant de x, car R ne contient pas x; les premiers membres des équations (1) et (2) du n° 316, auraient donc un diviseur indépendant de x; ce qui est impossible (n° 62); 2°. *Quand R est un nombre, les équations proposées sont contradictoires*, c'est-à-dire, qu'aucunes valeurs réelles ou imaginaires de x et y, ne peuvent satisfaire en même tems à ces équations, car les seules valeurs de y, qui puissent convenir aux équations proposées, sont celles qui réduisent R à zéro, (n° 318); 3°. *Lorsque R est identiquement nul, les équations admettent une infinité de solutions communes.* En effet; le *reste* étant nul, $F(x, y)$ et $f(x, y)$, ont un plus grand

commun diviseur D. On a donc $F(x,y)=MD=0$ et $f(x,y)=ND=0$. On satisfait à ces équations en égalant M et N à zéro, ou en supposant $D=0$. Les équations, $M=0$, $N=0$, fourniront des solutions des équations proposées. L'équation $D=0$, donnera une infinité de solutions des mêmes équations; quand D contiendra x et y, on donnera des valeurs arbitraires à x, et $D=0$ déterminera les valeurs correspondantes de y; lorsque D sera indépendant de y, les valeurs de x, tirées de $D=0$, satisferont aux équations proposées, quel que soit y; de sorte que y sera indéterminé. D ne peut être indépendant de x (1°.).

326. *Lorsque p et q désignant des fonctions de y, les équations proposées sont, px^m+ etc. $=0$, et qx^n+ etc. $=0$; les premiers membres de ces équations peuvent avoir un commun diviseur D, fonction de y.* Divisant px^m+ etc., et qx^n+ etc., par D, on obtiendra des quotiens M et N. Les valeurs de y, déduites de $D=0$, satisferont aux équations proposées, quel que soit x; de sorte que x sera indéterminé. Les autres solutions des équations proposées, seront fournies par les équations, $M=0$, $N=0$. Appliquons cette théorie générale à des exemples.

1er *Exemple.* Pour éliminer x entre les équations....

$$x^2-y^2-2y-1=0,\quad x^2-2(y+1)x+(y^2+2y-3)=0,$$

on cherchera le plus grand commun diviseur entre les premiers membres de ces équations. Le diviseur du premier degré en x, sera.......... $(y+1)x-(y^2+2y-1)$, et le *reste* indépendant de x sera y^2+2y; ce *reste* n'ayant pas de facteurs communs avec les coefficiens, 1 et $y+1$, des premiers termes des diviseurs, $y^2+2y=0$, sera l'*équation finale* (n° 320). Les valeurs des inconnues dépendront des équations, $y^2+2y=0$, ... $(y+1)x-(y^2+2y-1)=0$. La 1re donne, $y=0$ et $y=-2$; les valeurs correspondantes de x, fournies par la 2e équation, sont -1 et $+1$. De sorte que l'équation finale en x est, $(x+1)(x-1)=0$.

2e *Exemple.* L'élimination de x entre les équations....

$$(1)\ldots\ (y-1)x^3+(y^2+y)x^2+(3y^2+y-2)x+2y=0,$$
$$(2)\ldots\ (y-1)x^2+(y^2+y)x+(3y^2-1)=0,$$

conduit au diviseur $(y-1)x+2y$ et le *reste* indépendant de x est y^2-1. Ce *reste* ayant un facteur commun $y-1$, avec le coefficient du premier terme de chaque diviseur, l'équation $y^2-1=0$, peut contenir des *valeurs étrangères de y* (n° 319). Et en effet (n° 318), les solutions des équations (1) et (2), doivent satisfaire aux équations (3)... $y^2-1=0$, (4)... $(y-1)x+2y=0$. L'équation (3), donne $y=+1$ et $y=-1$; la valeur $y=1$ doit être rejetée, car elle réduit l'équation (4) à $2=0$. La valeur $y=-1$ est bonne, car elle ne réduit à zéro aucuns des coefficiens des premiers termes des diviseurs (n° 320); faisant $y=-1$, dans l'équation (4), la valeur correspondante de x, sera -1. De sorte que les équations (1), (2), n'admettent que la solution commune, $y=-1$, $x=-1$; l'équation finale en y est donc $y+1=0$.

3e *Exemple.* Soient....

$$(5)\ldots\; x^2-4yx+4y^2-1=0,\ \text{et}\ x^2-4yx+4y^2+1=0.$$

L'élimination de x entre ces équations, conduit à un *reste* numérique. *Les équations* (5) *sont donc contradictoires*, car les valeurs de y qui satisfont aux proposées, devraient réduire ce *reste* à zéro. Et en effet, les équations (5) expriment ces conditions incompatibles, $(x-2y)^2=1$, $(x-2y)^2=-1$.

4e *Exemple.* Si les équations proposées sont....

$$(6)\ldots\; x^3+yx^2-(y^2+1)x-(y^3-y)=0,\ x^3-yx^2-(y^2+6y+9)(x-y)=0,$$

le reste, indépendant de x, sera identiquement nul; de sorte que *la valeur de y sera indéterminée.* Et en effet, les premiers membres des équations (6), ayant le facteur commun $x-y$, on satisfait à ces équations en donnant des valeurs arbitraires à y et prenant $x=y$. On trouvera ainsi une infinité de solutions des équations (6); mais cependant, il existera d'autres solutions. Pour les découvrir, on supprimera le facteur commun $x-y$, et les équations (6) deviendront....

$$x^2+2yx+y^2-1=0,\ x^2-(y^2+6y+9)=0.$$

Eliminant x entre ces équations, les deux derniers *restes* seront...... $yx+(y^2+3y+4)$ et y^2+3y+2. Egalant ces deux restes à zéro, on trouvera, $y=-2$ et $y=-1$; les valeurs correspondantes de x seront $+1$ et $+2$. De sorte que les équations (5) admettent encore ces deux nouvelles solutions.

Lorsque dans le cours des divisions, on apperçoit un facteur p, commun à tous les termes de l'un des restes, on peut simplifier les calculs relatifs à l'élimination. En effet; si deux restes consécutifs, $r_{,}$ et $r_{,,}$, sont tels que $r_{,,}=pR_{,,}$, les valeurs de x et y, qui satisferont aux équations proposées, réduiront $r_{,}$ et $r_{,,}$ à zéro (no 318). On pourra donc combiner, $r_{,}=0$ avec $p=0$, et $r_{,}=0$ avec $R_{,,}=0$. Parmi les solutions des équations, $r_{,}=0$, $p=0$, on choisira celles qui satisfont aux équations proposées, et les autres solutions dépendront des équations plus simples, $r_{,}=0$, $R_{,,}=0$. On divisera donc $r_{,}$ par $R_{,,}$; et ainsi de suite. Par exemple, pour obtenir les solutions des équations....

$$(7)\ldots\; x^3+2yx^2+(2y^2-4y)x+y^2-4=0,\ x^2+2yx+(2y^2-5y+2)=0,$$

on désignera les premiers membres par A et B, et l'on divisera A par B; le *reste* $r_{,,}=(y-2)x+(y^2-4)$, contenant le facteur $y-2$, on essaiera les valeurs de x et y qui satisfont aux équations, $y-2=0$, $B=0$. La valeur $y=2$, donnera $x=0$ et $x=-4$. Ces deux solutions conviennent aux équations (7). Pour trouver les autres solutions, on divisera $r_{,,}$ par

$y-2$; le quotient sera $x+(y+2)$. Divisant B, par $x+(y+2)$, le *reste* sera y^2-5y+6. Les équations $y^2-5y+6=0$, $x+(y+2)=0$, donneront, $y=2$, $x=-4$ et $y=3$, $x=-5$. Ces deux *couples* satisfont aux équations (7). Les valeurs de y sont donc, $+2$, $+2$, $+2$, $+3$, et les valeurs correspondantes de x sont, 0, -4, -4, -5. L'équation finale en y est donc $(y-2)^3(y-3)=0$, ou $y^4-9y^3+30y^2-44y+24=0$.

* 327. Pour déterminer les valeurs de, x, y, z, qui satisfont aux équations, $F(x, y, z)=0$, $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$, on éliminera successivement z, entre les deux premières équations, et entre les deux dernières. Ce qui donnera deux équations en x et y, que l'on traitera d'après les méthodes précédentes. On opérera d'une manière semblable, pour *résoudre m équations entre m inconnues*. On parviendra à une équation à une seule *inconnue*. Cette équation sera quelquefois compliquée de facteurs étrangers (n° 319), mais elle donnera toutes les valeurs de l'*inconnue*.

Résolution des équations numériques, à une seule inconnue.

328. Ce qui précède donnant le moyen de calculer *l'équation finale* qui résulte de l'élimination d'une inconnue entre deux équations et deux inconnues, nous sommes conduits à *résoudre une équation à une seule inconnue*. Nous avons obtenu des formules générales pour résoudre les équations du premier et du second degré; il existe des formules analogues pour les équations du troisième et du quatrième degré; mais quand les équations passent le quatrième degré; on ne connaît pas de méthode générale pour les résoudre. C'est-à-dire qu'*on ne sait pas trouver les racines en fonction des coefficiens*. On est cependant certain que *les racines sont des fonctions des coefficiens*, car un des coefficiens variant, l'inconnue change de valeur. En effet; si $x=\alpha$, pouvait satisfaire aux équations $x^5+px+q=0$, $x^5+p_{,}x+q=0$, on aurait $\alpha^5+p\alpha+q=0$ et $\alpha^5+p_{,}\alpha+q=0$; retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on trouverait $\alpha(p-p_{,})=0$; ce qui est impossible, puisqu'aucun des facteurs α, et $p-p_{,}$, n'est zéro. Nous allons voir qu'*il existe une méthode générale, pour calculer les racines réelles des équations numériques de tous les degrés*. Nous commencerons par les racines commensurables, parce que ces racines sont les plus faciles à obtenir.

Racines commensurables.

329. La *recherche des racines commensurables*, repose sur des principes que nous allons d'abord établir. *Toute équation numérique du degré m, à une seule inconnue, peut être ramenée à la forme...*

$$(1)\ldots x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+sx+t=0.$$

Les coefficiens p, q, ..., s, t, étant des nombres entiers, positifs *ou négatifs*. En effet; la règle du n° 78, donnant le moyen de faire disparaître les dénominateurs contenus dans une équation, toute équation en y, pourra être ramenée à la forme (2)... $ay^m + by^{m-1} + cy^{m-2} + \ldots + ky + l = 0$; $a, b, c, \ldots, k, l$, étant des nombres entiers. Soit $y = \frac{x}{z}$; z sera une indéterminée et l'on aura...

$$a\left(\frac{x}{z}\right)^m + b\left(\frac{x}{z}\right)^{m-1} + c\left(\frac{x}{z}\right)^{m-2} + \ldots + k\left(\frac{x}{z}\right) + l = 0;$$

$$\text{d'où, } \frac{a}{z}\,x^m + bx^{m-1} + czx^{m-2} + \ldots + kz^{m-2}x + lz^{m-1} = 0.$$

Posant $z = a$, d'où $y = \frac{x}{a}$, l'équation en x sera de la forme de l'équation (1). Si l'équation était, $\frac{5}{12}y^2 - \frac{7}{24}y + \frac{5}{16} = 0$, on multiplierait les deux membres par 48, (n° 78); ce qui donnerait, $20y^2 - 14y + 15 = 0$; l'hypothèse $y = \frac{x}{20}$, conduirait à l'équation $x^2 - 14x + 300 = 0$. Les racines de cette dernière équation, divisées par 20, donneraient les racines de l'équation en y. *Nous supposerons toujours que l'équation proposée sera ramenée à la forme de l'équation* (1).

330. *Quand le coefficient du premier terme d'une équation étant l'unité, les coefficiens des autres termes sont des nombres entiers, aucune fraction ne peut être racine de cette équation*. En effet; si une fraction irréductible $\frac{b}{a}$, était racine de l'équation (1), du n° 329, on aurait....

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m + p\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1} + \ldots + t = 0;\ \text{d'où, } \frac{b^m}{a} = -(pb^{m-1} + qab^{m-2} + \ldots + ta^{m-1}).$$

La fraction irréductible $\frac{b^m}{a}$ (A, n° 371), serait donc égale à un nombre entier. Ce qui est absurde. *Les racines commensurables de l'équation* (1) *du n°* 329, *sont donc des nombres entiers.*

331. *Les racines commensurables de l'équation* (1), *divisent le dernier terme de cette équation*. En effet; si α désigne une racine commensurable de l'équation (1), α sera un nombre entier (n° 330), et l'on aura...

$$\alpha^m + p\alpha^{m-1} + \ldots + s\alpha + t = 0;\ \text{d'où } \frac{t}{\alpha} = -(\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + \ldots + s).$$

$\frac{t}{\alpha}$ sera donc égal à un nombre entier. Ce qui démontre le principe énoncé.

332. Les racines commensurables de l'équation (1), ne pouvant se trouver que parmi les diviseurs du dernier terme t, on découvrira toutes ces

racines en essayant ces diviseurs en plus et en moins. Par exemple, si l'on donne successivement à x les valeurs, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, on verra que les racines commensurables de l'équation, $x^3 - 7x + 6 = 0$, sont $+1$, $+2$ et -3. Mais, les diviseurs du dernier terme pouvant être nombreux (*A*, nº 360), on a cherché une méthode plus abrégée pour *distinguer les diviseurs qui sont racines.* Soit l'équation, (2)... $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; (p, q, r, sont des nombres entiers). Si α est une racine commensurable de cette équation, α sera un nombre entier (nº 330), et l'on aura, $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$. On en déduira, (3)... $\frac{r}{\alpha} = -(q + p\alpha + \alpha^2)$. Cette équation démontre que $\frac{r}{\alpha}$ doit être un nombre entier $q_{,}$. *On ne doit donc essayer que les diviseurs du dernier terme r.* L'équation (3), donne....

$$(4)\ldots \frac{q_{,}+q}{\alpha} = -(p+\alpha) \text{ et } (5)\ldots \frac{q_{,}+q}{\alpha} + p = -\alpha.$$

L'équation (4) exprime que *le quotient $q_{,}$, augmenté du coefficient q de la 1re puissance de x, doit donner une somme divisible par α*; et l'équation (5) dit que *ce dernier quotient, augmenté du coefficient p, de x^2, doit donner une somme égale à $-\alpha$. On devra donc rejeter les diviseurs qui ne satisferont pas à ces conditions. Les diviseurs qui satisferont à ces conditions, seront racines*, car l'équation (5) ayant alors lieu, on en déduira, $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$; ce qui exprime que α est racine de l'équation (2).

Quand α est racine de l'équation (2), $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r$ est zéro et la division de $x^3 + px^2 + qx + r$, par $x - \alpha$, donne le quotient exact...... $x^2 + (p+\alpha)x + (\alpha^2 + p\alpha + q)$. Mais, en vertu des formules (3) et (4), ce quotient devient $x^2 - \left(\frac{q_{,}+q}{\alpha}\right)x - q_{,}$. Les quotiens $q_{,}$ et $\frac{q_{,}+q}{\alpha}$, pris avec des signes contraires, expriment donc les coefficiens de x^0 et de x^1, dans le quotient de la division de $x^3 + px^2 + qx + r$, par $x - \alpha$. Des raisonnemens analogues étant applicables à une équation d'un degré quelconque, et les résultats étant de même forme, on peut établir cette règle générale :

333. *Pour reconnaître si un diviseur α du dernier terme d'une équation, $x^m + px^{m-1} +$ etc. $= 0$, est racine de cette équation; divisez ce dernier terme par α; ajoutez au quotient $q_{,}$, le coefficient de la première puissance de x; divisez la somme par α; le quotient doit être un nombre entier $q_{,,}$; ajoutez à $q_{,,}$ le coefficient de x^2 et divisez la somme par α; le quotient doit être un nombre entier $q_{,,,}$; continuez à opérer de la même manière; lorsque vous serez parvenu à ajouter le coefficient p, de x^{m-1}, la somme devra être égale au nombre α, que vous essayez, pris avec un signe contraire. Tout diviseur qui satisfait à ces m conditions, est racine, et les diviseurs qui ne satisfont pas à ces conditions, doivent être rejetés.*

Quand un terme manque dans l'équation, on restitue ce terme avec le coefficient zéro. On ne soumet pas à ces essais les diviseurs $+1$ *et* -1, *du dernier terme, parce qu'il est plus simple de faire* $x=+1$ *et* $x=-1$, *dans l'équation proposée. Lorsque* α *est une racine, le quotient de la division de* $x^m+px^{m-1}+\text{etc.}$, *par* $x-\alpha$, *est* $-q_{,}-q_{,,}x-q_{,,,}x^2-\ldots+x^{m-1}$. *On dispose les calculs de manière à essayer tous les diviseurs en même temps.* Par exemple; pour trouver les racines commensurables de l'équation $x^3-7x+6=0$; on mettra cette équation sous la forme................ $x^3+0\times x^2-7x+6=0$. Si l'on essaie les diviseurs de 6, on sera conduit au calcul suivant :

Dividendes	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6.$
Diviseurs	-6	-3	-2	$+2$	$+3$	$+6.$
Quotiens, $q_{,}$	-1	-2	-3	$+3$	$+2$	$+1.$
Dividendes	-8	-9	-10	-4	-5	$-6.$
Quotiens, $q_{,,}$		$+3$	$+5$	-2		$-1.$

Dans ce tableau; la première ligne contient le dernier terme 6; la seconde ligne renferme les diviseurs du dernier terme. Divisant le premier terme, par ces diviseurs, on a placé dessous les quotiens; ce qui a donné la 3e ligne. Ajoutant, à ces quotiens, le coefficient -7, de x, on a écrit les sommes correspondantes, dans la quatrième ligne. Ces sommes, divisées par les diviseurs du dernier terme, ont donné les quotiens contenus dans la cinquième ligne. Les sommes -8 et -5, n'étant pas divisibles par -6 et par $+3$, on en a conclu, que ces diviseurs n'étaient pas racines. Ajoutant aux quotiens placés dans la cinquième ligne, le coefficient de x^2, qui est zéro, les sommes sont, $+3$, $+5$, -2, -1; les sommes $+3$ et -2, étant respectivement égales aux diviseurs du dernier terme pris avec des signes contraires, on en a conclu, que -3 et $+2$, étaient des racines de l'équation proposée. Faisant $x=+1$, on verra que la troisième racine est égale à l'unité. Pour former le quotient de la division de x^3-7x+6, par $(x+3)$, on prendra les valeurs de $q_{,}$ et $q_{,,}$ dans la seconde colonne verticale du tableau; ce qui donnera, $q_{,}=-2$ et $q_{,,}=3$. Le quotient demandé sera donc $2-3x+x^2$. On trouvera, de la même manière, que les racines commensurables de l'équation, $x^5-2x^4-17x^3+40x^2+30x-72=0$, sont $+3$ et -4. Pour déterminer combien de fois les facteurs, $(x-3)$, $(x+4)$, entrent dans l'équation proposée, on divisera le premier membre par le produit x^2+x-12 de ces facteurs; le quotient égalé à zéro, donnera $x^3-3x^2-2x+6=0$. Les racines commensurables de cette équation ne pouvant être que $+3$ et -4, on essaiera ces deux nombres; $x=3$ satisfera et $x=-4$ ne satisfera pas. On divisera donc x^3-3x^2-2x+6, par $x-3$; le quotient x^2-2, égalé à zéro, donnera $x=\pm\sqrt{2}$. Le 1er membre de l'équation proposée est donc le produit des facteurs, $(x-3)^2$, $(x+4)$, $(x-\sqrt{2})$, $(x+\sqrt{2})$.

334. Ce qui précède donnant le moyen de supprimer tous les facteurs qui correspondent aux racines commensurables; on sera conduit à *résoudre une équation qui n'aura plus de racines commensurables*. La résolution de cette équation, repose sur les principes suivans:

335. *Si toute équation a une racine* (*), *l'équation du degré* m *aura* m *racines et ne pourra en avoir un plus grand nombre*. En effet; soit l'équation... (1)... $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx+t=0$.

Si $x=a_1$ satisfait à cette équation, le 1er membre sera divisible par $x-a_1$, (nº 313). Donc... $x^m+\text{etc.}\mp(x-a_1)(x^{m-1}+\text{etc.})$. Si $x=a_2$ satisfait à l'équation $x^{m-1}+\text{etc.}=0$, on aura $x^{m-1}+\text{etc.}\mp(x-a_2)(x^{m-2}+\text{etc.})$. Donc.... $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx+t\mp(x-a_1)(x-a_2)(x^{m-2}+p_{\prime\prime}x^{m-2}+\text{etc.})$. Continuant ces décompositions, on trouvera...

(2)... $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx+t\mp(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_m)$.

L'équation (1) aura donc les m racines, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, car son 1er membre étant le produit des m facteurs, $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_m)$, chacun de ces facteurs égalé à zéro, donnera une racine. *Aucune autre valeur de x ne pourra satisfaire à l'équation* (1), car un produit ne peut être nul que lorsqu'un de ses facteurs *premiers* est zéro. On peut encore dire, que si α était racine, $x-\alpha$ diviserait le produit $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$. Un des facteurs *premiers*, $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_m)$, serait donc divisible par $(x-\alpha)$, (nº 290); ce qui exigerait que α fût une des m racines, $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

336. *Remarque*. Quand, $a_1=a_2$, on dit que l'équation (1) contient deux *racines égales* à a_1; en général, *lorsqu'un polynôme* x^m+ *etc., est divisible par* $(x-\mathfrak{C})^\alpha$, *si le quotient ne renferme plus le facteur* $(x-\mathfrak{C})$, *on dit que ce polynôme contient* α *facteurs égaux à* $(x-\mathfrak{C})$, *et l'équation* x^m+*etc.*$=0$, *renferme* α *racines égales à* $\mathfrak{C}$. Ainsi, $x^3+3x^2-9x-27$, étant le produit de $(x+3)^2$, par $(x-3)$, l'équation $x^3+3x^2-9x-27=0$, contient deux racines égales à -3.

(*) Les propriétés, qui seront fondées sur la décomposition des équations en facteurs, reposeront sur cette *hypothèse*, que *toute équation a une racine*. La légitimité de cette hypothèse sera vérifiée, car on en déduira des méthodes générales pour calculer les racines des équations. Afin d'abréger, *nous n'écrirons quelquefois que le* 1er *terme d'un polynôme*. Ainsi, x^m+ etc., désignera le 1er membre de l'équation (1).

337. *Lorsque le premier membre de l'équation...*

$$(1)\ldots A+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+A_{n+1}x^{n+1}+\ldots+x^m=0,$$

est divisible par x^n, l'équation(1) *renferme n racines égales à zéro; et quand cette équation a n racines égales à zéro, le premier membre est divisible par x^n.* En effet; si le premier membre de l'équation (1) est divisible par $(x-0)^n$, cette équation aura n racines égales à zéro (n° 336). Pour démontrer la réciproque, on désignera les racines de l'équation (1), par $a_1, a_2, .., a_m$; ce qui donnera, (n° 335)...

$$(2)\ldots A+A_1x+A_2x^2+\ldots+x^m \mp (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m).$$

Lorsque a_1 sera nul, le 2e membre de cette identité sera divisible par x; le 1er membre sera donc divisible par x; A sera donc nul. Quand deux racines, a_1, a_2, seront zéro, les deux membres de l'identité (2) devront être divisibles par x^2; A et A_1 seront donc nuls; et ainsi de suite.

338. *Dans toute équation, ramenée à la forme*.................... $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots\ldots+sx+t=0$; *le coefficient p du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines; le coefficient q du 3e terme, est égal à la somme des produits 2 à 2 des racines; et ainsi de suite. Enfin, selon que m est pair ou impair, le dernier terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, est le produit de toutes les racines.* En effet; si après avoir effectué les multiplications indiquées dans le second membre de l'identité (2) du n° 335, on égale les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouvera, (n° 254)...

$$-p=(a_1+a_2+..+a_m);\ +q=a_1a_2+a_1a_3+\text{etc.};\ -r=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\text{etc.};$$

ce qui démontre le principe énoncé. Par conséquent, *dans une équation qui manque de second terme, la somme des racines positives est égale à la somme des racines négatives, et quand le dernier terme est zéro, une des racines est zéro; la réciproque est vraie.*

339. *Les relations qui existent entre les racines et les coefficiens d'une équation* (n° 338), *ne peuvent pas servir à déterminer les expressions générales des racines de cette équation.* En effet; soit l'équation.... (1)... $x^3+px^2+qx+r=0$. Si les racines de cette équation sont, a, b, c, on aura, (n° 338)...

$$(2)\ldots p=-(a+b+c);\quad q=ab+ac+bc;\quad r=-abc.$$

Ces trois relations ne peuvent pas donner les valeurs des inconnues, a, b, c, car on en déduit...

$$(3)\ldots a^3+pa^2+qa+r=0;\ b^3+pb^2+qb+r=0;\ c^3+pc^2+qc+r=0\ (*).$$

(*) Les formules (2) donnent...
$pa^2=-a^3-ba^2-ca^2$; $qa=ba^2+ca^2+abc$; $r=-abc$; d'où,
$pa^2+qa+r=-a^3$. Donc, $a^3+pa^2+qa+r=0$.

La difficulté de trouver a, ou b, ou c, est donc la même que pour obtenir x. Cela devait nécessairement arriver, car a, b, c, entrant de la même manière dans les équations (2), ces équations ne changent pas quand on change a, en b ou en c; l'équation en a, que l'on déduira des formules (2), ne devra donc pas changer quand on changera a, en b ou en c; ses racines seront donc, a, b, c; cette équation aura donc les mêmes coefficiens que l'équation (1). Ces remarques conviennent à une équation d'un degré quelconque. En général, *lorsque des inconnues entrent de la même manière dans des équations, ces inconnues sont racines de la même équation.*

340. *Quand on connaît les sommes, p, q,.., s, t, de tous les produits que l'on peut former avec m inconnues, a_1, a_2,.., a_m, en combinant ces inconnues, 1 à 1, 2 à 2,..., $m-1$ à $m-1$, m à m; l'équation qui détermine ces inconnues est $x^m - px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots \mp sx \pm t = 0$; on prend les signes supérieurs ou inférieurs, selon que m est un nombre pair ou impair* (n° 338).

341. *Pour transformer l'équation $f(x)=0$, en une autre équation, de manière que les racines de la nouvelle équation soient égales à celles de la proposée prises avec des signes contraires; on fait $x=-z$, dans $f(x)=0$; le résultat $f(-z)=0$, est l'équation demandée. Pour obtenir l'équation en z, il suffit de changer les signes du 2^e^ terme, du 4^e^ terme, etc., et de mettre z au lieu de x.* En effet; soit l'équation, (1)... $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} +$ etc. $=0$. Quand m est pair, l'hypothèse $x=-z$, donne $z^m - pz^{m-1} + qz^{m-2} - rz^{m-3} +$ etc. $=0$; et lorsque m est impair, l'équation (1) devient, $-z^m + pz^{m-1} - qz^{m-2} +$ etc. $=0$; d'où $z^m - pz^{m-1} + qz^{m-2} - rz^{m-3} +$ etc. $=0$. Ce qui démontre la règle énoncée.

342. Problème. *Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure des racines de l'équation....(1)...* $x^m + px^{m-1} + \ldots + sx + t = 0$ (*).

343. Pour *calculer la limite supérieure des racines positives de l'équation* (1), on cherchera d'abord *quelle est la valeur de x qui, substituée dans le polynôme x^m + etc., donne nécessairement un résultat positif.* Le cas le plus défavorable est celui où tous les coefficiens sont négatifs et égaux au plus grand, car alors la partie négative est la plus grande possible, et la partie positive est la plus petite possible. Désignant donc par n, le plus grand coefficient négatif, pris positivement, il suffira de trouver une valeur de x qui rende le polynôme $(x^m - nx^{m-1} - \ldots - nx - n)$, positif. Cette valeur est facile à déterminer, car on a....

(*) Par *limite supérieure* des racines positives d'une équation, on entend un nombre plus grand que la plus grande racine positive de cette équation; et la *limite inférieure* est un nombre plus petit que la plus petite racine positive.

$$x^m - nx^{m-1} - \ldots - nx - n \mathrel{=\!\!\!|} x^m - n\,(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$$

$$\mathrel{=\!\!\!|}\; x^m - n\left(\frac{x^m - 1}{x - 1}\right) \text{ (n° 315) } \mathrel{=\!\!\!|} \frac{(x - 1 - n)\,x^m + n}{x - 1},$$

et l'hypothèse $x = n + 1$, réduit la valeur de ce polynôme à $+ 1$.

344. *Le plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté de l'unité, substitué pour x dans le polynôme $x^m +$ etc., donne donc nécessairement un résultat positif.* Il est facile de prouver que *toute valeur de x, plus grande que $(n + 1)$, donne un résultat positif d'autant plus grand que x est plus grand*, car l'identité....

$$x^m - nx^{m-1} \ldots - nx - n \mathrel{=\!\!\!|} x^m\left[1 - n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^m}\right)\right],$$

démontre que x augmentant, au-delà de $n + 1$, la valeur de.............. $x^m - nx^{m-1} \ldots - nx - n$, augmente. L'hypothèse $x = n + 1$, rendant nécessairement le polynôme $x^m +$ etc., positif, et les valeurs de x plus grandes que $n + 1$, donnant des résultats positifs d'autant plus grands que x est plus grand, aucune valeur positive de x, plus grande que $n + 1$, ne peut réduire ce polynôme à zéro; toutes les racines de l'équation (1) sont donc moindres que $(n + 1)$. La limite supérieure des racines positives de cette équation est donc $n + 1$.

345. Ainsi, *la limite supérieure des racines positives d'une équation, est égale au plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté d'un.*

346. *La limite inférieure des racines positives d'une équation, est égale au dernier terme, divisé par ce dernier terme augmenté du plus grand coefficient de signe contraire au dernier terme. (Le dernier terme et le plus grand coefficient positif ou négatif, doivent être pris positivement).* En effet; soit $x = \frac{1}{y}$; x sera d'autant plus petit que y sera plus grand. Il suffit donc de calculer la limite supérieure des racines positives de l'équation en y. Pour y parvenir, désignez, le dernier terme par $\pm t$, le plus grand coefficient négatif par n et le plus grand coefficient positif par P; l'équation proposée sera....

$$(1)\ldots\; x^m + \ldots + Px^{m-r} + \ldots - nx^{m-s} + \ldots \pm t = 0.$$

Faisant $x = \frac{1}{y}$, l'équation (1) donnera....

$$(2)\ldots\; y^m + \ldots + \left(\frac{-n}{\pm t}\right) y^s + \ldots + \left(\frac{+P}{\pm t}\right) y^r + \ldots \pm \frac{1}{t} = 0.$$

Quand le dernier terme de l'équation (1) sera $+ t$, le plus grand coefficient négatif de l'équation (2) sera $\frac{n}{t}$; on aura donc (n° 345)....

$$y < \frac{n}{t} + 1, \text{ ou } y < \frac{t+n}{t}. \text{ Donc, } \frac{1}{y} > \frac{t}{t+n}; \text{ donc } x > \frac{t}{t+n}.$$

Lorsque le dernier terme sera $-t$, la fraction $\frac{t}{t+P}$, sera moindre que $+x$. Le principe est donc démontré.

347. Pour *calculer les limites des racines négatives de l'équation* (1), on fera $x = -z$; les racines positives de la transformée en z, étant égales aux racines négatives de l'équation en x (n° 341), *les limites des racines positives de l'équation en* z, *seront les limites demandées.*

348. Problème. *Etant donné le polynôme* $x^m +$ *etc., déterminer une valeur de* x *qui rende nécessairement le premier terme plus grand que la somme de tous les autres.* Le cas le plus défavorable est celui où tous les termes qui suivent x^m, sont affectés du plus grand des coefficiens, abstraction faite des signes. Désignant donc ce plus grand coefficient par c, il suffit de trouver la valeur de x qui donne.....

$$x^m > cx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + cx + c; \text{ d'où } \frac{x^m(x-1-c)+c}{x-1} > 0.$$

Or, $x = c + 1$, satisfait à cette dernière inégalité; *la valeur de x, qui rend nécessairement le premier terme d'un polynôme, plus grand que la somme de tous les autres, est donc le plus grand de tous les coefficiens (abstraction faite des signes), augmenté d'un.* Si le coefficient du premier terme était plus grand que l'unité, la même substitution rendrait à plus forte raison le premier terme plus grand que la somme de tous les autres. D'après les règles précédentes, la limite supérieure des racines positives de l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x + 2 = 0$, est 6; la limite inférieure de ces racines est $\frac{2}{7}$; toutes les racines négatives sont comprises entre -3 et $-\frac{2}{9}$. La valeur de x, qui rend nécessairement le premier terme plus grand que la somme de tous les autres, est 8.

* 349. *Quand les deux premiers termes d'une équation sont positifs, on peut obtenir des limites plus approchées que celles des* n^{os} 345, 346 *et* 347. En effet; soit l'équation....

$$(1)\ldots\ x^m + px^{m-1} + \ldots + qx^{m-n+1} - rx^{m-n} + \ldots + sx + t = 0,$$

dans laquelle le premier des termes affectés du signe $-$ est rx^{m-n}. Si l'on veut *déterminer un nombre qui mis au lieu de x, donne nécessairement un résultat positif*, on supprimera les termes compris entre x^m et rx^{m-n}, et affectant tous les autres termes du plus grand coefficient négatif $-N$, il suffira de satisfaire à l'inégalité....

$$x^m > Nx^{m-n} + Nx^{m-n-1} + \ldots + Nx + N.$$

On en déduira (n° 315),... $x^m > N\left(\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}\right)$.

Cette dernière inégalité sera vraie, si x étant plus grand que 1, on a...... $x^m > \frac{Nx^{m-n+1}}{x-1}$; d'où $(x-1)x^{n-1} > N$. Soit, $x = 1+z$; la dernière inégalité deviendra, $z(z+1)^{n-1} > N$; or on satisfait à cette inégalité en prenant $z(z)^{n-1} = N$; d'où $z = \sqrt[n]{N}$ et $x = 1+\sqrt[n]{N}$. Donc, *le plus grand coefficient négatif du polynôme $x^m +$ etc., étant N, et l'exposant de x dans le premier des termes affectés du signe — étant $m-n$, la valeur de x qui rend nécessairement ce polynôme positif, est $1+\sqrt[n]{N}$.* On prouverait, comme dans le n° 344, que $1+\sqrt[n]{N}$ est plus grand que la plus grande racine positive de l'équation (1). *On peut donc prendre $1+\sqrt[n]{N}$, pour la limite supérieure des racines positives de l'équation* (1). On obtiendra la limite inférieure de ces racines, en faisant $x=\frac{1}{y}$ et déterminant la limite supérieure des racines positives de l'équation en y, d'après la règle précédente. Posant $x=-z$, les limites des racines positives de la transformée en z, seront les limites des racines négatives de l'équation en x. D'après cette règle, les limites des racines positives de l'équation, $x^8+x^4+8x^3-x^2-64x-1=0$, seront 3 et $\frac{1}{3}$; toutes les racines négatives seront comprises entre -3 et $-\frac{1}{65}$.

350. *Lorsque deux nombres, mis dans une équation à la place de l'inconnue, donnent deux résultats de signes contraires, une des racines de cette équation est comprise entre les nombres qui ont donné des résultats de signes contraires. Cette racine est donc réelle.* En effet; 1°. *Quand les deux nombres substitués seront positifs*, on désignera la somme des termes positifs par p, et la somme des termes affectés du signe —, par n; l'équation sera $p-n=0$, et la valeur de l'inconnue x, qui donnera $p=n$, sera une racine de l'équation. Or, p et n ne contiennent que des puissances positives de x. Concevant donc que x croît d'une manière continue, p et n croîtront également d'une manière continue. Cela posé; si $x=\alpha$, donne un résultat positif, cette valeur de x rendra p plus grand que n, et si $x=\beta$ donne un résultat négatif, cette valeur de x rendra p moindre que n. Soit $\alpha<\beta$; si x croît d'une manière continue, depuis α jusqu'à β; n et p croîtront d'une manière continue, et ces accroissemens seront tels, que n qui était plus petit que p, pour $x=\alpha$, deviendra plus grand, lorsque x sera égal à β. Il y aura donc une valeur de x, comprise entre α et β, qui donnera $p=n$. Il existera donc une racine réelle entre α et β.

2°. *Si α et β désignant des nombres, positifs ou négatifs, les hypothèses $x=\alpha$, $x=\beta$, donnent des résultats de signes contraires, dans l'équation* (1)...$f(x)=0$; on désignera par r une quantité positive quelconque, plus grande que les *valeurs absolues* de α et β; $r-\alpha$ et $r-\beta$, seront positifs. Soit $r-x=y$, d'où $x=r-y$; l'équation (1) deviendra (2)... $f(r-y)=0$. Mais, faire $x=\alpha$ et $x=\beta$, dans l'équation (1), revient à supposer $y=r-\alpha$ et $y=r-\beta$, dans l'équation (2). Ces deux valeurs positives de y, substituées dans l'équation (2), donneraient donc deux résultats de signes contraires; il existe donc une valeur de y, entre $(r-\alpha)$ et $(r-\beta)$; soit $\alpha>\beta$, on aura, $y>r-\alpha$ et $y<r-\beta$; d'où $r-y<\alpha$ et $r-y>\beta$. Or, $r-y=x$. Il tombe donc une valeur de x, entre α et β. Ce qui démontre le principe énoncé.

351. Lorsque α et β désignant des nombres positifs, les hypothèses $x=\alpha$, $x=-\beta$, donnent deux résultats de signes contraires, on peut toujours déterminer le signe de la racine qui est comprise entre $+\alpha$ et $-\beta$; car en faisant $x=0$, on obtiendra un résultat de signe contraire à l'un des précédens, et *la racine sera comprise entre zéro et celui des nombres* $+\alpha$, $-\beta$, *qui aura donné un résultat de signe contraire à celui que l'on obtient en supposant* $x=0$. Par exemple, dans l'équation $x^2-x-6=0$, les hypothèses $x=2$, $x=-3$, donnant les résultats -4 et $+6$, il tombe une racine entre $+2$ et -3; or, $x=0$, donne le résultat -6 et $x=-3$ a donné $+6$; la racine est donc comprise entre 0 et -3; cette racine est donc négative.

352. *Toute équation de degré impair, a nécessairement une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme. Les équations de degré pair, dont le dernier terme est négatif, ont toujours deux racines réelles de signes contraires. Et les équations de degré pair, dont le dernier terme est positif, peuvent n'avoir aucune racine réelle.* En effet; soient les équations.....

$$x^{2m+1}+\ldots-t=0,\quad x^{2m+1}+\ldots+t=0,\quad x^{2m}+\ldots-t=0,\quad x^{2m}+\ldots+t=0.$$

Si α désigne le plus grand des coefficiens de l'une quelconque de ces équations, (on fait abstraction des signes des coefficiens), l'hypothèse $x=\alpha+1$, rendra le premier terme de chaque équation plus grand que la somme de tous les autres (nº 348); de sorte que le signe du résultat ne dépendra que du signe du premier terme. Cela posé; dans la première équation, $x=0$ et $x=\alpha+1$, donnent deux résultats de signes contraires; cette équation a donc une racine comprise entre 0 et $\alpha+1$; cette racine est donc réelle et positive. Dans la seconde équation; $x=0$ et $x=-(\alpha+1)$, donnent deux résultats de signes contraires; cette équation a donc une racine réelle négative. Dans la troisième équation; $x=0$ et $x=\alpha+1$, donnent deux résultats de signes contraires, et les hypothèses $x=0$, $x=-(\alpha+1)$, donnent aussi des résultats de signes contraires; cette équation a donc toujours deux racines réelles de signes contraires. Enfin, toutes les racines de la dernière équation peuvent être imaginaires, car une équation du second degré, dont le dernier terme est positif, peut avoir ses racines imaginaires, (nº 211).

353. *Quand deux nombres, p', p'', comprennent un nombre impair de racines de l'équation $x^m +$ etc. $= 0$, ces nombres, substitués dans l'équation, donnent deux résultats de signes contraires ; lorsque p' et p'' comprennent un nombre pair de racines, les résultats sont de mêmes signes.* Réciproquement, *selon que $x = p'$ et $x = p''$, donnent deux résultats de signes contraires ou de mêmes signes, il tombe un nombre impair ou un nombre pair, de racines, entre p' et p'' ; zéro est dans la classe des nombres pairs, (A,* n° 168.*)* En effet ; 1°. si trois racines, a, b, c, tombent entre p' et p'', on aura.....

$$x^m + \text{etc.} = (x - a)\ (x - b)\ (x - c) \times P.$$

Les hypothèses, $x = p'$, $x = p''$, donneront deux résultats....

$$R' = (p' - a)\ (p' - b)\ (p' - c)\ P',\ R'' = (p'' - a)\ (p'' - b)\ (p'' - c)\ P''.$$

(P' et P'', désignent les valeurs de P, correspondantes à $x = p'$ et à $x = p''$). Mais, a, b, c, tombent entre p' et p'' ; par conséquent, si p' est plus grand que p'', les trois facteurs, $p' - a$, $p' - b$, $p' - c$, seront positifs, et les trois facteurs, $p'' - a$, $p'' - b$, $p'' - c$, seront négatifs. Or, P' et P'' sont de mêmes signes, car autrement l'équation $P = 0$, aurait une racine d, qui serait comprise entre p' et p'' (n° 350) ; l'équation proposée aurait donc quatre racines, a, b, c, d, comprises entre p' et p'' ; ce qui est contre l'hypothèse. Les résultats, R', R'', sont donc de signes contraires. On prouverait de même, que si p' et p'' comprenaient un nombre pair de racines, les hypothèses, $x = p'$, $x = p''$, donneraient deux résultats de mêmes signes. 2°. la réciproque se déduit de la proposition directe ; par exemple, si $x = p'$ et $x = p''$, donnant deux résultats de signes contraires, il tombait un nombre pair de racines entre p' et p'' ; $x = p'$ et $x = p''$, donneraient deux résultats de mêmes signes (1°) ; ce qui est contre l'hypothèse. Le principe est donc démontré.

354. *Quand deux nombres p et q, substitués dans une équation, $f(x) = 0$, donnent deux résultats de signes contraires, ces nombres comprennent au moins une racine* (n° 350), *et l'on peut toujours approcher autant que l'on veut de l'une des racines comprises entre p et q.* En effet ; soit l'équation $x^3 - 700x + 7000 = 0$; les hypothèses, $x = 13$, $x = 14$, donnent deux résultats de signes contraires ; il tombe donc au moins une racine entre 13 et 14. Pour approcher de l'une des racines, comprises entre 13 et 14, on fera $x = 13,5$; $x = 13,5$ et $x = 14$, donnant deux résultats de signes contraires, une valeur de x tombe entre ces deux nombres ; essayant $x = 13,6$, on verra qu'une racine est comprise entre 13,5 et 13,6. Une valeur de x, à moins d'un dixième d'unité près, est donc 13,5. Essayant des nombres compris entre 13,5 et 13,6, on trouvera qu'une valeur de x, à moins d'un centième d'unité près, est 13,56.

Et ainsi de suite. Le procédé le plus naturel, pour trouver les racines incommensurables de l'équation, $x^m +$ etc. $= 0$, est donc d'essayer les nombres entiers qui sont compris entre les *limites* des racines. Quand les résultats présentent m changemens de signes, on peut approcher autant que l'on veut des m racines. Mais, quand on n'obtient pas m changemens de signes, on ignore combien il y a de racines réelles, car deux résultats de mêmes signes peuvent comprendre un nombre pair de racines (n° 353). Il est donc alors nécessaire de *chercher quelle est la différence qui doit régner entre les nombres que l'on substitue, pour obtenir autant de changemens de signes qu'il y a de racines réelles.* Nous supposerons d'abord, que *l'équation ne renferme que des racines inégales.* Nous verrons ensuite comment on peut résoudre les équations qui contiennent des racines égales.

355. *Quand deux nombres p et q, diffèrent d'une quantité δ moindre que la valeur absolue de la plus petite différence entre deux racines quelconques de l'équation,* (1)..$f(x) = 0$; *il ne peut tomber qu'une seule racine entre p et q. Lorsqu'il en tombe une, les hypothèses, $x=p, x=q$, donnent deux résultats, $f(p)$, $f(q)$, de signes contraires; quand p et q ne comprennent pas de racine, les résultats sont de mêmes signes.* Réciproquement, *lorsque $x = p$ et $x = q$, donnent deux résultats de signes contraires, il tombe une seule racine entre p et q; quand les résultats sont de mêmes signes, p et q ne comprennent pas de racine.* En effet; 1°. si deux racines a et b, tombaient entre p et q, on aurait.........

$$a = p + r,\ b = p + r + s,\ q = p + r + s + t;\ b - a = s;\ q - p = s + r + t.$$

La différence δ, entre p et q, serait donc plus grande que $b - a$; ce qui est contre l'hypothèse. Il ne peut donc pas tomber plus d'une racine entre p et q; 2°. lorsque p et q comprennent une racine, les résultats sont de signes contraires et quand p et q ne comprennent pas de racine, les résultats sont de mêmes signes (n° 353); 3°. quand $x = p$ et $x = q$, donnent deux résultats de signes contraires, p et q comprennent une seule racine, car il y a un nombre impair de racines entre p et q (n° 353), et il ne peut pas en tomber plus d'une (1°); lorsque $x = p$ et $x = q$, donnent deux résultats de mêmes signes, p et q ne comprennent pas de racine, car il ne peut tomber qu'un nombre pair de racines entre p et q, (n° 353), et il ne peut pas en tomber plus d'une (1°). Le principe est donc démontré. Par conséquent, si l et L désignant les limites des racines positives de l'équation (1), on donne successivement à x les valeurs, $l, l + \delta, l + 2\delta$, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à une substitution $l + n\delta$, telle que $l + n\delta$ ne soit pas moindre que L, on obtiendra autant de changemens de signes que l'équation renferme de racines réelles positives. On pourra donc approcher autant que l'on voudra de ces racines (n° 354). Nous sommes donc conduits à résoudre ce problème :

356. *Déterminer une quantité δ, moindre que la valeur absolue de la plus petite différence entre deux racines quelconques de l'équation*

$$(1)\ldots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0.$$

Désignant le 1er membre de cette équation, par $f(x)$, on voit que le problème n'est possible que lorsque toutes les racines, a, b, c,..., l, de l'équation $(1)\ldots f(x)=0$, sont inégales. Dans ce cas, si l'on connaissait l'équation $(2)\ldots \phi(y)=0$, dont les racines seraient les différences, $a-b$, $a-c$, etc., entre a, b, c, ..., l; la limite inférieure des racines positives de l'équation (2), exprimerait δ, car *les différences*, $a-b$, $b-a$, $a-c$, $c-a$, *etc.*, *sont deux à deux égales et de signes contraires*. L'équation (2) a reçu le nom *d'équation aux différences*. Pour former cette équation, on désignera d'abord par y, la différence $b-a$, entre deux racines particulières b et a; on aura, $f(b)=0$, $b-a=y$ et l'élimination de b entre ces deux équations, donnera une équation finale $(3)\ldots f(a+y)=0$, qui sera satisfaite en supposant $y=b-a$, car elle est une conséquence des équations........ $f(b)=0$, $b=a+y$. Mais, l'équation (3), étant indépendante de b, sera encore le résultat de l'élimination de a, entre $f(a)=0$ et $a-a=y$, de c entre $f(c)=0$ et $c-a=y$; et ainsi de suite. Les racines de l'équation (3) seront donc les m différences, $a-a$, $b-a$, $c-a$,..., $l-a$, entre la racine a et les m racines, a, b, c, ..., l. Or, l'équation (3) donne...

$$(a+y)^m + p(a+y)^{m-1} + q(a+y)^{m-2} + \ldots + r(a+y)^3 + s(a+y)^2 + t(a+y) + u = 0.$$

Elevant le binôme $(a+y)$ aux puissances indiquées, (no 255), et ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de y, on trouvera un résultat de cette forme.........

$$(4)\ldots A + A'y + \frac{1}{2}A''y^2 + \frac{1}{2.3}A'''y^3 + \ldots + y^m = 0. \text{ On aura...}$$

$$(5)\ldots A = a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \ldots + ra^3 + sa^2 + ta + u = f(a) = 0,$$

$$(6)\ldots A' = ma^{m-1} + (m-1)pa^{m-2} + (m-2)qa^{m-3} + \ldots + 3ra^2 + 2sa + t,$$

$$(7)\ldots A'' = m(m-1)a^{m-2} + (m-2)(m-1)pa^{m-3} + \ldots + 2.3.ra + 2s; \text{ etc.}$$

Les m racines de l'équation (4), sont $a-a$, $b-a$, $c-a$, ..., $l-a$. Mais, A est identiquement nul, car a est une racine de l'équation (1); l'équation (4) se réduit donc à, $A'y + \frac{1}{2}A''y^2 + \ldots + y^m = 0$; divisant tous les termes par $y-0$, ou y, on supprimera la racine $a-a$; de sorte que dans l'équation..........

$$(8)\ldots A' + \frac{1}{2}A''y + \frac{1}{2.3}A'''y^2 + \ldots + y^{m-1} = 0,$$

qui en résultera, les $(m-1)$ valeurs de y, seront les $m-1$ différences, $b-a$, $c-a$, $d-a$, ..., $l-a$, entre la racine a et les $m-1$ autres racines. Par conséquent, si l'on désigne le 1er membre de l'équation (8), par $F(a,y)$, l'élimination de a entre les équations, $f(a)=0$, $F(a,y)=0$, donnera une équation finale $f_{,}(y)=0$, qui sera satisfaite, en mettant pour y, l'une quelconque des différences, $b-a$, $c-a$, ... $l-a$, entre la racine a et les $m-1$ autres racines. Or, l'élimination de b entre les équations, $f(b)=0$, $F(b,y)=0$, conduirait évidemment à la même équation finale $f_{,}(y)=0$, et l'on satisferait à cette dernière équation, en mettant pour y les différences, $a-b$, $c-b$, ..., $l-b$, entre la racine b et les $m-1$ autres racines. Le même raisonnement pouvant s'appliquer successivement à toutes les racines, on voit que le résultat de l'élimination de a entre les équations $f(a)=0$, $F(a,y)=0$, donnera une équation finale en y, dont les racines seront toutes les différences entre les racines de l'équation (1). Cette équation finale sera donc l'équation aux différences. Or, on parviendrait au même résultat en éliminant x entre les équations, $f(x)=0$, $F(x,y)=0$ (*);

357. *On obtiendra donc l'équation aux différences de l'équation* (1), *en éliminant x entre les équations....*

$$(1)\ldots\ x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+rx^3+sx^2+tx+u=0,$$

$$(9)\ldots\ X'+\frac{1}{2}X''y+\frac{1}{2.3}X'''y^2+\ldots.+y^{m-1}=0.$$

X', X'', X''', etc., désignent ce que deviennent les fonctions, A', A'', A''', etc., quand on y change a en x. De sorte, que....

$$X'=mx^{m-1}+(m-1)px^{m-2}+(m-2)qx^{m-3}+\ldots+3rx^2+2sx+t,$$

$$X''=m(m-1)x^{m-2}+(m-2)(m-1)px^{m-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+2.3.rx+2s\text{ ; etc.}$$

Par exemple, si l'équation proposée est $x^3-7x+7=0$, l'équation (9) deviendra $(3x^2-7)+\frac{1}{2}(6x)y+y^2=0$. Eliminant x entre ces deux équations, le résultat, $y^6-42y^4+441y^2-49=0$, sera l'équation aux différences.

358. *Lorsqu'on change les signes des racines d'une équation, l'équation aux différences ne change pas*, car la différence entre deux racines quelconques a et b, ayant deux valeurs, $a-b$, $b-a$, la différence entre $-a$ et $-b$, a les mêmes valeurs.

(*) En général, *lorsqu'on élimine une quantité α entre deux équations, on conçoit que α a une même valeur particulière dans chaque équation, et l'équation qui en résulte, convient à toutes les valeurs dont α est susceptible.*

Remarque. Le calcul de la quantité δ étant nécessaire à la résolution de l'équation (1), il faut obtenir δ par une méthode indépendante de la résolution des équations. Cela posé; si $\phi(y)=0$ est l'équation aux différences, le procédé du n° 322, conduira quelquefois à l'équation $\phi(y)\times F(y)=0$, (n° 319). De sorte que l'élimination de x, entre les équations (1) et (9), ne donnera pas toujours l'équation aux différences. Mais, *on pourra prendre pour δ la limite inférieure des racines positives de l'équation* $\phi(y)\times F(y)=0$, car cette limite sera nécessairement moindre que la plus petite racine positive de l'équation aux différences, $\phi(y)=0$.

359. *L'équation aux différences*, (2).. $\phi(y)=0$, *est du degré*, $m(m-1)$; *elle ne renferme que des puissances paires de* y. En effet; 1°. les m racines, a, b,......, l, donnent $m(m-1)$ différences, $a-b$, $a-c$, etc. (n° 250); mais, ces différences sont les racines de l'équation (2); cette équation est donc du degré $m(m-1)$; 2°. toutes les valeurs de y étant deux à deux égales et de signes contraires, l'équation (2) ne doit pas changer quand on change $+y$ en $-y$; cette équation est donc de la forme....

(10)... $(y^2)^n+P(y^2)^{n-1}+\ldots+Ty^2+U=0$. Soit $y^2=\gamma$, on aura,
(11).... $\gamma^n+P\gamma^{n-1}+\ldots+T\gamma+U=0$.

L'équation (11) se nomme, l'*équation au quarré des différences*, parce que ses racines sont les quarrés des différences entre les racines de l'équation en x. Les nombres à substituer, pour trouver les racines incommensurables, devant différer de δ, *il est avantageux de chercher la plus grande valeur possible de* δ. Désignant donc par $\frac{1}{\alpha}$, la limite inférieure des racines positives de l'équation (11), (n° 349), α sera plus grand que l'unité et l'on aura $\gamma>\frac{1}{\alpha}$; d'où $y^2>\frac{1}{\alpha}$; donc, $y>\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Or, la racine quarrée de α sera un nombre entier β, ou cette racine tombera entre deux nombres entiers, $\beta-1$, β; dans ces deux cas, on prendra $\delta=\frac{1}{\beta}$. Cette valeur de δ sera moindre que la valeur absolue de la plus petite différence des racines positives et négatives de l'équation en x.

360. Ainsi, *pour obtenir une quantité δ, moindre que la valeur absolue de la plus petite différence entre deux racines quelconques d'une équation; on calcule l'équation au quarré des différences* (n° 359); *on prend la limite inférieure $\frac{1}{\alpha}$ des racines positives de cette dernière équation* (n° 349); *la valeur de $\sqrt{\alpha}$ est un nombre entier β, ou cette racine tombe entre deux nombres entiers, $\beta-1$, β. Dans ces deux cas $\delta=\frac{1}{\beta}$*, (*).

(*) Quand l'élimination de x, entre les équations (1) et (9) du n° 357,

361. Pour n'avoir à essayer que des nombres entiers, on résoudra ce problème : *Transformer une équation*, (1)... $f(x)=0$, *de manière que la valeur absolue de la plus petite différence entre les racines de la transformée, soit plus grande que l'unité.* On calculera (n° 360), une quantité $\frac{1}{\mathcal{C}}$ moindre que la plus petite différence entre les racines de l'équation (1); on fera $x\times\mathcal{C}=z$, et mettant pour x, sa valeur $\frac{z}{\mathcal{C}}$, la transformée ...... (2)..$f\left(\frac{z}{\mathcal{C}}\right)=0$, jouira de la propriété demandée, car z étant égal à $x\times\mathcal{C}$, les différences des racines de l'équation (2), sont égales aux différences entre les racines de l'équation (1), multipliées par $\mathcal{C}$; la quantité plus petite que la plus petite différence entre les racines de l'équation (2), sera donc égale à l'unité. Mais, *quand on change les signes des racines d'une équation, l'équation aux différences ne change pas*, (n° 358). On appercevra donc toutes les racines réelles de l'équation (2), en substituant des nombres qui diffèrent de l'unité (n° 355).

362. *Lorsqu'une équation ne contient qu'une seule racine plus grande que l'unité, il suffit, pour trouver la plus petite valeur entière approchée de cette racine, de donner à l'inconnue x, les valeurs*, 1, 2, *etc*, *jusqu'à la limite supérieure des racines positives* (n° 349), car deux substitutions consécutives ne pouvant comprendre qu'une seule racine, lorsque les résultats seront de mêmes signes, il ne tombera aucune racine réelle entre les deux nombres substitués, et quand les deux nombres substitués comprendront une racine, on en sera averti par deux résultats de signes contraires (n° 355).

363. *Connaissant la plus petite valeur entière approchée d'une racine incommensurable positive, calculer la valeur de cette racine avec un degré d'approximation donné?* Soit l'équation $f(x)=0$; si une valeur de x tombe entre deux nombres entiers α, $\alpha+1$; la plus petite valeur entière approchée de x sera α; on fera $x=\alpha+\frac{1}{y}$; on obtiendra une transformée, $\varphi(y)=0$, et cette transformée devant contenir une racine plus grande que l'unité, si l'on cherche la plus petite valeur entière approchée $\mathcal{C}$, de y, on aura $y=\mathcal{C}+\frac{1}{y_1}$. La substitution de la valeur de y, dans $\varphi(y)=0$,

---

conduira à une équation qui renfermera des puissances impaires de y, ou qui sera d'un degré plus élevé que $m(m-1)$, cette équation ne sera pas l'équation aux différences, (n° 359), mais on pourra cependant, prendre pour δ la limite inférieure des racines positives de l'équation en y. On déduit δ de l'équation au quarré des différences, parce que la limite inférieure des racines positives de l'équation aux différences, donnerait une plus petite valeur de δ.

donnera une transformée en y_1, sur laquelle on opérera comme sur les équations, $f(x)=0$, $\varphi(y)=0$; et ainsi de suite. La valeur de x sera alors exprimée par une fraction continue et la méthode du n° 286, donnera cette racine avec autant d'exactitude que l'on voudra.

364. Quand la valeur absolue de la plus petite différence entre les racines de l'équation proposée, sera plus grande que l'unité (n° 361), il ne tombera qu'une seule racine entre α et $\alpha+1$; l'inconnue y n'aura donc qu'une seule valeur plus grande que l'unité. On obtiendra donc la plus petite valeur entière approchée de y, en donnant successivement à y les valeurs, 1, 2, 3, etc., jusqu'à la limite supérieure des racines positives de l'équation en y, (n° 362). On opérera de même sur les autres transformées, car chacune n'aura qu'une seule racine plus grande que l'unité.

365. Lorsque la valeur absolue de la plus petite différence entre les racines de l'équation proposée, sera moindre que l'unité; plusieurs valeurs de x pourront tomber entre α et $\alpha+1$; l'équation en y pourra donc contenir plusieurs racines plus grandes que l'unité; on sera donc forcé, pour trouver $\mathcal{C}$, de calculer l'équation aux différences de l'équation en y. Il en sera de même des autres transformées. Quand y aura plusieurs valeurs plus grandes que l'unité; chacune d'elles donnera une valeur de x, comprise entre α et $\alpha+1$; on devra opérer séparément sur chaque valeur de y. *On abrégera donc les calculs, en préparant d'abord l'équation proposée de manière que la valeur absolue de la plus petite différence de ses racines, soit plus grande que l'unité* (n° 361).

366. Pour *trouver les racines incommensurables* d'une équation qui ne renferme que des racines incommensurables et imaginaires, inégales; on prépare l'équation de manière que la plus petite différence entre les racines de cette équation soit moindre que l'unité (n° 361). Si la transformée est (1).... $\varphi(x)=0$, on cherche la limite supérieure l des racines positives de cette équation (n° 349) et l'on donne successivement à x les valeurs, 0, 1, 2, 3,...., l; on obtient autant de changemens de signes qu'il y a de racines réelles positives dans l'équation (1). Ce qui détermine les plus petites valeurs entières approchées des racines positives de l'équation (1); la règle du n° 363, donne le moyen d'approcher autant que l'on veut de ces racines. Pour trouver les racines négatives, on fait $x=-z$, (n° 341), et l'on calcule les racines positives de l'équation en z. Par exemple, si l'équation proposée est (2)...$x^3-7x+7=0$; on calculera une quantité δ, moindre que la plus petite différence entre les racines de cette équation. On trouvera $\delta=\frac{1}{4}$, (n° 360). Posant $x\times 4=z$, la transformée sera...... (3)...$z^3-112z+448=0$. La limite supérieure des racines de cette équation étant 12, (n° 349), il suffira d'essayer les nombres, 0, 1, 2, 3,.., 11, 12. On verra que l'équation (3) a deux racines positives; l'une tombe entre

5 et 6, l'autre entre 6 et 7. Pour approcher de la 1re racine, on fera... $z=5+\frac{1}{y}$; la transformée sera, $13y^3-37y^2+15y+1=0$; or y n'a qu'une seule valeur plus grande que l'unité, (n° 364); on obtiendra donc la valeur entière approchée de y, en essayant les nombres, 1, 2, 3, etc., (n° 364); $y=2$ et $y=3$, donnent des résultats de signes contraires; la plus petite valeur entière approchée de y est donc 2. Posant $y=2+\frac{1}{y_{,}}$, la plus petite valeur entière approchée de $y_{,}$, sera 2. Continuant ces calculs, on trouvera........

$$y_{,}=2+\frac{1}{y_{,,}};\ y_{,,}=1+\frac{1}{y_{,,,}};\ y_{,,,}=19+\frac{1}{y_{,,,,}};\ \text{etc.}$$

Remontant à la valeur de z, on verra (n° 287) que z tombe entre 5,42753 etc., et 5,42758 etc. Or, $x=\frac{1}{4}z$, la valeur de x tombe donc entre 1,35688 et 1,35689. On verra de même (n° 287), que la seconde racine positive, est 1,69202 etc. Enfin, pour calculer la valeur négative de x, on fera $z=-t$, dans l'équation (3); la transformée sera (4) ... $t^3-112t-448=0$; la limite supérieure des racines positives de cette équation sera 23, (n° 349) et la quantité moindre que la plus petite différence des racines de l'équation (4), sera 1, (n° 361). On donnera donc successivement à t les valeurs, 0, 1, 2, 3,..., 23; $t=12$ et $t=13$, donneront deux résultats de signes contraires; la plus petite valeur entière approchée de t, est donc 12; et continuant les calculs, on trouvera $x=-3,04891$ etc. On pouvait éviter de calculer cette dernière racine; car la somme des trois racines de l'équation (2) étant zéro, (n° 338), et la somme des deux racines positives étant 3,04890 etc.; la racine négative est 3,0489 etc.

367. La comparaison des valeurs des fonctions, A, A', A'', etc., (n° 356), conduit à des remarques importantes. En effet; la valeur de A' peut se déduire de celle de A, en multipliant chaque terme de A, par l'exposant de a dans ce terme et diminuant l'exposant de a d'une unité, car d'après cette règle; le 1er terme a^m, de A, donne ma^{m-1} pour le 1er terme de A'; le 2e terme pa^{m-1}, donne $(m-1)pa^{m-2}$; ...; le terme ta^1, donne $1\times ta^0$, ou t, pour le terme correspondant de A'; et le dernier terme u, de A, ne donne pas de terme correspondant pour A', parce que u étant égal à $u\times a^0$, le terme correspondant de A' est $0\times ua^{0-1}$, ou zéro. A'' se déduit de A' d'après la même loi; et ainsi de suite. De sorte que les fonctions, A', A'', etc., se déduisent de A, d'après une loi constante. Cette propriété a fait donner à ces fonctions le nom de *fonctions dérivées*. A' est la fonction dérivée de A; A'' est la fonction dérivée de A'; mais A' était la fonction dérivée de A; A'' est donc la seconde fonction dérivée de A; et ainsi de suite. Or, dans le n° 356, les équations (3) et (4)

peuvent se déduire de l'équation (5), en changeant, dans cette dernière, a en $a+y$. Par conséquent :

368. *Lorsque dans un polynôme A, de la forme $a^m+pa^{m-1}+etc.$, on change a, en $a+y$, le résultat $(a+y)^m+p(a+y)^{m-1}+etc.$, ordonné suivant les puissances décroissantes de y, est*..................

(1)... $A+A'y+\frac{1}{2}A''y^2+\frac{1}{2.3}A'''y^3+\ldots+y^m$. *Le terme A, indépendant de y, est le polynôme primitif; le coefficient A', de la première puissance de y, est la fonction dérivée de A; A'' est la fonction dérivée de A'; et ainsi de suite. Pour obtenir la fonction dérivée d'un polynôme, $a^m+pa^{m-1}+etc.$, il suffit de multiplier chaque terme de ce polynôme, par l'exposant de a, dans ce terme et de diminuer cet exposant d'une unité; les termes indépendans de a, étant censés multipliés par a^0, les fonctions dérivées de ces termes se réduisent à zéro.* Par exemple, $A=a^3-7a+7$, donne $A'=3a^2-7$; $A''=6a$; $A'''=6$; $A''''=0$; etc.; la formule (1) devient, $(a^3-7a+7)+(3a^2-7)y+3ay^2+y^3$; et en effet, on obtiendrait ce dernier polynôme, en changeant a en $a+y$, dans.... a^3-7a+7. Désormais, les *accens* placés en haut des lettres, indiqueront des *fonctions dérivées* et les *accens* placés en bas des lettres n'indiqueront pas des fonctions dérivées. Ainsi, D' désignera la fonction dérivée de D et $D_,$ ne sera pas la fonction dérivée de D.

369. Quand on connaît la valeur d'une racine incommensurable, à moins d'un dixième d'unité près, on peut quelquefois approcher de cette racine, par une méthode plus simple que celle du n° 366. En effet; soit l'équation, (1)..... $x^m+px^{m-1}+\ldots\ldots+sx^2+tx+u=0$. On désignera le premier membre par $f(x)$, et $f'(x)$ représentera la fonction dérivée de $f(x)$. Si la valeur de x, à moins d'un dixième d'unité près, est α; on fera $x=\alpha+z$; z sera moindre qu'un dixième. L'équation (1) deviendra, (n° 368).....

$$A+A'z+\frac{1}{2}A''z^2+\frac{1}{2.3}A'''z^3+\ldots+z^m=0, \text{ et l'on aura....}$$

$$A=\alpha^m+p\alpha^{m-1}+\ldots\ldots+s\alpha^2+t\alpha+u;$$

$$A'=m\alpha^{m-1}+(m-1)p\alpha^{m-2}+\ldots+2s\alpha+t.$$

Pour obtenir une première approximation, on observera que les quantités z^2, z^3, etc., étant respectivement moindres que, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., on peut négliger les puissances de z supérieures à la première; ce qui donnera....

$$A+A'z=0; \text{ d'où....}$$

$$(2)\ldots z=-\frac{A}{A'}=-\frac{\alpha^m+p\alpha^{m-1}+\text{etc.}}{m\alpha^{m-1}+(m-1)p\alpha^{m-2}+\text{etc.}}=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Substituant pour α, la valeur approchée de x, on déduira de la formule (2), une valeur approchée de z et l'on s'arrêtera aux centièmes. Ajoutant cette valeur approchée de z à α, on obtiendra une nouvelle valeur approchée $\mathcal{C}$, de x; et faisant $x = \mathcal{C} + z$, on trouvera, $z = -\frac{f(\mathcal{C})}{f'(\mathcal{C})}$. Divisant $f(\mathcal{C})$, par $f'(\mathcal{C})$, on s'arrêtera aux millièmes; ce qui fournira une nouvelle valeur approchée de x. Et ainsi de suite. Or, on obtiendrait les mêmes valeurs approchées de z, en posant....

$$(3)\ldots\ z = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x^m + px^{m-1} + \text{etc.}}{mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \text{etc.}},$$

et donnant successivement à x les valeurs, α, $\mathcal{C}$, etc. On en déduit cette règle : *Si la valeur de x, à moins d'un dixième d'unité près, est α; faites $x = \alpha$ dans la formule* (3) *et calculez z avec deux décimales. Ajoutez cette valeur de z à α; la somme sera une nouvelle valeur approchée, $\mathcal{C}$, de x. Faites $x = \mathcal{C}$, dans la formule* (3), *et calculez z avec trois décimales. Et ainsi de suite.* Le numérateur de la valeur de z étant le premier membre $f(x)$ de l'équation proposée, et la valeur de x devant réduire $f(x)$ à zéro, *lorsque les valeurs successives, $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, etc., du numérateur $f(x)$, vont en diminuant, on approche de plus en plus de la valeur de x et la méthode réussit. Quand les valeurs successives de $f(x)$, augmentent, on s'éloigne de plus en plus de la valeur de x; de sorte que la méthode est en défaut ; on doit alors avoir recours au procédé du* n° 363. Soit l'équation (4).... $x^3 - 7x + 7 = 0$, (n° 366). En substituant pour x les nombres 1,3 et 1,4, on verra que l'une des racines de cette équation tombe entre ces deux nombres. La formule (3) deviendra, (5).... $z = -\left(\frac{x^3 - 7x + 7}{3x^2 - 7}\right)$. Supposant donc $x = \alpha = 1{,}3$, la formule (5) donnera, $z = \frac{0{,}097 \text{ etc.}}{1{,}930 \text{ etc.}} = 0{,}05$ etc.; la seconde valeur approchée de x sera, $\mathcal{C} = 1{,}3 + 0{,}05 = 1{,}35$. Faisant, $x = \mathcal{C} = 1{,}35$, dans la formule (5), et calculant trois décimales, on trouvera $z = \frac{0{,}010 \text{ etc.}}{1{,}532 \text{ etc.}} = 0{,}006$ etc. La troisième valeur approchée de x sera donc, $x = 1{,}356$. Les valeurs successives de $x^3 - 7x + 7$, allant en diminuant, on approche de plus en plus de la valeur de x. Si l'on continue ces calculs, on trouvera $x = 1{,}35689$ etc. Ce qui s'accorde avec le résultat du n° 366.

Racines égales, (n° 336).

370. Ce qui précède, donnant le moyen de résoudre les équations qui ne renferment que des racines inégales, nous allons faire voir que *la résolution des équations qui ont des racines égales, dépend de la résolution des équations qui ne contiennent que des racines inégales.*

* 371. Les équations (5) et (8), du n° 356, donnent le moyen de *recon-*

naître si une équation (1)... $X=f(x)=0$, *contient des racines commensurables égales*. En effet; ces équations sont....

$$(5)\ldots A=a^m+pa^{m-1}+\ldots+u=0;\quad (8)\ldots\ldots A'+\frac{1}{2}A''y+\ldots+y^{m-1}=0,$$

et les valeurs de y qui satisfont à l'équation (8), sont $b-a$, $c-a$, ..., $l-a$, (n° 356). *Quand toutes les racines*, a, b, c, ..., l, *de l'équation* (1), *sont inégales*, aucune des valeurs de y n'est zéro; A' n'est donc pas nul; l'hypothèse $x=a$, qui donne $X=0$, ne réduit donc pas X' à zéro; X' n'est donc pas divisible par $x-a$; on prouverait de même que X' n'est divisible par aucun des facteurs, $x-b$, $x-c$, .., $x-l$, de X. De sorte que X et X' sont premiers entr'eux. *Réciproquement*, *lorsque X et X', n'ont aucun facteur commun, l'équation* (1) *n'a pas de racines égales*, car alors, X' n'étant pas divisible par $x-a$, $x=a$ ne réduit pas X' à zéro; A' n'est donc pas nul; $y=0$ ne satisfait donc pas à l'équation (8); aucune des différences, $b-a$, $c-a$, etc., n'est donc nulle; les racines, a, b, c, .., l, sont donc inégales.

* 372. *Quand l'équation* (1) *contient des racines égales*, X *et* X' *ont un facteur commun*, *et* réciproquement, *quand* X *et* X' *ont un commun diviseur, l'équation* (1) *contient des racines égales*. Cela résulte du principe du n° 371. On peut d'ailleurs le démontrer directement. En effet; lorsque $a=b$, la valeur $b-a$, de y, est nulle; $x=a$ réduit donc X et X' à zéro; X et X' ont donc un commun diviseur $x-a$, (n° 313). *Réciproquement*, lorsque X et X' ont un commun diviseur, ce commun diviseur ne peut être divisible que par des facteurs *premiers*, $x-a$, $x-b$, .., $x-l$, de X, (n° 290). Supposons donc que $x-a$ divise X et X'; $x=a$ réduira X et X' à zéro; A et A' seront donc nuls; une des racines, $b-a$, $c-a$, etc., de l'équation (8), sera donc nulle; l'équation (1) contiendra donc des racines égales.

373. Les principes des nos 371 et 372, donnent le moyen de *reconnaître si une équation a des racines commensurables égales*. Les racines incommensurables, jouissent des mêmes propriétés. Pour trouver les racines égales, (commensurables ou incommensurables), il suffit d'examiner la forme du plus grand commun diviseur entre X et X'. Soit....

$$(1)\ldots X=x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+tx+u=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\zeta}(x-c)^{\gamma}=f(x)$$

La fonction dérivée X', de X, étant le coefficient de la première puissance de y, dans le développement de $f(x+y)$, (n° 368), on changera x en $x+y$; l'identité (1) deviendra....

$$(2)\ldots (x+y)^m+p(x+y)^{m-1}+\text{etc.}=(x-a+y)^{\alpha}(x-b+y)^{\zeta}(x-c+y)^{\gamma}.$$

Si après avoir effectué les développemens indiqués, on ordonne les deux membres suivant les puissances croissantes de y, le coefficient X' de la première puissance de y, dans le premier membre, sera (n° 368)....

$$X' = mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \ldots + t.$$

Dans le second membre, le coefficient de la première puissance de y sera (**),

$$(3)\ldots X' = [(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}] \times$$
$$\times [\alpha(x-b)(x-c) + \beta(x-a)(x-c) + \gamma(x-a)(x-b)].$$

Or, le polynôme $\alpha(x-b)(x-c)+\beta(x-a)(x-c)+\gamma(x-a)(x-b)$, n'est divisible par aucun des facteurs, $x-a$, $x-b$, $x-c$, de X. Le plus grand commun diviseur entre X et X', est donc...

$$(x-a)^{\alpha-1} \times (x-b)^{\beta-1} \times (x-c)^{\gamma-1}.$$

374. Par conséquent; *lorsqu'un polynôme* $x^m + px^{m-1} + \ldots + tx + u$, *est le produit des facteurs*, $(x-a)^{\alpha}$, $(x-b)^{\beta}$, *etc.; le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa fonction dérivée*............... $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \ldots + t$, *est le produit*, $(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}$ *etc.*, *des facteurs de ce polynôme élevés à une puissance moindre d'une unité.* De sorte que *tous les facteurs d'un polynôme, entrent une fois de moins dans sa fonction dérivée.* On voit que *la fonction dérivée de la somme de plusieurs monômes, est égale à la somme des fonctions dérivées de ces monômes.*

* Remarque. *On peut obtenir la fonction dérivée d'un produit, sans effectuer les multiplications indiquées.* En effet; soit $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; les formules (1) et (3), deviendront $X = (x-a)^{\alpha}$, $X' = \alpha(x-a)^{\alpha-1}$. *La fonction dérivée d'une puissance d'un binôme* $x-a$, *s'obtient donc en multipliant cette puissance par l'exposant du binôme et diminuant cet*

(**) Pour obtenir ce coefficient, on regardera, $x-a+y$, $x-b+y$, $x-c+y$, comme des binômes, dont les premiers termes seraient, $x-a$, $x-b$, $x-c$; on effectuera les développemens, au moyen de la formule (2) du n° 255, et l'on n'écrira que les deux premiers termes de chaque développement, parce que les autres termes renferment des puissances de y supérieures à la première. Le produit deviendra...

$$[(x-a)^{\alpha} + \alpha y(x-a)^{\alpha-1}][(x-b)^{\beta} + \beta y(x-b)^{\beta-1}][(x-c)^{\gamma} + \gamma y(x-c)^{\gamma-1}].$$

On trouvera le terme affecté de la première puissance de y, dans ce produit, en multipliant successivement le terme où y entre à la première puissance dans un facteur, par tous les termes indépendans de y, dans les autres facteurs. Ce qui conduira à la formule (3).

exposant d'une unité. Or, les formules (1) et (3) démontrent que la fonction dérivée de, $(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma$, est...

$$\alpha(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^\beta(x-c)^\gamma+\beta(x-b)^{\beta-1}(x-a)^\alpha(x-c)^\gamma$$
$$+\gamma(x-c)^{\gamma-1}(x-a)^\alpha(x-b)^\beta.$$

Par conséquent, *pour calculer la fonction dérivée du produit de plusieurs binômes,* $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, *etc., il suffit de multiplier successivement la fonction dérivée de chaque facteur, par le produit des autres facteurs; la somme de ces produits est le résultat demandé.*

375. *Quand on connaît un facteur commensurable $x-\alpha$, d'un polynôme X; il est facile de trouver combien de fois ce facteur entre dans X.* En effet; si le facteur $x-\alpha$, entre trois fois dans X, on aura $X=(x-\alpha)^3M$. On en déduira (nº 374), $X'=(x-\alpha)^2N$, $X''=(x-\alpha)P$, $X'''=Q$. Les polynômes, M, N, P, Q, ne contiendront pas le facteur $x-\alpha$; l'hypothèse, $x=\alpha$ ne réduira donc aucun de ces polynômes à zéro. Ils ne pourront pas devenir infinis, car M, N, P, Q, ne renferment que des puissances positives de x. Faisant donc $x=\alpha$, les fonctions dérivées, X', X'', seront réduites à zéro, et la troisième fonction dérivée X''', ne deviendra pas zéro. *Le rang de la première fonction dérivée qui n'est pas réduite à zéro, par l'hypothèse $x=\alpha$, indique donc combien de fois le facteur $x-\alpha$, entre dans X.* Par exemple, soit $X=x^3-27x+54$; on a $X'=3x^2-27$, $X''=6x$, etc. L'hypothèse $x=3$ donne, $X=0$, $X'=0$ et $X''=18$. Le facteur $x-3$ entre donc deux fois dans X. L'hypothèse $x=-6$, donnant $X=0$ et $X'=81$, le facteur $x+6$ n'entre qu'une seule fois dans X. De sorte que $x^3-27x+54$, est le produit de $(x-3)^2$, par $(x+6)$.

376. Le principe du nº 374, donne le moyen de *décomposer un polynôme X, en deux facteurs, dont l'un ne renferme que les facteurs égaux de X à la première puissance et dont l'autre ne contienne que les facteurs inégaux de X.* En effet; soit $X=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)(x-d)$. Le plus grand commun diviseur entre X et X', sera $D=(x-a)^{\alpha-1}\times(x-b)^{\beta-1}$; divisant X par D, on obtiendra un quotient, $Q=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; le plus grand commun diviseur entre Q et D, sera $d=(x-a)(x-b)$; et la division de Q par d, donnera un quotient, $q=(x-c)(x-d)$. *Les polynômes d et q sont les facteurs demandés.* De sorte que *la résolution de l'équation $X=0$, ne dépend que des équations, $d=0$, $q=0$, qui ne renferment que des racines inégales.* Ce qui démontre le principe du nº 370. Par exemple, soit $X=x^3-27x+54$. Le plus grand commun diviseur entre X et X', sera $D=(x-3)$; la division de X par D, donnera

un quotient $Q = x^2 + 3x - 18$; le plus grand commun diviseur entre Q et D, sera $d = x - 3$; le quotient de la division de Q par d, sera $q = x + 6$. Et en effet; $X = (x-3)^2\ (x+6)$.

377. Remarque. *Lorsque X et X' n'ont pas de commun diviseur en x, on doit en conclure que X n'a pas de facteurs égaux et quand q est indépendant de x, le polynôme X ne renferme que des facteurs égaux*, (n° 376). Par exemple; les polynômes $x^2 - 5x + 6$, $2x - 5$, n'ayant pas de commun diviseur en x; X ne contient pas de facteurs égaux; et l'hypothèse $X = x^2 - 2x + 1$, donnant $D = x - 1$, $Q = x - 1$, $d = x - 1$, $q = 1$, les facteurs de $x^2 - 2x + 1$, sont égaux.

* 378. *Quand tous les facteurs premiers, $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, etc., d'un polynôme X, ne sont pas affectés du même exposant, on peut trouver ces facteurs par une méthode plus simple que celle du* n° 376. En effet; soit.....

$$X = (x-\alpha)^3\ (x-\beta)^3\ (x-\gamma)^2\ (x-a)\ (x-b).$$

Le plus grand commun diviseur entre X et X' est $D = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)$; le plus grand commun diviseur entre D et D' est $d = (x-\alpha)(x-\beta)$. Les polynômes, d, d', n'ayant pas de commun diviseur en x, les facteurs de d sont inegaux, (n° 377). L'équation $d = 0$, donne $x = \alpha$ et $x = \beta$. Les facteurs, $x - \alpha$, $x - \beta$, n'entrant qu'une fois dans d; D' contient une seule fois ces facteurs; D contient donc $(x-\alpha)^2\ (x-\beta)^2$. Egalant à zéro le quotient de la division de D, par $(x-\alpha)^2\ (x-\beta)^2$, on trouvera $x = \gamma$, donc $D = (x-\alpha)^2\ (x-\beta)^2\ (x-\gamma)$. Le polynôme X contient donc les facteurs, $(x-\alpha)^3$, $(x-\beta)^3$, $(x-\gamma)^2$. Divisant X, par $(x-\alpha)^3\ (x-\beta)^3 (x-\gamma)^2$, le quotient égalé à zéro donnera $x = a$ et $x = b$. Appliquons cette méthode au cas où *les facteurs de X, ne sont pas en évidence*. Soit...

$$X = x^{10} + 4x^9 - 8x^8 - 48x^7 - 18x^6 + 120x^5 + 92x^4 - 112x^3 - 103x^2 + 36x + 36.$$

Le plus grand commun diviseur, entre X et X', sera

$$D = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2.$$

Le plus grand commun diviseur entre D et D', sera $d = x^2 - 1$; d et d' n'ayant pas de commun diviseur, les facteurs de d sont inégaux, (n° 377). Posant $x^2 - 1 = 0$, on aura $x = -1$, $x = +1$; donc $d = (x+1)(x-1)$; D' contenant une seule fois les facteurs, $x + 1$, $x - 1$, D contient deux fois ces facteurs. Divisant D, par $(x+1)^2\ (x-1)^2$, le quotient $x + 2$, égalé à zéro, donnera $x = -2$. Donc, $D = (x+1)^2\ (x-1)^2\ (x+2)$; X contient donc le facteur $(x+1)^3\ (x-1)^3\ (x+2)^2$. Divisant X par ce facteur, le quotient sera $x^2 - 9$; posant $x^2 - 9 = 0$, on trouvera, $x = +3$ et $x = -3$. Donc enfin.....

$$X = (x+1)^3\ (x-1)^3\ (x+2)^2\ (x-3)\ (x+3).$$

Ainsi, l'équation $X = 0$, a trois racines égales à -1, trois racines égales $+1$, deux racines égales à -2, et deux racines inégales, $+3$, -3. Si le polynôme proposé est, $X=x^5-3x^4-2x^3+6x^2+5x+1$; le plus grand commun diviseur entre X et X' sera $D=x^2-2x-1$; D et D' n'ayant pas de commun diviseur, les facteurs de D sont inégaux; posant donc $x^2-2x-1=0$, on trouvera, $x=1\pm\sqrt{2}$; D contenant une seule fois le facteur x^2-2x-1, X contient deux fois ce facteur; divisant X, par $(x^2-2x-1)^2$, le quotient sera $x+1$. Donc....

$$X=(x+1)(x^2-2x-1)^2=(x+1)(x-1-\sqrt{2})^2(x-1+\sqrt{2})^2.$$

* 379. *Lorsqu'un polynôme X, contient α facteurs $(x-a_{,})$, $(x-a_{,,})$, etc., affectés de l'exposant p; $\mathcal{C}$ facteurs $(x-b_{,})$, $(x-b_{,,})$, etc., affectés de l'exposant q; etc.; les facteurs, $x-a_{,}$, $x-a_{,,}$, etc., dépendent d'une équation du degré α; les facteurs $x-b_{,}$, $x-b_{,,}$, etc., dépendent d'une équation du degré $\mathcal{C}$; etc.* Par conséquent, *lorsque tous les facteurs du premier degré de X, sont affectés d'exposans différens, ces facteurs sont donnés par des équations du premier degré; toutes les racines de l'équation $X=0$, sont donc réelles et commensurables.*

380. En général: *Pour résoudre une équation numérique à une seule inconnue; ramenez d'abord cette équation à la forme*

$$(1)\ldots\ x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots\ldots+sx+t=0;$$

$p, q, \ldots, s, t$, désignant des nombres entiers, (n° 329). *Les racines commensurables de l'équation* (1) *seront des nombres entiers, $\alpha_{,}, \mathcal{C}_{,}, \ldots, \omega_{,}$,* (n° 330). *Calculez ces racines par la méthode du n°* 333 *et n'essayez que les diviseurs du dernier terme qui tomberont entre les limites des racines,* (n° 349). *Déterminez* (n° 375) *les exposans, $\alpha, \mathcal{C}, \ldots, \omega$, des facteurs, $(x-\alpha_{,})$, $(x-\mathcal{C}_{,})$, .., $(x-\omega_{,})$. Divisez $x^m+px^{m-1}+$ etc., par $(x-\alpha_{,})^{\alpha}(x-\mathcal{C}_{,})^{\mathcal{C}}\ldots(x-\omega_{,})^{\omega}$. Le quotient, égalé à zéro, donnera une équation* $(2)\ldots x^n+p_{,}x^{n-1}+\ldots+s_{,}x+t_{,}=0$, *qui ne contiendra plus de racines commensurables. Décomposez l'équation* (2) *en d'autres équations qui ne renferment que des racines inégales,* (n° 378). *Ces racines seront celles de l'équation* (2), *et vous connaîtrez toujours leur degré de multiplicité,* (n° 378). *La question sera ainsi réduite à résoudre des équations qui ne contiendront que des racines inégales. Si $X=0$, est l'une de ces équations; calculez une quantité $\frac{1}{\mathcal{C}}$, moindre que la valeur absolue de la plus petite différence entre deux racines quelconques de l'équation $X=0$,* (n° 360). *Posant, $\mathcal{C}x=y$, vous obtiendrez une transformée* $(3)\ldots f(y)=0$, *dans laquelle les différences entre les racines seront plus grandes que l'unité,* (n° 361). *Pour trouver les racines incommensurables positives de l'équation* (3), *déterminez la limite supérieure l des racines positives de cette équation,* (n° 349); *donnez successivement à y, les valeurs, 0, 1, 2, .., l; vous obtiendrez autant de changemens de signes, dans les résultats, que l'équation* (3), *contient de racines réelles positives,* (n° 355). *Connaissant alors les plus petites*

valeurs entières approchées de ces racines, le procédé du n° 363, *déterminera chaque racine positive avec autant d'exactitude que vous voudrez. Pour obtenir les racines incommensurables négatives, posez* $y=-z$; *les racines positives de l'équation en z, seront les racines demandées. Si* $l_{,}$ *désigne la limite supérieure des racines positives de l'équation en z,* (n° 349), *vous obtiendrez les valeurs entières approchées de z, en donnant successivement à z, les valeurs*, 0, 1, 2, .., $l_{,}$; *vous approcherez ensuite autant que vous voudrez de ces racines,* (n° 363). La méthode que nous venons d'indiquer, pour trouver les racines incommensurables inégales d'une équation, est la plus générale, mais le calcul de l'équation aux différences étant très-long, on ne devra avoir recours à cette méthode, que lorsque le procédé du n° 369, ne réussira pas.

* 381. Lorsque x désignant une racine quelconque d'une équation, $\frac{1}{x}$ est racine de la même équation, on dit que cette équation est *réciproque*. *Une équation réciproque,* x^m+ *etc.* $=0$, *ne doit donc pas changer, quand on change* x *en* $\frac{1}{x}$. La forme générale des équations réciproques, se déduit de cette définition. En effet; soient les équations.....

$$(1)\ldots x^4+px^3+qx^2+rx+s=0;\ (2)\ldots x^3+px^2+qx+r=0.$$

Pour que ces équations soient *réciproques*, il faut qu'elles ne changent pas, quand on change x en $\frac{1}{x}$; donc...

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+p\left(\frac{1}{x}\right)^3+q\left(\frac{1}{x}\right)^2+r\left(\frac{1}{x}\right)+s=0 \text{ et } \left(\frac{1}{x}\right)^3+p\left(\frac{1}{x}\right)^2+q\left(\frac{1}{x}\right)+r=0.$$

Ces deux équations donnent.....

$$(3)\ldots x^4+\frac{r}{s}x^3+\frac{q}{s}x^2+\frac{p}{s}x+\frac{1}{s}=0;\ (4)\ldots x^3+\frac{q}{r}x^2+\frac{p}{r}x+\frac{1}{r}=0.$$

Les équations (1) et (3) devant être les mêmes, on a............... $p=\frac{r}{s}$, $q=\frac{q}{s}$, $r=\frac{p}{s}$, $s=\frac{1}{s}$. La dernière équation donne, $s=\pm 1$; mais la 2e équation fait voir que l'on ne peut admettre que la valeur $s=1$; on en déduit, $r=p$. L'équation *réciproque*, du 4e degré, est donc $(5)\ldots x^4+px^3+qx^2+px+1=0$.

Les équations (2) et (4) devant être les mêmes, on a.............. $p=\frac{q}{r}$, $q=\frac{p}{r}$, $r=\frac{1}{r}$. Cette dernière équation donne $r=\pm 1$. Ces deux valeurs de r satisfont également; $r=1$, donne $q=p$; et $r=-1$, donne $q=-p$. De sorte que l'équation *réciproque* du 3e degré, est susceptible de ces deux formes........

$$(6)\ldots\ldots x^3+px^2+px+1=0,\quad (7)\ldots\ldots x^3+px^2-px-1=0.$$

* 382. En général ; *lorsqu'une équation de degré pair est réciproque, les coefficiens des termes pris à égale distance du premier terme et du dernier terme, sont égaux. Quand l'équation réciproque est de degré impair; les coefficiens pris à égale distance du premier terme et du dernier, sont égaux deux à deux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires. De sorte qu'une équation réciproque de degré pair est toujours de la forme......*

$$(8)\ldots\ldots x^{2m}+px^{2m-1}+qx^{2m-2}+\ldots\ldots+qx^2+px+1=0,$$

tandis qu'une équation réciproque de degré impair est susceptible de ces deux formes........

$$(9)\ldots x^{2m+1}+px^{2m}+qx^{2m-1}+rx^{2m-2}+\ldots+rx^3+qx^2+px+1=0,$$
$$(10)\ldots x^{2m+1}+px^{2m}+qx^{2m-1}+rx^{2m-2}+\ldots-rx^3-qx^2-px-1=0.$$

* 383. *Toute équation de la forme des équations*, (8), (9), (10), *est réciproque*, car ces équations ne changent pas quand on change x, en $\frac{1}{x}$. Par exemple, lorsqu'on change x en $\frac{1}{x}$, l'équation (10) ne change pas, car elle devient........

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2m+1}+p\left(\frac{1}{x}\right)^{2m}+q\left(\frac{1}{x}\right)^{2m-1}+r\left(\frac{1}{x}\right)^{2m-2}+\ldots-\frac{r}{x^3}-\frac{q}{x^2}-\frac{r}{x}-1=0.$$

Multipliant tous les termes de cette dernière équation par x^{2m+1} et changeant les signes de ces termes, on trouvera l'équation (10).

* 384. *Une équation réciproque de degré impair, a toujours une racine réelle égale à* $+1$ *ou à* -1, car $x=-1$, réduit le 1[er] membre de l'équation (9) à zéro et $x=1$, satisfait à l'équation (10). *Les premiers membres des équations* (9) et (10), *sont donc respectivement divisibles par* $x+1$ *et par* $x-1$, (n° 313).

* 385. *Les équations réciproques du degré pair* $2m$, *et celles du degré impair* $2m+1$, *sont toujours réductibles au degré* m. En effet; 1°. Les $2m$ racines de l'équation (8) étant de la forme, a, $\frac{1}{a}$, b, $\frac{1}{b}$, etc. ; la fonction $x+\frac{1}{x}$, n'a que m valeurs, car $x=a$ et $x=\frac{1}{a}$, réduisent également $x+\frac{1}{x}$, à $a+\frac{1}{a}$. Les m valeurs de $x+\frac{1}{x}$, seront donc,...... $a+\frac{1}{a}$, $b+\frac{1}{b}$, etc. Posant donc, $x+\frac{1}{x}=z$, l'équation en z sera du

degré m. Chacune des m racines, de l'équation en z, substituée dans l'équation, $x+\frac{1}{x}=z$, donnera les deux valeurs correspondantes de x. Ce qui conduira aux $2m$ valeurs de x.

2°. Le premier membre de l'équation (9) est divisible par $(x+1)$, (n° 384). Pour obtenir le quotient, on observera que l'équation (9), donne......

$$x^{2m+1}+px^{2m}+\ldots+kx^{m+2}+lx^{m+1}+lx^m+kx^{m-1}+\ldots+px+1=0,$$

$$(x^{2m+1}+1)+px(x^{2m-1}+1)+\ldots+kx^{m-1}(x^3+1)+lx^m(x+1)=0.$$

Chacun des binômes, $(x^{2m+1}+1)$, $(x^{2m-1}+1)$, etc., étant divisible par $x+1$, (n° 315), si l'on effectue ces divisions, et si l'on égale le quotient total à zéro, on trouvera l'équation réciproque.....

$$(11)\ldots x^{2m}+(p-1)x^{2m-1}+(q-p+1)x^{2m-2}+\ldots+(q-p+1)x^2+(p-1)x+1=0.$$

Cette équation est réductible au degré m, (1°). On verrait de même que la division du 1er membre de l'équation (10), par $(x-1)$, donnerait une équation réciproque du degré $2m$; cette dernière équation serait réductible au degré m (1°). Le principe est donc démontré.

* 386. Occupons-nous de la *recherche des racines des équations réciproques*. Soit l'équation réciproque.....

$$(12)\ldots x^6+px^5+qx^4+rx^3+qx^2+px+1=0. \text{ On fera, } (13)\ldots x+\frac{1}{x}=z.$$

L'équation en z sera du troisième degré, (n° 385). Pour calculer cette dernière équation, on pourrait éliminer x entre les équations (12) et (13); mais on parviendra plus facilement au résultat, à l'aide des artifices de calcul que nous allons indiquer. On divisera le 1er membre de l'équation (12), par x^3, et réunissant ensuite les termes qui seront à égale distance des *extrêmes*, il viendra,

$$(14)\ldots\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+p\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+q\left(x+\frac{1}{x}\right)+r=0.$$

L'équation (13) donnera successivement.....

$$z^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}; \text{ d'où } \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=z^2-2.$$

$$z^3=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3z; \text{ d'où } x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z.$$

L'équation (14) deviendra, $(z^3-3z)+p(z^2-2)+qz+r=0$. Si l'équation proposée était $(15)\ldots x^6-6x^5+14x^4-18x^3+14x^2-6x+1=0$. L'équation en z donnerait, $z=1$, $z=2$, $z=3$, et les valeurs correspondantes de x, déduites de l'équation (13), seraient $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, $+1$, $+1$, et $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.

Soit l'équation réciproque de degré impair,

$$(16)\ldots x^7+px^6+qx^5+rx^4+rx^3+qx^2+px+1=0.$$

Le 1er membre est divisible par $x+1$, (n° 384). Le quotient égalé à zéro, donnera l'équation réciproque,

$$(17)\ldots\left\{\begin{array}{l} x^6+(p-1)x^5+(q-p+1)x^4+(r-q+p-1)x^3 \\ +(q-p+1)x^2+(p-1)x+1 \end{array}\right\}=0.$$

Cette dernière équation est réductible au troisième degré, (n° 385). Si l'équation proposée était, $x^7-5x^6+8x^5-4x^4-4x^3+8x^2-5x+1=0$; l'équation (17) deviendrait, $x^6-6x^5+14x^4-18x^3+14x^2-6x+1=0$, et l'on a trouvé les racines de cette dernière équation.

387. La résolution des équations numériques ne pouvant plus offrir de difficultés, on doit chercher à *transformer les équations littérales en équations numériques*. Cette transformation n'est possible que dans des cas particuliers que nous allons faire connaître.

388. *Les équations homogènes, qui ne renferment que deux lettres, peuvent toujours se transformer en équations numériques.* En effet; la forme générale des équations homogènes qui ne renferment que deux lettres α et y, est...$y^m+p\alpha y^{m-1}+q\alpha^2y^{m-2}+\ldots+k\alpha^{m-1}y+l\alpha^m=0$.

m, p, q, ..., k, l, désignent des nombres connus. Posant $y=\alpha x$, tous les termes de l'équation deviendront divisibles par α^m, et l'on parviendra à l'équation numérique, $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+kx+l=0$.

389. Les *équations binômes*, sont celles qu'on peut ramener à la forme (1)...$y^m \mp b=0$. Ces équations ne doivent donc renfermer que les mêmes puissances de l'inconnue y, combinées avec des quantités connues. *Les équations binômes peuvent toujours se transformer en équations numériques.* En effet; l'équation (1) donnant, $y=\sqrt[m]{(b)}\times\sqrt[m]{\pm 1}$, (*), il suffit de

---

(*) Pour indiquer la *racine arithmétique* (n° 30), d'une quantité, nous renfermerons toujours cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi, $\sqrt[m]{(b)}$, désignera le nombre que l'on obtient en extrayant la racine de b, d'après les règles des nos 262 et 269. Les deux valeurs de $\sqrt[2]{9}$, seront $\pm\sqrt[2]{(9)}$, ou ± 3.

rendre cette équation homogène, (nº 388). Pour y parvenir, on extraira la *racine arithmétique* du degré m de la quantité positive b. Désignant cette racine par a, on aura $b = a^m$; d'où, $y^m = \pm a^m$. Afin de rendre cette équation numérique, on fera, (nº 388)...

$$y = ax\,;\ \text{d'où},\ a^m x^m = \pm a^m\ \text{et}\ldots(2)\ldots x^m = \pm 1.$$

La multiplication de la quantité a, par les m valeurs de x, donnera les m valeurs de y. On opérera de la même manière, lorsque b sera un nombre positif, parce que la forme de l'équation (2) est plus simple que celle de l'équation (1).

390. Pour résoudre l'équation (3)....$x^m = 1$; on observera qu'elle donne $x = 1$, de sorte que $x^m - 1$, est divisible par $(x - 1)$, (nº 313). Effectuant la division, on verra que.....

$$x^m - 1 \doteq (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x^2 + x + 1)\ldots,\ (\text{nº } 314).$$

Toutes les solutions de l'équation (3), seront donc fournies par les équations........

$$x - 1 = 0\,;\ (4)\ldots x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0.\ \text{Ainsi :}$$

$x^2 - 1 = 0$, donne $(x - 1)(x + 1) = 0$; $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$; d'où, $x = 1$ et $x = -1$.
$x^3 - 1 = 0$, donne $x^3 - 1 \doteq (x - 1)(x^2 + x + 1)$; donc, $x - 1 = 0$ et $x^2 + x + 1 = 0$.

Ces deux dernières équations donnent, $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

Désignant les deux valeurs imaginaires de x, par α et β, les trois racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$, seront, 1, α et β. On aura...

$$\alpha^3 = 1\,;\ \alpha^{3m} = (\alpha^3)^m = 1^m = 1\,;\ \alpha^{3m+1} = \alpha^{3m} \times \alpha = \alpha\,;\ \alpha^{3m+2} = \alpha^{3m} \times \alpha^2 = \alpha^2.$$

391. Le principe du nº 338, donnera $1 + \alpha + \beta = 0$ et $1 \times \alpha \times \beta = 1$. Donc, $\beta\alpha^3 = \alpha^2$, ou $\beta = \alpha^2$. Donc, $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$. *Les racines de l'équation* $y^3 = n^3$, *sont donc*, n, $n\alpha$ *et* $n\alpha^2$. Les racines de l'équation $y^3 = 2$, sont $\sqrt[3]{(2)}$, $\alpha \times \sqrt[3]{(2)}$ et $\alpha^2 \times \sqrt[3]{(2)}$.

392. L'équation $x^3 + 1 = 0$, donne $x = -1$; d'où $x^3 + 1 \doteq (x + 1)(x^2 - x + 1)$; l'équation $x^2 - x + 1 = 0$, détermine les deux autres racines. Le binôme $x^6 - 1$, étant le produit de $x^3 - 1$, par $x^3 + 1$, les racines de l'équation $x^6 - 1 = 0$, se déduisent des équations, $x^3 - 1 = 0$, $x^3 + 1 = 0$.

L'égalité $x^4 = 1$, donne $x^2 = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{\pm 1}$.

L'équation $x^4 = -1$, donne $x^2 = \pm\sqrt{-1}$, $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$.

En général, lorsque m sera de la forme 2^n, on trouvera toutes les racines des équations $x^m = \pm 1$, en extrayant successivement des racines quarrées.

* 393. La théorie des *équations réciproques*, conduit à une méthode élégante pour *résoudre les équations binômes des six premiers degrés*. En effet; $x^m - 1$ étant le produit de $x - 1$, par $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1$; les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, dépendent de l'équation réciproque,

$$(1)\ldots\ x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Lorsque m ne surpassera pas 6, l'équation (1) sera réductible au premier ou au second degré, (nº 385). Par exemple, l'équation $x^5 = 1$, donne $x = 1$; et les autres valeurs de x sont les racines de l'équation réciproque..

$$(2)\ldots\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

La résolution de l'équation $x^{2m+1} + 1 = 0$, dépend aussi des équations réciproques, car on a.....

$$x^{2m+1} + 1 = (x + 1)\ (x^{2m} - x^{2m-1} + \ldots - x + 1).$$

* 394. *L'équation* $x^m \mp b = 0$, *n'a pas de racines égales*, car b n'étant pas zéro, il n'existe pas de plus grand commun diviseur entre le binôme $x^m \mp b$, et sa fonction dérivée mx^{m-1}, (nº 377).

* 395. *Lorsque* α *n'est pas égal à* β, *les équations*, $x^m = \alpha$, $x^m = \beta$, *n'ont pas de solutions communes*, car la division de $x^m - \alpha$, par $x^m - \beta$, donnant un *reste* $\beta - \alpha$, qui n'est pas nul, il n'existe pas de commun diviseur entre $x^m - \alpha$ et $x^m - \beta$; une même valeur de x ne peut donc pas satisfaire aux équations proposées, (nº 313).

* 396. *Lorsque* m *est un nombre impair, la seule racine réelle de l'équation* (1)... $x^m = 1$, *est* $x = 1$, *et quand* m *est un nombre pair, les seules racines réelles de l'équation* (1), *sont* $+1$ *et* -1. En effet; on a, (nº 315),

$$x^m - 1 = (x - 1)\ (x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots\ldots + x^2 + x + 1).$$

Or, aucune valeur positive de x, ne peut réduire..................... $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots\ldots + x + 1$, à zéro; *l'équation* (1) *n'a donc pas d'autre racine positive que l'unité*. Cela posé; 1°. quand m est impair, une valeur négative de x ne peut pas réduire $x^m - 1$ à zéro; la seule racine réelle de l'équation (1) est donc l'unité; 2°. lorsque m est un nombre pair $2k$, l'équation (1) devient $x^{2k} - 1 = 0$; faisant $x^2 = z$, on trouve $z^k - 1 = 0$ et $x = \pm\sqrt{z}$. Toutes les valeurs réelles de x, sont donc données par les valeurs positives de z. Mais, l'équation $z^k - 1 = 0$, n'a pas d'autre racine réelle positive que $+1$; les seules valeurs réelles de x sont donc $+1$ et -1.

* 397. *Les propriétés des lignes trigonométriques, conduisent à l'expression générale des racines des équations binômes*. En effet; le produit

de, $(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)$, par $(\cos\beta \pm \sqrt{-1}\sin\beta)$, étant.........
$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \pm \sqrt{-1} \times (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$; on a...

$$(1)\ldots(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta \pm \sqrt{-1}\sin\beta) \doteq \cos(\alpha+\beta) \pm \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta).$$

Multipliant les deux membres par $(\cos\gamma \pm \sqrt{-1}\sin\gamma)$, et observant que d'après la formule (1), le 2^e^ produit est $\cos(\alpha+\beta+\gamma) \pm \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; il viendra....

$$(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta \pm \sqrt{-1}\sin\beta)(\cos\gamma \pm \sqrt{-1}\sin\gamma)$$
$$\doteq \cos(\alpha+\beta+\gamma) \pm \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Continuant à multiplier les deux membres de chaque identité par des facteurs de même forme, supposant les arcs, α, β, γ, etc., égaux et en nombre m; on aura

$$(2)\ldots\ldots(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha \pm \sqrt{-1}\sin m\alpha.$$

Soit $m\alpha = z$; l'identité (2) donnera.....

$$(3)\ldots\ \sqrt[m]{(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)} \doteq \cos\left(\frac{z}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\frac{z}{m}.$$

L'identité (1) démontre que.....

$$(4)\ldots\ \frac{\cos a + \sqrt{-1}\sin a}{\cos b + \sqrt{-1}\sin b} \doteq \cos(a-b) + \sqrt{-1}\sin(a-b).$$

* 398. Pour *résoudre l'équation* (5)... $x^m = 1$, on observera que n étant un nombre entier quelconque, l'expression $\cos 2n\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2n\pi$, est égale à l'unité, (*). On aura donc.....

$$x^m = \cos 2n\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2n\pi.$$ D'où, (formule (3), du n° 397),

$$(6)\ldots\ x = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}.$$

Dans la formule (6), chaque valeur de l'indéterminée n, fournira à une ou deux racines de l'équation (5); *nous allons faire voir qu'on obtiendra m valeurs de x, et qu'on ne pourra pas en trouver un plus grand nombre.*

1°. Quand m sera un nombre pair $2p$, on donnera successivement à n les valeurs, 0, 1, 2,.., p; ce qui déterminera m valeurs de x; car, $n=0$, donne $x=1$; $n=p$, donne $x=-1$, et chacune des $(p-1)$ autres valeurs de n, fournissant deux racines imaginaires, x à deux valeurs réelles et $2p-2$ valeurs

---

(*) Le *rayon* est égal à l'unité; 2π désigne la *circonférence*.

imaginaires inégales (*). Il s'agit donc de démontrer, qu'en substituant d'autres nombres pour n, on retomberait sur des valeurs de x déjà obtenues. Or, $n=p-r$ et $n=p+r$, donnent les mêmes valeurs de x; car la somme des deux arcs différens, $\frac{(p-r)\,2\pi}{2p}$, $\frac{(p+r)\,2\pi}{2p}$, qui résultent de ces hypothèses, étant égale à 2π, ces arcs ont des cosinus égaux et des sinus égaux et de signes contraires. Le principe énoncé est donc exact.

2°. Quand m sera un nombre impair, $2p+1$, on donnera successivement à n les valeurs, $0, 1, 2.., p$; ce qui fournira une racine réelle $x=1$, et $2p$ racines imaginaires; on démontrerait, comme (1°), que toutes ces racines sont inégales. On aura donc déjà obtenu $2p+1$ ou m racines. Si l'on donnait d'autres valeurs à n, on retomberait sur les mêmes racines; car $n=p-r$ et $n=p-r+1$, donnent deux arcs dont la somme est 2π.

* 399. La *résolution de l'équation* (7).. $x^m=-1$, se déduit également de la formule (3); on observe que les sinus des multiples impairs de π étant nuls et les cosinus égaux à -1, on a....

$$x^m=\cos(2n+1)\pi\pm\sqrt{-1}\sin(2n+1)\pi.\ \text{D'où,}$$

$$(8)\ldots\ x=\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}.$$

On démontrera, comme dans le n° 398, qu'en donnant successivement à n les valeurs, 0, 1, 2, etc., la formule (8), déterminera les m racines inégales de l'équation $x^m=-1$. Lorsque $m=2p$, les hypothèses $n=p-r-1$, $n=p+r$, donnent les mêmes racines, de sorte que l'on obtient les m racines en donnant à n les valeurs, $0, 1, 2, \ldots, p-1$; (toutes ces racines sont imaginaires). Quand $m=2p+1$, les hypothèses $n=p-r$, $n=p+r$, conduisent aux mêmes racines; donnant à n les valeurs, $0, 1, \ldots, p-1$, on trouve les $2p$ racines imaginaires de l'équation proposée, et $n=p$ donne la racine réelle, $x=-1$.

* 400. En général: *toutes les racines des équations $x^m=\pm 1$, se déduisent des formules* (6) *et* (8), *en donnant successivement à l'indéterminée n, les valeurs*, 0, 1, 2, etc. *On arrête les substitutions, lorsqu'on a trouvé m valeurs de x. On obtient les mêmes racines, en donnant successivement à n les valeurs*, 0, −1, −2, etc.; car la formule (6) ne change pas, quand on

---

(*) *Ces $2p-2$ racines imaginaires sont inégales*, car n étant moindre que m, l'arc $\frac{2n\pi}{m}$ est moindre que 2π; les arcs qui entrent dans les expressions des $2p-2$ racines imaginaires, sont donc inégaux et moindres que la circonférence; aucun de ces arcs ne peut donc avoir à la fois le même sinus et le même cosinus que l'un quelconque des autres; toutes ces racines sont donc inégales.

change n en $-n$, et dans la formule (8), les hypothèses, $n=-1$, $n=-2$ $n=-3$, etc., donnent les mêmes résultats que, $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc.

* 401. *Lorsque dans les formules* (6) *ou* (8), *on prend* $\sqrt{-1}$ *avec le signe* $+$, *on obtient les* m *racines des équations* (5) *ou* (7), *en donnant successivement à* n *les valeurs*, $0, 1, 2, \ldots, m-1$. *On trouverait les mêmes racines en donnant à n les valeurs*, $0, -1, -2, -3, \ldots, -(m-1)$. *De sorte que l'on pourra toujours supposer que n désigne un nombre entier* (*positif ou négatif*), *moindre que m*. En effet ; le sinus et le cosinus d'un arc ne changeant pas, quand cet arc augmente ou diminue d'un multiple de 2π ; si l'on effectue la division de $\pm n$, par m, de manière que le *reste* soit un nombre entier positif r (**), le quotient sera $\pm q$, et les formules, (6), (8), deviendront.....

$$x=\cos\frac{2r\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{m}; \quad x=\cos\frac{(2r+1)\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2r+1)\pi}{m}.$$

Par conséquent, lorsqu'on substitue pour n les nombres, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc., on obtient les mêmes valeurs de x que si l'on substituait pour r les nombres, $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Ce qui démontre le principe énoncé.

* 402. *Les équations binômes sont décomposables en facteurs réels du second degré*. En effet ; 1° soit l'équation $x^m=1$; lorsque la valeur de n sera telle que $\frac{2n}{m}$ ne sera pas un nombre entier, la formule (6) donnera deux *racines imaginaires conjuguées*, $x_{,}$, $x_{,,}$; on en déduira le *facteur réel du second degré*, $x^2-2x\cos\frac{2n\pi}{m}+1$; car $x_{,}+x_{,,}=2\cos\frac{2n\pi}{m}$ et $x_{,}x_{,,}=1$. On verra de même, que les facteurs réels du second degré, de l'équation $x^m+1=0$, se déduisent de la formule, $x^2-2x\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+1$, en donnant à n les valeurs pour lesquelles $\frac{2n+1}{m}$, n'est pas un nombre entier.

403. Dans la théorie des radicaux (nos 227...243), nous n'avons eu égard qu'aux valeurs *arithmétiques* des radicaux ; de sorte que chaque radical n'avait qu'une seule valeur. Mais, *un radical du degré m, a m valeurs algébriques différentes*, car les m racines de l'équation $x^m=a$, sont les m valeurs du radical $\sqrt[m]{a}$. Il faut donc examiner si les règles que nous avons données sont générales. Or, on obtient les m valeurs de $\sqrt[m]{+a}$ ou de $\sqrt[m]{-a}$, en multipliant

---

(**) Par exemple, la division de -8 par 3, donne le quotient -3 et le *reste* $+1$; (A, no 30).

la racine *arithmétique* du degré m de a, par les m valeurs de $\sqrt[m]{+1}$ ou de $\sqrt[m]{-1}$. Il suffit donc d'opérer sur les racines algébriques de $+1$ et de -1.

L'équation, (1).. $x^m=1$, donne (2).. $x=\sqrt[m]{1}=\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\,sin\frac{2n\pi}{m}$, et l'équation, (3).. $x^m=-1$, donne....

$$(4)\ldots\ x=\sqrt[m]{-1}=\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}.$$

On obtiendra les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$, ou de $\sqrt[m]{-1}$, en donnant successivement à n les valeurs, $0, 1, 2, \ldots, m-1$, (n° 401). Les propriétés des racines des équations binômes et le calcul des radicaux, se déduisent des formules (2) et (4). *Pour lever toutes les difficultés relatives aux radicaux, on déterminera les valeurs de chaque radical, et l'on opérera successivement sur ces diverses valeurs; ce qui donnera toutes les valeurs du résultat demandé.* Si l'on veut déterminer toutes les valeurs de la *somme* ou de la *différence*, ou du *produit*, ou du *quotient*, des radicaux, $\sqrt[m]{1}$, $\sqrt[p]{1}$; on calculera les m valeurs, $a, b, \ldots l$, du 1er radical, et les p valeurs, α, $\beta\ldots$, ω, du 2e radical; combinant ces valeurs, 2 à 2, on obtiendra les mp valeurs du résultat demandé. La somme algébrique des radicaux, $\sqrt[m]{1}$, $\sqrt[p]{1}$, sera encore indiquée par $\sqrt[m]{1}+\sqrt[p]{1}$, leur différence sera $\sqrt[m]{1}-\sqrt[p]{1}$. La somme des radicaux, $\sqrt[m]{1}$, $\sqrt[m]{1}$, aura m^2 valeurs; de sorte que cette somme ne sera pas $2\sqrt[m]{1}$. Par la même raison, le produit de $\sqrt[m]{1}$ par $\sqrt[m]{1}$, ne sera pas le quarré de $\sqrt[m]{1}$; et ainsi de suite.

404. En général, *lorsque, p, q, d, étant des nombres entiers positifs, p et q sont premiers entr'eux, on a......*

$$(1)\ldots\sqrt[pd]{1}\times\sqrt[qd]{1}=\sqrt[pqd]{1};\ (2)\ldots\sqrt[pd]{1}:\sqrt[qd]{1}=\sqrt[pqd]{1};(3)\ldots\left(\sqrt[pd]{1}\right)^{qd}=\sqrt[p]{1}.$$

$$(4)\ldots\sqrt[pd]{-1}\times\sqrt[qd]{-1}=\sqrt[pqd]{(-1)^q(-1)^p};\ (5)\ldots\sqrt[pd]{-1}\times\sqrt[qd]{+1}=\sqrt[pqd]{(-1)^q}.$$

$$(6)\ldots\frac{\sqrt[pd]{-1}}{\sqrt[qd]{-1}}=\sqrt[pqd]{\frac{(-1)^q}{(-1)^p}};\ \frac{\sqrt[pd]{-1}}{\sqrt[qd]{+1}}=\sqrt[pqd]{(-1)^q};\ \frac{\sqrt[pd]{+1}}{\sqrt[qd]{-1}}=\sqrt[pqd]{(-1)^p}.$$

* 405. Toutes ces propriétés se déduisent des formules, (6), (8), des nos 398 et 399. En effet; ces formules donnent....

$$(7)\ldots \sqrt[pd]{1}=\cos\frac{2n\pi}{pd}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{pd},\ (8)\ldots\sqrt[qd]{\;}=\cos\frac{2n'\pi}{qd}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n'\pi}{qd}$$

$$(9)\ldots\sqrt[pd]{-1}=\cos\frac{(2n+1)\pi}{pd}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{pd};$$

$$(10)\ldots\sqrt[qd]{-1}=\cos\frac{(2n'+1)\pi}{qd}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n'+1)\pi}{qd};$$

$$(11)\ldots\sqrt[pqd]{+1}=\cos\frac{2n''\pi}{pqd}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n''\pi}{pqd};$$

$$(12)\ldots\sqrt[pqd]{-1}=\cos\frac{(2n''+1)\pi}{pqd}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n''+1)\pi}{pqd}.$$

Les indéterminées, n, n', n'', sont des nombres entiers. Pour démontrer la formule (1), on multipliera la valeur de $\sqrt[pd]{1}$, par celle de $\sqrt[qd]{1}$; ce qui donnera, (n° 397)...

$$(13)\ldots\sqrt[pd]{1}\times\sqrt[qd]{1}=\cos\frac{2(qn+pn')\pi}{pqd}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(qn+pn')\pi}{pqd}.$$

Comparant les formules (11) et (13), on voit qu'il s'agit de prouver que l'on peut toujours satisfaire à la condition (14)... $qn+pn'=n''$. Or, quand on substituera pour n et n' des nombres entiers quelconques, la formule (14) donnera une valeur *entière* de n'' et en mettant un nombre entier pour n'', l'équation (14) déterminera toujours des valeurs entières des indéterminées, n, n', car les coefficiens, p, q, de ces indéterminées, sont premiers entr'eux, (n° 159). La formule (1) est donc exacte. Des raisonnemens analogues, conduiraient aux autres formules. Par exemple, si l'on veut obtenir la formule (3), on déduira de la formule (7)....

$$\left(\sqrt[pd]{1}\right)^{qd}=\cos\frac{2nqd\pi}{pd}+\sqrt{-1}\sin\frac{2nqd\pi}{pd}=\cos\frac{2nq\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2nq\pi}{p}=x.$$

Mais, toutes les valeurs de x, se déduiront de cette dernière formule, en donnant successivement à n les valeurs, 0, 1, 2,..., $p-1$, (n° 401), et les nombres, p, q, étant supposés premiers entre eux, la division des nombres, $0\times q$, q, $2q$, $3q$, ..., $(p-1)q$, par p, donnera les *restes*..... 0, 1, 2, ..., $p-1$, (A, n° 373), (*). Toutes les valeurs de x, se déduiraient donc de la formule, $\cos\frac{2r\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{p}$, en donnant à r les valeurs,

(*) La démonstration du n° 373 de l'arithmétique, convient au cas où n serait plus grand que d.

$0, 1, 2, \ldots, p-1$. Or, cette formule détermine les m valeurs de $\sqrt[p]{1}$. Le principe est donc démontré. Pour vérifier l'exactitude de la formule (4), on multipliera les équations, (9), (10), membre à membre et faisant, $2nq+2n'p+p+q=\alpha$, on trouvera (n° 397),

$$(15)\ldots\ldots\ldots \sqrt[pd]{-1}\times\sqrt[qd]{-1}=\cos\frac{\alpha\pi}{pqd}+\sqrt{-1}\sin\frac{\alpha\pi}{pqd}.$$

Quand p et q seront des nombres impairs, α sera un nombre pair $2n''$ et l'on pourra toujours supposer $2nq+2n'p+p+q=2n''$, (n° 159); les seconds membres des formules (11) et (15) seront donc identiques; on aura donc, $\sqrt[pd]{-1}\,\sqrt[qd]{-1}=\sqrt[pqd]{1}=\sqrt[pqd]{(-1)^p(-1)^q}$. Lorsque p étant pair, q sera impair, $2nq+2n'p+p+q$, sera un nombre impair $2n''+1$, et les seconds membres des formules (12) et (15) seront identiques, (n° 159); on aura donc...........

$$\sqrt[pd]{-1}\,\sqrt[qd]{-1}=\sqrt[pqd]{-1}=\sqrt[pqd]{(-1)^p(-1)^q}.$$

La formule (4) est donc vraie.

*406. Toutes les *propriétés des racines des équations binômes*, peuvent se déduire des formules du n° 405. Par exemple, *lorsque p et q sont premiers entr'eux, les équations $x^p-1=0$, $x^q-1=0$, n'ont pas d'autre solution commune que $x=1$*. En effet; si ces équations admettent une solution commune, on aura.....

$$\cos\frac{2n\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{p}=\cos\frac{2n'\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n'\pi}{q}.$$

La différence entre les arcs, $\frac{2n\pi}{p}$, $\frac{2n'\pi}{q}$, sera donc un multiple $2n''\pi$ de la circonférence; donc...

$$qn-pn'=pqn''; \text{ d'où}\ldots n-pn''=\frac{pn'}{q} \text{ et } n'+qn''=\frac{qn}{p}.$$

Or, p et q sont premiers entr'eux; q divisera donc n', et p divisera n, (n° 289.4°). Mais, les indéterminées, n, n', sont respectivement moindres que q et p, (n° 401). Il faut donc que n et n' soient nuls. Ce qui démontre le principe énoncé.

* 407. *Si α désigne une racine imaginaire de l'équation* (1)..$x^m=1$, 1°. *toutes les puissances entières*, (*positives ou négatives*), *de* α, *seront des racines de cette équation*. 2°. *Ces puissances n'auront que les m valeurs*, $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$; 3°. *quand m sera un nombre premier, les m racines de l'équation* (1), *seront*, $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$. En effet; 1°. soit..

$$(2)\ldots\alpha=\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}.$$

n sera un nombre entier positif, moindre que m, (nº 401). Divisant $\pm p$, par m, de manière que le *reste* soit un nombre entier positif r, la formule (2) donnera......

$$\alpha^{\pm p} = \cos\left(\pm\frac{2np\pi}{m}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\pm\frac{2np\pi}{m}\right)$$
$$= \cos\frac{2nr\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2nr\pi}{m} = \alpha^r.$$

Donc, $\left(\alpha^{\pm p}\right)^m = \cos 2nr\pi + \sqrt{-1}\sin 2nr\pi = 1.$

$\alpha^{\pm p}$ est donc racine de l'équation (1).

2º. La quantité r est un nombre entier positif moindre que m; toutes les valeurs de α^r, ou de $\alpha^{\pm p}$, seront donc, α^0, α^1, $\alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$.

3º. Lorsque m est un nombre *premier*, m et n sont premiers entr'eux, car n est moindre que m, (nº 401); la division des nombres.................. $0 \times n, n, 2n, 3n, \ldots, (m-1)\,n$, par m, donne donc les m *restes* différens, $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$. Toutes les valeurs de $\alpha^{\pm p}$ se déduiraient donc de l'expression, $\cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$, en donnant à n les valeurs........ $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Les valeurs, $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$, de $\alpha^{\pm p}$, sont donc les m racines de l'équation (1), (nº 401).

408. *La règle du nº 262, conduit aux m valeurs de la racine du degré m, d'un polynôme;* car la racine m^{ieme} du 1er terme de ce polynôme a m valeurs, chacune de ces valeurs est le premier terme d'une des m racines du polynôme et la division fournit les autres termes de chaque racine. Par exemple, la racine cubique de a^3, ayant trois valeurs....... $a, a\alpha, a\alpha^2$, (nº 391), les trois valeurs de $\sqrt{a^3+3ba^2+3b^2a+b^3}$, sont (nº 262), $a+b$, $\left(a\alpha+\frac{b}{\alpha^2}\right)$, $\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha}\right)$; or, $\frac{1}{\alpha^2}=\alpha$ et $\frac{1}{\alpha}=\alpha^2$, car $\alpha^3=1$, (nº 390). Les trois valeurs du radical sont donc, $(a+b)$, $(a+b)\alpha$, $(a+b)\alpha^2$.

409. Les *équations réductibles au second degré*, sont celles dans lesquelles l'inconnue n'est affectée que de deux exposans, dont l'un est double de l'autre. De sorte qu'on peut toujours ramener ces équations à la forme...

(1)...$x^{2m}+2px^m+q=0$. Posant $x^m=y$, on trouve....

$y^2+2py+q=0$; d'où... $y=-p\pm\sqrt{p^2-q}=x^m$.

Désignant ces deux valeurs de y, par a et b, la question sera réduite à résoudre les équations binômes, $x^m=a$, $x^m=b$, et nous avons vu comment on peut résoudre ces équations. Soit l'*équation trinôme*....

$x^6-35x^3+216=0$; on fera $x^3=y$; d'où $y^2-35y+216=0$.

Cette dernière équation donne $y=8$ et $y=27$. Il s'agit donc de résoudre les équations, $x^3=8$, $x^3=27$. Les racines cubiques arithmétiques, de 8 et de 27, étant 2 et 3, les six valeurs de x, sont (nº 391), $2, 2\alpha, 2\alpha^2, 3, 3\alpha$ et $3\alpha^2$.

410. *L'équation* (1)...$x^{2m}+2px^m+q=0$, *ne peut jamais avoir plus de quatre racines réelles*, car les racines de ces équations. sont données par les équations binômes, $x^m=a$, $x^m=b$, et chaque équation binôme ne peut avoir plus de deux racines réelles, (n° 396).

411. *L'équation* (1) *n'a des racines égales, que lorsque le premier membre est un quarré*, c'est-à-dire quand $q=p^2$, car la fonction dérivée de $x^{2m}+2px^m+q$, étant $2mx^{2m-1}+2pmx^{m-1}$, ou $2mx^{m-1}(x^m+p)$, la méthode du n° 376, conduira à diviser $x^{2m}+2px^m+q$, par x^m+p; ce qui donnera le *reste* $q-p^2$; l'équation (1) ne contiendra donc des racines égales, que lorsque $p-p^2$ sera nul.

Rapports et proportions.

412. *L'Introduction à l'algèbre* renferme quelques notions relatives aux *rapports* et *proportions*. Nous allons completter cette théorie. *Le résultat de la comparaison des grandeurs de deux quantités, se nomme leur* RAPPORT *ou leur* RAISON.

413. *Lorsqu'en comparant deux quantités, on veut connaître de combien l'une surpasse l'autre; le résultat de cette comparaison, qui exprime la différence de ces deux quantités, est leur rapport par différence.* Ainsi, le *rapport par différence* entre a' et b', est $(a'-b')$; on l'indique aussi de cette manière $a' \,.\, b'$

414. *Lorsqu'en comparant deux quantités, on veut connaître combien de fois l'une contient l'autre; le résultat de cette comparaison, qui exprime le quotient des deux quantités divisées l'une par l'autre, est leur rapport par quotient*, (A, n° 215). Ainsi, le *rapport par quotient* entre a et b, est a divisé par b; on l'indique des deux manières suivantes, $\frac{a}{b}$ et $a : b$.

415. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, se nomme *antécédent*, et la seconde *conséquent*; l'antécédent et le conséquent, forment les deux *termes du rapport*. Nous évaluerons toujours ce rapport, en retranchant le conséquent de l'antécédent (n° 413), ou en divisant l'antécédent par le conséquent, (n° 414). Les propriétés des différences et des quotiens, ayant été démontrées en arithmétique, il suffira de les rappeler.

416. *Le rapport par différence ne change pas, quand on ajoute à chacun de ses termes, ou quand on en retranche une même quantité* (A, n° 142). En effet; le rapport par différence entre a' et b', étant $(a'-b')$, celui qui existe entre $(a'\pm d)$ et $(b'\pm d)$ est encore $(a'-b')$

417. *Un rapport par quotient ne change pas, quand on multiplie ses deux termes, ou quand on les divise, par une même quantité*, (n° 64. 1°.);

car le rapport par quotient de a à b, étant $\frac{a}{b}$, celui de ma à mb et de $\frac{a}{m}$ à $\frac{b}{m}$, se réduisent à $\frac{a}{b}$.

418. Les propriétés énoncées dans les nos 416 et 417, servent à *simplifier les rapports*. Ainsi, le rapport par différence de $(p-b+c)$ à $(x-b+c)$, est le même que celui de p à x, ou $(p-x)$ et le rapport par quotient, de $abcd$ à $pbcd$, est le même que celui de a à p, ou $\frac{a}{p}$.

419. *L'égalité de deux rapports se nomme* PROPORTION; *et cette proportion est dite par différence, ou par quotient, selon que les rapports qu'on y considère sont par différence ou par quotient.* Ainsi, $a'-b'=c'-d'$ est une proportion par différence; cette proportion s'indique aussi de cette manière $a' . b' : c' . d'$. La 1re expression est considérée comme une équation, et se prononce a' *moins* b' *égale* c' *moins* d'; tandis que la 2e est considérée comme une *proportion par différence*, qui se prononce, a' est à b', comme c' est à d'.

420. L'égalité $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, est une *proportion par quotient*, car elle exprime que les quatre quantités, a, b, c, d, sont telles, que le rapport par quotient des deux premières est égal à celui des deux dernières; cette proportion s'écrit plus communément de cette manière.... $a : b :: c : d$ Quand elle est ainsi écrite, on la prononce, a est à b, comme c est à d. Ainsi, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ et $a : b :: c : d$, sont deux expressions équivalentes, qui indiquent que le quotient de a par b est égal à celui de c par d.

421. Dans toute proportion, par différence ou par quotient, ainsi écrites $a.b : c.d$, ou $a : b :: c : d$; le premier terme a et le dernier d, occupant les *extrémités*, sont les *extrêmes*; le second terme b et le troisième c, qui occupent le *milieu*, se nomment les *moyens*; a et b sont l'*antécédent* et le *conséquent* du 1er rapport, c et d sont l'*antécédent* et le *conséquent* du 2e rapport. La quantité d, est une *quatrième proportionnelle* aux trois quantités, a, b, c.

422. *Quand les moyens sont égaux, la proportion est dite* CONTINUE. Ainsi, $a . b : b . c$ et $a : b :: b : c$, sont des *proportions continues*; la 1re par différence, la 2e par quotient. On les écrit ainsi ; $\div a . b . c$ et $\div\!\div a : b : c$. Les *signes* $\div$ et $\div\!\div$, indiquent que dans l'énoncé on doit répéter deux fois le terme *moyen*; de sorte que ces deux proportions se prononcent, a est à b comme b est à c. On dit que c est une *troisième proportionnelle* aux deux quantités a et b.

423. Les rapports, par différence et par quotient, se nommaient anciennement, *rapport arithmétique*, et *rapport géométrique*, et les égalités

de ces rapports, que nous avons énoncées, *proportion par différence, proportion par quotient*, se nommaient, *proportion arithmétique, proportion géométrique*. La proportion par différence a reçu le nom *d'équi-différence*, et l'on a consacré le nom de *proportion*, aux proportions par quotient. Ainsi, *toutes les fois qu'on parlera d'une proportion, on sous-entendra qu'elle est par quotient;* de même, lorsqu'on parlera d'un rapport, sans désigner son espèce, il faudra sous-entendre qu'il est par quotient. D'après ces conventions, les expressions, *rapport arithmétique, rapport par différence, différence, reste ou excès*, indiquent également la différence entre deux quantités. Les expressions, *proportion arithmétique, proportion par différence, équi-différence*, indiquent l'égalité de deux différences. Les expressions, *rapport géométrique, rapport par quotient, et rapport*, indiquent toutes trois un quotient. Enfin, les expressions, *proportion géométrique, proportion par quotient, proportion*, sont synonymes et indiquent l'égalité de deux quotiens.

424. *Dans toute* ÉQUI-DIFFÉRENCE, *la somme des extrêmes est égale à celle des moyens*, car l'équi-différence $a.b:c.d$, exprime que $a-b=c-d$, et cette équation donne $a+d=b+c$.

425. Réciproquement, *lorsque la somme* $a+d$, *de deux quantités est égale à la somme* $b+c$, *de deux autres quantités, ces quatre quantités forment l'équi-différence* $a\ .\ b:c\ .\ d$; car l'égalité $a+d=b+c$, donne $a-b=c-d$.

426. *Dans toute équi-différence, il suffit de connaître trois termes, pour obtenir le quatrième; quand le terme inconnu est un extrême, on trouve sa valeur, en retranchant de la somme des moyens, l'extrême connu; lorsque le terme inconnu est un moyen, on obtient sa valeur, en retranchant de la somme des extrêmes, le moyen connu*, car l'équi-différence, $a\ .\ b:c\ .\ d$, exprime que $a-b=c-d$, et cette équation donne...... $d=(b+c)-a$ et $c=(a+d)-b$.

427. *Dans une équi-différence continue, la somme des extrêmes est égale au double du terme moyen*, car l'équi-différence continue......

$a\ .\ b:b\ .\ c$, donne $a+c=2b$; d'où $b=\frac{1}{2}(a+c)$.

Le terme *moyen* b est le *milieu*, ou la *moyenne proportionnelle arithmétique* entre a et c. Par conséquent, *pour trouver une moyenne proportionnelle arithmétique entre deux quantités, il faut prendre la moitié de leur somme.*

428. Pour que l'équi-différence existe, il suffit que la *somme* des extrêmes soit égale à celle des moyens (n° 425). *On peut donc faire subir à une équi-différence, toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre la somme des extrêmes et celle des moyens.* L'équation $a-b=c-d$, fournit donc les huit équi-différences....

$$\begin{array}{c|c|c|c} a \,.\, b : c \,.\, d & a \,.\, c : b \,.\, d & d \,.\, b : c \,.\, a & d \,.\, c : b \,.\, a \\ b \,.\, a : d \,.\, c & b \,.\, d : a \,.\, c & c \,.\, d : a \,.\, b & c \,.\, a : d \,.\, b, \end{array}$$

car cette équation donnant $(a+d)=(b+c)$, dans chaque équi-différence, la *somme* des extrêmes est égale à celle des moyens. Passons aux *propriétés des proportions par quotient.*

429. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal à ce ui des moyens*; car la proportion, $a : b :: c : d$, exprime que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, (n° 420) et cette équation donne, $ad=bc$.

430. Réciproquement, *lorsque le produit, ad, de deux quantités est égal au produit, bc, de deux autres quantités; ces quatre quantités forment la proportion*, $a : b :: c : d$, car l'égalité $ad=bc$, donne $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

431. *Quand la proportion*, $a : b :: c : d$, *n'existe pas, le produit, ad des extrêmes n'est pas égal au produit, bc, des moyens.* En effet; si les produits, ad, bc, étaient égaux, on aurait, $a : b :: c : d$, (n° 430); ce qui est contre l'hypothèse.

432. *Lorsque le produit ad, de deux quantités, n'est pas égal au produit bc, de deux autres quantités, ces quatre quantités ne forment pas la proportion*, $a : b :: c : d$. En effet; si cette proportion pouvait exister, ad serait égal à bc, (n° 429); ce qui est contre l'hypothèse.

433. *Toutes les propriétés des proportions se déduisent des principes précédens*; voici les plus utiles.

434. *Dans toute proportion, il suffit de connaître trois termes, pour obtenir le quatrième. Quand le terme inconnu est un extrême, on en trouve la valeur, en divisant le produit des moyens par l'extrême connu; lorsque le terme inconnu est un moyen, on en obtient la valeur, en divisant le produit des extrêmes, par le moyen connu;* car la proportion, $a : b :: c : d$, exprime que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, et cette équation donne $d=\frac{bc}{a}$, $c=\frac{ad}{b}$.

435. Les règles des n^{os} 426, 434, démontrent que *si dans deux proportions, (par différence ou par quotient), trois termes correspondans sont égaux, les quatrièmes termes seront égaux.*

436. *Dans une proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen;* car la proportion continue.....

$$a : b :: b : c, \text{ donne } ac=b^2\,;\; b=\sqrt{ac}.$$

Le terme moyen b est la *moyenne proportionnelle géométrique* entre a et c. Ainsi, *pour trouver une moyenne proportionnelle géométrique* *entre deux quantités, il faut extraire la racine quarrée de leur produit.*

437. Pour qu'une proportion existe, il suffit que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens (n° 430). *On peut donc faire subir à une proportion, toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens.* L'égalité.... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, fournit donc les huit proportions......

$$\begin{array}{l|l|l|l} a:b::c:d & a:c::b:d & d:b::c:a & d:c::b:a \\ b:a::d:c & b:d::a:c & c:d::a:b & c:a::d:b, \end{array}$$

car cette égalité donnant, $ad=bc$, il en résulte que dans chaque proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; ces proportions sont donc exactes, (n° 430).

438. *De la proportion, $a:b::c:d$, on peut déduire une infinité d'autres proportions.* Voici les plus utiles.....

1°; $(a+c):(b+d)::a:b$; $(a+c):(b+d)::c:d$

2°; $(a-c):(b-d)::a:b$; $(a-c):(b-d)::c:d$

3°; $(a+c):(b+d)::(a-c):(b-d)$

4°; $(a\pm mc):(b\pm md)::a:b$; $(a\pm mc):(b\pm md)::c:d$

5°; $(a\pm mb):(c\pm md)::a:c$; $(a\pm mb):(c\pm md)::b:d$

6°; $ma:mb::c:d$; $ma:b::mc:d$; $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::c:d$

7°; $a^m:b^m::c^m:d^m$; $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$.

Toutes ces proportions sont exactes, car dans chacune, en vertu de l'égalité $ad=bc$, qui résulte de la proportion primitive, $a:b::c:d$, les parties qui composent le produit des extrêmes, sont égales à celles qui composent le produit des moyens; ces produits sont donc égaux; chaque proportion existe donc, (n° 430). Par exemple, l'égalité $ad=bc$, démontrant que les produits, $(a+c)b$, $(b+d)a$, sont égaux; la proportion $a+c:b+d::a:b$, est vraie. Ces proportions démontrent les propriétés suivantes.

439. *Dans toute proportion;* 1°. *la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent;* 2°. *la différence des antécédens, est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent;* 3°. *la somme des antécédens, est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens;* 4°. *le 1er antécédent, plus ou moins un certain nombre de fois le 2e antécédent, est au 1er conséquent, plus ou moins*

le même nombre de fois le 2^e conséquent, comme un antécédent est à son conséquent; 5°. *le 1^er antécédent, plus ou moins un certain nombre de fois son conséquent, est au 2^e antécédent, plus ou moins le même nombre de fois son conséquent, comme le 1^er antécédent est au 2^e antécédent, ou comme le 1^er conséquent est au 2^e conséquent;* 6°. *une proportion n'est pas troublée, quand on multiplie ou quand on divise un extrême et un moyen par la même quantité;* 7°. *une proportion n'est pas troublée, quand on élève chacun de ses termes à une même puissance, ou quand on extrait une racine du même degré de chacun de ses termes.*

440. *Dans une suite de rapports égaux, la somme d'un nombre quelconque d'antécédens, est à la somme d'un pareil nombre de conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.* Il s'agit de prouver que les rapports égaux.....

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\text{etc.}; \text{ ou } a : b :: a' : b' :: a'' : b'' :: \text{etc., donnent...}$$

$$(1)\ldots\ (a+a'+a''+\text{etc.}) : (b+b'+b''+\text{etc.}) :: a : b.$$

L'égalité des rapports, $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, etc., donnant $a'b=ab'$, $a''b=ab''$, etc., le produit, $(ab+a'b+a''b+\text{etc.})$, des extrêmes, est égal au produit $(ab+ab'+ab''+\text{etc.})$, des moyens; la proportion (1), est donc exacte (n° 430).

441. *Lorsqu'on multiplie plusieurs proportions par ordre, les quatre produits, qui en résultent, forment une nouvelle proportion.* Il faut démontrer que les proportions.....

$$a : b :: c : d,\ a' : b' :: c' : d',\ a'' : b'' :: c'' : d'',$$

donnent la proportion, $aa'a'' : bb'b'' :: cc'c'' : dd'd''$.

Cette dernière proportion est exacte (n° 430), car les trois autres proportions; donnant $ad=bc$, $a'd'=b'c'$, $a''d''=b''c''$, on en déduit.......... $ad\times a'd'\times a''d''=bc\times b'c'\times b''c''$, ou $aa'a''\times dd'd''=bb'b''\times cc'c''$

442. *Les proportions,* $a : b :: c : d$, $b : a' :: d : c'$, *donnent* $a : a' :: c : c'$, car les équations, $ad=bc$, $bc'=a'd$, donnent....

$$ad\times bc'=bc\times a'd, \text{ ou } ac'=a'c.$$

443. *Lorsque, dans deux proportions, les antécédens sont égaux chacun à chacun, les conséquens sont en proportion et quand les conséquens sont égaux, les antécédens sont en proportion.* En effet; les proportions....

$$\left\{\begin{array}{l} a : b :: c : d;\ \alpha : \beta :: \gamma : \delta \\ a : b' :: c : d';\ \alpha' : \beta :: \gamma' : \delta \end{array}\right\},$$

donnent....... $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{a}{c}=\frac{b'}{d'}$; $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha'}{\gamma'}$.

Donc, $\frac{b}{d}=\frac{b'}{d'}$ et $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha'}{\gamma'}$. On en déduit, $b:d::b':d'$; $\alpha:\gamma::\alpha':\gamma'$.

Ce qui démontre le principe énoncé.

444. Telles sont les principales propriétés des proportions. On voit qu'elles se déduisent des équations qui expriment l'égalité des rapports ; de sorte que tout l'échafaudage des proportions deviendrait inutile, si l'on y substituait les équations correspondantes ; ce qui jetterait plus de jour sur les démonstrations.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

Progressions par différences (*).

445. *La progression par différence est formée d'une suite de termes tels, qu'en retranchant chaque terme de celui qui le précède, on obtient une différence constante.* Cette différence est ce qu'on nomme la *raison* de la progression. Ainsi, en désignant par a le premier terme de la progression et par d la *raison*, le 2e terme sera $a+d$, le 3e sera $a+2d$,.., et si la progression est composée de n termes, le dernier sera $a+(n-1)d$. L'ensemble de ces termes, s'écrit ainsi....

$$\div a.(a+d).(a+2d).(a+3d)....\{a+(n-1)d\},$$

et l'on prononce, a est à $(a+d)$, comme $(a+d)$, est à $(a+2d)$, comme $(a+2d)$ est à $(a+3d)$, etc. La progression équivaut donc aux proportions continues par différence,

$$a.(a+d):(a+d).(a+2d);\ (a+d).(a+2d):(a+2d).(a+3d);\ \text{etc.}$$

446. On considère ordinairement dans une progression, le *premier terme*, la *raison*, le *nombre des termes*, le *dernier terme*, et la *somme de tous les termes*. Désignant ces quantités par, a, d, n, ω et s; on aura....

$$\omega=a+(n-1)d;\ s=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\{a+(n-1\}d.$$

Quand on connaîtra, a, d et n, la 1re équation donnera ω, sans qu'il soit nécessaire de calculer tous les termes. Cherchons une valeur de s qui jouisse de la même propriété. La valeur de s peut être mise sous les deux formes suivantes....

(*) Ces progressions étaient connues sous le nom de *progressions arithmétiques*.

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (\omega - 2d) + (\omega - d) + \omega,$$
$$s = \omega + (\omega - d) + (\omega - 2d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et réunissant les termes qui se trouvent les uns sur les autres; la somme des premiers membres sera $2s$; la somme des seconds membres sera n fois $(a + \omega)$. On a donc....

$$(1)\ldots \omega = a + (n - 1)d;\ (2)\ldots s = \frac{1}{2}n(a + \omega).$$

447. Les équations (1) et (2), donnent la solution de ce problème général : *Connaissant trois des cinq quantités, a, d, n, ω, s, qui entrent dans une progression par différence; déterminer les deux autres quantités.* Cette question fournit dix problèmes particuliers, dont les solutions n'offrent aucunes difficultés; car on a toujours les deux équations (1) et (2), pour déterminer les deux parties inconnues, et les équations à résoudre sont du premier ou du second degré. Le nombre des termes étant essentiellement entier positif, *on ne peut admettre que les valeurs entières positives de n.*

448. *Entre deux nombres donnés, α et ω, insérer b termes, de manière que l'ensemble des $b + 2$ termes, forme une progression par différence,* (c'est ce qu'on nomme *insérer b moyens proportionnels arithmétiques, entre deux nombres donnés, α et ω*). On connaît, le premier terme α, le dernier ω, et le nombre $b + 2$ des termes. Il s'agit de calculer la *raison d.* La formule (1) donnera, $d = \dfrac{\omega - a}{b + 1}$. Ainsi, *pour insérer plusieurs moyens proportionnels arithmétiques entre deux nombres donnés; il suffit de diviser la différence entre ces deux nombres, par le nombre des moyens proportionnels augmenté d'un; le quotient, exprime la raison de la progression demandée.*

Progressions par quotient (*).

449. *La progression par quotient est formée d'une suite de termes tels, qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède, le quotient est constant.* Ce quotient est la *raison* de la progression. Désignant donc par a le premier terme de la progression, et par q la *raison;* le 2e terme sera aq; le 3e sera aq^2,.., et le terme du rang n sera aq^{n-1}. L'ensemble de ces termes s'écrit ainsi, $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3, \ldots, : aq^{n-1}$.

Cette progression équivaut aux proportions continues (n° 422)...

$$a : aq :: aq : aq^2;\ aq : aq^2 :: aq^2 : aq^3;\ \text{etc.}$$

(*) Ces progressions étaient connues sous le nom de *progressions géométriques*

Lorsque la *raison* q est plus grande que l'unité, les termes vont en augmentant, et la *progression* est *croissante*. Quand la *raison* q est moindre que l'unité, les termes diminuent à mesure que l'on s'éloigne du premier, et la *progression* est *décroissante*. Si l'on représente, le nombre des termes par n, le dernier terme par ω, et la somme de tous les termes par s; on aura....

$$(1)\ldots\ \omega = aq^{n-1};\ (\alpha)\ldots s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}.$$

On peut simplifier la seconde équation, car on a....

$$s = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{a(q^n - 1)}{(q - 1)},\ (\text{n}^\circ\ 315).$$

450. Les formules, $(1)\ldots\ \omega = aq^{n-1}$; $(2)\ldots s = a\dfrac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$, (**), expriment les relations qui existent entre les cinq quantités, a, ω, q, n et s. On pourra donc toujours en déduire deux quelconques de ces quantités, lorsque les trois autres seront données. *Quand n sera connu, les équations* (1) *et* (2) *conduiront aux valeurs des inconnues*. Par exemple, si, connaissant a, ω et n, on voulait trouver s et q, l'équation (1) donnerait (3).. $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{\omega}{a}}$, et cette valeur de q, substituée dans l'équation (2), déterminerait s. Mais, on peut abréger ce calcul; car l'équation (1) donnant $\omega q = aq^n$, la formule (2) devient $s(q - 1) = \omega q - a$; mettant la valeur de q dans cette dernière équation, et multipliant ensuite les deux membres par $\sqrt[n-1]{a}$, on trouve, ...
$s \times \left(\sqrt[n-1]{\omega} - \sqrt[n-1]{a}\right) = \omega\sqrt[n-1]{\omega} - a\sqrt[n-1]{a}$; ce qui conduit à la valeur de s.

451. *Entre deux nombres donnés*, a *et* ω, *insérer* $\mathcal{C}$ *termes, de manière que l'ensemble de ces* $\mathcal{C} + 2$ *termes, forme une progression géométrique*; (c'est ce qu'on nomme *insérer* $\mathcal{C}$ *moyens proportionnels géométriques, entre deux nombres donnés*, a *et* ω). *La formule* (3) *donne*, $q = \sqrt[\mathcal{C}+1]{\omega : a}$; ainsi, *pour insérer* $\mathcal{C}$ *moyens proportionnels géométriques, entre deux nombres donnés, il suffit de diviser ces nombres l'un par l'autre, et*

(**) La multiplication des deux membres de l'équation (α), par $(q - 1)$, donne $s(q - 1) = a(q^n - 1)$, et cette dernière conduit à la formule (2). Mais, la multiplication par $(q - 1)$, a introduit la valeur $q = 1$, qui était étrangère à la question. On devra donc se rappeler, que *les formules que l'on déduira des équations* (1) *et* (2), *contiendront une valeur* $q = 1$, *étrangère à la question*.

d'extraire la racine du degré $\mathcal{C}+1$, du quotient. Le résultat exprime la RAISON *de la progression demandée.*

452. *Déterminer la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante, prolongée à l'infini.* La formule (2) du n° 450, donnera.....

$$s=a\frac{(1-q^n)}{(1-q)}=\left(\frac{a}{1-q}\right)-\left(\frac{aq^n}{1-q}\right).$$

La progression proposée étant décroissante, la *raison q* est moindre que l'unité, et par conséquent, à mesure que l'on prend plus de termes, n augmente, q^n diminue, (n° 245), et la valeur de s approche de $\frac{a}{1-q}$. On peut toujours prendre assez de termes, pour que la somme de ces termes, diffère de $\frac{a}{1-q}$, d'une quantité moindre que toute grandeur donnée. Enfin, lorsque la progression est prolongée à l'infini, n est infiniment grand, $\frac{aq^n}{1-q}$ est zéro, et la somme de tous les termes est rigoureusement égale à $\frac{a}{1-q}$. Ainsi, *dans une progression géométrique décroissante, prolongée à l'infini, la somme de tous les termes est égale au premier terme, divisé par l'unité moins la raison.* La fraction décimale périodique 0,27 27 27 etc., étant égale à la somme des termes de la progression géométrique....... $\div\!\div \frac{27}{100} : \frac{27}{(100)^2} : \frac{27}{(100)^3}$: etc.; si l'on divise le 1^er^ terme $\frac{27}{100}$, par $1-\frac{1}{100}$; le quotient $\frac{27}{99}$, exprimera la somme de tous les termes de cette progression. Et en effet, la fraction périodique 0,27 27 etc., est égale à $\frac{27}{99}$, (A, n° 86). Cet exemple doit fixer l'attention des élèves; on voit que *la considération de l'infini, conduit à des résultats qui sont rigoureusement exacts.*

Théorie des logarithmes, (n° 460).

453. Lorsque n est inconnue, on est conduit à *résoudre une équation dans laquelle l'inconnue entre comme exposant.* Il s'agit donc de calculer x, dans une équation de la forme......

$$(1)..\ \alpha^x=\mathcal{C}\ ;\ (\alpha \text{ et } \mathcal{C} \text{ sont donnés ; } x \text{ est l'inconnue}).$$

454. *L'inconnue x ne peut jamais avoir plus d'une valeur réelle,* car α^x varie en même temps que x, (n° 244). *La valeur de x peut être réelle ou imaginaire, commensurable ou incommensurable, positive ou négative.* En effet; soient les équations.....

$8^x=64$; $8^x=\frac{1}{64}$; (2)..$8^x=32$; (3).. $8^x=\frac{1}{32}$; (4)..$10^x=200$; (5)..$10^x=\frac{1}{200}$.

Une méthode analogue à celle du n° 366, détermine la valeur de x. La 1re équation donne $x=2$; dans la 2e équation, $x=-2$. Pour résoudre l'équation (2), on donnera successivement à x les valeurs, 0, 1, 2, etc., et l'on verra que x tombe entre 1 et 2. Faisant donc, $x=1+\frac{1}{y}$, la quantité y sera plus grande que l'unité, et l'équation (2) deviendra (n° 246)....

$$32=8^x=8^{1+\frac{1}{y}}=8^1\times 8^{\frac{1}{y}}.\ \text{D'où, } 4=8^{\frac{1}{y}} \text{ et } 4^y=8.$$

Cette dernière équation étant de même forme que la proposée, on fera $y=2$, et l'on verra que y tombe entre 1 et 2. Posant $y=1+\frac{1}{z}$, z sera plus grand que 1, et l'équation $8=4^y$, conduira à $2^z=4$; d'où $z=2$. On en déduira, $y=\frac{3}{2}$ et $x=\frac{5}{3}$. Cette valeur de x satisfait à l'équation (2) ; car il en résulte....

$$8^x=8^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{8^5}=\sqrt[3]{(2^3)^5}=\sqrt[3]{2^{3\cdot 5}}=2^5=32.$$

Dans l'équation (3) ; $x=0$, donne $8^x=1$; or, 8^x augmente quand x augmente, (n° 245) ; x est donc négatif. Soit $x=-z$; il viendra........ $8^z=32$; d'où $z=\frac{5}{3}$ et $x=-\frac{5}{3}$.

455. Dans l'équation (4), x est incommensurable (n° 472). Pour approcher de la valeur de x, au moyen des *fractions continues*, on opérera comme dans le n° 454, et l'on trouvera.....

$$x=2+\frac{1}{y}\ ;\ 2^y=10\ ;\ y=3+\frac{1}{z}\ ;\ z=3+\frac{1}{u}\ ;\ u=9+\frac{1}{t}\ ;\ \text{etc.}$$

Si l'on néglige $\frac{1}{t}$, on aura $u=9$, $x=2+\frac{28}{93}=2{,}30107$ etc ; cette valeur de x est trop forte, mais l'erreur est moindre que $\frac{1}{(93)^2}$, ou que 0,0001 etc., (n° 285) ; et en effet, lorsqu'on pousse plus loin les calculs, on trouve $x=2{,}301030$ etc. L'équation (5) donne $x=-2{,}301030$ etc. Enfin, dans l'équation $10^x=-100$, x est imaginaire ; car toutes les puissances de 10, sont positives.

* 456. En général, *lorsque dans l'équation* (1).. $a^x=b$, *x est plus grand que l'unité, il est toujours facile de calculer x par les fractions continues*. En effet ; on donnera successivement à x les valeurs, 1, 2, 3, etc.,

jusqu'à ce qu'on parvienne à deux valeurs de α^x, l'une moindre que 6, l'autre plus grande. Si la plus petite valeur entière approchée de x est p, on fera $x = p + \frac{1}{y}$; y sera plus grand que l'unité, et l'équation (1) donnera, (n° 246),

$$6 = \alpha^{p+\frac{1}{y}} = \alpha^p \times \alpha^{\frac{1}{y}}. \text{ D'où, } \left(\frac{6}{\alpha^p}\right)^y = \alpha.$$

Cette dernière équation étant de même forme que la proposée, on trouvera de même la plus petite valeur entière approchée q, de y. On fera, $y = q + \frac{1}{z}$; et continuant ces calculs, on obtiendra la valeur de x en fraction continue. On pourra donc calculer x, avec autant d'exactitude que l'on voudra, (n° 286).

* 457. *Lorsque dans l'équation* (1), α *et* 6 *sont des nombres positifs*, x *est réel, et la méthode du* n° 456, *conduit toujours à la valeur de* x *en fraction continue.* En effet ; ce principe est démontré quand x est plus grand que l'unité (n° 456) ; il suffit donc de faire voir que *l'on peut toujours transformer l'équation* (1) *en une autre*, $a^y = b$, *dans laquelle* y *est plus grand que l'unité.* Les principes des n^{os} 244 et 245, conduisent à la solution de ce problème. Par exemple, soit $\alpha < 1$, $6 > 1$, et $\frac{1}{6} > \alpha$; pour résoudre l'équation (1)... $\alpha^x = 6$, on observera que $x = 0$, donne $\alpha^x = 1$; ce résultat est trop petit; α^x doit donc augmenter; x doit donc diminuer, (n° 244) ; x est donc négatif. Soit $x = -z$; z sera positif et l'équation (1) donnera $\alpha^z = \frac{1}{6}$; les hypothèses, $z = 0$, $z = 1$, fournissent deux résultats, 1 et α, l'un plus grand que $\frac{1}{6}$, l'autre moindre que $\frac{1}{6}$; z tombe donc entre 0 et 1. Posant, $z = \frac{1}{y}$, y sera plus grand que l'unité et l'équation $\alpha^z = \frac{1}{6}$, donnera $\left(\frac{1}{6}\right)^y = \alpha$. Dans cette dernière équation, l'inconnue y étant plus grande que l'unité, on pourra calculer y, (n° 456), et l'on en déduira la valeur de x, car $x = -\frac{1}{y}$. Des raisonnemens analogues conduiront aux résultats suivans.......

1°.. $\alpha > 1$, $6 > 1$, $6 > \alpha$; ou $\alpha < 1$, $6 < 1$, $6 < \alpha$; $x > 1$.

2°.. $\alpha > 1$, $6 > 1$, $6 < \alpha$; ou $\alpha < 1$, $6 < 1$, $6 > \alpha$; $x = \frac{1}{y}$, $y > 1$.

3°.. $\alpha > 1$, $6 < 1$, $\frac{1}{6} > \alpha$, ou $\alpha < 1$, $6 > 1$, $\frac{1}{6} < \alpha$; $x = -y$, $y > 1$.

$4^o..\alpha > 1, \mathrm{C} < 1, \frac{1}{\mathrm{C}} < \alpha$; ou $\alpha < 1$, $\mathrm{C} > 1$, $\frac{1}{\mathrm{C}} > \alpha$; $x = -z$; $z = \frac{1}{y}$, $y > 1$.

*458. *Lorsque dans l'équation* (1).. $\alpha^x = \mathrm{C}$, *les nombres*, α, C, *sont entiers et positifs*, x *est réel*, (n° 457). *Pour découvrir si la valeur réelle de* x *est commensurable ou incommensurable; on décompose* α *et* C *en leurs facteurs premiers. Quand les facteurs premiers de* C *ne sont pas les mêmes que ceux de* α, x *est incommensurable. Lorsque ces facteurs sont les mêmes, on a*, $\alpha = p^m q^n$, $\mathrm{C} = p^r q^s$, (*); *selon que les rapports*, $\frac{r}{m}$, $\frac{s}{n}$, *sont égaux ou inégaux*, x *est commensurable ou incommensurable.* En effet; *quand* x *a une valeur commensurable* $\frac{b}{a}$; b et a sont des nombres entiers et l'équation (1) donne $\alpha^b = \mathrm{C}^a$. Si p désigne un facteur premier de α; α^b sera divisible par p; C^a sera donc divisible par p; p divisera donc C, (A, n° 370); *les facteurs premiers de* α, *sont donc les mêmes que ceux de* C. Supposant donc que les facteurs premiers de α, soient p et q; on aura $\alpha = p^m q^n$ et $\mathrm{C} = p^r q^s$. L'équation $\alpha^b = \mathrm{C}^a$, deviendra, $p^{bm} q^{bn} = p^{ar} q^{as}$. Les facteurs premiers, p, q, devant se trouver le même nombre de fois, dans chaque membre, il viendra, $bm = ar$ et $bn = as$; d'où, $\frac{b}{a} = \frac{r}{m} = \frac{s}{n}$. *Les rapports*, $\frac{r}{m}$, $\frac{s}{n}$, *sont donc égaux, quand* x *est commensurable. Réciproquement, lorsque ces rapports sont égaux*, x *est commensurable, et chacun d'eux exprime* x, car en supposant $\frac{r}{m} = \frac{s}{n}$ et prenant $x = \frac{r}{m}$, la valeur de α^x devient....

$$\alpha^x = (p^m q^n)^{\frac{r}{m}} = (p^m)^{\frac{r}{m}} (q^n)^{\frac{r}{m}} = (p^m)^{\frac{r}{m}} (q^n)^{\frac{s}{n}} = p^r q^s = \mathrm{C}.$$

*459. *Quand les rapports*, $\frac{r}{m}$, $\frac{s}{n}$, *sont inégaux*, x *est incommensurable*, car d'après ce qui a été démontré, (n° 458), si x était commensurable, ces rapports seraient égaux.

460. La méthode du n° 455, conduisant à des calculs assez longs, nous allons faire voir comment on peut simplifier ces calculs. Dans l'équation à deux inconnues, $\alpha^x = y$; y est arbitraire et quand α est positif, chaque valeur positive de y, donne une valeur réelle de x, (n° 457). L'ensemble des valeurs de x et y, correspondantes à une seule valeur de α, forme un *système de logarithmes*; le nombre invariable α est la *base* et l'exposant x, est le *logarithme* du nombre y. De sorte que *les* LOGARITHMES

(*) On suppose que α ne renferme que deux facteurs *premiers* p et q. La démonstration serait la même, si α contenait un nombre quelconque de facteurs.

des nombres, sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever la base invariable α, *pour obtenir successivement tous ces nombres.* Nous allons prouver qu'*en donnant à* x, *une infinité de valeurs positives et négatives, on obtient pour* y *tous les nombres positifs, entiers et fractionnaires, depuis zéro jusqu'à l'infiniment grand*, (*). En effet; 1°. soit $\alpha > 1$. L'hypothèse $x=0$, donne $y=1$; et si l'on conçoit que x augmente d'une manière continue, depuis zéro, jusqu'à l'infini, α^x ou y, augmentera d'une manière continue, depuis l'unité jusqu'à l'infini (n° 245). Faisant $x=-z$, on aura $y=\frac{1}{\alpha^z}$ et z augmentant depuis zéro, jusqu'à l'infini, y diminuera depuis l'unité jusqu'à zéro. Mais, x ou $-z$, est le logarithme de y. Par conséquent:

461. *Dans tout système dont la base est plus grande que l'unité, les logarithmes des nombres plus grands que l'unité, sont positifs et d'autant plus grands que les nombres auxquels ils appartiennent sont plus grands. Les logarithmes des nombres positifs moindres que l'unité, sont négatifs et d'autant plus grands négativement que ces nombres sont plus petits.* C'est dans ce sens que l'on dit que *le logarithme de zéro est l'infini négatif.* En supposant $\alpha < 1$, on verra que, *dans tout système où la base positive est moindre que l'unité, les logarithmes des nombres positifs plus petits que l'unité, sont positifs et d'autant plus grands que les nombres sont plus petits; les logarithmes des nombres positifs plus grands que l'unité, sont négatifs et d'autant plus grands négativement qu'ils appartiennent à des nombres plus grands.* Ce qui démontre le principe énoncé, (n° 460).

462. *Quand la base est positive, les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires*, car α étant positif, α^x ne peut être négatif.

463. *Dans tous les systèmes, le logarithme de la base est égal à l'unité et le logartithme de l'unité est zéro*, car dans l'équation $\alpha^x=y$, les hypothèses, $x=1, x=0$, donnent $y=\alpha$ et $y=1$. On désigne le logarithme d'un nombre quelconque n, par ln, et $l\,(p+q+r+\text{etc.})$, indique le logarithme du polynôme $(p+q+r+\text{etc.})$. Examinons les *propriétés générales des logarithmes.*

464. *Les logarithmes étant des exposans*, (n° 450), *doivent jouir des mêmes propriétés.* On peut d'ailleurs le démontrer directement, au moyen de l'équation fondamentale, (1)... $y=\alpha^x$. En effet; si dans le système dont la *base* est α, les logarithmes des nombres, y, Y, sont x et X; on aura (n° 460).....

(*) Lorsque la *base* est négative, la discussion de l'équation $y=\alpha^x$, présente des difficultés qui sont étrangères aux élémens. *On ne peut pas prendre l'unité pour base d'un système de logarithmes*, car toutes les puissances de l'unité étant égales à l'unité, les nombres plus grands ou plus petits que l'unité, n'auraient pas de logarithmes.

$y=\alpha^{x}$; $Y=\alpha^{X}$; $x=ly$, $X=lY$. D'où, (nº 246),

$y\times Y=\alpha^{x+X}$; $\frac{y}{Y}=\alpha^{x-X}$; $y^{\frac{p}{q}}=\alpha^{\frac{p}{q}x}$. Donc, (nº 460)......

$$l(y\times Y)=x+X=ly+lY;\ l\left(\frac{y}{Y}\right)=ly-lY;\ l\left(y^{\frac{p}{q}}\right)=\frac{p}{q}x=\frac{p}{q}ly.$$

465. On en déduit cette règle générale : *Le logarithme d'un produit, est égal à la somme des logarithmes des facteurs. Le logarithme du quotient, est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur. Le logarithme d'une puissance quelconque d'une quantité, est égal au logarithme de la quantité, multiplié par l'exposant de la puissance. Supposant* $\frac{p}{q}=\frac{1}{m}$, on verra que *le logarithme de la racine du degré m d'une quantité, est égal au logarithme de cette quantité, divisé par m.*

466. *Connaissant les logarithmes de tous les nombres, dans un système particulier, on peut toujours en déduire les logarithmes des mêmes nombres, dans un système quelconque dont la base est donnée.* En effet; si l'on désigne, par $\alpha_{,}$ la base du système dans lequel on a calculé les logarithmes, par $l_{,}$ les logarithmes pris dans ce système, par b un nombre dont on demande le logarithme dans le système dont la base est α; par l, les logarithmes pris dans ce dernier système et par x le logarithme inconnu du nombre donné b; on aura (nº 460), (1)..$\alpha^{x}=b$; $x=lb$.

Pour calculer x, on prendra les logarithmes des deux membres de l'équation (1), dans le système dont la *base* est $\alpha_{,}$, ce qui donnera, (nº 465)

$$l_{,}(\alpha^{x})=l_{,}b;\ \text{d'où (nº 465)},\ x\times l_{,}\alpha=l_{,}b\ \text{et (2)..}\ x=\frac{l_{,}b}{l_{,}\alpha}=lb.$$

467. *Le logarithme d'un nombre quelconque b, pris dans un système dont la base est α, est donc égal au logarithme de ce nombre, pris dans le système connu, divisé par le logarithme de la base α, pris dans le système connu.* Et par conséquent, *lorsqu'on a calculé les logarithmes de tous les nombres dans un système, pour en déduire les logarithmes des mêmes nombres dans un autre système, il suffit de diviser chacun des logarithmes connus, par le logarithme de la nouvelle base, pris dans le système connu.* Le nombre constant $\frac{1}{l_{,}\alpha}$, a reçu le nom de *module*; désignant ce *module* par M, on aura $\frac{1}{l_{,}\alpha}=M$ et $lb=(l_{,}b)\times M$.

468. *Dans toute proportion, par quotient, le logarithme du quatrième terme, est égal à la somme des logarithmes des moyens, moins le logarithme de l'extrême connu*, car la proportion, $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, donne $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ et l'on en déduit, (n° 465), $l\delta = l\beta + l\gamma - l\alpha$.

469. *Remarque.* Si p désigne un nombre positif quelconque, la valeur de $l\delta$ pourra prendre cette forme, (1)... $l\delta = l\beta + l\gamma + (p - l\alpha) - p$.

$(p - l\alpha)$ est ce qu'on nomme le *complément arithmétique du logarithme de* α. On suppose ordinairement $p = 10$; et dans ce cas, le *complément* de $l\alpha$, est le *reste* que l'on trouve, en retranchant $l\alpha$, du nombre 10. La formule (1) démontre que *pour obtenir le quatrième terme d'une proportion, il suffit d'ajouter à la somme des logarithmes des moyens, le complément* $(p - l\alpha)$, *du logarithme de l'extrême connu; la somme, diminuée de* p, *exprime le logarithme du quatrième terme.*

470. Ce qui précède, offre la *théorie générale des logarithmes;* occupons-nous de la *formation d'une table de logarithmes.* La valeur de la *base* étant arbitraire, on a pris 10, pour la *base* du système des *logarithmes tabulaires. La relation entre un nombre et son logarithme tabulaire, est donc exprimée par l'équation* $10^x = y$, *dans laquelle* $x = ly$. Nous ne parlerons plus désormais que de ces logarithmes; de sorte que *le logarithme d'un nombre, sera l'exposant de la puissance à laquelle il faudra élever la base* 10, *pour obtenir ce nombre.* D'après le principe du n° 461; *les logarithmes des nombres positifs plus grands que l'unité, seront positifs et d'autant plus grands que les nombres seront plus grands; les logarithmes des fractions plus petites que l'unité, seront négatifs, et d'autant plus grands, abstraction faite des signes, que les fractions seront plus petites; le logarithme de zéro sera l'infini négatif; et les logarithmes des nombres négatifs seront imaginaires. Le logarithme de la base* 10 *sera l'unité, et le logarithme de l'unité sera zéro.*

471. *Le logarithme, de l'unité suivie de* n *zéros vers la droite, est égal à* n, car le logarithme de 10^n est $n \times l(10)$, ou $n \times 1$, ou n.

472. *Les logarithmes de tous les nombres entiers compris entre*, 1, 10, 100, 1000, etc., *sont incommensurables.* Cela résulte du principe du n° 459. On peut le démontrer directement de la manière suivante. Si x désigne le *logarithme tabulaire* du nombre entier positif n, on aura, (1)... $10^x = n$, (n° 460). Il s'agit de faire voir que *les valeurs commensurables de* x *sont nécessairement des nombres entiers.* Cela posé; quand x est commensurable, on a, $x = \frac{b}{a}$; b et a sont des nombres entiers, et l'équation (1) donne, (2)... $2^b \times 5^b = n^a$. Les facteurs premiers de n^a, sont donc 2 et 5; le nombre n est donc de la forme $2^r \times 5^s$; (r et s désignant des nombres entiers). L'équation (2) devient $2^b \times 5^b = 2^{ar} \times 5^{as}$,

Donc, $b=ar=as$. Or, $x=\frac{b}{a}=r$. La valeur de x est donc un nombre entier. Ce qui démontre le principe énoncé.

473. Nous supposerons toujours que les valeurs des logarithmes seront réduites en décimales; de sorte qu'un logarithme sera composé des unités placées à gauche de la virgule décimale et des chiffres décimaux qui se trouvent à droite. La première partie sera la *plus petite valeur entière approchée* du logarithme, la seconde sera la *partie décimale* de ce logarithme. Ainsi, le *logarithme* de 200 étant, (n° 455), 2,30103 etc.; la plus petite valeur entière approchée de ce logarithme est 2, et la partie décimale est 0,30103 etc.

474. *La plus petite valeur entière approchée du logarithme d'un nombre entier, contient toujours autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans ce nombre*, car un nombre entier N, composé de n chiffres, tombant toujours entre 10^{n-1} et 10^n, et les logarithmes de ces deux derniers nombres étant $n-1$ et n; le logarithme de N tombe entre $n-1$ et n; la plus petite valeur entière approchée de lN est donc $n-1$.

475. La plus petite valeur entière approchée du logarithme d'un nombre entier, faisant connaître combien le nombre a de chiffres, cette valeur a reçu le nom de *caractéristique* du logarithme. De sorte que *la* CARACTÉRISTIQUE *du logarithme d'un nombre entier, contient autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans ce nombre.*

476. *Quand on ajoute n unités à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on obtient un nouveau logarithme qui appartient au nombre proposé multiplié par* 10^n, *et lorsqu'on retranche n unités de la caractéristique du logarithme d'un nombre, le nouveau logarithme appartient au nombre proposé divisé par* 10^n, car on a, (n° 465),

$$lb+n=lb+l(10^n)=l(b\times 10^n),\quad lb-n=lb-l(10^n)=l\left(\frac{b}{10^n}\right).$$

477. Pour *former les logarithmes tabulaires*, on a d'abord calculé les logarithmes de tous les nombres *premiers* compris entre 1 et 10000, (n° 457). On en a déduit les logarithmes de tous les nombres entiers moindres que 10000, car le logarithme d'un nombre est égal à la somme des logarithmes des facteurs *premiers* de ce nombre (n° 465). Les *tables* contiennent les logarithmes de tous les nombres entiers, 1, 2, 3, ..., 9999. On verra, (n° 479), comment on en déduit les logarithmes des nombres entiers plus grands que 10000. Connaissant les logarithmes de tous les nombres entiers, on peut obtenir les logarithmes des fractions, car le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur, (n° 465).

478. *Quand on considère deux nombres entiers n et n+1, plus grands que 1000, et un nombre n+d, compris entre n et n+1; les différences entre ces nombres, sont à peu près proportionnelles aux diffé-*

rences entre les logarithmes de ces nombres; de sorte que l'on a, par approximation,....

$$(n+1)-n : (n+d)-n :: l(n+1)-ln : l(n+d)-ln \;(*).$$

479. Pour être en état d'opérer avec les logarithmes, il suffit de savoir résoudre les deux problèmes suivans : 1er Problème. *Un nombre étant donné, trouver son logarithme*; 1°. *Les logarithmes des nombres entiers, moindres que* 10000, *sont dans la table*; 2°. *S'il s'agit de déterminer le logarithme d'un nombre plus grand que* 10000, du nombre 21598, par exemple; *on fera dépendre ce logarithme de celui d'un nombre compris entre* 1000 *et* 10000, en observant que, (n° 465)....

$$l(21598) = l(2159{,}8 \times 10) = l(2159{,}8) + l10 = l(2159{,}8) + 1.$$

Pour trouver le logarithme de 2159,8, on observera que le logarithme de 2159 étant 3,33425, il suffit de calculer ce qu'on doit ajouter à ce dernier logarithme, pour obtenir celui d'un nombre plus grand de 0,8. Or, la différence des logarithmes de 2159 et de 2160, est 0,00020; on peut donc dire, (n° 478); si, pour une unité ajoutée au nombre 2159, il faut ajouter 0,00020 à son logarithme; combien pour 0,8 ajoutés à ce nombre, doit-on ajouter à ce même logarithme; on a donc, $1 : 0{,}00020 :: 0{,}8 : x$; d'où, $x = 0{,}00016$; ajoutant 0,00016, au logarithme de 2159; la somme 3,33441, sera le logarithme de 2159,8. Le logarithme de 21598, est donc 4,33441; 3°. *Pour calculer le logarithme d'un nombre décimal; on cherche le logarithme de ce nombre, abstraction faite de la virgule; et l'on diminue ce logarithme d'autant d'unités que le nombre proposé contient de décimales*, (n° 476). Si l'on veut obtenir le logarithme de 21,598, on cherchera le logarithme 4,33441, de 21598; et retranchant trois unités de ce logarithme, le résultat 1,33441, sera le logarithme de 21,598. Le logarithme de 2159,8, sera 3,33441; et le logarithme de 0,0021598, sera $4{,}33441-7$, ou $4-7+0{,}33441$, ou $-3+0{,}33441$, ou $\bar{3}{,}33441$. Le *signe — placé au-dessus de la caractéristique, indiquera toujours que cette caractéristique doit être affectée du signe —, et que la partie décimale est positive*; 4°. enfin, *le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur*, (n° 465).

(*) Je ferai toujours usage des *tables* de logarithmes placées à la fin de ma *Trigonométrie analytique*. Ces *tables*, renferment les logarithmes de tous les nombres entiers moindres que 10000. Ces logarithmes ont cinq décimales. On verra, par la suite, que *la proportion énoncée* (n° 478), *peut être employée pour les nombres compris entre* 1000 *et* 10000; *elle ne peut pas donner les logarithmes des nombres qui ont plus de cinq chiffres*.

480. 2me Problème. *Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.* Ce problème étant l'inverse du précédent, il suffit d'effectuer les calculs du n° 479, dans un ordre inverse. Ainsi; 1°. *quand le logarithme donné est dans la table, le nombre auquel il appartient se trouve dans la table;* 2°. *Lorsque le logarithme proposé, n'est pas dans la table*, on opère de la manière suivante : Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 4,33441 ; on suppose la caractéristique égale à 3; ce qui donne 3,33441; on cherche les deux logarithmes tabulaires qui comprennent ce dernier logarithme; on voit qu'il tombe entre les logarithmes de 2159 et 2160, qui sont 3,33425 et 3,33445. Le logarithme 3,33441, appartient donc au nombre 2159 augmenté d'une fraction que nous désignerons par x. Pour obtenir cette fraction, on prendra la différence 0,00020, entre les logarithmes des nombres 2159 et 2160; on calculera la différence 0,00016, entre le logarithme 3,33441 et le logarithme tabulaire immédiatement plus petit; et l'on dira : Si pour 0,00020 ajoutés au logarithme de 2159, il faut ajouter 1 à 2159; combien pour 0,00016 ajoutés au logarithme de 2159, doit on ajouter à ce nombre? On aura donc, $0{,}00020 : 1 :: 0{,}00016 : x$; d'où $x = 0{,}8$. Le logarithme 3,33441, est donc celui du nombre 2159,8; le logarithme 4,33441, appartient donc au nombre, dix fois plus grand, 21598, (n° 476). Si le logarihtme proposé est 1,33441 ; on supposera la caractéristique égale à 3, et l'on trouvera que le logarithme 3,33441, appartient au nombre 2159,8. Le logarithme 1,33441, répond au nombre 100 fois plus petit 21,598, (n° 476). Enfin, si le logarithme était $\bar{3},33441$, on ajouterait assez d'unités à ce logarithme, pour que la caractéristique du résultat fût égale à $+3$; ajoutant donc 6 unités à $\bar{3},33441$, le résultat 3,33441, serait le logarithme de 2159,8. Or, en ajoutant 6 unités au logarithme, on a multiplié le nombre auquel répond ce logarithme, par 10^6, (n° 476); le logarithme proposé, appartient donc au nombre 2159,8, divisé par 10^6, ou à 0,0021598, (A, n° 72).

481. Les deux problèmes précédens donnent le moyen de *résoudre les équations*, $x = l\alpha$, $l(y) = \beta$, *dans lesquelles* α et β *désignent des nombres connus quelconques*, car le logarithme du nombre connu α, (n° 479), sera la valeur de l'inconnue x, et en cherchant à quel nombre appartient le logarithme donné β, (n° 480), ce nombre exprimera y. Ainsi, l'équation $x = l(21598)$, donne $x = 4{,}33441$, et l'équation $ly = 4{,}33441$, donne $y = 21598$.

482. *Lorsque dans l'équation* (1).... $\alpha^x = \beta$, α *et* β *sont positifs, on peut trouver* x *au moyen des fractions continues*, (n° 457). *Mais, l'emploi des logarithmes abrège considérablement les calculs*, car, en prenant les logarithmes tabulaires des deux membres de l'équation (1), on trouve (n° 465), $l\beta = l(\alpha^x) = x \times l\alpha$; d'où $x = \dfrac{l\beta}{l\alpha}$. *On obtiendra donc la valeur de* x, *en divisant le logarithme de* β, *par le logarithme de* α. Ce principe donne le moyen de résoudre les équations (1) et (2) du n° 450,

lorsque n est inconnu. Par exemple, pour trouver n, quand on connaît a, ω et q, on observera que l'équation $\omega = aq^{n-1}$, donne $q^{n-1} = \frac{\omega}{a}$. Donc, (nos 482 et 465),

$$n - 1 = \frac{l\left(\frac{\omega}{a}\right)}{lq} = \frac{l\omega - la}{lq}. \text{ Donc, } n = 1 + \frac{l\omega - la}{lq}.$$

483. *On peut toujours résoudre les équations à une seule inconnue, quand l'inconnue x n'entre que dans les exposans d'une même quantité connue.* En voici des exemples. L'équation, $2^x - 2^{x-1} = 2$, donne $2^x\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2$; d'où $2^x = 4$, et $x = 2$. Pour résoudre l'équation $5^{2^x} = 390625$, (l'exposant de 5 est 2^x), on fera $2^x = z$; d'où $5^z = 390625$. La règle du n° 482, donnera........

$$z = \frac{l\,(390625)}{l5} = 8\,;\ x = \frac{lz}{l2} = \frac{l8}{l2} = 3.$$

* 484. *Il n'existe aucune méthode générale pour résoudre les équations dans lesquelles des quantités différentes sont affectées d'exposans inconnus. La difficulté de résoudre les équations est encore plus grande quand les inconnues entrent dans les exposans et dans les coefficiens.*

485. *L'emploi des logarithmes n'est indispensable que lorsque les inconnues font partie des exposans.* Cependant, comme cet emploi change les multiplications, les divisions, l'élévation aux puissances, et l'extraction des racines, en additions, en soustractions, en multiplications, et en divisions très-simples (n° 465), *on fait souvent usage des logarithmes dans les calculs numériques.* Ainsi, pour obtenir, la valeur de x, dans l'équation..... $x = \frac{9724 \times 3849}{5676 \times 998}$, on prendra les logarithmes des deux membres; ce qui donnera, $lx = l9724 + l3849 - l5676 - l998$; cherchant les logarithmes de ces nombres, on trouvera $lx = 0{,}82002$; d'où $x = 6{,}60728$ etc. Mais, la valeur exacte de x est $6{,}60723$ etc. L'erreur, due à l'emploi des logarithmes, est donc moindre que $0{,}00006$.

486. *Pour calculer x, dans la formule $x = \sqrt[m]{b^q : a^r}$; on prendra les logarithmes des deux membres;* ce qui donnera (n° 465), $lx = \frac{1}{m}(qlb - rla)$. Quand qlb, sera plus grand que rla, la valeur de lx sera positive, et l'on en déduira une valeur de x plus grande que l'unité. Lorsque qlb, sera moindre que rla, la valeur de lx sera négative, et x sera plus petit que l'unité, (n° 470). Si l'on veut *éviter les logarithmes négatifs,* on écrira,

$n + lx = \frac{1}{m}(qlb + mn - rla)$, et l'on substituera pour l'indéterminée n, un nombre entier tel que le second membre soit un nombre positif α. Cherchant à quel nombre N, appartient le logarithme α, le quotient de la division de N, par 10^n, sera la valeur de x, (nº 476). Par exemple.....

$$x^3 = \frac{2}{7899}, \text{ donnera } 2 + lx = \frac{1}{3}(6 + l2 - l7899) = 0{,}80115.$$

Or, $0{,}80115 = l(6{,}3262 \text{ etc.})$. Donc, $x = 0{,}063262$ etc.

La racine cubique de $\frac{2}{7899}$, est donc $0{,}063262$ etc.

Questions relatives à l'intérêt de l'argent.

* 487. *L'emploi des logarithmes présente de grands avantages, lorsqu'il s'agit de résoudre les questions relatives aux intérêts des intérêts.* En voici des exemples, dans lesquels r^f (*) désignera toujours l'intérêt annuel de 1^f; et b sera égal à $1 + r$. On aura égard aux intérêts des intérêts, et l'on devra se rappeler, que *pour comparer des sommes payables à des époques différentes, il faut calculer combien toutes ces sommes valent à une même époque*, (A, nº 274).

* 488. *Déterminer la valeur de a^f, après n années?* L'intérêt annuel de 1^f étant r^f, celui de a^f est ar^f. De sorte que a^f argent comptant, valent $a^f + ar^f$, ou $a^f \times (r+1)$, ou $a^f \times b$, à la fin de la 1re année. Ainsi, *pour trouver ce qu'une somme placée au commencement d'une année, vaut à la fin de cette année, il suffit de la multiplier par b.* Donc, le capital a^f vaudra, à la fin de la 1re année $a^f \times b$, à la fin de la 2e année $a^f \times b \times b$ ou $a^f \times b^2, \ldots$; et après n années, le capital a^f vaudra $a^f \times b^n$. Désignant donc cette valeur de a^f, par α^f, on aura...

$\alpha = ab^n$; d'où, $l\alpha = la + nlb$. Soit, $a = 1500$, $r = \frac{1}{5}$, $n = 3$; on trouvera, $\alpha = 2592$.

* 489. *Un particulier place, a^f au commencement de la 1re année, a_1 francs à la fin de la 1re année, a_2 francs à la fin de la 2e année,... et a_n francs à la fin de la $n^{ième}$ année; combien sera-t-il dû à ce particulier, après n années?* Si l'on cherche les valeurs des capitaux $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, *francs*, à la fin de la $n^{ième}$ année, la somme de ces valeurs exprimera ce qui sera dû au particulier après n années. Désignant cette somme par α francs, on trouvera, (nº 488),

$$(1) \ldots \alpha = ab^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \ldots + a_{n-1} b + a_n$$

(*) Le signe ^{f} indique le mot *franc*. Ainsi, r^f désigne r *francs*.

Cette formule donne la solution d'un grand nombre de questions relatives à l'intérêt de l'argent. En voici des exemples. *Un particulier place a^f au commencement de la première année et a^f à la fin de chaque année. Combien sera-t-il dû à ce particulier après n années?* Si α désigne l'inconnue, on obtiendra la valeur de α, en supposant dans la formule (1), que toutes les sommes, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sont égales à a; ce qui donnera, (n° 315),

$$\alpha = \frac{a(b^{n+1}-1)}{b-1}. \text{ D'où, } l\alpha = la + l(b^{n+1}-1) - l(b-1).$$

Un particulier place a^f au commencement de la première année et prélève $\mathcal{C}^f$ à la fin de chaque année. Combien restera-t-il à ce particulier, après n années? Pour déduire la solution de ce problème, de la formule (1), il suffit de remplacer les quantités, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, par $-\mathcal{C}$; la valeur correspondante de α, exprimera la fortune du particulier à la fin de la n^{ieme} année. On trouvera de cette manière que....

$$(2)\ldots\ \alpha = ab^n - \frac{\mathcal{C}(b^n-1)}{b-1}.$$

Selon que cette valeur de α, sera positive, nulle ou négative, le particulier possédera α francs, ou ne possédera rien, ou devra α francs.

Un particulier, qui doit a^f, voudrait s'acquitter en n paiemens égaux effectués, à la fin de chaque année. On demande la valeur de chaque paiement. Si dans la formule (2), on suppose $\alpha = 0$, la valeur correspondante de $\mathcal{C}$, exprimera l'inconnue du problème actuel. On trouvera de cette manière que.....

$$(3)\ldots\ \mathcal{C} = \frac{(b-1)ab^n}{(b^n-1)};\ \text{d'où},\ (4)\ldots\ n = \frac{l\mathcal{C} - l(\mathcal{C}+a-ab)}{lb}.$$

La formule (3) donne la solution des problèmes relatifs aux *annuités*. Par exemple, lorsqu'on fait, $a = 3310$, $n = 3$, $b = 1{,}1$; on trouve, $\mathcal{C} = 1331$. Ce qui s'accorde avec le résultat du n° 264 de l'Arithmétique.

* 490. *Un particulier, âgé de m ans, place a^f en rente viagère. On demande la valeur de cette rente, dans l'hypothèse, où le particulier a encore n années à vivre.* Il s'agit de rembourser a francs, en n paiemens égaux effectués à la fin de chaque année; chaque paiement sera la valeur de la rente viagère. Désignant donc cette rente par $\mathcal{C}$ francs, la formule (3) donnera la valeur de $\mathcal{C}$. Pour déterminer n, on fera usage de la *table* suivante...

âges............	0,	5,	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,	45,	50,	55,	60,	65,	70,	75,	80,	85,	ans,
Il reste à vivre,	15,	43,	41,	37,	35,	31,	29,	27,	24,	20,	18,	14,	12,	10,	8,	5,	4,	3,	ans,

dans laquelle on a mis sous chaque âge, le tems qui reste à vivre, d'après les *probabilités*. Cette table est applicable à l'ensemble d'un grand nombre d'individus. Les sociétés, qui forment des *tontines*, pourront en faire usage, pour déterminer le *taux des rentes viagères*. Les rentiers, pris isolément, peuvent perdre ou gagner, mais le bénéfice de la société, qui ne frappe que sur la masse des actionnaires, est certain. On voit que l'enfant qui naît, peut espérer de vivre 15 ans; un homme de 45 ans, a encore l'espoir de vivre pendant 20 ans. Si l'on suppose l'argent à 5 pour 100, on aura $b = 1{,}05$. Calculant les rentes viagères relatives au capital 100^f, et mettant sous chaque âge la valeur correspondante de la rente viagère, la formule (3), conduira aux résultats suivans........

Ages...	0,	5,	10,	15,	20,	25,	30,	40,	45,	50, ans.
Rentes,	$9^f,6$;	$5^f,7$;	$5^f,8$;	6^f;	$6^f,1$;	$6^f,4$;	$6^f,6$;	$7^f,2$;	8^f;	$8^f,5$. (*)

Cette *table* détermine le *taux des rentes viagères, d'après l'âge du rentier*. Ainsi, à 20 ans, le *taux* de la rente viagère est 6,1 pour 100; à 45 ans, le *taux* est de 8 pour 100.

491. *Lorsque m est un nombre entier positif, on a*, (n° 255).....

$$(1)\ldots\ (x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ \ 2}a^2x^{m-2} + \text{etc.}$$

La formule (1) *convient au cas où l'exposant m est commensurable.* En effet; 1°. si l'on divise successivement l'unité par chaque membre de l'identité (1), on trouvera....

$$(2)\ldots\ (x+a)^{-m} = x^{-m} - m \qquad {}^{m-1} + \frac{m(m+1)}{1.\ \ 2}a^2x^{-m-2} - \text{etc.}$$

Mais, pour obtenir la formule (2), il suffit de changer $+m$ en $-m$, dans la formule (1). La formule (1) convient donc au cas où l'exposant m est un nombre entier négatif. 2°. Lorsqu'on extrait la racine du degré n de chaque membre de l'identité (1), on trouve (n° 262)....

$$(3)\ldots\ (x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}ax^{\frac{m}{n}-1} + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)a^2x^{\frac{m}{n}-2} + \text{etc.}$$

Or, cette dernière identité se déduit de la formule (1), en mettant $\frac{m}{n}$ au lieu de m. La formule (1) est donc vraie quand l'exposant m est un nombre fractionnaire positif. 3°. Pour s'assurer de l'exactitude de la formule (1), quand l'exposant est un nombre fractionnaire négatif, il suffit de diviser

(*) Par exemple, pour déterminer la rente viagère relative au capital 100^f, lorsque l'âge est 45 ans, on observera que la personne âgée de 45 ans, a encore 20 ans à vivre. On fera donc, $a = 100$, $n = 20$, $b = 1{,}05$; et la formule (3) donnera $\mathcal{C} = 8$.

l'unité par chaque membre de l'identité (3), ou d'extraire la racine du degré n, de chaque membre de l'identité (2).

* 492. L'exactitude de la formule (1) se trouve ainsi vérifiée quand l'exposant est commensurable. Mais, cette vérification n'étant qu'un fait de calcul, fondé sur l'analogie, il est nécessaire de démontrer rigoureusement que *la formule* (1) *est vraie quand l'exposant est commensurable.* Pour y parvenir, on divisera les deux membres de la formule (1), par x^m et faisant $\frac{a}{x} = z$, on trouvera....

$$(4)\ldots(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2\ .\ 3}z^3 + \text{etc.}$$

Il suffit donc de *prouver que la formule* (4) *est vraie quand m est commensurable.* La somme de tous les termes de la *série*, $1 + mz +$ etc., est une fonction de m, que l'on désignera par $f(m)$; et changeant m en n, il viendra....

$$(5)\ldots f(m) = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3 + \text{etc.}$$

$$(6)\ldots f(n) = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3 + \text{etc.}$$

Quand m est un nombre entier positif α, la forme de $f(m)$ est connue, car $f(\alpha) = (1+z)^\alpha$. Démontrons que *cette forme de fonction convient au cas où m est un nombre fractionnaire positif.* La forme du produit des séries (5) et (6) devant être indépendante des valeurs particulières de m et n, si l'on détermine la forme de ce produit lorsque m et n sont des nombres entiers positifs, la même forme conviendra quand m et n seront quelconques. Mais, m et n étant des nombres entiers positifs, la série (5) est le developpement de $(1+z)^m$ et la série (6) est le développement de $(1+z)^n$; le produit de ces deux séries sera donc le développement de $(1+z)^m \times (1+z)^n$, ou de $(1+z)^{m+n}$; on obtiendra donc ce produit en changeant m en $m+n$ dans la formule (5). Ainsi, quand m et n sont des nombres entiers positifs, on a, (7)...$f(m) \times f(n) = f(m+n)$. La formule (7) sera donc vraie quand m et n seront quelconques. Cela posé : si l'on change n en $n+p$, et si l'on observe que la formule (7) donne $f(n+p) = f(n) \times f(p)$, on trouvera, $f(m) \times f(n) \times f(p) = f(m+n+p)$. Et en général,

$$f(m) \times f(n) \times f(p) \times f(q) \text{ etc.} = f(m+n+p+q+\text{etc.})$$

Supposant les quantités, m, n, p, q, etc., égales à m et en nombre α, on aura, (8)...$\{f(m)\}^\alpha = f(m\alpha)$; α désignera un nombre entier positif, et m sera quelconque. *Lorsque m sera un nombre fractionnaire positif*, on pourra prendre pour α un nombre entier positif, tel que $m\alpha$ soit un nombre entier positif; dans ce cas, on aura, $f(m\alpha) = (1+z)^{m\alpha} = \{f(m)\}^{\alpha}$. D'où, $f(m) = (1+z)^m$. *La formule* (4) *est donc démontrée, quand m est un nombre fractionnaire positif.* Supposant $n = -m$, dans la formule (7) et observant que dans la série (5), $m = 0$, donne $f(0) = 1$, on trouvera, $f(m) \times f(-m) = 1$; d'où $f(-m) = \frac{1}{f(m)}$: Mais, quand m est un nombre positif, entier ou fractionnaire, $f(m)$ est égal à $(1+z)^m$; on a donc, $f(-m) = \frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m}$. *La formule* (4) *est donc vraie quand m est un nombre négatif, entier ou fractionnaire. Cette formule est donc vraie quand l'exposant est commensurable.* Raisonnant comme dans le n° 248, on en déduirait que *cette formule est vraie lorsque m est incommensurable; et la généralité de l'Algèbre conduit à faire usage de la même formule, quand l'exposant est imaginaire.*

493. *Déterminer les relations qui doivent exister entre, a, b, c, pour qu'en donnant des valeurs réelles quelconques à x, le trinôme* $ax^2 + bx + c$, *ne change jamais de signe.* Ce trinôme ne devant pas changer de signe, les racines de l'équation, $ax^2 + bx + c = 0$, doivent être imaginaires ou égales, car dans le cas où les racines seraient réelles et inégales, le trinôme changerait deux fois de signe (n° 355). La quantité $b^2 - 4ac$ doit donc être négative ou nulle, (n° 214). Dans ces deux cas, le trinôme conserve toujours le signe du coefficient a, de x^2, car ce trinôme est identiquement égal à, $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, et l'on peut toujours rendre x^2 plus grand que $\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, (n° 348).

494. Quand deux termes consécutifs d'un polynôme, sont affectés du même signe, ou de signes contraires, on dit que ces termes donnent une *permanence* ou une *variation*. Ainsi, le polynôme $x^3 - 2x^2 + x + 1$, contient une *permanence* et deux *variations*. Cela posé; *lorsqu'une équation ne renferme que des permanences, toutes les racines réelles sont négatives, et quand il n'y a que des variations, toutes les racines réelles sont positives.* En effet; 1°. lorsque tous les termes de l'équation $f(x) = 0$, sont de mêmes signes, une valeur positive de x ne peut jamais réduire $f(x)$ à zéro; 2°. quand il n'y a que des *variations*, l'équation a l'une de ces formes...

$$x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \text{etc.} = 0, \quad x^{2m+1} - px^{2m} + qx^{2m-1} - \text{etc.} = 0.$$

Supposant $x = -z$, les transformées en z n'auront que des *permanences*, les valeurs réelles de z seront donc négatives (1°.); les valeurs réelles de x seront donc positives.

495. *Étant donné des équations*, $P=0$, $Q=0$, $R=0$, *etc., qui ne renferment que la seule inconnue x; calculer les valeurs de x qui satisfont en même temps à ces équations.* Si, α, β, γ, .., ω, sont les racines communes aux équations proposées, les polynômes, P, Q, R, etc., seront divisibles par, $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\omega)$; cherchant donc le plus grand commun diviseur D, entre P, Q, R, etc., l'équation $D=0$, donnera les solutions communes aux équations proposées.

* 496. *On demande les relations qui doivent exister entre les coefficiens de l'équation*, (1)... $x^r+Bx^{r-1}+Cx^{r-2}+Dx^{r-3}+\ldots+Sx+T=0$, *pour que les r racines de cette équation soient égales.* Si toutes les racines sont égales, le polynôme x^r+ etc., sera la puissance r d'un binôme; le 1er terme de ce binôme sera x et le 2e terme sera $\frac{B}{r}$, (n° 262); formant la puissance r de $\left(x+\frac{B}{r}\right)$, on obtiendra un polynôme, ... $x^r+Bx^{r-1}+C_{\prime}x^{r-2}+D_{\prime}x^{r-3}+$ etc., qui devra être identique avec le 1er membre de l'équation (1). Les relations demandées seront donc.......... $C_{\prime}=C$, $D_{\prime}=D$, etc. Le nombre de ces relations est $r-1$.

* 497. *Déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficiens des équations*, $P=0$, $Q=0$, *pour que ces équations admettent r solutions communes?* Si les racines communes sont, $a, b, c, \ldots, l$; les polynômes P et Q auront un plus grand commun diviseur $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, qui sera du degré r. Cherchant donc le plus grand commun diviseur entre P et Q, on parviendra à un diviseur $px^r+qx^{r-1}+$ etc., et le *reste* correspondant sera $p_{\prime}x^{r-1}+q_{\prime}x^{r-2}+$etc.; ce *reste* devant être nul, quel que soit x, les relations demandées seront, $p_{\prime}=0$, $q_{\prime}=0$, etc. Quand les r solutions communes devront être égales, les r racines de l'équation..... $x^r+\frac{q_{\prime}}{p_{\prime}}x^{r-1}+$ etc. $=0$, seront égales; ce qui fournira $r-1$ autres relations entre les coefficiens des équations proposées, (n° 496).

498. *Transformer l'équation*, (1)... $x^m+px^{m-1}+$ etc. $=0$, *de manière que la nouvelle équation ne contienne pas une puissance donnée de l'inconnue.* On fera $x=y+z$; l'équation (1) donnera............. (2).... $y^m+(p+mz)y^{m-1}+$ etc. $=0$, et l'on pourra toujours disposer de l'indeterminée z de manière à faire disparaître une puissance donnée de y. Pour *faire disparaître le second terme*, on posera $p+mz=0$; d'où $z=-\frac{p}{m}$ et $x=y-\frac{p}{m}$. Par conséquent, *pour faire disparaître le second terme d'une équation, il suffit d'égaler l'inconnue à une nouvelle inconnue, augmentée du coefficient du second terme pris avec un signe contraire et divisé par l'exposant du premier terme.* Si l'on voulait faire disparaître le terme indépendant de y, on serait conduit

à l'équation, $z^m + pz^{m-1} +$ etc. $=0$, de sorte que les valeurs de z seraient les racines de l'équation (1).

499. *Transformer l'équation* (1)... $f(x)=0$, *de manière que toutes les racines réelles de la nouvelle équation, soient positives.* On cherchera la limite supérieure l des racines négatives de l'équation (2), et l'on fera $x+l=y$; d'où $x=y-l$; l'équation $f(y-l)=0$, jouira de la propriété demandée. Si toutes les racines réelles de la transformée devaient être négatives, on poserait $y=x-l_{,}$, ($l_{,}$ désignant la limite supérieure des racines positives).

500. Pour *transformer l'équation* $f(x)=0$, *en une équation* $F(y)=0$, *de manière que* x *et* y *satisfassent à une relation donnée* $\varphi(x,y)=0$, il suffit d'éliminer x, entre $f(x)=0$ et $\varphi(x,y)=0$.

* 501. PROBLÈME. *Déterminer les sommes des puissances entières des racines d'une équation, au moyen des coefficiens de cette équation.* Si, a, b, c,..., l, désignent les m racines de l'équation,.................

$x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m = 0$; on aura, (n° 335),

(1)..$x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_{m-1}x+p_m \equiv (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$.

Soit, $s_1=a+b+\ldots+l$; $s_2=a^2+b^2+\ldots+l^2$;...;$s_n=a^n+b^n+c^n+\ldots+l^n$.

Lorsqu'on change x en $x+z$, l'identité (1) devient.....

$$(2)\ldots(x+z)^m+p_1(x+z)^{m-1}+\text{etc.} \equiv (x-a+z)(x-b+z)\ldots(x-l+z).$$

Désignant le 1er membre de l'identité (1) par X, calculant le coefficient de la première puissance de z dans chaque membre de l'identité (2) et observant que ces coefficiens doivent être identiques, on trouvera (n° 373)...

$$(3)\ldots mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}+\ldots+p_{m-1} \equiv \frac{X}{x-a}+\frac{X}{x-b}+\ldots+\frac{X}{x-l}. \;(**)$$

Effectuant la division de l'unité, par chacun des binômes, $x-a$, $x-b$,...$x-l$, et réunissant les puissances semblables de x, l'identité (3) deviendra......

$$(4)\ldots mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}+\text{etc.} \equiv X\left(\frac{m}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\frac{s_3}{x^4}+\text{etc.}\right)$$

Remplaçant X par sa valeur, $x^m+p_1x^{m-1}+$ etc., effectuant les multiplications indiquées dans le second membre, ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, et égalant dans les deux membres, les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouvera......

$$(m-1)p_1=mp_1+s_1;\;(m-2)p_2=mp_2+s_1p_1+s_2;$$
$$(m-3)p_3=mp_3+s_1p_2+s_2p_1+s_3;\;\text{etc.}$$

D'où.... (5)...$s_1+p_1=0$, $s_2+p_1s_1+2p_2=0$; $s_3+p_1s_2+p_2s_1+3p_3=0$; etc.

(**) Lorsqu'on suppose, $\alpha=\beta=\gamma=1$; les formules (1) et (3), du n° 273, donnent $X'=\dfrac{X}{x-a}+\dfrac{X}{x-b}+\dfrac{X}{x-c}$.

$(6)\ldots s_{m-1}+p_1s_{m-2}+p_2s_{m-3}+\ldots+p_{m-3}s_2+p_{m-2}s_1+(m-1)p_{m-1}=0.$

$(7)\ldots s_{m+n}+p_1s_{m+n-1}+p_2s_{m+n-2}+\ldots+p_{m-2}s_{n+2}+p_{m-1}s_{n+1}+p_ms_n=0.$

Les formules (5) et (6) serviront à calculer successivement les sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$; et donnant successivement à n, les valeurs, 0, 1, 2, etc., la formule (7) déterminera, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, etc. On en déduira.......

$$(8)\ldots s_1=-p_1\,;\; s_2=p_1p_1-2p_2\,;\; s_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3\,;\;\text{etc.}$$

Faisant $x=\frac{1}{z}$, dans l'équation $x^m+\text{etc.}=0$, on obtiendra une transformée $z^m+\text{etc.}=0$. Les sommes des puissances entières positives des racines de cette transformée, exprimeront les *sommes des puissances entières négatives des racines de l'équation en x.*

* 502. *Toutes les sommes des puissances entières des racines d'une équation, peuvent donc s'exprimer en fonction rationnelle des coefficiens de cette équation.*

503. Une fonction *symétrique* de plusieurs quantités est une fonction qui ne change pas, lorsqu'on change l'une quelconque de ces quantités en une autre, et réciproquement. Ainsi, a^3+b^3, est une *fonction symétrique* des lettres a et b.

* 504. *Toute fonction algébrique rationnelle et symétrique des racines d'une équation, peut toujours s'exprimer rationnellement au moyen des coefficiens de cette équation.* En effet; une fonction algébrique rationnelle et symétrique des racines, $a, b, c, \ldots, l$, d'une équation, étant composée de termes de la forme $a^\alpha b^\beta$ etc.; il suffit de démontrer qu'une telle fonction peut toujours être exprimée rationnellement au moyen des coefficiens de l'équation. Nous désignerons la somme des termes de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc., par $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma \text{ etc.})$. De sorte que pour les trois racines, a,b,c, d'une équation du 3e degré, on aurait........

$$T(a^2b^3)=a^2b^3+b^2a^3+a^2c^3+c^2a^3+b^2c^3+c^2b^3;\,T(a^2)=a^2+b^2+c^2=s_2.$$

$T(ab)=ab+ac+bc$; etc. Cela posé; si l'on veut évaluer $T(a^\alpha b^\beta)$, on multipliera s_α par s_β; ce qui donnera......

$$\begin{aligned} s_\alpha\times s_\beta &=(a^\alpha+b^\alpha+\text{etc.})(a^\beta+b^\beta+\text{etc.}) \\ &=(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+\text{etc.})+(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+\text{etc.}). \end{aligned}$$

Or, $a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+\text{etc.}=s_{\alpha+\beta}$ et $a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+\text{etc.}=T(a^\alpha b^\beta)$.

Donc, (9)... $T(a^{\alpha}\, b^{\beta}) = s_{\alpha} \times s_{\beta} - s_{\alpha+\beta}$.

Pour calculer $T(a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma})$, on multipliera s_{γ} par $T(a^{\alpha}\, b^{\beta})$; ce qui donnera...

$$s_{\gamma} \times T(a^{\alpha}\, b^{\beta}) = (a^{\gamma} + b^{\gamma} + c^{\gamma} + \text{etc.})\ (a^{\alpha}\, b^{\beta} + b^{\alpha}\, a^{\beta} + b^{\alpha}\, c^{\beta} + \text{etc.}).$$

Effectuant le produit indiqué dans le second membre, on trouvera des termes de ces trois formes, $a^{\alpha+\gamma}\, b^{\beta}$, $a^{\beta+\gamma}\, b^{\alpha}$, $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$. Donc...

$$s_{\gamma} \times T(a^{\alpha}\, b^{\beta}) = T(a^{\alpha+\gamma}\, b^{\beta}) + T(a^{\beta+\gamma}\, b^{\alpha}) + T(a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}).$$

Substituant pour, $T(a^{\alpha}\, b^{\beta})$, $T(a^{\alpha+\gamma}\, b^{\beta})$, $T(a^{\beta+\gamma}\, b^{\alpha})$, leurs valeurs, déduites de la formule (9), on trouvera (*)...

$$(10)..\ T(a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}) = s_{\alpha}\, s_{\beta}\, s_{\gamma} - s_{\alpha} \cdot s_{\beta+\gamma} - s_{\beta}\, s_{\alpha+\gamma} - s_{\gamma}\, s_{\alpha+\beta} + 2\, s_{\alpha+\beta+\gamma}$$

La multiplication de s_{δ} par $T(a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma})$, conduirait à la valeur de $T(a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta})$, en fonction algébrique et rationnelle des *sommes* des puissances entières positives des racines. Et ainsi de suite. Mais, toutes ces *sommes* sont exprimées par des fonctions algébriques et rationnelles des coefficiens de l'équation (n° 502). Le principe est donc demontré. Par exemple, si a, b, c, désignent les racines de l'equation............... $x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$, la formule (9) donnera, $T(a^2 b) = s_2\, s_1 - s_3$. Substituant les valeurs de, s_1, s_2, s_3, données par les formules (8), on trouvera $T(a^2 b) = 3p_3 - p_1 p_2$.

* 505. *Les racines de l'équation* (1)... $x^3 + \alpha x + \beta = 0$, *étant*, a, b, c, *on demande quelle sera l'équation en* y, *qui aura pour racines*, $a+b+pab$, $a+c+pac$, $b+c+pbc$. Cette équation sera (n° 335)

$$[y-(a+b+pab)] \times [y-(a+c+pac)] \times [y-(b+c+pbc)] = 0.$$

(*) *Les formules* (9) *et* (10), *ne sont exactes que lorsque les exposans*, α, β, γ, *sont inégaux*. En répétant les calculs qui ont conduit à ces formules, on verra que, *lorsque deux des exposans*, α, β, γ, *sont égaux*, *on doit diviser les seconds membres des formules* (9) *et* (10), *par* 2. *Quand*, $\alpha = \beta = \gamma$, *il faut diviser le second membre de la formule* (10), *par* 2×3. Et ainsi de suite.

Effectuant les multiplications indiquées, les coefficiens de y seront des fonctions symétriques de, a, b, c, que l'on évaluera au moyen des coefficiens, α, β, et l'on trouvera......

$$(2)..\ y^3 - p\alpha y^2 + (\alpha - 3p\beta)y + (2p^2\alpha - p^3\beta - 1)\beta - p\alpha^2 = 0.$$

* 506. *Former l'équation en y, qui a pour racines les quarrés des différences entre les racines de l'équation* (1), *du n°* 505. L'équation demandée sera....

$$[y-(a-b)^2] \times [y-(a-c)^2] \times [y-(b-c)^2] = 0.$$

Effectuant les multiplications indiquées, les coefficiens de y seront des fonctions symétriques de, a, b, c, que l'on évaluera au moyen des nombres connus, α, β, et l'on trouvera que l'équation demandée est............
$(3)....\ y^3 + 6\alpha y^2 + 9\alpha^2 y + (4\alpha^3 + 27\beta^2) = 0.$

* 507. *Les puissances paires de* $\sqrt{-1}$ *sont égales à* $+1$ *ou à* -1, *et les puissances impaires sont égales à* $+\sqrt{-1}$, *ou à* $-\sqrt{-1}$, car $x=\sqrt{-1}$, donne $x^2=-1$, $x^3=-\sqrt{-1}$, $x^4=(x^2)^2=1$, et un nombre entier m n'étant susceptible que des quatre formes, $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$, (p est un nombre entier), les valeurs de x^m seront.....

$$x^{4p}=(x^4)^p=1^p=1;\ x^{4p+1}=x^{4p}\times x^1=x=\sqrt{-1};$$
$$x^{4p+2}=x^{4p}\times x^2=x^2=-1;\ x^{4p+3}=x^3=-\sqrt{-1}.$$

* 508. *Toute fonction algébrique de* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, *est de la forme* $\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}$ (*). En effet; on a....

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \pm (\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}) = (\alpha\pm\alpha_{,}) + (\beta\pm\beta_{,})\sqrt{-1}.$$
$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}) = (\alpha\alpha_{,}-\beta\beta_{,}) + (\alpha_{,}\beta+\alpha\beta_{,})\sqrt{-1}.$$
$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha_{,}-\beta_{,}\sqrt{-1})}{(\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1})(\alpha_{,}-\beta_{,}\sqrt{-1})}$$
$$= \frac{\alpha\alpha_{,}+\beta\beta_{,}}{\alpha_{,}\alpha_{,}+\beta_{,}\beta_{,}} + \left(\frac{\alpha_{,}\beta-\alpha\beta_{,}}{\alpha_{,}\alpha_{,}+\beta_{,}\beta_{,}}\right)\sqrt{-1}.$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m = \alpha^m + m\alpha^{m-1}\beta\sqrt{-1} - \frac{1}{2}m(m-1)\alpha^{m-2}\beta^2 - \text{etc.}$$

Ce développement est de la forme, $A+B\beta\sqrt{-1}$; A et B sont des quan-

---

(*) Les coefficiens de $\sqrt{-1}$, seront toujours des quantités réelles, qui pourront être nulles.

tités réelles qui ne renferment que des puissances paires de $\mathcal{C}$, de sorte que $(\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1})^m = A - B\mathcal{C}\sqrt{-1}$.

* 509. *Quand* $\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}$ *est racine d'une équation*............., (1).. $x^m + px^{m-1} +$ etc. $= 0$; $\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}$ *est racine de la même équation*, car en donnant successivement à x, les valeurs, $\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}$, $\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}$, le premier membre de l'équation (1) prendra ces deux formes, $A + B\mathcal{C}\sqrt{-1}$, $A - B\mathcal{C}\sqrt{-1}$; or, le premier résultat est zéro; A et B sont donc nuls; $A - B\mathcal{C}\sqrt{-1}$ est donc nul ; $\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}$ est donc racine de l'équation (1).

* 510. *Toute équation qui a une racine imaginaire de la forme* $\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}$, *a un facteur réel du second degré*, car $\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}$ est racine de la même équation, et ces deux *racines imaginaires conjuguées*, donnent le facteur réel du second degré, $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \mathcal{C}^2)$.

*511. *La racine quarrée de* $\alpha \pm \mathcal{C}\sqrt{-1}$, *est de la forme* $a \pm b\sqrt{-1}$. En effet ; soit......

$$(1)..\ \sqrt{\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}} + \sqrt{\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}} = 2s \text{ et } \sqrt{\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}} - \sqrt{\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}} = 2d.$$

On aura, $\sqrt{\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}} = s + d$ et $\sqrt{\alpha - \mathcal{C}\sqrt{-1}} = s - d$. Les équations (1) donneront, $4s^2 = 2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \mathcal{C}^2})$ et $4d^2 = 2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \mathcal{C}^2})$; la valeur de $4s^2$ sera donc une quantité positive $4a^2$ et $4d^2$ sera égal à une quantité négative $-4b^2$. Donc.....

$$s = a \text{ et } d = b\sqrt{-1}. \text{ Donc, } \sqrt{\alpha \pm \mathcal{C}\sqrt{-1}} = a \pm b\sqrt{-1}.$$

*512. *Les racines de l'équation*, $x^2 + (\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1})\,x + (\alpha_{,} + \mathcal{C}_{,}\sqrt{-1}) = 0$ *sont de la forme* $\alpha_{,,} \pm \mathcal{C}_{,,}\sqrt{-1}$, car cette équation donne des valeurs de x, de la forme, $p + q\sqrt{-1} \pm \sqrt{p_{,} + q_{,}\sqrt{-1}}$, et ces valeurs de x sont de la forme, $\alpha_{,,} \pm \mathcal{C}_{,,}\sqrt{-1}$, (nos 508 et 511).

* 513. *Si toute équation a une racine*, (n° 538), (*), *réelle ou imaginaire, cette racine sera de la forme* $\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}$. En effet; quand l'équation proposée sera de degré impair, elle aura une racine réelle α, (n° 352). Il suffit donc de considérer une équation de degré pair, (1)... $x^{2m} +$ etc. $= 0$. Cette équation aura $2m$ racines (n° 335). Désignez deux racines quelconques par z et $z_{,}$; et faites, $z + z_{,} + pzz_{,} = y$. L'équation (2)... $y^n + q_{,}y^{n-1} + q_{,,}y^{n-2} +$ etc. $= 0$,

---

(*) M. *Wronski*, ayant donné le moyen de résoudre les équations littérales de tous les degrés, on est certain que toute équation a une racine. Il s'agit de prouver que cette racine est nécessairement de la forme $\alpha + \mathcal{C}\sqrt{-1}$.

qui donnerait toutes les valeurs de y correspondantes à une même valeur réelle de p, serait du degré, $n=m\,(2m-1)$, (nos 252, 335), et les coefficiens, $q_{,}$, $q_{,,}$, etc., seraient réels (n° 505). Le degré de l'équation (1) étant divisible un certain nombre de fois par 2, le degré n, de l'équation (2), est divisible une fois de moins par 2, car $2m-1$ étant impair, n et m sont divisibles le même nombre de fois par 2. Cela posé :

*514. *Lorsque p désignant un nombre quelconque, l'équation* (2) *a une racine de la forme* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, *l'équation* (1) *a nécessairement une racine de la même forme.* En effet; on a, $y=\alpha+\beta\sqrt{-1}=z+z_{,}+pzz_{,}$ et pour chaque valeur réelle de l'indéterminée p, l'équation (2) donne une valeur de y de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Ces valeurs de y peuvent contenir successivement les m valeurs des racines, z, $z_{,}$, mais la fonction $z+z_{,}+pzz_{,}$ n'ayant que n valeurs différentes, après avoir donné $n+1$ valeurs à p, on aura formé $n+1$ équations en y, qui contiendront chacune une racine de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; de sorte que l'on aura trouvé au moins deux valeurs de y, de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, qui seront composées des mêmes valeurs a et b, de z et $z_{,}$ et de valeurs différentes, $p_{,}$, $p_{,,}$, de p. Désignant ces valeurs de y, par $\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}$ et $\alpha_{,,}+\beta_{,,}\sqrt{-1}$, on aura.....

$$\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}=(a+b)+p_{,}ab \text{ et } \alpha_{,,}+\beta_{,,}\sqrt{-1}=(a+b)+p_{,,}ab.$$

Ces équations donneront des valeurs de $a+b$ et de ab, de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Or, $x^2-(a+b)x+ab$, est un facteur de l'équation (1), et ce facteur égalé à zéro, donne une racine de l'équation (1) de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, (n° 512). Le principe est donc démontré.

*515. Cela posé; 1°. lorsque $2m$ sera une seule fois divisible par 2; n sera impair; l'équation (2) aura donc une racine de la forme $\alpha_{,}+\beta_{,}\sqrt{-1}$, ($\beta_{,}$ sera zéro); l'équation (1) aura donc une racine $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, (n° 514); 2°. quand $2m$ ne sera divisible que deux fois par 2; n sera divisible une seule fois par 2; l'équation (2) aura donc une racine de la forme....... $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, (1°); l'équation (1) aura donc une racine de même forme. Et ainsi de suite. Le principe du n° 513 est donc démontré.

* 516. *L'équation* (1) *du n°* 513, *a un facteur réel du second degré*, (nos 513 et 510.)

* 517. *Toute équation de degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré.* En effet; soit l'équation (1)... $x^{2m}+\text{etc.}=0$; cette équation a un facteur réel, $x^2+a_{,}x+b_{,}$, (n° 516). On a donc........ $x^{2m}+\text{etc.}=(x^2+a_{,}x+b_{,})\,(x^{2m-2}+p_{,}x^{2m-3}+\text{etc.})$. Or, l'équation de degré pair $x^{2m-2}+\text{etc.}=0$, a un facteur réel $x^2+a_{,,}x+b_{,,}$; donc ....

$$x^{2m}+\text{etc.}=(x^2+a_{,}x+b_{,})\,(x^2+a_{,,}x+b_{,,})\,(x^{2m-4}+\text{etc.}).$$

Ces décompositions pouvant se continuer jusqu'à ce que le dernier facteur soit du second degré, le principe est démontré.

518 Pour *découvrir les diviseurs du degré n, du polynôme*..... $x^m+px^{m-1}+$ etc. On désignera l'un de ces diviseurs par............. $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+$ etc. ; la division du 1[er] polynôme, par le 2[e], conduira à un *reste*, $\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+$ etc. Les valeurs des n inconnues, a, b, etc., seront données par les n équations, $\alpha=0$, $\beta=0$, etc., car le *reste* doit être nul, quel que soit x. Le polynôme, x^m+etc., ayant m facteurs *premiers*, $x-a_{\prime}$, $x-b_{\prime}$, etc., (n° 335); *le nombre des diviseurs du degré n* de ce polynôme, sera $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots n}$, (n° 252).

519. Le polynôme $x^{2m}+$etc., étant toujours décomposable en m facteurs réels du second degré (n° 517), si l'on divise ce polynôme par x^2+ax+b, on parviendra au *reste* $\alpha x+\beta$; les équations, $\alpha=0$, $\beta=0$, admettront donc au moins m solutions réelles. On pourra donc trouver ces solutions (n° 380). Chaque facteur réel du second degré, égalé à zéro, donnera deux racines de l'équation (1)...$x^{2m}+$etc.$=0$. *On obtiendra donc les racines imaginaires de l'équation* (1). Si l'équation proposée est, (2)...$x^4+x^2+2x+6=0$, la division du 1[er] membre, par x^2+ax+b, conduira au *reste*......... $(2+2ab-a-a^3)x+b^2-(a^2+1)b+6$; le quotient sera, $x^2-ax+1+a^2-b$. L'élimination de b, entre les équations .... (3)...$2+2ab-a-a^3=0$, (4)...$b^2-(a^2+1)b+6=0$, donnera....... $a^6+2a^4-23a^2-4=0$. Les racines commensurables de cette équation, sont $+2$ et -2. Faisant $a=2$, l'équation (3) donnera $b=2$. Substituant ces valeurs de a et de b, dans le diviseur et dans le quotient, on trouvera que le 1[er] membre de l'équation (2) est le produit de, x^2+2x+2, par x^2-2x+3. Ces facteurs égalés à zéro, détermineront les quatre racines de l'équation (2).

*520. Pour *résoudre l'équation* (1).. $x^3+3px-2q=0$, on fera $x=y+z$. L'équation (1) donnera, $(y^3+z^3-2q)+3(y+z)(yz+p)=0$, et il existera des valeurs de l'indéterminée z, qui feront dépendre la résolution de l'équation (1), de celle d'une équation du second degré. En effet; on peut supposer, (2)... $y^3+z^3=2q$; d'où (3)... $yz=-p$.

On ne devra prendre que les valeurs de y et de z, qui satisferont à ces deux équations. Or, l'équation (2) donne la somme des quantités, y^3, z^3; il est donc naturel de chercher le produit de ces quantités, car pour trouver deux quantités, lorsqu'on en connaît la somme et le produit, il suffit de résoudre une équation du second degré (n° 340). Or, l'équation (3) donne, (4)... $y^3\times z^3=-p^3$. Regardant y^3 et z^3 comme les racines de l'équation, $t^2-mt+n=0$, on aura (n° 338), $m=y^3+z^3=2q$ et $n=y^3z^3=-p^3$. L'équation en t deviendra, $t^2-2qt-p^3=0$; d'où, $t=q\pm\sqrt{q^2+p^3}$. Donc........

$$(5)\ldots y^3 = q + \sqrt{q^2+p^3} = A^3 \text{ et } z^3 = q - \sqrt{q^2+p^3} = B^3.$$

On en déduira (nº 391) .....

$$y = A,\ y = A\alpha,\ y = A\alpha^2;\ z = B,\ z = B\alpha,\ z = B\alpha^2.$$

Ces équations déterminent neuf valeurs de $y+z$, ce qui paraît conduire à neuf valeurs de x; mais y et z devant satisfaire à l'équation (3), on ne doit prendre que les valeurs de y et de z, dont le produit est réel. Ce qui donne.. ..

$$(6)\ldots\ x = A+B = a,\ x = A\alpha + B\alpha^2 = b,\ x = A\alpha^2 + B\alpha = c,\ (*).$$

Substituant pour A et B, leurs valeurs tirées des formules (5), on obtiendra les trois racines, a, b, c, de l'équation (1). Pour discuter ces racines, on remplacera α et α^2, par leurs valeurs (nº 390), ce qui donnera......

$$(9)\ldots \left\{\begin{array}{l} a = A+B;\ b = -\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B)\sqrt{-3}; \\ c = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B)\sqrt{-3}.\ \text{On a,} \end{array}\right\}$$

$$(10)\ldots\ A = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}};\ B = \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

* 521. 1º. Lorsque q^2+p^3 sera positif, A et B seront réels et inégaux;

(*) A et B désigneront toujours les racines cubiques *arithmétiques* de $q+\sqrt{q^2+p^3}$ et de $q-\sqrt{q^2+p^3}$. De sorte que......

$$A^3 \times B^3 = (q+\sqrt{q^2+p^3})(q-\sqrt{q^2+p^3}) = -p^3 \text{ et } A\times B = -p.$$

Si l'on veut expliquer pourquoi l'algèbre conduit à des valeurs étrangères de y et de z, on observera que les valeurs de y et de z qui conviennent à l'équation (1), doivent satisfaire aux équations (2) et (3). Mais, on a tiré y et z des équations (2) et (4), et l'équation (4) donne, $yz = -p$, $yz = -p\alpha$, $yz = -p\alpha^2$. On a donc introduit les valeurs de y et de z qui satisfont aux combinaisons de ces deux dernières équations, avec l'équation (2). On ne doit donc admettre que les valeurs de y et de z, dont le produit est réel. Les valeurs de y et de z, dont le produit est $-p\alpha$, ou $-p\alpha^2$, donnent les racines de l'équation (7).. $x^3+3p\alpha x-2q=0$, ou de l'équation (8).. $x^3+3p\alpha^2 x-2q=0$.

Les quantités A et B, ne contenant que le cube de p, les racines de l'équation (1) ne renfermeront que p^3. Or, les cubes de p, de $p\alpha$ et de $p\alpha^2$, sont les mêmes; on ne peut donc pas résoudre l'équation (1), sans résoudre en même tems les équations (7) et (8). Toutes les méthodes conduiront donc aux neuf racines de ces trois équations.

a sera réel, b et c seront imaginaires; 2°. quand q^2+p^3 sera zéro; a, b, c, seront réels, et les racines, b, c, seront égales.

3°. Lorsque, q^2+p^3, sera négatif, p sera un nombre négatif $-p_{,}$. Soit, $p_{,}^3-q^2=m^2$; m sera réel, on aura $A^3=q+m\sqrt{-1}$, $B^3=q-m\sqrt{-1}$; A et B seront imaginaires. Dans ce cas, *les trois racines seront réelles* (*). En effet; soit.....

$$(11)\ldots\ A^3=q+m\sqrt{-1}=n(\cos 3t+\sqrt{-1}\sin 3t).$$

On aura, $q=n\cos 3t$, $m=n\sin 3t$, et cette transformation sera possible, si les deux dernières équations donnent des valeurs réelles de n et t. Supposant le *rayon* égal à l'unité, on trouve, $q^2+m^2=n^2=p_{,}^3$. Or, $p_{,}$ est positif; n est donc réel. Mais, $\cos 3t=\frac{q}{n}=\frac{q}{\sqrt{p_{,}^3}}$ et l'inégalité $q^2<p_{,}^3$, démontre que cette valeur réelle de $\cos 3t$, est moindre que le *rayon* 1; l'angle t est donc réel. La formule (11), donne (n° 397), $A=(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)\sqrt[2]{p_{,}}$, car $\sqrt[3]{n}=\sqrt[2]{p_{,}}$. La valeur de B ne différant de celle de A, que par le signe de $\sqrt{-1}$, on a, $B=(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)\sqrt[2]{p_{,}}$. De sorte que les formules (9) deviennent......

(*) Ce cas a reçu le nom de *cas irréductible*, parce qu'on n'est pas encore parvenu à exprimer les racines, par un nombre fini de termes algébriques réels. On peut *déterminer la nature des racines de l'équation* .... (1)...$x^3+3px-2q=0$, *sans résoudre cette équation*. En effet; si a désigne la racine réelle de l'équation (1), on aura $a^3+3pa-2q=0$; d'où, $(x^3-a^3)+3p(x-a)=0$. Divisant par $x-a$, et égalant le quotient à zéro, les deux autres racines b et c, dépendront de l'équation, $x^2+ax+a^2+3p=0$. Ces racines seront, $x=\frac{1}{2}\left\{-a\pm\sqrt{-3(a^2+4p)}\right\}$. Or, en effectuant le produit de (a^2+4p), par $(a^2+p)^2$, et observant que l'équation, $a^3+3pa=2q$, donne $a^6+6pa^4+9p^2a^2=4q^2$, on trouvera $(a^2+4p)=\frac{4(q^2+p^3)}{(a^2+p)^2}$. Substituant cette valeur de a^2+4p, dans l'expression des racines b et c, on trouvera.....

$$b=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{a^2+p}\sqrt{-3(q^2+p^3)},\quad c=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{a^2+p}\sqrt{-3(q^2+p^3)}.$$

Ces formules démontrent les propriétés du n° 521. En effet; la racine a étant toujours réelle; lorsque q^2+p^3 est positif, b et c sont imaginaires; quand $q^2+p^3=0$, les racines, b, c, sont réelles et égales; lorsque q^2+p^3 est négatif, b et c sont réels.

$a=2\sqrt{p_{,}}\times\cos t; -b=\sqrt{p_{,}}\times(\cos t+\sqrt{3}\sin t); -c=\sqrt{p_{,}}\times(\cos t-\sqrt{3}\sin t)$.

Les trois racines, a, b, c, seront donc effectivement réelles. Observant que *sin* $30^\circ=\frac{1}{2}$ et que *cos* $30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, (la circonférence est divisée en 360 *degrés*), on trouvera......

$$-b=2\sqrt{p_{,}}\sin(30^\circ+t) \text{ et } -c=2\sqrt{p_{,}}\sin(30^\circ-t).$$

Quand le *rayon* est r, on a......

$$(12)\ldots\left\{\begin{array}{l}\cos 3t=\dfrac{qr}{\sqrt{p_{,}^3}};\ a=\dfrac{2\sqrt{p_{,}}}{r}\cos t;\\ \quad -b=\dfrac{2\sqrt{p_{,}}}{r}\sin(30^\circ+t),\ -c=\dfrac{2\sqrt{p_{,}}}{r}\sin(30^\circ-t).\end{array}\right.$$

Lorsque q sera un nombre positif, la valeur de *cos* $3t$ sera positive et les *tables* donneront le plus petit des angles qui ont $\frac{qr}{\sqrt{p_{,}^3}}$ pour cosinus. Désignant cet angle par $3t_{,}$, on aura, $3t=3t_{,}\pm 360^\circ\times n$. D'où, $t=t_{,}\pm 120^\circ\times n$. La division du nombre entier n, par 3, ne pouvant donner que l'un des *restes*, 0, 1, 2, on en déduira que q étant positif, les trois racines de l'équation (1)... $x^3-3p_{,}x-2q=0$, sont $\frac{2}{r}\sqrt{p_{,}}\times\cos t_{,}$ et $-\frac{2}{r}\sqrt{p_{,}}\times\sin(30^\circ\pm t_{,})$. L'équation (13).. $x^3-3p_{,}x+2q=0$, se déduisant de l'équation (1), en changeant le signe de x; lorsque q sera un nombre négatif $-q_{,}$, les racines de l'équation (1), seront $-\frac{2}{r}\sqrt{p_{,}}\cos t_{,}$ et $+\frac{2}{r}\sqrt{p_{,}}\times\sin(30^\circ\pm t_{,})$.

L'angle $t_{,}$ sera donné par la formule, $\cos 3t_{,}=\frac{rq_{,}}{\sqrt{p_{,}^3}}$.

* 522. On pourrait résoudre l'équation, (1)... $x^4+px^2+qx+r=0$, par une méthode analogue à celle du n° 520, en faisant $x=y+z+t$; mais on parviendra plus facilement au résultat en décomposant l'équation (1) en deux équations du second degré. L'équation proposée donne, $x^4+px^2=-qx-r$. On rendrait le 1er membre un quarré en ajoutant $\frac{1}{4}p^2$, mais le 2e membre ne pouvant devenir un quarré que lorsqu'il renferme x^2, on ajoutera zx^2 à chaque membre, et complétant ensuite le quarré du 1er membre, il viendra.....

$$(2)\ldots\left(x^2+\frac{p+z}{2}\right)^2=zx^2-qx+\frac{(p+z)^2-4r}{4}.$$

Le 2e membre sera un quarré, si l'indéterminée z satisfait à la condition, (n° 216), (3)... $z[(p+z)^2-4r]=q^2$. D'où, (4)... $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$;

et l'équation (2) donnera, (5)... $x^2+\frac{1}{2}(p+z)=\pm\left(x\sqrt{z}-\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{z}}\right)$.

Résolvant les deux équations qui résultent du double signe, on trouvera....

$$(6)\ldots\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{z}\pm\sqrt{-(z+2p)-2q\sqrt{\frac{1}{z}}}\right), \\ x=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z}\pm\sqrt{-(z+2p)+2q\sqrt{\frac{1}{z}}}\right). \end{array}\right.$$

L'équation (4) ayant toujours une racine réelle positive $z_{,}$, (n° 352), on fera $z=z_{,}$, dans les formules (6); ce qui donnera les racines, a, b, c, d, de l'équation (1). Par exemple, pour résoudre l'équation $y^4-4y^3+9y^2-62y+104=0$, on fera $y=x+1$, (n° 498); ce qui donnera, $x^4+3x^2-52x+48=0$; donc, $p=3, q=-52, r=48$, l'équation (4) deviendra, $z^3+6z^2-183z-2704=0$; la racine réelle positive de cette dernière équation sera $z_{,}=16$. Les formules (6), donneront, $x=3$, $x=1$, $x=2(-1\pm\sqrt{-3})$. Donc, $y=4$, $y=2$, $y=-1\pm2\sqrt{-3}$.

* 523. *La valeur de z devait dépendre d'une équation du troisième degré*, car les racines de l'équation (5) étant, a, b, c, d, le coefficient $\pm\sqrt{z}$ de x, désigne la somme de deux quelconques de ces racines; z a donc six valeurs, $(a+b)^2$, $(c+d)^2$, $(a+c)^2$, $(b+d)^2$, $(a+d)^2$, $(b+c)^2$. Or, $a+b+c+d=0$, (n° 338); z n'a donc que trois valeurs différentes, $(a+b)^2$, $(a+c)^2$, $(a+d)^2$. Ces trois valeurs sont les racines de l'équation (4). Cette dernière équation a reçu le nom de *réduite*.

* 524. Pour *déterminer la nature des racines*, a, b, c, d, on introduira les trois racines, $z_{,}, z_{,,}, z_{,,,}$, de la *réduite*, dans les formules (6). Or, (n° 338), $z_{,}+z_{,,}+z_{,,,}=-2p$, $z_{,}z_{,,}z_{,,,}=q^2$; d'où, $-(z_{,}+2p)=z_{,,}+z_{,,,}$, et $2q\sqrt{\frac{1}{z_{,}}}=2\sqrt{z_{,,}z_{,,,}}$. Faisant $z=z_{,}$, dans les formules (6), substituant les valeurs de $(z_{,}+2p)$ et de $2q\sqrt{\frac{1}{z_{,}}}$, et extrayant la racine qui est précédée du double signe, on trouvera....

$$(7)\ldots x=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{z_{,}}\pm(\sqrt{z_{,,}}-\sqrt{z_{,,,}})\right\},\quad x=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{z_{,}}\pm(\sqrt{z_{,,}}+\sqrt{z_{,,,}})\right\}.$$

Les formules (7) démontrent que *les valeurs de x ne changent pas lorsqu'on change l'une quelconque des racines*, $z_{,}, z_{,,}, z_{,,,}$, *en une autre*. La racine $z_{,}$, étant réelle et positive, le produit $z_{,,}z_{,,,}$ est réel et positif; car $z_{,}z_{,,}z_{,,,}=q^2$. Par conséquent; 1°. lorsque les racines, $z_{,,}, z_{,,,}$, seront réelles, elles ne pourront être que toutes deux positives, ou toutes deux négatives et inégales, ou négatives et égales. Dans le 1er cas, les quatre valeurs de x seront réelles; dans le 2e cas, ces valeurs seront imaginaires, et dans le 3e cas, les deux premières valeurs de x seront réelles et égales, tandis que les deux autres seront imaginaires. 2°. Quand $z_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime\prime}$ seront imaginaires, on aura, (nos 513, 509 et 511), $\sqrt{z_{\prime\prime}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\sqrt{z_{\prime\prime\prime}} = \alpha - \beta\sqrt{-1}$ (α et β sont réels). De sorte que les deux premières valeurs de x seront imaginaires et les deux autres réelles. On en déduit cette règle générale : *Lorsque les trois racines de la réduite sont réelles et positives, les quatre racines de l'équation du quatrième degré sont réelles; lorsque les trois racines de la réduite étant réelles, l'une est positive et les deux autres négatives et inégales, les quatre racines sont imaginaires; enfin, lorsque deux racines de la réduite sont égales et négatives, ou imaginaires, l'équation du quatrième degré a deux racines réelles et deux imaginaires.* Si l'on fait $z = z_{\prime}$, les formules (5) donneront les deux facteurs réels du second degré de l'équation (1) du no 522.

* 525. *L'équation générale du degré m, entre deux inconnues x et y, est de la forme* (1)....$x^m + (a + by)x^{m-1} + \text{etc.} = 0$; (no 316). *Quand les coefficiens, a, b, etc., sont des nombres donnés, cette équation admet une infinité de solutions*, car chaque valeur arbitraire de y, donne m valeurs de x correspondantes (no 335). *Lorsque les coefficiens, a, b, etc., sont indéterminés, on peut les déterminer en se donnant* $\frac{1}{2}m(m+3)$ *solutions arbitraires de l'équation* (1), car le nombre total des coefficiens, a, b, etc., est $2+3+4+\ldots+(m+1)$, ou $\frac{1}{2}m(m+3)$, (no 446), et chaque solution donne une équation entre ces coefficiens.

Remarque. Les équations qui déterminent les coefficiens, a, b, etc., sont du premier degré. Quand ces équations sont indéterminées, il reste des coefficiens indéterminés dans l'équation (1), et lorsque des équations sont incompatibles, on ne peut admettre les solutions qui conduisent à ces équations.

* 526. *Pour composer deux équations générales en x et y, l'une du degré m, l'autre du degré n, de sorte que ces équations admettent le plus grand nombre possible de solutions communes, il suffit de regarder tous les coefficiens de x et y, comme des indéterminées* (no 525). *Quand m est plus grand que n, on peut prendre arbitrairement* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *solutions communes*, car ces solutions devant satisfaire à l'équation du degré n, détermineront les $\frac{1}{2}n(n+3)$ coefficiens de cette équation, (no 525). Les $\frac{1}{2}m(m+3)$ coefficiens de l'autre équation, ne devant satis-

faire qu'à $\frac{1}{2}n(n+3)$ conditions, *il restera* $\frac{1}{2}m(m+3)-\frac{1}{2}n(n+3)$ *coefficiens indéterminés dans l'équation du degré m. Lorsque* $m=n$, *on prend arbitrairement* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$, *solutions communes;* il reste un coefficient indéterminé dans chaque équation; et donnant des valeurs différentes à ces deux coefficiens, on obtient deux équations différentes qui admettent les solutions données. La remarque du n° 525 s'applique à cette règle.

* 527. Le principe du n° 504 donne le moyen de *parvenir directement à l'équation finale qui résulte de l'élimination d'une inconnue, entre deux équations à deux inconnues.* En effet; soit proposé d'éliminer x entre les équations.........

$$(1)\ldots x^2+px+q=0,\quad (2)\ldots x^2+p_{,}x+q_{,}=0.$$

$(p, q, p_{,}, q_{,},$ sont des fonctions de y).

On désignera les racines de l'équation (1), par a et b, et les racines de l'équation (2), par α et β; on aura (n° 335)

$$(3)\ldots x^2+px+q \mp (x-a)(x-b);\ (4)\ldots x^2+p_{,}x+q_{,} \mp (x-\alpha)(x-\beta).$$

Les valeurs de y, qui satisfont aux équations (1) et (2), doivent introduire un commun diviseur, fonction de x, entre les premiers membres de ces équations; et réciproquement, les valeurs de y qui introduisent un commun diviseur fonction de x, sont bonnes. Une valeur de y, qui convient aux équations proposées, doit donc satisfaire à l'une des équations......

$$(5)\ldots\ \alpha=a,\ \alpha=b,\ \beta=a,\ \beta=b.$$

Réciproquement, toute valeur de y qui satisfera à l'une des équations (5), conviendra aux équations (1) et (2), car en vertu des équations (3) et (4), cette valeur de y introduira un commun diviseur, fonction de x, entre les premiers membres des équations (1) et (2). L'équation finale en y sera donc...

$$(6)\ldots(\alpha-a)\times(\alpha-b)\times(\beta-a)\times(\beta-b)=0.$$

Si l'on fait successivement, $x=\alpha$ et $x=\beta$, dans l'identité (3), on trouvera...

$$\alpha^2+p\alpha+q \mp (\alpha-a)(\alpha-b);\ \beta^2+p\beta+q \mp (\beta-a)(\beta-b).$$

L'équation finale en y est donc (7)... $(\alpha^2+p\alpha+q)(\beta^2+p\beta+q)=0.$

Cette équation ne changeant pas, lorsqu'on change α en β et β en α, si l'on effectue les multiplications indiquées, les termes du produit, qui multiplieront les diverses fonctions de p et q, seront nécessairement des fonctions algébriques rationnelles et symétriques des racines, α, β, de l'équation (2); on pourra donc exprimer ces fonctions au moyen des coefficiens, $p_{,}$, $q_{,}$, de l'équation (2), (nº 504). Et en effet, l'équation (7) donne....

$$(8)\ldots\alpha^2\beta^2+\alpha\beta(\alpha+\beta)p+(\alpha^2+\beta^2)q+(\alpha+\beta)pq+\alpha\beta p^2+q^2=0.$$

Mais, $\alpha\beta=q_{,}$; $\alpha+\beta=-p_{,}$; $p^2_{,}=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$; $\alpha^2+\beta^2=p_{,}^2-2\alpha\beta=p_{,}^2-2q_{,}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (8), on obtiendra l'équation finale...

$$(9)\ldots q^2_{,}-pq_{,}p_{,}+q(p_{,}^2-2q_{,})-pqp_{,}+p^2q_{,}+q^2=0.$$

* 528. *Lorsqu'on élimine une inconnue, entre deux équations et deux inconnues; le degré de l'équation finale ne peut jamais être plus élevé que le produit des degrés des équations entre lesquelles on élimine.* En effet; pour éliminer x entre les équations,

$$(1)\ldots\; x^m+q_1x^{m-1}+q_2x^{m-2}+\text{etc.}=0,\quad(2)\ldots x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\text{etc.}=0;$$

on désignera les m racines de l'équation (1), par a, b, $c\ldots l$, et l'équation finale en y sera (nº 527),

$$(a^n+p_1a^{n-1}+\ldots+p_\alpha a^{n-\alpha}+\text{etc.})(b^n+\ldots+p_\beta b^{n-\beta}+\text{etc.})\ldots(l^n+\ldots+p_\omega l^{n-\omega}+\text{etc.})=0.$$

L'équation (1) étant du degré m et l'équation (2) du degré n, les plus forts exposans de y, dans p_1, $p_2,\ldots,p_r$, sont respectivement, $1, 2,\ldots,r$, (nº316). Si l'on effectue les multiplications indiquées, un terme quelconque du produit sera,

$$p_\alpha a^{n-\alpha}\times p_\beta b^{n-\beta}\times\ldots\times p_\omega l^{n-\omega},\ \text{ou}\ (p_\alpha p_\beta\ldots p_\omega)(a^{n-\alpha}b^{n-\beta}\ldots l^{n-\omega}).$$

Le produit étant une fonction symétrique des racines, $a, b,\ldots l$; le coefficient de $(p_\alpha p_\beta\ldots p_\omega)$, sera la somme de tous les termes de la forme $(a^{n-\alpha}b^{n-\beta}\ldots l^{n-\omega})$, c'est-à-dire $T(a^{n-\alpha}b^{n-\beta}\ldots l^{n-\omega})$. Le *terme général* du produit, sera donc, $P=(p_\alpha p_\beta\ldots p_\omega)\times T(a^{n-\alpha}b^{n-\beta}\ldots l^{n-\omega})$. Or, les formules, (8), (9), (10), des nºs 501 et 504, démontrent que les plus forts exposans de y, dans s_r et dans $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc.), sont r et $(\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.})$. Le plus fort exposant de y dans P, sera donc.......................
$(\alpha+\beta\ldots+\omega)+(n-\alpha+n-\beta+\ldots+n-\omega)$, ou $n+n+n+$ etc., ou $n\times m$, car le nombre des facteurs, $a^{n-\alpha}$, $b^{n-\beta}$, etc., est m. Le principe est donc démontré.

* 529. *Problème.* On propose de *transformer* $\frac{X}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ *et* $X\sqrt{a+bx+cx^2}$, *en des fonctions rationnelles de z; (X désigne une fonction rationnelle de x). Il suffit d'égaler le radical à une fonction rationnelle de x et de z telle qu'on en déduise une valeur de x, rationnelle en z.* On y parvient en posant, $\sqrt{a}=\alpha$ et $\sqrt{a+bx+cx^2}=xz+\alpha$, car on en déduit, $x=\frac{b-2\alpha z}{z^2-c}$ et $\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{bz-\alpha(c+z^2)}{z^2-c}$. Lorsque a sera positif, α sera réel. Quand a sera un nombre négatif $-a_{,}$, α sera imaginaire et l'on pourra souvent éviter les imaginaires. En effet; lorsque c sera positif, on fera $\sqrt{cx^2\pm bx-a_{,}}=z-x\sqrt{c}$, et l'on en déduira x en fonction rationnelle de z; quand c sera un nombre négatif $-c_{,}$, on cherchera les racines, β, γ, de l'équation $-c_{,}x^2\pm bx-a_{,}=0$; ce qui donnera, $-c_{,}x^2\pm bx-a_{,}=c_{,}(x-\beta)(\gamma-x)$; lorsque β et γ seront réels, on posera, $\sqrt{c_{,}(x-\beta)(\gamma-x)}=(x-\beta)z$; on en déduira une valeur de x rationnelle en z (*); quand α et β seront imaginaires, il sera impossible d'éviter les imaginaires, de sorte que l'on fera............... $\sqrt{-c_{,}x^2\pm bx-a_{,}}=xz+\sqrt{-a_{,}}$.

* 530. Pour *résoudre les équations dans lesquelles les inconnues entrent sous des radicaux*, on commence par faire disparaître les radicaux en égalant chaque radical à une nouvelle inconnue. S'il s'agit de l'équation, (1)... $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; on fera, $\sqrt[3]{2-x}=y$ et $\sqrt{x-1}=z$; d'où (2)... $y^3=2-x$, $z^2=x-1$, $y=1-z$. Eliminant x et y entre les équations (2), on trouvera, $z^3-4z^2+3z=0$. Cette équation donnera, $z=0$, $z=1$, $z=3$. Or, $x=1+z^2$; les valeurs de x sont donc, $+1$, $+2$ et $+10$ (**). Ces trois valeurs de x déterminent trois *solutions arithmétiques* de l'équation (1). L'équation (3).. $\sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{x-1}$, conduirait aux mêmes valeurs de x,

---

(*) Si le radical proposé était $\sqrt{\pm bx\pm cx^2}$, on ferait donc......... $\sqrt{\pm bx\pm cx^2}=zx$.

(**) L'équation finale en x est donc, $(x-1)(x-2)(x-10)=0$, ou... (4)... $x^3-13x^2+32x-20=0$. On parvient directement au même résultat, en faisant successivement disparaître les radicaux contenus dans l'équation (1). A cet effet, on élevera les deux membres de cette équation au cube; il viendra, $2-x=3x-2-(2+x)\sqrt{x-1}$. Pour faire disparaître $\sqrt{x-1}$, on laissera ce radical seul dans un membre, ce qui doncar en posant, $\sqrt[3]{2-x}=y$ et $-\sqrt{x-1}=z$, on parviendrait aux équations (2). L'équation (3) n'admet donc aucunes solutions arithmetiques. L'équation $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$, donnera $x=9$; l'équation $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=5$, n'admettrait donc pas de solutions arithmétiques. L'équation............ (4)... $\sqrt{x+1}=2x-4$, donne, $x+1=(2x-4)^2$, ou, (5)..$4x^2-17x+15=0$. On en déduit, $x=3$ et $x=\frac{5}{4}$; la 1re valeur de x, fournit une solution arithmétique de l'équation (4); la 2e valeur de x, serait une solution arithmétique de l'équation, (6)... $-\sqrt{x+1}=(2x-4)$. Et en effet, le quarré de $+\sqrt{x+1}$, étant le même que celui de $-\sqrt{x+1}$, les équations (4) et (6), doivent conduire à la même équation rationnelle en x. Les racines, 3 et $\frac{5}{4}$, de cette dernière équation, doivent donc donner les solutions des équations (4) et (6). En général : *Lorsqu'on fait disparaître les radicaux contenus dans une équation, l'équation qui en résulte convient à toutes les valeurs dont ces radicaux sont susceptibles.*

* 531. Les mêmes procédés s'appliquent à deux équations entre deux inconnues. Si les équations proposées sont

$$(1)\ldots\sqrt{x-y}=y^2-x,\quad (2)\ldots\sqrt[3]{x+1}=5-y,$$

on fera, $\sqrt{x-y}=z$, $\sqrt[3]{x+1}=t$; d'où

$$(3)\ldots x-y=z^2, x+1=t^3, z=y^2-x, t=5-y.$$

Éliminant, x, y et z, entre les équations (3), on trouvera.......... $t^6-2t^5+21t^4-73t^3+152t^2-521t+682=0$; $t=2$ satisfait à cette équation; or, $x=t^3-1$ et $y=5-t$; donc $x=7$ et $y=3$. Ces valeurs de x et y, donnent une solution arithmétique des équations (1) et (2). Dans cet exemple, on peut éviter d'introduire des nouvelles inconnues, car en élevant les deux membres de l'équation (1), au quarré, et ceux de l'équation (2) au cube, on trouve les équations rationnelles................

$$(4)\ldots x^2-(2y^2+1)x+(y^3+1)y=0, (5)\ldots x=124-75y+15y^2-y^3.$$

L'élimination de x entre ces deux dernières équations, conduit à l'equation nale......

---

nera $(2+x)\sqrt{x-1}=4(x-1)$; élevant ensuite les deux membres au quarré, on trouvera, $(2+x)^2(x-1)=16(x-1)^2$; cette dernière équation conduit à l'équation (4).

$$(6)\ldots y^6-28y^5+346y^4-2347y^3+9082y^2-18524y+15252=0,$$

$y=3$, satisfait à cette équation et l'équation (5) donne $x=7$.

Pour résoudre les équations......

$$(7)\ldots \sqrt[3]{z^2}-2\sqrt[3]{z}\,\sqrt{t}+t-1=0,\ \sqrt[3]{z^2}+6\sqrt{t}-t-9=0,$$

on fera, $z=x^3$ et $t=y^2$. Les équations (7) deviendront....

$$(8)\ldots x^2-2yx+(y^2-1)=0,\ x^2+6y-y^2-9=0.$$

Les équations (8) donneront les deux *couples*, $y=2, x=1; y=1, x=2$; or $t=y^2$ et $z=x^3$; les équations (7) admettent donc ces deux solutions, $t=4$, $z=1$ et $t=1$, $z=8$.

* 532. *Quand l'hypothèse $x=\alpha$, réduit $f(x)$ à zéro; cette fonction de x est divisible par $(x-\alpha)^m$; (l'exposant m est un nombre positif).* En effet; si l'on suppose $x=\alpha+h$, dans $f(x)$, on obtiendra une fonction $f(\alpha+h)$, qui se réduira à zéro, lorsque h sera nul. Développant donc $f(\alpha+h)$ en une *série* qui procède suivant les puissances ascendantes de h (*), tous les exposans de h seront plus grands que zéro, car les termes indépendans de h, et ceux qui contiendraient des puissances négatives de h, ne disparaîtraient pas quand h serait nul. On aura donc....

$$f(\alpha+h)=qh^m+ph^{m+\delta}+\text{etc.}=h^m(q+ph^\delta+\text{etc.});\ \delta>0.$$

Mettant pour h sa valeur $(x-\alpha)$, il viendra....

$$f(x)=(x-\alpha)^m\times[q+p(x-\alpha)^\delta+\text{etc.}]=(x-\alpha)^m\times Q.$$

$f(x)$ est donc exactement divisible par $(x-\alpha)^m$; et pour $x=\alpha$, le quotient Q se réduit à une quantité q, qui ne peut jamais être nulle ni infinie. Lorsque $f(x)$ ne contient que des puissances entières positives de x, l'exposant m est un nombre entier (n° 313).

* 533. Nous avons vu (n^os^ 137 et 215), qu'une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, peut être déterminée ou indéterminée. Nous allons donner la théorie générale des fractions qui deviennent $\frac{0}{0}$. *Lorsque l'hypothèse $x=\alpha$, réduit les deux termes de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, à zéro; on a*, $f(x)=Q(x-\alpha)^m$,

(*) On suppose que la fonction $f(\alpha+h)$, puisse se développer en une série qui procède suivant les puissances de h. Nous démontrerons cette propriété dans le *Calcul différentiel*.

$\varphi(x)=R(x-\alpha)^n$, et pour $x=\alpha$, les fonctions Q et R, prennent des valeurs, q et r, qui ne sont ni nulles ni infinies, (nº 532). *On demande quelle serait la valeur de cette fraction, si après avoir supprimé le plus grand commun diviseur $(x-\alpha)^s$, entre $(x-\alpha)^m$ et $(x-\alpha)^n$, on faisait $x=\alpha$ dans le résultat.* On peut avoir, $m=n$, ou $m>n$, ou $m<n$; les valeurs correspondantes de la fraction proposée, sont, $\frac{Q}{R}$, $\frac{Q}{R}(x-\alpha)^{m-n}$, $\frac{Q}{R(x-\alpha)^{n-m}}$.

Faisant $x=\alpha$, cette fraction deviendra $\frac{q}{r}$, ou o, ou l'infini. Pour mettre en évidence les facteurs, $(x-\alpha)^m$, $(x-\alpha)^n$, il suffit de transformer le binôme $(x-\alpha)$, en un monôme. On supposera donc, $x-\alpha=h$, d'où $x=\alpha+h$. Mettant $\alpha+h$ au lieu de x, dans $f(x)$ et $\varphi(x)$; développant les fonctions, $f(\alpha+h)$, $\varphi(\alpha+h)$, suivant les puissances positives et croissantes de h, on trouvera.....

$$f(\alpha+h)=qh^m+q_{\prime}h^{m+\delta}+\text{etc.},\quad \varphi(\alpha+h)=rh^n+th^{n+\gamma}+\text{etc.}$$

Divisant les deux termes de la fraction $\frac{f(\alpha+h)}{\varphi(\alpha+h)}$, par la plus haute puissance possible de h, et supposant ensuite $h=0$, le résultat sera la valeur de la fraction demandée. Cette valeur sera finie, ou nulle, ou infiniment grande, selon que l'on aura, $m=n$, ou $m>n$, ou $m<n$. Ainsi, $x=2$, réduisant les fractions......

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}},\quad \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}},\quad \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}},$$

à $\frac{0}{0}$; on fera $x=2+h$; on extraira la racine quarrée et la racine cubique de $2+h$; on élevera $(2+h)$ au quarré; on supprimera les facteurs communs aux deux termes de chaque fraction, et supposant ensuite $h=0$, on trouvera que pour $x=2$, les valeurs des fractions proposées sont, $\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}$, o, et l'infini.

Remarque. Quand $\alpha=0$, on développe $f(x)$ et $\varphi(x)$, suivant les puissances croissantes de x. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, deviennent divisibles par une même puissance de x, et la division effectuée donne une fraction que l'hypothèse $x=0$, ne réduit plus à $\frac{0}{0}$. L'exemple du nº 215 est de cette espèce.

* 534. *Lorsque dans l'équation,* (1)... $z\times\varphi(x)=f(x)$, *l'hypothèse $x=\alpha$, réduit $f(x)$ et $\varphi(x)$, à zéro, on a, $f(x)=Q(x-\alpha)^m$ et $\varphi(x)=R(x-\alpha)^n$,* (nº 533).

Si le plus grand commun diviseur entre $(x-\alpha)^m$ *et* $(x-\alpha)^n$ *est* $(x-\alpha)^s$, *l'équation* (1), *donnera* (2)... $(zR_{,}-Q_{,})(x-\alpha)^s=0$; $R_{,}$ *et* $Q_{,}$ *désignent les quotiens des divisions de* $\varphi(x)$ *et de* $f(x)$, *par* $(x-\alpha)^s$. *On demande la valeur de z, correspondante à* $x=\alpha$ (**). Quand le facteur $(x-\alpha)^s$ ne sera pas étranger au problème qui aura conduit à l'équation (1), l'hypothèse $x=\alpha$ satisfera aux équations, (1), (2), quel que soit z; de sorte que la valeur correspondante de z, sera indéterminée. Cette valeur, déduite de l'équation (1), se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$. Quand le facteur $(x-\alpha)^s$ sera étranger à la question, on devra le supprimer, et faisant $x=\alpha$, dans $Q_{,}$ et $R_{,}$, l'équation $zR_{,}-Q_{,}=0$, donnera la valeur de z; cette valeur, sera toujours déterminée. On pourra calculer z, en cherchant la valeur de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, correspondante à $x=\alpha$; (n° 533).

* 535. *Remarque*. Lorsque $x-\alpha$, ou h, n'est pas zéro, la seule valeur de z qui puisse satisfaire aux équations (1) et (2), est $\frac{Q_{,}}{R_{,}}$. Quand h est très-petit et approche indéfiniment de zéro, $\frac{Q_{,}}{R_{,}}$ ou z, approche indéfiniment d'une certaine *limite* $\frac{q_{,,}}{r_{,,}}$, et l'on obtient cette *limite* en calculant la valeur de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, qui répond à $x=\alpha$, (n° 533). Cette *limite* de z peut servir *à mener les tangentes aux courbes*. En effet; soit $y^2=x$, l'équation d'une *parabole*; si les coordonnées de deux points, m', m'', de cette courbe, sont $x_{,}, y_{,}$, et $x_{,,}, y_{,,}$; on aura $y_{,}^2=x_{,}$, $y_{,,}^2=x_{,,}$, et l'équation de la droite s, menée par ces deux points, sera $y-y_{,}=\frac{y_{,,}-y_{,}}{y_{,,}^2-y_{,}^2}(x-x_{,})$. Soit, $\frac{y_{,,}-y_{,}}{y_{,,}^2-y_{,}^2}=a$. On en déduira, $(y_{,,}^2-y_{,}^2)\left(a-\frac{1}{y_{,,}+y_{,}}\right)=0$. Pour déterminer la position de la tangente t, au point m', on supposera que ce point étant fixe, m'' s'approche indéfiniment de m'; alors, $y_{,,}-y_{,}$ approchera indéfiniment de zéro, a approchera indéfiniment de la *limite* $\frac{1}{2y_{,}}$, et la *sécante*, s, approchera indéfiniment de la tangente t; la valeur de a, qui détermine la tangente, est donc $\frac{1}{2y_{,}}$. L'*équation de la tangente* est donc $y-y_{,}=\frac{1}{2y_{,}}(x-x_{,})$. Pour obtenir la limite $\frac{1}{2y_{,}}$ de a, il suffit de chercher la valeur de $\frac{y_{,,}-y_{,}}{y_{,,}^2-y_{,}^2}$, qui

(**) Lorsqu'on fera $x=\alpha$, les fonctions $Q_{,}$ et $R_{,}$ prendront des valeurs particulières, $q_{,,}$, $r_{,,}$: l'une des quantités, $q_{,,}$, $r_{,,}$, pourra être nulle, mais elles ne pourront pas être nulles en même tems.

répond à $y_{\prime\prime}=y_{\prime}$, (nº 533). La *normale*, menée par le point m', aura pour équation, $y-y_{\prime}=-2y_{\prime}(x-x_{\prime})$; de sorte que X désignant l'*abscisse* du point commun à la normale et à l'axe des x, on aura............ $(1)\ldots 2y_{\prime}\left(X-x_{\prime}-\frac{1}{2}\right)=0$. Tant que $y_{\prime}$ ne sera pas nul, X sera égal à $x_{\prime}+\frac{1}{2}$. Lorsque le point m' approchera indéfiniment du *sommet* de la parabole, $y_{\prime}$ et $x_{\prime}$ approcheront indéfiniment de zéro, X approchera indéfiniment de $\frac{1}{2}$. Mais, au *sommet*, $y_{\prime}$ et $x_{\prime}$ seront nuls; X sera donc indéterminé dans l'équation (1); cela devait arriver, car la *normale* se confondant alors avec l'axe des x, l'*abscisse* X du point commun à ces deux droites, est indéterminée.

* 536. ***Il existe des fractions qui ne se présentent pas sous la forme*** $\frac{0}{0}$, *et qui peuvent cependant s'y ramener.* En effet; lorsque, P, Q, R, désignant des fonctions quelconques de x, l'hypothèse $x=\alpha$, réduit R à zéro et rend P et Q infinis, la fraction $\frac{P}{Q}$ et le produit PR, ont des valeurs, que l'on peut déterminer par la méthode du nº 533, car en divisant successivement l'unité, par P et par Q, et désignant les quotiens par p et q, on aura $\frac{P}{Q}=\frac{q}{p}$ et $PR=\frac{R}{p}$; $x=\alpha$, réduira, p, q et R, à zéro; de sorte qu'il s'agira de calculer les valeurs des fractions, $\frac{q}{p}$, $\frac{R}{p}$, que l'hypothèse $x=\alpha$, réduit à $\frac{0}{0}$. Quand le facteur $(x-\alpha)^s$, sera étranger à la question, les fractions, $\frac{q}{p}$, $\frac{R}{p}$, seront déterminées, et la méthode du nº 533, donnera ces valeurs. Quand ce facteur ne sera pas étranger, les fractions, $\frac{q}{p}$, $\frac{R}{p}$, seront indéterminées. Par exemple, les deux termes de la fraction $\frac{\text{cotang } x}{\text{coséc } x}$, devenant infinis quand $x=0$, on fera $p=\frac{1}{\cot x}=\frac{\sin x}{\cos x}$; $q=\frac{1}{\text{coséc } x}=\sin x$. D'où, $\frac{\cot x}{\text{coséc } x}=\frac{q}{p}=\text{cosin } x$; l'hypothèse $x=0$, donnera $\frac{\cot x}{\text{coséc } x}=1$.

* 537. Je terminerai ces *notes*, en faisant connaître le degré d'exactitude que donne l'emploi des *tables* de logarithmes à n décimales (**).

1°. *Pour trouver le plus grand nombre entier N, que l'on doive mettre dans une table de logarithmes à n décimales; il suffit de prendre la plus*

(**) Les démonstrations du nº 537, sont dues à M. *Loupot*, professeur à l'*École Polymathique*.

petite valeur entière approchée du produit que l'on obtient en multipliant le module M, par 10^n; 2°. *la plus petite valeur entière approchée de* $\sqrt{N}$, *exprime le plus petit nombre entier de la table où l'on puisse commencer à regarder les différences entre les logarithmes, comme proportionnelles aux différences entre les nombres correspondans.* En effet; 1°. il est évident que *l'on ne doit mettre dans la table que les nombres entiers dont les logarithmes, à n décimales, sont différens.* La différence entre deux logarithmes consécutifs ne doit donc pas être moindre qu'une unité du n^{ieme} ordre décimal, ou que 10^{-n}. Soit, $l(y+1)-l(y)=10^{-n}=\delta$. On aura.......

$$(1)\ldots\ \delta = l\left(1+\frac{1}{y}\right) \text{ et } (2)\ldots\ \alpha^{\delta}=1+\frac{1}{y}. \text{ D'où, } y=\frac{1}{\alpha^{\delta}-1}.$$

(La *base* α est plus grande que l'unité). Or, (Algèbre, 2e section, nos 719 et 725),

$$\alpha^{\delta}=1+A\delta+\frac{1}{2}A^2\delta^2+\frac{1}{2.3}A^3\delta^3+\text{etc};\ M=\frac{1}{A}.$$

$$\text{Donc, } y=\frac{1}{A\delta+\frac{1}{2}A^2\delta^2+\text{etc.}}=\frac{1}{A\delta}-\left(\frac{\frac{1}{2}A\delta+\frac{1}{2.3}A^2\delta^2+\text{etc.}}{A\delta+\frac{1}{2}A^2\delta^2+\text{etc.}}\right).$$

Mais, la fraction précédée du signe —, est moindre que l'unité, car chaque terme du numérateur est plus petit que le terme correspondant du dénominateur; la valeur de y est donc comprise entre $\frac{1}{A\delta}$ et $\frac{1}{A\delta}-1$. Or, $\frac{1}{A\delta}=M\times 10^n$ et l'équation (2) démontre que selon que y diminue ou augmente, δ augmente ou diminue (n° 244. 2°). La différence entre les logarithmes de deux nombres entiers moindres que $M\times 10^n$, est donc plus grande qu'une unité du n^{ieme} ordre décimal; le premier principe est donc démontré.

2°. Pour qu'on puisse regarder les différences entre des logarithmes consécutifs, comme proportionnelles aux différences entre les nombres correspondans, il faut que les différences entre les logarithmes, diffèrent [illegible] d'une unité décimale du n^{ieme} ordre. En effet; soient, y, $y+1$, $y+2$, trois nombres entiers consécutifs de la *table*; x, x', x'', leurs logarithmes. On aura.....

$$y=\alpha^{x};\ y+1=\alpha^{x'};\ y+2=\alpha^{x''}. \text{ D'où, } \frac{y+1}{y}=\alpha^{x'-x} \text{ et } \frac{y+2}{y+1};=\alpha^{x''-x'}.$$

Or la proportion (3).... $(y+2)-(y+1) : (y+1)-y :: x''-x' : x'-x$, donne [illegible] $(x''-x')=0$. On ne pourra donc supposer les différences entre les nombres, proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres, [illegible] lorsque $(x'-x)-(x''-x')$, ne sera pas plus grand que 10^{-n}, car dans ce cas, la proportion donnera une valeur de $x'-x$, qui ne différera de la valeur exacte de $x'-x$, que d'une quantité moindre que 10^{-n}. Supposant donc, $(x'-x)-(x''-x')=\delta=10^{-n}$, on aura......

$$(4)\ldots\ \alpha^{\delta}=\left(\frac{y+1}{y}\right):\left(\frac{y+2}{y+1}\right)=\frac{y^2+2y+1}{y^2+2y}=1+\frac{1}{y^2+2y}.$$

Mais, l'équation (2) a donné, $y=M\times10^n-(1-\delta')$; ($\delta'$ est une quantité positive moindre que l'unité). L'équation (4) donnera donc.....

$$y^2+2y=M\times10^n-1+\delta';\ \text{d'où}\ (5)\ldots y+1=\sqrt{M\times10^n+\delta'}.$$

Or, la formule (4) démontre que y augmentant, δ diminue. La proportion (3) sera donc d'autant plus exacte, que y sera plus grand. L'équation (5) démontre donc le 2e principe.

Remarque. Lorsqu'on fera usage de nos tables de logarithmes à cinq décimales, on aura $n=5$, $\alpha=10$, $M=0{,}43429$, etc.; la plus petite valeur entière approchée de $M\times10^n$, sera 43429 et la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{M\times10^n}$, sera 208. De sorte que dans cette table, les nombres, 1, 2, 3, ..., 43429, auront des logarithmes différens, et la proportion du n° 478 sera vraie pour tous les nombres plus grands que 208; c'est-à-dire que cette proportion donnera une erreur qui sera moindre que 0,00001 (*). Par conséquent, dans une table de logarithmes à cinq décimales, il suffit de mettre les logarithmes des nombres entiers, 208, 209, ..., 2079, 2080. On en déduit facilement les logarithmes des nombres, 1, 2,.., 43429, (n° 479).

538. *Toute équation a une racine.* En effet; soit l'équation....

$$(1)\ldots x^m+px^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+sx+t=y,$$

dans laquelle m est un nombre entier positif et les coefficiens, $p,\ldots,s,t$, des quantités finies indépendantes de x et de y; *x sera nécessairement une fonction de y* et des coefficiens, $p,\ldots,s,t$, car dans le cas où x ne serait pas fonction de y, en désignant par β une valeur de x qui ne dépendrait pas de y, le polynôme déterminé, $\beta^m+p\beta^{m-1}+\ldots+s\beta+t$, serait égal à la fois, à toutes les valeurs arbitraires de y; ce qui est absurde. On a donc, $x=f(y,p,\ldots,s,t)$. Soit $y=0$; la valeur correspondante de x, sera une racine α, de l'équation...

$$(2)\ldots x^m+px^{m-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+sx+t=0;$$

de sorte que l'on aura, $\alpha^m+p\alpha^{m-1}+\ldots\ldots+s\alpha+t=0$; α ne sera pas nul, car t n'est pas zéro; α ne sera pas infini (n° 349). Le principe est donc démontré. (*Cette démonstration est due à M.* Dubourguet, *Professeur au Lycée Impérial*).

(*) La proportion du n° 478 est ainsi démontrée pour trois nombres entiers consécutifs. L'erreur sera moindre, lorsque l'on prendra deux nombres entiers consécutifs, y, $y+1$, et un nombre compris entre y et $y+1$.

FIN.

TABLE DES NOTES.

Calcul des quantités algébriques.

Équations du 1er degré.

Équations du second degré.

Puissances et racines.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

Résolution des équations numériques.

FIN DE LA TABLE.

REMARQUE. *Quand toutes les racines d'une équation* (1)...$f(x)=0$, *sont réelles*, l'équation au quarré des différences, (2)...$\varphi(y)=0$, n'a que des racines réelles positives; *l'équation* (2) *n'a donc que des variations de signes* (no 338). Réciproquement, *lorsque l'équation* (2) *ne renferme que des variations de signes*, y n'a pas de valeurs réelles négatives (no 494); *toutes les racines de l'équation* (1) *sont donc réelles*, car dans le cas où cette équation aurait des racines imaginaires, la différence entre deux racines imaginaires conjuguées, serait de la forme $\beta\sqrt{-1}$, (nos 513 et 509); y aurait donc une valeur réelle négative $-\beta^2$; ce qui est impossible. Par exemple, quand les racines de l'équation (4)...$x^3+\alpha x+\beta=0$, sont réelles, l'équation (3) du no 506, ne peut renfermer que des variations de signes; les coefficiens, $6\alpha, 4\alpha^3+27\beta^2$, sont donc négatifs; et réciproquement, lorsque ces coefficiens sont négatifs, les trois racines de l'équation (4) sont réelles. Ce qui s'accorde avec la règle du no 521.

ERRATA pour Bezout.

Page 20, ligne 12, au lièu de $-13a^3b$, *lisez* $+13a^3b$.
21, 2, au lieu de $-5ab^2+2ab^3c$, *lisez* $-5ab^3+2ab^2c$.
24, 1, au lieu de $2a+bc$, *lisez* $2a+b$.
67, 1, au lieu de $7z$, *lisez* $7y$.
75, 10, en remontant; *lisez* monteront à.
79, 12, *mettez* un 3 à la place du 5.
114, 1, en remontant; au lieu de $\frac{(m-2)}{3}$, *lisez* $\frac{(m-2)}{3}\frac{a^3}{x^3}$.
120, 9, en remontant; au lieu de $\sqrt{+b}$, *lisez* $\sqrt{a+b}$.
121, 4, au lieu de b^z, *lisez* b^2.

ERRATA relatif aux Notes.

Page 13, ligne 8 du n° 36, au lieu de multiplicande, *lisez* multiplicateur.
21, 3, en remontant; au lieu de diviseur, *lisez* quotient.
26, 10, 11, 12, du n° 62, *changez* d en δ.
29, 10 et 11, *mettez* $=$ devant la *barre* qui sépare les deux termes de chaque fraction.
Ibid. 12, au lieu de $\left(\frac{b}{a}\right)$, *lisez* $\left(\frac{b}{a}\right)$.
49, 3, du n° 118, au lieu de changent, *lisez* changeant.
53, 2, en remontant; au lieu de obtiendr, *lisez* obtiendra.
59, 10, en remontant; *lisez* $=\frac{x}{z}$ au lieu de $=^x$.
72, 12, au lieu de $100(\alpha+1)$, *lisez* $100(\alpha+1)^2$.
74, 14, au lieu de 91, *lisez* 9.
80, 14, en remontant; *mettez* $12x^3$ au lieu de $12x^5$.
81, 1, au lieu de $2\alpha_{,}+\alpha_{,,})\alpha_{,,}$, *lisez* $(2\alpha_{,}+\alpha_{,,})\alpha_{,,}$.
Ibid. 4, *lisez sera*, au lieu de *soit*.
91, 4, en remontant; au lieu de $\sqrt[qm]{a^p b^r}$, *lisez* $\sqrt[q]{a^p b^r}$.
100, 4, en remontant; au lieu de $R,-$, *lisez* $R,=$.
130, 17, au lieu de premier terme, *lisez* dernier terme.
144, 4 du n° 366, au lieu de moindre, *lisez* plus grande.
159, 6 du n° 398, au lieu de à une, *lisez* une.
160, 12, *mettez* $p+r+1$, au lieu de $p-r+1$.
163, 3, *lisez* $\sqrt[qd]{1}$, au lieu $\sqrt[qd]{\ }$.
166, 10, au lieu de $p-p^2$, *lisez* $q-p^2$.
167, 1 du n° 421, *mettez* écrite, au lieu de écrites.
207, 4, en remontant, au lieu de nale, *lisez* finale.

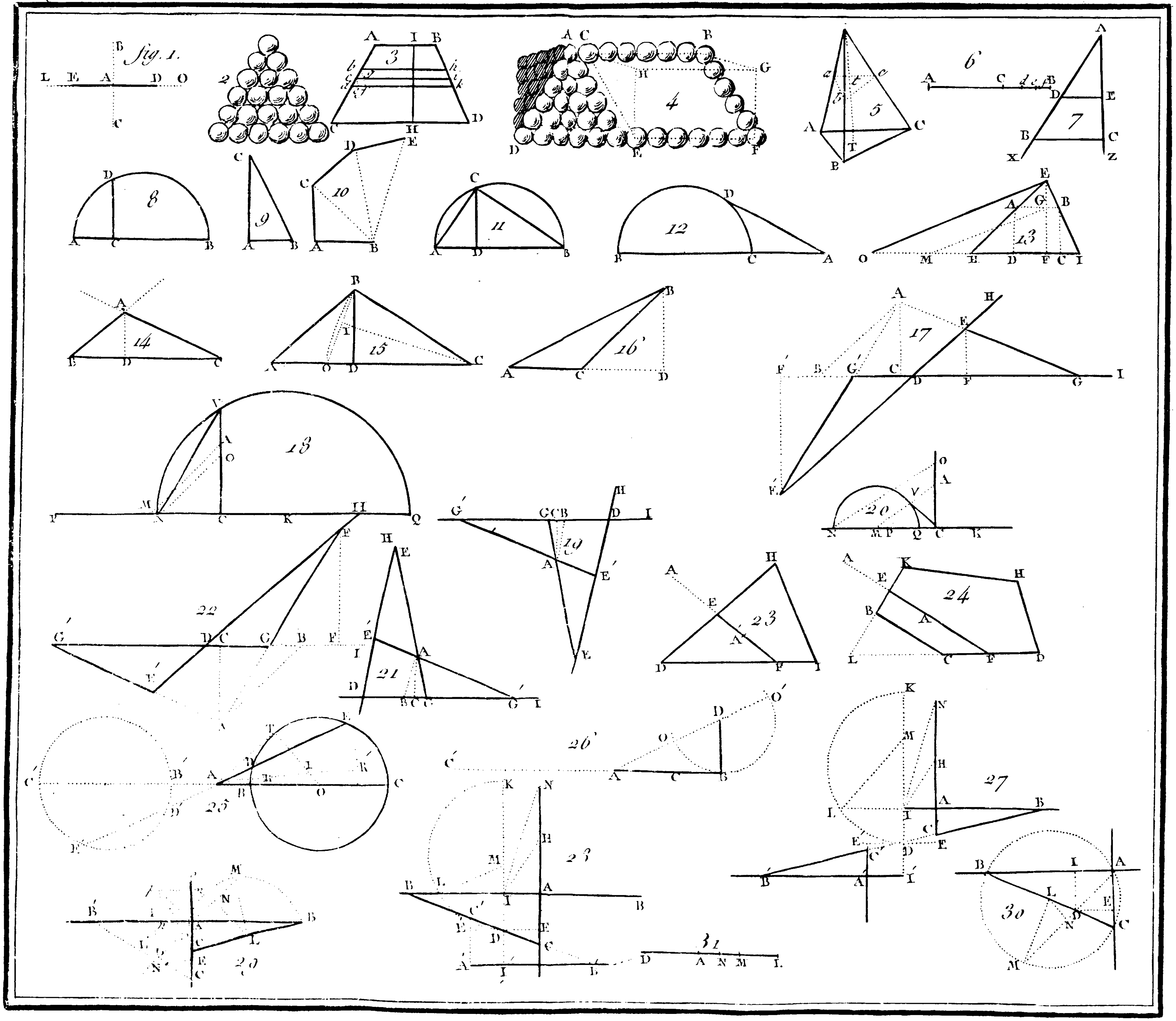
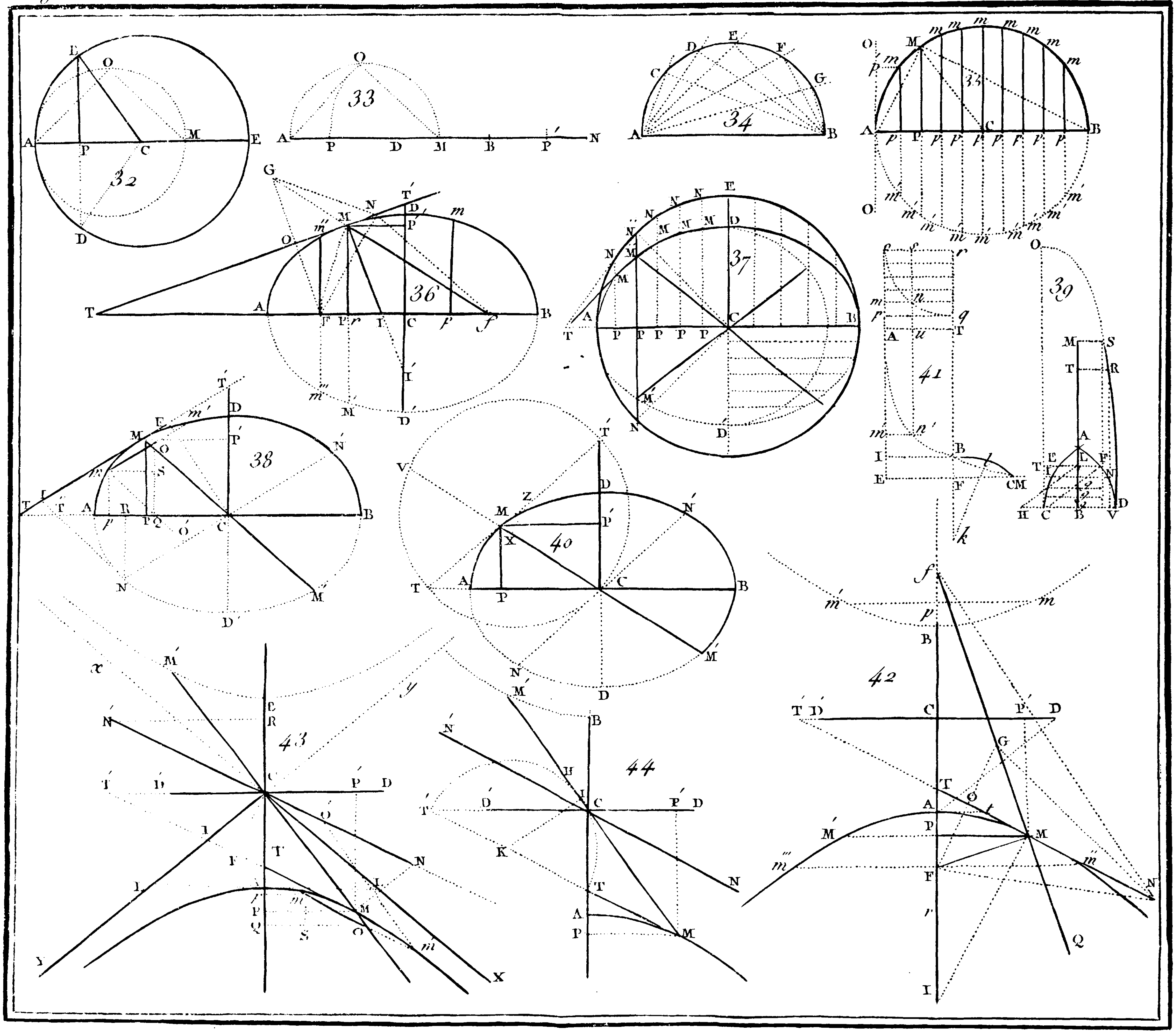
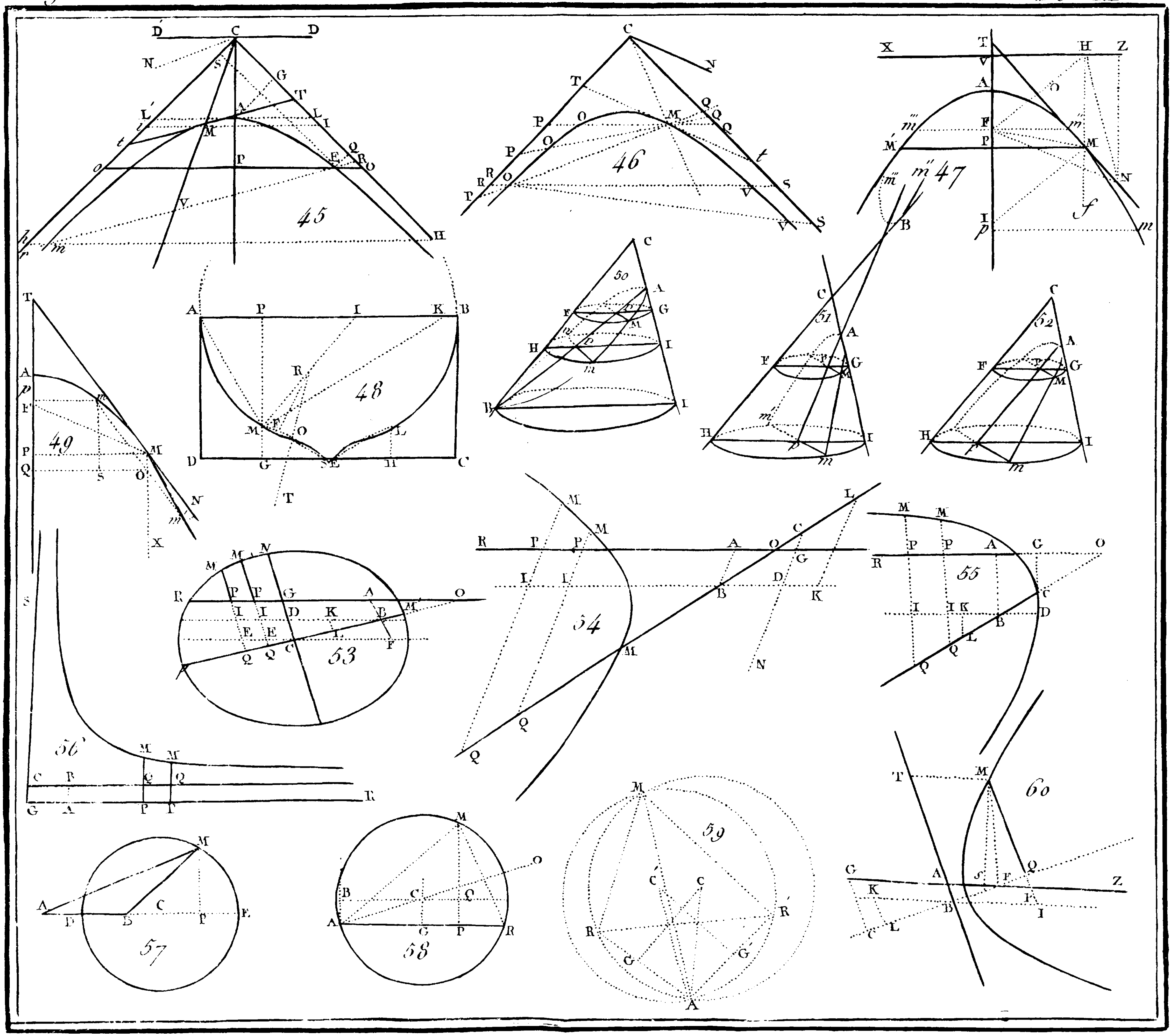
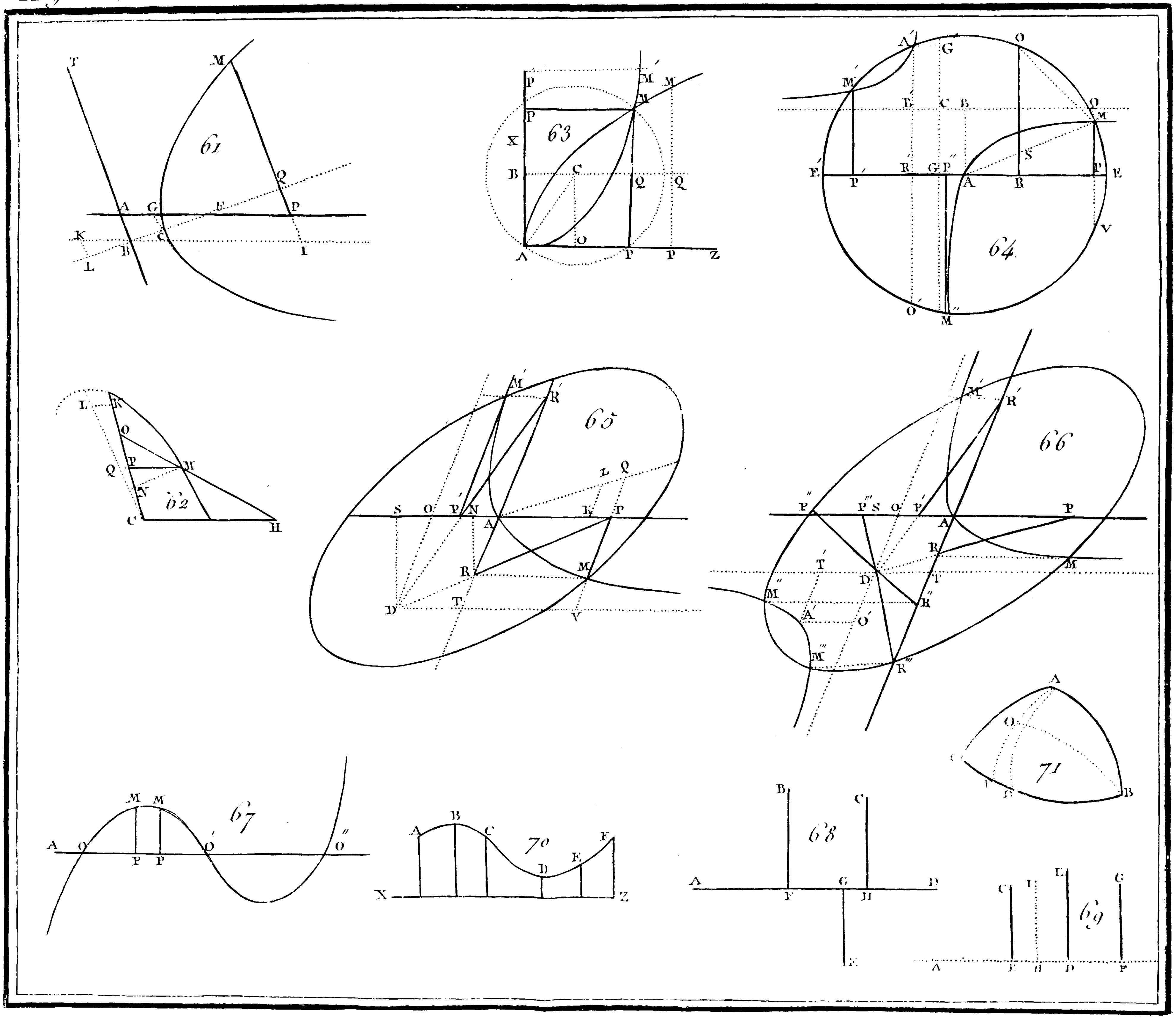


fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31


32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44


45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60


61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71